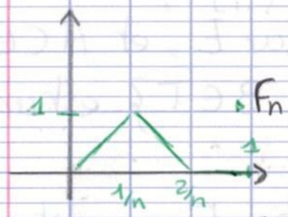
I&A
1.1

Eléments de théorie de la mesure

I / Introduction

. On cherche à introduire une intégrale qui se comporte bien par rapport à certains passages à la limite (contr. à l'intégrale de Riemann)



▸ $f_n : [0,1] = E$ On a $(f_n) \xrightarrow{C.S} 0$ $\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{n}$; $\int_0^1 \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right] dt = 0$

▸ $g_n = nf_n$ $g_n \xrightarrow{C.S} 0$ mais $\int_0^1 g_n(t)dt = 1 = \lim \int_0^1 f_n(t)dt$.

▸ On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur E si :

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(x;\varepsilon),\ n > N(x,\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

. La propriété qui manque pour assurer le passage à la limite sous le signe $\int$ est la convergence uniforme, jugée trop restrictive : on va voir que l'on peut s'en passer et la remplacer par des hypothèses plus faciles à vérifier. L'intégrale de Lebesgue est le cadre adapté. Cette intégrale s'appuie sur les notions de tribus et de mesure

II / Tribus et mesures

A - Tribus

▸ Soit E un ensemble.

Définition : On dit que T est une tribu sur E si :

i) $\emptyset \in T$

ii) T est stable par complément dans E

$A \in T \Rightarrow E \setminus A \in T$

iii) T est stable par réunion dénombrable

$\forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in T$

Remarque : • $T \subset \mathcal{P}(E)$: T est un ensemble d'ensembles.

Remarque : • Soit E un ensemble et $A \subset E$

$T = \{\emptyset, A, E \setminus A, E\}$ est une tribu sur E.

• Si T est une tribu sur E, et $A \subset E$

$A \cap T = \{A \cap B, B \in T\}$ est une tribu sur A

Définition : Si T est une tribu sur E, on dit que (E, T) est un ensemble mesurable

Propriété : Si $(T_i)_{i \in I}$ est une famille de tribus sur E, $T' = \bigcap_{i \in I} T_i$ est une tribu sur E.

Démo : • Puisque $\forall i \in I$, $\emptyset \in T_i$ (car T_i tribus)

$\emptyset \in T' = \bigcap_{i \in I} T_i$

• Soit $A \in \bigcap_{i \in I} T_i$; $\forall i \in I$, $A \in T_i$ donc $E \setminus A \in T_i$ car T_i tribus, d'où $E \setminus A \in T'$

• Soit $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (T')^{\mathbb{N}}$

$\forall i$, $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in T_i$ donc $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in T_i$ car T_i tribus et donc $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in T'$.

Définition : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$

On appelle $T(\mathcal{A})$ l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$. C'est aussi la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$.

Remarque : • Soit T une tribu contenant $\mathcal{A}$, alors

$T(\mathcal{A}) = T \cap \left(\bigcap_{\substack{T' \\ T' \neq T \\ \mathcal{A} \subset T'}} T' \right) \subset T$

I & A
1.2

Propriétés : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$

a) $T(\mathcal{A}) \subset T(\mathcal{B})$

b) $\left.\begin{matrix} \mathcal{A} \subset T(\mathcal{B}) \\ \mathcal{B} \subset T(\mathcal{A}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$

Démo : • $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset T(\mathcal{B})$

donc $T(\mathcal{A}) \subset T(\mathcal{B})$ car $T(A)$ est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{A}$ et $T(\mathcal{B})$ tribu qui contient A.

• $\mathcal{A} \subset T(\mathcal{B}) \Rightarrow T(A) \subset \underbrace{T(T(\mathcal{B}))}_{T(\mathcal{B})}$

$\mathcal{B} \subset T(A) \Rightarrow T(\mathcal{B}) \subset T(A)$

Rappel : On appelle espace topologique la paire $(E, \mathcal{O}(E))$

E : ensemble $\mathcal{O}(E)$: ouverts ($\emptyset, E \in \mathcal{O}(E)$, stable par $\bigcup$qcq et $\bigcap$ finie).

Définition : On appelle tribu des boréliens sur $(E, \mathcal{O}(E))$ la tribu $T(\mathcal{O}(E))$

Remarque : Dans un espace normé, O est un ouvert si
$\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0, \{y, \|x-y\| < \varepsilon\} \subset O$

Propriétés : . $\mathcal{A}_1 = \{]a,b[, (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b \}$

. $\mathcal{A}_2 = \{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R} \}$

. $\mathcal{A}_3 = \{]p, q[, (p,q) \in \mathbb{Q}\ p < q \}$

. $\mathcal{A}_4 = \{]-\infty, p[, p \in \mathbb{Q}$

• On a alors que $T(\mathcal{O}(\mathbb{R})) = T(\mathcal{A}_1) = T(\mathcal{A}_2) = T(\mathcal{A}_3) = T(\mathcal{A}_4)$

Démo : $\forall i\ \mathcal{A}_i \subset T(\mathcal{O}(\mathbb{R})) \Rightarrow T(\mathcal{A}_i) \subset T(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$

Il reste à montrer que $\mathcal{O}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{A}_i)$

Soit $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$, alors $O = \bigcup_{r,q \in \mathbb{Q}^2}]r-q, r+q[$

$]r-q, r+q[\subset O$ donc $O \in T(A_3)$

B - Mesure

- Soit (E,T) un ensemble mesurable.

Définition : On appelle mesure sur (E,T) toute application $\mu : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+ = \{x, x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) si $(A_i) \in T^{\mathbb{N}}$ tq $\forall i,j \ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i=0} \mu(A_i)$$

Proposition :
- Si $A \in T$, $B \in T$ et $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ et $\exists n_0$ tq $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ alors

$$\mu\left(\bigcap A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (A_n)$$

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Démo :
- $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B\setminus A) = \emptyset$

$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B\setminus A)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$, $(A_n) \nearrow$ (croissante au sens de l'$\subset$)

$B_0 = A_0 \quad B_1 = A_1 \setminus A_0 \quad B_2 = A_2 \setminus A_1$

$\bigcup_{i=0}^{k} B_i = \bigcup_{i=0}^{k} A_i$

I & A
1.3

On a alors $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i)$

$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

$\uparrow$ B_i disjoints 2 à 2 $\quad A_k = \bigcup_{i=0}^{k} B_i$

de plus $A_k \subset A_{k+1} \Rightarrow \mu(A_k) \leq \mu(A_{k+1})$

$(\mu(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est $\nearrow$ et sa limite est le sup.

- Soit $(A_n) \in T^{\mathbb{N}}$, $(A_n) \searrow$

On considère pour $n \geq n_0$ $B_n = A_{n_0} \setminus A_n$ on a alors $B_n \nearrow$ au sens de $\subset$

De plus, $\bigcup_{n\geq n_0} B_n = A_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} \bigcup B_n = \bigcup (A_{n_0} \setminus A_n) &= \bigcup (A_{n_0} \cap A_n^c) \\ &= A_{n_0} \cap \left(\bigcup_{n\geq n_0} A_n^c\right) \\ &= A_{n_0} \cap \left(\bigcup_{n\geq n_0} A_n\right)^c \end{aligned}}$$

D'après le résultat qui précède

$\mu(A_{n_0} \setminus (\bigcap_{n\geq n_0} A_n)) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n_0} \setminus A_n)$

$\mu(A_{n_0}) - \mu(\bigcap_{n\geq n_0} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n) = \mu(A_0) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

Remarque : Soit (E,T) un ens mesurable et $\mu \begin{cases} T \to \overline{\mathbb{R}}^+ \\ A \to \text{card}(A) \end{cases}$

μ est une mesure sur T. $\mu(\emptyset) = 0$.

$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ (A_i 2 à 2 disjoints).

Pour $(\mathbb{R}, T(O(\mathbb{R})))$, $A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\cup \{2\}$.

alors $A_n \searrow$; $\bigcap A_n = \{0, 2\}$

$\mu(\bigcap A_n) = 2$; $\forall n \in \mu(A_n) = +\infty$

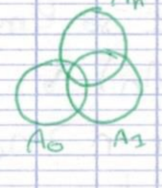
Exemple : mesure de dirac sur (E,T)

Soit $a \in E$, on définit : $\delta_a \begin{cases} T \to \overline{\mathbb{R}}^+ \\ A \mapsto \delta_a(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$

δ_a est une mesure. $\delta_a(\emptyset)=0$

~~Sa~~ Soit $(A_i)\in T^{\mathbb{N}}$, $A_i\cap A_j=\emptyset$ $i\neq j$

$$\delta_a\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \begin{cases} 0 \text{ si } \forall A_i,\ a\notin A_i \text{ et } 0=\sum\delta_a(A_i) \\ 1 \text{ si } \exists A_i,\ a\in A_i \text{ et } \forall j\neq i\ \delta_a(A_j)=0 \text{ donc} \\ \quad 1=\sum\delta_a(A_i)\end{cases}$$

- 

Soit $B_0=A_0$

$B_{k+1}=A_{k+1}\setminus\Big(\bigcup_{i=0}^{k}A_k\Big)$

(B_k) est une suite d'él^t de T 2 à 2 disjoints

$\bigcup_{i=0}^{k}A_i=\bigcup_{i=0}^{k}B_i$ par construction

vrai pour $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i$ $\qquad A\cap B=(A^c\cup B^c)^c$

$A\setminus B=A\cap B^c$

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\Big)=\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\Big)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\mu(B_i)\le\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i)$$

$B_n\subset A_n$.

Définition : Sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})\equiv T(O(\mathbb{R}))=T(\{]a_i,b_i[,(a_i,b_i)\in\mathbb{Q}^2 \text{ tq } a_i<b_i\})$
on pose $\mu(]a,b[)=b-a$ pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ $a\le b$.
Il existe une unique mesure appelée mesure de Lebesgue qui prolonge $\mu(]a,b[)=b-a$ à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposition : • Si $a\in\mathbb{R}$, $\mu(\{a\})=0$

car $b<a<c$ $\quad \mu(]b,c[)\overset{\sigma\text{-add}}{=}\mu(]b,a[)+\mu(\{a\})+\mu(]a,c[)$

$=a-b+\mu(\{a\})+c-a$

$=c-b+\cancel{\mu(\{a\})}$

• Si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a\le b$, $\mu([a,b])=\mu(]a,b[)$

σ-additivité • $\mu(\mathbb{Q})=\mu\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}\Big)=\sum_{q\in\mathbb{Q}}\mu(q)=0$. $\{q\}=\mathbb{R}\setminus\,]-\infty,q[\,\cup\,]q,+\infty[$

III / Applications mesurables.

▸ On suppose donnés $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$ deux ensembles mesurables et $F: E\to F$.

I&A
1.4

<u>Définition</u>: On dit que f est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$ si $\left[\forall A \in \mathcal{F},\ f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\right] = \left[f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}\right]$

<u>Rappel</u>:
- $f^{-1}(A) = \{x, f(x) \in A\}$
- $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$
- $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$
- $f^{-1}(\complement A_i) = \complement f^{-1}(A_i)$
- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

<u>Définition</u>:
- Si f est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on dit que f est une fonction borélienne
- Si f est mesurable de $(E, \mathcal{B}(E))$ dans $(F, \mathcal{B}(F))$ on dit que f est une application borélienne.

<u>Lemme de transport</u>: Soit $f: E \to F$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(F)$ alors.
$$f^{-1}(T(\mathcal{A})) = T(f^{-1}(\mathcal{A}))$$

<u>Démo</u>: On sait que $\mathcal{A} \subset T(\mathcal{A})$ d'où $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset f^{-1}(T(\mathcal{A}))$ (1)
Or l'image réciproque d'une tribu est une tribu :
$f: E \to F$ et T une tribu sur F. on s'intéresse à
$f^{-1}(T) = \{f^{-1}(A),\ A \in T\}$ est une tribu.
- $\emptyset \in T$
- le complémentaire soit A tq $f(A) \in T$ alors $f^{-1}(\complement A) = \complement \underline{f^{-1}(A)} \in T$
- $f^{-1}(\bigcup A_i) = \in T \bigcup f^{-1}(A_i)$

On a d'après (1) $T(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(T(\mathcal{A}))$ (+ petite tribu).
Il reste à montrer que $f^{-1}(T(\mathcal{A})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{A}))$
on considère $T' = \{B \subset F,\ f^{-1}(B) \in T(f^{-1}(\mathcal{A}))\}$
T' est une tribu par commutation de f^{-1} et des opérations $\complement, \cup$. De plus, $\mathcal{A} \subset T'$ donc $T(\mathcal{A}) \subset T'$
$\Rightarrow f^{-1}(T(\mathcal{A})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{A}))$.

Caractérisation des applications mesurables :

- Soit $f : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ et $\mathcal{F} = T(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(F)$
  f mesurable ssi $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}$
- Si f est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$ et g est mesurable de $(F, \mathcal{F})$ dans $(G, \mathcal{G})$ alors $g \circ f$ est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(G, \mathcal{G})$
- Si f est continue de $(E, O(E))$ dans $(F, O(F))$ alors f est mesurable de $(E, T(\underbrace{O(E)}_{B(E)}))$ dans $(F, T(\underbrace{O(F)}_{B(F)}))$

Démo : • Supposons f mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$ et $A \in \mathcal{A}$ alors puisque $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{A}) \in \mathcal{E}$ car f mesurable.
$T(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$.

(si $A \subset F$, $f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}$ si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{A}\}$).

Inversement si $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}$, mq f mesurable

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = f^{-1}(T(\mathcal{A})) = T(\underbrace{f^{-1}(\mathcal{A})}_{\subset \mathcal{E}}) \subset \mathcal{E}$$

• Soit $A \in \mathcal{G}$, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$

img réc. ensembliste

$\{x, g(f(x)) \in A\}$
$= \{x, f(x) \in g^{-1}(A)\} = \{x, x \in f^{-1} g^{-1}(A)\}$

d'où $\underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(\mathcal{E})}_{\subset \mathcal{F} \text{ car } g \text{ mesurable}})}_{\subset \mathcal{E} \text{ car } f \text{ mesurable}} \subset \mathcal{E}$

• Supposons f continue.

$$f^{-1}(T(\underbrace{O(F)}_{B(F)})) \underset{\text{transport}}{=} T(\underbrace{f^{-1}(O(F))}_{\subset O(E)}) \subset \underbrace{T(O(E))}_{B(E)}$$

Propriétés : Soit $f_1, \dots, f_d$, d fonctions mesurables de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$.
Soit g une app continue de $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$ dans $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$

I & A
1.5

Alors $g \circ f$ est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
où $f = (f_1, \dots, f_d)$.

Exemple :
- f_1 et f_2 sont mesurables de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
$f_1 + f_2$ est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
$(d=2)$ $\quad g \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases}$
- Si f_1 et f_2 sont mesurables de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
$\max(f_1, f_2)$ est mesurable $\quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to \max(x,y) = \dfrac{|x-y| + x + y}{2} \end{cases}$

Démo : $x \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{continu}]{g} g(f_1(x), \dots, f_d(x))$

Pour montrer la mesurabilité de f, on se rappelle du fait que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendré par $\overset{d}{\underset{i=1}{\times}}]a_i, b_i[$ avec $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ $a_i \leq b_i$ $\quad f^{-1}\left(\overset{d}{\underset{i=1}{\times}}]a_i, b_i[\right) = \{x, f(x) \in \times]a_i, b_i[\}$

$$= \{x, \forall i, f_i(x) \in]a_i, b_i[\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{d} \underbrace{f_i^{-1}(]a_i, b_i[)}_{\in \mathcal{E} \text{ car } f_i \text{ mesurable}} \in \mathcal{E} \text{ car } \cap \text{ dénombrable d'éléments de } \mathcal{E}$$

Propriété : Si $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont telles que $\forall i$, f_i est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ alors

$$\left.\begin{array}{l} x \longmapsto \inf_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) \\ x \longmapsto \sup_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) \\ x \longmapsto \liminf_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) \\ x \longmapsto \limsup_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) \end{array}\right\} \text{ sont mesurables.}$$

Définition : μ est σ-finie sur $(E, \mathcal{E})$ si il existe un recouvrement de E par une famille dénombrable d'ensembles mesurables tous de mesure finie.

ie $\exists (E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} E_n \in \mathcal{E} \\ \mu(E_n) < +\infty \end{cases}$

et $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.