

# 1 Exposé du problème

Ce texte est une démonstration de l'outil `mp11`, ou *Metaperlua $\text{\LaTeX}$* . C'est un document écrit en  $\text{\LaTeX}$ , utilisant des fonctions Perl, des schémas MetaPost et (un peu) des fonctions Lua.

Le présent document n'est pas pour autant un document artificiel dont l'unique but est de démontrer l'utilisation de *Metaperlua $\text{\LaTeX}$* . C'est aussi une explication d'un phénomène que l'on peut observer au mois de décembre. Pendant l'automne, le soleil se lève de plus en plus tard et se couche de plus en plus tôt. Cela n'étonne personne. De même, au printemps, le soleil se lève de plus en plus tôt et se couche de plus en plus tard. Aucun paradoxe là non plus. Mais du 12 décembre au 2 janvier, le soleil se lève de plus en plus tard et se couche également de plus en plus tard. En d'autres termes, le jour commence à gagner sur la nuit le soir, tandis que la nuit continue à gagner sur le jour le matin, comme on peut le voir dans le tableau suivant :

| Jour       | lever    | coucher  | var.matin | var.soir |
|------------|----------|----------|-----------|----------|
| 2011-12-05 | 07:27:22 | 16:12:28 | 512       | -196     |
| 2011-12-12 | 07:34:33 | 16:11:29 | 431       | -59      |
| 2011-12-19 | 07:40:01 | 16:12:49 | 328       | 80       |
| 2011-12-26 | 07:43:27 | 16:16:26 | 206       | 217      |
| 2012-01-02 | 07:44:40 | 16:22:06 | 73        | 340      |
| 2012-01-09 | 07:43:34 | 16:29:33 | -66       | 447      |
| 2012-01-16 | 07:40:14 | 16:38:24 | -200      | 531      |
| 2012-01-23 | 07:34:49 | 16:48:14 | -325      | 590      |
| 2012-01-30 | 07:27:29 | 16:58:43 | -440      | 629      |

Cela dit, le texte n'est pas un exposé rigoureux de mécanique céleste, une description quantitative précise détaillant le mouvement de la Terre autour du soleil. C'est plutôt une mise au courant, une présentation qualitative permettant de mieux comprendre les aspects plutôt ignorés du mouvement de la Terre.

Pour un traitement plus rigoureux mais encore abordable, voir "Histoire de l'Heure en France", de Jacques Gapaillard, éditions Vuibert – ADAPT.

## 2 Midi solaire et variation du lever et du coucher du soleil

### 2.1 Les diverses notions de midis

Si l'on explique à une personne du XXI<sup>e</sup> siècle qu'il existe deux notions de "midi" : le midi solaire, instant où le soleil est au plus haut dans le ciel et où il passe au méridien et le midi moyen (ou plus précisément mais plus long, le "midi du temps moyen"), que l'on peut repérer avec une montre ou une horloge, si l'on explique que l'écart entre ces deux midis est variable, cette personne du XXI<sup>e</sup> siècle répondra : « Bien sûr, le midi moyen retarde d'une heure sur le midi solaire en hiver et de deux heures en été. » Éventuellement, si la personne réfléchit un peu plus, elle précisera que l'écart varie en fonction du lieu considéré. « À Strasbourg, le midi solaire retarde d'une heure et 31 minutes sur le midi moyen en hiver et de deux heures et 31 minutes en été, tandis qu'à Brest, le midi solaire retarde de 42 minutes sur le midi moyen en hiver et d'une heure et 42 minutes en été. »

Cette personne associe la notion d'heure légale à l'expression "midi moyen" et la notion de midi du temps moyen à l'expression "midi solaire". Si l'on tente de lui expliquer que, dans le cas de Strasbourg pendant l'hiver, l'écart entre le midi solaire et le midi de l'heure légale varie de 1 heure et 16 minutes à 1 heure et 46 minutes, alors la personne ne comprendra plus.

À l'inverse, si l'on explique à une personne du XVIII<sup>e</sup> siècle que le midi solaire oscille de part et d'autre du midi moyen et que l'écart peut atteindre un quart d'heure, suivant une fonction appelée "équation du temps", il y a plus de chances que cette personne acquiesce, pour peu que cette personne soit en contact avec des horloges et des cadrans solaires. Cette personne ne comprendrait pas la notion d'heure légale, qui n'existait pas à cette époque, mais elle aurait compris l'irrégularité du passage du soleil au méridien. Il était assez bien connu à cette époque que l'intervalle entre deux midis solaires successifs n'était pas régulier. Cela dit, comme l'expose J. Gapaillard dans son livre, même à cette époque il existait des gens pour lesquels le mouvement apparent du soleil autour de la Terre était régulier à la seconde près.

Dans la première partie, on admet que le midi solaire varie par rapport au midi moyen et le document montre que cela permet d'expliquer le phénomène de la variation du lever et du coucher du soleil au mois de décembre. Dans la seconde partie, le document expliquera pour quelles raisons le midi solaire varie par rapport au midi moyen.

### 2.2 Exemple concret

Voici par exemple, les heures de lever et de coucher du soleil, ainsi que le midi solaire, à Saumur en mars 2011. J'ai choisi Saumur car la longitude est de 0 degré et 4 minutes, donc le temps UTC correspond quasiment au temps moyen local. Le tableau présente l'heure du lever du soleil, le midi solaire, l'heure du coucher du soleil et les variations en secondes de ces trois instants, ainsi que la variation de la longueur du jour.

| Jour       | lever    | midi     | coucher  | var.matin | var.soir | var.long | var.midi |
|------------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|
| 2011-03-16 | 06:11:06 | 12:09:01 | 18:06:57 | -119      | 86       | 205      | -16      |
| 2011-03-17 | 06:09:07 | 12:08:45 | 18:08:23 | -119      | 86       | 205      | -16      |
| 2011-03-18 | 06:07:07 | 12:08:27 | 18:09:48 | -120      | 85       | 205      | -17      |
| 2011-03-19 | 06:05:07 | 12:08:10 | 18:11:14 | -120      | 86       | 206      | -17      |
| 2011-03-20 | 06:03:07 | 12:07:53 | 18:12:39 | -120      | 85       | 205      | -17      |
| 2011-03-21 | 06:01:07 | 12:07:35 | 18:14:04 | -120      | 85       | 205      | -17      |
| 2011-03-22 | 05:59:07 | 12:07:18 | 18:15:29 | -120      | 85       | 205      | -17      |
| 2011-03-23 | 05:57:07 | 12:07:00 | 18:16:53 | -120      | 84       | 204      | -18      |
| 2011-03-24 | 05:55:06 | 12:06:42 | 18:18:18 | -121      | 85       | 206      | -18      |
| 2011-03-25 | 05:53:06 | 12:06:24 | 18:19:43 | -120      | 85       | 205      | -17      |
| 2011-03-26 | 05:51:06 | 12:06:06 | 18:21:07 | -120      | 84       | 204      | -18      |
| 2011-03-27 | 05:49:05 | 12:05:48 | 18:22:31 | -121      | 84       | 205      | -18      |
| 2011-03-28 | 05:47:05 | 12:05:30 | 18:23:55 | -120      | 84       | 204      | -18      |
| 2011-03-29 | 05:45:05 | 12:05:12 | 18:25:20 | -120      | 85       | 205      | -17      |
| 2011-03-30 | 05:43:05 | 12:04:54 | 18:26:44 | -120      | 84       | 204      | -18      |

Prenons le 21 mars. Ce jour-là, la longueur du jour augmente de 205 s, soit un peu plus de 3 mn. Également, le midi solaire recule de 12:07:53 à 12:07:35, soit 17 ou 18 secondes, compte tenu des erreurs d'arrondi. L'augmentation de la longueur du jour se répercute pour moitié sur la progression du lever du soleil (qui avance puisqu'on est au printemps) et sur la progression du coucher du soleil (qui retarde). À l'inverse, la variation du midi solaire se répercute à l'identique, en durée et en sens, sur le lever du soleil et sur le coucher du soleil. Donc, puisque le midi solaire avance de 17 s et puisque le jour augmente de 205 s, le lever du soleil progresse de :

$$-17 - \frac{205}{2} = -120s$$

c'est-à-dire qu'il avance de 120 secondes, passant de 06:03:07 à 06:01:07, tandis que le coucher du soleil progresse de :

$$-17 + \frac{205}{2} = 85s$$

c'est-à-dire qu'il retarde de 85 secondes, passant de 18:12:39 à 18:14:04. Il y a donc une différence, mais qui passe inaperçue, car la moitié de la variation du jour dépasse largement la variation du midi solaire.

Maintenant, prenons le 24 décembre.

| Jour       | lever    | midi     | coucher  | var.matin | var.soir | var.long | var.midi |
|------------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|
| 2011-12-16 | 07:37:54 | 11:54:56 | 16:11:58 | 47        | 12       | -35      | 29       |
| 2011-12-17 | 07:38:39 | 11:55:25 | 16:12:12 | 45        | 14       | -31      | 29       |
| 2011-12-18 | 07:39:21 | 11:55:55 | 16:12:29 | 42        | 17       | -25      | 29       |
| 2011-12-19 | 07:40:01 | 11:56:25 | 16:12:49 | 40        | 20       | -20      | 30       |
| 2011-12-20 | 07:40:38 | 11:56:55 | 16:13:12 | 37        | 23       | -14      | 30       |
| 2011-12-21 | 07:41:13 | 11:57:25 | 16:13:38 | 35        | 26       | -9       | 30       |
| 2011-12-22 | 07:41:45 | 11:57:55 | 16:14:06 | 32        | 28       | -4       | 30       |
| 2011-12-23 | 07:42:14 | 11:58:25 | 16:14:37 | 29        | 31       | 2        | 30       |
| 2011-12-24 | 07:42:41 | 11:58:55 | 16:15:10 | 27        | 33       | 6        | 30       |
| 2011-12-25 | 07:43:05 | 11:59:26 | 16:15:47 | 24        | 37       | 13       | 30       |
| 2011-12-26 | 07:43:27 | 11:59:56 | 16:16:26 | 22        | 39       | 17       | 30       |
| 2011-12-27 | 07:43:46 | 12:00:26 | 16:17:07 | 19        | 41       | 22       | 30       |
| 2011-12-28 | 07:44:02 | 12:00:56 | 16:17:51 | 16        | 44       | 28       | 30       |
| 2011-12-29 | 07:44:15 | 12:01:26 | 16:18:37 | 13        | 46       | 33       | 29       |
| 2011-12-30 | 07:44:25 | 12:01:55 | 16:19:26 | 10        | 49       | 39       | 29       |

La durée du jour augmente de 6 secondes, tandis que le midi solaire retarde de 30 secondes, passant de 11:58:25 à 11:58:55. Le lever du soleil progresse donc de :

$$+30 - \frac{6}{2} = +27s$$

c'est-à-dire qu'il retarde de 27 secondes, passant de 07:42:17 à 07:42:41, tandis que le coucher du soleil progresse de :

$$+30 + \frac{6}{2} = +33s$$

c'est-à-dire que le coucher du soleil retarde de 33 secondes, passant de 16:14:37 à 16:15:10. Dans ce cas, la progression du midi solaire est nettement prédominante par rapport à la moitié de la variation de la durée du jour, donc le lever du soleil et le coucher du soleil varient dans la même direction.

### 2.3 Mea Culpa

Dans le paragraphe précédent, j'ai commis une erreur de raisonnement. J'ai assimilé le midi solaire au milieu de la journée, c'est-à-dire l'instant à mi-chemin entre le lever et le coucher du soleil. C'est approximatif. Reprenons le tableau du mois de mars :

| Jour       | lever    | midi     | coucher  | var.matin | var.soir | var.long | var.midi |
|------------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|
| 2011-03-20 | 06:03:07 | 12:07:53 | 18:12:39 | -120      | 85       | 205      | -17      |
| 2011-03-21 | 06:01:07 | 12:07:35 | 18:14:04 | -120      | 85       | 205      | -17      |
| 2011-03-22 | 05:59:07 | 12:07:18 | 18:15:29 | -120      | 85       | 205      | -17      |

Le 20 mars, le jour dure 12 h 9 mn et 32 s, soit 43 772 s. Le 21 mars, il dure 12 h 12 mn et 57 s, soit 43 997 s et le 22 mars, il dure 12 h 16 mn et 22 s, soit 44 182 s. Cela ne veut pas dire que le 20 mars à 23 h 59, la durée du jour est de 43 772 s et que le 21 mars à 0 h 01, elle est brusquement passée à 43 997 s. La durée varie de façon continue et puisqu'elle varie de 205 s en 24 h, elle varie de 51 s en 6 h. Cela donne :

|               |        |                 |
|---------------|--------|-----------------|
| 20 mars, midi | 43 772 | 12 h 9 mn 32 s  |
| 20 mars, 18 h | 43 823 | 12 h 10 mn 23 s |
| 21 mars, 6 h  | 43 946 | 12 h 12 mn 6 s  |
| 21 mars, midi | 43 997 | 12 h 12 mn 57 s |
| 21 mars, 18 h | 44 048 | 12 h 13 mn 48 s |
| 22 mars, 6 h  | 44 131 | 12 h 15 mn 31 s |
| 22 mars, midi | 44 182 | 12 h 16 mn 22 s |

Donc, le 21 mars, le lever du soleil se produit 6 h 6 mn et 3 s avant le midi solaire et le coucher du soleil se produit 6 h 6 mn 54 s après le midi solaire. On en déduit que le midi solaire a lieu à 12 h 7 mn et 10 s et non pas à 12 h 7 mn 35 s comme dans le tableau ci-dessus.

L'écart entre le midi solaire et le milieu de la journée est proportionnel à la fois à la variation de la durée du jour (maximale au moment des équinoxes) et à la durée du jour (maximale au solstice d'été). L'écart maximal se produit aux alentours du 22 avril, lorsque la variation de la durée du jour est encore voisine de la durée maximale et que la durée du jour a eu le temps d'augmenter suffisamment.

| Jour       | lever    | midi     | coucher  | var.matin | var.soir | var.long | var.midi |
|------------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|
| 2011-04-21 | 05:00:44 | 11:59:06 | 18:57:28 | -108      | 83       | 191      | -12      |
| 2011-04-22 | 04:58:55 | 11:58:53 | 18:58:52 | -109      | 84       | 193      | -12      |
| 2011-04-23 | 04:57:08 | 11:58:41 | 19:00:15 | -107      | 83       | 190      | -12      |

À cette date à midi, la durée du jour est de 50 397 secondes (soit 14 heures à trois secondes près) et la variation de cette durée est de 193 secondes, à peine moins que les 205 secondes de l'équinoxe de printemps. Donc, au lever du soleil, la durée est réduite de  $\frac{193 \times 7}{24} = 56$  secondes et au coucher du soleil, elle est augmentée d'autant. La durée du matin est  $25\,199 - 28 = 25\,171$  secondes et la durée du soir est  $25\,199 + 28 = 25\,227$  secondes. Le midi solaire a donc lieu à 11 h 58 mn 38 s alors que le milieu de la journée a lieu à 11 h 59 mn 6 s.

Cette erreur de calcul invalide-t-elle le raisonnement du sous-chapitre précédent ? Non. Comme on peut le voir dans l'exemple ci-dessus, cette erreur provoque un écart de 28 secondes au maximum entre le midi solaire et le milieu de la journée. Cela reste encore largement inférieur aux écarts affichés entre le midi moyen et le midi solaire, écarts pouvant dépasser 15 minutes.

D'autre part, l'erreur de calcul sur la position du midi solaire est quasiment nulle au moment du solstice d'hiver, car la variation de la durée du jour est elle-même nulle. Donc, dans le tableau pour la fin décembre et le début de janvier, la valeur indiquée pour le midi solaire est quasiment exacte.

## 3 Variation du midi solaire

Le problème est donc maintenant de comprendre pourquoi le midi solaire varie d'un jour à l'autre, parfois de 30 secondes.

### 3.1 Situation de départ

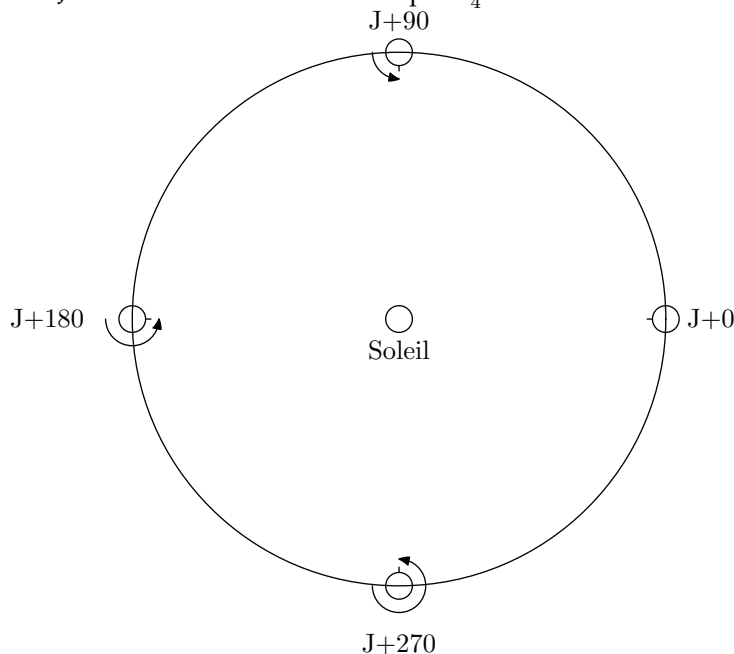
Pour les mouvements de la Terre sur elle-même et autour du soleil, adoptons les simplifications suivantes :

1. La durée de l'année est de 360 jours exactement et non pas 365,25 et des poussières.

2. L'orbite de la Terre autour du soleil est un cercle parfait.
3. Le plan de l'orbite terrestre coïncide avec le plan de l'équateur. En d'autres termes, l'axe de la rotation de la Terre sur elle-même est parallèle à l'axe du mouvement orbital de la Terre autour du soleil.
4. On ne tient pas compte des mouvements à très longue échelle, comme la variation de l'inclinaison du plan de l'équateur avec le plan de l'orbite terrestre ou la précession des équinoxes.
5. On ne tient pas compte de l'influence des autres corps célestes : la Lune, Jupiter etc. Avec sa masse  $1.988 \times 10^{30}$  kg, le soleil exerce sur la Terre une force de  $4.356 \times 10^{42}$  N tandis que l'attraction de la Lune n'est que de  $1.989 \times 10^{20}$  N et celle de Jupiter de  $1.248 \times 10^{18}$  N. Donc on peut négliger l'influence des autres corps célestes et ne prendre en considération que l'attraction du soleil.

La première et les deux dernières hypothèses servent à simplifier les calculs et resteront en vigueur pour toute la durée de la discussion. La deuxième et la troisième simplifications seront supprimées en temps utile pour montrer les causes de la variabilité du midi solaire par rapport au midi moyen.

Avec les cinq simplifications en vigueur, la Terre tourne autour du soleil en 360 jours à vitesse constante, donc elle parcourt un arc d'un degré par jour. En adoptant temporairement un repère géocentrique pointant vers les étoiles "fixes", cela crée donc un déplacement relatif du soleil par rapport à ces étoiles "fixes". Pour compenser cet arc d'un degré et pour que le soleil se retrouve au méridien, la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles est de 361 degrés en 24 heures. Donc, à J+90, elle a effectué 90 tours et  $\frac{1}{4}$ , à J+180 elle a effectué 180 tours plus  $\frac{1}{2}$  et à J+270 elle a effectué 270 tours plus  $\frac{3}{4}$ . Voir le schéma ci-dessous, qui revient à un repère héliocentrique.



Donc, lorsque la Terre effectue un mouvement circulaire et que le plan de l'équateur coïncide avec le plan de l'orbite, le midi solaire coïncide avec le midi moyen.

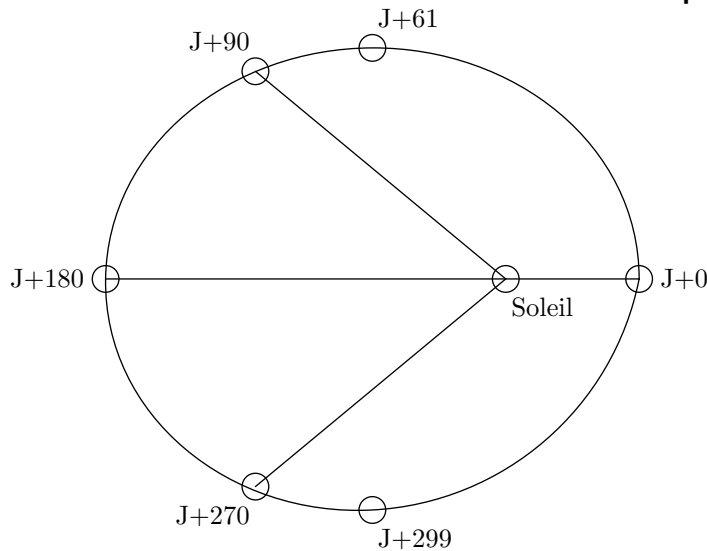
### 3.2 Lois de Kepler

La première loi de Kepler indique que l'orbite de la Terre est une ellipse dont un foyer correspond au centre d'inertie du système solaire, c'est-à-dire en pratique, au soleil.

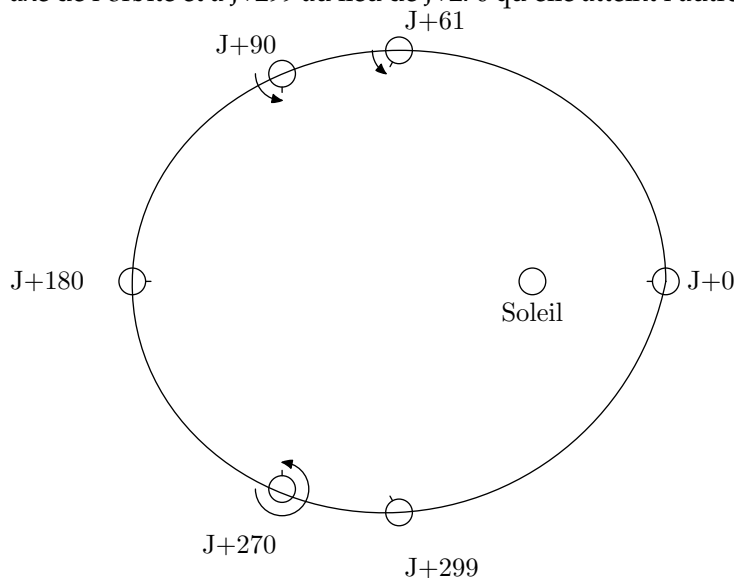
La deuxième loi de Kepler indique que la vitesse de la Terre sur son orbite varie de manière que la vitesse surfacique du vecteur soleil-Terre soit constante. Ou avec un peu plus de style, "le rayon-vecteur balaie des surfaces égales dans des temps égaux".

Et la troisième loi de Kepler n'apporte rien à la présente discussion.

Voyons ce que cela donne, avec une ellipse de forte excentricité (0,5) :

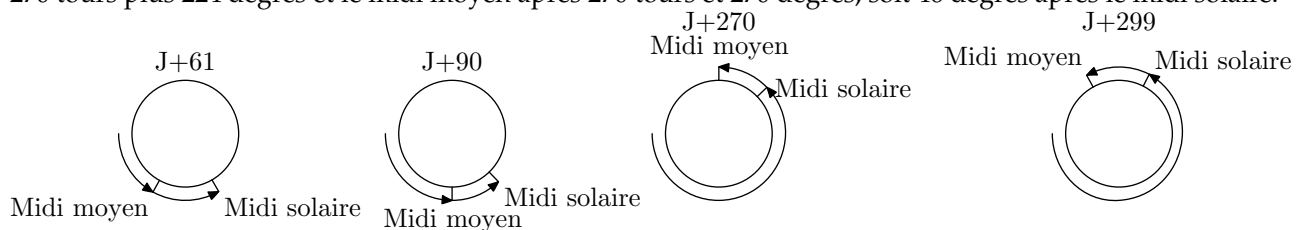


Comme le soleil se place à l'un des foyers de l'ellipse, à droite sur le schéma, il faut déplacer les points J+90 et J+270 vers la gauche pour que les surfaces (soleil, J+0, J+90), (soleil, J+90, J+180), (soleil, J+180, J+270) et (soleil, J+270, J+0) soient égales en superficie. Et c'est donc à J+61 et non pas J+90 que la Terre atteint l'extrémité du petit axe de l'orbite et à J+299 au lieu de J+270 qu'elle atteint l'autre extrémité du petit axe.



Le jour J+61 à midi moyen, la Terre a effectué 61 tours plus 61 degrés, mais elle ne pointe pas vers le soleil. Il reste encore à effectuer une rotation de 59 degrés pour pointer vers le soleil et arriver au midi solaire. De même, le jour J+90 à midi moyen, la Terre a effectué 90 tours plus 90 degrés et il reste à effectuer une rotation de 46 degrés pour arriver au midi solaire.

À l'inverse, au jour J+270, le midi solaire survient avant le midi moyen. Le midi solaire se produit après 270 tours plus 224 degrés et le midi moyen après 270 tours et 270 degrés, soit 46 degrés après le midi solaire.



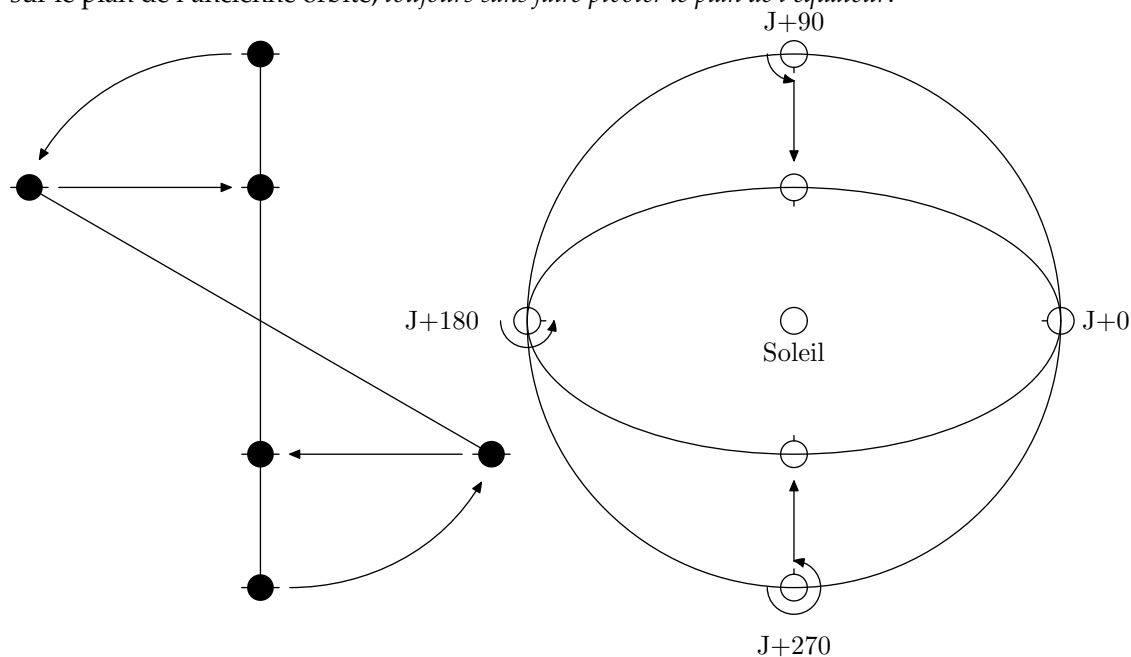
Dans ces exemples, les écarts de 46 ou 59 degrés correspondent à un écart de temps de 3 ou 4 heures. C'est largement supérieur aux écarts observés par la Terre réelle. Mais également, l'orbite de la Terre a une excentricité de 0,02, alors que la discussion ci-dessus repose sur une excentricité de 0,5.

### 3.3 Influence de l'inclinaison de l'orbite

On remet en vigueur la deuxième simplification et on enlève la troisième. La discussion est alors un peu plus difficile à suivre, car cela impose un raisonnement en dimension 3, peu commode à représenter sur une feuille de papier en dimension 2.

On part de la situation où les quatre simplifications sont en vigueur, puis on fait pivoter le plan de l'orbite terrestre sans faire pivoter le plan de l'équateur ou l'axe des pôles, puis on projette orthogonalement la nouvelle orbite

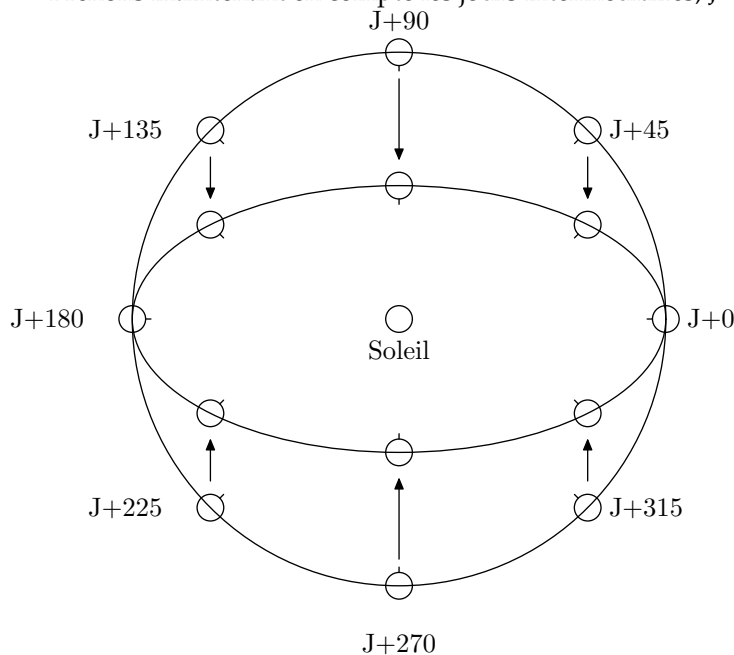
sur le plan de l'ancienne orbite, toujours sans faire pivoter le plan de l'équateur.



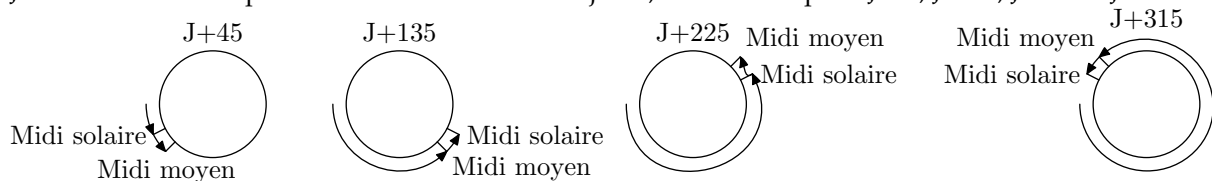
Cela se traduit au final par un rétrécissement du cercle sur un axe, ce qui donne une ellipse. Tout ceci, sans changer la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même, puisque l'axe des pôles est resté constamment parallèle à lui-même.

Compte tenu de l'inclinaison exagérée de 60 degrés, le cercle est rétréci de moitié. Pour l'inclinaison réelle de 23 degrés, le rétrécissement du cercle aurait été de 8 %.

Prenons maintenant en compte les jours intermédiaires, J+45, J+135, J+225 et J+315.



Avec cette transformation, on constate que le midi moyen et le midi solaire coïncident pour J+90, J+180 et J+270. Mais ce n'est pas le cas entre ces différents jours, notamment pour J+45, J+135, J+225 et J+315.



On voit que le midi solaire précède le midi moyen de J+0 à J+90 puis de nouveau de J+180 à J+270, tandis que le midi moyen précède le midi solaire de J+90 à J+180 et de nouveau de J+270 à J+360. Au lieu d'une variation périodique de période égale à une année, on a maintenant une variation périodique de période égale à la moitié d'une année.

### 3.4 Au final

Avec les valeurs prises, excentricité à 0,5 et inclinaison à 60 degrés, la prise en compte simultanée des deux phénomènes est compliquée. En revanche, avec les valeurs réelles de la Terre, excentricité à moins de 0,02 et inclinaison à 23 degrés, on peut assimiler les courbes de variation à des sinusoïdales de faible amplitude et les additionner. Attention, les jours J+0 pour les deux phénomènes ne coïncident pas. Pour l'excentricité de l'orbite, J+0 correspond au passage de la Terre au périhélie, soit le 3 janvier. Pour l'inclinaison de l'orbite, J+0 correspond à l'un des équinoxes, le 21 mars ou le 21 septembre environ.

La courbe de variation est donnée dans "Histoire de l'Heure en France", de Jacques Gapaillard, éditions Vuibert – ADAPT. L'équation du temps (écart entre le midi solaire et le midi moyen) varie entre un retard de 14 mn 15 s du midi solaire par rapport au midi moyen et une avance de 16 mn et 30 s du midi solaire par rapport au midi moyen.

## 4 Annexe

Ce texte est diffusé sous la licence *Creative Commons*, Paternité, pas d'utilisation commerciale 3.0 France. Les programmes associés sont diffusés sous license double GPL + *Artistic*. Copyright (c) 2012, Jean Forget.