316.

Wann einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regul gefunden, wann man nur bey den doppelten Producten Achtung giebt was für ein Zeichen einem jeden zukommt. Also von $a-b-c$ wird das Quadrat seyn: $aa+bb+cc-2ab-2ac+2bc$. Wann also die Zahl 256 also vorgestellet wird $300-40-4$, so bekömmt man:

Positive Theile	Negative Theile
$+90000$	-24000
1600	2400
320	-26400
16	
$+91936$	
-26400	
65536. Quadrat von 256, wie oben.	

CAPITEL 7

VON DER AUSZIEHUNG DER QUADRAT-WURZEL IN ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

317.

Um hiervon eine sichere Regul zu geben, so müßen wir das Quadrat von der Wurzel $a+b$, welches ist $aa+2ab+bb$ genau in Erwegung ziehen, und suchen wie man hinwiederum aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen könne. Worüber folgende Betrachtungen anzustellen sind.

318.

Erstlich da das Quadrat $aa+2ab+bb$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen müße; und wann das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potestäten von einem Buchstaben, als a, immer abnehmen, so ist klar daß das erste Glied das Quadrat seyn werde von dem ersten Glied der Wurzel. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats aa ist, so ist offenbahr, daß das erste Glied der Wurzel seyn müße a.

319.

Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nemlich a gefunden, so betrachte man das übrige im Quadrat, welches ist $2ab + bb$, um zu sehen wie man daraus den andern Theil der Wurzel, welcher ist b, finden könne. Hiebey bemercken wir, daß jenes übrige oder jener Rest $2ab + bb$ also durch ein Product vorgestellet werden könne $(2a + b)b$. Da nun dieser Rest zwey Factores hat $2a + b$ und b so wird der letztere b, das ist der zweyte Theil der Wurzel gefunden, wann man den Rest $2ab + bb$ durch $2a + b$ dividirt.

320.

m also den zweyten Teil der Wurzel zu finden, so muß man den Rest durch $2a + b$ dividiren, da dann der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn wird. Bey dieser Division aber ist zu mercken, daß $2a$ das Doppelte ist von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a: das andre Glied b aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch ledig gelaßen werden; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabey nur auf das erste Glied $2a$ gesehen wird. So bald man aber den Quotient gefunden, welcher hier b ist, so muß man denselben auch an die ledige Stelle setzen und die Division vollenden.

321.

Die Rechnung also wodurch aus obigem Quadrat $aa + 2ab + bb$ die Wurzel gefunden wird, kann also vorgestellt werden:

$$\begin{array}{r|l}
 & aa + 2ab + bb \quad (a + b \\
 & \underline{aa \qquad\qquad\qquad} \\
2a + b & \quad + 2ab + bb \\
 & \quad \underline{+ 2ab + bb} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

322.

Auf solche Art kann auch die Quadrat-Wurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wann dieselben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen, als:

$$\begin{array}{r|l}
 & aa + 6ab + 9bb \quad (a + 3b \\
 & aa \\ \hline
2a + 3b & + 6ab + 9bb \\
 & + 6ab + 9bb \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 4aa - 4ab + bb \quad (2a - b \\
 & 4aa \\ \hline
4a - b & - 4ab + bb \\
 & - 4ab + bb \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9pp + 24pq + 16qq \quad (3p + 4q \\
 & 9pp \\ \hline
6p + 4q & + 24pq + 16qq \\
 & + 24pq + 16qq \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 25xx - 60x + 36 \quad (5x - 6 \\
 & 25xx \\ \hline
10x - 6 & - 60x + 36 \\
 & - 60x + 36 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

323.

Wann bey der Division noch ein Rest übrig bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als 2 Gliedern besteht. Alsdann werden die zwey schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das folgende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$\begin{array}{r|l}
 & aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc \quad (a + b - c \\
 & aa \\ \hline
2a + b & + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc \\
 & + 2ab \qquad\qquad\quad\;\; + bb \\ \hline
2a + 2b - c & - 2ac - 2bc + cc \\
 & - 2ac - 2bc + cc \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & a^4 + 2a^3 + 3aa + 2a + 1 \quad (aa + a + 1 \\
 & a^4 \\ \hline
2aa + a & + 2a^3 + 3aa \\
 & + 2a^3 + aa \\ \hline
2aa + 2a + 1 & + 2aa + 2a + 1 \\
 & + 2aa + 2a + 1 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 \quad (aa - 2ab - 2bb \\
 & a^4 \\
2aa - 2ab & -4a^3b + 8ab^3 \\
 & -4a^3b + 4aabb \\
2aa - 4ab - 2bb & -4aabb + 8ab^3 + 4b^4 \\
 & -4aabb + 8ab^3 + 4b^4 \\
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6 \quad (a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \\
 & a^6 \\
2a^3 - 3aab & -6a^5b + 15a^4bb \\
 & -6a^5b + 9a^4bb \\
2a^3 - 6aab + 3abb & +6a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 \\
 & +6a^4bb - 18a^3b^3 + 9aab^4 \\
2a^3 - 6aab + 6abb - b^3 & -2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6 \\
 & -2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6 \\
 & 0
\end{array}$$

324.

Aus dieser Regul folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechen-Büchern für die Ausziehung der Quadrat-Wurzel gegeben wird; als:

$$\begin{array}{rl}
5 & 29 \quad (23 \\
4 & \\
43 & 129 \\
 & 129 \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
17 & 64 \quad (42 \\
16 & \\
82 & 164 \\
 & 164 \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
23 & 04 \quad (48 \\
16 & \\
88 & 704 \\
 & 704 \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
40 & 96 \quad (64 \\
36 & \\
124 & 496 \\
 & 496 \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
96 & 04 \quad (98 \\
81 & \\
188 & 1504 \\
 & 1504 \\
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
1 & 56\,25 \quad (125 \\
1 & \\
22 & 56 \\
 & 44 \\
245 & 1225 \\
 & 1225 \\
 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
99 & 80\,01 \quad (999 \\
81 & \\
189 & 1880 \\
 & 1701 \\
1989 & 17901 \\
 & 17901 \\
 & 0
\end{array}$$

325.

Wann aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen daß die vorgelegte Zahl kein Quadrat ist und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzel-Zeichens welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschloßen wird. Also wird die Quadrat-Wurzel von $aa+bb$ auf diese Weise angedeutet, $\sqrt{(aa+bb)}$; und $\sqrt{(1-xx)}$ deutet an die Quadrat-Wurzel aus $1-xx$. Statt dieses Wurzel-Zeichens kann man auch den gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ gebrauchen. Also wird auch durch $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$ die Quadrat-Wurzel aus $aa+bb$ angedeutet.

CAPITEL 8

VON DER RECHNUNG MIT IRRATIONAL-ZAHLEN

326.

Wann zwey oder mehr Irrational-Formeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches wie oben gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammenschreibt. Nur ist bey dem Abkürtzen zu bemercken, daß anstatt $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ geschrieben werde $2\sqrt{a}$, und daß $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ einander aufhebe oder nichts gebe. Also diese Formeln $3+\sqrt{2}$ und $1+\sqrt{2}$ zusammen addirt giebt $4+2\sqrt{2}$ oder $4+\sqrt{8}$; ferner $5+\sqrt{3}$ und $4-\sqrt{3}$ zusammen addirt, giebt 9; ferner $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction indem nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt gelesen werden müßen, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ \underline{1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6}} \\ 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6} \end{array}$$