Metrischer Raum

Definition:
Ein **metrischer Raum** ist ein geordnetes Paar (X,d) aus einer Menge X und einer Funktion d: $X \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

(3) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (Dreiecksungleichung)

Topologischer Raum

Definition:
Sei X eine Menge. Dann heißt $P(X) := \{ A \mid A \subseteq X \}$ **Potenzmenge** oder **Potenzklasse** von X.

Definition:
Das geordnete Paar (X,τ) mit $\tau \subseteq P(X)$ heißt **topologischer Raum** und τ **Topologie auf X** genau dann, wenn gilt:

(1) $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$

(2) $\forall A_1, A_2 \in \tau : A_1 \cap A_2 \in \tau$

(3) $\forall U \subseteq \tau : (\bigcup_{A \in U} A) \in \tau$

Homöomorphismus

Definition:

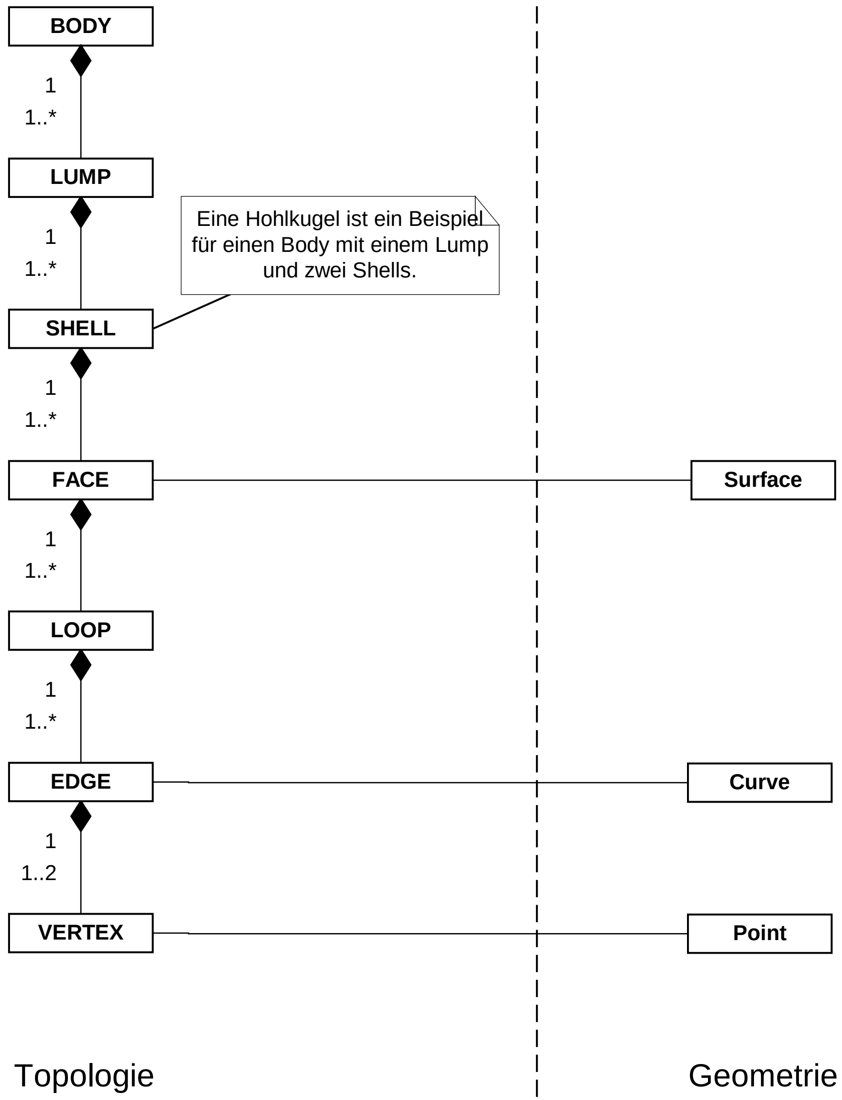
Seien (X_1,τ_1) und (X_2,τ_2) zwei topologische Räume. Eine Funktion $f : X_1 \rightarrow X_2$ heißt **stetig** genau dann wenn gilt: $\forall O \in \tau_2 : f^{-1}(O) \in \tau_1$

Definition:

Seien (X_1,τ_1) und (X_2,τ_2) zwei topologische Räume. Eine Funktion $f : X_1 \rightarrow X_2$ heißt **Homöomorphismus** zwischen (X_1,τ_1) und (X_2,τ_2), wenn f bijektiv (eineindeutig) und stetig ist und f^{-1} auch stetig ist.

Diese Räume werden auch **homöomorph** oder **topologisch äquivalent** genannt.

B-Rep - Modell

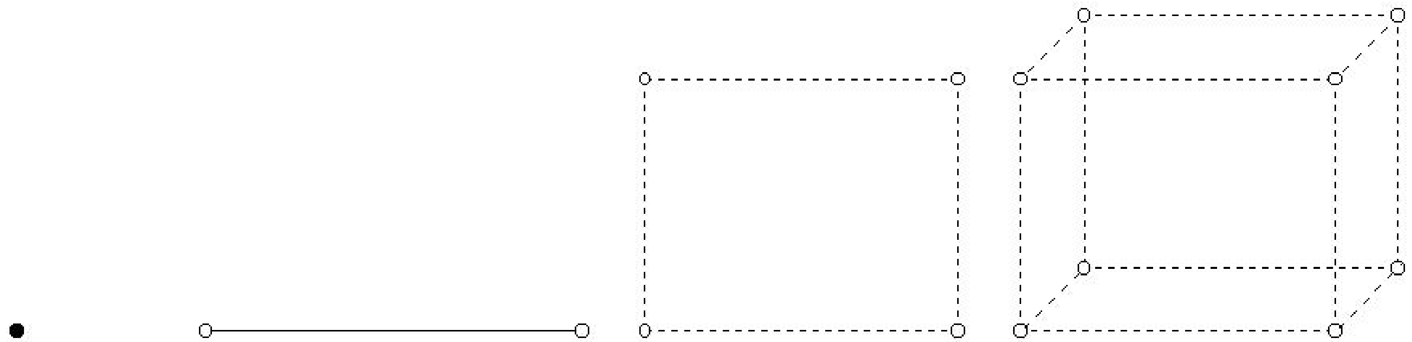

BODY
1
1..*
LUMP
1
1..*
Eine Hohlkugel ist ein Beispiel für einen Body mit einem Lump und zwei Shells.
SHELL
1
1..*
FACE
Surface
1
1..*
LOOP
1
1..*
EDGE
Curve
1
1..2
VERTEX
Point
Topologie
Geometrie

Wegzusammenhang

Definition:
Es sei I = [0,1] das abgeschlossene Einheitsintervall. Es seien a und b zwei Punkte des des topologischen Raumes (X,τ). Eine stetige Abbildung $f : I \to X$ mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$ heißt **Weg von a nach b**. Dabei bezeichnet man a als **Anfangspunkt** und b als **Endpunkt** des Weges f.

Definition:
Eine Teilmenge A des toplogischen Raumes (X,τ) heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $a,b \in A$ einen Weg $f : I \to X$ von a nach b mit $f(I) \subset A$ gibt.

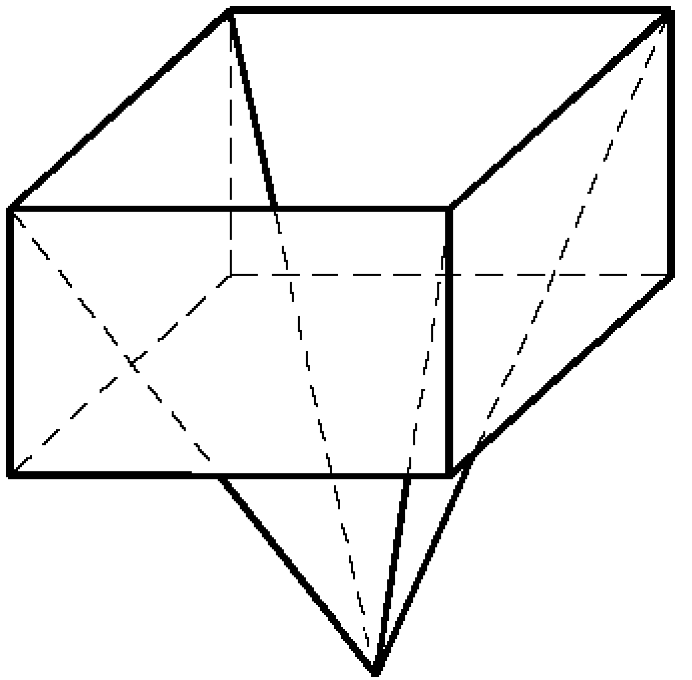
m-Zellen



0-Zelle 1-Zelle 2-Zelle 3-Zelle

Eine m-Zelle ist eine offene wegzusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^m$.

Beispiel für ein ungültiges Flächenmodell



Zellkomplex

<u>Definition</u> – Zellkomplex im $\mathbb{R}^n$: *)

Es sei K ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Die Menge K heißt **<u>Zellkomplex</u>** des $\mathbb{R}^n$, wenn K aus m-Zellen $\{e_i\}$ mit $i \in I$ (eine Indexmenge) und $m \leq n$ besteht und wenn diese e_i folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die Vereinigung aller Zellen bildet den Zellkomplex selbst:

   $$K = \bigcup_{i \in I} e_i$$

2. Die Begrenzung jeder m-Zelle besteht aus Zellen von K mit niedrigerer Dimension als m:

   $$(\overline{e_i} \setminus e_i) \subset \{e_k \mid \dim(e_k) < \dim(e_i), k \in I\}$$

3. Die Zellen sind paarweise disjunkt:

   $$e_i \cap e_j = \emptyset \ \textit{für alle}\ i \neq j$$

*) H. Masuda, K. Shimada, M. Numao, S. Kawaba: A mathematical theory an applications of non-manifold geometric modeling. 1990

Euler-Operatoren

Euler-Poincaré Gleichung: $V - E + F + 2(H - S) - R = 0$

	V	(-)E	F	(2)H	(-2)S	(-)R	Beschreibung
mev	1	1					make edge vertex
mef		1	1				make edge face
mvfs	1		1		1		make vertex face shell
kemr		-1				1	kill edge make ring
kfmrh			-1	1		1	kill face make ring hole
kev	-1	-1					kill edge vertex
kef		-1	-1				kill edge face
kvfs	-1		-1		-1		kill vertex face shell
mekr		1				-1	make edge kill ring
mfkrh			1	-1		-1	make face kill ring hole

Mannigfaltigkeit

Definition:

Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $B \subseteq \tau$ heißt **Basis der Topologie** genau dann, wenn gilt: $\forall O \in \tau : \exists U \subseteq B : O = \bigcup_{A \in U} A$

Definition:

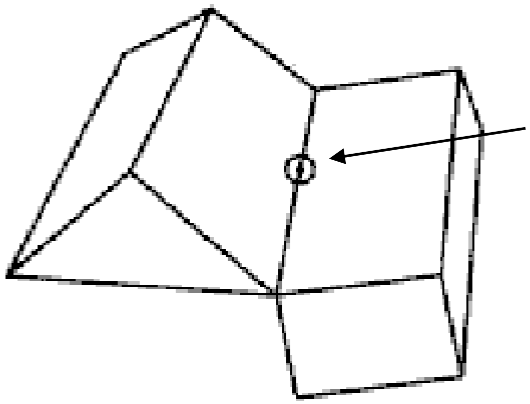
Ein topologischer Raum (X,τ) heißt **n-Mannigfaltigkeit** wenn

(1) es zu je zwei verschiedenen $x,y \in X$ zwei disjunkte offene Umgebungen U_x und U_y mit $x \in U_x$ und $y \in U_y$ gibt. (Haussdorfraum)

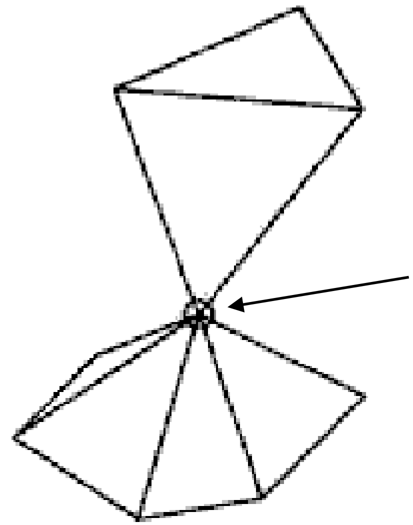
(2) es eine abzählbare Basis der Topologie gibt. (zweites Abzählbarkeitsaxiom)

(3) Es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U_x mit $x \in U_x$ gibt, die homöomorph zur offenen n-Einheitskugel ist.

Beispiele für non manifold Körper



1. ist verletzt.



2. ist verletzt.

Kriterien für manifold Körper:

1. An jede Kante stoßen genau zwei Flächen.
2. Um jede Ecke existiert ein einziger Ring von Flächen.
3. Die Euler-Poincaré Gleichung ist erfüllt.