



## CH3 布林代數及第摩根定理

### 隨堂練習解答

#### 3-1 布林代數的特質

P47

1. 布林代數與傳統代數有何不同？

在布林代數中，不論常數或變數而言，並非代表數量大小的值，而是代表兩種不同的狀態或性質；只要定義其中一種狀態為“1”，則另一種相反的狀態即為“0”。

2. 布林常數只有兩個，即 0 與 1(或 H 與 L)，而布林變數則常以 英文字母(A、B、C、…、X、Y、Z) 表示。

#### 3-2 布林代數的基本運算

P48

1. 布林代數的基本運算共有 AND(及)運算、OR(或)運算、NOT(反、補數)運算 三種。

2. (1)  $1 \cdot 0 =$  0 (2)  $1 \cdot 1 =$  1

(3)  $0 + 1 =$  1 (4)  $1 + 1 =$  1

(5)  $\bar{0} + 1 =$  1 (6)  $\bar{1} \cdot 0 =$  0

#### 3-3 布林代數的基本定理

P54

1. (1)  $\bar{A} \cdot A =$  0

(2)  $A \cdot 1 =$  A

(3)  $\bar{A} + A =$  1

(4)  $0 + A =$  A

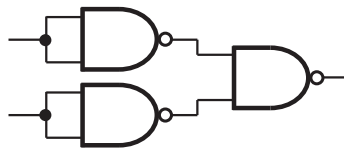
2. (1)  $AB + A = \underline{A}$
- (2)  $B(A + B) = \underline{B}$
- (3)  $\overline{\overline{A}} = \underline{A}$
- (4)  $A + 1 = \underline{1}$

### 3-4 第摩根定理

#### P59

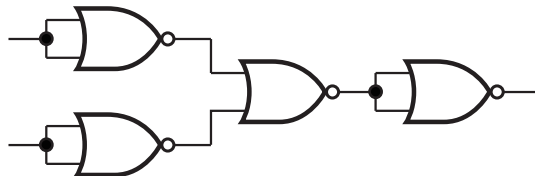
1. 試以布林式表示第摩根第一定理  $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$   
(設兩輸入端分別為  $A$ 、 $B$ )。
2. 試以布林式表示第摩根第二定理  $\overline{X \cdot Y \cdot Z} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$   
(設輸入端分別為  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ )。
3. 試繪出由兩輸入的 NAND 閘組成兩輸入的 OR 閘。

解



4. 試繪出由兩輸入的 NOR 閘組成兩輸入的 NAND 閘。

解

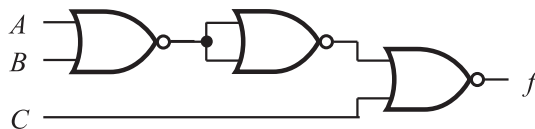


### 3-5 邏輯閘互換

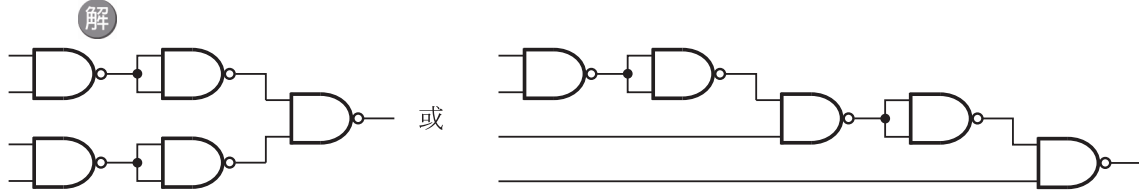
#### P63

1. 試繪出以最少的兩輸入反或閘，組合實現一個三輸入反或閘。

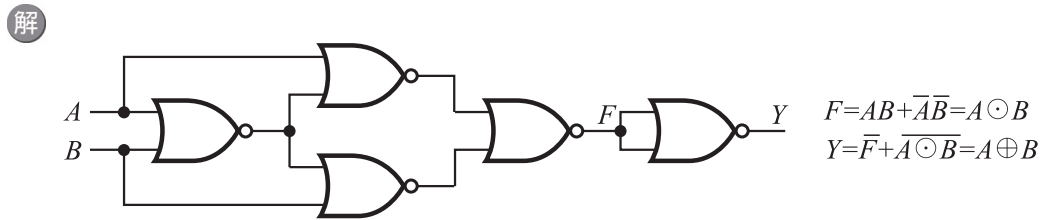
解



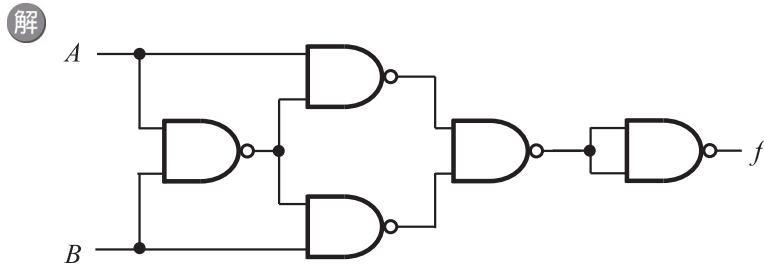
2. 試繪出以最少的兩輸入反及閘，組合實現一個四輸入反及閘。



3. 試繪出以最少的兩輸入反或閘，組合實現一個兩輸入互斥或閘。



4. 試繪出以最少的兩輸入反及閘，組合實現一個兩輸入反互斥或閘。



## 自我評量解答

課本 P64

## 一、選擇題

3-3 ( C ) 1. 下列布林式中，何者錯誤？

(A)  $A + A = A$

(B)  $A + AB = A$

(C)  $A \cdot \bar{A} = 1$

(D)  $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ 。

**解** (A)  $A + A = A$ 。(B)  $A + AB = A(1 + B) = A$  (因為  $1 + B = 1$ )。

(C)  $A \cdot \bar{A} = 0$

因為，若  $A$  為 0，則  $A \cdot \bar{A} = 0 \cdot \bar{0} = 0 \cdot 1 = 0$ 反之，若  $A$  為 1，則  $A \cdot \bar{A} = 1 \cdot \bar{1} = 1 \cdot 0 = 0$ 。

(D)  $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

$$(A + B) \cdot (A + C) = A \cdot A + A \cdot C + A \cdot B + B \cdot C$$

$$= A + AC + AB + BC$$

$$= A(1 + C + B) + BC \text{ (因為 } 1 + C + B = 1) = A + BC$$

本項為布林代數的分配律。

( B ) 2. 布林代數式  $(A \cdot \bar{A})$ ， $(A + \bar{A})$ ， $(A + 1)$ ， $A + 0$  的結果分別為？

(A)  $(A, 1, \bar{A}, 0)$  (B)  $(0, 1, 1, A)$  (C)  $(1, 0, 1, 0)$  (D)  $(A, \bar{A}, 1, 0)$ 。

**解** (1)  $A \cdot \bar{A} = 0$ ，可參題 1 之解析(C)。

(2)  $A + \bar{A} = 1$ ，因為，若  $A$  為 0，則  $A + \bar{A} = 0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1$

反之，若  $A$  為 1，則  $A + \bar{A} = 1 + \bar{1} = 1$ 。

(3)  $A + 1 = 1$ ，在布林代數中，1 加任何數，均為 1。

(4)  $A + 0 = A$ ，因為，若  $A$  為 0，則  $A + 0 = 0 + 0 = 0 = A$

反之，若  $A$  為 1，則  $A + 0 = 1 + 0 = 1 = A$ 。( D ) 3. 下列布林式中，何者不正確？

(A)  $A + \bar{A}B = A + B$  (B)  $ABC = CBA$  (C)  $A + \bar{A} = 1$  (D)  $\bar{A}A = 1$ 。

- 解 (A)  $A + \overline{AB} = A + AB + \overline{AB}$  (因為  $A + AB = 1$ )  
 $= A + B(A + \overline{A})$  (因為  $A + \overline{A} = 1$ )  $= A + B$   
 (B)  $ABC = CBA$ ，此為布林代數之交換律  
 (C)  $A + \overline{A} = 1$ ，可參考題 2 之解析(2)  
 (D)  $A \cdot \overline{A} = 0$ ，可參考題 1 之解析(C)。

( C ) 4. 有關布林式，下列何者錯誤？

- (A)  $A + \overline{A} = 1$  (B)  $B \cdot \overline{B} = 0$  (C)  $A \cdot \overline{A} + B = A$  (D)  $A(\overline{A} + B) = AB$ 。

- 解 (A)  $A + \overline{A} = 1$ ，可參考題 2 之解析(2)  
 (B)  $B \cdot \overline{B} = 0$ ，可參考題 1 之解析(C)  
 (C)  $A \cdot \overline{A} + B = B$  (因為  $A \cdot \overline{A} = 0$ )  
 (D)  $A(\overline{A} + B) = A\overline{A} + AB = AB$  (因為  $A \cdot \overline{A} = 0$ )。

3-4 ( D ) 5. 下列何者為第摩根(De Morgan)定律？

- (A)  $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$  (B)  $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A \cdot B$  (C)  $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{A} + \overline{B}$  (D)  $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ 。

- 解 第摩根第一定理為： $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$   
 第摩根第二定理為： $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ 。

( B ) 6. 布林代數式  $\overline{\overline{A + B} \cdot \overline{AB}}$  等於

- (A) 0 (B) 1 (C)  $AB$  (D)  $A + B$ 。

- 解  $\overline{\overline{A + B} \cdot \overline{AB}} = \overline{\overline{A + B}} + \overline{\overline{AB}} = A + B + \overline{A} + \overline{B} = 1$

( D ) 7. 如圖 P3-1 所示的邏輯，其功能等於

- (A)或閘 (B)及閘 (C)反或閘 (D)反及閘。



圖 P3-1

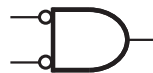






圖 P3-2

- 解  =  故為反及閘

( C ) 8. 如圖 P3-2 所示的邏輯，其功能等於

- (A)或閘 (B)及閘 (C)反或閘 (D)反及閘。

- 解  =  故為反或閘

( A ) 9. 如圖 P3-3 所示之組合邏輯電路等於

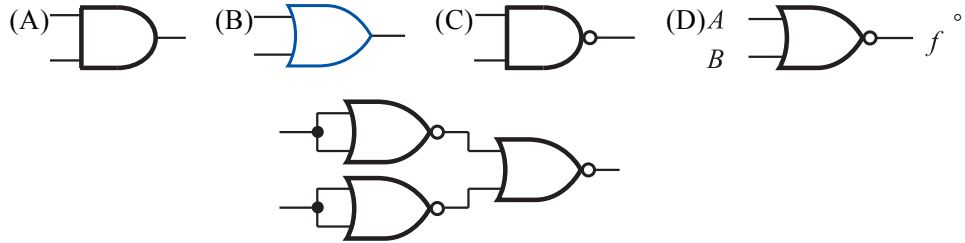
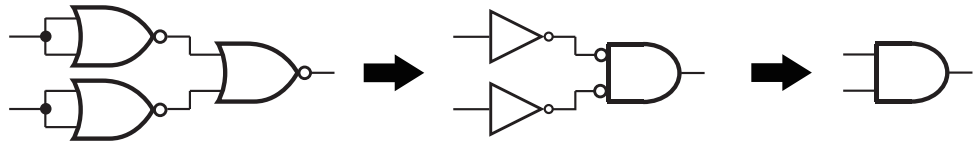


圖 P3-3

解



( B ) 10. 如圖 P3-4 所示之組合邏輯電路等於

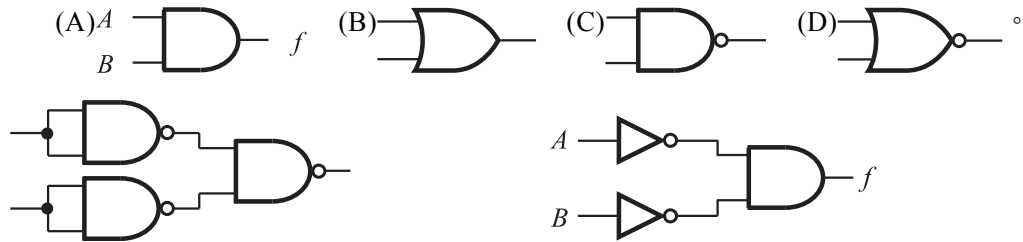
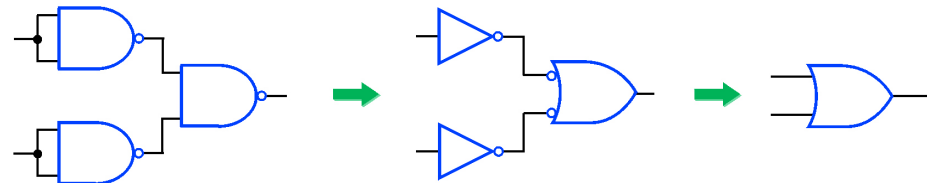


圖 P3-4

圖 P3-5

解



( C ) 11. 如圖 P3-5 所示之電路，其輸出端  $f$  的布林式為

(A)  $A+B$  (B)  $AB$  (C)  $\overline{A+B}$  (D)  $\overline{AB}$ 。

解

圖中電路的輸出布林式  $f = \overline{AB} = \overline{A+B}$  (第摩根第一定理)

( D ) 12. 如圖 P3-6 所示之電路，該電路等效何種邏輯閘？

(A)OR 閘 (B)AND 閘 (C)NOR 閘 (D)NAND 閘。

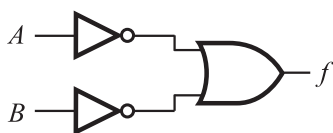


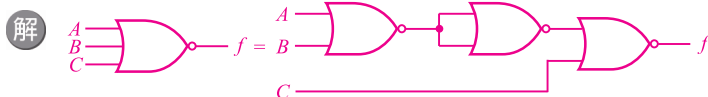
圖 P3-6

解 圖中電路的輸出布林式  $f = \overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$  (第摩根第二定理)

所以電路等效反及閘(NAND gate)。

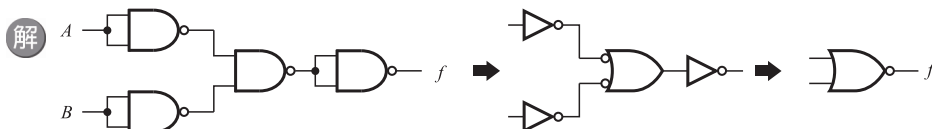
3-5 ( B ) 13. 至少需要幾個 2-input 的 NOR 閘才能組成一個 3-input 的 NOR 閘？

(A)二個 (B)三個 (C)四個 (D)五個。



所以至少需要三個 2 輸入的 NOR 閘，才能組成一個 3 輸入的 NOR 閘。

( C ) 14. 若以兩個輸入端之 NAND 閘來執行兩個輸入端之 NOR 閘的工作，最少需使用幾個 NAND 閘？ (A)2 個 (B)3 個 (C)4 個 (D)5 個。



所以至少需四個 2 輸入 NAND 閘，才能執行兩輸入的 NOR 閘之工作。

( B ) 15. 如圖 P3-7 所示之邏輯電路，輸出  $F$  與輸入  $A$ 、 $B$  的關係可表示為  $F(A, B) = ?$

(A)  $\overline{A} + \overline{B}$  (B)  $AB + \overline{A}\overline{B}$  (C)  $\overline{A}B + A\overline{B}$  (D)  $A + B$ 。

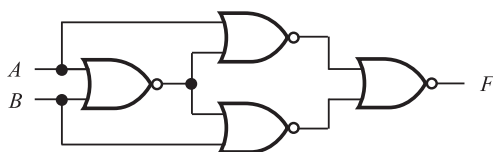
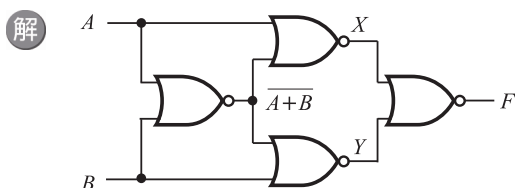


圖 P3-7



$$\begin{aligned} X &= \overline{A + A + B} \text{、} Y = \overline{B + A + B} \\ F &= \overline{X + Y} = \overline{A + A + B + B + A + B} \\ &= (A + \overline{A + B})(B + \overline{A + B}) \\ &= (A + \overline{A}\overline{B})(B + \overline{A}\overline{B}) \\ &= AB + \overline{A}\overline{B} = A \odot B \end{aligned}$$

- ( D ) 16. 如圖 P3-8 所示之電路，該電路等效何種邏輯閘？  
 (A)反及閘 (B)反或閘 (C)反互斥或閘 (D)互斥或閘。

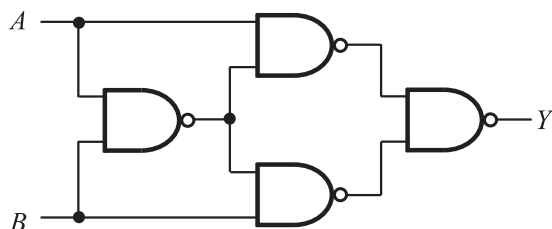
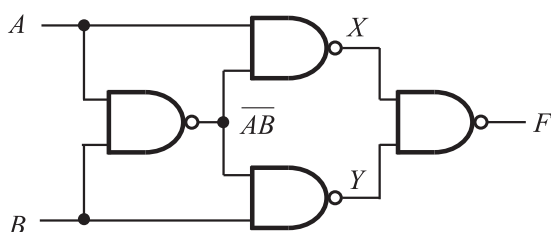


圖 P3-8

解



$$\begin{aligned} X &= \overline{A}AB & Y &= \overline{B}AB \\ F &= \overline{XY} = \overline{\overline{A}AB \cdot \overline{B}AB} \\ &= \overline{A\overline{A}B + B\overline{A}B} \\ &= \overline{A(\overline{A} + B) + B(\overline{A} + B)} \\ &= \overline{A\overline{B} + \overline{A}B} = A \oplus B \end{aligned}$$

## 二、綜合題

1. 試將下列布林代數式化為最簡式

- a.  $A + \overline{B} + \overline{AB} + (A + \overline{B})\overline{AC}$   
 b.  $(A + B + CD)(\overline{A} + B)(\overline{A} + B + E)$   
 c.  $(A + B + C)(A + \overline{B} + C)$

解

$$\begin{aligned} \text{a. } A + \overline{B} + \overline{AB} + (A + \overline{B})\overline{AC} &= A + \overline{B} + \overline{AB} + A \cdot \overline{AC} + \overline{B} \cdot \overline{AC} \\ &= A + \overline{B} + \overline{AB} + \overline{ABC} && (\text{因為 } A \cdot \overline{AC} = 0) \\ &= A + \overline{AB} + \overline{B}(1 + \overline{AC}) = A + \overline{A} + \overline{B} && (\text{因為 } 1 + \overline{AC} = 1, \overline{AB} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B}) \\ &= 1 && (\text{因為 } A + \overline{A} = 1) \\ \text{b. } (A + B + CD)(\overline{A} + B)(\overline{A} + B + E) &= (A + B + CD)[(\overline{A} + B)(\overline{A} + B) + E(\overline{A} + B)] \\ &= (A + B + CD)[(\overline{A} + B) + E(\overline{A} + B)] && (\text{因為 } (\overline{A} + B)(\overline{A} + B) = \overline{A} + B) \\ &= (A + B + CD)(\overline{A} + B)(1 + E) = (A + B + CD)(\overline{A} + B) && (\text{因為 } 1 + E = 1) \\ &= A \cdot \overline{A} + A \cdot B + \overline{A} \cdot B + B \cdot B + \overline{A} \cdot CD + B \cdot CD \\ &= AB + \overline{A}B + B + \overline{A}CD + BCD && (\text{因為 } A \cdot \overline{A} = 0, B \cdot B = B) \\ &= B(A + \overline{A} + 1 + CD) + \overline{A}CD = B + \overline{A}CD && (\text{因為 } A + \overline{A} + 1 + CD = 1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & c. (A+B+C)(A+\bar{B}+C) \\
 &= (A+C)(A+C) + B(A+C) + \bar{B}(A+C) \\
 &= (A+C) + B(A+C) + \bar{B}(A+C) && (\text{因為 } (A+C)(A+C) = A+C) \\
 &= (A+C)(1+B+\bar{B}) && (\text{因為 } 1+B+\bar{B} = 1) \\
 &= A+C
 \end{aligned}$$

2. 試依據所學，判斷圖 P3-9 與圖 3-10 分別實現何種邏輯閘？

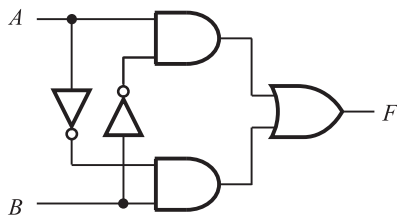


圖 P3-9

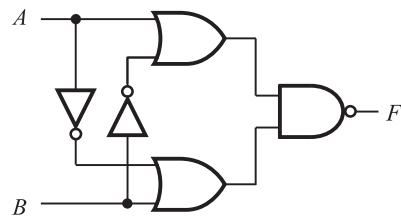
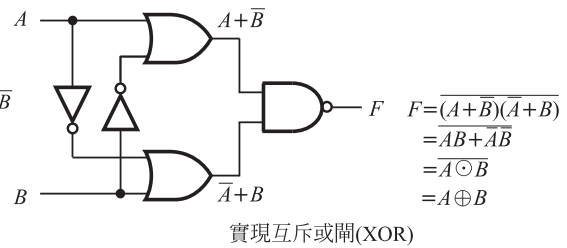
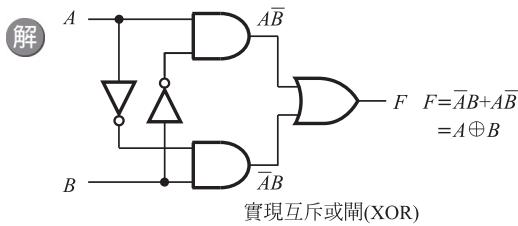
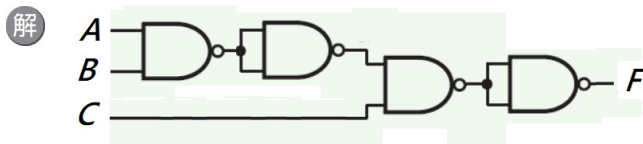


圖 3-10



3. 試繪出兩輸入的 NAND 閘組合成一個 3 輸入的 AND 閘。



## 鍛鍊本解答－嚴選精華

- 3-3** 1. 布林代數  $X(Y+Z) = XY + XZ$  與  $X + YZ = (X+Y)(X+Z)$  皆是布林代數的 分配 定理。
2. 布林代數  $X+Y = Y+X$  與  $XY = YX$  皆是布林代數的 交換律 定理。
3. 布林代數  $X+XY = X$  與  $X(X+Y) = X$  皆是布林代數的 吸收律 定理。
4. 布林代數  $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$  與  $X(YZ) = (XY)Z$  皆是布林代數的 結合律 定理。

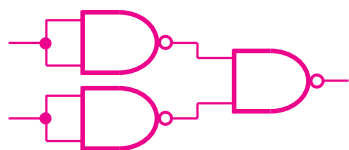
3-4 5. 應用第摩根定理

$$(1) \overline{A+B+C} = \overline{A \cdot B \cdot C}$$

$$(2) \overline{ABC} = \overline{A+B+C}$$

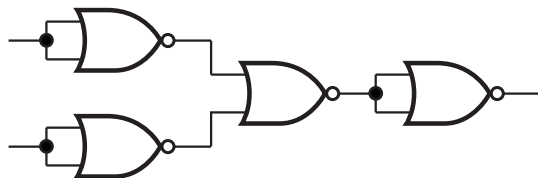
6. 繪出利用兩輸入的反及閘(NAND)組成兩輸入端的或閘(OR)等效電路。

解



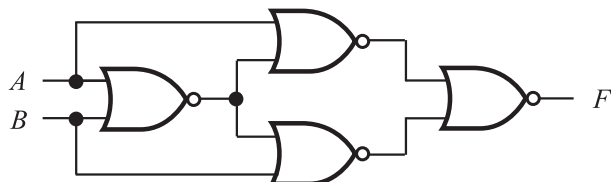
7. 繪出利用兩輸入的反或閘(NOR)組成兩輸入端的反及閘(NAND)等效電路。

解



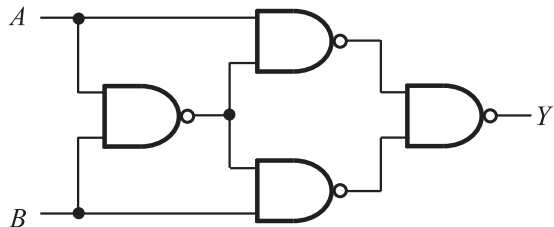
3-5 8. 繪出以最少的兩輸入反或閘(NOR gate)，組合實現一個兩輸入反互斥或閘(XNOR gate)。

解



9. 繪出以最少的兩輸入反及閘 (NAND gate)，組合實現一個兩輸入互斥或閘 (XOR gate)。

解



## 鍛鍊本解答一大顯身手

## 課内題

請參考自我評量解答的內容 P3-4 ~ 3-9。

### 課外題

## 一、精選題

- ( B ) 1. 布林式  $W + X + Y + WY + \overline{X}$  等於

(A) 0    (B) 1    (C)  $X + Y$     (D)  $W + X + Y$  ◊

**解**  $W + X + Y + WY + \overline{X} = 1 (\because X + \overline{X} = 1)$

- ( A ) 2. 若將等式中的所有 0 改爲 1、1 改爲 0，且將 + 改爲  $\cdot$ ， $\cdot$  改爲 + 後，該等式仍相等，爲下列何種特性？

(A)對偶原理(principle of duality)      (B)同一律(laws of identity)

(C)第摩根定理(DeMorgan's theorems) (D)交換律(commutative laws)。

**解**  $X+0=X$  對偶原理  $X \cdot \overline{X}=0$  對偶原理

$$X \cdot 1 = X \qquad X + \overline{X} = 1$$

- ( D ) 3. 布林式  $Y = A \oplus B$  不等於下列何者？

$$(A)Y = \overline{A}B + A\overline{B}$$
$$(B)Y = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$$
$$(C)Y = \overline{AB + \overline{AB}}$$
$$(D)Y = AB + \overline{AB} \quad \circ$$

**解** (1)  $Y = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$

$$(2) Y = (A + B)(\bar{A} + \bar{B}) = A\bar{B} + \bar{A}B$$
$$(3) Y = \overline{AB} + \overline{\overline{AB}} = (\overline{AB})(\overline{\overline{AB}}) = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{\overline{A} + \overline{B}}) = (\overline{A} + \overline{B})(A + B) = \overline{A}B + A\overline{B}$$
$$(4) Y = AB + \overline{AB} = AB + \overline{A} + \overline{B} = 1$$

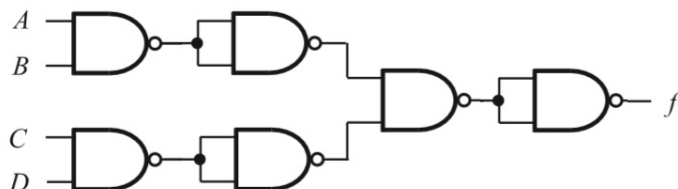
- ( B ) 4. 最少需使用多少個兩輸入端之 NOR 閘，才能完成具有兩輸入端之 NAND 閘作用？ (A)3 個 (B)4 個 (C)5 個 (D)6 個。

**解**

```
graph LR; A((A)) --- X1[⊕]; B((B)) --- X1; A --- A1[AND]; B --- A1; X1 --- X2[⊕]; A1 --- X2; X2 --- X3[⊕]; X2 --- X3; X3 --- F((F))
```

- ( C ) 5. 組合成一個 4 輸入的 AND 閘時，則最少需要幾個 2 輸入 NAND 閘來實現？ (A)3 個 (B)5 個 (C)6 個 (D)7 個。

解



## 鍛鍊本解答－高手過招

- ( B ) 1. 依據布林代數  $(A+C)(A+B+C)$  等於 【104 統測資電類】

(A)  $A+B+C$  (B)  $A+C$  (C)  $AB+BC$  (D)  $A+B+C$ 。

解

$$\begin{aligned}(A+C)(A+B+C) &= (A+C)(A+C) + B(A+C) \\ &= (A+C) + B(A+C) = (A+C)(1+B) = A+C\end{aligned}$$

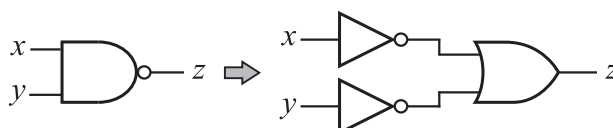
- ( D ) 2. 若圖(1)之兩個邏輯電路可實現相同邏輯函數，則使用下列哪一定理或定律可將左圖轉換成右圖？ 【105 統測資電類】

(A) 交換律(Commutative Law)

(B) 分配律(Distributive Law)

(C) 結合律(Associative Law)

(D) 第摩根定理(DeMorgan's Theorem)。



圖(1)

解

$$z = \overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$$

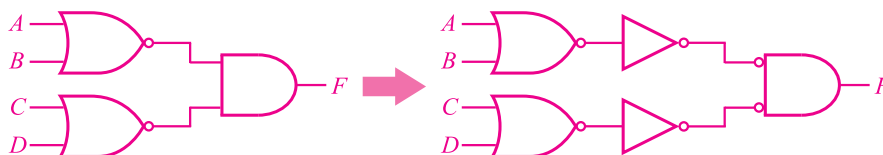
- ( B ) 3. 某邏輯電路的輸出布林函數： $F = \overline{A+B+C+D}$ ，若想只使用雙輸入的 NOR 閘來實現此函數  $F$ ，則至少要用幾個雙輸入的 NOR 閘？

(A)6 (B)5 (C)4 (D)3。

【106 統測資電類】

解

$$F = \overline{A+B+C+D} = \overline{A+B} \cdot \overline{C+D}$$



- ( C ) 4. 下列布林代數表示式之真值表，何者與另外三者不同？  
 (A)  $A\bar{B} + AB$  (B)  $A + AB$  (C)  $A + \bar{A}B$  (D)  $(A+B)(A+\bar{B})$ 。

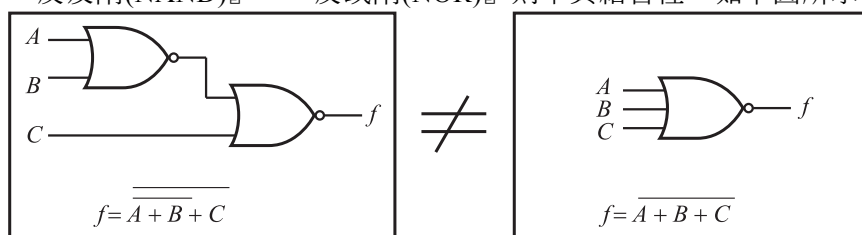
【107 統測電子類】

- 解 (A)  $A\bar{B} + AB = A(\bar{B} + B) = A$   
 (B)  $A + AB = A(1 + B) = A$   
 (C)  $A + \bar{A}B = A + AB + \bar{A}B = A + B(A + \bar{A}) = A + B$   
 (D)  $(A+B)(A+\bar{B}) = A + A\bar{B} + AB + B\cdot\bar{B} = A(1 + \bar{B} + B) = A$

- ( C ) 5. 下列邏輯閘何者不具結合性？  
 (A)或(OR)閘 (B)及(AND)閘  
 (C)反或(NOR)閘 (D)互斥或(XOR)閘。

【109 統測資電類】

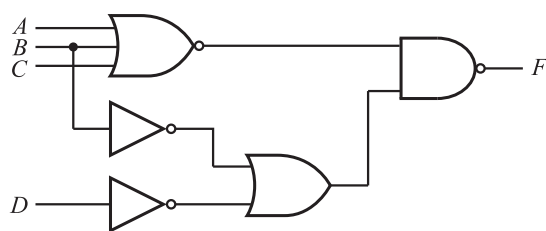
- 解 『及閘(NAND)』、『或閘(NOR)』、『互斥或閘(XOR)』皆具結合性，而『反及閘(NAND)』、『反或閘(NOR)』則不具結合性，如下圖所示。



- ( C ) 6. 圖(2)邏輯電路利用第摩根(De Morgan)定理化簡之後，結果為下列何者？

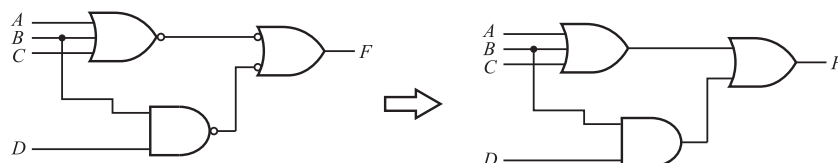
【109 統測資電類】

- (A)  $F = A + B$  (B)  $F = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$   
 (C)  $F = A + B + C$  (D)  $F = A + B + C + D$ 。



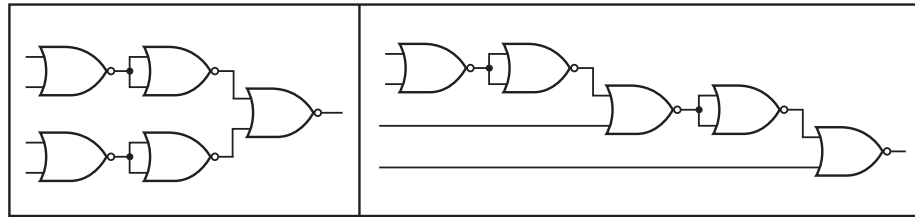
圖(2)

- 解 利用第摩根定理化簡之後， $F = A + B + C + BD = A + B + C$ 。



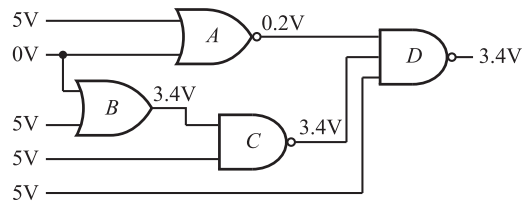
- ( B ) 7. 數位邏輯實習需一個 4 輸入的 NOR 閘時，則最少需要幾個 2 輸入 NOR 閘來實現？ (A)3 個 (B)5 個 (C)6 個 (D)7 個。 【109 統測資電類】

**解** 如下兩圖皆可實現一個 4 輸入的 NOR 閘，最少需要使用 5 個 2 輸入 NOR 閘。



- ( C ) 8. 實驗時，一個組合邏輯電路與各邏輯閘的輸入／輸出所量測到的電壓如圖(3)所示，則圖中哪一個邏輯閘的功能發生異常？

(A)A (B)B (C)C (D)D。 【109 統測資電類】



圖(3)

**解** (1)在 TTL 邏輯閘，輸入 5V 為邏輯 1，輸入 0V 為邏輯 0；而輸出 3.4V 為邏輯 1，輸出 0.2V 為邏輯 0。

(2)反及閘(NAND)的特性：當所有的輸入皆為邏輯 1，則輸出方為邏輯 0，所以邏輯閘 C 功能發生異常，其輸出正確應為 0.2V。