1.1

Thème Logique des propositions

Vision sémantique
Modélisation et Résolution de problèmes

Exercice 1 Modéliser en logique des propositions, sous la forme de formules bien formées, les énoncés suivants :

1. S'il pleut alors il y a des nuages.
2. J'aime Marie ou j'aime Anne, et si j'aime Marie alors j'aime Anne.
3. Je me distrais si je vais au concert ou si je lis. Je ne vais pas au concert et je me distrais. Donc je lis.
4. Quand je suis énervé je fais du yoga ou de la relaxation. Un adepte du yoga fait de la relaxation. Donc quand je ne fais pas de relaxation, je suis calme.
5. Je ne sortirai que s'il fait beau. Or il pleut donc je reste chez moi.
6. À moins qu'il ne fasse beau, je ne sortirai pas.
7. Je ne sortirai qu'à condition qu'il fasse beau.

Exercice 2 Montrer que la formule proposée pour la question 4 de l'exercice 1 est valide ou non valide, consistante ou non consistante.

- en utilisant une table de vérité.
- en utilisant la relation d'équivalence sémantique des formules bien formées

Exercice 3 Trois personnes A,B et C, accusées d'un vol, déclarent respectivement :

- DA : B est coupable et C est innocent.
- DB : Si A est coupable alors C l'est aussi.
- DC : Je suis innocent mais au moins l'une des deux autres personnes est coupable.

Utiliser le formalisme du calcul des propositions pour modéliser les questions suivantes et donner la réponse pour chaque question :

1. Les trois déclarations sont-elles compatibles ? $DA \wedge DB \wedge DC$ est satisfiable (au moins 1 fois vraie)
2. L'un des témoignages peut-il se déduire des autres ? Lequel ? $DB \wedge DC \rightarrow DA$. $DA \wedge DB \rightarrow DC$ $DA \wedge DC \rightarrow DB$.
3. Si tous sont innocents, lequel/lesquels a/ont menti ?
4. Si tous disent la vérité, qui est coupable ?
5. Si seuls les innocents disent la vérité, qui est innocent ?

Rappels de cours distribués lors de l'examen écrit.

Tables de vérité

La sémantique de $\top$ (respectivement $\bot$) est représenté par V (respectivement F).

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

Relation d'équivalence sémantique des formules bien formées

$\varphi = \psi$ si et seulement si les deux formules bien formées φ et ψ ont la même table de vérité.

	$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
Idempotence	$A \wedge A = A$ $A \vee A = A$
	$A \wedge \neg A = \bot$ $A \vee \neg A = \top$ $A \wedge \bot = \bot$ $A \wedge \top = A$ $A \vee \bot = A$ $A \vee \top = \top$ $\neg\neg A = A$
Commutativité	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$
Associativité	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
Distributivité	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
Simplification	$A \vee (\neg A \wedge B) = A \vee B$ $A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$ $A \vee (A \wedge B) = A$ $A \wedge (A \vee B) = A$

1.2

Thème Logique des propositions

Une théorie formalisée

Exercice 1 En utilisant la déduction naturelle constructive sans les règles de la négation $\neg$ et de l'anti-té $\perp$, construire la preuve que les formules bien formées suivantes sont des théorèmes.

1. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
2. $((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
3. $((\varphi \vee \psi) \to \chi) \to (\psi \to \chi)$
4. $((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to \chi$

Exercice 2 En utilisant la déduction naturelle constructive avec les règles de la négation $\neg$, construire la preuve que les formules bien formées suivantes sont des théorèmes.

1. $\varphi \to \neg\neg\varphi$
2. $(\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \neg\varphi)$

Exercice 3 En utilisant la déduction naturelle constructive avec les règles de la négation $\neg$ et de l'anti-té $\perp$, construire la preuve que les formules bien formées suivantes sont des théorèmes.

1. $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$
2. $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$

Exercice 4 En utilisant la déduction naturelle, montrer que la formule bien formée suivante est un théorème.

- $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Exercice 5 En utilisant la déduction naturelle, montrer que la formule bien formées suivante issue de la question 4 de l'exercice 1 du thème 1 est un théorème.

$$((E \to (Y \vee R)) \wedge (Y \to R)) \to (\neg R \to \neg E)$$

Rappels de cours distribués lors de l'examen écrit.

Déduction naturelle constructive

Hypothèse	$\dfrac{}{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi}\ \mathrm{Hyp}$	
Opérateur	**Introduction**	**Elimination**
$\to$	$\dfrac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ I_{\to}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\to}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ I_{\wedge}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\wedge}^{G} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\wedge}^{D}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{G} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{D}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi \qquad \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ E_{\vee}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ I_{\neg}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ E_{\neg}$
$\bot$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ I_{\bot}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\bot}$

Déduction naturelle classique

Tiers-exclu	Preuve par l'absurde
$\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\ \mathrm{TE}$	$\dfrac{\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \mathrm{A}$

TD Mod
1.1

TD Modélisation - Logique des propositions.

Yamine AIT AMEUR yamine@n7.fr 0534322255 F306

Exercice n°1:

- pluie $\rightarrow$ nuage $\quad N \vee \neg P$
- (aimer Marie $\vee$ aimer Anne) $\wedge$ (Aimer marie $\rightarrow$ aimer Anne).
- (Concert $\vee$ lire) $\rightarrow$ Distrais $\wedge$ $\neg$concert $\wedge$ D $\rightarrow$ Lis

$((C \vee L) \rightarrow D) \wedge \neg C \wedge D \rightarrow L$

$(D \vee (\neg C \vee \neg L) \wedge L \vee (\neg D \vee C))$

- $((E \rightarrow (Y \vee R)) \wedge (Y \rightarrow R)) \wedge (\neg R \rightarrow \neg E)$
- $(B \rightarrow S) \wedge (P \rightarrow R)$.
- $(B \rightarrow S)$.
- $(B \rightarrow S)$

- $P \rightarrow N \quad N \vee \neg P$
- $(M \vee A) \wedge (M \rightarrow A)$
- $((C \vee L \rightarrow D) \wedge \neg C \wedge D) \rightarrow D$.
- $((E \rightarrow (Y \vee R)) \wedge (Y \rightarrow R)) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg E)$.
- $((S \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg S$.
- $(\neg B \rightarrow \neg S) \leftrightarrow (S \rightarrow B)$
- $S \rightarrow B$.

Exercice n°2

$((E \rightarrow (Y \vee R)) \wedge (Y \rightarrow R)) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg E)$

$(((Y \vee R) \vee \neg E) \wedge (R \vee \neg Y)) \rightarrow (\neg E \vee R)$

$(\neg E \vee R) \vee \neg(((Y \vee R) \vee \neg E) \wedge (R \vee \neg Y))$

$\neg E \vee R \vee \neg((Y \vee R) \vee \neg E) \vee (\neg(R \vee \neg Y))$

$\neg E \vee R \vee (\neg(Y \vee R) \wedge E) \vee (\neg R \wedge Y)$.

$\neg E \vee R \vee (\neg Y \wedge \neg R \wedge E) \vee (\neg R \wedge Y)$.

$\neg E \vee R \vee (\neg Y \wedge \neg R \wedge E) \vee (\neg R \wedge Y)$

$\neg E \vee R \vee Y \vee (\neg Y \wedge \neg R \wedge E)$.

$\neg E \vee R \vee (Y \vee (\neg R \wedge E))$.

$\neg E \vee R \vee Y \vee E \equiv \top$

$A \vee (\neg A \wedge B) \equiv A \vee B$

Penser à décomposer en différents groupes H_1, H_2, H_3 ...

Une ligne = une interprétation

E	Y	R	(1) $(Y \vee R \vee \neg E)$	(2) $(R \vee \neg Y)$	(3) $(\neg E \vee R)$	$(1) \wedge (2)$	$(3) \vee \neg(4)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

La formule est valide donc consistante

Exercice 3 :

$B = 1 \quad C = 0 \qquad B \wedge \neg C = \top$

$A \to C \qquad C \vee \neg A = \top$

$\neg C \wedge (B \vee A) = \top$

	A	B	C
	0	1	0
1+2	0	1	0
2+3	0	1	0
1+3	0 ou 1	1	0

1) Compatibles
2) Oui la 3e peut se déduire des autres.
3) A et C
4) B
5) C

TD Mod

1.2

1- $DA \wedge DB \wedge DC$ est satisfiable (au moins une fois vraie)

2- $DA \wedge DB \rightarrow DC$

$DA \wedge DC \rightarrow DB$

$DB \wedge DC \rightarrow DA$

3 Tous innocents : $\neg A = T$ $\neg B = T$ $\neg C = T$.

On trouve que seul B dit vrai.

4 B est coupable.

5 $\begin{pmatrix} DA \rightarrow \neg A \wedge \\ DB \rightarrow \neg B \wedge \\ DC \rightarrow \neg C \end{pmatrix}$

Une théorie formalisée

Exercice 1 : $H \vdash H$ axiome.

$\Gamma \vdash H$ Hyp vraie sous certaines conditions.

$\emptyset \vdash H \rightarrow C$ théorème.

On veut démontrer $H \rightarrow C$ ie $C \cup \neg H$. pour cela Hypothèses doivent être satisfiables (au ⊖ 1 fois vraie).

2

$$\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\ \text{Ax} \qquad \dfrac{}{\psi \vdash \psi}\ \text{Ax}$$

$$\dfrac{}{(\varphi \wedge \psi) \to \chi \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi}\ \text{Ax} \qquad \dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{Aff} \qquad \dfrac{\psi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \text{Aff}$$

$$\dfrac{(\varphi \wedge \psi) \to \chi \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi}\ \text{Aff} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}\ I_\wedge$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi \qquad \Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{((\varphi \wedge \psi) \to \chi), \varphi, \psi \vdash \chi}\ E_\to$$

$\Gamma = ((\varphi \wedge \psi) \to \chi), \varphi, \psi$.

$$\dfrac{((\varphi \wedge \psi) \to \chi), \varphi, \psi \vdash \chi}{((\varphi \wedge \psi) \to \chi), \varphi \vdash \psi \to \chi}\ I_\to$$

$$\dfrac{((\varphi \wedge \psi) \to \chi), \varphi \vdash \psi \to \chi}{((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi))}\ I_\to$$

$$\dfrac{((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi))}{\emptyset \vdash ((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))}\ I_\to$$

3

$$\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\ \text{Ax}$$

$$\dfrac{}{(\varphi \vee \psi) \to \chi \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi}\ \text{Ax} \qquad \dfrac{\psi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \text{Aff}$$

$$\dfrac{(\varphi \vee \psi) \to \chi \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi \to \chi)}\ \text{Aff} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}\ I^{D}_{\vee}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi \to \chi) \qquad \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{(\varphi \vee \psi \to \chi), \psi \vdash \chi}\ E_\to$$

Γ : $(\varphi \vee \psi \to \chi), \psi$

$$\dfrac{(\varphi \vee \psi \to \chi), \psi \vdash \chi}{((\varphi \vee \psi) \to \chi) \vdash (\psi \to \chi)}\ I_\to$$

$$\dfrac{((\varphi \vee \psi) \to \chi) \vdash (\psi \to \chi)}{\emptyset \vdash ((\varphi \vee \psi) \to \chi) \to (\psi \to \chi)}\ I_\to$$

TD Mod 4.

1.3

$$\Gamma \vdash \Gamma \quad (Ax)$$

$$\Gamma, \varphi \vdash \Gamma \quad (Aff)$$

$$\Gamma, \varphi \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \quad (E_\wedge^D)$$

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \chi \quad (E_\wedge^G)$$

$$\varphi \to \varphi \quad (Ax)$$

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \quad (Aff)$$

$$(\psi \to \chi) \vdash (\psi \to \chi) \quad (Ax) \qquad \psi \vdash \psi \quad (Ax)$$

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash (\psi \to \chi) \quad (Aff) \qquad \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \psi \quad (Aff)$$

$$\Gamma \vdash \Gamma \quad (Ax)$$

$$\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)$$

$$\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi) \quad (E_\wedge^D) \qquad \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi \quad (E_\to) \qquad \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \chi \quad (E_\to)$$

$$\Gamma : ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \vdash \chi \quad (E_\vee)$$

$$\emptyset \vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to \chi \quad (I_\to)$$

Exercice 2 :

$$\varphi \vdash \varphi \quad (Ax) \qquad \neg\varphi \vdash \neg\varphi \quad (Ax)$$

$$\Gamma \vdash \varphi \quad (Aff) \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi \quad (Aff)$$

$$\Gamma = \varphi, \neg\varphi \vdash \bot$$

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi \quad (Ax)$$

$$P, P \to \bot \vdash P \to \bot \qquad P, P \to \bot \vdash P \quad (Ax)$$

$$P, P \to \bot \vdash \bot \quad (E_\to)$$

$$P \vdash (P \to \bot) \to \bot \quad (I_\to)$$

$$P \vdash \neg\neg P \quad (\text{Reecriture})$$

$$\emptyset \vdash P \to \neg\neg P \quad (I_\to)$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\varphi \to \psi \vdash \varphi \to \psi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \varphi$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{$(\Gamma \vdash \psi)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$(\varphi \to \neg\psi) \vdash (\varphi \to \neg\psi)$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash (\varphi \to \neg\psi)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \varphi$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\psi$}
\RightLabel{$I\bot$}
\BinaryInfC{$\Gamma \; (\varphi \to \neg\psi), (\varphi \to \psi) \; \varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{$I\neg$}
\UnaryInfC{$(\varphi \to \neg\psi) (\varphi \to \psi) \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{$I\to$}
\UnaryInfC{$(\varphi \to \neg\psi) \vdash (\varphi \to \psi) \to \neg\varphi$}
\RightLabel{$I\to$}
\UnaryInfC{$\emptyset \vdash (\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \neg\varphi)$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 3:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\varphi, \neg\varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{$E\bot$}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$}
\RightLabel{$I\to$}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$}
\RightLabel{$I\to$}
\UnaryInfC{$\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$}
\end{prooftree}
$$

TD Mod
1.4.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg\varphi\vee\psi \vdash \neg\varphi\vee\psi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\neg\varphi\vee\psi, \varphi \vdash \neg\varphi\vee\psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{E$\neg$}
\BinaryInfC{$\Gamma = (\neg\varphi\vee\psi, \varphi, \neg\varphi) \vdash \bot$}
\RightLabel{E$\bot$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi\vee\psi, \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\psi \vdash \psi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\neg\varphi\vee\psi, \varphi, \psi \vdash \psi$}
\RightLabel{E$\vee$}
\TrinaryInfC{$\neg\varphi\vee\psi, \varphi \vdash \psi$}
\RightLabel{I$\to$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi\vee\psi \vdash \varphi\to\psi$}
\RightLabel{I$\to$}
\UnaryInfC{$(\neg\varphi\vee\psi) \to (\varphi\to\psi)$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 4 :

Raisonnement par l'absurde.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\psi \vdash \psi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \psi$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg\varphi\to\neg\psi \vdash \neg\varphi\to\neg\psi$}
\LeftLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\varphi\to\neg\psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\psi$}
\RightLabel{E$\neg$}
\BinaryInfC{$\neg\varphi\to\neg\psi, \psi, \neg\varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{A}
\UnaryInfC{$\neg\varphi\to\neg\psi, \psi \vdash \varphi$}
\RightLabel{I$\to$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi\to\neg\psi \vdash (\psi\to\varphi)$}
\RightLabel{I$\to$}
\UnaryInfC{$(\neg\varphi\to\neg\psi) \to (\psi\to\varphi)$}
\end{prooftree}
$$