EDP TD 3

TD 3 – Equation de la chaleur

Définition du problème

Soit $u : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,T[, \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t \in]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in]0,1[. \end{array}\right. \tag{1}$$

avec f continue sur $[0,1] \times [0,T]$.

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0,1] \times [0,T]$, de pas d'espace h et de pas de temps Δt, tous les deux supposés constants. Soit $(x_i)_{i=0:N+1}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, et $(t_n)_{n=0:M+1}$, avec $t_0 = 0$ et $t_{M+1} = T$, les points de discrétisation du maillage.

▷ **Exercice 1.** On se propose d'étudier les propriétés de consistance et de stabilité du schéma "saute-mouton", pour la norme $\|.\|_h$ sur $\mathbb{R}^N$ (espace). Celui-ci s'écrit :

$$\forall n \geq 1, \forall i = 1 : M, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n). \tag{2}$$

pour repercuter U_0 sur U_1 de man. fiable quoi. ←

1.1. On suppose que le vecteur $(u_i^1)_{i=1:N}$ a été obtenus avec un schéma consistant d'ordre 2 en temps et 2 en espace pour la norme $\|.\|_h$. Montrer que le schéma saute-mouton est consistant d'ordre 2 en temps et 2 en espace pour la norme $\|.\|_h$.

1.2. Etude de stabilité du schéma pour la norme $\|.\|_h$.

a) Montrer que ce schéma s'écrit matriciellement :

$$\forall n = 1 : N+1, \quad Z_h^{n+1} = M_h Z_h^n + 2\Delta t C^n \tag{3}$$

en précisant Z_h^n, M_h, C^n.

b) Montrer que $\rho(M_h) > 1$. Conclure quant à la stabilité du schéma pour la norme $\|.\|_h$.

▷ **Exercice 2.** On se propose d'étudier les propriétés de consistance et de stabilité du schéma "implicite", pour la norme infinie sur $\mathbb{R}^N$ (espace). Celui-ci s'écrit :

$$\forall n \geq 1, \forall i = 1 : N, \quad \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n). \tag{4}$$

2.1. Ce schéma s'écrit matriciellement :

$$\forall n = 1 : N+1, \quad B_h U_h^n = U_h^{n-1} + \Delta t F^n \tag{5}$$

Rappeler ce que valent U_h^n, B_h, F^n et U_h^0. On notera $c = \frac{\Delta t}{h^2}$.

2.2. Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace pour la norme infinie.

2.3. Etude de stabilité du schéma pour la norme infinie.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Montrer que $\forall i = 1 : N, [B_h x]_i \geq 0 \Rightarrow x_i \geq 0$.
En déduire que $[B_h^{-1}]_{i,j} \geq 0, \quad \forall i = 1 : N, \forall j = 1 : N$.

b) Montrer que $\|B_h^{-1}\|_\infty \leq 1$.

c) En déduire que le schéma est inconditionnellement stable pour la norme infinie.

2.4. Conclure quant à la convergence du schéma pour la norme infinie.

u_i^n

TD 3.1

EDP

Equation de la chaleur

Exercice 1 :

On note U_i^n la valeur approchée de $U(t_n, x_i)$ avec $t_n = n\Delta t$ $n \in [\![0, M+1]\!]$
horizon temporel : $T = (M+1)\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{M+1}$

et $x_i = i \times h$ $i \in [\![0, N+1]\!]$

Conditions initiales convexes : $U_i^0 = U_0(x_i)$
et conditions aux limites : $U_0^n = U_{N+1}^n = 0$

1/ On a $\left| \frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_i) \right| \leq \frac{\Delta t^2}{12} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial^3 t}(\tau_n, x_i) \right|$
$\tau_n \in]t_{n-1}, t_{n+1}[$

On a cf TD1.

$$\left| \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t_n, x_i) \right| \leq \frac{h^2}{24} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_n, \xi_i) \right|$$
$\xi_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$

Rappel : $\|z\|_h = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} h z_i^2} = \sqrt{h}\, \|z\|_2$ → $\sqrt{h}$ compense les facteurs d'échelle liés à la dimension de z qui croît avec $h = \frac{1}{N+1}$

On a dans ce cas : $\|z\|_h \leq \sqrt{h}\sqrt{N}\, \|z\|_\infty$
$\leq \sqrt{\frac{N}{N+1}}\, \|z\|_\infty \leq \|z\|_\infty$

Pour la consistance en norme h, on peut donc regarder la consistance en norme ∞ qui est majorée par : $\frac{\Delta t^2}{12} \sup_{\substack{x \in [0,1] \\ t \in]0,T]}} \left| \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(t,x) \right| + \frac{h^2}{24} \sup_{\substack{x \in [0,1] \\ t \in]0,T]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t,x) \right|$.

donc d'ordre 2 en temps et en espace

2/ Si on note $U^n \in \mathbb{R}^N$ avec $\{U_i^n\} \simeq \{u(t_n, x_i)\}$
après discrétisation et élimination des conditions aux limites.

$n \geq 1$: $\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{h^2} T_h U^n = F^n$ avec $F^n = \begin{pmatrix} f(t_n, x_1) \\ \vdots \\ f(t_n, x_N) \end{pmatrix}$

$$U^{n+1} - U^{n-1} + \frac{2\Delta t}{h^2} T_h U^n = 2\Delta t F^n$$

avec $T_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}_{N \times N}$

Notons $Z^n = \begin{pmatrix} U^n \\ U^{n-1} \end{pmatrix}$

On peut écrire par blocs :

$$\begin{pmatrix} U^{n+1} \\ U^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\Delta t}{h^2} T_h & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^n \\ U^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Delta t F^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

càd que $Z^{n+1} = M_h Z^n + 2\Delta t C^n$, $n \geq 1$

avec $M_h = \begin{pmatrix} -\frac{2\Delta t}{h^2} T_h & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ et $C^n = \begin{pmatrix} F^n \\ 0 \end{pmatrix}$.

2/ M_h est symétrique et on dira que le schéma numérique est stable si $\rho(M_h) < 1$, instable sinon.

T_h est sym def pos. (TD2)

Etudions le spectre de M.

$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $\vec{vp}$ associé à la v.p μ. tq $M_h Z = \mu Z$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2\Delta t}{h^2} T_h X + \cancel{X_1} = \mu X \\ X = \mu Y \end{cases}$$

si $\mu \neq 0 \Rightarrow -\frac{2\mu\Delta t}{h^2} T_h X + X = \mu^2 X$ $\mu \neq 0$ sinon $Z = 0$ or pas possible car $\in \vec{vp}$

ie $T_h X = \underbrace{\frac{h^2(1-\mu^2)}{2\mu\Delta t}}_{\lambda} X$ $\lambda = \frac{h^2(1-\mu^2)}{2\mu\Delta t} > 0$. vp de T_h.

μ vérifie donc l'éq du second ordre :

$$\mu^2 + 2\frac{\Delta t}{h^2}\lambda\mu - 1 = 0. \quad \forall \lambda \text{ vp} > 0 \text{ de } T_h.$$

$\hookrightarrow$ 2 racines pour chaque λ.

$$\mu_1(\lambda) = -\frac{\Delta t}{h^2}\lambda - \sqrt{\frac{\Delta t^2}{h^4}\lambda^2 + 1}$$

$$\mu_2(\lambda) = -\frac{\Delta t}{h^2}\lambda + \sqrt{\frac{\Delta t^2}{h^4}\lambda^2 + 1}$$

Ceci nous donne donc $2N$ valeurs propres de M_h en fonction des N valeurs propres > 0 de T_h.

comme $\mu_1(\lambda) < -1$ ie $|\mu_1(\lambda)| > 1$ $\forall \lambda$.

ie $\rho(M_h) > 1$ Le schéma est dit instable.

$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|Ax\|_h}{\|x\|_h}$ stabilité en norme $h \Leftrightarrow$ norme 2 car $\|z\|_h = \sqrt{h}\|z\|_2$.

Sert à gommer les facteurs d'échelle liés à la dim.

$\|z\|_2 \leq \sqrt{n}\|z\|_\infty$ $\|z\|_h \leq \sqrt{\frac{n}{n+1}}\|z\|_\infty \leq \|z\|_\infty$.

TD 3.2
EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x_i,\tau_n) \quad \tau_n \in]t_{n-1},t_n[$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\varepsilon_i,t_n) \quad \varepsilon_i \in]x_{i-1},x_{i+1}[$$

ainsi $|\varepsilon_h^n(u)|_i = \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) - \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right|_i$

$$\leq \left(\frac{\Delta t}{2} + \frac{h^2}{12}\right) \sup_{(x,t)\in]0,1[\times]0,T[} \left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right| + \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)\right| \right)$$

D'où la consistance d'ordre 1 en temps et 2 en espace pour $\|.\|_\infty$

1/ Reprenons le schéma numérique:

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i,t_n) \quad \begin{matrix} n \in [\![1,+\infty]\!] \\ i \in [\![1,N]\!] \end{matrix}$$

Posons $U_h^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$

On peut donc écrire matriciellement:

$$B_h U_h^n = U_h^{n-1} + \Delta t F_h^n \quad \text{avec } B_h = \left(I + \frac{\Delta t}{h^2} T_h\right)$$

et $F_h^n = \left[f_i^n \right]_i$ $\quad T_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(en tenant compte des C.L. $U_0^n = U_{N+1}^n = 0$.

2/ cf plus haut.

3/a) On a $U_h^n = B_h^{-1} U_h^{n-1} + \Delta t B_h^{-1} F_h^n$ et la stabilité en $\|\,\|_\infty$ sera vérifiée si $\|B_h^{-1}\|_\infty \leq 1$.

$$\|B_h^{-1}\|_\infty = \sup_{x\neq 0} \frac{\|B_h^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{z\neq 0} \frac{\|z\|_\infty}{\|B_h z\|_\infty} \quad (\text{en posant } x = B_h z)$$

Pour $z \neq 0$ donné

Soit i_0 l'indice tq $|z_{i_0}| = \|z\|_\infty$

$$|B_h z|_{i_0} = \left| \left(1 + \frac{2\Delta t}{h^2}\right) z_{i_0} - \left(z_{i_0+1} + z_{i_0-1}\right)\frac{\Delta t}{h^2} \right|$$

Idem pour $i_0 = 1$ ou $i_0 = N$

$$\geq \left(1 + \frac{2\Delta t}{h^2}\right)|z_{i_0}| - \left(|z_{i_0+1}| + |z_{i_0-1}|\right)\frac{\Delta t}{h^2}$$

$$\geq 1 + \frac{2\Delta t}{h^2}|z_{i_0}| - \frac{2\Delta t}{h^2}|z_{i_0}|$$

$$\geq |z_{i_0}| = \|z\|_\infty$$ Ainsi $\|B_h z\|_\infty \geq \|z\|_\infty$

$$\Rightarrow \|B_h^{-1}\|_\infty \leq 1.$$

La stabilité est donc vérifiée.

5/ Thm de LAX pour conclure

Consistance en $\|.\|_\infty$ et Stabilité en $\|.\|_\infty$ $\Rightarrow$ Convergence.