EDP TD2

TD 2 – EDO et EDP stationnaires

▷ **Exercice 1.** Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

avec $(c, f) \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, et $\forall x \in [0,1], c(x) \geq 0$.

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0,1]$, de pas constant h. Soit $(x_i)_{i=0:N+1}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, les points de discrétisation du maillage.

1.1. En utilisant un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde de u, écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire

$$A_h u_h = b_h, \tag{2}$$

avec $u_h = (u_i)_{i=1:N} \in \mathbb{R}^N$. Préciser u_0 et u_{N+1} satisfaisant les conditions aux limites du problème.

1.2. Montrer que la matrice A_h est symétrique définie positive. Que pouvez-vous conclure pour le système (2) ?

1.3. On suppose $u \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbb{R})$. Soit $\xi_h(u) = A_h \Pi_h(u) - b_h$ l'erreur de consistance du schéma (2), avec $\Pi_h(u) = (u(x_i))_{i=1:N} \in \mathbb{R}^N$. Montrer que

$$\|\xi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|,$$

avec $\forall y \in \mathbb{R}^N, \|y\|_\infty = \sup_{i \in \{1,\cdots,N\}} |y_i|$.

En conclure quant à l'ordre de consistance du schéma (2) pour la norme infinie.

1.4. On suppose toujours $u \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\|u_h - \Pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

On admettra que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \dfrac{1}{8}$.

En conclure quant à la convergence du schéma (2) pour la norme infinie.

▷ **Exercice 2.** Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & \forall x \in]0,1[, \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta, \end{cases} \tag{3}$$

avec $(c, f) \in \mathcal{C}^0([0,1]) \times \mathcal{C}^0([0,1])$, et c telle que $\exists c_0 > 0, \forall x \in [0,1], c(x) \geq c_0$.

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0,1]$, de pas constant h. Soit $(x_i)_{i=0:N+1}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, les points de discrétisation du maillage.

2.1. En utilisant un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde de u, et des schémas décentrés d'ordre 1 pour sa dérivée première, écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire

$$A_h u_h = b_h, \tag{4}$$

avec $u_h = (u_i)_{i=0:N+1} \in \mathbb{R}^{N+2}$.

Par la suite, on admet que le système admet une unique solution.

2.2. On suppose $u \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbb{R})$. Soit $\xi_h(u)$ l'erreur de consistance du schéma (4). Montrer que $\forall h_0 > 0, \exists C > 0$ tel que

$$\forall h \in]0, h_0], \quad \|\xi_h(u)\|_\infty \leq Ch.$$

En conclure quant à l'ordre de consistence du schéma (4) pour la norme infinie.

2.3. Proposer une stratégie permettant d'obtenir un schéma d'ordre 2 pour la norme infinie.

▷ **Exercice 3.** Soit $u : \Omega = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \forall x \in]0,1[\times]0,1[, \\ u(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

avec $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de Ω, de pas constants h_1 et h_2 dans chacune des deux directions. Soit $(x_{i,j})_{i=0:N_1+1, j=0:N_2+1}$ les points de discrétisation du maillage.

TD 2.1

EDP

EDO et EDP stationnaires.

Exercice 1 :

1/ $x_0 = 0$, x_{i-1}, $x_i = ih$, x_{i+1}, $x_{N+1} = 1$. $\quad h = \dfrac{1}{N+1}$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(z_i) \quad z_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$$

pour $i \in [\![1, N]\!]$.

Posons $U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ qui représente les valeurs de la solution $u(x)$ aux points x_i pour $i = 1, \dots, N$

En remplaçant $-u''(x_i)$ par la différence finie précédente, U_h est solution du système linéaire $A_h U_h = b_h$. posons $c_i = c(x_i)$, $f(x_i) = f_i$

L'équation devient : $-\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i = f_i$

On a donc $A_h = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{h^2} + c_1\right) & -\frac{1}{h^2} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h^2} \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c_N \end{pmatrix}$ et $b_h = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{h^2} \\ \vdots \\ \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$

Pour trouver les coefficients α et β écrire l'équation $i = 1$ et $i = N$

$$-\frac{u_2 - 2u_1 + \overset{\alpha}{u_0}}{h^2} + c_1 u_1 = f_1$$

$$-\frac{1}{h^2} u_2 + \left(\frac{2}{h^2} + c_1\right) u_1 = f_1 + \frac{\alpha}{h^2}.$$

2/ Vérifions que A_h est définie positive ie $(A_h x | x)_2 > 0 \ \forall x \neq 0$

$$(A_h x | x)_2 = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$$
$$= \frac{1}{h^2} \left\{ \sum_{i=1}^{N} 2x_i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} 2x_i x_{i+1} \right\} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} c_i x_i^2}_{\geq 0 \text{ car } c(x) \geq 0 \text{ d'ap hyp}}$$
$$= \frac{1}{h^2} \left(\underbrace{x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_{N-1} - x_N)^2 + x_N^2}_{} \right) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} c_i x_i^2}_{\geq 0}$$

Donc A_h est semi-def pos. ≥ 0

Or $(A_h x | x) = 0$ ssi $\forall i \ x_i = 0$. Donc A_h sym def pos.

Donc A_h inversible. Sym def pos $\Rightarrow$ Inversible.

et le système linéaire précédent admet une solution unique $u_h = A_h^{-1} b_h$

3/ $\Pi_h(u)$: vraie solution de l'EDP aux points $x = (x_i)_{i \in [1,N]}$

U_h : Solution du système linéaire approximation de $\Pi_h(u)$.

$$A_h \Pi_h(u) - b_h = \dots$$

- $\forall i \in [\![2, N-1]\!]$, $(A_h \Pi_h(u) - b_h)_i = -\frac{1}{h^2}\left(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})\right) + c_i u(x_i) - f_i$

mais $f_i = f(x_i) = -u''(x_i) + c_i u(x_i)$

$$= -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(z_i) \qquad z_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$$

- $i = 1$: $(A_h \Pi_h(u) - b_h)_1 = -\frac{1}{h^2}\left(u(x_2) - 2u(x_1)\right) + c_1 u(x_1) - f_1 - \frac{\alpha}{h^2}$

mais $f_1 = -(u''(x_1) + c_1 u(x_1) - \frac{u(x_0)}{h^2} = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(z_1) \quad z_1 \in]x_0, x_2[$

- $i = N$: $(A_h \Pi_h(u) - b_h)_N = \dots$

$$= -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(z_N) \qquad z_N \in]x_{N-1}, x_{N+1}[.$$

Ainsi $\|\varepsilon_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup\limits_{z \in [0,1]} |u^{(4)}(z)|$ — Consistance d'ordre 2 —

4/ $\|U_h - \Pi_h(u)\|_\infty = \|A_h^{-1} b_h - \Pi_h(u)\|_\infty$

$$= \|A_h^{-1}(b_h - A_h \Pi_h(u))\|_\infty$$

$$\leq \|A_h^{-1}\|_\infty \times \|b_h - A_h \Pi_h(u)\|_\infty$$

$$\leq \frac{1}{8} \times \frac{h^2}{12} \sup_{z \in [0,1]} |u^{(4)}(z)|$$

$$\leq \frac{h^2}{96} \sup |u^{(4)}(z)|$$

Erreur d'approximation en $O(h^2)$.

Exercice 2 :

1/ $u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(z_i) \quad \forall i \in [\![1, N]\!]$

et les conditions aux limites font intervenir deux nouvelles approx.

i.e. $u'(0) = u'(x_0) = \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} + \frac{h}{2} u''(z_0) \quad z_0 \in [x_0, x_1]$.

$u'(1) = u'(x_{N+1}) = \frac{u(x_{N+1}) - u(x_0)}{h} + \frac{h}{2} u''(z_{N+1}) \quad z_{N+1} \in [z_N, z_{N+1}]$

TD 2.2

EDP

En posant $U_h = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+2}$ l'approximation de la solution $u(x)$ aux points x_i, $i = 0 \dots N+1$.

U_h est solution du système linéaire $A_h U_h = b_h$.

$$A_h = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \left(\frac{2}{h^2}+c_1\right) & -\frac{1}{h^2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & -\frac{1}{h^2} & \left(\frac{2}{h^2}+c_N\right) & -\frac{1}{h^2} \\ & & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix} \qquad b_h = \begin{pmatrix} \alpha \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ \beta \end{pmatrix}$$

Tridiagonal non symétrique

2/ $\| A_h \Pi_h(u) - b_h \|_\infty \leq \mathrm{Max}\left(\frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}(z)|, \frac{h}{2} \sup_{z\in[0,1]} |u''(z)| \right)$

$$\leq \frac{h}{2} \underset{h\leq 1}{\mathrm{Max}} \underbrace{\left(\frac{1}{6} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}(z)|, \sup |u''(z)| \right)}_{C^{te}}$$

Consistance d'ordre 1

3/ Il faut élever l'ordre d'approximation des C.L. diff décentrée sur 3 points (cf TD1).

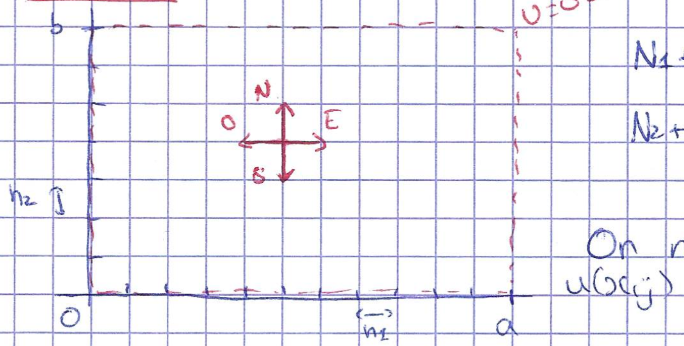
A_h devient
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2h} & -\frac{2}{h} & \frac{1}{2h} & \\ -\frac{1}{h^2} & \left(\frac{2}{h^2}+c_1\right) & -\frac{1}{h^2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & -\frac{1}{h^2} & \left(\frac{2}{h^2}+c_N\right) & \frac{1}{h^2} \\ & \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h} & \frac{3}{2h} \end{pmatrix}$$

matrice pas tridiag.

mais consistance en $O(h^2)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = \frac{1}{h} \\ \beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

Exercice 3:



N_1+2 points en (Ox) $\qquad h_1 = \frac{a}{N_1+1}$

N_2+2 points en (Oy) $\qquad h_2 = \frac{b}{N_2+1}$

On notera U_{ij} l'approximation de la valeur $u(x_{ij})$ avec $x_{ij} = \begin{pmatrix} i h_1 \\ j h_2 \end{pmatrix}$ $\quad i \in [\![0, N_1+1]\!]$, $j \in [\![0, N_2+1]\!]$

$i = 1, \dots, N_1 \qquad -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{ij}) = -\frac{u(x_{i+1,j}) - 2u(x_{ij}) + u(x_{i-1,j})}{h_1^2} + \frac{h_1^2}{24}\left(\frac{\partial u^4}{\partial x^4}(\xi_{ij}^+) + \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(\xi_{ij}^-)\right)$

(E, C, W)

$j = 1, \dots, N_2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{ij}) = -\frac{u(x_{i,j+1}) - 2u(x_{ij}) + u(x_{i,j-1})}{h_2^2} + \frac{h_2^2}{24}\left(\frac{\partial u^4}{\partial y^4}(\eta_{ij}^+) + \frac{\partial u^4}{\partial y^4}(\eta_{ij}^-)\right)$

(N, C, S)

Pour $\left.\begin{array}{l} j=0 \\ j=N_2+1 \end{array}\right\} \forall i$ et pour $\left.\begin{array}{l} i=0 \\ j=N_1+1 \end{array}\right\} \forall j$, $u(x_{ij})=0$.

Ainsi on aura : $$\left| -\Delta u(x_{i,j}) + \frac{u(x_{i+1,j})+2u(x_{ij})+u(x_{i-1,j})}{h_1^2} + \frac{u(x_{i,j+1})-2u(x_{ij})+u(x_{i,j-1})}{h_2^2} \right|$$

$$\leq \frac{h_1^2+h_2^2}{12}\left| \sup_{x\in[0,1]^2}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(X)\right| + \sup_{X\in[0,1]^2}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(X)\right| \right|$$

Ordre de consistance : ordre 2.

Rangeons donc les $N_1 \times N_2$ inconnues u_{ij} dans un vecteur de taille $N_1 \times N_2$ dans l'ordre dit lexicographique.

$U \in \mathbb{R}^{(N_1 \times N_2)}$ $\quad U = \begin{pmatrix} U_{11} \\ \vdots \\ U_{N_1,1} \\ U_{1,2} \\ \vdots \\ U_{N_2,2} \\ \vdots \\ U_{1\,N_2} \\ \vdots \\ U_{N_1 N_2} \end{pmatrix}$

et U est donc solution du système linéaire (après approx du $-\Delta$ par diff finies) et élimination des valeurs aux bords (qui sont toutes nulles), suivant :

$$A_h U = f_h$$

$$A_h = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{\left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\right)}^{N_1} & -\frac{1}{h_1^2} & & \frac{1}{h_2^2} & & \\ -\frac{1}{h_1^2} & \left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\right) & T_h & & \ddots & D_h \\ & \ddots & -\frac{1}{h_1^2} & & & \\ & -\frac{1}{h_1^2} & \left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\right) & & & \frac{1}{h_2^2} \\ \hline & D_h & & & & \end{array}\right)$$

N_2 blocs de taille N_1. $\quad N_1 \updownarrow \quad N_1 \updownarrow$

$$\begin{array}{c|c|c} T_h & D_h & \\ \hline D_h & T_h & D_h \end{array}$$

et $F_h = \begin{pmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{N_1 1} \\ \vdots \\ f_{1 N_2} \\ \vdots \\ f_{N_1 N_2} \end{pmatrix}$ avec $f_{ij} = f(x_{ij})$.