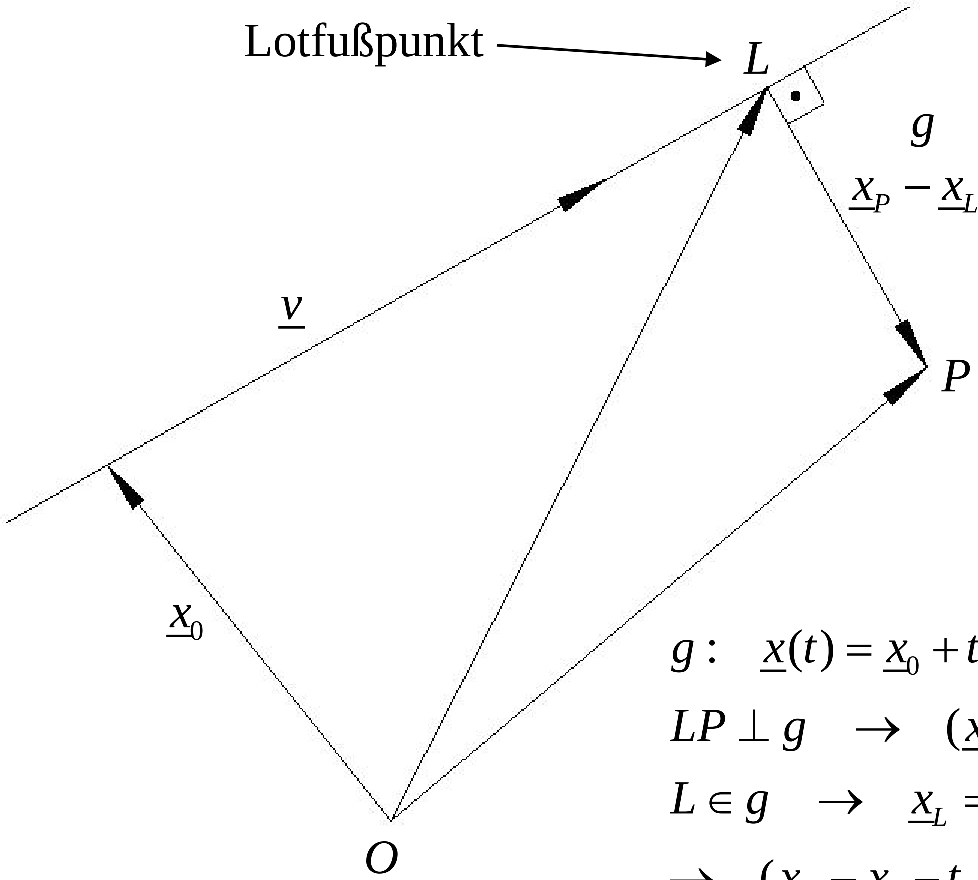
Lotfußpunktverfahren für Geraden



$$g: \quad \underline{x}(t) = \underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}$$

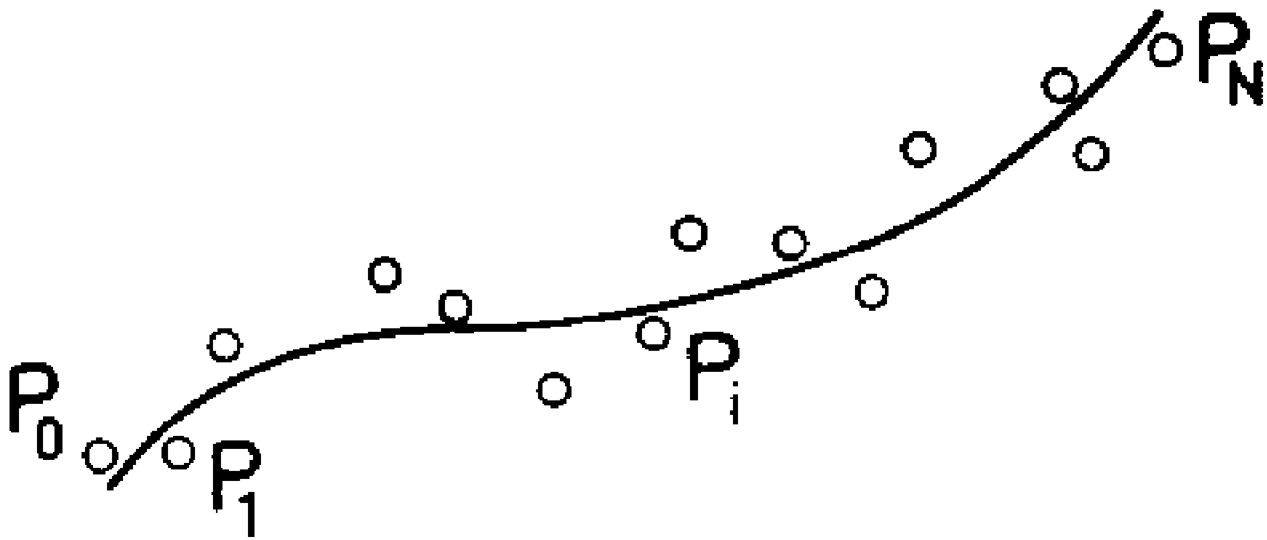
$$LP \perp g \quad \rightarrow \quad (\underline{x}_P - \underline{x}_L)^T \underline{v} = 0$$

$$L \in g \quad \rightarrow \quad \underline{x}_L = \underline{x}_o + t_L \cdot \underline{v}$$

$$\rightarrow \quad (\underline{x}_P - \underline{x}_o - t_L \cdot \underline{v})^T \underline{v} = 0 = \underline{x}_P{}^T \underline{v} - \underline{x}_o{}^T \underline{v} - t_L \cdot \underline{v}^T \underline{v}$$

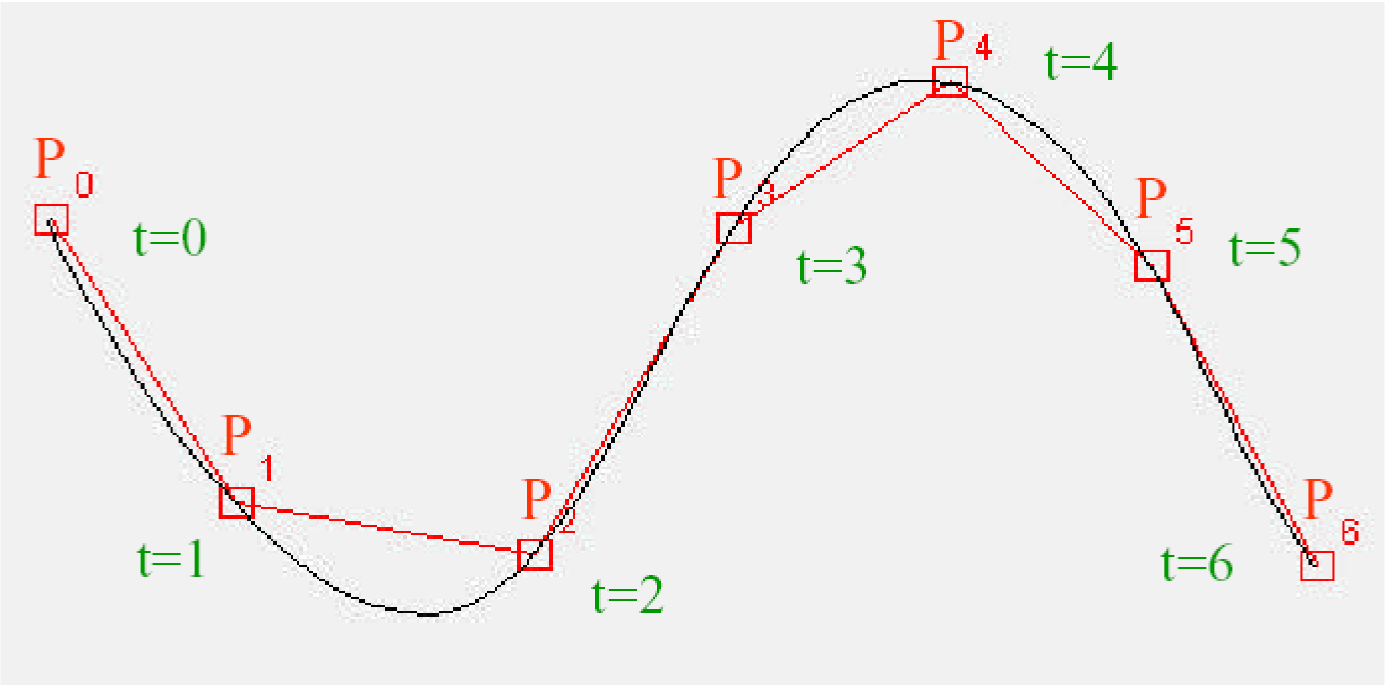
$$\rightarrow \quad t_L = \frac{1}{\left\|\underline{v}\right\|^2} (\underline{x}_P{}^T \underline{v} - \underline{x}_0{}^T \underline{v})$$

Prinzip der Approximation



Bestimmung einer Funktion f aus einer Funktionsklasse G, die von einer gegebenen Funktion, die nicht zu G gehört, möglichst wenig abweicht.
Die Kurve (bzw. Fläche) muss also möglichst nahe an die gegebenen Daten „herankommen“.

Prinzip der Interpolation



Bestimmung einer Funktion f aus einer Funktionsklasse G, die gewisse Bedingungen exakt erfüllt.
Die häufigste Interpolationsbedingung ist die Forderung, dass die Kurve (bzw. Fläche) durch eine Menge von vorgegebenen Punkten verlaufe.

Lagrange-Polynom vom Grad n

$$L_i^n(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\ldots(t-t_n)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)\ldots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\ldots(t_i-t_n)} = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}$$

Interpolationsaufgabe:
Gegeben sind n+1 Punkte P_i mit den Koordinatenvektoren $\underline{x}_i$.
Gesucht ein Polynom vom Grad n. das durch die gegebenen Punkte verläuft.

Das Polynom $p(t) = \sum_{i=0}^{n} \underline{x}_i L_i^n(t)$ löst das Interpolationsproblem,

denn es gilt: $L_i^n(t_k) = 1$ für i = k und $L_i^n(t_k) = 0$ für i ≠ k

Bernsteinpolynom vom Grad n

$$B_i^n = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{mit t} \in [0\ ,\ 1]$$

Eigenschaften der Bernsteinpolynome:

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$$

$$B_i^n(t) \geq 0$$

$$B_i^n(t) = t \cdot B_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t) \cdot B_i^{n-1}(t) \qquad \text{(Rekursion)}$$

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t) \qquad \text{(Symmetrie)}$$

Bezierkurven

Eine **Bezierkurve** vom Grad n im E^3 ist eine Kurve, die durch eine Parameterdarstellung der Form:

$$p(t) = \underline{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \underline{b}_i \cdot B_i^n(t) \qquad \text{mit } t \in [0\,,\,1] \text{ und } \underline{b}_i \in E^3$$

gegeben ist. Die Punkte $\underline{b}_i$ heißen Bezierpunkte oder Kontrollpunkte und bilden das Bezierpolygon bzw. Kontrollpolygon.

Invarianz unter affinen Transformationen wegen:

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$$

Die Kurvenpunkte $\underline{x}(t)$ liegen in der konvexen Hülle der Bezierpunkte wegen:

$$B_i^n(t) \geq 0$$

B-Spline-Basisfunktionen

Zu einem gegebenen Knotenvektor U

$$U = \{u_0, u_1, \ldots, u_m\}, \quad u_i \le u_{i+1}, \quad i = 0,1,\ldots m-1$$

sind die **B-Spline Basis-Funktionen** zum Grad d definiert durch:

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 \text{ für } u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

sowie für d > 0

$$N_i^d(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+d} - u_i} \cdot N_i^{d-1}(u) + \frac{u_{i+d+1} - u}{u_{i+d+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1}^{d-1}(u)$$

Dabei wird bei einer zulässigen Division von 0 durch 0 definiert:

$$\frac{0}{0} = 0$$

Rationale B-Splinekurven (NURBS)

Zu einem gegebenen Knotenvektor U

$$U = \{u_0, u_1, \ldots, u_m\}, \quad u_i \leq u_{i+1}, \quad i = 0,1,\ldots m-1$$

wird eine **rationale B-Splinekurve** über dem Intervall $[a,b] \subseteq [u_d, u_{m-d}]$ durch folgende Parameterdarstellung beschrieben:

$$\mathbf{s}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \cdot \mathbf{d}_i \cdot N_i^d(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i \cdot N_i^d(u)}, \quad n = m - d - 1 \geq d$$

$N_i^d(u)$ … Basis-Funktionen vom Grad d

$\mathbf{d}_i$ … de-Boor-Punkte

w_i … Gewichte