TD 3 – Convexité

▷ **Exercice 1.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.1. Montrer que toute application norme, définie sur E, est convexe sur E. Que dire de la *stricte* convexité ?

1.2. Soient f et g deux applications convexes sur C, convexe de E. Montrer que $\forall\lambda \geq 0$, $\forall\mu \geq 0$, $\lambda f + \mu g$ est une application convexe sur C.

1.3. Soient $(f_i)_{i\in I}, I$ fini, une famille d'applications convexes définies sur un convexe C de E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ est une application convexe sur C.

▷ **Exercice 2.**

2.1. Pensez-vous qu'il existe des fonctions strictement convexes non croissantes à l'infini ?

2.2. Pensez-vous qu'il existe des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement convexes vérifiant $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$?

▷ **Exercice 3.**

3.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que f soit convexe sur $\mathbb{R}^2$.

3.2. L'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 + 3|$ est-elle convexe, voire strictement convexe, sur $\mathbb{R}^2$?

3.3. L'application $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(x) = e^{\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$ est-elle convexe, voire strictement convexe, sur $\mathbb{R}^n$?

▷ **Exercice 4.**

4.1. L'application $f : \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(X) = \mathrm{tr}(X)$ est-elle convexe (voire strictement convexe) sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$?

4.2. Soit $A \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ et soit $g : \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $g(X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XAX^T)$. Donner une condition suffisante portant sur A pour que g soit convexe sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Peut-on étendre le résultat pour obtenir la stricte convexité ?

▷ **Exercice 5.**

5.1. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1\ln(x_1) + x_2\ln(x_2) - (x_1 + x_2)\ln(x_1 + x_2)$. Montrer que f est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et donner un sous-ensemble C de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sur lequel f soit strictement convexe.

5.2. Soit $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i x_i^2 + \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i x_{i+1} + \gamma x_1 x_3 + \sum_{i=1}^3 x_i x_4 + \sum_{i=1}^4 b_i x_i$. Donner une condition suffisante sur les différents scalaires $(\alpha_i)_{i=1,4}$, $(\beta_i)_{i=1,2}$, et γ, pour que g soit convexe sur $\mathbb{R}^4$. Même question pour la stricte convexité.

OPti
TD 3.1

Convexité

Exercice 1 : Soit $(x,y) \in E$ $\alpha \in]0,1[$

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha)y\|$$ Donc convexe

$$\leq |\alpha| \|x\| + |1-\alpha| \|y\|$$

stricte convexe si x et y liés ie $y = kx$ $k>0$
cas d'= de l'ITL

$(\lambda f + \mu g)(\alpha x + (1-\alpha)y)$ car f,g convexes

$$\lambda f(\alpha x + (1-\alpha)y) + \mu g(\alpha(x) + (1-\alpha)y)$$

$$\leq \lambda(\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)) + \mu(\alpha g(x) + (1-\alpha)g(y))$$

$$\leq \alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) + (1-\alpha)(\lambda f(y) + \mu g(y))$$

~~$f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ ... sup~~

$$\forall i \in I \quad f_i(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f_i(x) + (1-\alpha) f_i(y)$$

PBS

$$\sup_{i \in I} f_i(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Si I est fini alors $\exists i_0$ tq

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y)) = f_{i_0}(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f_{i_0}(x) + (1-\alpha) f_{i_0}(y)$$

$$\leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Exercice 2 : 1/ $f(x) = e^{-x}$ (strict convexe)
$x>0$ $f(x) = 1/x$ (strict convexe).
$f(x) = -x$. (convexe)

2/ Soit $M = f(0)$, $\exists A>0$ tq $\forall x \geq A$ $f(x) < M-1$.
$\exists B<0$ tq $\forall x \leq B$ $f(x) \leq M-1$

$x = B$ $y = A$ avec $x \neq y$ et $0 \in]x,y[$ $\alpha \in]0,1[$

Si f convexe, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

$$< M-1.$$

mais $\exists \alpha_0 \in]0,1[$ tq $\alpha_0 x + (1-\alpha_0)y = 0$ et $f(0) = M$.
Donc impossible.

Exercice 3

$$\frac{df(x)}{dx_1} = 2ax_1 + 2bx_2 \geq 0$$

$$\frac{df(x)}{dx_2} = 2bx_1 + 2cx_2 \geq 0.$$

3.1 / $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax_1 + 2bx_2 \\ 2bx_1 + 2cx_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longrightarrow \begin{pmatrix} 2ax_1 + 2bx_2 \\ 2bx_1 + 2cx_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\underline{\nabla^2 f(x) = J_{\nabla f(x)}} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

⚠ Cette matrice est toujours symétrique...

f convexe ssi $\forall x \in \mathbb{R}^2$ $\nabla^2 f(x)$ semi def pos.

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = 4ac - 4b^2 \geq 0.$$

$$tr(\nabla^2 f(x)) = 2a + 2c = \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$$

3.2. $g(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3\,|x_1 + x_2 + 3|$

$= f(x) + 3h(x)$

$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 \times \lambda_2 > 0$ $\quad$ donc f strict convexe

$\lambda_1 + \lambda_2 = 4$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ soit $\alpha \in]0, 1[$

$$h(\alpha x + (1-\alpha)y) = |\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 + \alpha x_2 + (1-\alpha)y_2 + 3|.$$

$$= |\alpha(x_1 + x_2 + 3) + (1-\alpha)(y_1 + y_2 + 3)|$$

$$\leq \alpha\,|x_1 + x_2 + 3| + (1-\alpha)\,|y_1 + y_2 + 3|.$$

$$\leq \alpha\, h(x) + (1-\alpha) h(y)$$

h convexe donc g strict convexe.

Opti TD 3.2.

$g \circ f$ avec f affine et g convexe.

$$(g\circ f)(\alpha x + (1-\alpha)y) = g(f(\alpha x + (1-\alpha)y))$$
$$= g(\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)).$$
$$\leq \alpha g(f(x)) + (1-\alpha) g(f(y))$$

3.3. $h: \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \to e^{\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \end{cases}$

$$\nabla h(x) = (x_1 e^{\cdots} \quad x_2 e^{\cdots} \quad \dots \quad x_n e^{\cdots})$$

x x $x_i x_j e^{\cdots}$

$\nabla^2 h(x) =$ $\left(x_i e^{\frac{1}{2}(\cdots)}\right)$

$e^{1/2 \cdots} + x_i^2 e^{\cdots}$

$$\nabla^2 h(x) = \begin{pmatrix} (1+x_1^2)e & x_1 x_2 e & \dots & x_1 x_n e \\ x_2 x_1 e & & & \\ \vdots & & & \\ x_n x_1 e & & & (1+x_n^2)e \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 h(x) = e^{\frac{1}{2}\|x\|^2} I + e^{\frac{1}{2}\|x\|^2} x x^T$$
$$= e^{\frac{1}{2}\|x\|^2}(I + x x^T)$$

$$\phi^T e^{1/2 \|x\|^2} x x^T \phi \geq 0.$$

$(x^T \phi)^2 \geq 0$ Donc semi def pos

$h = \exp(\underbrace{\tfrac{1}{2}\|x\|^2}_{f})$

$\nabla^2 f(x) = I$ def > 0 $\forall x$.

f strict convexe

$\frac{1}{2}\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 < \alpha(\frac{1}{2}\|x\|^2 + (1-\alpha))(\frac{1}{2}\|y\|^2)$

exp est $\nearrow$

~~$h(x)$~~ $< \exp(\frac{1}{2}\|\alpha(x + (1-\alpha)y\|^2 < \exp(\alpha \frac{1}{2}\|x\|^2 + (1-\alpha)\frac{1}{2}\|y\|^2)$

car exp strict cvxe $< \alpha \exp(\frac{1}{2}\|x\|^2) + (1-\alpha)\exp(\frac{1}{2}\|y\|^2)$

Exercice 5 :

1 $f : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x_1 \ln(x_1) + x_2 \ln(x_2) - (x_1+x_2)\ln(x_1+x_2) \end{cases}$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \ln x_1 + 1 - \ln(x_1+x_2) - 1 \\ \ln x_2 - \ln(x_1+x_2) \end{pmatrix}.$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{x_1(x_1+x_2)} & -\frac{1}{x_1+x_2} \\ -\frac{1}{x_1+x_2} & \frac{x_1}{x_2(x_1+x_2)} \end{pmatrix}$$

$\det \nabla^2 f(x) = 0$

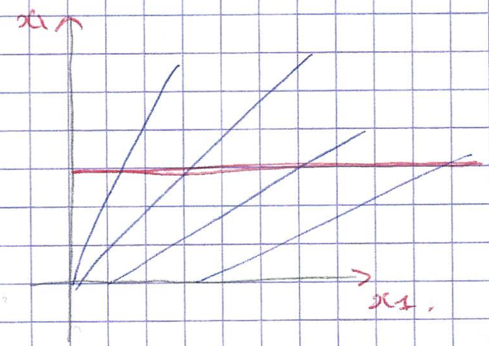
$\operatorname{tr} \nabla^2 f(x) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 0.$

Donc semi-def pos.

$\left.\begin{array}{l} \forall x \in C = (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ \nabla^2 \text{ est semi-def pos} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ est convexe.

$$\operatorname{Ker} \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{x_2}{x_1}\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ x_2/x_1 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\alpha, \frac{\alpha x_2}{x_2}\right) = \alpha \ln(\alpha) + \frac{\alpha x_2}{x_1} \ln\left(\alpha \frac{x_2}{x_1}\right) - \left(\frac{\alpha(x_1+x_2)}{x_1}\right) \ln\left(\frac{\alpha(x_1+x_2)}{x_1}\right)$$



Pour trouver un ensemble strict convexe.
Prendre une dte qui les coupe tous.
ex : $x_2 = $ cte.