350.

Diese Regul schafft uns also diesen Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wißen, sondern sogleich für eine jegliche Potestät die dahin gehörigen Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potestät schreibt man diese Brüche

$$\frac{10}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{10}.$$

Dahero bekommt man den ersten Coefficient $= 1$, den zweyten Coefficient $= \frac{10}{1} = 10$,

$$\begin{array}{ll} \text{den 3ten} = 10 \cdot \frac{9}{2} = 45, & \text{den 4ten} = 45 \cdot \frac{8}{3} = 120, \\ \text{den 5ten} = 120 \cdot \frac{7}{4} = 210, & \text{den 6ten} = 210 \cdot \frac{6}{5} = 252, \\ \text{den 7ten} = 252 \cdot \frac{5}{6} = 210, & \text{den 8ten} = 210 \cdot \frac{4}{7} = 120, \\ \text{den 9ten} = 120 \cdot \frac{3}{8} = 45, & \text{den 10ten} = 45 \cdot \frac{2}{9} = 10, \end{array}$$

$$\text{den 11ten} = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1.$$

351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben ohne den Werth derselben zu berechnen, und solcher Gestalt wird es leicht seyn, eine jegliche Potestät von $a + b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, hinzuschreiben.

Also wird die 100te Potestät seyn

$$(a+b)^{100} = a^{100} + \frac{100}{1}a^{99}b + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2}a^{98}bb + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{97}b^3 + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{96}b^4 \text{ etc.}$$

woraus die Ordnung der folgenden Glieder offenbahr zu ersehen.

CAPITEL 11

VON DER VERSETZUNG DER BUCHSTABEN ALS WORAUF DER BEWEIS DER VORIGEN REGUL BERUHET

352.

Wann man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurück gehet, so wird man finden, daß ein jegliches Glied so viel mal vorkommt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen laßen: als bey der zweyten

Potestät kommt das Glied *ab* zweymal vor, weil man schreiben kann *ab* und *ba*; hingegen kommt daselbst *aa* nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bey der dritten Potestät kann das Glied *aab* auf dreyerley Weise geschrieben werden als *aab*, *aba*, *baa*, und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bey der vierten Potestät kann das Glied a^3b, oder *aaab*, auf viererley Weise versetzt werden, als *aaab*, *aaba*, *abaa*, *baaa*, deswegen ist auch sein Coefficient 4, und das Glied *aabb* hat 6 zum Coefficienten, weil 6 Versetzungen statt finden, *aabb*, *abba*, *baba*, *abab*, *bbaa*, *baab*. Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

353.

In der That wann man erweget, daß z. E. die vierte Potestät von einer jeglichen Wurzel, wann dieselbe auch aus mehr als zwey Gliedern besteht, als $(a+b+c+d)^4$ gefunden wird, wann diese vier Factores mit einander multiplicirt werden

I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$,

so muß ein jeder Buchstabe des ersten mit einem jeglichen des andern, und ferner mit einem jeglichen des dritten, und endlich noch mit einem jeglichen des vierten multiplicirt werden, dahero ein jegliches Glied aus 4 Buchstaben bestehen und so viel mal vorkommen wird, als sich desselben Buchstaben unter einander versetzen laßen, woraus so dann sein Coefficient bestimmt wird.

354.

Hier kommt es also darauf an zu wissen, wie viel mal eine gewiße Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobey insonderheit darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Dann wann alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfache Potestäten als a^2, a^3, a^4 etc. alle 1 zum Coefficienten haben.

355.

Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bey zweyen, nemlich *ab* anfangen, wo offenbahr zwey Versetzungen statt finden, als *ab*, *ba*.

Hat man drey Buchstaben *abc*, so ist zu mercken, daß ein jeder die erste Stelle haben könne, da dann die zwey übrigen zwey mal versetzt werden können. Wann also *a* zuerst steht, so hat man zwey Versetzungen *abc*, *acb*; steht *b* zuerst so hat man wieder zwey, *bac*, *bca*; und eben so viel wann *c* zuerst steht, *cab*, *cba*. Dahero in allem die Zahl der Versetzungen seyn wird $3 \cdot 2 = 6$.

Hat man vier Buchstaben *abcd*, so kann ein jeder die erste Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drey übrigen sechs Versetzungen. Daher in allem die Anzahl der Versetzungen seyn wird $4 \cdot 6 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Hat man fünf Buchstaben *abcde*, so kann ein jeder die erste Stelle haben und für jede laßen sich die vier übrigen 24 mal versetzen. Dahero die Anzahl aller Versetzungen seyn wird $5 \cdot 24 = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

356.

So groß demnach auch immer die Anzahl der Buchstaben seyn mag, wann dieselben nur alle ungleich unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen gantz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Anzahl der Buchstaben:	Anzahl der Versetzungen:
I.	$1 = 1$
II.	$2 \cdot 1 = 2$
III.	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
IV.	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
V.	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
VI.	$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
VII.	$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
VIII.	$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$
IX.	$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$
X.	$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

357.

Es ist aber wohl zu mercken, daß diese Zahlen nur alsdann statt finden, wann alle Buchstaben unter sich ungleich sind, dann wann zwey oder mehr einander gleich sind, so wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer; und wann gar alle einander gleich sind, so hat man nur eine einzige. Wir wollen also sehen wie nach der Anzahl der gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müßen.

358.

Sind zwey Buchstaben einander gleich so werden die zwey Versetzungen nur auf eine gerechnet. Dahero die obige Zahl auf die Hälfte gebracht oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drey Buchstaben einander gleich so werden 6 Versetzungen nur für eine gerechnet: dahero die obigen Zahlen durch $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ getheilt werden müssen. Eben so wann vier Buchstaben einander gleich sind, so müßen die obigen Zahlen durch 24 das ist durch $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ getheilt werden u. s. f.

Hieraus kann man nun bestimmen, wie viel mal diese Buchstaben $aaabbc$ versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, welche wann sie ungleich wären $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Versetzungen zulaßen würden. Weil aber hier a drey mal vorkommt, so muß diese Zahl durch $3 \cdot 2 \cdot 1$, und weil b zwey mal vorkommt noch ferner durch $2 \cdot 1$ getheilt werden, dahero die Anzahl der Versetzungen seyn wird $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

359.

Hieraus können wir nun die Coefficienten eines jeden Glieds für eine jede Potestät bestimmen, welches wir z. E. für die siebente Potestät $(a+b)^7$ zeigen wollen. Das erste Glied ist a^7 welches nur einmahl vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ wann sie alle ungleich wären. Da aber im zweyten Glied a^6b, sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ getheilt werden, woraus der Coefficient seyn wird

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7}{1}.$$

Im dritten Glied a^5bb kommt a fünfmal und b zweymal vor, dahero die obige Zahl erstlich durch $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ und noch durch $2 \cdot 1$ getheilt werden muß, woraus der Coefficient seyn wird $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}$.

Im vierten Glied a^4b^3 steht a viermal und b dreymal; dahero die obige Zahl erstlich durch $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ und hernach noch durch $3 \cdot 2 \cdot 1$ oder $1 \cdot 2 \cdot 3$ getheilt werden muß, da dann der Coefficient wird

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Eben so wird für das fünfte Glied a^3b^4 der Coefficient $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ und so weiter, wodurch die oben gegebene Regul erwiesen wird.

360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter und lehret wie man auch von solchen Wurzeln die aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potestäten finden soll. Wir wollen dieses nur mit der dritten Potestät von $a+b+c$ erläutern, worinnen alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müßen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficient haben wird: also wird diese dritte Potestät oder $(a+b+c)^3$ seyn:

$$a^3 + 3aab + 3aac + 3abb + 6abc + 3acc + b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3.$$

Laßt uns setzen es sey $a=1$, $b=1$, $c=1$ so wird der Cubus von $1+1+1$ das ist von 3, seyn:

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27.$$

Setzt man $a=1$, $b=1$ und $c=-1$, so wird der Cubus von $1+1-1$ das ist von 1 seyn:

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1.$$

CAPITEL 12

VON DER ENTWICKELUNG DER IRRATIONAL-POTESTÄTEN DURCH UNENDLICHE REIHEN

361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel $a+b$ eine jegliche Potestät gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn als er nur immer will, so sind wir im Stande auf eine allgemeine Art die Potestät von $a+b$ auszudrucken, wann der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedrückt ist.

Also werden wir nach der obigen gegebenen Regul finden

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$