Département Sciences du Numérique, 1A **Octobre 2017**

EXERCICES DE TRAITEMENT DU SIGNAL

Exercice 1 : Etude du secteur

On considère dans cet exercice différents modèles du secteur et on étudie la densité spectrale de puissance des signaux obtenus à l'aide de ces modèles.

1. Dans une première approche, on utilise le modèle :
$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$$
où $f_0 = 50Hz$ et $A_0 = 220\sqrt{2}V$. Préciser la classe à laquelle appartient le signal $X(t)$ puis déterminer sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$.
2. On considère ensuite le modèle suivant :
$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$
θ étant une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, $f_0 = 50Hz$ et $A_0 = 220\sqrt{2}V$. Préciser la classe à laquelle appartient le signal $X(t)$ puis déterminer sa moyenne, sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$.
3. La fréquence du courant électrique n'est jamais exactement $f_0 = 50Hz$. Afin de modéliser les variations en fréquence, on considère le modèle :
$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f t + \theta)$$
f étant une variable uniformément répartie sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ indépendante de θ. Calculer alors la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.

Exercice 2 : Modulation d'amplitude

Soit $A(t)$ un signal aléatoire stationnaire, réel, de fonction d'autocorrélation $R_A(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_A(f)$ définie par :
$$S_A(f) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } |f| \leq F \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère le signal $X(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$, avec $F \ll f_0$ et θ une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ indépendante de $A(t)$.

1. Montrer que $X(t)$ est un processus aléatoire stationnaire. Déterminer et représenter graphiquement sa densité spectrale de puissance.
2. Afin de retrouver le signal $A(t)$ à partir de $X(t)$, on construit le signal $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$. Déterminer et tracer la densité spectrale de puissance de $Y(t)$. Quel traitement doit-on utiliser pour retrouver $A(t)$ à partir de $Y(t)$?
3. Montrer qu'on retrouve les mêmes résultats qu'aux questions 1 et 2 lorsque $A(t)$ est un signal à énergie finie et θ une phase fixe (que l'on prendra égale à 0 pour simplifier les calculs).

Exercice 3 : Canal de propagation multitrajets

1. Soit le signal déterministe défini par :
$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\lambda t} \quad t \geq 0 \quad \lambda > 0 \\ &= 0 \quad t < 0 \end{aligned}$$
   (a) Calculer la fonction d'autocorrélation de $x(t)$ (en distinguant les cas $\tau \geq 0$ et $\tau \leq 0$).
   (b) Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$, puis sa densité spectrale de puissance et retrouver enfin l'expression de sa fonction d'autocorrélation déterminée précédemment.
2. Considérons un système multitrajet d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ défini par :
$$y(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k x(t - \tau_k)$$

(a) Montrer que $y(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée $x(t)$. Exprimer la réponse impulsionnelle et la transmittance de ce filtre.

(b) Exprimer la fonction d'intercorrélation entre $y(t)$ et $x(t)$ notée $R_{yx}(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$.

(c) Si le signal déterministe de la question 1 est mis à l'entrée du système multitrajet, à quelle(s) condition(s) sur λ et les τ_k peut-on alors identifier les paramètres du systèmes $\{a_k, \tau_k\}_{k=1,M}$ à partir de la fonction d'intercorrélation $R_{yx}(\tau)$?

Exercice 4 : Calcul d'un Rapport Signal sur Bruit (RSB) en sortie d'un filtre linéaire

Considérons un filtre linéaire de réponse en fréquence :

$$H(f) = \frac{1}{\theta + j2\pi f}$$

On applique à l'entrée de ce filtre un processus aléatoire $X(t)$ constitué de la somme d'un signal sinusoïdal $s(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$, où f_0 et A sont des constantes et d'un bruit blanc stationnaire réel $B(t)$, de densité spectrale de puissance $s_B(f) = \frac{N_0}{2} \forall f$:

$$X(t) = s(t) + B(t)$$

Le filtre étant linéaire, la sortie du filtre s'écrit :

$$Y(t) = Y_s(t) + Y_B(t)$$

où $Y_s(t)$ représente la réponse du filtre à l'entrée $s(t)$ et $Y_B(t)$ représente la réponse du filtre à l'entrée $B(t)$.

1. Donner l'expression du rapport Signal sur Bruit à la sortie du filtre :

$$RSB = \frac{P_{Y_s}}{P_{Y_B}}$$

   où P_{Y_s} représente la puissance du signal $Y_s(t)$ et P_{Y_B} la puissance du signal $Y_B(t)$.

2. Montrer qu'il est maximal pour $\theta = 2\pi f_0$.

Remarque : Le rapport Signal sur Bruit en décibels (dB) est défini par : $RSB = 10\log_{10}\left(\frac{P_{Y_s}}{P_{YB}}\right)$ (dB). On le note aussi SNR (Signal to Noise Ratio).

Exercice 5 : Filtre moyenneur à mémoire finie

Le filtre moyenneur à mémoire finie est un système défini par la relation entrée-sortie suivante :

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)du,$$

où $x(t)$ représente l'entrée du filtre et $y(t)$ la sortie.

1. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre linéaire correspondant.
2. Ce filtre est-il réalisable ?

Exercice 6 : Annulateur de bruit

Soit $X(t)$ un bruit blanc stationnaire, réel, de densité spectrale de puissance $S_X(f) = \frac{N_0}{2}\ \forall f$, attaquant le système décrit par la figure 1, où $H_1(f)$ est un filtre passe-bande défini par :

$$\begin{aligned} H_1(f) &= 1 \quad \textit{pour} \quad |f| \in \left[f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}\right] \\ &= 0 \quad \textit{ailleurs} \end{aligned}$$

et $H_2(f)$ une ligne à retard T réglable définie par :

$$H_2(f) = e^{-i2\pi Tf}$$

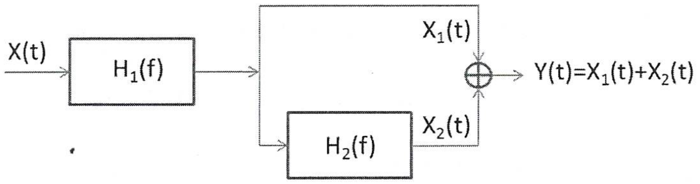


FIGURE 1 – Annulateur de bruit

1. Calculer la puissance du signal de sortie $Y(t)$ en fonction de la puissance et de l'autocorrélation du signal $X_1(t)$, respectivement notées P_{X_1} et $R_{X_1}(\tau)$.
2. Calculer P_{X_1} en fonction de N_0 et de Δf.
3. Calculer R_{X_1} en fonction de N_0 et de Δf.
4. En déduire l'expression de la puissance de $Y(t)$ en fonction de N_0, Δf et T. Tracer les variations de cette puissance lorsque T varie.
5. Que se passe-t-il lorsque :
   - $T \approx \frac{1}{2f_0}$?
   - $T \gg \frac{1}{\Delta f}$?

Exercice 7 : Filtrage non linéaire de type exponentiel

On considère un filtre non linéaire de type exponentiel. Si $X(t)$ est l'entrée du filtre, la sortie $Y(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \exp(X(t))$$

L'entrée du filtre est un bruit gaussien, réel, centré, de variance σ^2.

1. Calculez la moyenne du signal en sortie du filtre.
2. Calculez la variance du signal en sortie du filtre.
3. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal en sortie du filtre en fonction de celle du signal à l'entrée.

Remarque : On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une loi gaussienne $N\left(m, \sigma^2\right)$ est :

$$m(t) = E\left[e^{X(t)}\right] = \exp\left(mt + \frac{\sigma^2}{2}t^2\right)$$

Exercice 8 : Filtrage non linéaire de type cubique

On considère le filtre non linéaire sans mémoire d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$ défini par :

$$Y(t) = X^3(t)$$

On suppose que $X(t)$ est un processus aléatoire, réel, Gaussien, stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$.

1. En utilisant le théorème de Price, donner une équation différentielle liant la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$, notée $R_Y(\tau)$, et $R_X(\tau)$. En déduire une expression de $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près.
2. On rappelle le résultat suivant, valable pour une variable aléatoire Z gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 :

   $$E\left[Z^{2n}\right] = (2n)!!\sigma^{2n} \; avec \; (2n)!! = (2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 3 \times 1$$

   En déduire le constante additive intervenant dans la relation entre $R_Y(\tau)$ et $R_X(\tau)$.

Exercice 9 : Echantillonneur moyenneur

L'échantillonneur moyenneur est une méthode pratique d'échantillonnage qui consiste à calculer, toutes les T secondes (période d'échantillonnage), la valeur moyenne du signal pendant un intervalle de temps θ ($\theta << T$) et à affecter cette valeur moyenne à l'échantillon discrétisé :

$$\begin{aligned} y(kT) &= \frac{1}{\theta}\int_{kT-\theta}^{kT} x(t)dt \\ x_{ech}(t) &= \sum_k y(kT)\,\delta(t-kT) \end{aligned}$$

1. Démontrer que le signal échantillonné $x_{ech}(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$x_{ech}(t) = \frac{1}{\theta}\left[\Pi_\theta(t) * x\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right] . \text{Ш}_T(t)$$

   où $\Pi_\theta(t)$ et $\text{Ш}_T(t)$ représentent respectivement la fenêtre rectangulaire de largeur θ et le peigne de Dirac de période T.
2. En déduire la transformée de Fourier correspondante $X_{ech}(f)$.
3. En considérant un signal à support spectral borné $2\Delta f$ et en prenant en compte que la fonction $sinc(\pi\theta f)$ peut être supposé constante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$

$$sinc(\pi\theta f) = \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} \approx 1 \text{ pour } f \in \left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$$

   (a) quelle(s) condition(s) doit vérifier θ pour que le signal $x(t)$ puisse être restitué par filtrage de $x_{ech}(t)$?
   (b) Dans ces conditions peut-on échantillonner à la fréquence de Shannon ?

Exercice 10 : Echantillonnage d'un signal passe-bande

On considère le signal $x(t) = x^+(t) + x^-(t)$, avec $x^+(t) = B\frac{sin(\pi Bt)}{\pi Bt}e^{j2\pi f_0 t}$ et $x^-(t) = B\frac{sin(\pi Bt)}{\pi Bt}e^{-j2\pi f_0 t}$, $f_0 = 8kHz$ et $B = 2kHz$.

1. Déterminer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ et la représenter graphiquement.
2. Comment s'écrit la condition de Shannon pour le signal $x(t)$?
3. On échantillonne le signal $x(t)$ à la fréquence $F_e = 6kHz$.
   (a) Représenter graphiquement la transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t)$ dans la bande $[-9kHz, 9kHz]$.
   (b) On désire restituer le signal $x(t)$ à partir de $x_e(t)$ par un filtrage de réponse en fréquence $H(f)$.
      - 1^{ier} cas : $H(f) = \Pi_F(f)$ avec $F = 6kHz$. Quel sera le signal restitué par ce filtre ?
      - 2^{me} cas : $H(f) = \Pi_B(f + f_0) + \Pi_B(f - f_0)$ avec $f_0 = 8kHz$ et $B = 2kHz$. Quel sera le signal restitué par ce filtre ?
      - Conclusion ?

Rappels

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) . y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) . Y(f)$
$x(at + b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{i2\pi\frac{b}{a}f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f - nf_0)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T(t)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}Ш_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\|t\|}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}=T\sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi T f)$
$B\sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$

!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T(t)*\Pi_T(t)=T\,\Lambda_T(t)$$

TD 1.1
T.S.

Traitement du signal

Exercice 1 : Etude du secteur.

1/ $X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

$X(t)$ est un signal périodique à puissance finie, déterministe.

$$R_x(\tau) = f_0 \int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt = f_0 \int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} A_0 \cos(2\pi f_0 t) \times A_0 \cos(2\pi f_0 (t-\tau))\, dt$$

$$= A_0^2 \times f_0 \int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} \cos(2\pi f_0 t) \left(\cos(2\pi f_0 t) \cos 2\pi f_0 \tau + \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 \tau) \right) dt$$

$$= A_0^2 \times f_0 \times \cos(2\pi f_0 \tau) \int_{[T_0]} \cos^2(2\pi f_0 t)\, dt + A_0^2 \times f_0 \sin(2\pi f_0 \tau) \int_{T_0} \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$= A_0^2 \times f_0 \cos(2\pi f_0 \tau) \int \frac{\cos(4\pi f_0 t) + 1}{2}\, dt + A_0^2 \times f_0 \sin(2\pi f_0 \tau) \int_{T_0} \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{2}\, dt$$

$$= \frac{A_0^2 \times f_0}{2} \left(\cos(2\pi f_0 \tau) \left[\frac{\sin(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0} + t \right]_0^{T_0} + \sin(2\pi f_0 \tau) \underbrace{\left[-\frac{\cos(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0} \right]_0^{T_0}}_{\text{Intégration sur 2 périodes}} \right)$$

$$= \frac{A_0^2 \times f_0}{2} \left(\frac{1}{f_0} \times \cos 2\pi f_0 \tau \right)$$

$$= \frac{A_0^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau).$$

Autocorrélation : similarité du signal avec tous ses translatés.

$$P_x = f_0 \int_{[T_0]} |x(t)|^2\, dt = A_0^2 \times f_0 \int_{[T_0]} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$$

$$= \frac{A_0^2 \times f_0}{2} \left(\frac{1}{f_0} + \underbrace{\int_0^{T_0} \cos(4\pi f_0 t)\, dt}_{= 0 \ \int \text{sur 2 périodes}} \right)$$

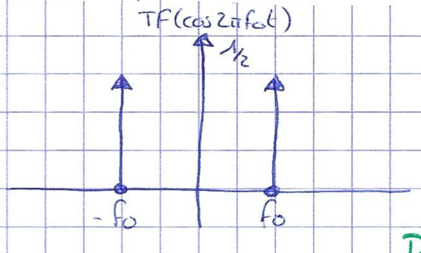
$$= \frac{A_0^2}{2}.$$

On a bien $P_x = R_x(0)$.

$$S_x(f) = TF(R_x(\tau)).$$

$$= \int \frac{A_0^2}{2} \cos(2\pi f_0 t)\, e^{-2i\pi f t}\, dt$$

$$= \frac{A_0^2}{2} \int \frac{e^{2i\pi(f_0 - f)t} + e^{-2i\pi(f + f_0)t}}{2} = \frac{A_0^2}{4} \left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right]$$



$$\int_{\mathbb{R}} S_x(f)\, df = \frac{A_0^2}{4} [1 + 1] = \frac{A_0^2}{2} = P_x.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Densité spectrale de puissance}}}{S_x(f)}\, df = P_x \qquad R_x(\tau) \simeq x(t) * \underbrace{x^*(-t)}_{\text{signal adapté}}$$

2/ C'est un signal aléatoire stationnaire

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Theta) \quad \text{avec } \Theta \hookrightarrow U_{[0,2\pi]}$$

$$m_x(t) = E(X(t)) = E(A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Theta))$$

Si moyenne dépend de t, le signal n'est pas stationnaire.

$$= A_0\left(\cos(2\pi f_0 t) E(\cos\Theta) - \sin(2\pi f_0 t) E(\sin\Theta)\right)$$

$$= A_0(0 - 0) = 0 \rightarrow \text{stationnaire}$$

$$m_x(t) = E_\Theta(X(t)) = A_0 E_\Theta(\cos(2\pi f_0 t + \Theta))$$

$$= A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t + \Theta) f_\Theta(\Theta) d\Theta \quad \text{avec } f_\Theta(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi)}(\Theta)$$

$$= \frac{A_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \Theta) d\Theta = 0.$$

$$R_x(t,\tau) = E_\Theta(\cancel{x}(t) X^*(t-\tau))$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{A^2}{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \Theta) \cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \Theta) d\Theta$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\underbrace{2\pi f_0 t + \Theta}_{a}) \cos(\underbrace{2\pi f_0 (t-\tau) + \Theta}_{b}) d\Theta$$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$S_x(f) = TF(R_x(\tau)) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

$$P_x = R_x(0) = \frac{A^2}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = E(|x(t)|^2)$$

3/ $X(t) = A_0 \cos(2\pi f t + \Theta)$. $\Theta \hookrightarrow U_{[0,2\pi)}$

$f \hookrightarrow U_{[f_0-\Delta f, f_0+\Delta f]}$

$$m_x(t) = E_{\Theta,f}(X(t)) = E_f(E_\Theta(X(t) \mid f))$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \underbrace{f_{\Theta,f}(f,\Theta)}_{f_\Theta(\Theta) \times f_f(f)} d\Theta df = \int_{-\infty}^{+\infty} f_f(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) f_\Theta(\Theta) d\Theta df$$

$$= E_f(0) = 0.$$

$$R_x(\tau) = E_{\Theta,f}(X(t) X^*(t-\tau))$$

$$= E_f(E_\Theta(X(t) X^*(t-\tau) \mid f)) = E_f\left(\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f \tau)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f \tau) \frac{1}{2\Delta f} \mathbb{1}_{[f_0-\Delta f, f_0+\Delta f]} df$$

$$= \frac{A^2}{4\Delta f} \int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \cos(2\pi f \tau) df = \frac{A^2}{4\Delta f}\left[\frac{\sin(2\pi f \tau)}{2\pi\tau}\right]_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f}$$

$$= \frac{A^2}{8\Delta f \pi \tau}\left[\sin(2\pi(f_0+\Delta f)\tau) - \sin(2\pi(f_0-\Delta f)\tau)\right]$$

TD 1.2.
T.S.

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{8\pi\tau\Delta f} \times 2\sin(2\pi\Delta f\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

$$= \frac{A^2}{2}\,\mathrm{sinc}(2\pi\Delta f\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

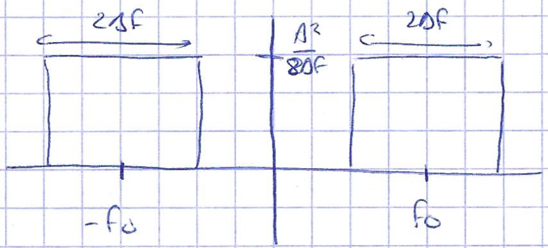
$$S_x(f) = TF(R_x(t)) = \frac{A^2}{2} TF(\mathrm{sinc}(2\pi\Delta f\tau) \times \cos(2\pi f_0\tau))$$

$$= \frac{A^2}{2} TF(\mathrm{sinc}(2\pi\Delta f\tau)) * TF(\cos 2\pi f_0\tau)$$

$$= \frac{A^2}{2}\frac{1}{2\Delta f}\Pi_{2\Delta f}(f) * \left(\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\right)$$

$$S_x(f) = \frac{A^2}{8\Delta f}\left(\Pi_{2\Delta f}(f) * \delta(f-f_0) + \Pi_{2\Delta f}(f) * \delta(f+f_0)\right)$$

$$= \frac{A^2}{8\Delta f}\left(\Pi_{2\Delta f}(f-f_0) + \Pi_{2\Delta f}(f+f_0)\right)$$



Exercice 2 : Modulation d'amplitude $F \ll f_0$

$X(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ $\quad \theta \hookrightarrow U_{[0,2\pi]}$ indep de $A(t)$.

1/ $m_x(t) = \mathbb{E}(A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta))$

$= \mathbb{E}_A(A(t))\,\mathbb{E}_\theta(\cos(2\pi f_0 t + \theta))$ $\qquad$ X est centrée.

$= 0 \times \ldots$ $\quad$ (car $A(t)$ stationnaire) $\quad$ car $\mathbb{E}_\theta(\cos(2\pi f_0 t+\theta)) = 0$

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}(X(t)X^*(t-\tau))$$

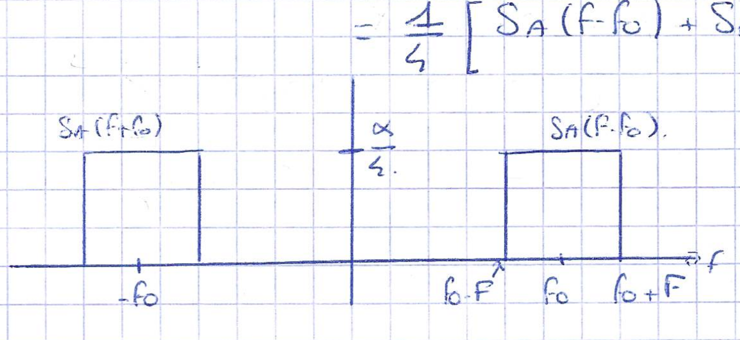
$$= \mathbb{E}_A(A(t)A^*(t-\tau))\,\mathbb{E}_\theta(\cos(2\pi f_0 t+\theta)\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\theta))$$

$= R_A(\tau) \times \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$ $\rightarrow$ ne dépend pas du temps
stationnaire au 2° ordre

$$S_x(f) = TF(R_x(\tau)) = \frac{1}{2}S_A(f) * TF(\cos(2\pi f_0\tau))$$

$$= \frac{1}{2}S_A(f) * \left[\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[S_A(f-f_0) + S_A(f+f_0)\right]$$



2/ $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta) = A(t)\cos^2(2\pi f_0 t + \theta)$

$= A(t)\left(\frac{1+\cos(4\pi f_0 + 2\theta)}{2}\right) = \frac{A(t)}{2} + \frac{1}{2}A(t)\cos(4\pi f_0 t + 2\theta)$.

$m_y(t) = \frac{1}{2}\left(E_A(A(t)) + E_A(A(t))\,E_\theta(\cos(4\pi f_0 t + 2\theta))\right)$

$= \frac{E_A(A(t))}{2}\left(1 + E_\theta(\cos(4\pi f_0 t + 2\theta))\right)$

$= m_A \times \frac{1}{2}\left(1 + \underbrace{E_\theta(\cos(4\pi f_0 t + 2\theta))}_{=0}\right) = \frac{m_A}{2}$ → stationnaire

$R_y(\tau) = E(y(t)\,y^*(t-\tau))$

$= \underbrace{E(A(t)A^*(t-\tau))}_{R_A(\tau)}\,E_\theta\left(\cos^2(2\pi f_0 t + \theta)\cos^2(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)\right)$

$= R_A(\tau)\,E_\theta\left(\left(\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\right)^2\right)$ ⚠ Pas tout le temps vrai. Il vaut mieux linéariser les 2 cos et dvp.

$= \frac{R_A(\tau)}{4}\,E_\theta\left(\frac{1+\cos(4\pi f_0 \tau)}{2}\right)$

$= \frac{R_A(\tau)}{8}\left(1 + E_\theta(\cos(4\pi f_0 \tau))\right)$.

$= \frac{R_A(\tau)}{4} + \frac{R_A(\tau)}{8}\cos(4\pi f_0 \tau)$. → $Y(t)$ stationnaire.

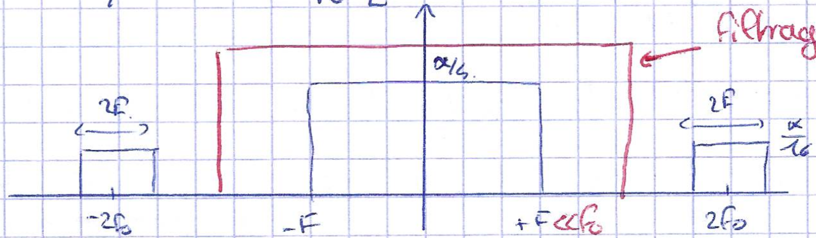
$S_y(f) = TF[R_y(\tau)]$.

$= TF\left[\frac{1}{4}R_A(\tau)\left(1 + \frac{\cos(4\pi f_0 \tau)}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{4}S_A(f) * \left(\delta(f) + \frac{1}{4}\left[\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0)\right]\right)$.

$= \frac{1}{4}S_A(f) + \frac{1}{16}\left[S_A(f-2f_0) + S_A(f+2f_0)\right]$

filtrage passe-bas parfait.



3/ $X(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t)$ $A(t)$ est à énergie finie

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2\,dt = \int_{\mathbb{R}} |A(t)|^2\cos^2(2\pi f_0 t)\,dt$

$\leq \int_{\mathbb{R}} |A(t)|^2\,dt = E_A$

Donc $E_x \leq E_A < +\infty \Rightarrow X(t)$ est à énergie finie.

TD 13
T.S.

$$X(f) = TF(x(t)) = A(f) * \left(\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[A(f-f_0) + A(f+f_0)\right]$$

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{4}\left[A(f-f_0) + A(f+f_0)\right]\left[A^*(f-f_0) + A^*(f+f_0)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[|A(f-f_0)|^2 + |A(f+f_0)|^2 + 0 + 0\right]$$

supports disjoints.

$$= \frac{1}{4}\left[S_A(f-f_0) + S_A(f+f_0)\right]$$

avec $S_A(f) = |A(f)|^2$

- $y(t) = A(t)\cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{A(t)}{2} + \frac{A(t)}{2}\cos(4\pi f_0 t)$

$E_y < +\infty \rightarrow$ signal à énergie finie

$$Y(f) = TF(y(t)) = \frac{A(f)}{2} + \frac{1}{4}A(f) * \left[\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0)\right]$$
$$= \frac{A(f)}{2} + \frac{1}{4}\left[A(f-2f_0) + A(f+2f_0)\right]$$

$$S_y(f) = |Y(f)|^2$$
$$= \left(\frac{A(f)}{2} + \frac{1}{4}\left[A(f-2f_0) + A(f+2f_0)\right]\right) \times \left[\frac{A^*(f)}{2} + \frac{1}{4}\left(A^*(f-2f_0) + A^*(f+2f_0)\right)\right]$$
$$= \frac{|A(f)|^2}{4} + \frac{1}{16}\left[|A^*(f-2f_0)|^2 + |A(f+2f_0)|^2\right]$$

$\Rightarrow$ Car les supports de $A(f)$, $A(f-2f_0)$, $A(f+2f_0)$ sont disjoints.

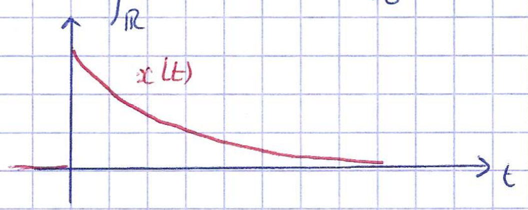
$$= \frac{1}{4}S_A(f) + \frac{1}{16}\left[S_A(f-2f_0) + S_A(f+2f_0)\right]$$

$\Rightarrow$ Strictement identique au cas aléatoire

Exercice 3 : Canal de propagation multitrajets.

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\lambda t} & t \geq 0 \quad \lambda > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$ Processus causal.

1/a) $E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\lambda t} dt = \frac{-A^2}{2\lambda}\left[e^{-2\lambda t}\right]_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2\lambda} < +\infty$



$$\underset{\tau \geq 0}{R_x(\tau)} = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt = \int_{\tau}^{+\infty} A e^{-\lambda t} A e^{-\lambda(t-\tau)} dt$$

Fonction d'autocorrelation : sym. hermitienne ie. $R_x(\tau) = R_x(-\tau^*)$

$x(t) = A e^{-\lambda t} \sqcap_{[0,+\infty[}(t)$

$$= \frac{-A^2}{2\lambda} e^{\lambda \tau} \left[e^{-2\lambda t} \right]_{\tau}^{+\infty} = \frac{A^2}{2\lambda} e^{-\lambda \tau} = \underset{\tau \geq 0}{R_x(\tau)}$$

$\Rightarrow$ Comme $x(t)$ est réel, $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ pour $\tau < 0$.

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

On retrouve bien $(R_x(0) = E_x)$

b) $S_x(f) = TF(R_x(\tau)) = \dfrac{A^2}{2\lambda} \times \dfrac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} = \dfrac{A^2}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$. (d'ap table)

$$= |X(f)|^2$$

avec $X(f) = TF(x(t)) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt$

$$= \int_0^{+\infty} A e^{-\lambda t} e^{-i2\pi f t} dt = \frac{A}{-(\lambda + i2\pi f)} \left[e^{-(\lambda + j2\pi f)t} \right]_0^{+\infty}$$

$$X(f) = \frac{A}{\lambda + 2i\pi f}$$

$$R_x(\tau) = TF^{-1}(S_x(f)) = \frac{A^2}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|}$$

2/ $y(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{M} a_k\, x(t - \tau_k)$.

a) $y(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\, x(t) * \delta(t - \tau_k)$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{M} a_k\, \delta(t - \tau_k) \right)}_{h(t)} * x(t)$$

$h(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{M} a_k\, \delta(t - \tau_k)$ $\Rightarrow$ $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

h(t) est la réponse impulsionnelle de ce filtre

↳ Quand l'entrée est un Dirac.

réponse indicielle

↳ Quand l'entrée est un échelon.

$$|H(f)| = TF(h(t)) = \sum_{k=1}^{M} a_k\, e^{-j2\pi f \tau_k}$$

$$\Rightarrow |Y(f)| = H(f)\, X(f)$$

TD 1.4.
T.S.

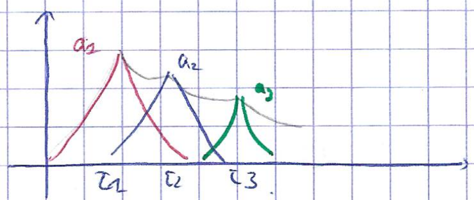
b) $R_{yx}(t) = \int_{\mathbb{R}} y(t)\, x^*(t-\tau)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \sum_k a_k x(t-\tau_k) \times x^*(t-\tau) dt$

$= \sum_k a_k \int_{\mathbb{R}} x(t-\tau_k)\, x^*(t-\tau)\, dt$

$= \sum_k a_k R_x(\tau-\tau_k)$.

$= h \otimes R_x(\tau)$ → formule de filtrage de Wiener-Lee.

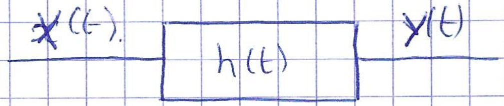
c) $R_{yx}(\tau) = \sum_{k=1}^{M} a_k R_x(\tau-\tau_k)$ $\quad R_x = \frac{A^2}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|}$



λ : facteur d'atténuation
τ_k suffisament espacé : estimation des amplitudes.

Fonction de λ, on pourra identifier les a_k si les τ_k sont suffisement espacés.

Exercice 4 : Calcul d'un Rapport Signal sur Bruit (RSB) en sortie d'un filtre linéaire.



$X(t) = A\sin(2\pi f_0 t) + B(t)$ $\quad h(t)$ est déf par $H(f) = \frac{1}{\theta + j2\pi f}$

$Y(t) = h \otimes X(t) = \underbrace{h \otimes S(t)}_{Y_S(t)} + \underbrace{h \otimes B(t)}_{Y_B(t)}$

$RSB = \frac{P_{Y_S}}{P_{Y_B}}$

1/ $P_{Y_S} = \int_{\mathbb{R}} S_{Y_S}(f)\, df$ $\quad S_{Y_S}(f) = |H(f)|^2 S_S(f)$

$P_{Y_B} = \int_{\mathbb{R}} S_{Y_B}(f)\, df = \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 S_B(f)\, df$.

$S_S(f) = \frac{A^2}{4}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$.

$S_{Y_S}(f) = \frac{A^2}{4} |H(f)|^2 \left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$.

$= \frac{A^2}{4}\left(|H(f_0)|^2 \delta(f-f_0) + |H(f_0)|^2 \delta(f+f_0)\right)$

comme $|H(f)|$ est paire,

$S_{Y_S}(f) = \frac{A^2}{4} |H(f_0)|^2 \left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$. Cela correspond, ds le domaine temporel à multiplier la f° par le gain du filtre

$$P_{Ys} = \int_{\mathbb{R}} S_{Ys}\,df = \frac{A^2}{4}|H(f_0)|^2 \times 2 = \boxed{\frac{A^2}{2}|H(f_0)|^2}$$

$$P_{YB} = \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 S_B(f)\,df$$

Or $S_B(f) = \frac{N_0}{2} \quad \forall f.$

$$P_{YB} = \frac{N_0}{2}\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\theta^2 + 4\pi^2 f^2}\,df$$

$$= \frac{N_0}{2\theta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2\left(\frac{f}{\theta}\right)^2}\,df$$

$u = 2\pi \frac{f}{\theta}$
$$= \frac{N_0}{2\theta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \times \frac{\theta}{2\pi}\,du$$

$$P_{YB} = \frac{N_0}{4\pi\theta}\left[\arctan u\right]_{-\infty}^{+\infty} = \boxed{\frac{N_0}{4\theta}}$$

$$\text{Ainsi } RSB = \frac{P_{Ys}}{P_{YB}} = \frac{\frac{A^2}{2}|H(f_0)|^2}{N_0/4\theta} = \frac{2\theta A^2}{N_0} \times \frac{1}{\theta^2 + 4\pi^2 f_0^2}$$

2/ On cherche à maximiser le RSB.

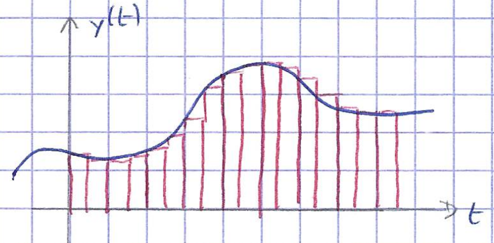
$$\frac{\partial RSB}{\partial \theta} = \frac{2A^2}{N_0} \times \frac{1}{\theta^2 + 4\pi^2 f_0^2} + \frac{2A^2\theta}{N_0}\frac{(-2\theta)}{(\theta^2 + 4\pi^2 f_0^2)^2}$$

$$= \frac{2A^2}{N_0}\left(\frac{4\pi^2 f_0^2 - \theta^2}{\theta^2 + 4\pi^2 f_0^2}\right)$$

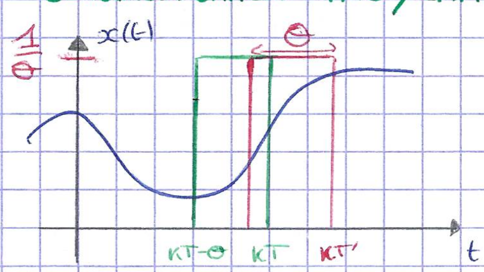
$$\frac{\partial RSB}{\partial \theta} = 0 \iff \theta^2 = 4\pi^2 f_0^2 \quad \underline{\theta = 2\pi f_0}$$

Exercice 9 : Echantillonneur moyenneur

Echantillonneur bloqueur.



Echantillonneur moyenneur

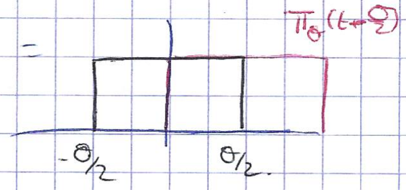


$$y(KT) = \frac{1}{\theta}\int_{KT-\theta}^{KT} x(t)\,dt$$

TD 1.5
T.S.

$$y(kT) = \frac{1}{\theta}\int_{kT-\theta}^{kT} x(t)\,dt \qquad x_{ech} = \sum_k y(kT)\,\delta(t-kT).$$

1/ Considérons la fenêtre $\Pi_\theta(t) =$



$$y(kT) = \frac{1}{\theta}\int_{kT-\theta}^{kT} x(u)\,du = \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}} x(u)\,\Pi_\theta\left(u-(kT-\tfrac{\theta}{2})\right)du.$$

$$y(t) = \frac{1}{\theta}\int_{t-\theta}^{t} x(u)\,du = \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}} x(u)\,\Pi_\theta\left(u-(t-\tfrac{\theta}{2})\right)du.$$

$$x_{ech}(t) = y(t) \times ш_T(t).$$

$$y(t) = x \otimes h(t-\tfrac{\theta}{2}) = \frac{1}{\theta}\,\Pi_\theta(t) * x(t-\tfrac{\theta}{2})$$
$$= \frac{1}{\theta}\,x(t) * \Pi_\theta(t-\tfrac{\theta}{2}).$$

$$x_{ech}(t) = y(t)\cdot ш_T(t) = y(t)\left(\sum_k \delta(t-kT)\right)$$
$$= \sum_k y(t)\,\delta(t-kT) = \sum_k y(kT)\,\delta(t-kT).$$

2/ $x_{ech}(t) = \frac{1}{\theta}\left[\Pi_\theta(t) * x(t-\tfrac{\theta}{2})\right]\cdot ш_T(t).$

TF

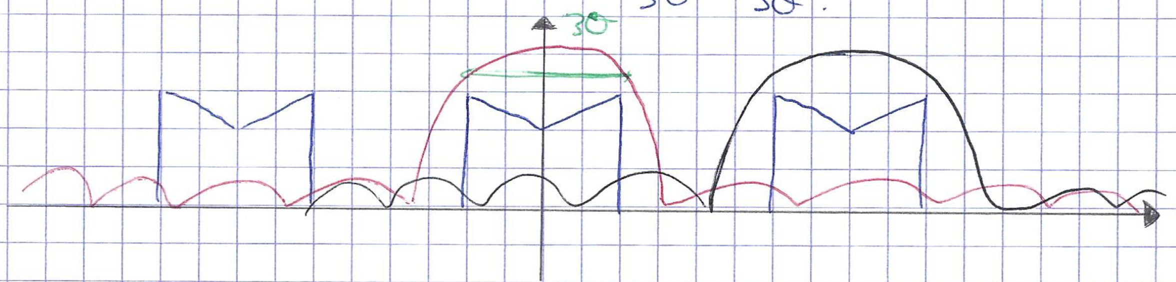
$$X_{ech}(f) = \frac{1}{\theta}\left[TF(\Pi_\theta(t))\,TF(x(t-\tfrac{\theta}{2}))\right] \otimes \frac{1}{T}\,ш_{1/T}(f).$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\theta}\left[\theta\,\mathrm{sinc}(\pi f\theta)\,e^{-j2\pi f\frac{\theta}{2}}\cdot X(f)\right]}_{Y(f)} \otimes \frac{1}{T}\,ш_{1/T}(f).$$

$$= \frac{1}{T}\sum_k Y\left(f-\frac{k}{T}\right) \Rightarrow$$ periodisation de $Y(f)$ version fenêtrée de $X(f)$.

3/ $X(t)$ est à support borné. $2\Delta f$.

Si $\mathrm{sinc}(\pi\theta f) \simeq$ cst sur $\left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$. $\mathrm{sinc}(\pi\theta f) \simeq 1$ sur $\left[\frac{-1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$



a
b => Pour une bonne reconstruction, (signal $x(t)$ peu deformé)

$$\Delta f < \frac{1}{3\theta} \quad \text{ie} \quad \theta < \frac{1}{3\Delta f}$$

=> alors assure $|Y(f)| \simeq |X(f)|$ et il faut aussi respecter Shannon.

$$\Delta f < \frac{fe}{2} = \frac{1}{2T}$$

=> Si on connait Δf, on peut dimensionner T et θ

=> θ doit être assez petit pour que ce soit réalisable