205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. E. wann $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. Solcher gestalt hat man gleiche Wurzel-Zeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daher erhellet weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt giebt $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$ und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Solte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$ also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

CAPITEL 20

VON DEN VERSCHIEDENEN RECHNUNGS-ARTEN UND IHRER VERBINDUNG ÜBERHAUPT

206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungs-Arten als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potestäten, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.

Daher wird es nicht wenig zu beßerer Erleuterung dienen, wann wir den Ursprung dieser Rechnungs-Arten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man erkennen möge, ob noch andere dergleichen Arten möglich seyn oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redens-Art, *ist so viel als*, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun $=$ und wird ausgesprochen *ist gleich.* Also wann geschrieben wird $a = b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sey als b, oder das a dem b gleich sey; also ist z. E. $3 \cdot 5 = 15$.

207.

Die erste Rechnungs-Art, welche sich unserm Verstand darstelt, ist ohnstreitig die Addition, durch welche zwey Zahlen zusammen addirt, oder die Summa derselben gefunden werden soll. Es seyen demnach a und b die zwey gegebenen Zahlen und ihre Summa werde durch den Buchstaben c angedeutet, so hat man $a + b = c$. Also wann die beyden Zahlen a und b bekant sind, so lehrt die Addition wie man daraus die Zahl c finden soll.

208.

Man behalte diese Vergleichung $a + b = c$, kehre aber jetzt die Frage um, und frage wann die Zahlen a und c bekannt sind, wie man die Zahl b finden soll.

Man fragt also was man für eine Zahl zu der Zahl a addiren müße, damit die Zahl c herauskomme: Es sey z. E. $a = 3$ und $c = 8$, also daß $3 + b = 8$ seyn müßte, so ist klar, daß b gefunden wird, wann man 3 von 8 subtrahirt. Überhaupt also um b zu finden, so muß man a von c subtrahiren und da wird $b = c - a$. Dann wann a darzu addirt wird, so bekommt man $c - a + a$ das ist c.

Hierinnen besteht also der Ursprung der Subtraction.

209.

Die Subtraction entsteht also wann die Frage, welche bey der Addition vorkommt, umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl welche abgezogen werden soll, größer ist als diejenige von der sie abgezogen werden soll: als wann z. E. 9 von 5 abgezogen werden sollte: so erhalten wir daher den Begrif von einer neuen Art Zahlen, welche negativ genennt werden, weil $5 - 9 = -4$.

210.

Wann viele Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so wird ihre Summa durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdann das Product. Also bedeutet ab das Product, welches entsteht wann die Zahl a mit der Zahl b multiplicirt wird. Wenn wir nun dieses Product mit dem Buchstaben c andeuten, so haben wir $ab = c$, und die Multiplication lehrt, wann die Zahlen a und b bekant sind, wie man daraus die Zahl c finden solle.

211.

Laßt uns nun folgende Frage aufwerfen: Wann die Zahlen c und a bekannt sind, wie soll man daraus die Zahl b finden. Es sey z. E. $a = 3$

und $c = 15$, so daß $3b = 15$ und es wird gefragt, mit was für einer Zahl man 3 multipliciren müße, damit 15 herauskomme. Dieses geschieht nun durch die Division und wird dahero überhaupt die Zahl b gefunden, wann man c durch a dividirt; woraus folglich diese Gleichung entsteht $b = \frac{c}{a}$.

212.

Weil es sich nun oft zutragen kann, daß sich die Zahl c nicht würcklich durch die Zahl a theilen laße, und gleich wohl der Buchstaben b einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche Brüche genennt werden. Also wann wir annehmen $a = 4$, und $c = 3$, also daß $4b = 3$, so sieht man wohl, daß b keine gantze Zahl seyn kann, sondern ein Bruch ist, nehmlich $b = \frac{3}{4}$.

213.

Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden, wann viele Zahlen die addirt werden sollen, einander gleich sind, so wollen wir jetzt auch bey der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potestäten, welche auf eine allgemeine Art durch diese Form a^b vorgestellt werden, wodurch angezeigt wird, daß die Zahl a so viele mal mit sich selber multiplicirt werden müße, als die Zahl b anweiset. Hier wird wie oben gemeldet a die Wurzel, b der Exponent und a^b die Potestät genennet.

214.

Laßet uns nun diese Potestät selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$ worinn also drey Buchstaben a, b, c, vorkommen. Dieses vorausgesetzt, so wird in der Lehre von den Potestäten gezeiget, wie man, wann die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potestät selbst, das ist den Buchstaben c bestimmen soll. Es sey z. E. $a = 5$, und $b = 3$, also das $c = 5^3$: woraus man sieht daß von 5 die dritte Potestät genommen werden müße, welche ist 125; also wird $c = 125$.

Hier wird also gelehrt, wie man aus der Wurzel a und dem Exponenten b die Potestät c finden soll.

215.

Laßet uns nun auch hier sehen wie die Frage umgekehrt, oder verändert werden kann, also daß aus zweyen von diesen dreyen Zahlen a, b, c, die dritte gefunden werden soll, welches auf zweyerley Art geschehen kann, indem nebst dem c, entweder a oder b, für bekant angenommen wird. Wobey zu mercken, daß in den obigen Fällen bey der Addition und Multiplication nur eine Veränderung stattfindet, weil im ersten Fall, wo $a + b = c$, es gleich viel ist ob man nebst dem c, noch a, oder b, für bekant annimt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe $a + b$ oder $b + a$; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $ab = c$ oder $ba = c$, wo die Buchstaben a und b ebenfals verwechselt werden können. Allein dieses findet nicht statt bey den Potestäten, indem vor a^b keinesweges gesetzt werden kann b^a, welches aus einem einigen Exempel leicht zu ersehen; wann z. E. $a = 5$ und $b = 3$ gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr weit von 125 verschieden ist.

216.

Hieraus ist klar, daß hier würcklich noch zwey Fragen angestelt werden können, wovon die erste ist: Wann nebst der Potestät c, noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll. Die zweyte Frage aber ist, wann nebst der Potestät c, noch die Wurzel a für bekant angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll.

217.

Im obigen ist nur die erste von diesen zwey Fragen erörtert worden, und dieses ist geschehen in der Lehre von der Ausziehung der Wurzel. Dann wann man z. E. $b = 2$ und $a^2 = c$ hat so muß a eine solche Zahl seyn, deren Quadrat dem c gleich sey, und da wird $a = \sqrt[2]{c}$. Eben so wann $b = 3$ so hat man $a^3 = c$, da muß also der Cubus von a der gegebenen Zahl c gleich seyn, und da erhält man $a = \sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf eine allgemeine Art verstehen, wie man aus den beyden Buchstaben c und b den Buchstaben a finden müße. Es wird nemlich seyn $a = \sqrt[b]{c}$.

218.

So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl c nicht würcklich eine solche Potestät ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben bemercket worden, daß die verlangte Wurzel a weder in gantzen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational oder Surdische Zahlen genennt werden; von welchen es nach der Mannigfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns diese Betrachtung noch auf eine gantz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre, oder eingebildete Zahlen genennt werden.

219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrigen sey, nemlich wann außer der Potestät c noch die Wurzel a für bekant angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der gantzen Mathematic so groß ist, daß fast keine weitlaufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, wo wir wieder auf gantz neue Arten von Zahlen, welche nicht einmahl zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können, werden geleitet werden.

CAPITEL 21

VON DEN LOGARITHMEN ÜBERHAUPT

220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b = c$, und bemercken zuförderst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewiße Zahl nach Belieben festgestellet werde, also daß dieselbe immer einerley Werth behalte. Wann nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potestät a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genennt, und um dieselben anzuzeigen werde ich mich in zukumfft des Zeichens eines teutschen $\mathfrak{l}$ bedienen, welches der Zahl c vorgesetzt wird; und also schreibt man $b = \mathfrak{l}c$ wodurch angedeutet wird, daß b gleich sey dem Logarithmus der Zahl c, oder der Logarithmus von c sey b.