



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

ESCUELA DE INGENIERIA

Departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental

IMPLEMENTACIÓN DE UN MODELO HÍBRIDO BOUSSINESQ - SAINT VENANT DE PROPAGACIÓN DE OLEAJE

BENJAMÍN CARRIÓN ARETXABALA

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Ingeniero Civil

Profesor Supervisor:

RODRIGO CIENFUEGOS

Santiago de Chile, 27 Mayo 2008

© MMVIII, BENJAMÍN CARRIÓN ARETXABALA



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

ESCUELA DE INGENIERIA

Departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental

IMPLEMENTACIÓN DE UN MODELO HÍBRIDO BOUSSINESQ - SAINT VENANT DE PROPAGACIÓN DE OLEAJE

BENJAMÍN CARRIÓN ARETXABALA

Miembros del Comité:

RODRIGO CIENFUEGOS

MARIO DURÁN

FELIPE GUERRERO

.....

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Ingeniero Civil

Santiago de Chile, 27 Mayo 2008

© MMVIII, BENJAMÍN CARRIÓN ARETXABALA

*A mis padres,
quienes menos entienden el trabajo
de esta memoria,
pero son quienes más lo valoran*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quisiera agradecer la paciencia constante de mi familia, que siempre ha estado dispuesta a apoyarme en todos los proyectos que he emprendido, confiando en mi juicio y capacidades, que ellos mismos me han ayudado a desarrollar.

En segundo lugar debiera mencionar a toda la gente ligada al departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental de la Universidad Católica, por haberse transformado en ejemplos vivos de motivación y pasión por una de las especialidades más bonitas que haya podido generar la ingeniería. Particularmente quiero reconocer a Don Bonifacio Fernández y Don Bernardo Domínguez, quienes han sido grandes maestros, en el más cabal sentido de la palabra. De ellos he aprendido mucho más que hidrología e hidráulica.

No menos importante fue el apoyo de mis compañeros memoristas y tesistas del departamento, especialmente de Leonardo Duarte, quien durante el desarrollo de su memoria generó interesantes sets de datos sobre propagación de oleaje aleatorio, muy importantes para las validaciones presentadas aquí. Muy importante fue también el trabajo de nuestras queridas secretarias y ayudantes, quienes siempre nos facilitaron el quehacer diario. A ellos mis más profundos respetos y agradecimientos.

Finalmente, pero no menos importante que los anteriores, quiero dar las más sinceras gracias a mi director de memoria, Rodrigo Cienfuegos, quien desde el primer momento ha depositado una gran confianza en mi persona, siendo en una motivación constante durante todo este proceso, aportando no sólo con sus amplios conocimientos, sino con el apoyo moral y compañerismo necesarios para dar todos los pasos que nos han llevado hasta este punto. Definitivamente, sin su entusiasmo y apoyo no hubiera sido capaz de realizar este trabajo, y le agradezco el que me haya dado la oportunidad de haberle ayudado.

INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	iv
INDICE DE FIGURAS	vii
INDICE DE TABLAS	ix
RESUMEN	x
ABSTRACT	xi
1. INTRODUCCION	1
1.1. Enfoques existentes y sus principales deficiencias	3
1.2. Punto de vista propuesto y Organización de la presente Memoria	8
2. ECUACIONES DE SAINT VENANT	9
2.1. Las Ecuaciones de Aguas Someras	9
2.2. Propiedades de las Ecuaciones: Curvas características	13
2.3. El Problema de Riemann: Rompimiento de presa generalizado	16
2.3.1. Ondas de Depresión	20
2.3.2. Ondas de Shock	22
3. IMPLEMENTACION NUMERICA	25
3.1. Esquema de Volúmenes Finitos	25
3.1.1. Solver Exacto de Riemann: Caso Fondo Mojado	28
3.1.2. Solver Exacto de Riemann: Caso Fondo Seco	31
3.1.3. Tests de Toro para Solver de Riemann	33
3.2. Integración en el Tiempo	36
3.3. Términos Fuentes	38
3.3.1. Métodos “Well Balanced”	39
3.4. Condiciones de Borde	45

4. VALIDACION DEL MODELO	50
4.1. Estado Estacionario	50
4.2. Dam-Break sobre Barrera Triangular	51
4.3. Campaña de Mediciones INH	57
5. ACOPLAMIENTO DE AMBOS MODELOS	62
5.1. Metodología de Comunicación entre Modelos	62
5.1.1. Rangos de Aplicación	66
5.2. Onda Solitaria de Synolakis	69
5.3. Experiencia de Ting	74
6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	79
BIBLIOGRAFIA	82

INDICE DE FIGURAS

1.1 Esquema de las zonas litorales	1
1.2 Esquema típico del dominio en modelos Boussinesq. Fuente: Brocchini et al. 2001	5
1.3 Esquema de la técnica de la ranura. Fuente: Kennedy et al. 2000	6
2.1 Definición de variables del modelo	10
2.2 Trayectorias características y zonas de influencia.	16
2.3 Evolución de las variables de estado y tipos de onda producidas en un rompimiento de presa. Fuente: Sleigh, 2006.	18
2.4 Estados producidos en torno a la discontinuidad. Fuente: Sleigh, 2006.	19
2.5 Posibles combinaciones entre tipos de ondas. Fuente: Sleigh, 2006.	20
3.1 Flujos a través del volumen de control definido por un nodo de largo Δx entre tiempos separados por Δt	26
3.2 Esquema de volúmenes finitos con datos discontinuos y flujos entre celdas.	27
3.3 Combinación de ondas de depresión para el caso de presencia de fondo seco. Fuente: Sleigh 2006.	32
3.4 Test 1: Onda de depresión crítica a la izquierda, $t_{out} = 7.0[s]$. La línea punteada corresponde a la situación inicial, mientras la línea sólida al tiempo de evaluación.	34
3.5 Test 2: Dos ondas de depresión, $t_{out} = 2.5[s]$	35
3.6 Test 3: Fondo seco a la derecha, $t_{out} = 4.0[s]$	35
3.7 Test 4: Fondo seco a la izquierda, $t_{out} = 4.0[s]$	36
3.8 Test 5: Generación de fondo seco, $t_{out} = 5.0[s]$	36
3.9 Esquema de reconstrucción minmod de altura de agua y cota de fondo.	42
3.10 Condición de borde de absorción-generación. Fuente: Cienfuegos, 2005.	47
4.1 Batimetría para simulación de estado estacionario.	50

4.2 Evolución de la altura de agua y velocidad.	51
4.3 Preparación experimental y condiciones iniciales	52
4.4 Dam-Break sobre fondo horizontal	54
4.5 Comparación entre el modelo y las mediciones de las sondas.	54
4.6 Perfiles para $t = 1.8, 3.0, 3.7$ segundos.	56
4.7 Perfiles para $t = 8.4, 15.5$ segundos.	57
4.8 Esquema de la experiencia del INH	58
4.9 Resultados del modelo Saint Venant en INH	59
4.10 Comparación de series temporales	60
5.1 Esquema de comunicación entre ambos modelos.	64
5.2 Serie de tiempo de entrada	70
5.3 Superficie libre normalizada para $t\sqrt{g/d} = 10, 15, 20, 21$	71
5.4 Superficie libre normalizada para $t\sqrt{g/d} = 22, 23, 24, 25$	72
5.5 Superficie libre normalizada para $t\sqrt{g/d} = 30, 45, 50, 55$	73
5.6 Superficie libre normalizada para $t\sqrt{g/d} = 60, 65, 70, 80$	74
5.7 Batimetría de Ting	75
5.8 Resultados para interfaz en $x = 6$ (m) y $x = 7.5$ (m)	76
5.9 Resultados para interfaz en $x = 8$ (m)	77

INDICE DE TABLAS

3.1 Datos de los 5 test de Toro	34
4.1 Ubicación de las Sondas	53

RESUMEN

Hoy en día, las ecuaciones de Boussinesq (BT) se han convertido en las favoritas para modelar las zonas costeras debido a su amplio rango de aplicación y a recientes mejoras en la parametrización del rompimiento y la representación de efectos no-lineales. Sin embargo, la implementación de condiciones de borde en la línea de costa aún es poco clara, dado que las ecuaciones de Boussinesq se vuelven singulares en ese punto. En este contexto, varias técnicas numéricas ad-hoc han sido propuestas.

Desde un punto de vista matemático, las ecuaciones de Saint Venant (SV) debieran ser utilizadas cerca de la línea de costa donde los efectos dispersivos son despreciables. Precisos esquemas de resolución han sido desarrollados para las ecuaciones de SV produciendo excelentes descripciones de la interfaz entre dominios secos y mojados y de las dinámicas de shocks, haciendo que los modelos de SV sean herramientas poderosas para predecir rompimientos y propagaciones de bores en la zona de swash.

Dado que las ecuaciones de BT y SV son adecuadas para diferentes zonas de aplicación, hemos desarrollado un modelo híbrido de volúmenes finitos en donde las ecuaciones de BT son resueltas desde aguas profundas hasta la zona de surf interno, mientras que las de SV son resueltas en la zona de swash. En el trabajo se presenta una metodología simple que hace posible la comunicación entre ambos modelos, utilizando una descomposición cuasi-hiperbólica de las ecuaciones de BT y resolviendo un problema de Riemann localmente. El modelo es testado contra oleaje regular propagándose sobre batimetrías planas, y para el caso de ondas solitarias sobre pendiente.

Palabras Claves: Modelos de propagación de oleaje, ecuaciones de Boussinesq, ecuaciones de Saint Venant, métodos de volúmenes finitos de captura de shock, métodos balanceados.

ABSTRACT

Nowadays, Boussineq-type (BT) equations have become the favourite approach for wave modelling in the coastal zone due to their large range of application and recent improvements on breaking and non-linear effects representation. Nevertheless, implementing moving shoreline boundary conditions is still unclear, since BT equations become singular at the shoreline. In this context, many different ad-hoc numerical techniques have been proposed.

From a mathematical standpoint, Saint Venant (SV) equations should be employed very close to the shoreline where dispersive effects are negligible. Accurate resolution schemes have been developed for SV equations producing an excellent description of the dry-wet interface and shock dynamics, making SV models a powerful tool to predict breakers and bores propagation in the swash zone.

Since BT equations and SV equations are best suited for different application zones, we have developed an hybrid finite volume approach in which BT equations are solved from deep waters to the inner surf zone, and SV equations are solved in the swash zone. In the proposed work we present a simple method to make the communication between both models possible using a quasi-hyperbolic decomposition of BT equations and solving a Riemann-type problem locally. The model is tested against regular waves propagating on planar beaches, and solitary waves running up a slope.

Keywords: Wave propagation models, Boussinesq equations, Saint Venant equations, shock capturing finite volume methods, well balanced methods.

1. INTRODUCCION

En el ámbito de la ingeniería de costas una variable muy importante es el oleaje, tanto para el diseño y funcionamiento de obras en la zona litoral como para el comportamiento de la morfodinámica costera y su interacción con estas obras, y por lo tanto, se cuenta con variadas herramientas que intentan caracterizar el oleaje y pronosticar su comportamiento y efectos sobre una zona puntual.

En líneas generales, el oleaje evoluciona a medida que se aproxima a la costa mediante el proceso llamado asomeramiento, o *shoaling*, debido a la disminución de la profundidad local, produciendo un aumento en la altura de ola y una disminución de la longitud de onda, de modo que las olas se vuelven inestables y eventualmente rompen. El lugar donde las olas rompen se conoce como **zona de rompientes** o **zona de surf** y su posición variará dependiendo de la batimetría local y las condiciones de oleaje. Dentro de la zona de rompientes se puede diferenciar la **zona de surf interno** donde se encuentran las olas que están rompiendo y que ya han desarrollado un *roller* estable, es decir, han alcanzado una condición de cuasi-equilibrio o saturación de la razón entre la altura de ola y la profundidad local. Esta zona se extiende casi hasta la línea de costa, donde se encuentra la **zona de swash** que es el lugar que ocupa el agua cuando incursiona en la playa y hasta el punto de máximo recogimiento. La distancia que se adentra el mar hacia la playa desde el punto de reposo se conoce como *run-up* y la distancia que se retrae como *run-down*.

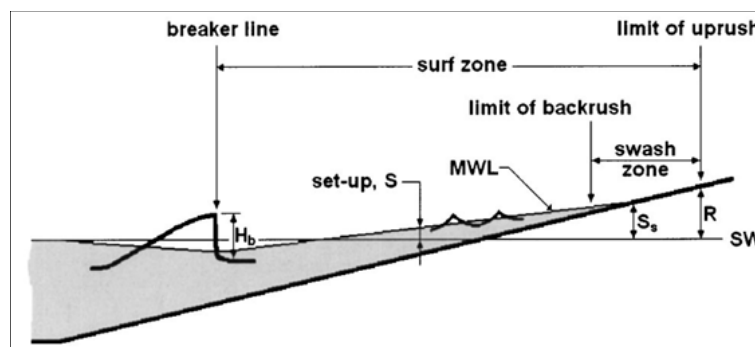


FIGURA 1.1. Esquema de las zonas litorales

Existe una gran variedad de modelos matemáticos que permiten predecir el comportamiento del oleaje a medida que se aproxima hacia la costa y la mayoría de ellos considera sus características promediadas, como la altura de ola y período significativos. La herramienta más difundida entre éstos es la **Teoría Lineal de Oleaje** que es aplicable en aguas profundas, y cuyos resultados son ampliamente utilizados. De manera similar existen tratamientos semi-empíricos para pronosticar el comportamiento del oleaje luego de la zona de rompientes, aunque la mayoría de ellos se basan en observaciones y analogías con resaltos hidráulicos.

Sin embargo, los modelos anteriores no entregan información al interior de la fase de la onda, que es relevante para procesos de transporte de sedimentos y morfodinámicos, ni de las interacciones no lineales responsables de los procesos de transferencia espectral de energía, ni de la interacción de las olas particulares con la batimetría o las estructuras, como es la tendencia actual para determinar condiciones de diseño a través de simulaciones de Monte Carlo, por ejemplo. Es en caso como éstos cuando los modelos basados en las ecuaciones de aguas someras (*Nonlinear shallow water equations*, NSWE) o bien en las ecuaciones de Boussinesq (BSQ) muestran su utilidad.

Ambas familias de modelos son ampliamente utilizadas en el campo de la hidráulica costera, y aunque tienen diferencias, como sus rangos de aplicación y estrategias numéricas de resolución, las que serán discutidas más adelante, las dos comparten el hecho de ser modelos promediados verticalmente, de modo que sólo tienen como variables la altura de agua local y la velocidad horizontal para resolver las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, en una o dos dimensiones.

Particularmente para el trabajo de la presente memoria, interesa el modelo de tipo BSQ desarrollado por Cienfuegos, Barthélemy, and Bonneton (2006) durante el trabajo de su doctorado en el INP Grenoble, ya que presenta una nueva forma de parametrizar el rompimiento que es capaz de predecir correctamente la evolución de altura de ola al interior de la zona de rompientes, manteniendo información sobre su forma y asimetría (Cienfuegos, Barthélemy, & Bonneton, 2005) lo cual es importante para determinar transportes de

fondo de sedimentos, y una buena representación de los efectos no lineales asociados al movimiento de las olas al ser capaz de reproducir los traspasos de energía entre distintas frecuencias vistos en mediciones de laboratorio (Cienfuegos, Barthelémy, Bonneton, & Gondran, 2006).

El modelo es llamado Serr1D, por estar basado en las ecuaciones de Serre y trabajar en una dimensión, y aún cuando se encuentra en el estado del arte de los modelos de este tipo, tiene una debilidad de tipo numérico que muchos modelos BSQ comparten y sobre la cual no existe aún gran consenso, y por lo tanto hay una gran variedad de puntos de vista y aplicaciones propuestos: el tratamiento de la condición de borde de la línea de costa.

El **objetivo de esta memoria** es presentar una alternativa al enfoque actual de esta condición de borde numérica, que permita aumentar el rango de situaciones que el modelo Serr1D puede representar, y en forma más general, proponer un nuevo punto de vista sobre este tópico para la familia de modelos BSQ.

1.1. Enfoques existentes y sus principales deficiencias

Aún cuando los modelos BSQ están pensados para aguas poco profundas, son capaces de representar de forma precisa la propagación del oleaje en aguas más profundas o longitudes más cortas, ya que asumen que tanto la dispersión de frecuencia débil como las no linealidades son importantes. La estructura básica de cualquier modelo BSQ está representada por las ecuaciones

$$h_t + (hu)_x = 0 \quad (1.1)$$

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x + gh_x = -gf_x - \tau_B + D \quad (1.2)$$

donde h representa la altura total de agua, u la velocidad media horizontal, f la coordenada del fondo, τ_B es la fricción de fondo y D contiene los términos de dispersión, con derivadas de orden superior, que caracterizan el modelo particular. Finalmente g corresponde a la aceleración de gravedad y los subíndices representan derivadas parciales.

Los parámetros que miden la dispersión y la no linealidad del sistema son respectivamente σ y ϵ , definidos como

$$\sigma = \frac{h}{L}, \quad \epsilon = \frac{a}{h} \quad (1.3)$$

donde L corresponde a la longitud de onda y a a su amplitud, y los órdenes que alcanza a representar el modelo están dados por $O(\sigma^2)$ y $O(\epsilon)$.

El sistema compuesto por las ecuaciones 1.1 y 1.2 es de tipo hiperbólico-parabólico, lo que tiene importancia en la estrategia de resolución ya que, utilizando esquemas numéricos de diferencias o volúmenes finitos, como habitualmente se hace, se debe contar con los valores de h y u en los nodos de borde, y esto no es trivial de hacer para el caso de la línea de costa, ya que a medida que $\sigma^2 \rightarrow 0$ las ecuaciones de BSQ tienden a las de SV, pero se produce un punto singular debido a la forma no conservativa en que se encuentran escritas.

Se sabe asintóticamente en la línea de costa las ecuaciones de BSQ tienden a las de SV, por lo que se puede decir que estas últimas corresponden a un caso particular de las primeras, y por lo tanto, son las más idóneas para representar el movimiento de la línea de costa y de aguas someras, en general. Además se sabe que los esquemas de resolución de estas ecuaciones son robustos y capaces de disipar energía por rompimiento en forma natural, de modo que puede afirmarse que, aún siendo un caso particular, su sistema de resolución es matemáticamente más correcto que los utilizados en los modelos BSQ, o análogamente, el problema del sistema de BSQ aún no se encuentra tan completamente resuelto como el de SV.

Además, las derivadas de orden superior en los bordes de los modelos BSQ requieren de información, por así decirlo, “fuera del dominio”, de modo que distintos autores han propuesto soluciones, que en general suelen ser de estilo numérico *ad-hoc*, ya que la matemática del sistema no considera en forma natural la existencia de una interfaz entre las zonas seca y mojada.

De modo que se cuenta con dos familias de modelos. Típicamente, lo que intenta la gran mayoría de estos enfoques es determinar la cantidad de nodos que se encuentran activos (i.e. que tienen una altura de agua positiva, o sobre algún umbral determinado) del total de

nodos del dominio. La fig. 1.2 muestra un esquema de como un dominio de N_{tot} nodos donde el agua ocupa los primeros N . El objetivo de la condición de borde de la línea de costa será determinar, para cada paso de tiempo, el valor de N y de la altura de agua y velocidad en ese nodo, h_N y u_N .

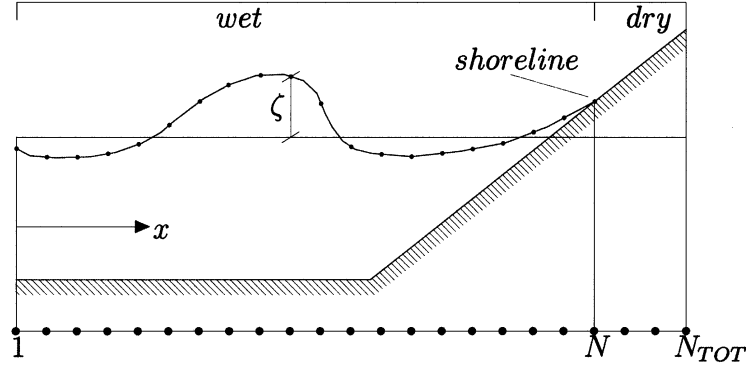


FIGURA 1.2. Esquema típico del dominio en modelos Boussinesq. Fuente: Brocchini et al. 2001

Una metodología presentada por Lynett, Wu, and Liu (2002) plantea realizar una extrapolación de los valores de los últimos nodos del dominio mojado hacia el interior de la zona seca, en una especie de “dominio ficticio” que tiene alturas de agua negativas, de modo que los últimos nodos mojados hasta N se tratan como cualquier otro nodo interior, utilizando los valores de los nodos ficticios para evaluar las derivadas de mayor orden.

Éste es el enfoque utilizado en el modelo Serr1D (Cienfuegos, Barthelemy, & Bonneton, 2007) y que ha mostrado ciertas falencias, asociadas generalmente a la extrapolación de las alturas de agua, ya que en la línea de costa se producen rápidas variaciones de la superficie libre, produciendo fuertes curvaturas de ésta, que pueden impedir encontrar una solución para la extrapolación. Esta limitación también ha sido identificada en el modelo Coulwave del propio Lynett.

Una solución popular entre los modelos de BSQ es la llamada “técnica de la ranura” (*slot technique*) utilizada por Kennedy, Chen, Kirby, and Dalrymple (2000) basada en trabajos anteriores. La idea central de este enfoque es considerar que la costa posee una ranura de ancho muy pequeño pero que se encuentra llena de agua sólo hasta el último nodo mojado, de modo que si en el siguiente paso de tiempo el agua aportada al nodo $N + 1$ es

suficiente para inundar completamente su ranura y sobrepasar un cierto umbral ese nodo se considerará dentro del dominio mojado. El caso es análogo a la inversa, para el caso en que un nodo se “drene” y quede vacío.

Aún cuando esta técnica es ampliamente utilizada tiene varios puntos en contra. Primero que todo, es un enfoque absolutamente artificial y no basado en la física del movimiento de la línea de costa, y aunque puede brindar buenos resultados en casos de *benchmark* la determinación de los parámetros que definen la ranura suele estar basada en resultados numéricos empíricos ajustados a cada caso, lo que hace complicada una aplicación sobre batimetrías de playas naturales y para casos diferentes.

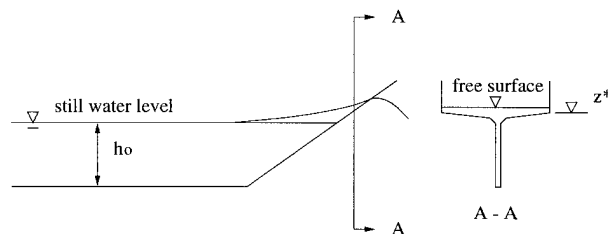


FIGURA 1.3. Esquema de la técnica de la ranura. Fuente: Kennedy et al. 2000

Otros puntos de vista sugieren soluciones basadas en una mejor comprensión matemática del comportamiento de las ecuaciones que definen el movimiento del agua cerca de la línea de costa. Dado que la mayoría de los modelos demuestran buenos desempeños sobre batimetrías uniformes, ya que los *benchmarks* tradicionales son de ese tipo, una idea es realizar una transformación de la batimetría no uniforme hacia un sistema de coordenadas lineal (Prasad & Svendsen, 2003), resolver el problema sobre el espacio de coordenadas de Lagrange y luego transformar los resultados al sistema original. Sin embargo, la implementación se presenta habitualmente compleja de armonizar con la estrategia de resolución de las ecuaciones de movimiento y existen problemas asociados a la transformación de coordenadas, que sobre batimetrías complejas no siempre asegura la unicidad y correcta equivalencia entre un sistema y otro.

Finalmente, como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de BSQ están basadas en la idea de que la dispersión de frecuencia no puede ser despreciada, pero es sabido que

esto no es así cerca de la línea de costa, donde las ondas tienen longitudes mucho mayores que la profundidad local, y por lo tanto, son las NSWE las ecuaciones que mejor describen su movimiento. De hecho, los términos dispersivos de BSQ tienen a cero a medida que la profundidad local disminuye, de modo que las ecuaciones de Boussinesq tienden a las ecuaciones de aguas someras cerca de la costa.

Con esto en mente Belloti and Brocchini (2001) plantean una condición de borde basada en el método de las características, ya que el movimiento de la línea de costa es una característica en sí misma, resolviendo el sistema

$$\frac{\partial x_s}{\partial t} = u_s, \quad h_s = 0 \quad (1.4)$$

donde x_s es la posición de la línea de costa, cuya velocidad tiene que ser u_s y altura de agua nula. Aunque el planteamiento es totalmente correcto, suele ser complicado compatibilizar las estrategias de resolución de las ecuaciones de BSQ con la de las NSWE, ya que este último sistema es hiperbólico a diferencia del sistema parabólico de BSQ, y por tanto se resuelven de forma distinta. Una forma de solucionar esto es penalizar artificialmente los términos de dispersión a medida que la profundidad disminuye, aunque de este modo nuevamente se están introduciendo arreglos numéricos *ad-hoc* y un cambio en la estrategia numérica.

Otra forma de compatibilizar ambos sistemas es resolver directamente las NSWE introduciendo los términos dispersivos característicos de las ecuaciones de BSQ dentro de los términos fuentes de las NSWE (Brocchini & Dodd, 2008), de modo de aprovechar su sistema de resolución robusto y que maneja eficientemente la condición de borde de la línea de costa. La principal debilidad de esta idea es que aún está siendo desarrollada y no se ha comprobado que pueda abarcar los rangos de profundidad que los modelos BSQ actualmente alcanzan.

1.2. Punto de vista propuesto y Organización de la presente Memoria

Adoptando los enfoques de Brocchini et al. parece lo más razonable tratar de comprender mejor el comportamiento asintótico de las ecuaciones de BSQ hacia la línea de costa, en vez de implementar condiciones de borde de tipo más empírica.

Convencidos de que las NSWs son las ecuaciones que mejor describen el movimiento del agua cerca de la línea de costa, y considerando que los esquemas de resolución asociados a ellas manejan sin mayores problemas la interfaz entre zonas mojadas y secas, lo que se plantea en este trabajo es desarrollar un modelo de tipo Saint Venant que resuelva las NSWs en la zona de costa y acoplarlo al modelo Serr1D que resolverá las ecuaciones de Boussinesq en el resto del dominio.

Los siguientes dos capítulos están orientados a detallar el desarrollo del modelo Saint Venant, analizando las características matemáticas de sus ecuaciones y la implementación de su esquema numérico, donde destaca la implementación de un solver exacto del problema de Riemann para evaluar los flujos y una estrategia balanceada para incorporar los términos fuentes, que lograr que el modelo tienda al estado estacionario en el largo plazo, a partir de cualquier estado inicial.

Posteriormente se analiza el desempeño de este modelo en situaciones de línea de costa móvil, con conocidos *benchmarks* numéricos y comparaciones con mediciones en terreno. Finalmente, se discute sobre la forma en que ambos modelos comparten información, y sus rangos de aplicación, así como también del trabajo futuro necesario.

2. ECUACIONES DE SAINT VENANT

En este capítulo se analizará las características matemáticas de las ecuaciones de Saint Venant, que serán la base del modelo presentado en este trabajo. Primero se realiza la derivación formal de las ecuaciones y luego se revisa su estructura de valores propios, para terminar revisando el problema de valor inicial de Riemann, que es la esencia de todos los esquemas de resolución de este tipo de ecuaciones. Para detalles sobre estos temas el lector queda referido a los trabajos de Toro (2001) y Stoker (1958).

2.1. Las Ecuaciones de Aguas Someras

Para el desarrollo siguiente se utilizará un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) en un espacio dado por los vectores canónicos ortogonales $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$. En un fluido incompresible de masa específica ρ y bajo la acción del campo gravitatorio $\vec{G} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - g\hat{k}$, con g la aceleración de gravedad, sea $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ el vector de velocidades en el plano cartesiano y $p = p(x, y, z)$ la presión en cualquier punto del fluido, se deben cumplir las ecuaciones de continuidad y de Euler para la cantidad de movimiento.

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (2.1)$$

$$u_t + uu_x + vv_y + ww_z = -\frac{p_x}{\rho} \quad (2.2)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = -\frac{p_y}{\rho} \quad (2.3)$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -\frac{p_z}{\rho} - g \quad (2.4)$$

De la condición de aguas someras se desprende el supuesto de que la profundidad local es mucho menor que la longitud de onda, y por lo tanto la curvatura de las líneas de corriente es pequeña, lo que es equivalente a decir que las aceleraciones verticales son nulas. De modo que reemplazando por cero el lado izquierdo de 2.4 se obtiene que la distribución de presiones debe seguir la ley hidrostática.

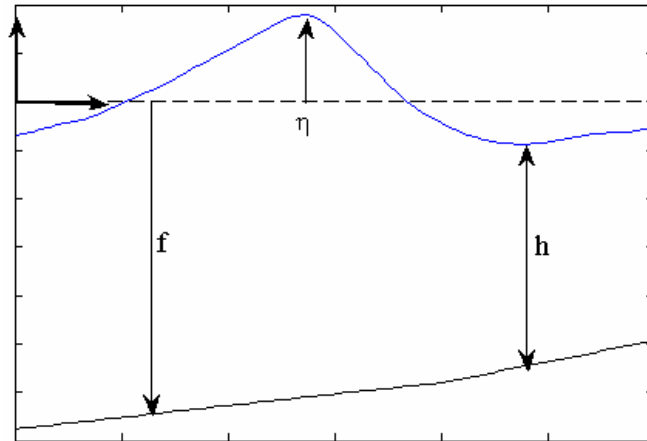


FIGURA 2.1. Definición de variables del modelo

Sea $f(x, y)$ la cota del fondo del dominio y $h(x, y, t)$ la altura de agua, de modo que la cota de la superficie libre está dada por $H(x, y, t) = f(x, y) + h(x, y, t)$, y su variación con respecto al nivel de reposo por $\eta(x, y, t)$, y utilizando presiones relativas se tiene que la distribución de presiones debe cumplir

$$p_z = -\rho g \quad (2.5)$$

e integrando con respecto a z se obtiene

$$p = \rho g(H - z) \quad (2.6)$$

Derivando 2.6 con respecto a x e y se obtiene

$$p_x = \rho g H_x, \quad p_y = \rho g H_y \quad (2.7)$$

y reemplazando estos valores en 2.2 y 2.3 se obtiene que las ambas aceleraciones horizontales no dependen de z y por lo tanto, tampoco las velocidades u y v dependen de z , ya que $w = 0$.

$$u_t + uu_x + vv_y + ww_z = -gH_x \quad (2.8)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + ww_z = -gH_y \quad (2.9)$$

Para eliminar toda dependencia en z se integra la ecuación de continuidad en esa variable.

$$\begin{aligned} \int_f^H (u_x + v_y + w_z) dz &= 0 \\ w|_{z=H} - w|_{z=f} + \int_f^H u_x dz + \int_f^H v_y dz &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ahora para encontrar los valores de la velocidad vertical en la superficie libre y en el fondo se deben utilizar las condiciones de borde, dadas por la condición cinemática de la superficie libre y el flujo nulo en el fondo.

$$(H_t + uH_x + vH_y + w)|_{z=H} = 0 \quad (2.11)$$

$$(uf_x + vf_y + w)|_{z=f} = 0 \quad (2.12)$$

de donde se despejan las velocidades en los bordes.

$$w|_{z=H} = (H_t + uH_x + vH_y)|_{z=H} \quad (2.13)$$

$$w|_{z=f} = (uf_x + vf_y)|_{z=f} \quad (2.14)$$

Para los otros términos de 2.10 se utiliza la fórmula de Leibniz (Toro, 2001, pp: 22) y se obtiene

$$\int_f^H u_x dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_f^H u dz - u|_{z=H} H_x + u|_{z=f} f_x \quad (2.15)$$

$$\int_f^H v_y dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_f^H v dz - v|_{z=H} H_y + v|_{z=f} f_y \quad (2.16)$$

reemplazando estas expresiones en 2.10 se obtiene

$$H_t + \frac{\partial}{\partial x} \int_f^H u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_f^H v dz = 0 \quad (2.17)$$

y recordando que tanto u como v son independientes de z se obtiene finalmente la ecuación de conservación de masa en una forma diferencial.

$$h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0 \quad (2.18)$$

Para obtener las ecuaciones de cantidad de movimiento en forma diferencial se multiplica la ecuación 2.18 por u y se suma a la ecuación 2.8 previamente multiplicada por h para x , y en una forma análoga para y , y haciendo uso de la propiedad $hh_x = (h^2/2)_x$ se obtiene lo siguiente.

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x + (huv)_y = -ghf_x \quad (2.19)$$

$$(hv)_t + (huv)_x + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_y = -ghf_y \quad (2.20)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones de aguas someras en su forma diferencial se puede escribir vectorialmente como muestra la ecuación 2.21, en un sistema conservativo hiperbólico (Toro, 2001).

$$\begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghf_x \\ -ghf_y \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \quad (2.22)$$

El vector \mathbf{U} representa las variables conservadas en el sistema, profundidad y velocidad, mientras que $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ y $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ son vectores de flujo y $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ es el vector que contiene los términos fuentes, que en este caso están asociados solamente a la pendiente de fondo, pero que podría contener términos de forzaje de viento, fricción o capilares.

Es sabido que la forma vectorial presentada en 2.21 no admite discontinuidades en las variables conservadas (Sleigh, 2006), por lo que para la resolución numérica de estas ecuaciones se prefiere utilizar la forma integral, expresada como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \mathbf{U} \, dV = - \int \int_{\Omega} \mathbf{nH}(\mathbf{U}) \, d\Omega \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ corresponde al flujo normal a la superficie Ω del volumen de control elegido.

Particularmente, para el caso de una dimensión y sin términos fuentes, la forma integral de las ecuaciones de Saint Venant está dada por 2.24, y hasta este minuto no incluye ningún

supuesto ni simplificación más allá de considerar aguas poco profundas, y es la base para la resolución numérica.

$$\oint (\mathbf{U} \, d\mathbf{x} - \mathbf{F} \, dt) = 0 \quad (2.24)$$

2.2. Propiedades de las Ecuaciones: Curvas características

De ahora en adelante, el alcance del trabajo considerará las ecuaciones de Saint Venant sólo en una dimensión para todos los fines prácticos, de modo que las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento que se desea resolver serán

$$h_t + (hu)_x = 0 \quad (2.25)$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x = -ghf_x \quad (2.26)$$

Las que pueden escribirse en una forma no conservativa, dividiendo por h la ecuación de cantidad de movimiento, como

$$h_t + (hu)_x = 0 \quad (2.27)$$

$$u_t + uu_x + gh_x = -gf_x \quad (2.28)$$

En aguas poco profundas la celeridad con la que las ondas se propagan por la superficie está dada por la ecuación 2.29, y por lo tanto está limitada por la profundidad local, al igual que los cambios que sufre en el plano en el tiempo y el espacio.

$$c = \sqrt{gh} \quad (2.29)$$

$$c^2 = gh$$

$$2cc_t = gh_t \quad (2.30)$$

$$2cc_x = gh_x \quad (2.31)$$

Reemplazando 2.30 y 2.31 en 2.27, y utilizando la relación $h = c^2/g$ se obtiene el siguiente cambio de variable, desde la profundidad a la celeridad, en la ecuación de continuidad.

$$\begin{aligned}
 h_t + (hu)_x &= 0 \\
 h_t + h_x u + h u_x &= 0 \\
 \frac{2c}{g} c_t + \frac{2c}{g} c_x u + \frac{c^2}{g} u_x &= 0 \\
 2c_t + 2c_x u + c u_x &= 0
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

De forma análoga, se realiza el cambio de variable en la ecuación de cantidad de movimiento.

$$\begin{aligned}
 u_t + u u_x + g h_x &= -g f_x \\
 u_t + u u_x + g \frac{2c}{g} c_x &= -g f_x \\
 u_t + u u_x + 2c c_x &= -g f_x
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Sumando las ecuaciones 2.32 y 2.33 se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
 u_t + 2c_t + u_x(u + c) + 2c_x(u + c) &= -g f_x \\
 \frac{\partial(u + 2c)}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial(u + 2c)}{\partial x} &= -g f_x
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Y restando 2.32 de 2.33.

$$\begin{aligned}
 u_t - 2c_t + u_x(u - c) - 2c_x(u - c) &= -g f_x \\
 \frac{\partial(u - 2c)}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial(u - 2c)}{\partial x} &= -g f_x
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Las ecuaciones 2.34 y 2.35 pueden ser integradas fácilmente, siguiendo ciertas **trayectorias** conocidas como característica. La esencia del método es notar que ambas ecuaciones representan derivadas totales de las cantidades $u + 2c$ y $u - 2c$, respectivamente, si es que se siguen una trayectoria específica en el plano $x - t$.

Llamando $R^+ = u + 2c$ la derivada total de esta variable está dada por

$$\frac{dR^+}{dt} = \frac{\partial R^+}{\partial t} + \frac{\partial R^+}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.36)$$

de modo que si se cumple que $dx/dt = u + c$, es decir, si la derivada es evaluada en el plano $x - t$ siguiendo la trayectoria dada por la velocidad $u + c$, entonces la variación total de R^+ estará dada por

$$\frac{dR^+}{dt} = -gf_x \quad (2.37)$$

Realizando un procedimiento análogo para $R^- = u - 2c$ se llega a lo siguiente

$$\frac{d}{dt}(u + 2c) = -gf_x \quad \text{para} \quad \frac{dx}{dt} = u + c \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt}(u - 2c) = -gf_x \quad \text{para} \quad \frac{dx}{dt} = u - c \quad (2.39)$$

que es la base para el método de las características, permite conectar las variables de estado del fluido en distintas posiciones y a través del tiempo. Las variables R^+ y R^- son llamadas *invariantes de Riemann* ya que para el caso particular de fondo horizontal se mantienen constantes a lo largo de su respectiva curva característica.

La idea básica para la implementación de esta metodología es que de existir un punto donde 2 curvas características se encuentren, entonces las dos variables de estado de ese punto van a estar relacionadas con otros dos puntos donde el estado es conocido, y por lo tanto el sistema se podrá resolver.

La figura 2.2 muestra un esquema de lo planteado. En los puntos L y R los estados son conocidos, dados por h_L, u_L y h_R, u_R respectivamente, y se relacionarán con las variables que interesa determinar a través de las siguientes relaciones, considerando fondo plano

$$u_P + 2c_P = u_L + 2c_L$$

$$u_P - 2c_P = u_R - 2c_R$$

de modo que se puede encontrar u_P y c_P y despejar la altura de agua como $h = c_P^2/g$.

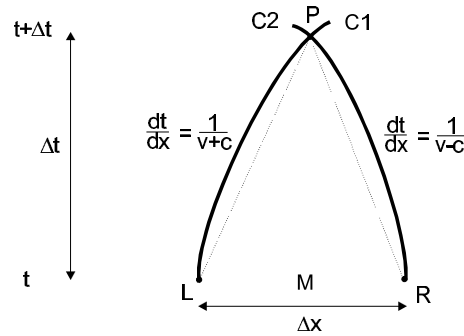


FIGURA 2.2. Trayectorias características y zonas de influencia.

De todos modos, para poder utilizar esta metodología se debe conocer exactamente los puntos de partida y las trayectorias de las características, de modo de asegurar su intersección en el punto de interés. El supuesto fundamental de la figura 2.2 es que el fluido se encuentra en **régimen de río**, esto es, que la celeridad de la onda nunca es mayor que la velocidad media del flujo, de modo que el área de influencia de un punto en particular, limitada por las curvas características de R^+ y R^- , se abre hacia ambos lados de ese punto, y por lo tanto las curvas características de dos puntos contiguos se intersectan en algún lugar entre esos puntos, en un tiempo posterior.

En el desarrollo del modelo numérico de Saint Venant se seguirá usando este supuesto, ya que es razonable que se cumpla en los casos de interés que el modelo desea cubrir, al igual que el modelo Serr1D (Cienfuegos, 2005).

2.3. El Problema de Riemann: Rompimiento de presa generalizado

Aún cuando el método de las características no es utilizado ampliamente para determinar estados no estacionarios de fluidos, entrega valiosas ideas sobre cómo se propaga la información en un fluido en movimiento. Esencialmente se pueden distinguir dos tipos de curvas, *shocks* y *rarefactions*, que se detallan a continuación, aunque para mayor detalle el lector queda referido a (Stoker, 1958).

En una canal uniforme horizontal donde el agua se encuentra en reposo, las curvas características serán paralelas en cada sección del canal, ya que todas tienen la misma

velocidad, nula en este caso, y la misma celeridad dada por la profundidad uniforme. Consideremos que el canal es de largo infinito y que en su centro se encuentra una paleta, que inicialmente está en reposo, pero que empieza a acelerar hacia la izquierda hasta alcanzar una velocidad constante.

Claramente, en el plano $x - t$ habrán dos zonas de estado constante; a la izquierda, justo antes del pistón, delimitada por su curva de velocidad, y a la derecha una zona donde aún no se siente la perturbación, delimitada por la velocidad a la que ésta se desplaza. Conectando ambos estados constantes habrá una zona donde tanto la altura de ola como la velocidad variará desde un estado al otro. En esta zona, las curvas características ya no serán paralelas, sino que describirán un **abanico** que unirá las curvas características de las zonas de estado constante. Este tipo de ondas se denominan **ondas de depresión** o *rarefracciones* ya que el nivel de agua se deprime en comparación con las zonas de estado constante.

Por el contrario, hacia el extremo donde se mueve el pistón eventualmente se producirá una discontinuidad entre el estado enfrente y justo detrás del pistón, que se explica por que las curvas características de ambas zonas colapsan sobre una dirección, que en este caso es la de propagación del pistón. Estas curvas son conocidas como *shocks* y se caracterizan por una abrupta **discontinuidad** entre dos estados distintos, a diferencia del suave paso de las *rarefracciones*, que es observable en resaltos hidráulicos, olas rompientes en la costa o *bores*.

Un caso clásico donde se pueden observar ambos tipos de ondas es el **rompimiento de presa**, en donde dos estados constantes están separados por una presa o discontinuidad que es removida instantáneamente, como si la presa desapareciera, como se muestra en la figura 2.3.

Inmediatamente después de que la presa es removida, el agua se desplaza hacia la zona de menor profundidad produciendo un frente de onda, o shock, del tipo del resalto hidráulico, mientras que hacia el sector de mayor profundidad se propaga una onda de depresión para compensar el agua que se “cayó” de la presa. Luego de un cierto tiempo, en el lugar donde se encontraba la presa habrá un nuevo estado constante, desconocido a

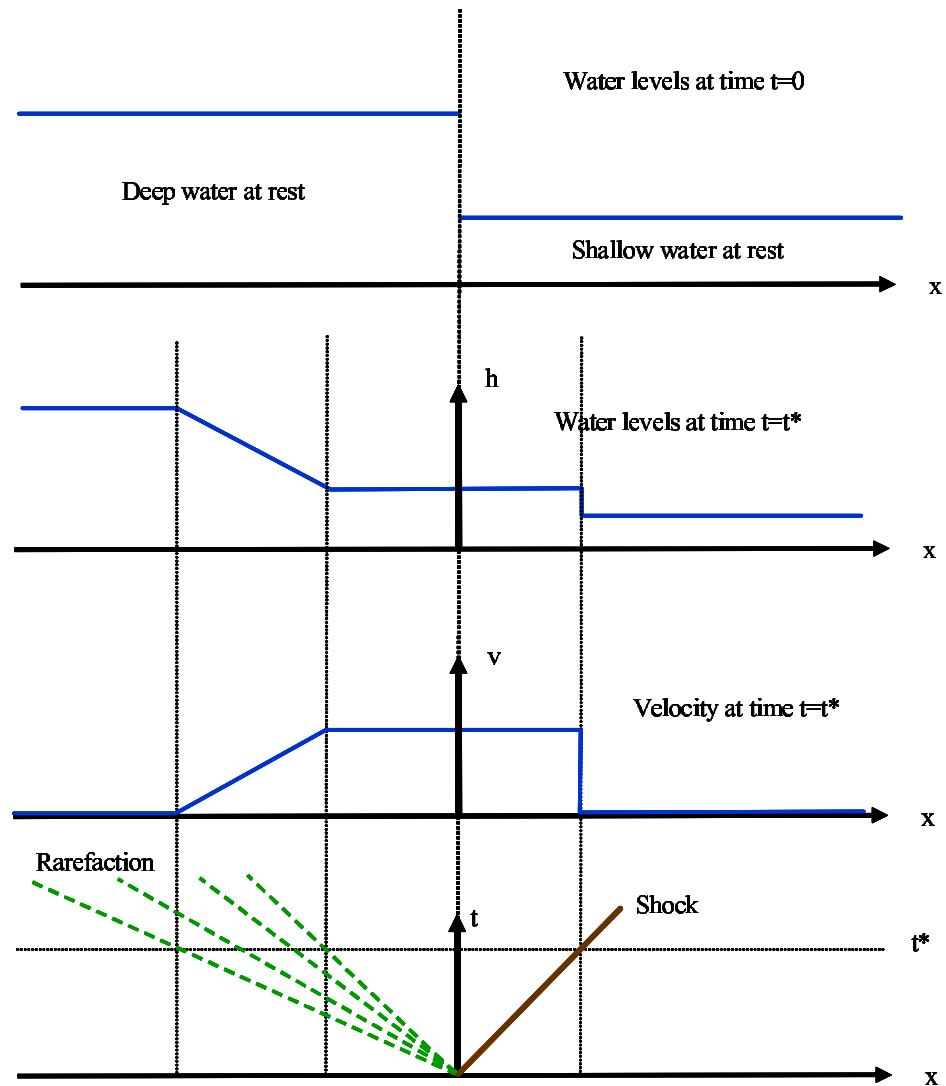


FIGURA 2.3. Evolución de las variables de estado y tipos de onda producidas en un rompimiento de presa. Fuente: Sleight, 2006.

priori, conectado con los antiguos estados originales a través de una abrupta discontinuidad en el shock y una lenta transición en la onda de depresión.

La figura 2.3 muestra un diagrama del proceso descrito. En la parte superior se ven los estados iniciales separados por la discontinuidad de la presa, mientras que en los dos gráficos centrales se muestran la altura de agua y velocidad luego de un tiempo t^* , donde se pueden ver los tres estados que se producen en el canal, i.e. los dos originales y el tercero generado entre ambos. Finalmente, el último gráfico muestra la misma situación pero en el

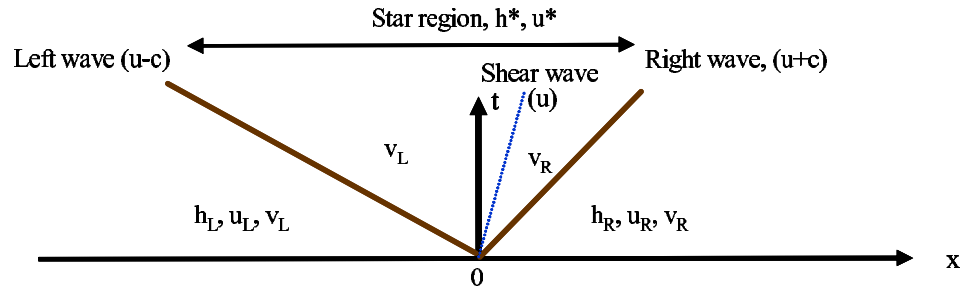


FIGURA 2.4. Estados producidos en torno a la discontinuidad. Fuente: Sleigh, 2006.

plano $x - t$, que será el espacio de trabajo del modelo a desarrollar, donde se ven las curvas características que limitan cada estado, donde la curva del shock puede entenderse como la velocidad a la que éste se desplaza, y el abanico de curvas de la onda de depresión como la transición de las curvas características desde un estado a otro.

Formalmente, el rompimiento de presa es conocido como el problema de valor inicial de Riemann, donde se conoce la ecuación diferencial que determina el movimiento del fluido (2.40) y los estados iniciales (2.41) separados por una discontinuidad ubicada en $x = 0$.

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (2.40)$$

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L & \text{si } x < 0 \\ U_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

El objetivo del problema de Riemann es determinar las variables de estado en la zona donde se ubicaba la presa, llamadas h_* y u_* , para algún tiempo t_* después del rompimiento de la presa. La idea principal es que en el lugar de la discontinuidad se producirán ondas una vez desaparecida la presa, que pueden ser tanto shocks como rarefracciones, y que se propagarán hacia ambos lados del canal, transmitiendo la información y modificando las variables de estado, de modo que para poder resolver el problema de Riemann se deben conocer las relaciones entre los estados separados por cualquier tipo de onda.

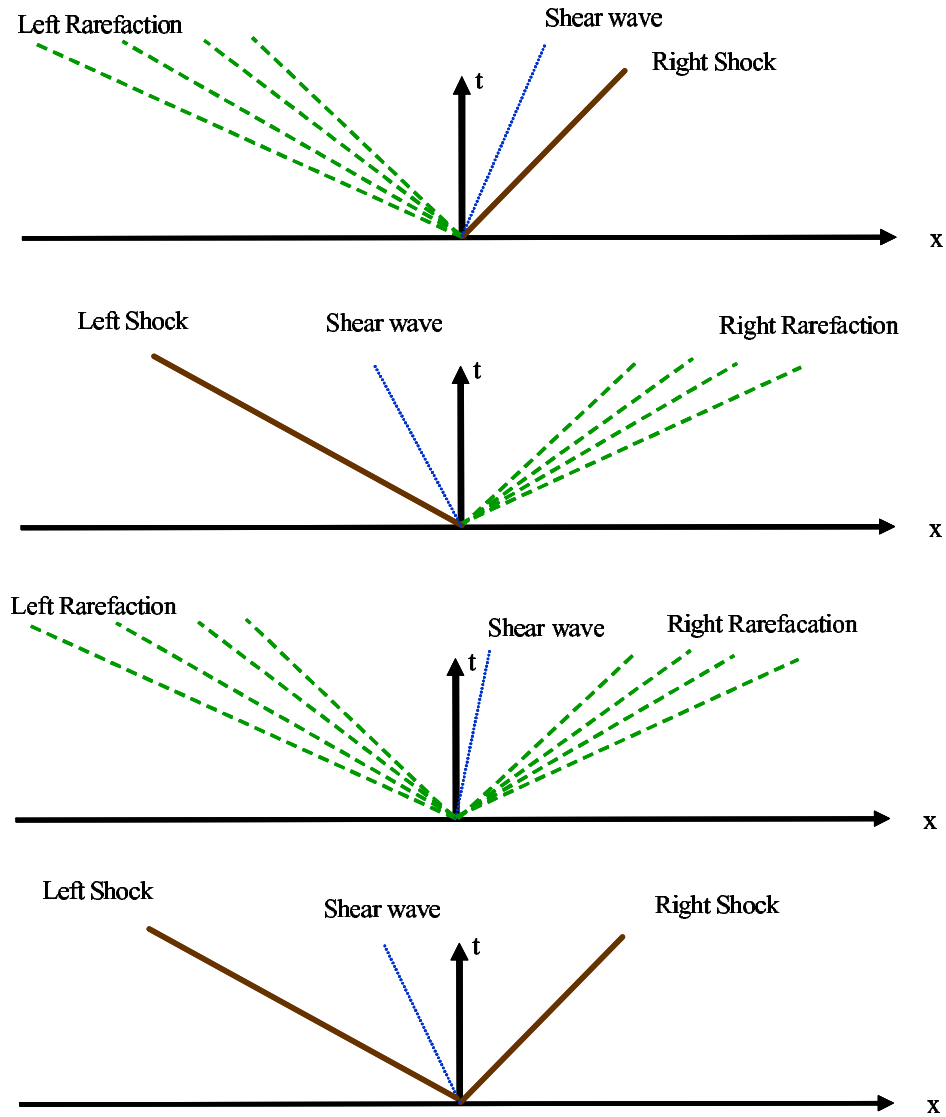


FIGURA 2.5. Posibles combinaciones entre tipos de ondas. Fuente: Sleight, 2006.

La estrategia para ambos tipos de onda será despejar la velocidad u_* en función de h_* y las variables del estado contiguo, ya que esto será de utilidad en la programación de un algoritmo de resolución, que será detallado en el siguiente capítulo.

2.3.1. Ondas de Depresión

Como las variables de estado varían lentamente a través de este tipo de ondas es posible utilizar los invariantes de Riemann definidos anteriormente. Tomando el caso de una onda

de depresión desplazándose a la izquierda, se tendrá el estado de la izquierda, h_L y u_L , y los por determinar, h_* y u_* , separados por un abanico de curvas características negativas, limitadas por $u_L - c_L$ y $u_* - c_*$, de izquierda a derecha.

Este abanico puede ser atravesado por una característica positiva, donde se debe cumplir $u + 2c = cte$, de modo que se puede conectar ambos estados a través de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} u_L + 2c_L &= u_* + 2c_* \\ u_* &= u_L + 2(c_L - c_*) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para encontrar el estado al interior del abanico de la onda de depresión se debe seguir una característica negativa del tipo $dx/dt = u_P - c_P$, e intersectarla con la característica positiva descrita anteriormente, de modo que $u_L + 2c_L = u_P + 2c_P$. De aquí no es difícil despejar las variables dentro del abanico, en función de la trayectoria elegida, como

$$c_P = \frac{1}{3} \left(u_L + 2c_L - \frac{dx}{dt} \right) \quad (2.43)$$

$$u_P = \frac{1}{3} \left(u_L + 2c_L + \frac{2dx}{dt} \right) \quad (2.44)$$

Análogamente se pueden encontrar las relaciones para una onda de depresión que se desplaza hacia la derecha, utilizando en este caso una característica negativa para cruzar el abanico formado por características positivas.

$$\begin{aligned} u_R - 2c_R &= u_* - 2c_* \\ u_* &= u_R + 2(c_* - c_R) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$c_P = \frac{1}{3} \left(-u_R + 2c_R + \frac{dx}{dt} \right) \quad (2.46)$$

$$u_P = \frac{1}{3} \left(u_R - 2c_R + \frac{2dx}{dt} \right) \quad (2.47)$$

Para el método de resolución que se utilizará se deben expresar las velocidades en función de los estados vecinos y de la altura de agua que se desea determinar

$$u_* = u_L - f_L(h_*, h_L) \quad (2.48)$$

$$u_* = u_R + f_R(h_*, h_R) \quad (2.49)$$

siendo para el caso de ondas de depresión

$$\begin{aligned} f_L &= 2(c_* - c_L) \\ f_L &= 2\left(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh_L}\right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} f_R &= 2(c_* - c_R) \\ f_R &= 2\left(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh_R}\right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Como su nombre lo indica, las ondas de depresión se caracterizan por una disminución de la altura de agua, de modo que una *rarefraction* desplazándose hacia la izquierda deberá cumplir $h_* \leq h_L$, y una desplazándose a la derecha $h_* \leq h_R$.

2.3.2. Ondas de Shock

En este caso, se produce una discontinuidad a lo largo de la onda de shock y la teoría mostrada hasta ahora no es utilizable, por lo tanto, se recurre a la analogía de lo que ocurre en un resalto hidráulico, aplicando las condiciones de Rankine-Hugoniot.

Para esto, se lleva la discontinuidad a un marco de referencia estacionario restando a las velocidades de ambos estados la velocidad de propagación del shock S_L . Considerando el caso de un shock que se desliza a la izquierda, las nuevas velocidades serán

$$\hat{u}_L = u_L - S_L \quad (2.52)$$

$$\hat{u}_* = u_* - S_L \quad (2.53)$$

y las condiciones impuestas serán la conservación del flujo másico y de cantidad de movimiento a través de la discontinuidad

$$h_* \hat{u}_* = h_L \hat{u}_L \quad (2.54)$$

$$h_* \hat{u}_*^2 + \frac{gh_*^2}{2} = h_L \hat{u}_L^2 + \frac{gh_L^2}{2} \quad (2.55)$$

Definiendo el flujo másico como $M_L \equiv h_* \hat{u}_* = h_L \hat{u}_L$, y manipulando las ecuaciones 2.55, 2.52 y 2.53 es posible expresarlo sólo en función de las alturas de agua, como

$$M_L = \sqrt{\frac{1}{2}g(h_* + h_L)h_*h_L} \quad (2.56)$$

A partir de las relaciones de velocidad, 2.52 y 2.53, se puede despejar u_* en función de las alturas de agua, como se hizo para el caso de las ondas de depresión

$$\begin{aligned} u_* - u_L &= \hat{u}_* - \hat{u}_L \\ u_* &= u_L - (\hat{u}_L - \hat{u}_*) \\ u_* &= u_L - \left(\frac{M_L}{h_L} - \frac{M_L}{h_*} \right) \\ u_* &= u_L - \sqrt{\frac{1}{2}g(h_* + h_L)h_*h_L} \left(\frac{h_* - h_L}{h_*h_L} \right) \\ u_* &= u_L - (h_* - h_L) \sqrt{\frac{1}{2}g \left(\frac{h_* + h_L}{h_*h_L} \right)} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$u_* = u_L - f_L(h_*h_L) \quad (2.58)$$

Finalmente, la velocidad de desplazamiento del shock puede calcularse como sigue

$$\begin{aligned} S_L &= u_L - \hat{u}_L \\ S_L &= u_L - \frac{M_L}{h_L} \\ S_L &= u_L - \sqrt{gh_L} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{(h_* + h_L)h_*}{h_L^2} \right)} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$S_L = u_L - c_L q_L \quad (2.60)$$

donde $q_L = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{(h_* + h_L)h_*}{h_L^2} \right)}$ es una función definida para facilitar la lectura.

En forma análoga para el caso de un shock propagándose hacia la derecha, se puede demostrar que la velocidad en la zona de interés y la celeridad del shock, u_* y S_R respectivamente, están dadas por

$$u_* = u_R + (h_* - h_R) \sqrt{\frac{1}{2} g \left(\frac{h_* h_R}{h_* h_R} \right)} \quad (2.61)$$

$$u_* = u_R + f_R(h_*, h_R) \quad (2.62)$$

$$S_R = u_R + c_R q_R \quad (2.63)$$

utilizando la misma notación anterior, de modo que se produce una simetría similar al caso de las ondas de depresión.

A modo de resumen de las características de cada tipo de onda se tiene la siguiente función que relaciona el estado en la zona de interés, *the star region* de la figura 2.4, con los estados contiguos, teniendo $u_* = u_L - f_L(h_*, h_L)$ y $u_* = u_R + f_R(h_*, h_R)$, con las siguientes funciones simétricas

$$f_L = \begin{cases} 2(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh_L}) & \text{si } h_* \leq h_L \quad (\text{rarefraction}) \\ (h_* - h_L) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{h_* + h_L}{h_* h_L} \right)} & \text{si } h_* > h_L \quad (\text{shock}) \end{cases} \quad (2.64)$$

$$f_R = \begin{cases} 2(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh_R}) & \text{si } h_* \leq h_R \quad (\text{rarefraction}) \\ (h_* - h_R) \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{h_* + h_R}{h_* h_R} \right)} & \text{si } h_* > h_R \quad (\text{shock}) \end{cases} \quad (2.65)$$

3. IMPLEMENTACION NUMERICA

Este capítulo trata sobre el desarrollo del modelo Saint Venant, basado en las ecuaciones tratadas en el capítulo anterior y en las ideas sobre métodos de capturas de shock (Toro, 2001), que permiten la existencia de discontinuidades en la solución de las ecuaciones de aguas someras, y por lo tanto, sirven para reproducir resaltos hidráulicos y olas rompientes, así como también pueden lidiar con la existencia de zonas secas dentro del dominio de integración, permitiendo a este tipo de modelos poder representar el movimiento del agua desde la zona de surf interno hasta la zona de *swash*.

El modelo utiliza métodos balanceados para incorporar los términos fuentes, con lo que se logra no producir oscilaciones numéricas en estado estacionario, y tender a él desde un estado perturbado. Esta metodología es de segundo orden en Δx , mientras que la integración en el tiempo se realiza con un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden en Δt , al igual que el modelo Serr1D.

3.1. Esquema de Volúmenes Finitos

El espacio de trabajo del modelo será el plano $x - t$, como se ha discutido hasta ahora, y para presentar el marco de referencia para el modelo retomemos la ecuación 2.24 presentada en el capítulo anterior para el caso homogéneo, i.e. sin términos fuentes asociados a la pendiente de fondo.

$$\oint (\mathbf{U} \, d\mathbf{x} - \mathbf{F} \, dt) = 0 \quad (3.1)$$

Básicamente, lo que dice esta ecuación es que si se tuviera un volumen de control en el espacio $x - t$ existiría una relación entre las variables de estado de ese volumen y los flujos a través de su superficie. La figura 3.1 muestra un ejemplo de volumen de control, que podría ser un nodo del modelo que se pretende implementar.

El volumen de control está limitado por los intervalos $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ en el espacio, donde x_i es la coordenada del nodo, y $[t_n, t_{n+1}]$ en el tiempo, donde en el tiempo t_n las variables son conocidas y el objetivo es determinarlas para el tiempo t_{n+1} . Desarrollando

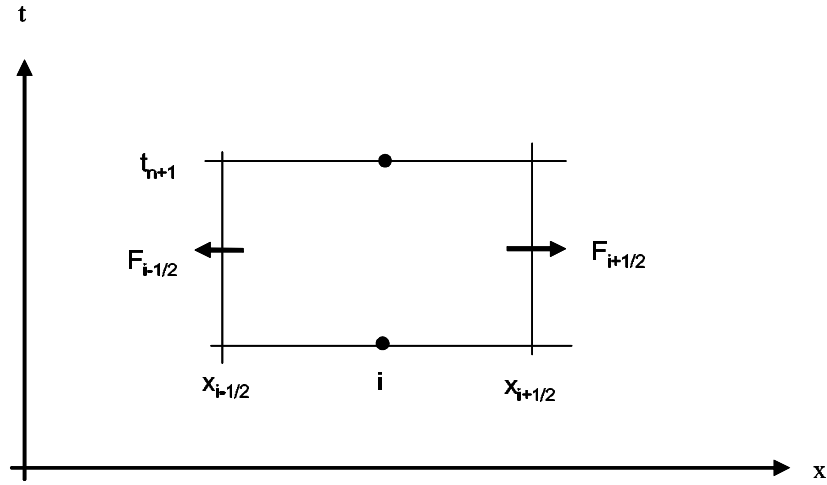


FIGURA 3.1. Flujos a través del volumen de control definido por un nodo de largo Δx entre tiempos separados por Δt .

la ecuación 3.1 se obtiene lo siguiente

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t_{n+1}) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t_n) dx - \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} F(U(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(U(x_{i-1/2}, t)) dt \right) \quad (3.2)$$

A pesar de la apariencia confusa, los términos que aparecen en 3.2 tienen claros significados físicos que pueden verse más claramente utilizando una notación diferente. Considerando que la distancia entre los bordes del volumen de control está dada por $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ y $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, entonces los términos descritos recientemente representan promedios integrales del tipo

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t_n) dx \quad (3.3)$$

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(U(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (3.4)$$

donde U_i^n representa el promedio espacial de las variables de estado en el interior del nodo, mientras que $F_{i+1/2}$ es el flujo en la frontera derecha, que equivale al promedio temporal de las variables de ese punto desde su estado inicial conocido en el tiempo t_n , hasta su nuevo valor en el tiempo t_{n+1} .

Reescribiendo 3.2 con las definiciones recién dadas se llega a

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) \quad (3.5)$$

donde, hasta ahora, no se han hecho aproximaciones de ningún tipo, de modo que si se pudieran evaluar los flujos en los bordes de cada celda, la integración sería directa, pero para determinarlos se necesita conocer las variables en el tiempo t_{n+1} , que es precisamente el objetivo.

El esquema numérico utilizado será el descrito en la figura 3.2, con nodos de igual tamaño Δx que donde las variables de estado se considerarán constantes, y por lo tanto, habrán discontinuidades en los bordes de cada nodo.

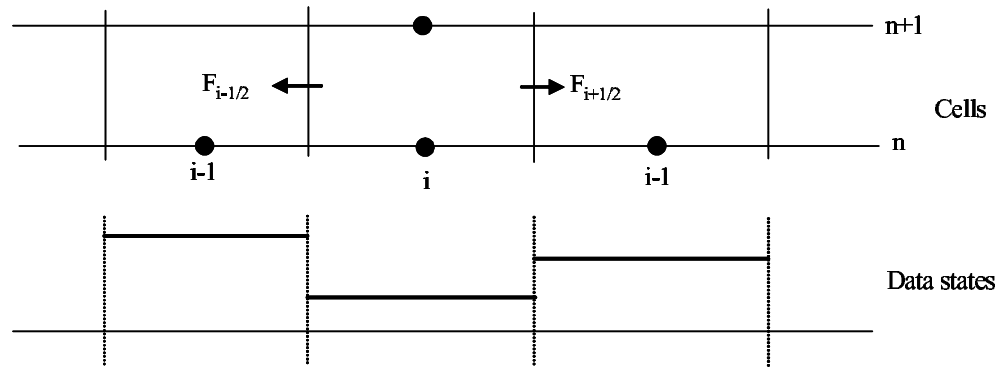


FIGURA 3.2. Esquema de volúmenes finitos con datos discontinuos y flujos entre celdas.

Bajo este esquema, la estrategia para evaluar los flujos entre celdas es utilizar el problema de Riemann descrito en el capítulo anterior, ya que se trata de dos estados separados por una discontinuidad, y determinar las variables de estado en la interfaz de las celdas, para un tiempo entre t_n y t_{n+1} y con este valor calcular el flujo determinado por 3.4.

Como interesa describir con la mayor precisión posible el movimiento de la línea de costa, se opta por resolver de forma exacta el problema de Riemann en cada interfaz, ya que es una aproximación matemáticamente elegante y correcta, y aún cuando puede significar un esfuerzo adicional en tiempo de procesamiento, los dominios en los cuales se planea utilizar este modelo no son de grandes dimensiones por lo que el aumento en el tiempo de ejecución no debiera transformarse en un impedimento para su utilización.

3.1.1. Solver Exacto de Riemann: Caso Fondo Mojado

En el capítulo anterior se mostraron las relaciones que debe cumplir la velocidad u_* con los estados vecinos y la altura h_* , dependiendo de si las ondas que conectan los esos estados son *shocks* o rarefraction. El sistema tenía la característica de ser simétrico, es decir, las funciones $f_L(h_*, h_L)$ (2.64) y $f_R(h_*, h_R)$ (2.65) eran idénticas, aunque se usaban en forma distinta para determinar u_* ,

$$u_* = u_L - f_L(h_*, h_L) \quad (3.6)$$

$$u_* = u_R + f_R(h_*, h_R) \quad (3.7)$$

sin embargo, la velocidad u_* debe ser la misma, calculada por cualquiera de las dos ecuaciones, y de aquí aparece la función objetivo que es la clave de este solver

$$f(h) \equiv f_L(h, h_L) + f_R(h, h_R) + \Delta u = 0 \quad (3.8)$$

$$\Delta u \equiv u_R - u_L \quad (3.9)$$

Es demostrable que la ecuación 3.8 es monótona creciente y, por lo tanto, tendrá siempre una sola raíz h_* que resuelve el problema de Riemann (Toro, 2001). La forma de la curva estará determinada por los estados involucrados, pero la altura de la solución dependerá de Δu , y por lo tanto existe un valor crítico para el cual las soluciones encontradas no tienen sentido físico, ya que se obtienen alturas de agua negativas.

La condición crítica es llamada *depth positivity condition* y está dada por

$$(\Delta u)_{critico} = 2(c_L + c_R) > u_R - u_L \quad (3.10)$$

y cuando no se cumple, se genera una zona seca en el dominio, caso que será revisado más adelante ya que tiene un tratamiento diferente. Cada vez que la condición de positividad se cumpla se estará en presencia de un dominio mojado, que seguirá estándolo en el tiempo siguiente, y la presente metodología será válida.

Para obtener el valor de h_* buscado, se resuelve numéricamente la ecuación 3.8 a través de un algoritmo iterativo, como Newton-Raphson, para el cual se necesitará evaluar las derivadas de las funciones f_L y f_R , y un valor de partida para la iteración.

$$f'_K(h, h_K) = \begin{cases} \frac{g}{cK} & \text{si } h \leq h_K \\ g_K(h) - \frac{g(h - h_K)}{4h^2 g_K(h)} & \text{si } h > h_K \end{cases} \quad (3.11)$$

Como ambas ecuaciones son idénticas, sus derivadas tendrán la misma forma, dada por la ecuación 3.11, donde K puede ser tanto L o R , dependiendo del caso.

Para el punto de partida se puede utilizar una aproximación asumiendo que ambas ondas son de depresión, con lo cual se obtiene una solución numérica.

$$h^{(0)} = \frac{1}{g} \left(\frac{c_L + c_R}{2} - \frac{u_R - u_L}{4} \right)^2 \quad (3.12)$$

Una vez alcanzada cierta tolerancia entre dos soluciones consecutivas la iteración se detiene y se obtiene el valor de h_* , y luego se despeja la velocidad como

$$u_* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}(f_R(h_*, h_R) - f_L(h_*, h_L)) \quad (3.13)$$

Una vez obtenido el estado al interior de la *star region* se debe determinar el valor de las variables de estado en el punto de interés, que para el caso puntual de la aplicación que se desea del solver (evaluar los flujos entre celdas) debe ser en la interfaz, pero en una forma más general, el punto que se quiere mostrar será una trayectoria en el espacio $x - t$ y tendrá la forma de $S = x/t$, que para el caso que nos interesa será $S = 0$. Como ya se conocen los tipos de onda sólo se debe determinar la posición de este punto en el espacio ya determinado.

Si $h_* > h_L$ entonces la onda de la izquierda es un shock con velocidad S_L

$$S_L = u_L - c_L q_L \quad (3.14)$$

$$q_L = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{(h_* + h_L)h_*}{h_L * 2} \right)} \quad (3.15)$$

y por lo tanto, el estado del punto de interés será U_L si $S < S_L$, o bien, U_* si $S > S_L$.

Por otro lado, si $h_* \leq h_L$ se tendrá una onda de depresión, limitada por las trayectorias

$$S_L^{head} = u_L - c_L \quad (3.16)$$

$$S_L^{tail} = u_* - c_* \quad (3.17)$$

de donde se desprende que si $S < S_L^{head}$ el estado del punto será U_L , y si $S > S_L^{tail}$ será U_* , pero si se encuentra dentro del abanico de la onda de depresión se deberá calcular el estado en función de la trayectoria de la muestra, esto es

$$U_L^{abanico} \equiv \begin{cases} c = \frac{1}{3}(u_L + 2c_L - S) \\ u = \frac{1}{3}(u_L + 2c_L + 2S) \end{cases} \quad (3.18)$$

Análogamente, para las curvas de la derecha se tendrá que si $h_* > h_R$ se producirá un shock que se propagará con velocidad S_R , y en este caso, si $S < S_R$ el estado del punto de muestra será U_* , pero si $S > S_R$ será igual al estado de la derecha U_R .

$$S_R = u_R - c_R q_R \quad (3.19)$$

$$q_R = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{(h_* + h_R)h_*}{h_R * 2} \right)} \quad (3.20)$$

Si la onda desarrollada es de depresión, $h_* \leq h_R$, el abanico de transición estará limitado por las curvas S_R^{head} y S_R^{tail} , y el estado del punto buscado será U_* si $S < S_R^{tail}$, o bien, U_R si $S > S_R^{head}$.

$$S_R^{head} = u_R + c_R \quad (3.21)$$

$$S_R^{tail} = u_* + c_* \quad (3.22)$$

En el caso en que la solución se encuentre dentro del abanico de la *rarefraction*, las variables de estado estarán dadas por

$$U_R^{abanico} \equiv \begin{cases} c = \frac{1}{3}(-u_R + 2c_L + S) \\ u = \frac{1}{3}(u_L - 2c_L + 2S) \end{cases} \quad (3.23)$$

3.1.2. Solver Exacto de Riemann: Caso Fondo Seco

Hasta este punto es posible encontrar la solución al problema de Riemann, y determinar el presente de la onda, siempre y cuando se cumpla la condición de positividad de la profundidad, y por lo tanto, aún no es aplicable para el caso en que existe una interfaz entre el fluido y un fondo seco. Para incorporar este caso se deben conocer los tipos de onda generados en este tipo de interfaces.

Solamente pueden darse tres casos, mostrados en la figura 3.3; que el espacio seco esté a la izquierda o a la derecha de la discontinuidad, o que sea generado en el centro. En cualquiera de los tres, la onda producida será del tipo de depresión, ya que no puede generarse un shock si es que no hay presencia de agua (Toro, 2001).

En el caso donde el sector seco se encuentra a la derecha, una onda de depresión se propagará hacia la derecha, siendo la cola de su abanico el frente que separará la zona mojada de la seca. El abanico estará limitado por las trayectorias

$$S_L^{head} = u_L - c_L \quad (3.24)$$

$$S_L^{tail} = u_L + 2c_L \quad (3.25)$$

donde la trayectoria de la cola se obtiene cruzando el abanico con una trayectoria positiva que debe cumplir $u + 2c = cte$, y como no hay altura de agua en el frente, la celeridad de la onda debe ser nula.

Al igual que para el caso de fondo mojado, se debe identificar la posición del punto de interés con respecto a las ondas generadas, y las variables de estado de ese punto estarán

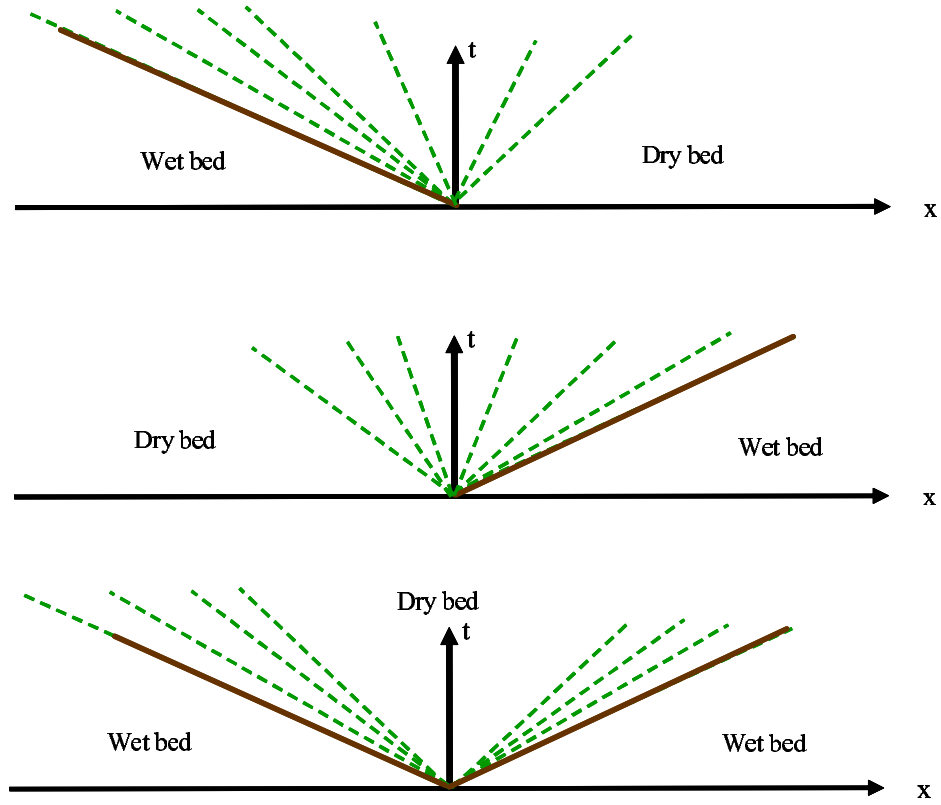


FIGURA 3.3. Combinación de ondas de depresión para el caso de presencia de fondo seco. Fuente: Sleigh 2006.

dadas por

$$U_L S = \begin{cases} U_L & \text{si } S \leq S_L^{head} \\ U_L^{abanico} & \text{si } S_L^{head} \leq S \leq S_L^{tail} \\ U_0 & \text{si } S_L^{tail} \leq S \end{cases} \quad (3.26)$$

donde $U_L^{abanico}$ corresponde a la definición dada para el caso de fondo mojado, U_L es el estado a la izquierda del frente seco y U_0 es el estado seco, i.e. $h_0 = 0$, $u_0 = 0$.

Análogamente, si el estado seco se encuentra a la izquierda se tendrá una onda de depresión hacia la derecha, cuyo abanico estará limitado por las características

$$S_R^{head} = u_R + c_R \quad (3.27)$$

$$S_R^{tail} = u_R - 2c_R \quad (3.28)$$

y es estado del punto escogido estará dado por

$$U_R S = \begin{cases} U_0 & si & S \leq S_R^{tail} \\ U_R^{abanico} & si & S_R^{tail} \leq S \leq S_R^{head} \\ U_R & si & S_R^{head} \leq S \end{cases} \quad (3.29)$$

donde nuevamente $U_R^{abanico}$ es el descrito anteriormente.

El último caso es la generación de un fondo seco en la interfaz de la celda, como se ve en el tercer gráfico de la figura 3.3. En este caso los abanicos de ambas ondas de depresión no alcanzan a cruzarse, y por lo tanto no llega información a ese punto del espacio. Formalmente, ocurre que

$$S_L^{tail} \leq S_R^{tail} \quad (3.30)$$

$$u_L + 2c_L \leq u_R - 2c_R \quad (3.31)$$

$$2(c_L + c_R) \leq u_R - u_L \quad (3.32)$$

$$(\Delta u)_{crit} \leq u_R - u_L \quad (3.33)$$

y, por lo tanto, no se cumple la condición de positividad impuesta por la ecuación 3.10, lo cual es totalmente congruente con el análisis hecho anteriormente, ya que se está en frente a un sector seco del dominio.

En este caso el punto escogido puede estar tanto en los estados de izquierda o derecha, como en el estado seco del centro, o bien, al interior de las ondas de depresión que separan estos tres estados.

$$U_S = \begin{cases} U_L S & si & S \leq S_L^{tail} \\ U_0 & si & S_L^{tail} \leq S \leq S_R^{tail} \\ U_R S & si & S_R^{tail} \leq S \end{cases} \quad (3.34)$$

3.1.3. Tests de Toro para Solver de Riemann

Hasta este punto, se ha desarrollado un solver que encuentra las solución al problema de Riemann para el caso de fondo plano. Toro (2001) además de poner a disposición el

código desarrollado con sus trabajos, pone a disposición cinco test altamente demandantes para probar los solver exactamente.

Todos los test consisten en un canal horizontal de 50 metros de largo, en el que se encuentra una discontinuidad en algún punto del canal, de coordenada x_0 . Para cada uno se pide el resultado para todos los puntos del canal en un tiempo dado, t_{out} , como se muestra en la tabla 3.1.

TABLA 3.1. Datos de los 5 test de Toro

Test	$h_L(m)$	$u_L(m/2)$	$h_R(m)$	$u_R(m/2)$	$x_0(m)$	$t_{out}(s)$
1	1.0	2.5	0.1	0.0	10	7.0
2	1.0	-5.0	1.0	5.0	25	2.5
3	1.0	0.0	0.0	0.0	20	4.0
4	0.0	0.0	1.0	0.0	30	4.0
5	0.1	-3.0	0.1	3.0	25	5.0

El primer test consiste en una onda de shock desplazándose hacia aguas menos profundas, produciendo una onda de depresión crítica, es decir, que se propaga a la misma velocidad de la celeridad de onda, y por lo tanto es un test exigente ya que el solver no sólo tiene que representar correctamente la discontinuidad que se propaga con el shock, sino que debe evitar generar oscilaciones numéricas en la onda de depresión.

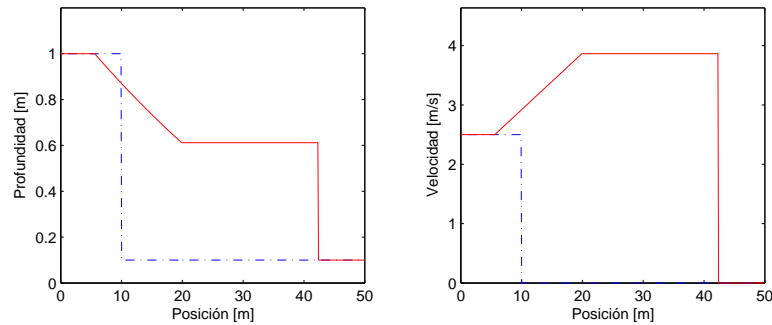


FIGURA 3.4. Test 1: Onda de depresión crítica a la izquierda, $t_{out} = 7.0[s]$. La línea punteada corresponde a la situación inicial, mientras la línea sólida al tiempo de evaluación.

El segundo test recrea dos ondas de depresión que se desplazan en sentidos contrarios, generando una altura de agua muy pequeña en el centro, lo que suele ser problema para

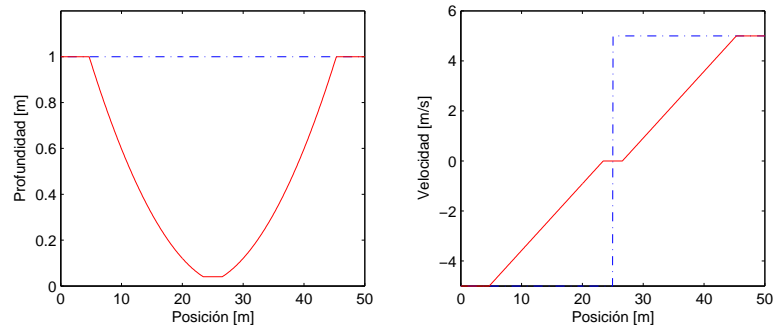


FIGURA 3.5. Test 2: Dos ondas de depresión, $t_{out} = 2.5[s]$

este tipo de solvers, ya que suelen interpretar profundidades pequeñas como negativas, lo que claramente no tiene sentido físico.

Los tres últimos test tienen relación con la capacidad del solver de lidiar con frentes secos que separan el dominio en dos zonas, la seca y la mojada. Los test 3 y 4 son análogos, ya que cada uno representa el rompimiento de presa sobre una superficie seca, hacia derecha e izquierda, respectivamente, mientras que el test recrea la generación de un fondo seco en el medio de ambos estados.

Las figuras 3.4 a 3.8 muestran los resultados obtenidos con el solver desarrollado, donde se observa una igualdad con los resultados presentados por Toro (2001). Las curvas punteadas (—) representan los estados iniciales, mientras que las curvas sólidas (—) muestran los resultados en el tiempo de salida.

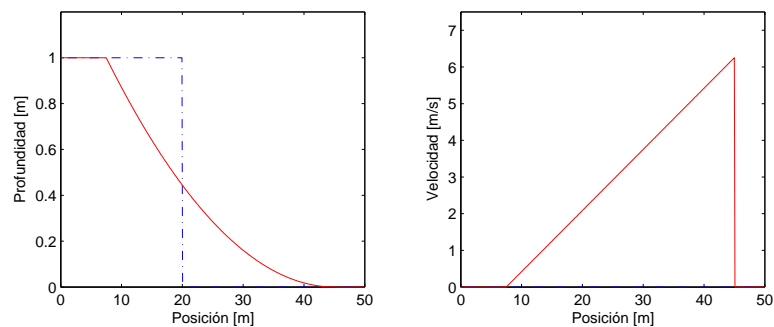


FIGURA 3.6. Test 3: Fondo seco a la derecha, $t_{out} = 4.0[s]$

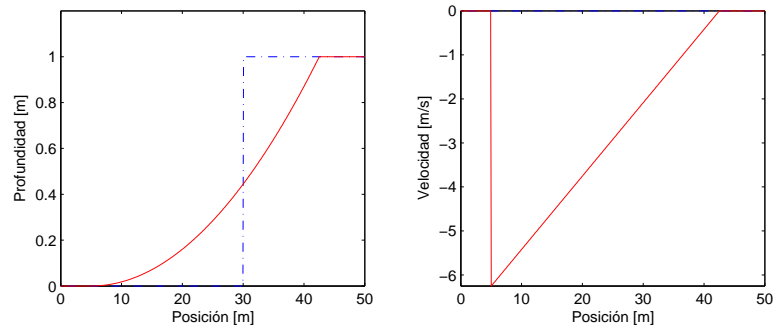


FIGURA 3.7. Test 4: Fondo seco a la izquierda, $t_{out} = 4.0[s]$

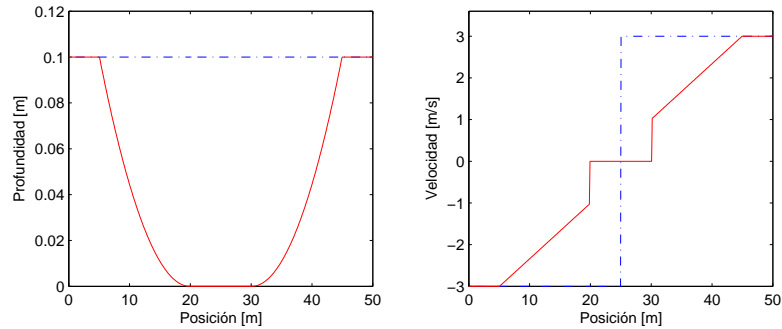


FIGURA 3.8. Test 5: Generación de fondo seco, $t_{out} = 5.0[s]$

3.2. Integración en el Tiempo

La base para la integración de las ecuaciones de Saint Venant está dada por la ecuación 3.5, donde se indica en forma explícita cómo obtener el valor de las variables de estado en un tiempo t_{n+1} si se conoce el estado del tiempo t_n y evaluando los flujos entre las celdas con la solución al problema de Riemann local.

Sin embargo, este enfoque es sólo de primer orden en el tiempo (y en el espacio también) y debe ser mejorado para que su precisión pueda ser comparable con la del modelo Serr1D, con el cual se pretende acoplar este modelo. Para esto se implementa una

integración numérica del tipo Runge-Kutta en 4 etapas, que se detalla a continuación.

$$\hat{U}_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1/2}(U_{i+1/2}^n(0)^*) - F_{i-1/2}(U_{i-1/2}^n(0)^*)) \quad (3.35)$$

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1/2}(\hat{U}_{i+1/2}^{n+1/2}(0)^*) - F_{i-1/2}(\hat{U}_{i-1/2}^{n+1/2}(0)^*)) \quad (3.36)$$

$$\hat{U}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}(U_{i+1/2}^{n+1/2}(0)^*) - F_{i-1/2}(U_{i-1/2}^{n+1/2}(0)^*)) \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{6\Delta x} \{ & F_{i+1/2}(U_{i+1/2}^n(0)^*) - F_{i-1/2}(U_{i-1/2}^n(0)^*) + \\ & + 2(F_{i+1/2}(\hat{U}_{i+1/2}^{n+1/2}(0)^*) - F_{i-1/2}(\hat{U}_{i-1/2}^{n+1/2}(0)^*)) \\ & + 2(F_{i+1/2}(U_{i+1/2}^{n+1/2}(0)^*) - F_{i-1/2}(U_{i-1/2}^{n+1/2}(0)^*)) \\ & + F_{i+1/2}(\hat{U}_i^{n+1}(0)^*) - F_{i-1/2}(\hat{U}_i^{n+1}(0)^*) \} \end{aligned} \quad (3.38)$$

La estrategia de integración avanza medio paso de tiempo por vez, $\Delta t/2$, utilizando los puntos que predice para obtener una mejor estimación para el paso de tiempo completo, Δt . Lo primero que se hace es obtener una aproximación para las variables en el tiempo $t_{n+1/2}$ con la información que inicialmente se tiene, ecuación 3.35, obteniéndose $\hat{U}_i^{n+1/2}$, y luego se utiliza ese valor para mejorar la aproximación y obtener el valor final de las variables en $t_{n+1/2}$, utilizando 3.36.

Con el valor de U_i^n determinado se procede en forma análoga para avanzar el $\Delta t/2$ que falta, y se obtiene una primera aproximación para \hat{U}_i^{n+1} con 3.37. Para obtener el valor definitivo de las variables en t_n se utiliza toda la información generada hasta este punto, evaluando la integral como el área del trapecio que forman los puntos hasta $t_{n+1/2}$ más el área del triángulo desde ese punto hasta t_n .

Por esto, la ecuación 3.38 realiza un promedio ponderado de todos los flujos calculados hasta ese momento, dándole mayor peso a los puntos intermedios del intervalo que han sido estimados y corregidos.

Para mayor información sobre esta metodología de integración numérica el lector queda referido a (Ferziger & Peric, 1996) y sobre la implementación de este algoritmo en el modelo Serr1D a (Cienfuegos, Barthelemy, & Bonneton, 2006).

3.3. Términos Fuentes

Hasta este punto, se tiene un modelo Saint Venant con captura de shocks capaz de representar solamente el caso de canales sin pendiente, y es que el tema de la incorporación de los términos fuentes suele ser dejado un poco de lado en la literatura relacionada con este tipo de modelos, ya que al ser no nulos, cambian la estructura de la ecuación diferencial que se debe resolver y complica la matemática del problema y limitas las estrategias de solución.

El problema no homogéneo que se intenta resolver está dado por el sistema

$$\left. \begin{array}{l} ED : \quad U_t + F(U)_x = S(U) \\ CI : \quad U(x, t_n) = U^n \end{array} \right\} \quad (3.39)$$

donde se conocen las condiciones iniciales, U^n , y se quiere determinar la evolución de las variables en el tiempo, respetando la ecuación diferencial de 3.39.

El enfoque más comúnmente utilizado es una partición del problema en dos partes que se puedan manejar correctamente, dado que se tienen las herramientas para hacerlo. Para esto se separa el problema completo en la parte de advección, debida al flujo entre celdas, y en el forzaje de los términos fuentes.

$$\left. \begin{array}{l} ED : \quad U_t + F(U)_x = 0 \\ CI : \quad U(x, t_n) = U^n \end{array} \right\} \Rightarrow U^{adv} \quad (3.40)$$

$$\left. \begin{array}{l} ED : \quad U_t = S(U) \\ CI : \quad U^{adv} \end{array} \right\} \Rightarrow U^{n+1} \quad (3.41)$$

Básicamente, se integra el problema homogéneo un paso de tiempo Δt y se obtienen las variables debidas únicamente a la advección, y ese valor es utilizado en el problema 3.41 donde sólo se considera la acción de los términos fuentes. La solución completa será entonces del tipo

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) + \Delta t S(U_i^{(s)}) \quad (3.42)$$

donde los flujos inter celdas están evaluados en las soluciones del problema de Riemann para los valores iniciales de U^n .

Sin embargo, no existe claridad sobre cuál debe ser el punto de evaluación de los términos fuentes, $U_i^{(s)}$, y aunque la opción lógica es la solución del problema homogéneo, U^{adv} , no existe consenso sobre si ésta es la mejor elección, y un sin número de metodologías implícitas han sido desarrolladas para encontrar un punto de evaluación. Por lo demás, esta metodología implícitamente asume una superposición lineal de ambos operadores, en condiciones que es sabido que las ecuaciones de aguas someras son altamente no lineales, por lo que es difícil esperar obtener buenos resultados con esta metodología.

Aún más, el problema que suelen tener estos modelos es el no poder mantener el estado estacionario, es decir, el caso en que las variables no cambian al avanzar un paso de tiempo, e incluso no alcanzan nunca este estado, dependiendo del estado desde donde partió el sistema.

En estado estacionario se debiera cumplir que $U_t = 0$ y por lo tanto la ecuación 3.39 se transforma en

$$F(U)_x = S(U) \quad (3.43)$$

y por lo tanto, debiera existir un **equilibrio** entre términos fuentes y los flujos entre celdas que están forzando al fluido a moverse, y si ese equilibrio natural no puede ser representado por el modelo, entonces el modelo está perdiendo gran parte de fenómenos que intenta reproducir. Ésta es la idea fundamental para los métodos balanceados, o *well balanced*.

3.3.1. Métodos “Well Balanced”

Gran parte del modelo desarrollado en esta memoria se encuentra inspirado en el trabajo de Marche (2005) para su doctorado, durante el cual desarrolló un modelo Saint Venant de orden superior al presentado acá, incorporando términos fuentes adicionales a la pendiente de fondo, y analizando su aplicación a la morfodinámica e hidrodinámica litoral, y que además demostraba la capacidad de tender hacia el estado estacionario del sistema

independientemente del estado inicial, como también de mantener ese estado aún en batimetrías no uniformes abruptas, que suelen generar oscilaciones numéricas no físicas en otros modelos de este tipo (oscilaciones parásitas), asociadas a tratamientos deficientes de los términos fuentes (Marche, 2007).

La idea central de todo modelo balanceado es mantener el equilibrio descrito por las ecuaciones del movimiento debe mantenerse en el esquema numérico que interpretará esas ecuaciones. De la ecuación 3.43 se desprende que

$$hu = cte \quad (3.44)$$

$$\frac{1}{2}u^2 + g(h + f) = cte \quad (3.45)$$

donde la primera relación indica que el caudal debe ser constante en todo el dominio. Particularmente, si el fluido está en reposo se deberá cumplir

$$\left(g\frac{h^2}{2}\right)_x + ghf_x = 0 \quad (3.46)$$

La ecuación 3.46 es conocida como **balance hidrostático** ya que representa el balance de fuerzas entre la presión hidrostática y el peso propio de la columna de agua sobre la pendiente de fondo, y lo que produce que muchos de los modelos de este tipo no estén balanceados es el hecho de que esta relación queda separada en los términos de flujo y fuentes, por lo que no se evalúa con los mismos valores, produciendo el desbalance. Manipulando un poco la expresión, se obtiene que

$$g(h + f)_x = gH_x = 0 \quad (3.47)$$

es decir, en estado estacionario se debe cumplir que $H = h + f$, la cota de la superficie libre, se mantenga constante en el dominio, de modo que si se puede mantener el balance hidrostático en el interior del esquema numérico, el modelo estaría balanceado.

Hasta este punto se ha considerado que las variables se mantienen constantes al interior de cada nodo, y de ahí que sólo sea posible alcanzar un primer orden en el espacio, sin embargo, de aquí en adelante se considerará que la altura de agua puede variar dentro de la

celda, de modo que en sus bordes tendrá los valores de h_{iL} a la izquierda y h_{iR} a la derecha, y deben cumplir con

$$h_i = \frac{h_{iL} + h_{iR}}{2} \quad (3.48)$$

de modo de representar en conjunto el valor promediado de la celda. Estos valores en los bordes de la celda son conocidos como *limiters* y se utilizan para alcanzar mayor precisión en la integración numérica.

Una forma conservativa de representar la presión hidrostática en el sistema de volúmenes finitos, utilizando los limitadores definidos es

$$\left(g \frac{h^2}{2} \right)_x \approx \frac{g}{2} \frac{h_{iR}^2 - h_{iL}^2}{\Delta x} \quad (3.49)$$

Expandiendo esta expresión no es difícil demostrar que se encuentra equilibrada con el término debido a la pendiente de fondo

$$\frac{g}{2} \frac{h_{iR}^2 - h_{iL}^2}{\Delta x} = \frac{g}{2} \frac{(h_{iR} + h_{iL})(h_{iR} - h_{iL})}{\Delta x} \quad (3.50)$$

$$= g \frac{(h_{iR} + h_{iL})}{2} \frac{(H_{iR} - f_{iR} - (H_{iL} - f_{iL}))}{\Delta x} \quad (3.51)$$

$$= -gh \frac{f_{iR} - f_{iL}}{\Delta x} \quad (3.52)$$

$$\approx -gh f_x \quad (3.53)$$

de modo que si se pueden encontrar los limitadores de la cota de fondo que cumplan con promediar el valor real del nodo, se mantendría el balance hidrostático en un nivel numérico y el modelo estaría balanceado.

La metodología para incorporar los términos fuentes de una forma balanceada es conocida como *reconstrucción hidrostática* y está basada en el trabajo de Audusse, que otros autores han acogido e implementado. Para obtener mayor detalle de la metodología implementada en el presente modelo, el lector queda referido a (Noelle, Pankratz, Puppo, & Natvig, 2006).

El terreno ahora es idealizado como una función discontinua en cada nodo, es decir, el fondo es uniforme en cada celda y varía de una celda a otra, aunque se utilizarán limitadores para obtener los valores de la cota de fondo en los bordes de cada celda, para incorporarlos en el cálculo.

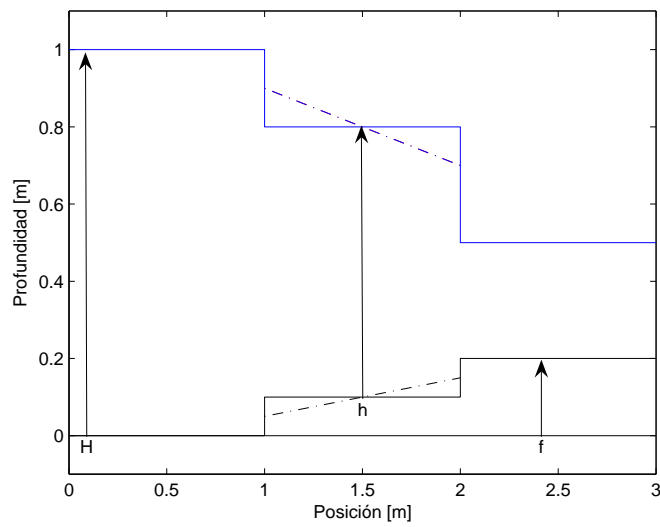


FIGURA 3.9. Esquema de reconstrucción minmod de altura de agua y cota de fondo.

Para esto, lo primero que se debe hacer es una reconstrucción **minmod** de la altura de agua en el nodo, h_i , y de la cota de la superficie libre, $H_i = h_i + f_i$. Esta reconstrucción obtiene la menor pendiente entre las variables de las celdas vecinas, Δ_i , y calcula los valores en los bordes de la celda como

$$h_{iR} = h_i + \frac{\Delta x}{2} \Delta_i \quad h_{iL} = h_i - \frac{\Delta x}{2} \Delta_i \quad (3.54)$$

de modo que el promedio de ambos valores siga siendo el valor de la celda.

Para determinar el valor de Δ_i se comparan las variaciones locales de las variables en comparación con las celdas contiguas

$$\Delta_{i+1/2} = \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x/2} \quad (3.55)$$

$$\Delta_{i-1/2} = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x/2} \quad (3.56)$$

$$\Delta_i = \minmod(\Delta_{i+1/2}, \Delta_{i-1/2}) \quad (3.57)$$

donde la función minmod está dada por

$$\minmod(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } x > 0, y > 0 \\ \max(x, y) & \text{si } x < 0, y < 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.58)$$

Una vez obtenidos los limitadores para H_i y h_i , se procede a calcular los correspondientes limitadores de la cota de fondo de cada celda, para que el nivel de agua sea constante en la interfaz de las celdas.

$$f_{iR} = H_{iR} - h_{iR} \quad f_{iL} = H_{iL} - h_{iL} \quad (3.59)$$

Hasta acá el procedimiento puede considerarse como una modificación de la reconstrucción MUSCL, bastante utilizada en este tipo de modelos, pero ahora se introducirá la reconstrucción hidrostática que pretende entregar los valores con los cuales se calcularán los flujos y los términos fuentes.

Para que no haya ninguna discontinuidad en la interfaz de la celda, se define $f_{i+1/2}$ como la cota de fondo en la interfaz y h_{iR}^* , $h_{(i+1)L}^*$ como las alturas de agua inmediatamente antes y después de ella, respectivamente.

$$f_{i+1/2}^* = \max(f_{iR}, f_{(i+1)L}) \quad (3.60)$$

$$h_{iR}^* = \max(0, H_{iR} - f_{i+1/2}) \quad (3.61)$$

$$h_{(i+1)L}^* = \max(0, H_{(i+1)L} - f_{i+1/2}) \quad (3.62)$$

Los flujos en la interfaz se calculan utilizando el solver exacto de Riemann desarrollado anteriormente, con las siguientes variables auxiliares como argumento

$$U_{iR}^* = \begin{pmatrix} h_{iR}^* \\ h_{iR}^* u_{iR} \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

$$U_{(i+1)L}^* = \begin{pmatrix} h_{(i+1)L}^* \\ h_{(i+1)L}^* u_{(i+1)L} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

lo que de todos modos alterará la forma en que se calculan los flujos, por lo que una corrección es necesaria. Los nuevos flujos se calcularán como

$$F_R = F(U_{iR}^*, U_{(i+1)L}^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_{iR}^2 - \frac{g}{2} (h_{iR}^*)^2 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

$$F_L = F(U_{(i-1)R}^*, U_{iL}^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_{iL}^2 - \frac{g}{2} (h_{iL}^*)^2 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

donde F representa a los flujos numéricos del caso homogéneo de las ecuaciones de Saint Venant. Finalmente, el término fuente se evalúa como

$$S_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} (h_{iR} + h_{iL}) (f_{iL} - f_{iR}) \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

de modo que cuando se produce el estado estacionario, los flujos calculados con el solver exacto de Riemann anularán los términos de fuente, balanceando el modelo.

Finalmente, la ecuación que se integra mediante el método de cuarto orden de Runge-Kutta, explicado anteriormente, es

$$\Delta x \frac{d}{dt} U_i(t) + F^R - F^L = S_i \quad (3.68)$$

En el siguiente capítulo se muestran los experimentos numéricos que permiten afirmar que el modelo desarrollado en este trabajo está realmente balanceado.

3.4. Condiciones de Borde

Finalmente, para que el modelo pueda funcionar completamente, se deben especificar las condiciones de borde, y al igual que en el trabajo de (Marche, 2005), se ha optado por la utilización de celdas ficticias alrededor del dominio de integración, que permiten tratar a las celdas de los bordes como cualquier celda interior.

Sin embargo, como la reconstrucción de los valores en los bordes de cada celda necesita de los valores de las celdas vecinas, se necesitarán dos celdas ficticias fuera del dominio, para poder hacer la reconstrucción en la primera de ellas, ya que esa información es necesaria para la última celda del dominio.

El dominio de integración tendrá N celdas en total, a las que se agregarán las celdas C_{-1} y C_0 a la izquierda, y las celdas C_{N+1} y C_{N+2} a la derecha de él. Las condiciones de borde que podrían ser de interés se detallan a continuación.

La primera condición de borde que interesa es una que permita que las ondas puedan abandonar el dominio, por lo que este borde se considerará abierto al exterior. Esto se consigue obligando a que las celdas ficticias tengan el mismo estado que la última celda del dominio. La ampliación para las celdas ficticias a la izquierda del dominio es completamente análoga.

$$h_{N+1} = h_N \quad u_{N+1} = u_N \quad (3.69)$$

$$h_{N+2} = h_N \quad u_{N+2} = u_N \quad (3.70)$$

Una segunda condición muy útil es la de un muro vertical, que cierre el dominio y que refleje cualquier onda que se proyecte contra él. Para conseguir esto, las celdas ficticias deben reflejar los estados al interior del dominio, pero con velocidad contraria, como si fueran un espejo.

$$h_{N+1} = h_N \quad u_{N+1} = -u_N \quad (3.71)$$

$$h_{N+2} = h_{N-1} \quad u_{N+2} = -u_{N-1} \quad (3.72)$$

Dado que las condiciones de borde pueden producir alteraciones numéricas, algunas veces no permiten ver si es que el esquema de resolución funciona correctamente, por lo que algunas veces, especialmente durante el desarrollo del modelo, es conveniente no tener ningún borde, lo que se logra con condiciones de borde periódicas, es decir, donde un borde del dominio está conectado con el otro. Además de que el dominio debe ser simétrico, esta condición se consigue imponiendo a las celdas ficticias los siguientes valores.

$$h_0 = h_N \quad u_0 = u_N \quad (3.73)$$

$$h_{-1} = h_{N-1} \quad u_{-1} = u_{N-1} \quad (3.74)$$

$$h_{N+1} = h_1 \quad u_{N+1} = u_1 \quad (3.75)$$

$$h_{N+2} = h_2 \quad u_{N+2} = u_2 \quad (3.76)$$

Finalmente, para poder utilizar este modelo en el contexto de la hidráulica costera, es necesaria una condición de borde que permita introducir ondas dentro del dominio, como la lectura de una sonda, por ejemplo, y que a la vez sea capaz de transmitir las ondas que abandonan el dominio. Este tipo de condición de borde se conoce como **generación/absorción** y para su implementación nos basaremos en el trabajo desarrollado por (Cienfuegos et al., 2007), ya que ésta es la misma condición de borde utilizada por el modelo Serr1D, demostrando un buen desempeño.

Los supuestos detrás de la aplicación de esta condición de borde son los siguientes. Fuera del dominio una señal $\eta(t)$ se propaga, sin deformarse, por un canal horizontal de profundidad uniforme h_0 y cota de fondo f_0 , iguales a la profundidad de equilibrio y cota de fondo de ese borde del dominio. También se hace el supuesto de que las ondas transmitidas por $\eta(t)$ serán largas, en comparación con las ondas que se propagan durante la resolución numérica, por lo que cumplirá la relación

$$hu = \eta\sqrt{gh} \quad (3.77)$$

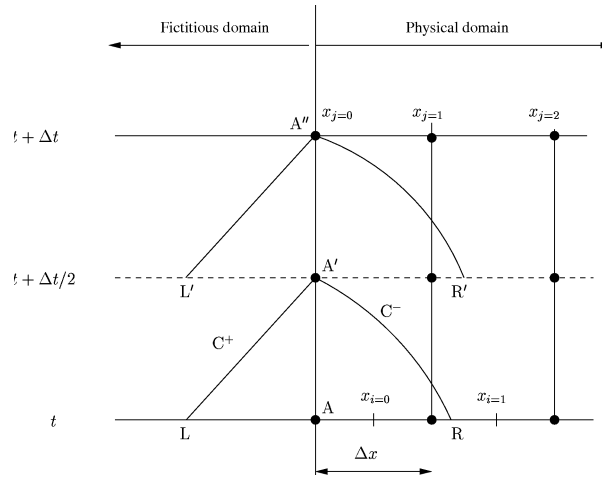


FIGURA 3.10. Condición de borde de absorción-generación. Fuente: Cienfuegos, 2005.

La idea básica de esta metodología es utilizar el método de las características para determinar el valor de las variables de estado en el borde del dominio para cada paso del procedimiento de Runge-Kutta, como se muestra en la figura 3.10.

De algún punto L desde fuera del dominio partirá una característica positiva hacia la interfaz, que arribará en el tiempo $t + \Delta t/2$. El valor de esa característica estará dado por

$$R^+ = u_L + 2c_L \quad (3.78)$$

$$= \frac{\eta_L c_L}{h_L} + 2c_L \quad (3.79)$$

$$= \frac{\eta(t + \Delta t/2) \sqrt{gh_L}}{h_L} + 2\sqrt{gh_L} \quad (3.80)$$

$$= \sqrt{g(h_0 + \eta(t + \Delta t/2))} \left(\frac{\eta(t + \Delta t/2)}{h_0 + \eta(t + \Delta t/2)} + 2 \right) \quad (3.81)$$

Encontrar la característica negativa requiere un poco más de esfuerzo, ya que no se conoce a priori la posición desde donde partirá y, por lo tanto, primero se debe encontrar el punto de partida resolviendo la siguiente ecuación de trayectorias características

$$x_R - x_A - \frac{\Delta t}{2}(u_R + c_R) = 0 \quad (3.82)$$

donde u_R y c_R están evaluadas en el tiempo t y dependen de la posición x_R .

Una vez encontrado el punto de partida, se debe evaluar el punto de partida, recordando que en este caso los invariantes de Riemann no permanecen necesariamente constantes, sino que dependen de la pendiente de fondo, según

$$\frac{dR^-}{dt} = -gf_x \quad (3.83)$$

por lo que para obtener el valor de R^- se debe integrar la ecuación anterior.

Una estrategia sencilla pero correcta es evaluar la integral en los puntos de partida y llegada de la característica, R y A , según

$$R^- = R_R^- - \int_L^A gf_x dt \quad (3.84)$$

$$R^- = u_R - 2c_R - g\frac{\Delta t}{2}(f_x^A + f_x^L) \quad (3.85)$$

Una vez obtenidos ambos invariantes, las variables en la interfaz para la primera iteración en el tiempo $t + \Delta t/2$ se calculan utilizando las siguientes ecuaciones

$$u'_A = \frac{1}{2}(R^+ + R^-) \quad (3.86)$$

$$h'_A = \frac{1}{16g}(R^+ - R^-)^2 \quad (3.87)$$

Para el siguiente paso de Runge-Kutta se utilizan las estimaciones de h'_A y u'_A para mejorar la estimación del punto de partida de la característica negativa, x_R , con lo cual se recalcula R^- y se obtiene la estimación definitiva para h_A y u_A para el tiempo $t + \Delta t/2$. Para los siguientes dos pasos de Runge-Kutta se utiliza la misma metodología descrita aquí, sólo que ahora se aplica desde el tiempo $t + \Delta t/2$ hasta $t + \Delta t$.

Vale la pena remarcar el hecho de que en el desarrollo de este modelo ningún tratamiento especial se le ha dado a la línea de costa, ya que los métodos aquí presentados pueden manejar la presencia de zonas secas dentro del dominio, de modo que todas las celdas del dominio se encuentran activas y participan del cálculo en cada paso de tiempo, aún cuando tengan altura de agua y velocidad nulas.

La posición de la línea de costa se encuentra naturalmente, entre las zonas del dominio que contienen agua y las que no, por lo que no es necesario implementar ningún tratamiento artificial para seguir o predecir su evolución. Esto es positivo además, por que permite la presencia de zonas mojadas desconectadas entre sí dentro del dominio, caso que es probable en la zona de swash, o en configuraciones litorales como desembocaduras o estuarios.

4. VALIDACION DEL MODELO

4.1. Estado Estacionario

La mayoría de las dificultades que presentan los modelos de Saint Venant en relación con el manejo de los términos fuentes se presenta cuando existen fuertes pendientes de fondo, o abruptos cambios de pendiente, por lo que para comprobar que el esquema balanceado con que fue implementado el modelo funciona correctamente se realiza una simulación sobre la batimetría mostrada por la figura 4.1.

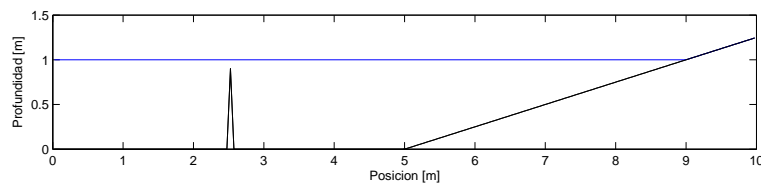


FIGURA 4.1. Batimetría para simulación de estado estacionario.

La batimetría está compuesta de un tramo horizontal de 5 metros, cuyo extremo izquierdo se encuentra abierto, seguido de otro tramo de 5 metros, esta vez con una pendiente de fondo del 25%, de modo que la línea de costa se encuentre sobre la pendiente del canal. Además, en el tramo horizontal se incluye una irregularidad del fondo con forma de punta, que tiene una altura de 0.9 metros y una base de 10 centímetros, de modo de producir fuertes gradientes de fondo y discontinuidades que permitan testear el comportamiento del modelo.

La simulación considera al fluido inicialmente en reposo, con una profundidad de 1 metro en el borde abierto, y la prueba consiste en observar la evolución de las variables que definen este estado de equilibrio, que debieran mantenerse invariantes, para una simulación de largo plazo de 30 minutos de duración.

La figura 4.2 muestra que la altura de agua se mantiene exactamente igual a los valores iniciales, y por lo tanto, no se producen distorsiones de la superficie libre durante toda la duración de la simulación. Sin embargo, la velocidad sufre pequeñas perturbaciones en el

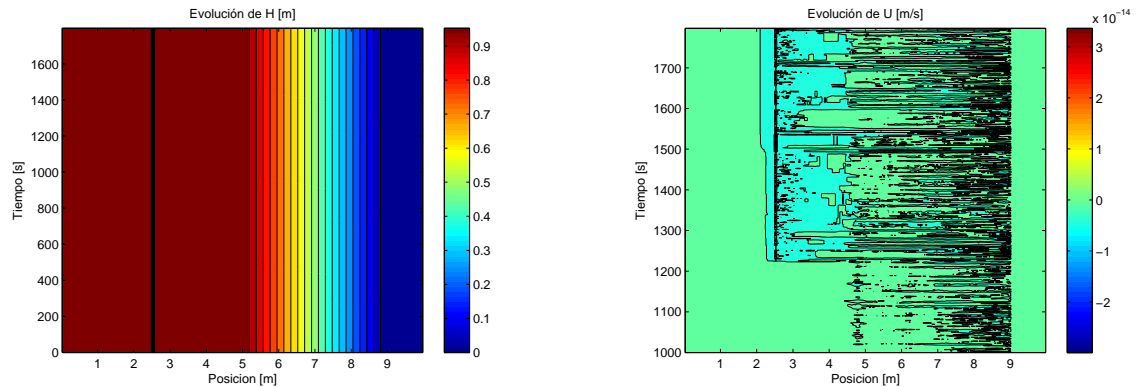


FIGURA 4.2. Evolución de la altura de agua y velocidad.

tramo con pendiente y luego de un tiempo, esas perturbaciones se producen también cerca de la zona donde se encuentra la punta en el fondo.

De todos modos, estas perturbaciones numéricas son del orden de 10^{-14} metros por segundo y para todos los efectos prácticos no afectan los resultados que el modelo pueda entregar, por lo que se puede afirmar que nuestro modelo se encuentra numéricamente balanceado.

4.2. Dam-Break sobre Barrera Triangular

En el marco del programa europeo IMPACT se desarrollaron diversos estudios y experiencias, relacionadas principalmente con el estudio de crecidas en zonas naturales, y por lo tanto, de topografías complejas. Por ejemplo, en algunos ríos de Francia se han colocado barreras en cascada que permiten atrapar sedimentos y controlar crecidas, similares a las piscinas de contención colocadas en la quebrada de Macul de Santiago, y eventualmente estas barreras pueden colapsar (como ocurrió en 1994 en el río Var) generando un escurrimiento del tipo de rompimiento de presa, inundando las barreras de aguas abajo.

Con este caso como motivación, Soares-Fraza (2007) llevó a cabo una experiencia de rompimiento de presa que se propaga sobre una barrera triangular, intentando representar los distintos y complejos tipos de escurrimiento producidos por la interacción del fluido

con la topografía, y que pudiera servir como un exigente test para los modelos numéricos, como el que se ha presentado en esta memoria.

Este tipo de experiencias testea la capacidad de los modelos para reproducir el escurrimiento de la interfaz entre los estados seco y mojado, agregando el efecto de la pendiente de fondo y por lo tanto, el tratamiento de los términos fuentes.

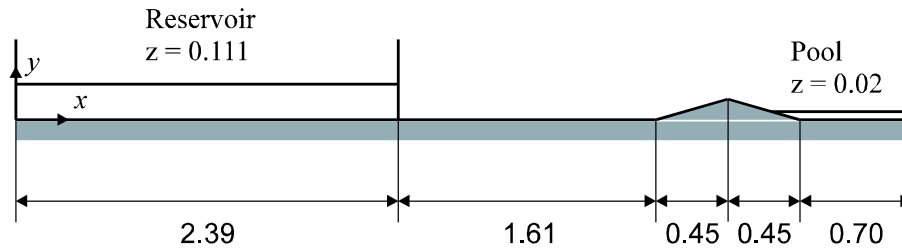


FIGURA 4.3. Preparación experimental y condiciones iniciales. (Todas las dimensiones se encuentran en metros) Fuente: Soares-Frazao, 2007.

El experimento se efectuó en un canal rectangular horizontal, donde se dispuso un reservorio de 0.111 metros de agua en uno de los extremos, que serviría para representar el rompimiento de presa, mientras que cerca del otro extremo se colocó una barrera triangular de 6.5 centímetros de alto y taludes de 0.14 (H/V) hacia ambos lados. Además, una pequeña cantidad de agua era mantenida entre la barrera y el borde del canal. La figura 4.3 muestra las posiciones de la barrera, el reservorio y las profundidades.

Una vez que la compuerta que mantiene el agua en el reservorio es retirada, el perfil de agua en la zona cercana a la barrera es registrado mediante técnicas de captura de imagen, para los tiempos $t = 1.8, 3.0, 3.7, 8.4, 15.5$ segundos. Además de estos perfiles, se cuenta con tres sondas que miden la oscilación de la superficie libre del canal, en las posiciones especificadas en la tabla 4.1 con respecto al borde izquierdo del canal, que corresponden al borde del canal opuesto al del reservorio y a los pies de bajada y subida, respectivamente, de la barrera.

Como no se cuenta con mediciones del sector donde se produce el rompimiento de presa, los resultados del modelo son comparados con la solución analítica de Ritter (Stoker, 1958), donde la coordenada x se considera relativa a la posición en que se encuentra la

TABLA 4.1. Ubicación de las Sondas

Identificador	Posición (m)
G1	5.575
G2	4.925
G3	3.935

compuerta de la represa que mantiene una altura de agua h_0 a su izquierda. Si la compuerta es retirada en el tiempo $t = 0$, entonces la evolución de la altura de agua y velocidad en el canal estará dada, en una forma adimensional, por

$$h^* = \frac{1}{9} \left(2 - \frac{x^*}{t^*} \right)^2 \quad (4.1)$$

$$u^* = \frac{2}{3} \left(\frac{x^*}{t^*} + 1 \right) \quad (4.2)$$

donde las escalas están dadas por la altura de agua en el estanque h_0 para la longitud y por la celeridad del estanque $c_0 = \sqrt{gh_0}$ para la velocidad, mientras que la escala de tiempo se considera c_0/g .

Con estas relaciones se obtiene la evolución de la altura de agua y el caudal en la zona del canal donde se produce el rompimiento de presa, la que es representada para los tiempos adimensionales $t^* = 0.00, 0.07, 0.12, 0.20, 0.30$ en la figura 4.4, donde se puede apreciar una excelente relación entre la solución analítica y la altura de agua pronosticada por el modelo, mientras que en para el caudal se evidencia una pequeña sobrestimación hacia los extremos de las curvas.

La figura 4.5 muestra las mediciones de las sondas colocadas en el canal, en comparación con los resultados del modelo para las posiciones detalladas en la tabla 4.1. La primera sonda corresponde al extremo final del canal, mientras que la segunda se ubica justo a la bajada de la barrera, de modo que estas dos se pueden considerar en un mismo sub-dominio dentro del canal, ya que la barrera continuamente separa las aguas hacia ambos lados, permitiendo la comunicación entre ellos cuando se encuentra totalmente sumergida, o bien cuando parte del agua a uno de los lados se desborda hacia el otro.

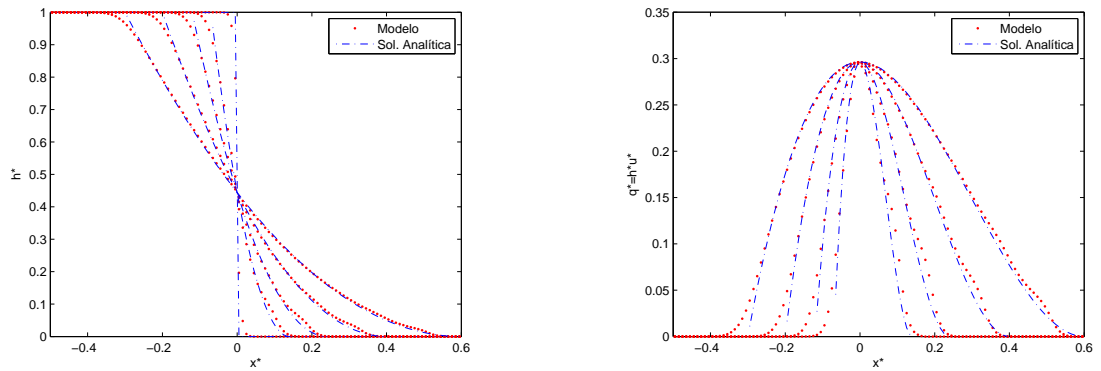


FIGURA 4.4. Dam-Break sobre fondo horizontal: la altura de agua a la izquierda, caudal a la derecha. Las comparaciones son hechas para los tiempos adimensionales $t^* = 0.00, 0.07, 0.12, 0.20, 0.30$

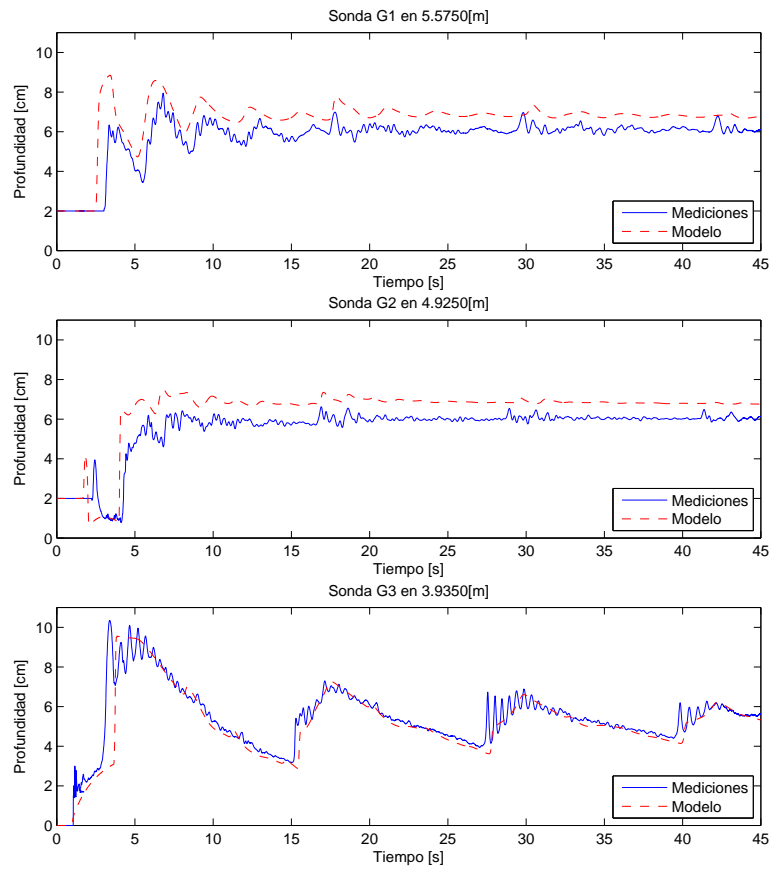


FIGURA 4.5. Comparación entre el modelo y las mediciones de las sondas.

Lo primero que se puede observar en las sondas G1 y G2 es que el modelo predice correctamente la tendencia de ambas, aunque constantemente sobreestima la altura de agua, sobrepasando incluso los 6.5 centímetros de la coronación de la barrera. Esto puede deberse a la naturaleza de los fenómenos que el modelo es capaz, o no, de representar, ya que por las observaciones de la experiencia, que se encuentra documentada en vídeo, se sabe que el agua a veces sobrepasa la barrera produciéndose la separación de la superficie libre del fluido, y como el modelo funciona sólo en una dimensión, no es capaz de representar esos casos y de estimar correctamente el volumen de agua que se escapa del sub-dominio a través de este mecanismo.

No es igual en el otro caso, cuando el agua entra en el sub-dominio, porque esto suele ocurrir cuando la barrera se encuentra totalmente sumergida, y por lo tanto el esquema balanceado que trata los términos fuentes puede actuar correctamente, ya que no ocurre separación de la superficie libre.

Esto se evidencia por el hecho de que el modelo predice con gran precisión las mediciones de la sonda G3 que se encuentra al pie de subida de la barrera, salvo pequeñas oscilaciones de mayor frecuencia.

Desde un punto de vista espacial, los perfiles de agua obtenidos por el modelo son comparados con las mediciones disponibles en las figuras 4.6 y 4.7, donde es posible observar los fenómenos descritos anteriormente.

Para el tiempo 1.8 segundos se puede ver que el agua es naturalmente separada por la barrera, a medida que la primera onda producida por el rompimiento de presa la alcanza, mientras que el modelo tiende a mantener una altura de agua, que no tiene explicación física, sobre la cúspide de la barrera hasta que todo el lado izquierdo se encuentre totalmente inundado y la altura de agua pronosticada coincide con la real, a los 3 segundos.

Por otro lado, se ve que el modelo se adelanta al comportamiento del fluido en el sub-dominio a la derecha de la barrera, anticipando la formación de un resalto al pie de la barrera, a los 1.8 segundos, y su posterior desplazamiento y reflexión con el borde del

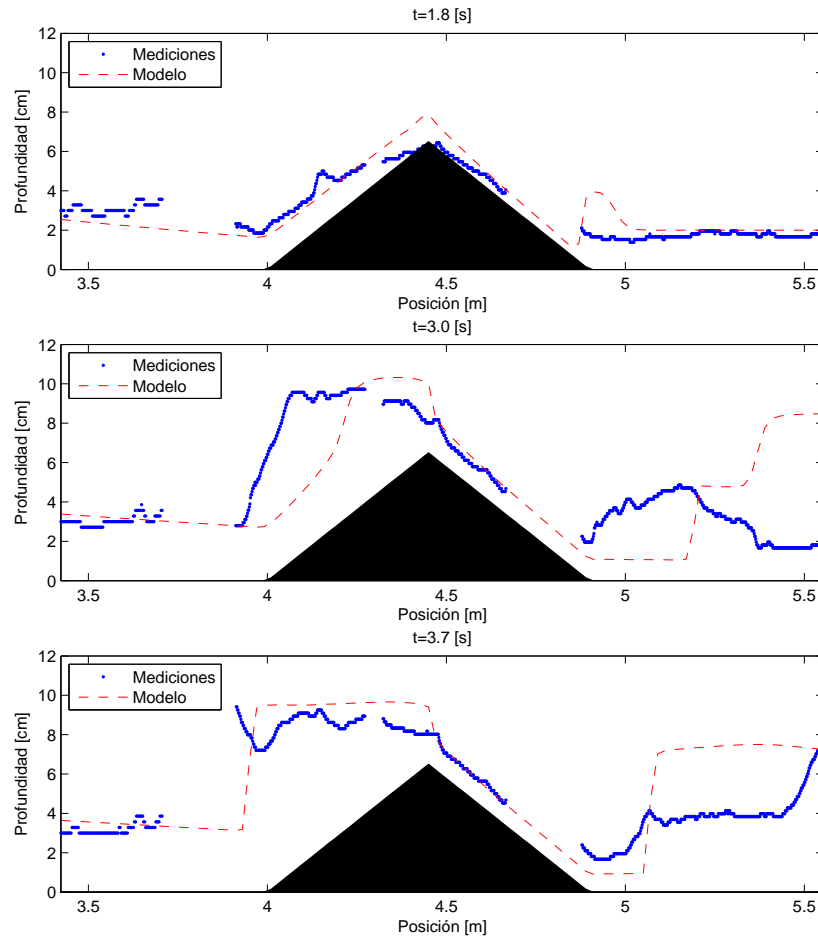


FIGURA 4.6. Perfiles de agua sobre la barrera para los tiempos $t = 1.8, 3.0, 3.7$ segundos.

canal, a los 3 y 3.7 segundos, mientras que el sub-dominio a la izquierda de la barrera es bien representado sin grandes diferencias para todos los tiempos.

Finalmente, una vez pasados los primeros 8 segundos, donde todo el dominio cambió de forma muy brusca, se ve que el modelo tiende a predecir correctamente los perfiles medidos, aún cuando se evidencia la sobrestimación del sector a la derecha de la barrera que también se observó en las sondas de esa zona.

Los resultados del modelo con esta experiencia permiten afirmar que éste posee un buen desempeño en casos de presencia de zonas secas, tanto en fondo plano como en pendiente, y por lo tanto, es útil para modelar la zona de swash, lo cual es el objetivo final para el que fue diseñado.

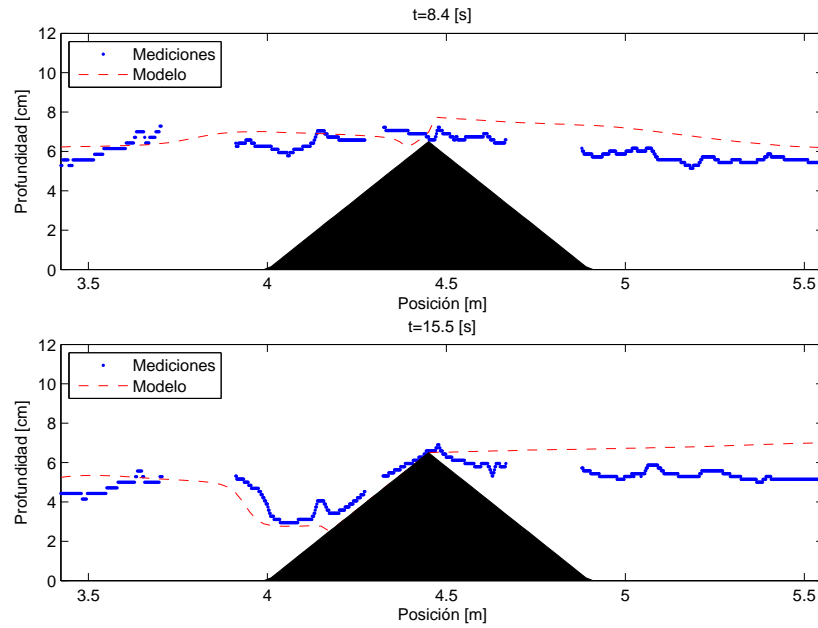


FIGURA 4.7. Perfiles de agua sobre la barrera para los tiempos $t = 8.4, 15.5$ segundos.

4.3. Campaña de Mediciones INH

El modelo Serr1D ha sido validado en casos de oleaje regular y batimetrías naturales, usando tanto resultados analíticos como mediciones de terreno y laboratorio. Con el objetivo de testear el modelo en casos de oleaje irregular con amplias zonas de rompientes, se llevó a cabo una campaña de mediciones en el canal de olas del Instituto Nacional de Hidráulica, ubicado en la zona de Peñaflor, en las afueras de Santiago.

El canal fue implementado con una sección horizontal seguida de otra con una pendiente muy pequeña de $1/80$, como se describe en el tercer esquema de la figura 4.8, donde el nivel de reposo en el extremo del canal fue establecido en 52(cm).

Para el oleaje incidente, se generó una serie temporal de 25 minutos de duración, con espectro de energía de JONSWAP, con una altura característica de $H_{mo} = 18(\text{cm})$ y período peak $T_P = 4(\text{s})$, y fue forzado utilizando una paleta generadora de olas, con sistema de absorción que permite eliminar las ondas reflejadas en el interior del canal, asemejando una condición de borde abierto.

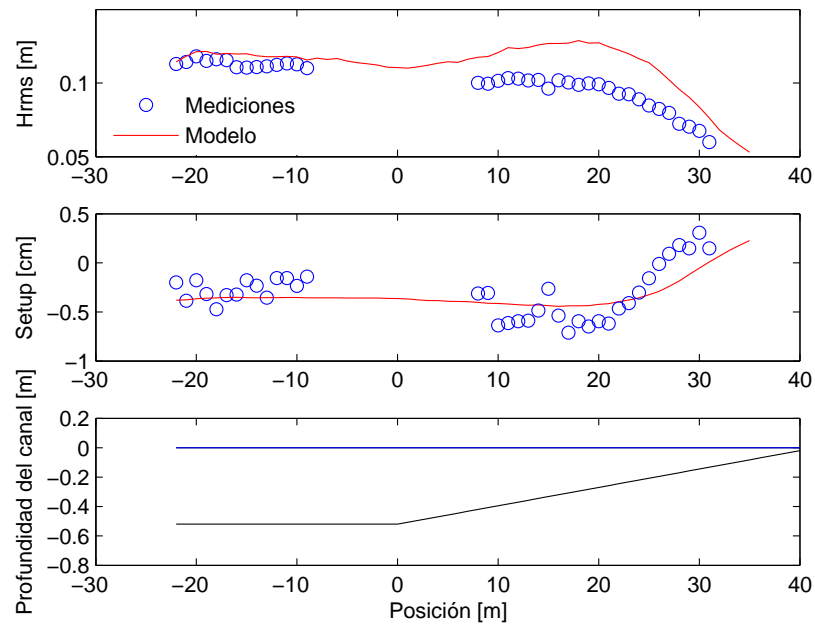


FIGURA 4.8. Esquema de la experiencia del INH y resultados de Serr1D: Arriba, comparación de altura de ola. Centro, comparación de nivel medio. Abajo, esquema del canal de olas.

Los primeros gráficos de la figura 4.8 muestran los resultados del modelo de Boussinesq, en comparación con los datos medidos en distintas zonas del canal con sondas resistivas, donde se observa un buen comportamiento del modelo, tanto en la predicción de la altura de ola, como en el nivel medio del canal, aunque en la zona con pendiente tiende a sobreestimar los resultados.

Para los fines del modelo Saint Venant presentado aquí, este set de datos tiene el enorme valor de entregar información sobre batimetrías con amplias zonas de surf, y por lo tanto, permiten probar el desempeño del modelo sobre dominios de mayores tamaños.

De la información en la figura 4.8 se observa que el punto de rompimiento más cercano a la costa se encuentra alrededor de la coordenada $x = 21(\text{m})$, por lo tanto, la zona de surf interno se extiende desde ese punto en adelante, y para probar el modelo Saint Venant, se intentará modelar esta zona, utilizando la señal registrada por la sonda en $x = 22(\text{m})$ como input para el modelo.

La figura 4.9 muestra la comparación entre las mediciones de la zona de surf interno y los resultados obtenidos con el modelo de Saint Venant, donde se aprecia una mejor concordancia entre ambos para la altura de ola significativa que la obtenida con el modelo de Boussinesq, aunque esto es explicable por el hecho de que la señal se encuentra más cerca de donde se obtuvieron los resultados, es decir, si el modelo Serr1D hubiera sido forzado con un dominio reducido y utilizando la señal de $x = 22(\text{m})$, probablemente hubiera predicho mejor la evolución de la altura de ola, ya que tendría una mejor información de entrada.

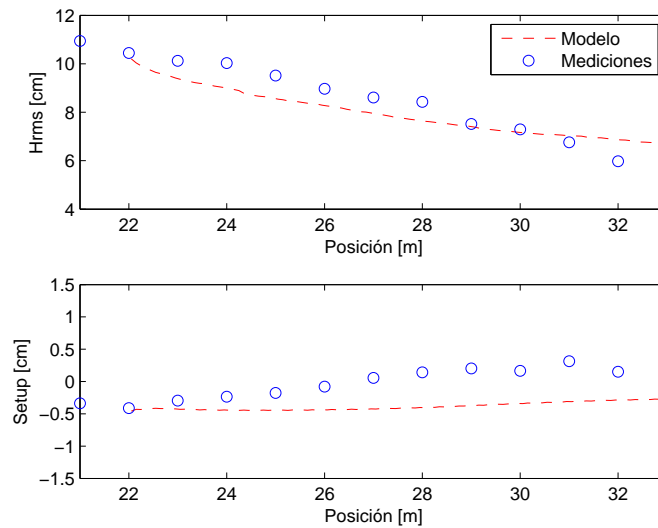


FIGURA 4.9. Resultados del modelo Saint Venant en la zona de surf interno de la experiencia del INH: Arriba, comparación de altura de ola. Abajo, comparación de nivel medio.

De todo modos, esto no opaca el hecho de que el modelo de Saint Venant sea capaz de propagar correctamente las olas en la zona de surf, que es el objetivo para el que fue diseñado. Sin embargo, ambos modelos tienen problemas prediciendo el aumento del nivel medio, o set-up, subestimando en ambos casos los valores registrados en el canal, lo que puede afectar en los resultados del modelo, ya que éste tiene una velocidad de propagación de ondas superficiales menor a la que realmente tiene el canal, lo cual podría explicar la diferencia en la pendiente de la curva de altura de ola, donde se ve que el modelo está disipando energía de forma más suave a la registrada.

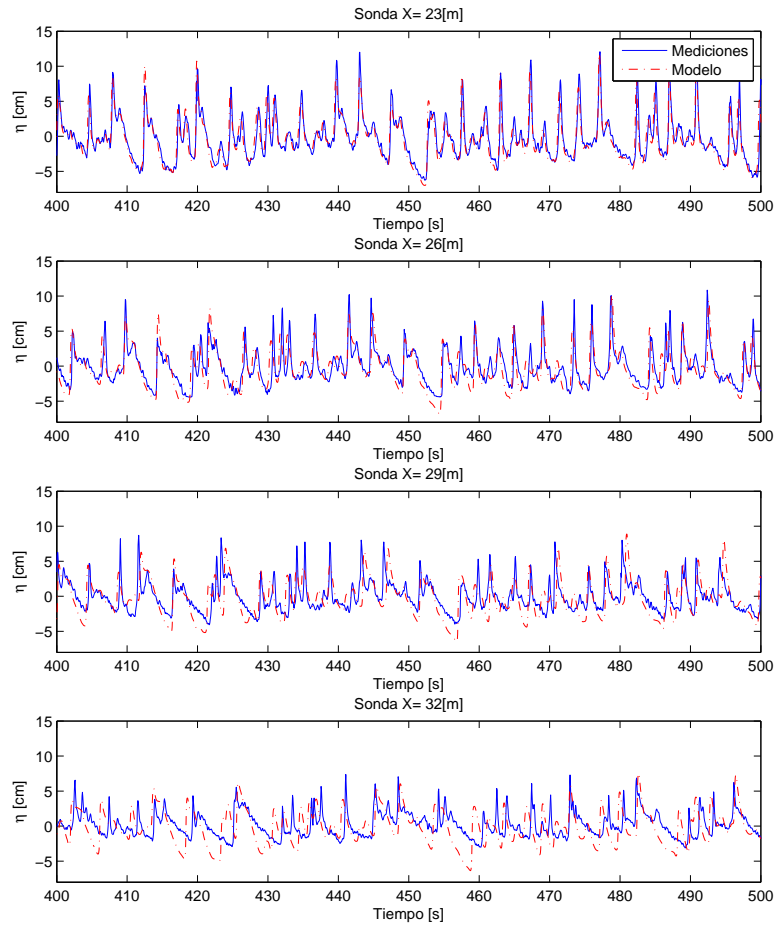


FIGURA 4.10. Comparación de series temporales para las posiciones $x = 23, 26, 29, 32$ (m).

Las diferencias observadas en los parámetros promediados pueden encontrarse más fácilmente analizando las oscilaciones de la superficie pronosticadas por el modelo, en comparación con las mediciones de las sondas.

En la figura 4.10 se muestran las series obtenidas para cuatro posiciones a lo largo del canal, donde se aprecia en la primera serie, para $x = 23$ (m), que las ondas ya se encuentran rompiendo cuando entran al dominio, y que el modelo reproduce de forma muy ajustada esta primera serie, por encontrarse bastante cerca del borde donde el modelo es forzado.

Se aprecia además, que durante los primeros metros del dominio, el modelo tiene a subestimar un poco los peaks de las olas más altas, aunque esta tendencia va disminuyendo a medida que se avanza por el canal, teniendo predicciones menores hacia el otro extremo.

Además, los valles más pronunciados, provocados justo después del paso del frente de una ola rompiente, son sobreestimados por el modelo especialmente para las olas más grandes, con una pendiente cada vez mayor a medida que se avanza por el canal, lo cual asociado a lo anterior, explica la porqué el modelo predice alturas de ola mayores al comienzo del canal, y menores hacia el final.

A pesar de estas diferencias en la forma de las olas, es evidente que el modelo predice correctamente sus tiempos de propagación y movimiento en general, por lo que funciona como herramienta para modelar la zona de surf interno, aunque se obtendrán mejores resultados modelando dominios pequeños, como la zona de swash, dado que existen efectos de otra índole, como de fricción que el modelo no incorpora, y que en escalas de tiempo o longitud mayores escapan del espectro que el modelo es capaz de representar.

5. ACOPLAMIENTO DE AMBOS MODELOS

En este capítulo se presenta el modelo híbrido de propagación de oleaje, propuesto como una combinación de las mejores características de los modelos tipo Boussinesq y Saint Venant, dadas por las zonas de aplicación de cada uno, de modo que el dominio dividido en dos, desde aguas profundas hasta la zona de surf para Boussinesq y desde la zona de surf hasta la zona de swash para Saint Venant, y luego integrado por separado por cada sub-dominio.

Primero se presenta la forma propuesta para que ambos modelos compartan información, y se discuten las aplicaciones y dificultades, y sobre los criterios para determinar la posición de la interfaz entre ambos modelos.

Luego se muestran dos casos donde el modelo propuesto es comparado contra mediciones de terreno, primero con una onda solitaria para comprobar que el sistema de comunicación es viable, y luego para una experiencia de oleaje regular para comprobar que además de ser viable, funciona correctamente en los casos testeados.

5.1. Metodología de Comunicación entre Modelos

Para que el enfoque híbrido que se ha propuesto sea viable, es necesario hacer coexistir dos esquemas numéricos de resolución completamente distintos, para set de ecuaciones diferentes, dentro de un mismo modelo que permita que la información pueda propagarse desde uno a otro esquema, a pesar de sus diferencias.

Desde un punto de vista práctico, el problema de la interfaz entre los dos modelos puede considerarse análogo al de una condición de borde, que debe ser compartida por ambos, en el sentido que se espera de ella que sea capaz de transmitir las ondas que deben entrar a alguno de los sub-dominios, a la vez que deja escapar las ondas reflejadas de él.

Es decir, se espera que la interfaz pueda funcionar como una condición de borde abierta, como la presentada en el capítulo 3, pero esta vez la información entrante a un

sub-dominio no proviene de de señal de entrada, sino que corresponde a la ondas que abandonan el otro sub-dominio.

Dado que condiciones de borde de este tipo han sido implementadas exitosamente tanto en modelos Boussinesq (Cienfuegos et al., 2007) como en modelos de Saint Venant (Marche, 2005), se tienen motivos para creer que una interfaz entre ambos modelos, basada en las ideas de implementación de este tipo de condición de borde, debiera cumplir con las características se esperan de ella.

La idea principal presentada en la sección 3.4 es la forma en que la información se propaga, cuyas trayectorias son conocidas en forma exacta para el caso de modelos de Saint Venant, dada la estructura hiperbólica de sus ecuaciones, no ocurriendo lo mismo para el caso de las ecuaciones de Boussinesq que tienen un carácter híbrido hiperbólico-parabólico, por lo que es necesario realizar una aproximación, como la presentada por Cienfuegos et al. (2007) para el modelo Serr1D.

Las ecuaciones de Serre para fondo uniforme, y en general todo set de ecuaciones de Boussinesq, pueden ser representados por el siguiente sistema

$$h_t + (hu)_x = 0 \quad (5.1)$$

$$u_t + uu_x + gh_x + \frac{2}{3}h_x\Gamma + \frac{1}{3}h\Gamma_x = 0 \quad (5.2)$$

donde Γ representa las aceleraciones verticales, conteniendo los términos dispersivos y no lineales propios de cada set particular de ecuaciones, asociados a la curvatura de la superficie libre, y dado que el sistema no es estrictamente hiperbólico, no es posible encontrar variables cuyo valor permanezca constante a lo largo de sus cuatro curvas características.

Sin embargo, es posible reescribir el sistema en una forma cuasi-hiperbólica utilizando las mismas definiciones dadas anteriormente de los invariantes positivos y negativos de Riemann, $R^+ = u + 2\sqrt{hg}$ y $R^- = u - 2\sqrt{hg}$,

$$\frac{dR^+}{dt} = -\frac{1}{3h} \frac{\partial}{\partial x} (h^2\Gamma) \quad \text{para} \quad \frac{dx}{dt} = u + c \quad (5.3)$$

$$\frac{dR^-}{dt} = -\frac{1}{3h} \frac{\partial}{\partial x} (h^2\Gamma) \quad \text{para} \quad \frac{dx}{dt} = u - c \quad (5.4)$$

donde se observa que las aceleraciones verticales, consideradas despreciables en las NSW, son la causa de la pérdida del carácter hiperbólico en los modelos de Boussinesq.

No obstante lo anterior, para poder implementar condiciones de borde que consideren las trayectorias características de las ecuaciones de Boussinesq, se utiliza el razonamiento físico de que las escalas de tiempo asociadas a procesos dispersivos son mayores a las de procesos no lineales, y por lo tanto, sobre distancias cortas y tiempos pequeños, es razonable considerar constantes las variables de Riemann sobre sus curvas características.

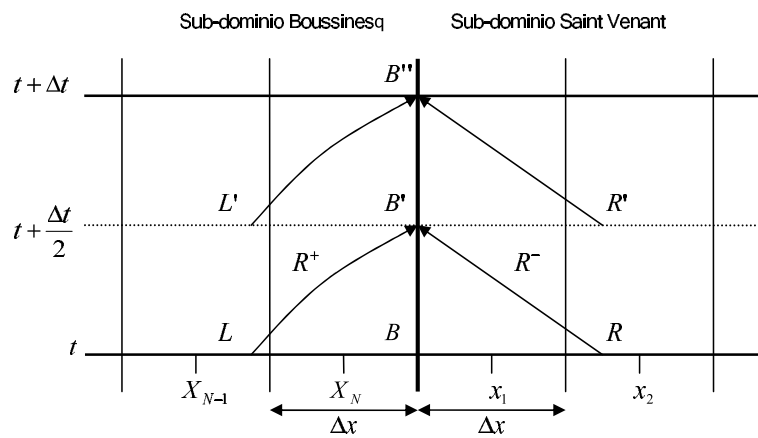


FIGURA 5.1. Esquema de comunicación entre ambos modelos.

Por lo tanto, para la estructura de la interfaz propuesta se utilizará el esquema presentado en la figura 5.1, basado en esquema presentado anteriormente en la figura 3.10, con la diferencia que en este caso, a la interfaz llega la información producida en ambos modelos en vez de una señal conocida a priori.

El esquema mantiene la metodología de Runge-Kutta para la integración en el tiempo, aunque puede ser adaptada a cualquier otra técnica, y por lo tanto es necesario realizar una primera estimación de las variables, y luego mejorarla utilizando el primer valor estimado, tanto para el tiempo $t + \Delta t/2$, como para $t + \Delta t$. Dado que el valor de Δt es calculado paso a paso, se utiliza el mismo espaciamiento Δx en las grillas de ambos modelos, de modo que las escalas de tiempo sean similares y ningún modelo limite al otro.

Lo primero que se debe hacer es determinar son los puntos de partida de las curvas características, que como se señaló anteriormente para el caso de las NSW, requiere resolver el siguiente sistema donde x_R es la variable a determinar.

$$x_R - x_B + \frac{\Delta t}{2} \left(u_R(x_R, t) - \sqrt{gh_R(x_R, t)} \right) = 0 \quad (5.5)$$

Sin embargo, para el caso de las ecuaciones de BSQ no se tiene una ecuación exacta a resolver, por lo que solo se puede utiliza la aproximación propuesta

$$X_L - x_B + \frac{\Delta t}{2} \left(u_L(X_L, t) + \sqrt{gh_L(X_L, t)} \right) = O(\Delta t^2) \quad (5.6)$$

de donde se obtiene la coordenada del punto de partida, x_L .

Desde el punto L parte una característica positiva y del punto R otra negativa, que se encuentran en el punto B' , en el tiempo $t + \Delta t/2$. Los valores los invariantes de Riemann de ambas curvas, al momento de salida en el tiempo t , son

$$R_L^+ = u_L(X_L, t) + 2c_L(X_L, t) \quad (5.7)$$

$$R_R^- = u_R(x_R, t) - 2c_R(x_R, t) \quad (5.8)$$

pero esos valores deben ser corregidos por la pendiente de fondo, que como se mencionó anteriormente, modifica el valor de los “invariantes” durante su trayectoria.

Los valores en el punto B' serán entonces

$$R^+ = R_L^+ - g \frac{\Delta t}{2} (f_x^L + f_x^{B'}) \quad (5.9)$$

$$R^- = R_R^- - g \frac{\Delta t}{2} (f_x^R + f_x^{B'}) \quad (5.10)$$

de donde se despejan las variables en la interfaz para el tiempo $t + \Delta t/2$, utilizando las relaciones

$$u_{B'} = \frac{1}{2} (R^+ + R^-) \quad (5.11)$$

$$h_{B'} = \frac{1}{16g} (R^+ - R^-)^2 \quad (5.12)$$

Para la segunda etapa del método de Runge-Kutta es necesario mejorar esta primera aproximación, para lo cual se repite la metodología presentada anteriormente, pero considerando los valores obtenidos para estimar mejor los puntos de partida de las características, y por lo tanto, los valores de los invariantes, y finalmente, las variables buscadas.

Las ecuaciones a resolver en esta etapa están dadas por

$$x_R - x_B + \frac{\Delta t}{4} \left(u_R(x_R, t) + u_{B'} - \sqrt{gh_R(x_R, t)} - \sqrt{gh_{B'}} \right) = 0 \quad (5.13)$$

$$X_L - x_B + \frac{\Delta t}{4} \left(u_L(X_L, t) + u_{B'} + \sqrt{gh_L(X_L, t)} + \sqrt{gh_{B'}} \right) = O(\Delta t^3) \quad (5.14)$$

y tanto el cálculo de los invariantes de Riemann, como el de las variables de estado en la interfaz, se llevan a cabo de la misma forma descrita anteriormente, con lo cual se obtiene la estimación final para $h_{B'}$ y $u_{B'}$.

Para obtener las variables de estado en el punto B'' , en el final de la segunda mitad del intervalo, se debe reproducir la metodología descrita aquí, pero esta vez tomando como punto de partida el tiempo $t + \Delta t/2$, y actuando de forma análoga a la primera mitad del intervalo.

5.1.1. Rangos de Aplicación

La interfaz propuesta para comunicar ambos modelos está basada en una forma particular de condición de borde del tipo generación-absorción, cuya implementación ha sido bastante exitosa tanto en modelos de Saint Venant como Boussinesq, por lo que en principio, se pensaría que su utilización para separar ambos modelos no debiera presentar mayores problemas.

Para comprobarlo, el modelo híbrido ha sido implementado para reproducir casos de régimen estacionario y condiciones simples de oleaje sobre batimetrías conocidas, utilizando la posición de la interfaz como único parámetro de sensibilidad sobre los resultados, y en la práctica se ha visto que la implementación de la interfaz simplemente no funciona en ciertos casos, principalmente hacia el interior de la zona de rompientes, aunque en otras

situaciones funciona correctamente, manteniendo el estado estacionario y transmitiendo ondas en ambas direcciones.

La explicación a los errores observados puede estar asociada a la parametrización del rompimiento, incorporada en el modelo de Boussinesq, que aún cuando es particular del modelo Serr1D, comparte ideas aplicadas en modelos similares, por lo que la explicación aquí dada es más bien genérica.

Esencialmente, para incorporar la disipación de energía producto del rompimiento de la ola se incorporan términos a las ecuaciones del movimiento, dadas en 1.1 y 1.2, para modificar su comportamiento mientras la ola se encuentra rompiendo.

Tradicionalmente, esta idea sólo incluye la ecuación de cantidad de movimiento, pero para el caso del Serr1D, Cienfuegos, Barthelémy, and Bonneton (2006) incorpora un término extra en la ecuación de continuidad, basado en la similitud entre una ola rompiente y un resalto hidráulico estacionario, asumiendo que existe una redistribución de las zonas por las que circula el fluido.

De este modo, el set de ecuaciones a resolver será

$$h_t + (hu)_x - D_h = 0 \quad (5.15)$$

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x + gh_x + \Gamma_d - \frac{1}{h}D_{hu} = 0 \quad (5.16)$$

donde D_h y D_{hu} son los términos encargados de representar el rompimiento, y que tienen una forma difusiva en función del cambio en la variable de cada ecuación, según

$$D_h = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_h \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad D_{hu} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_{hu} \frac{\partial hu}{\partial x} \right) \quad (5.17)$$

Enfoques de tipo difusivo como parametrización del rompimiento son habituales en modelos de tipo Boussinesq, donde la diferencia entre cada modelo particular está en la forma de definir la constante de difusión, y sus rangos de aplicación. Para el caso particular de Serr1D, las constantes de difusión se definen como

$$\nu_h = -\delta_h \frac{cd}{\tan \Phi} \Lambda(X/l_r), \quad \nu_{hu} = -\delta_{hu} \frac{cd}{\tan \Phi} \Lambda(X/l_r) \quad (5.18)$$

donde δ_h y δ_{hu} son coeficientes de primer orden, $c(x) = \sqrt{gh(x)}$ es la celeridad de la onda, $d(x) = -f(x)$ es la profundidad media y Φ es el ángulo del frente de la ola rompiente.

Para asegurar que los términos extras introducidos sean conservativos a lo largo de cada evento de ola rompiente, los coeficientes difusivos están modulados por la función de similitud Λ , que tiene como parámetro la posición relativa al interior de la ola rompiente X/l_r , donde X es una coordenada móvil al interior de la rompiente de la ola y l_r es su largo total.

$$\Lambda(X/l_r) = \exp\left(\frac{X}{l_r} - 1\right) \left\{ \left(\frac{X}{l_r} - 1\right) + \left(\frac{X}{l_r} - 1\right)^2 \right\} \quad (5.19)$$

La función Λ distribuye los efectos difusivos de los términos introducidos, de modo que su aporte global al dominio es nulo, a la vez que permite modificar localmente el comportamiento de las ecuaciones de movimiento.

Como el proceso de parametrización de rompimiento descrito aquí es un mecanismo puramente numérico, aunque basado en consideraciones físicas de similitud, no se encuentra contenido en la física que las ecuaciones de Boussinesq son capaces de representar, y por o tanto, su información es transmitida erróneamente a través de la aproximación cuasi-hiperbólica utilizada en la interfaz, produciendo las oscilaciones numéricas que se han observado cuando el límite entre ambos modelos se encuentra en la zona de rompientes.

Un argumento más físico e intuitivo tiene que ver con que la parametrización del rompimiento, ya que si bien globalmente es conservativo, localmente no lo es, y por lo tanto, si una onda rompiente es interrumpida, como cuando abandona el dominio a través de la interfaz, existirán términos extras que se encontrarán desbalanceados, tanto local como globalmente, que introducirán errores numéricos y oscilaciones en la solución. De hecho, durante el paso de una ola rompiente se produce una transición entre regímenes supercríticos y subcríticos, lo cual no está contemplado en la implementación de la interfaz.

Esto es comprobable implementando condiciones de borde del tipo absorción-generación en ambos extremos del dominio, que utilizan la aproximación cuasi-hiperbólica en modelos Boussinesq, y forzar que olas rompientes abandonen el dominio, produciéndose las mismas

oscilaciones observadas para el caso en que la condición de borde es reemplazada por la interfaz con el modelo Saint Venant.

5.2. Onda Solitaria de Synolakis

Un tema importante dentro de la dinámica de la costa es la máxima incursión del oleaje hacia el interior de la playa o sobre las estructuras, por lo tanto, el estudio del run-up es un tema recurrente y suele ser abordado desde varios puntos de vista.

La primera idea es intentar determinar cuánto incursionará una sola ola antes de determinar el total del oleaje, de modo de aislar las complejas interacciones producidas en la línea de costa. Matemáticamente es posible demostrar la existencia de ondas solitarias, que básicamente son olas que mantienen invariante su forma a medida que se propagan, y que los modelos que incorporan los efectos dispersivos son capaces de representar.

Segun Zelt la solución para la superficie libre de una onda solitaria de amplitud H está dada por

$$\eta = \frac{H}{1 + \gamma} \left(\text{sech}^2 \kappa(x - ct) + \gamma \text{sech}^4 \kappa(x - ct) \right) \quad (5.20)$$

con

$$c = \sqrt{gh(1 + \gamma)}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{3\gamma}{4(1 + \gamma)h^2}} \quad (5.21)$$

y donde $\gamma = H/h$ corresponde a la razón entre la altura de ola y la profundidad local, y se sabe que el máximo valor de este parámetro para que la ola siga siendo estable varía entre 0.7 y 0.78, cuando la ola comienza a romper.

Una primera prueba para el modelo híbrido presentado será poder propagar la onda solitaria sin deformarse, en el sub-dominio de Boussinesq, y luego predecir correctamente el run-up y run-down, en el sub-dominio de Saint Venant.

Para esto se reproducirá la experiencia presentada por Zelt (1991), que a su vez es la reproducción de una experiencia anterior de Synolakis, donde una onda solitaria es generada en un canal con un tramo horizontal, con altura de agua de reposo $d = 0.2$ metros,

seguido de un tramo con una pendiente muy baja, con un ángulo de inclinación $\beta = 2.88^\circ$, o equivalentemente, con una pendiente de fondo de $1/20$.

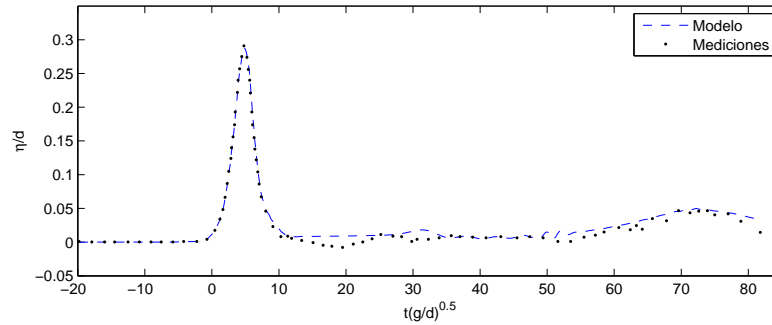


FIGURA 5.2. Serie de tiempo normalizada para onda solitaria de $H/d = 0.28$, registrada a $19.1d$ de la línea de costa en reposo

En la experiencia, la onda solitaria tenía una altura adimensional de $H/d = 0.28$ y fue generada por un pistón en el extremo del canal. A una distancia de $19.1d$ desde la línea de costa de reposo se ubicó una sonda que registró el movimiento de la superficie libre, y esa señal fue utilizada para forzar el modelo numérico.

La figura 5.2 muestra tanto las mediciones de la sonda del experimento, como los resultados del modelo en la misma posición de la sonda. Lo primeros puntos, que muestran el ingreso de la onda solitaria, antes del tiempo adimensional $t\sqrt{g/d} = 10$, son coincidentes en ambos casos ya que los valores medidos fueron utilizados como señal de entrada para el modelo, mientras que para tiempos superiores, los valores corresponden a los generados por el modelo, observándose una buena correspondencia con los datos medidos, que incluyen la reflexión de la onda incidente sobre la batimetría.

Además del registro de la sonda, durante la experiencia se midió la posición de la superficie libre a lo largo del canal, para varios tiempos. Esos datos fueron utilizados para comparar el modelo y ver si éste podía reproducir la evolución de la onda, a medida que avanzaba por la pendiente.

La interfaz entre ambos modelos fue colocada a una distancia de $8.75d$ desde la posición de reposo de la línea de costa, y la figura 5.3 muestra los resultados para los tiempos adimensionales 10, 15, 20 y 21, donde se puede apreciar que la onda es propagada prácticamente

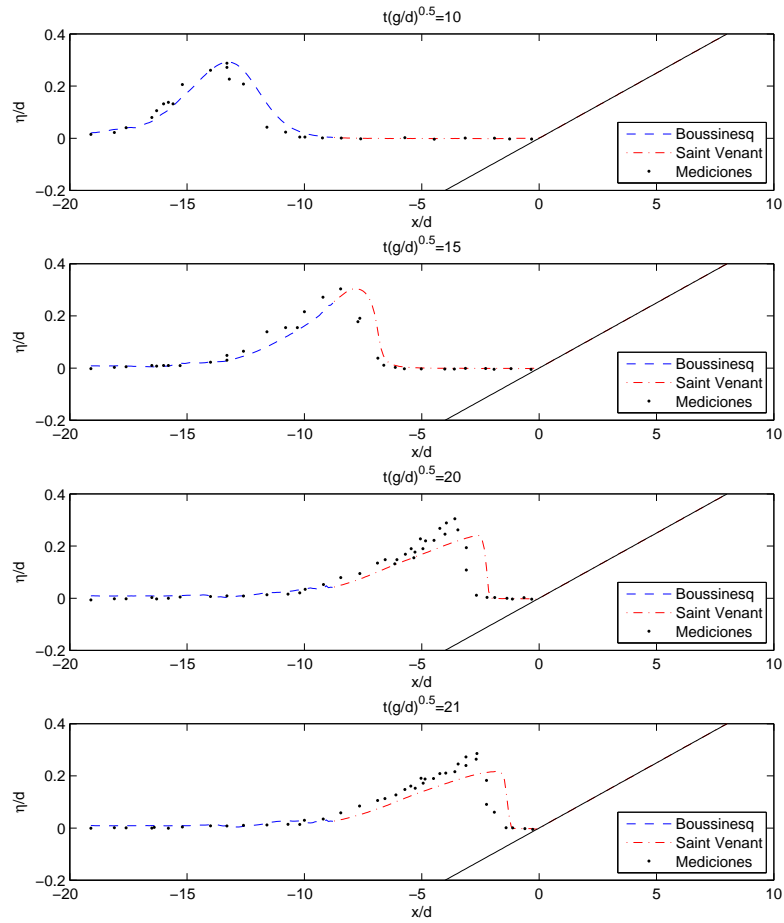


FIGURA 5.3. Superficie libre normalizada para $t\sqrt{g/d} = 10, 15, 20, 21$.

sin deformarse en el dominio de Boussinesq, mientras que en cuanto ingresa al dominio de Saint Venant tiende a inclinarse, y por lo tanto, comenzar a romper.

De hecho, se puede apreciar para los tiempos 20 y 21, que el modelo predice una forma de ola casi vertical, dada su estructura de captura de shock que tiende a interpretar variaciones bruscas como discontinuidades, y aunque no predice correctamente la forma de la onda en ese tiempo, el pie del frente de ola es bien representado por el modelo, de modo que la diferencia de forma es explicable por que los efectos dispersivos aún pueden ser importantes en esa zona.

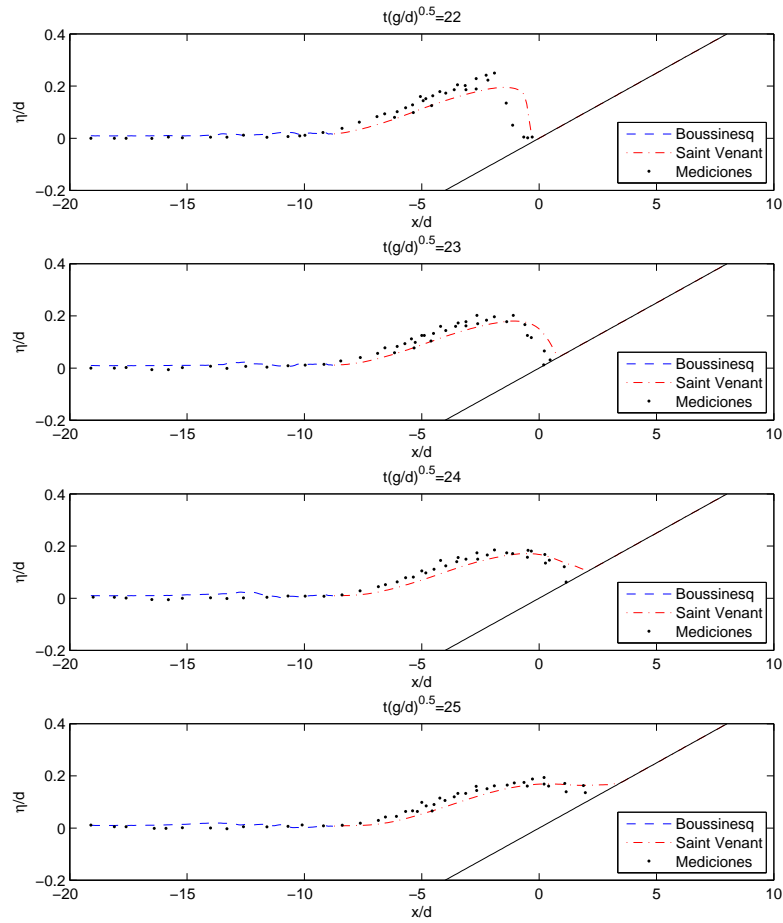


FIGURA 5.4. Superficie libre normalizada para $t\sqrt{g/d} = 22, 23, 24, 25$.

La figura 5.4 muestra los tiempos adimensionales 22 al 25, donde se aprecia que las diferencias observadas en el modelo han disminuido considerablemente, ya que los efectos debidos a la dispersión tienden a ser menores a medida que la profundidad local disminuye.

Se observa, además, que el movimiento de la línea de costa es bien representado, excepto por una pequeña diferencia en los tiempos 24 y 25, que probablemente se deben a que el modelo de Saint Venant no incluye fricción de fondo, y por lo tanto la superficie libre avanzará con más libertad de la que se registró durante la experiencia.

En la figura 5.5 está registrado el máximo run-up, cercano al tiempo 30, que el modelo puede representar correctamente, mientras que para tiempos posteriores se observa el run-down, donde nuevamente se producen diferencias entre el modelo y las mediciones,

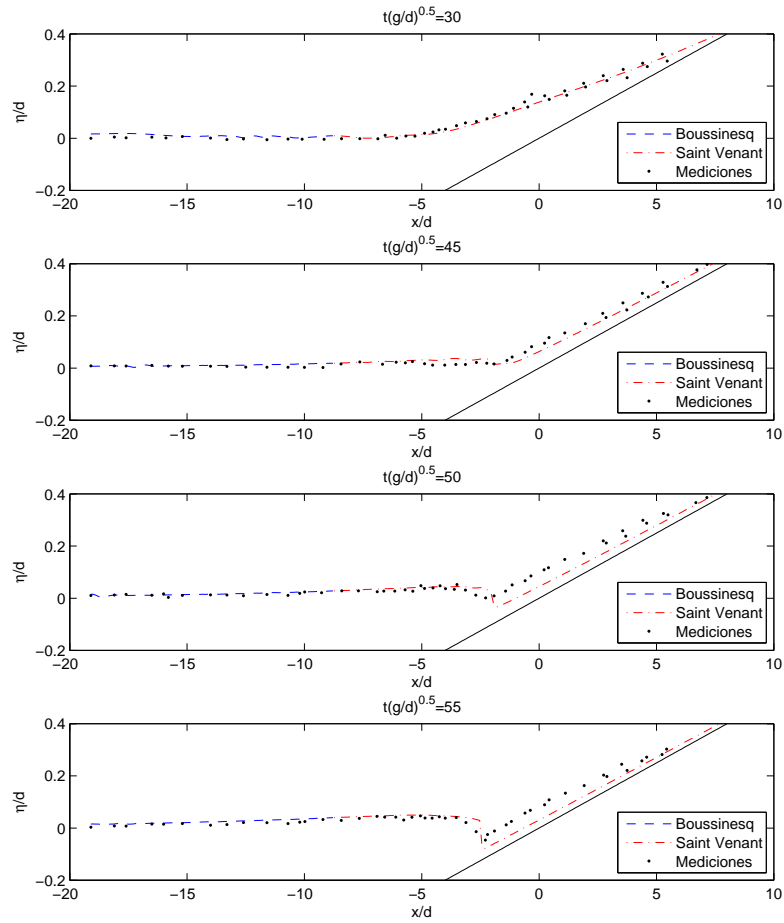


FIGURA 5.5. Superficie libre normalizada para $t\sqrt{g/d} = 30, 45, 50, 55$.

atribuibles a la fricción de fondo, ya que al igual que el caso del run-up, el modelo tiende a adelantarse a la mediciones, aunque de todos modos reproduce correctamente el frente del back-bore que se observa en los tiempos 50 y 55.

Finalmente, la figura 5.6 muestra los últimos tiempos medidos, donde se ve que el modelo predice correctamente la posición y amplitud del back-bore generado por el run-down de la onda solitaria, y luego es capaz de volver a la posición de equilibrio, aunque con un pequeño desfase, debido a la falta de un término fuente de fricción de fondo.

La importancia de este experimento es que permite validar el metodología propuesta de comunicación entre los esquemas numéricos utilizados para cada tipo de modelo, y además permite visualizar claramente las capacidades de cada modelo en su respectiva zona de

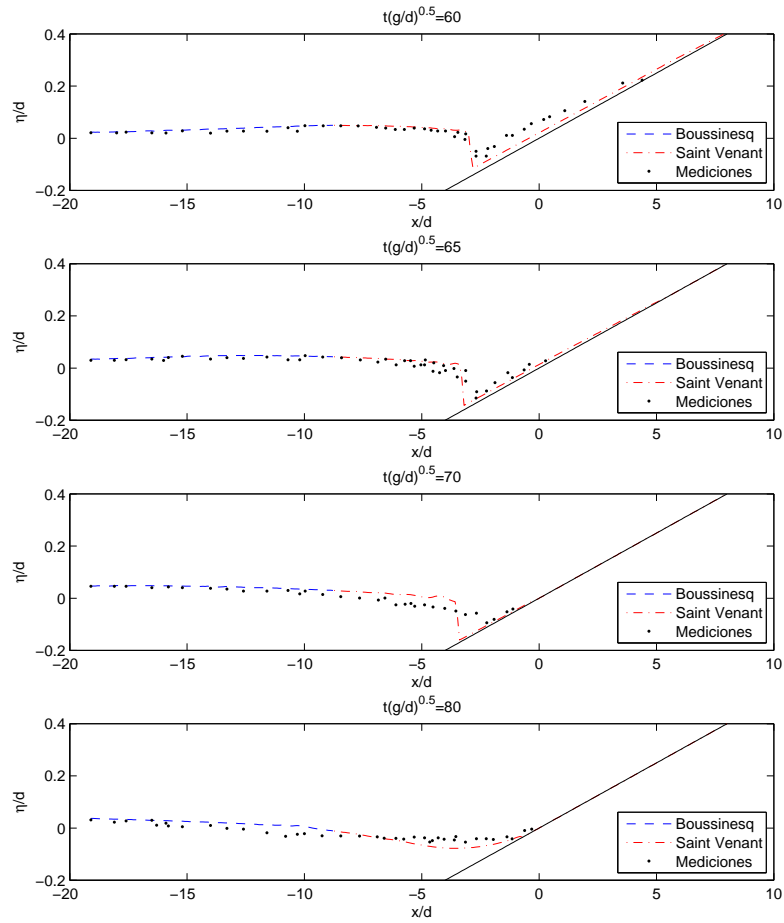


FIGURA 5.6. Superficie libre normalizada para $t\sqrt{g/d} = 60, 65, 70, 80$.

aplicación, sin que esas capacidades se vean comprometidas por la interfaz colocada entre ambos, al menos para el caso de una simple perturbación.

5.3. Experiencia de Ting

Para ampliar el rango de aplicación del modelo híbrido propuesto, se plantea reproducir la experiencia de oleaje regular de Ting, que Cienfuegos (2005) llevó a cabo para validar su modelo Boussinesq, con lo que se conocen a priori los resultados de ese modelo en este caso, por lo que cualquier cambio a esos resultados se podría explicar por la interacción con el modelo Saint Venant.

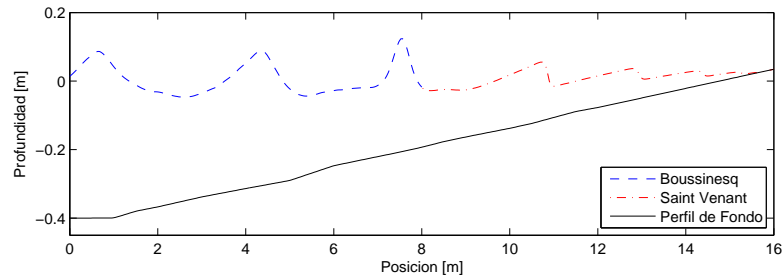


FIGURA 5.7. Batimetría de Ting, separada en cada sub-dominio del modelo híbrido.

Ting llevó a cabo una campaña de mediciones sobre la batimetría mostrada en la figura 5.7 de pendiente más o menos uniforme, sobre la cual fue forzado un oleaje regular de altura de ola $H_0 = 0.125(\text{m})$ y período $T_0 = 2(\text{s})$, realizándose intensas mediciones que permitieron caracterizar la evolución del oleaje a medida que se propagaba por la playa.

Una característica importante de la campaña, es que debido a que el oleaje forzado era regular, el punto de rompimiento se encontraba siempre en la misma posición, en la coordenada $x = 8 (\text{m})$, lo cual permite utilizar distintas configuraciones para el modelo híbrido, para comprobar su comportamiento.

En principio, el modelo está pensado para que la propagación desde aguas profundas hasta la zona de rompientes se lleve a cabo con el modelo Boussinesq, y que la zona de swash sea representada por el modelo Saint Venant, aunque no se existe suficiente consenso sobre cuál debiera ser el punto exacto en que se debiera encontrar la interfaz entre ambos modelos, considerando que la zona de rompientes es, precisamente, una zona y no un punto preciso, y cuya extensión no se conoce con exactitud antes de correr el modelo, salvo gruesas estimaciones.

Sin embargo, para esta experiencia se conoce el punto exacto en que comienza la zona de rompientes y, por lo tanto, se utilizará para ajustar el único parámetro que tiene, por el momento, el modelo híbrido planteado; la posición de la interfaz entre ambos esquemas de resolución.

Para esto, se reproducirá la experiencia de Ting, forzando el modelo durante 60 períodos característicos, o bien, con 60 olas individuales, colocando la interfaz en distintas coordenadas dentro del dominio, para ver el efecto sobre los resultados. Las series de tiempo obtenidas serán promediadas sobre la el período de la ola, de modo de obtener las envolventes y el nivel medio a lo largo del canal.

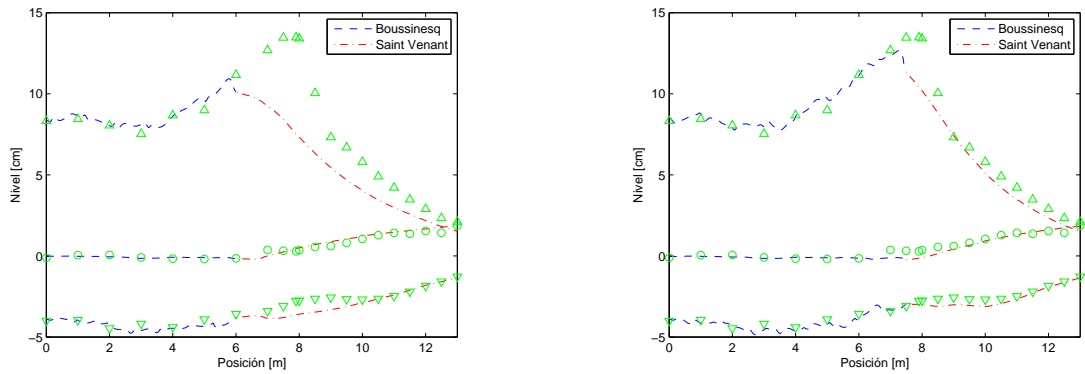


FIGURA 5.8. Resultados para interfaz entre ambos modelos en $x = 6$ (m) y $x = 7.5$ (m). (\blacktriangle) Mediciones de la envolvente superior, $\eta_{max} - \bar{\eta}$; (\bullet) Nivel medio de las mediciones, $\bar{\eta}$; (\blacktriangledown) Mediciones de la envolvente inferior, $\eta_{min} - \bar{\eta}$.

La figura 5.8 muestra el resumen de las mediciones realizadas por Ting, en comparación con los resultados obtenidos con el modelo híbrido, para dos posiciones fuera de la zona de rompientes, a la izquierda para $x = 6$ (m) y a la derecha para $x = 7.5$ (m), donde se aprecia claramente el punto de rompientes en $x = 8$ (m) donde la altura ola, igual a la diferencia entre las envolventes, comienza a disminuir a medida que el nivel medio comienza a aumentar.

Se aprecia en ambos casos, pero especialmente para la interfaz en 6 (m), que el modelo Saint Venant no es capaz de mantener la forma de la ola, y comienza a disipar inmediatamente al entrar a su sub-dominio, lo que se evidencia en la menor envolvente superior que presenta el modelo en esa zona, aunque representa bastante ajustadamente el nivel medio.

Para el caso en que la interfaz se encuentra en $x = 7$ (m), se observa que el modelo Saint Venant nuevamente se adelanta al rompimiento de la ola, pero además se ve que el modelo Boussinesq representa correctamente su evolución hasta el punto de la interfaz, lo

cual es consistente con el resultado anterior, en el sentido que la ola en una posición fuera de la zona de rompientes, no puede ser bien representada por un modelo Saint Venant, pero sí por un modelo Boussinesq, por lo que la interfaz debe encontrarse al interior de la zona de surf.

Por otro lado, la posición de la interfaz no altera los resultados obtenidos por el modelo de Boussinesq, que independiente de donde se produzca el cambio al modelo Saint Venant, reproduce en forma precisa los datos experimentales, consistentemente con lo presentado por Cienfuegos (2005), de modo que el esquema de comunicación entre ambos modelos funciona correctamente transmitiendo la información en ambas direcciones, sólo que el modelo Saint Venant no es capaz de continuar propagando correctamente ondas fuera de la zona de surf.

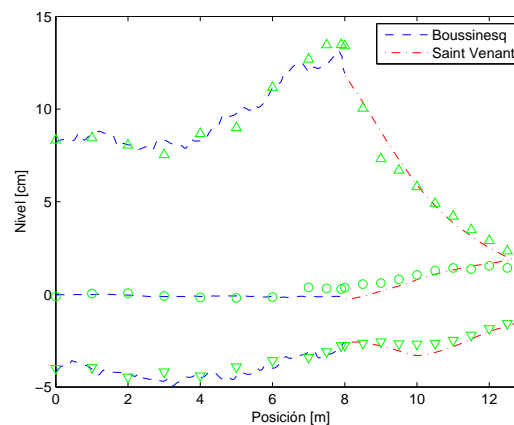


FIGURA 5.9. Resultados para interfaz en el punto de rompimiento, $x = 8$ (m).

Lo anterior se ve reflejado claramente en la figura 5.9 donde la interfaz fue colocada precisamente en el punto de rompimiento, y por lo tanto, la propagación hasta ese punto es reproducida correctamente por el modelo Boussinesq, a la vez que la disipación generada por el modelo Saint Venant se ajusta a la registrada en la experiencia, por lo que es posible afirmar que el modelo híbrido aquí presentado también es capaz de propagar oleaje regular, además de ondas solitarias.

Se sabe, además, que el mecanismo de disipación por rompimiento implementado por Cienfuegos (2005) representa correctamente la zona del canal dentro de la zona de rompientes, de modo que si la interfaz fuera colocada más allá de los 8 metros, el modelo Saint Venant podría seguir propagando las olas hacia la zona de swash, ya que tendría una señal correcta como entrada.

Sin embargo, la metodología de comunicación no funciona correctamente para el caso en que olas rompientes dejan el sub-dominio de Boussinesq, debido a los términos extras asociados al rompimiento, que al momento de pasar al sub-dominio de Saint Venant no se encuentran balanceados, como se discutió anteriormente.

6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En el presente trabajo se presentó un modelo Saint Venant balanceado de segundo orden, con un robusto y correcto esquema de resolución para flujos en aguas someras, y luego de someterlo a variados test, tanto analíticos como de experiencias de laboratorio, es posible afirmar que es una útil herramienta para representar correctamente los complejos flujos asociados a la zona de swash, donde se produce la interfaz entre el dominio mojado y seco, y por lo tanto, su zona de aplicabilidad se extiende en toda la zona de surf interno, donde la disipación del oleaje se debe al rompimiento de las olas.

El desarrollo del modelo Saint Venant obedece la necesidad de buscar una alternativa para el tratamiento de la condición de borde de la línea de costa utilizada en modelos de tipo Boussinesq, dado que es sabido que presentan singularidades numéricas abordadas normalmente de forma ad-hoc, mientras que los esquemas hiperbólicos de las ecuaciones de Saint Venant pueden lidiar con la existencia de zonas secas al interior del dominio, como se demostró en el caso de la barrera triangular.

En este sentido, se presentó una interfaz para comunicar ambos tipos de modelo, basada en una aproximación quasi-hiperbólica de las ecuaciones de Boussinesq, que permite utilizar las trayectorias características de ambos sets de ecuaciones y resolver las variables de estado en la interfaz, utilizando la información transmitida por ella, a través de las relaciones entre sus invariantes de Riemann.

La metodología de comunicación se presenta efectiva tanto para mantener el estado estacionario como para transmitir ondas solitarias fuera de la zona de rompientes, donde se evidencia la utilidad de cada modelo en la zona que mejor representa, esto es, la propagación desde aguas profundas a cargo del modelo de Boussinesq, donde la dispersión es muy importante para evitar rompimiento prematuro, y el movimiento del run-up y run-down a cargo del modelo Saint Venant, que es capaz de representar la interfaz con la zona seca del dominio.

Lo anterior se vio comprobado en una experiencia de oleaje regular, donde la interfaz fue colocada precisamente en el punto de rompimiento, y cada modelo representó de forma muy ajustada la propagación del oleaje en cada zona.

Sin embargo, existen problemas sobre los que aún se debe trabajar, relacionados con la posición que debe tener la interfaz en el interior del dominio.

Primeramente, queda comprobado que ésta no puede encontrarse fuera de la zona de rompientes, ya que el modelo Saint Venant tenderá a hacer romper las olas antes de tiempo, por no incorporar efectos de dispersión. Además, queda comprobado que el modelo Saint Venant entregará mejores resultados si tiene como entrada una señal en el interior de la zona de surf, idealmente, lo más cerca de la costa posible para el caso particular del modelo Boussinesq Serr1D, para aprovechar la parametrización del rompimiento que éste tiene, que se ha demostrado muy efectiva.

Lo anterior genera un problema que va más allá del rango de acción de esta memoria, ya que la metodología de comunicación, tal como se presenta aquí, no es capaz de comunicar olas rompientes entre ambos modelos, tanto por los términos desbalanceados del rompimiento en el modelo Boussinesq, como por la inexistencia de la trayectoria negativa en el modelo Saint Venant, con lo cual la posición óptima, y única, que debiera tener la interfaz es el punto de rompimiento, y aunque esta conclusión se ve respaldada por la experiencia de oleaje regular, en la práctica es muy poco aplicable, ya que el punto de rompimiento es móvil, y no se conoce a priori.

En este sentido, el trabajo futuro que se debiera seguir para una implementación completa de la metodología propuesta, tendría que considerar buscar las condiciones que se producen cuando una ola rompiente atraviesa la interfaz.

En el caso del modelo Saint Venant, se conocen las condiciones de este tipo de discontinuidades, ya que son utilizadas en el solver de Riemann implementado, y forman parte de la física que define sus ecuaciones, por lo que no debiera ser complicado encontrar la relación entre los estados separados por el frente de la ola.

Para el caso del modelo Boussinesq, el trabajo debiera ir en la determinación de una condición de borde abierta, que permita la salida del dominio de olas rompientes, sin que los términos asociados al rompimiento queden desbalanceados.

Si ambos objetivos son alcanzados, se debiera buscar la mejor forma de implementar una interfaz adaptable que pueda reconocer cuál es el tipo de onda que se encuentra comunicando los modelos, y en base a eso, utilice unos u otros criterios para obtener los valores de las variables de estado en la interfaz.

No obstante las limitaciones encontradas, y los limitados rangos de aplicación, consideramos que el punto de vista propuesto tiene un valor intrínseco, por cambiar el enfoque que actualmente se tiene sobre el tratamiento de la línea de costa en modelos Boussinesq, hacia uno más matemático, reconociendo las virtudes de cada esquema, y también las limitaciones que los restringen a su dominio particular, así como también la forma en que la información es propagada a través de una interfaz matemáticamente correcta y de muy sencilla implementación.

BIBLIOGRAFIA

- Belloti, G., & Brocchini, M. (2001). On the shoreline boundary conditions for Boussinesq-type models. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 37, 479-500.
- Brocchini, M., & Dodd, N. (2008). Nonlinear Shallow Water Equation Modelling for Coastal Engineering. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 134, 104-120.
- Cienfuegos, R. (2005). *Modélisation Numérique des Houles Bidimensionnelles et du Déferlement bathymétrique*. PhD Thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France.
- Cienfuegos, R., Barthélemy, E., & Bonneton, P. (2005). A new wave-breaking parametrization for Boussinesq-type equations. In *5th int. symp. oc. wave meas. anal.* Madrid, Spain.
- Cienfuegos, R., Barthélemy, E., & Bonneton, P. (2006). A fourth order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations - Part I : Model Development and analysis. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 51, 1271-1253.
- Cienfuegos, R., Barthélemy, E., & Bonneton, P. (2007). A fourth order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations - Part II : Boundary Conditions and validation. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 53, 1423-1455.
- Cienfuegos, R., Barthélemy, E., Bonneton, P., & Gondran, X. (2006). *Non-linear surf zone wave properties as estimated from a boussinesq modelling: Random waves and complex bathymetries*.
- Ferziger, J., & Peric, M. (1996). *Computational Methods for Fluid Dynamics* (3rd ed.). Springer.

- Kennedy, A., Chen, Q., Kirby, J., & Dalrymple, R. (2000). Boussinesq Modeling of Wave Transformations, Breaking, and Runup - I: 1D. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 126, 39-47.
- Lynett, P., Wu, T., & Liu, P. (2002). Modeling wave runup with depth-integrated equations. *Coastal Engineering*, 46, 89-107.
- Marche, F. (2005). *Theoretical and Numerical Study of Shallow Water Models. Applications to Nearshore Hydrodynamics*. Unpublished doctoral dissertation, L'Université Bordeaux I.
- Marche, F. (2007). Evaluation of well-balanced bore-capturing schemes for 2d wetting and drying processes. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 53, 867-894.
- Noelle, S., Pankratz, N., Puppo, G., & Natvig, J. (2006). Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows. *Journal of Computational Physics*, 213, 474-499.
- Prasad, R., & Svendsen, I. (2003). Moving shoreline boundary condition for nearshore models. *Coastal Engineering*, 49, 239-261.
- Sleigh, A. (2006, Octubre). *Solution of the Saint Venant Equations / Shallow Water Equations for open channel flows*. Disponible en el sitio: <http://www.efm.leeds.ac.uk/CIVE/UCHile/>. (Curso corto en la Universidad de Chile)
- Soares-Frazao, S. (2007). Experiments of dam-break wave over a triangular bottom sill. *Journal of Hydraulic Research*, 45 Extra Issue, 19-26.
- Stoker, J. (1958). *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications* (Classics Library 1992 ed.). Wiley.
- Toro, E. (2001). *Shock-Capturing Methods for Free-Surfaces Shallow Flows* (2001 ed.). Wiley.
- Zelt, J. (1991). The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves. *Coastal Engineering*, 15, 205-246.