CAPITEL 15

VON DEN CUBIC-WURZELN UND DEN DAHER ENTSPRINGENDEN IRRATIONAL-ZAHLEN

158.

Da gezeigt worden, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden werden soll, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche drey mal mit sich selbsten multiplicirt dieselbe Zahl hervorbringe: und diese wird in Ansehung jener ihre *Cubic-Wurzel* genennet. Also ist die Cubic-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl, eine solche Zahl, deren Cubus der vorgegebenen Zahl gleich ist.

159.

Wann also die vorgegebene Zahl eine würckliche Cubic-Zahl ist, dergleichen wir im obigen Capitel gefunden, so ist leicht die Cubic-Wurzel davon zu finden. Also ist von 1, die Cubic-Wurzel 1; von 8 ist sie 2; von 27 ist sie 3; von 64 ist sie 4, und so fort.

Eben so ist auch von -27, die Cubic-Wurzel -3; von -125 ist sie -5. Wann auch die Zahl gebrochen ist, so ist von $\frac{8}{27}$ die Cubic-Wurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner wann es eine vermischte Zahl ist als $2\frac{10}{27}$ welche in einen einzeln Bruch $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubic-Wurzel davon $\frac{4}{3}$ das ist $1\frac{1}{3}$.

160.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein würcklicher Cubus ist, so läßt sich auch die Cubic-Wurzel davon, weder durch gantze, noch gebrochene Zahlen ausdrücken; also da 43 keine Cubic-Zahl ist, so kann unmöglich weder in gantzen noch gebrochenen Zahlen, eine Zahl angezeigt werden, deren Cubus genau 43 ausmache. Inzwischen aber wißen wir doch so viel, daß die Cubic-Wurzel davon größer sey, als 3, weil der Cubus davon nur 27 ausmacht, und doch kleiner als 4, weil der Cubus davon schon 64 ist. Folglich wißen wir, daß die verlangte Cubic-Wurzel zwischen den Zahlen 3 und 4 enthalten seyn müße.

161.

Wollte man nun zu 3, weil die Cubic-Wurzel aus 43 größer ist als 3, noch einen Bruch hinzusetzen so könnte man der Wahrheit näher kommen, da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so könnte derselbe niemahls genau 43 werden. Man setze z. E. die gesuchte Cubic-Wurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$ so würde der Cubus davon seyn $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43.

162.

Hieraus ist also klar, daß sich die Cubic-Wurzel aus 43 auf keinerley weise durch gantze Zahlen und Brüche ausdrücken laße; da wir aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben haben, so bedient man sich dieselben anzuzeigen dieses Zeichens $\sqrt[3]{}$ so vor die gegebene Zahl gesetzet, und mit dem Worte Cubic-Wurzel ausgesprochen wird, um daßelbe von der Quadrat-Wurzel zu unterscheiden. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$, die Cubic-Wurzel von 43, das ist, eine solche Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche drey mal mit sich selbsten multiplicirt 43 hervorbringt.

163.

Hieraus ist klar, daß dergleichen Ausdrücke keinesweges zu den Rationalen gehören, sondern eine besondere Art von Irrational-Grössen darstellen. Sie haben auch mit den Quadrat-Wurzeln keine Gemeinschaft, und es ist nicht möglich eine solche Cubic-Wurzel durch eine Quadrat-Wurzel, als etwan $\sqrt{12}$ auszudrücken: dann da von $\sqrt{12}$ das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$ und also noch Irrational, folglich kann derselbe nicht 43 seyn.

164.

Ist aber die vorgegebene Zahl ein würcklicher Cubus, so werden diese Ausdrücke Rational, also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt[3]{aaa}$ so viel als a.

165.

Sollte man eine Cubic-Wurzel als $\sqrt[3]{a}$ mit einer andern multipliciren, als mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; dann wir wißen, daß die Cubic-Wurzel aus einem Product ab gefunden wird, wann man die Cubic-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wann $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotus $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Dahero begreift man, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 so viel ist als $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Dahero auch umgekehrt, wann die Zahl hinter dem Zeichen einen Factorem hat der ein Cubus ist, die Cubic-Wurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden kann: Also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folgt, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 dem $8 \cdot 2$ gleich ist.

167.

Wann die vorgegebene Zahl negativ ist, so hat die Cubic-Wurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadrat-Wurzeln geschehen; weil nehmlich die Cubi von Negativ-Zahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubic-Wurzeln aus Negativ-Zahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als -2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$ und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen ($-$) so hinter dem Cubic-Wurzel Zeichen ist, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also werden wir hier auf keine unmögliche, oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadrat-Wurzeln der Negativ-Zahlen geschehen.

CAPITEL 16

VON DEN POTESTÄTEN ODER POTENZEN ÜBERHAUPT

168.

Wann eine Zahl mehrmalen mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product eine *Potestät,* oder auch *Potenz,* bisweilen auch eine *Dignität* genennet. Auf Teutsch könnte dieser Nahme durch eine Macht ausgedrückt werden. Da nun ein Quadrat entsteht, wann eine Zahl zwey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, und ein Cubus wann die Zahl drey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, so sind so wohl die Quadraten, als die Cubi, unter dem Nahmen der Potenzen oder Potestäten begriffen.