Lecture 11 – Mathematical morphology I

Prof. João Fernando Mari
joaofmari.github.io
joaof.mari@ufv.br

Agenda

- Mathematical morphology
- Basic operations with sets
- Erosion
- Dilation
- Duality
- Gray level mathematical morphology

MATHEMATICAL MORPHOLOGY

Mathematical morphology

- A linguagem da morfologia matemática é a teoria dos conjuntos
  - Os objetos em uma imagem são representados como conjuntos
  - O conjunto de todos os pixels brancos (ou pretos, dependendo da convenção) em uma imagem binária é uma representação completa da imagem

- Em imagens binárias esses conjuntos estão em Z^2
  - Cada elemento do conjunto é um vetor bidimensional
  - Cada dimensão corresponde às coordenadas (x, y) de um pixel branco da imagem

- As imagens em níveis de cinza podem ser representadas como conjuntos em Z^3
  - Dois componentes de cada elemento referem-se às coordenadas do pixel
  - O terceiro corresponde ao seu valor discreto de intensidade

Representation of binary images as sets

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1
2	0	0	1	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

C_0 = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3) }

C_1 = { (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 7), (3, 6), (3, 7) }

C_2 = { (5, 5) }

C_3 = { (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2) }

$$C_I = \bigcup_{i=0}^{N-1} C_i \,, \qquad for\ N\ objects$$

Intensity images as sets

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	1	0	5	7	5
2	0	0	2	3	0	0	0	6
3	0	0	0	0	0	0	4	7
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	0	0	3	0	0
6	0	1	3	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

C_0 = { (1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 3) }
C_1 = { (1, 5, 5), (1, 6, 7), (1, 7, 5), (2, 7, 6), (3, 6, 4), (3, 7, 7) }
C_2 = { (5, 5, 3) }
C_3 = { (5, 1, 1), (5, 2, 2), (6, 1, 1), (6, 2, 3) }

$$C_I = \bigcup_{i=0}^{N-1} C_i\,, \qquad for\ N\ objects$$

BASIC OPERATIONS WITH SETS

Basic operations with sets

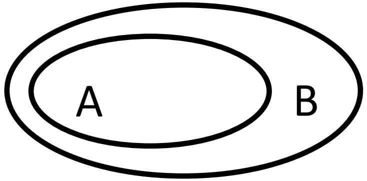
- Seja A um conjunto de pares ordenados de números reais
  - Se $a=(a_1, a_2)$ for um elemento de A, temos:
    - $a \in A$ (a é elemento de A)
  - Se a não for um elemento de A:
    - $a \notin A$ (a não é elemento de A)
  - Se um conjunto não contém elementos:
    - Conjunto vazio – $\emptyset$

- Um conjunto é especificado pelo conteúdo de duas chaves
  - Ex.: $C = \{w | w = -d, d \in D\}$
  - C é o conjunto dos elementos, w, tal que w é formado multiplicando cada um dos elementos do conjunto D por -1

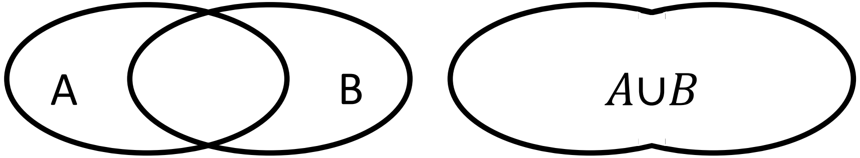
- Uma forma de utilizar conjuntos em processamento de imagens é:
  - Considerar os elementos do conjunto como as coordenadas dos pixels (pares ordenados de números inteiros)
  - Cada conjunto representa regiões (objetos) na imagem

Basic operations with sets

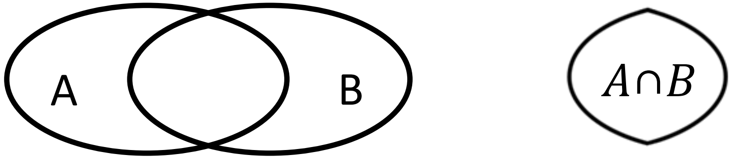
- Se cada elemento de um conjunto A também é elemento de um conjunto B, então...
  - A é subconjunto de B
  - $A \subseteq B$



- A união dos conjuntos A e B é:
  - O conjunto dos elementos que pertencem ou ao conjunto A, ou ao B ou a ambos
  - $C = A \cup B$



- A intersecção de dois conjuntos A e B é:
  - O conjunto de elementos que pertencem a ambos os conjuntos
  - $D = A \cap B$

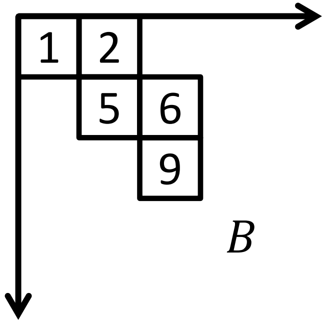


Basic operations with sets

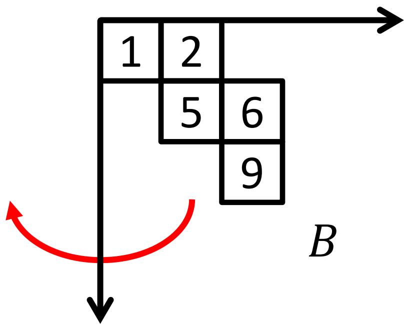
- A reflexão de um conjunto *B*, $\hat{B}$, é:
  - $\hat{B} = \{w | w = -b, para\ b \in B\}$
  - Se *B* é o conjunto de pixels que representa um objeto,
    - $\hat{B}$ é conjunto de pixels em *B* cujas coordenadas (*x, y*) foram substituídas pro (-*x*, -*y*).

- A translação de um conjunto B no ponto (z_1, z_2), $(B)_z$, é:
  - $(B)_z = \{c | c = b + z, para\ b \in B\}$
  - Se *B* é o conjunto de pixels que representa um objeto,
    - $(B)_z$ é o conjunto de pixels em *B* cujas coordenadas (*x, y*) foram substituídas por ($x+z_1$, $y+z_2$)

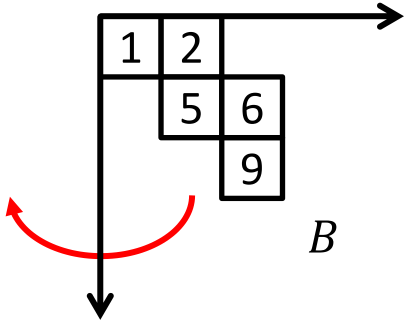
Reflection

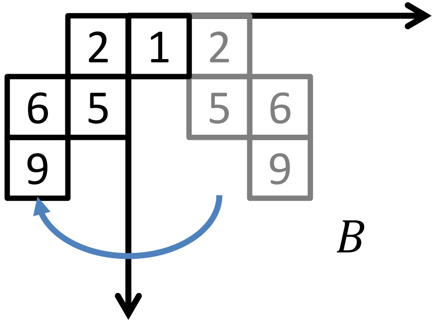


Reflection

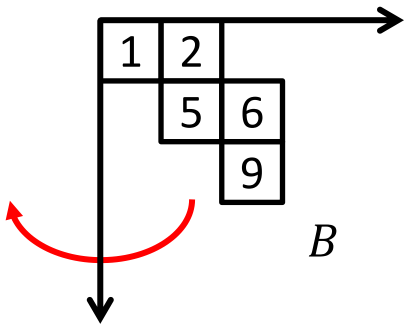


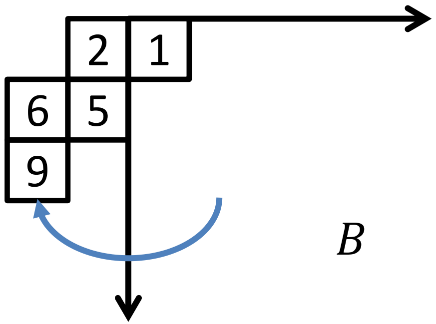
Reflection



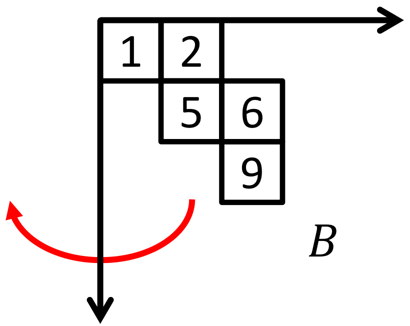


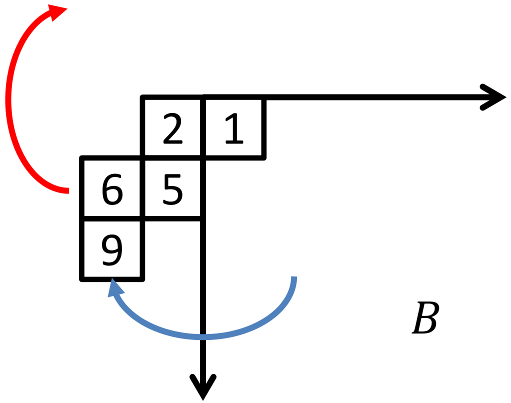
Reflection



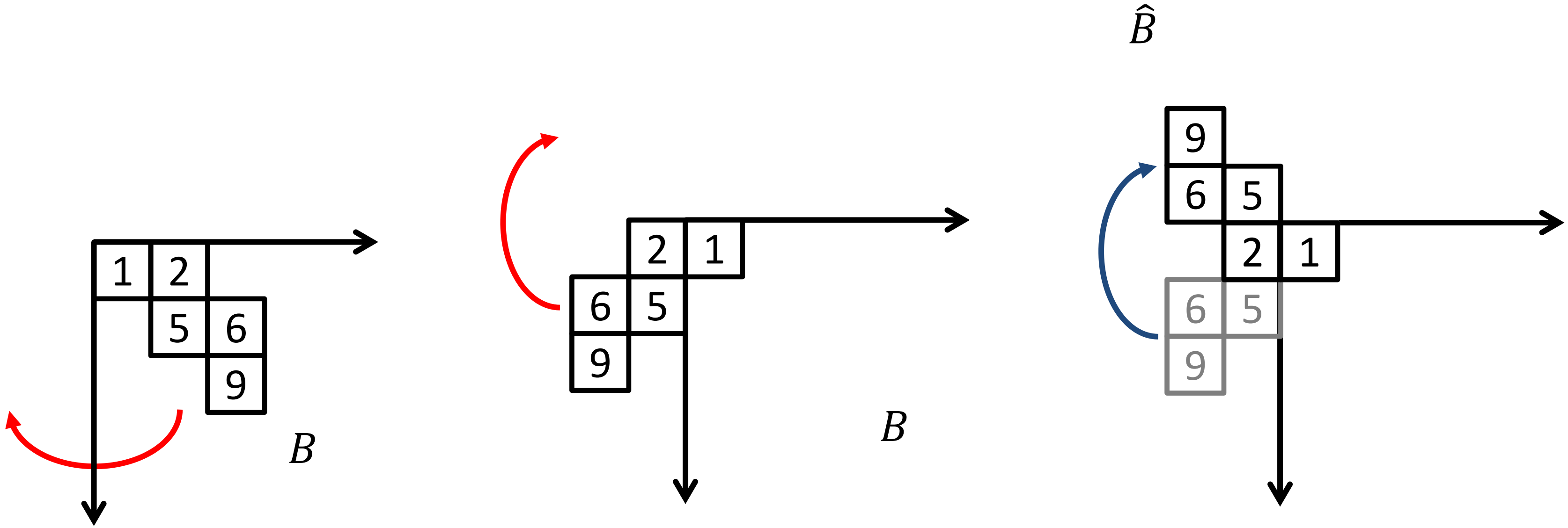


Reflection

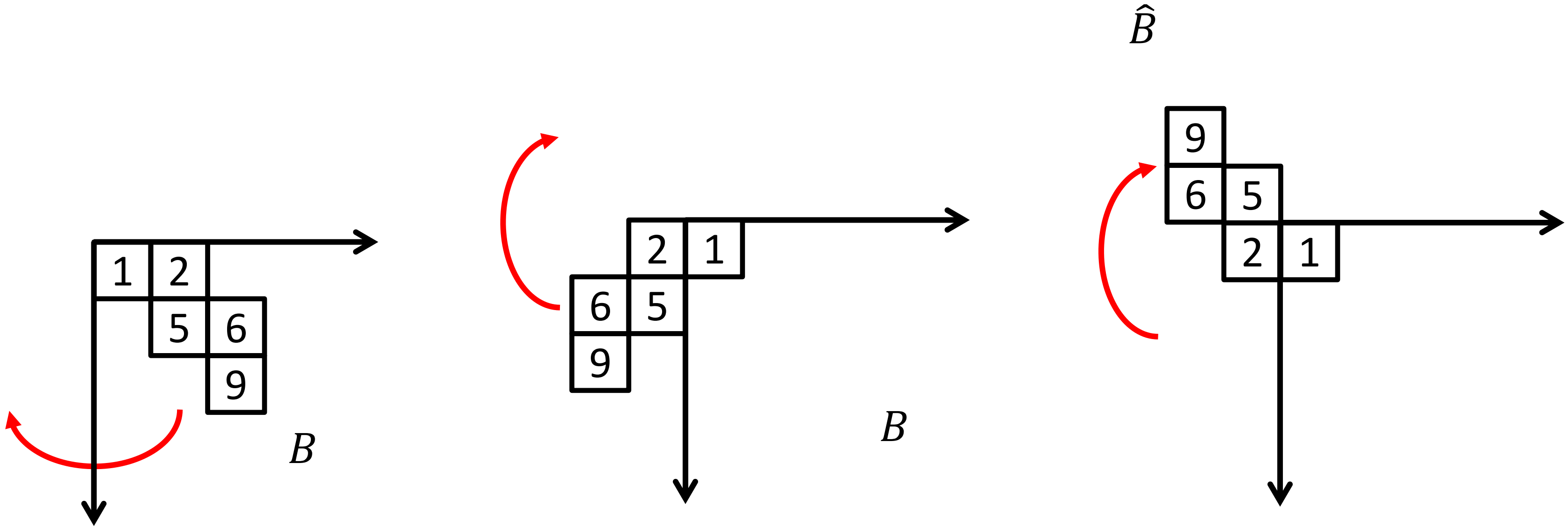




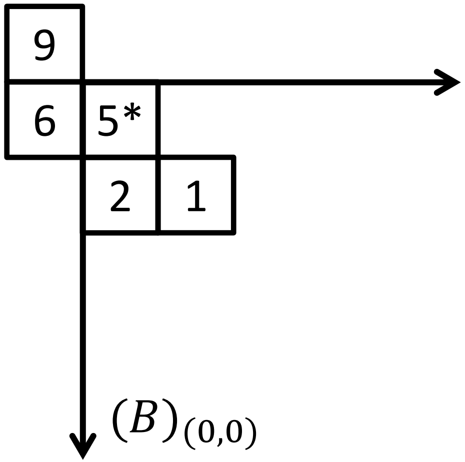
Reflection

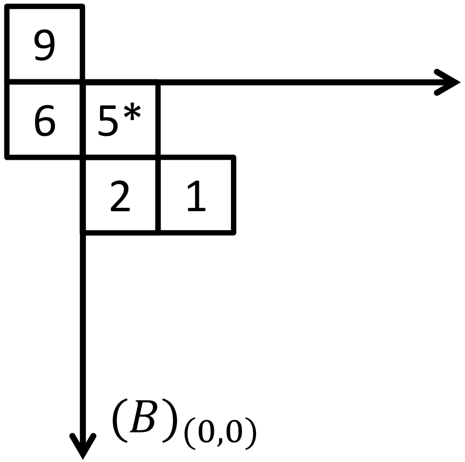


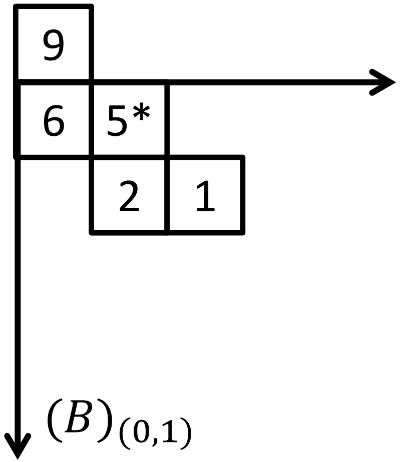
Reflection



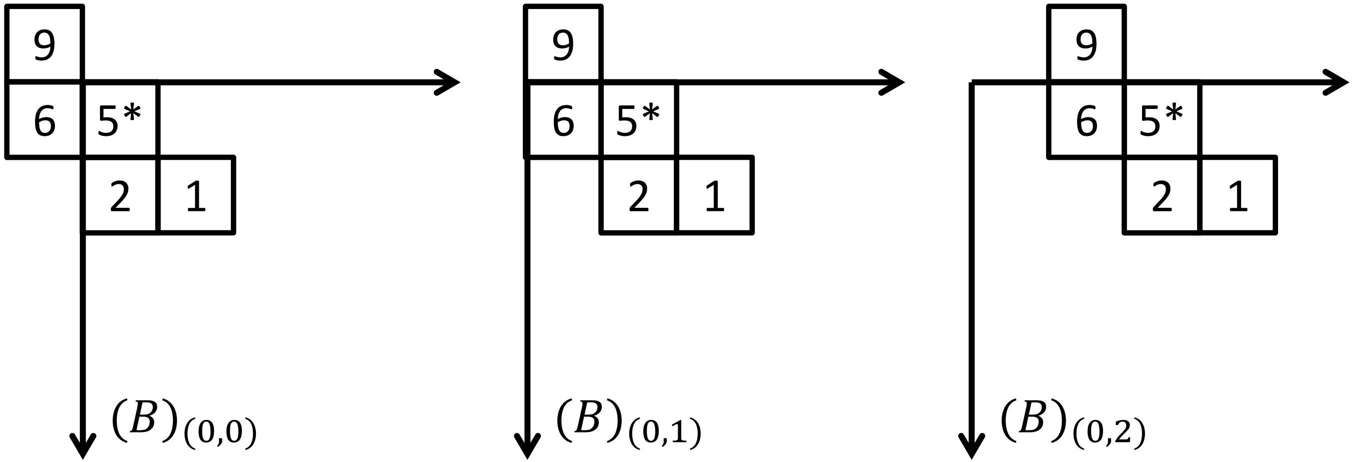
Translation



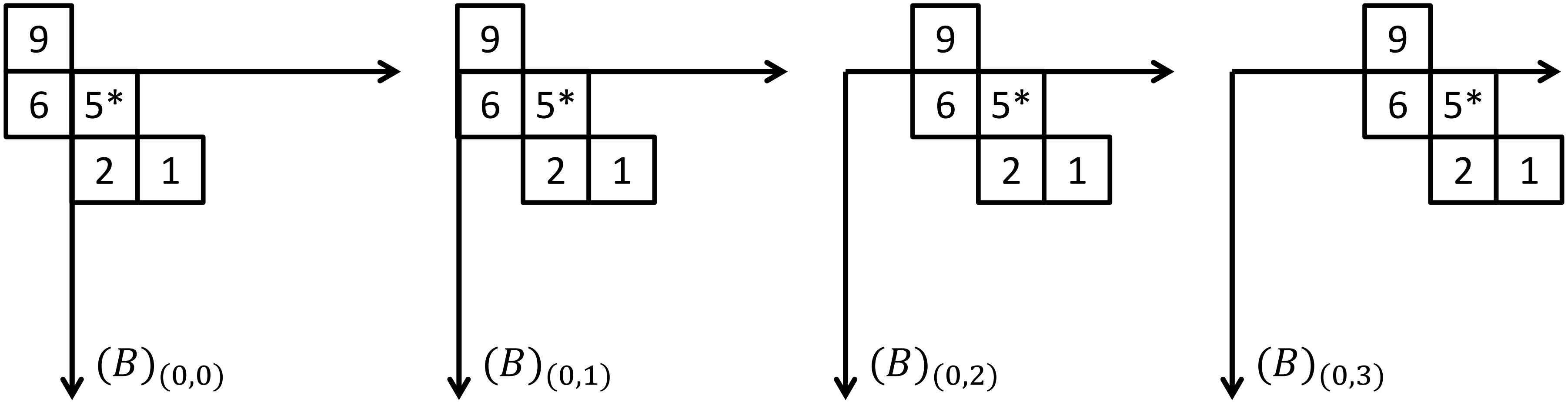

9
6
5*
2
1
$(B)_{(0,0)}$


9
6
5*
2
1
$(B)_{(0,1)}$

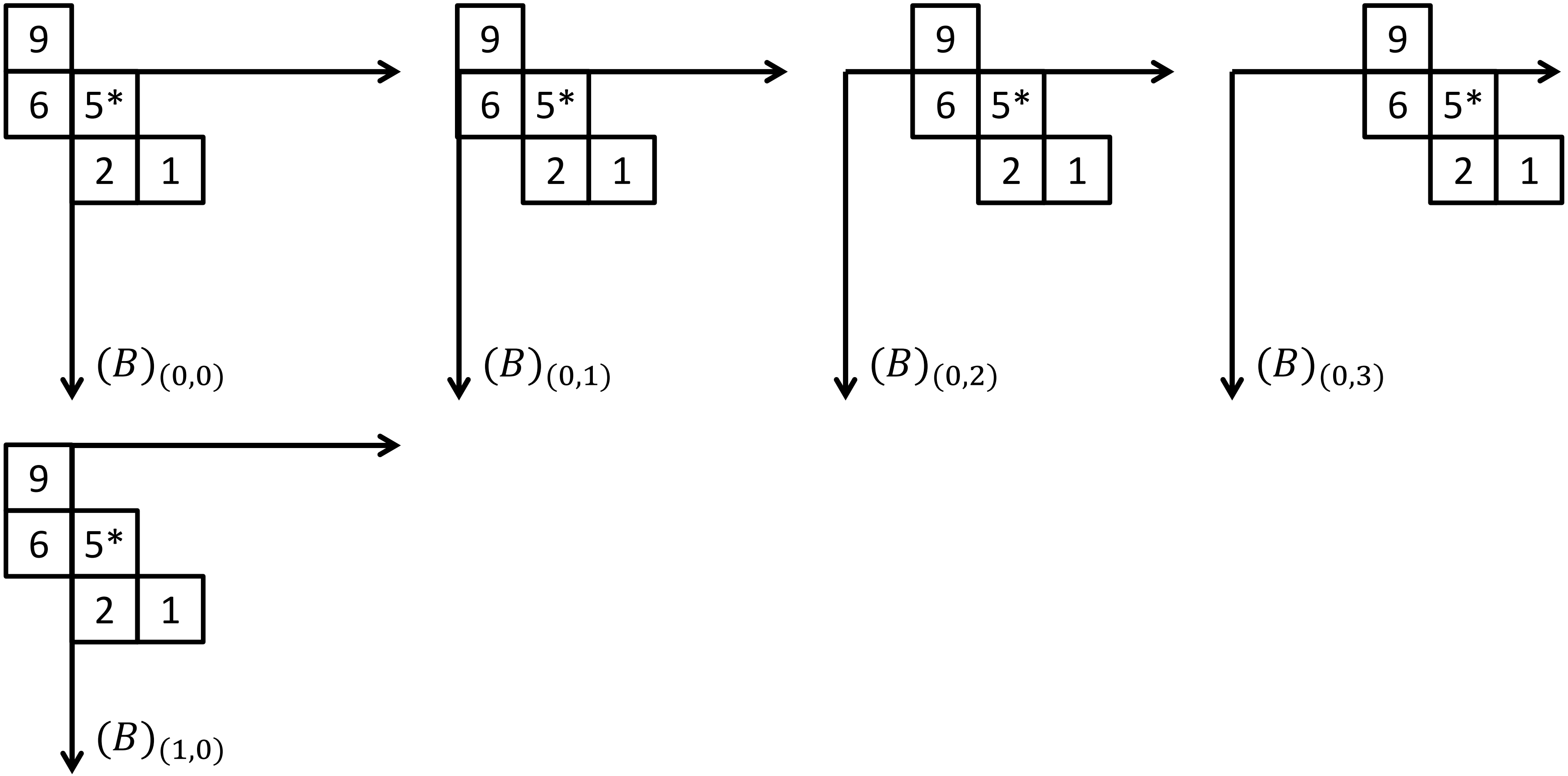
Translation



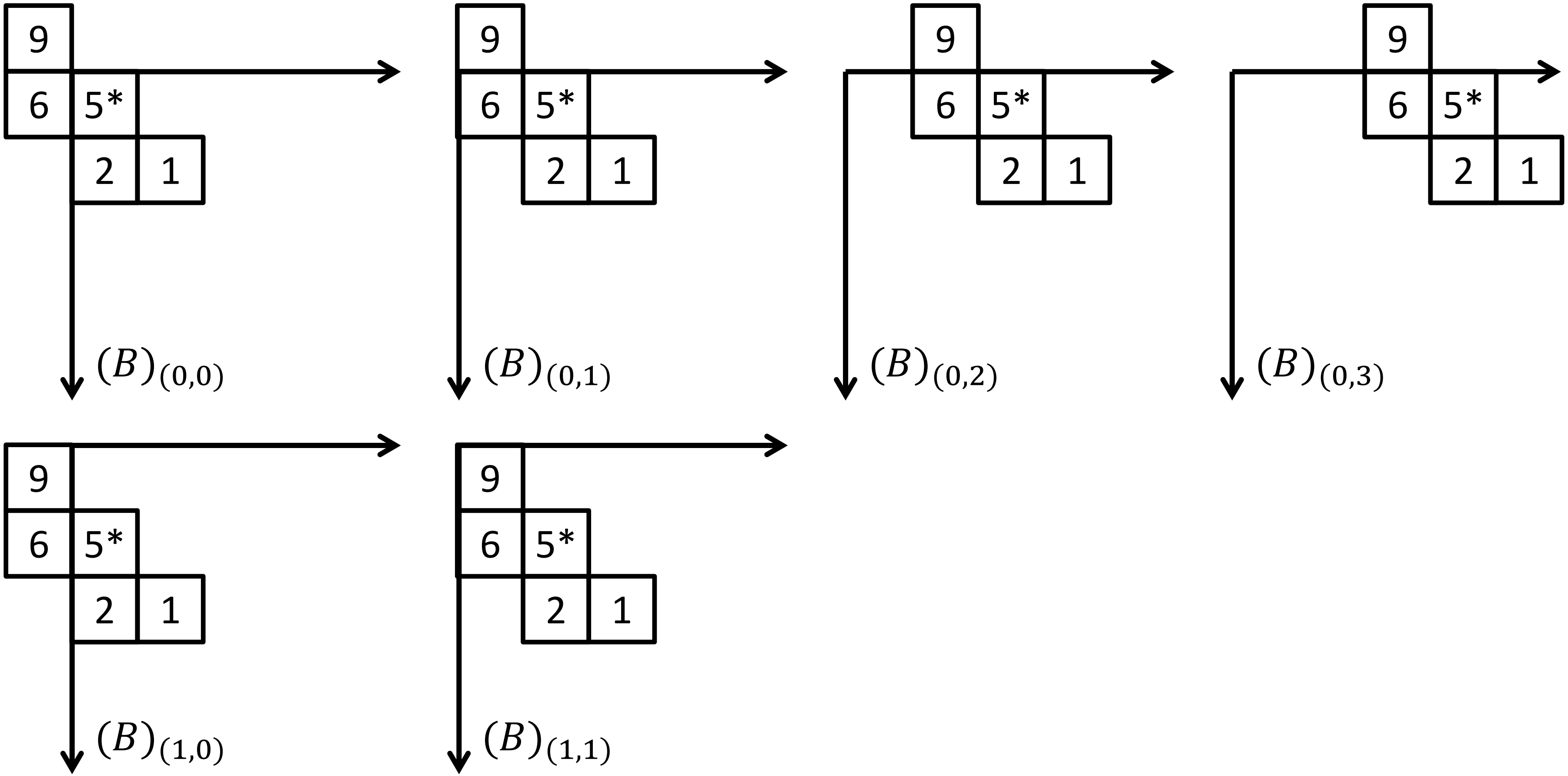
Translation



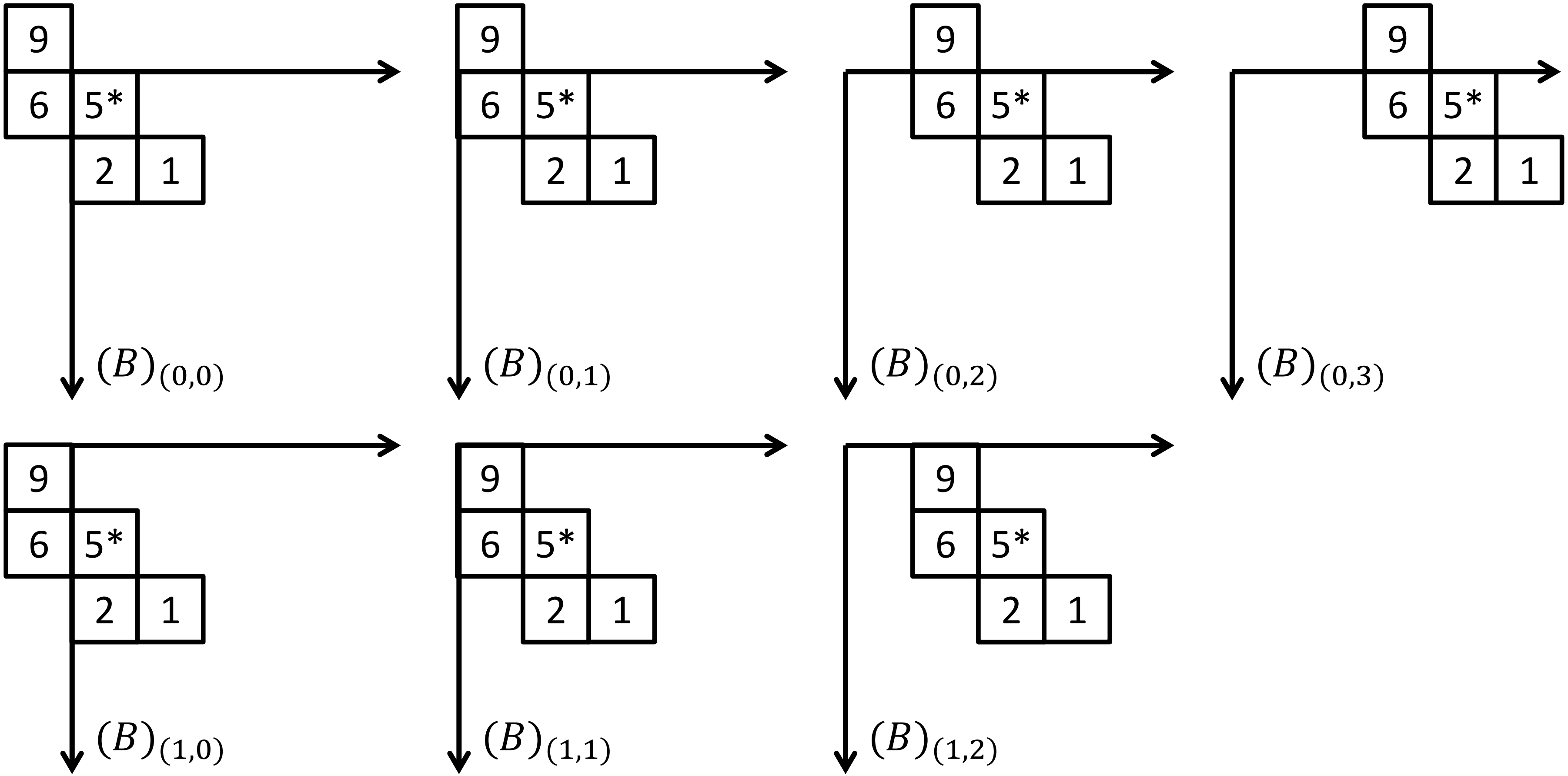
Translation



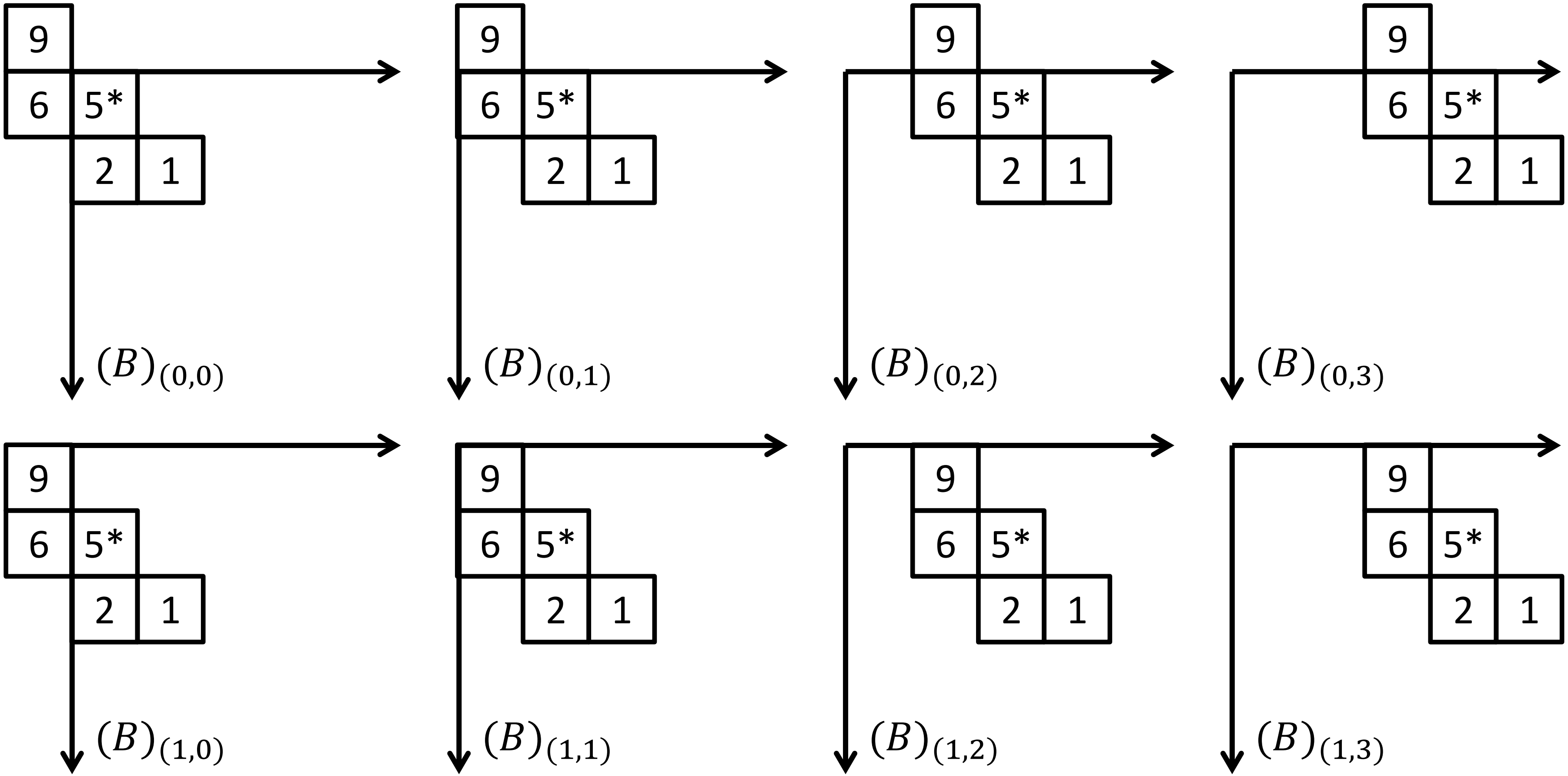
Translation



Translation



Translation



Structuring elements

- Structuring elements (SE)
  - Conjuntos pequenos ou sub-imagens usados para examinar uma imagem buscando propriedades de interesse.

0	1	0
1	1	1
0	1	0

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1
1
1
1
1

			1			
		1	1	1		
	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	
		1	1	1		
			1			

1	1	1
0	0	1
0	1	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0*

- *O * indica o centro do elemento estruturante.*
- *Quando omitido, o centro do EE corresponde ao centro da matriz*

EROSION

Erosion

- **Erosão** e **dilatação** são operações fundamentais da morfologia matemática.
  - Muitos dos algoritmos morfológicos são derivados dessas duas operações.

- A erosão de um conjunto A por um EE B é:
  - $\mathrm{A} \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$
  - A erosão de *A* por *B* é o conjunto de todos *z* de forma que *B* transladado por *z* está contido em *A*.

- Uma definição alternativa para o mesmo caso:
  - Dizer que *B* esta contido em *A* equivale a dizer que *B* não tem elementos comuns com o fundo.
  - $\mathrm{A} \ominus B = \{z | (B)_z \cap A^c = \emptyset\}$

Erosion

- $A \ominus B = \{z|(B)_z \subseteq A\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

B

0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	*0*
0	0	1	1	1	1	1	1	0	*0*
0	0	1	1	1	1	1	1	0	*0*
0	0	1	1	1	1	1	1	0	*0*
0	0	1	1	1	1	1	1	0	*0*
0	0	1	1	1	1	1	1	0	*0*
0	0	1	1	1	1	1	1	0	*0*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

$A \ominus B$

Erosion

- $A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

B

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

$A \ominus B$

Erosion

- $A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

B

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

$A \ominus B$

UFV Universidade Federal de Viçosa

- $A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1
1
1
1
1

B

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

$A \ominus B$

Erosion

UFV
Universidade Federal de Viçosa

- $A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1
1
1
1
1

B

0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

$A \ominus B$

Erosion

- $A \ominus B = \{z|(B)_z \subseteq A\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1
1
1
1
1

B

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

$A \ominus B$

DILATION

Dilation

- A **dilatação** de um conjunto A por um EE B é:
  - $A \oplus B = \left\{ z \middle| (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset \right\}$

- Primeiramente, realiza-se a reflexão de *B* em torno de sua origem.
  - A dilatação de *A* por *B* é o conjunto de todos os deslocamentos *z*, de forma que $\hat{B}$ (reflexão de *B*) e *A* se sobreponham em pelo menos um elemento.

- Uma definição alternativa para o mesmo caso:
  - $A \oplus B = \left\{ z \middle| \left[(\hat{B})_z \cap A \right] \subseteq A \right\}$

Dilation

- $A \oplus B = \{z \,|\, (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

B

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

$A \oplus B$

- $A \oplus B = \{z | (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

B

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

$A \oplus B$

Dilation

- $A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

B

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

$A \oplus B$

Dilation

- $A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1
1
1
1
1

B

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

$A \oplus B$

Dilation

- $A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1
1
1
1
1

B

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

$A \oplus B$

Dilation

- $A \oplus B = \left\{ z \middle| (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset \right\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1
1
1
1
1

B

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	1	1	1	1	0	0
7	0	0	1	1	1	1	0	0

$A \oplus B$

DUALITY

Duality

Universidade Federal de Viçosa

- A dilatação e a erosão são operações duais:
  - $(A \ominus B) = A^c \oplus \hat{B}$
  - $(A \oplus B) = A^c \ominus \hat{B}$

  - A **erosão** de *A* por *B* é o complemento da dilatação de Ac por $\hat{B}$
  - A **dilatação** de *A* por *B* é o complemento da erosão de Ac por $\hat{B}$
  - Quando o EE é simétrico pode-se obter a dilatação por meio da erosão do fundo da imagem.
    - Assim como, obter a erosão por meio da dilatação do fundo da imagem

GRAY LEVEL MATHEMATICAL MORPHOLOGY

Gray level mathematical morphology

- Morfologia matemática em níveis de cinza usando decomposição por limiarização:
  1. Decompor a imagem de intensidade f(x, y) por limiarização em todos os possíveis níveis de cinza.
     - Cada limiarização irá gerar uma imagem binária
  2. Aplicar a operação morfológica sobre cada imagem binária
  3. Reconstruir a imagem de saída g(x, y) “empilhando” as imagens binárias processadas.

Gray level mathematical morphology

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	1	0	5	7	5
2	0	0	2	3	0	0	0	6
3	0	0	0	0	0	0	4	7
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	0	0	3	0	0
6	0	1	3	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1
2	0	0	1	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

1

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

2

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

3

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

4

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

5

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

6

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

Bibliography

- GONZALEZ, R.C.; WOODS, R.E. **Digital Image Processing**. 3rd ed. Pearson, 2007.

- MARQUES FILHO, O.; VIEIRA NETO, H. **Processamento digital de imagens**. Brasport, 1999.
  - (*in Brazilian Portuguese*)
  - Available on the author's website (for personal use only)
  - http://dainf.ct.utfpr.edu.br/~hvieir/pub.html

- J. E. R. Queiroz, H. M. Gomes. **Introdução ao Processamento Digital de Imagens**. RITA. v. 13, 2006.
  - (*in Brazilian Portuguese*)
  - http://www.dsc.ufcg.edu.br/~hmg/disciplinas/graduacao/vc-2016.2/Rita-Tutorial-PDI.pdf

Bibliography

- Aldo von Wangenheim. **Morfologia Matemática**
  - http://www.inf.ufsc.br/~visao/morfologia.pdf

- James Facon. **A Morfologia Matemática e suas Aplicações em Processamento de Imagens.** Minicurso – WVC 2011
  - http://www.ppgia.pucpr.br/~facon/Books/2011WVCMinicurso2Morfo.pdf

```
@misc{mari_im_proc_2023,
	author = {João Fernando Mari},
	title = {Mathematical morfology I},
	year = {2023},
	publisher = {GitHub},
	journal = {Introduction to digital image processing - UFV},
	howpublished = {\url{https://github.com/joaofmari/SIN392_Introduction-to-digital-image-processing_2023}}
}
```

THE END