I & A
2.1

Intégrales des fonctions mesurables

I/ Introduction

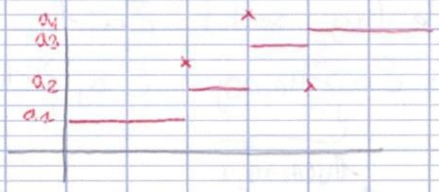
. On cherche à définir $\int f \, d\mu$ où f est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ et μ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ telle que l'intégrale dépende linéairement de f.

II/ Intégrale des fonctions mesurables positives

A - Cas des fonctions étagées positives $(\mathcal{F}_+^\circ)$

Définition : Soit f mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}^+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^+))$
f est dite étagée si
- f prend un nbre fini de valeur $\neq$.
- $f^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{E}$.

Remarque :
- Si f est étagée positive,
$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \mathbb{1}_{A_i}$ avec $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ (A_i disjoints 2 à 2).
où $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 si $x \notin A$.
en effet, soit $x \in E$, $\exists j$ tq $f(x) = a_j$ et $f(x) = \sum a_i \underbrace{\mathbb{1}_{A_i}(x)}_{\delta_{ij}}$
$= a_j$
- $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E$ et si $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$



- si f est étagée positive, f est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ en effet soit $A \in \mathcal{E}$ l'application
$\mathbb{1}_A \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \to 1 \text{ si } x \in A \\ \quad\; 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est mesurable car $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par $\{]a, b[\}$.
on regarde $f^{-1}(]a,b[) = \Big| A \in \mathcal{E}$ si $1 \in]a,b[$ et $0 \notin]a,b[$

$\Rightarrow f$ mesurable.

$\left| \begin{array}{l} E \setminus A \overset{\in \mathcal{E}}{} \text{ si } 0 \in]a,b[,\ 1 \notin]a,b[. \\ E \overset{\in \mathcal{E}}{} \text{ si } \{0,1\} \subset]a,b[\\ \emptyset \overset{\in \mathcal{E}}{} \text{ si } 0 \notin]a,b[\ \ 1 \notin]a,b[. \end{array} \right.$

Définition : f est étagée positive si f prend n valeurs distinctes ; alors $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$: $A_i \in f^{-1}(\{a_i\})$. $\forall i \in [\![1,n]\!]\ a_i \geq 0$
$(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ forment un recouvrement de E.

Définition : $\mathcal{F}_+^0$ l'ens des fonctions étagées positives.

Définition : $(E, \mathcal{E}, \mu)$
Si $f \in \mathcal{F}_+^0$, $\int f d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_k \mu(A_k)$

Propriétés : $(f,g) \in (\mathcal{F}_+^0)^2$
- si $\alpha > 0$ $\alpha f \in \mathcal{F}_+^0$ et $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$.
- $f+g \in \mathcal{F}_+^0$, $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
- si $f \leq g$; $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Démo :
- $\alpha > 0$, $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{f^{-1}(\{a_i\})}$
$\forall x \quad \alpha f(x) \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i \mathbb{1}_{(\alpha f^{-1}(\{a_i\}))}(x)$ donc
$\int \alpha f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i \mu(\underbrace{\alpha f^{-1}(\{\alpha a_i\})}_{f^{-1}(\{a_i\})}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i \mu(A_i)$
$= \alpha \int f d\mu$.

- cas de $f+g$ soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{i=2}^{s} b_i \mathbb{1}_{B_i}$
$f+g = \sum_i a_i \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}}_{\mathbb{1}_{\cup(A_i \cap B_j)}} + \sum_j b_j \sum_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$
$\mathbb{1}_{\cup(A_i \cap B_j)} \uparrow A_i \cap (\cup B_j)$ E.

$f+g = \sum_i \sum_j (a_i + b_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$
soit $\{c_1, \dots, c_r\}$ les valeurs distinctes prises par $f+g$.
$f+g = \sum c_\ell \sum_{\substack{a_i, b_j \\ a_i + b_j = c_\ell}} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} = \sum c_\ell \mathbb{1}_{\cup(A_i \cap B_j)}$ ($a_i + b_j = c_\ell$)
on a alors :

I & A
2.2

$$\int (f+g)\, d\mu = \sum c_\ell\, \mu\Big(\bigcup_{a_i+b_j=c_\ell} (A_i \cap B_j)\Big)$$

$$\int f\, d\mu + \int g\, d\mu = \sum a_i \mu(A_i) + \sum_j b_j \mu(B_j)$$
$$= \sum a_i \mu\Big(\bigcup_{j=1} (A_i \cap B_j)\Big) + \sum_j b_j \mu\Big(\bigcup_i A_i \cap B_j\Big)$$
$$= \sum_i \sum_j (a_i + b_j)\, \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} c_\ell \underbrace{\sum_{a_i+b_j=c_\ell} \mu(A_i \cap B_j)}_{2 \text{ à } 2 \text{ disjoints}} = \sum_{\ell=1}^{k} c_\ell \mu\Big(\bigcup_{a_i+b_j=c_\ell} A_i \cap B_j\Big)$$

- Si $f \leq g$ alors $g - f$ mesurable ≥ 0, fini de valeurs
  $f + g - f = g \Rightarrow \int f\, d\mu + \int (g-f)\, d\mu = \int g\, d\mu$.

  $$\Rightarrow \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu.$$

Théorème : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{F}_+^0)^{\mathbb{N}}$ tq
$\forall x\ f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ on pose $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

Si $\exists g \in F_+^0$ tq $g \leq f$, alors $\int g\, d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$
si $f \in \mathcal{F}_+^0$ alors $\int f\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n\, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\, d\mu$.

Démo : • On écrit $g = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$ pour $\varepsilon \in]0,1[$ on pose ~~a_i'~~
$a_i' = (1-\varepsilon) a_i$

$\sum a_i' \mathbb{1}_{\overbrace{\{x \in A_i \text{ et } a_i' \leq f_n(x)\}}^{A_i^n}}(x) \leq f_n(x)$

(utiliser $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et prendre $x \in A_j$)

$(A_i^n)_n$ croissante au sens de $\subset$ alors $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_i^n)$
$= \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i^n\Big)$.

On cherche $B = \bigcup (A_i \cap \{x, a_i' \leq f_n(x)\} = A_i \cap \Big(\bigcup_n \{x, a_i' \leq f_n(x)$

On mq $B = A_i$, en effet soit $x \in A_i$, alors si $a_i' = 0$

si $a_i' \neq 0$ a_i' a_i $g(x) = a_i \leq \sup f_n(x) \leq \lim f_n(x)$.

Puisque $a_i' < a_i = \lim f_n(x)$, $\exists N$ tq $\forall n \geq N \Rightarrow a_i' \leq f_n(x)$
alors $x \in A_i \cap \{x, a_i' \leq f_N(x)\}$ donc $x \in B$.

d'où $\sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i^n) \leq \int f_n d\mu$. PCI

$\sum (1-\varepsilon) a_i \mu(A_i) \leq \lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$

d'où $(\varepsilon \to 0^+)$

$\int g \, d\mu = \sum a_i \mu(A_i) \leq \lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$.

- Si $f \in \mathcal{F}_+^0$ alors on a $\int f d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$ (faire $g = f$ dans le résultat précédent).

et de plus de $f_n \leq f$ on tire $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$.

$\hat{\mathcal{F}}_+^0$ $\mathcal{F}_+^0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$

$f = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$ $\int f = \sum a_i \mu(A_i)$

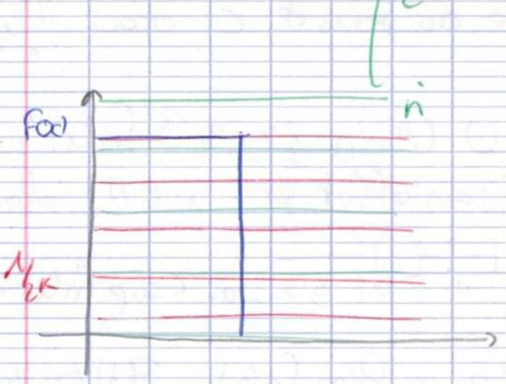
$\int 1 \, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} d\mu = 1$ $\mu(\mathbb{Q}) = \mu(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}) = \sum \underbrace{\mu(\{q\})}_{0}$

B - Intégrales de fonctions de $\mathcal{F}_+$ (mesurables positives).

<u>Définition</u> : Si $f \in \hat{\mathcal{F}}_+$ on définit $\int f d\mu = \sup\{\int g \, d\mu$, où $g \in \hat{\mathcal{F}}_0^+$ et $g \leq f\}$.

<u>Proposition</u> : Si $f \in \hat{\mathcal{F}}_+$, $\exists (f_n) \in (\hat{\mathcal{F}}_+^0)^{\mathbb{N}}$ tq $(f_n) \nearrow f$.

<u>Démo</u> : $f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{si } f(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\quad k = 0 \ldots n2^n - 1 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq n. \\ n & \end{cases}$



I & A

2.3

Proposition Si $(f_n) \in (\hat{\mathcal{F}}_+^{\circ})^{\mathbb{N}}$, $f_n \uparrow f$ alors $f \in \hat{\mathcal{F}}_+$ et $\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Démo : Puisque $f_n \in \hat{\mathcal{F}}_+^{\circ}$ et $f_n \leq f$, alors par def de l'$\int$ sur $\hat{\mathcal{F}}_+$, $\forall n$, $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.

Soit $g \in \hat{\mathcal{F}}_+^{\circ}$ tq $g \leq f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ et $f_n \uparrow f$

On a alors $\int g \, d\mu \leq \sup_n \int f_n \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$.

Vrai $\forall g \in \hat{\mathcal{F}}_+^{\circ}$, $g \leq f$, donc par passage au sup

$\int f \, d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu$.

Propriétés de l'intégrale dans $\hat{\mathcal{F}}_+$

$f, g \in \hat{\mathcal{F}}_+$.

- si $\alpha > 0$, $\alpha f \in \hat{\mathcal{F}}_+$ et $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$.
- $f + g \in \hat{\mathcal{F}}_+$ et $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.
- $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.
- Convergence monotone si $(f_n) \in (\hat{\mathcal{F}}_+)^{\mathbb{N}}$, $\forall n$ $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

  Si $f = \sup_n f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

  alors $\int f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu$.

Démo : • Si $f \in \hat{\mathcal{F}}_+$ et $\alpha > 0$, $\alpha f \in \hat{\mathcal{F}}_+$

$\exists (f_n) \in \hat{\mathcal{F}}_+^{\circ}$, $f_n \uparrow f$, alors $\alpha f_n \uparrow \alpha f$

On a $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu \Rightarrow \alpha \int f_n \, d\mu \to \alpha \int f \, d\mu$.

$\underbrace{\int \alpha f_n \, d\mu}_{\alpha \int f_n d\mu} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int \alpha f \, d\mu$.

• de même $(f_n) \in (\hat{\mathcal{F}}_+^{\circ})^{\mathbb{N}}$, $(g_n) \in (\hat{\mathcal{F}}_+^{\circ})^{\mathbb{N}}$.

$f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g \Rightarrow f_n + g_n \uparrow f + g$.

donc $\int (f+g) \, d\mu = \lim \int \underbrace{(f_n + g_n)}_{\in \hat{\mathcal{F}}_+^{\circ}} \, d\mu$

$= \lim \left(\int f_n \, d\mu + \int g_n \, d\mu \right)$

$= \lim \int f_n \, d\mu + \lim \int g_n \, d\mu$

$= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

• Supposons $f \le g$, soit $(f_n) \nearrow f$ et $g_n \nearrow g$.

$f_n \le f \le g$ donc $f_n \in \hat{\mathcal{F}}_+^0$ vérifiant $f_n \le g$.

$\Rightarrow \int f_n \, d\mu \le \int g \, d\mu$.

donc $\underbrace{\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}_{\int f \, d\mu} \le \int g \, d\mu$

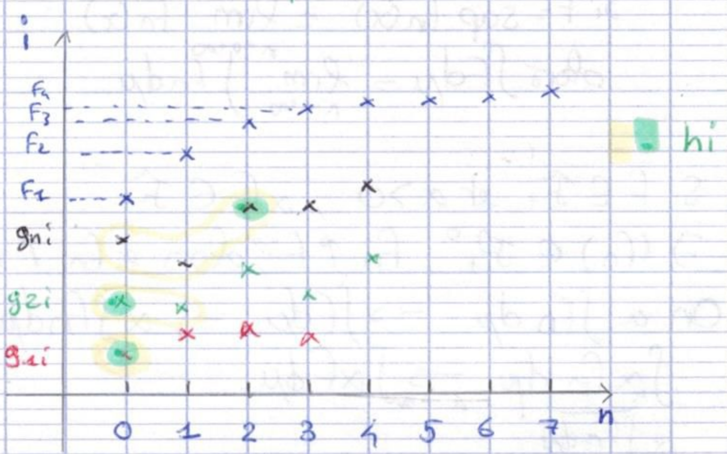
• Si $(f_n) \in (\mathcal{F}_+)^{\mathbb{N}}$ tq $(f_n) \nearrow f$ alors $\lim \int f_n \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu$
$= \int f \, d\mu$.

$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \le f_{n+1}(x)$. $\forall x \in E \ \sup_{n \in \mathbb{N}} (f_n(x)) = f(x)$

Puisque $\forall n, \underset{\mathcal{F}_+}{f_n} \le \underset{\mathcal{F}_+}{f} \Rightarrow \int f_n \, d\mu \le \int f \, d\mu \Rightarrow \lim_{n\to} \int f_n \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu$ car $(f_n) \nearrow f$ $\le \int f \, d\mu$.

On veut mq $\int f \, d\mu \le \lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu$.

On sait que $\forall n$, f_n est la limite croissante d'une suite $(g_{n,i}) \in (\hat{\mathcal{F}}_+^0)^{\mathbb{N}}$ tq $(g_{n,i})_i \nearrow f_n$, soit $h_i = \max g_{n,i}$; on pose $h = \sup_{i \in \mathbb{N}} h_i$



On a $g_{n,i} \le \max(\underset{n \le i}{h_i}, \underset{n > i}{g_{nn}}) \le \max(h_i, h_n)$.

d'où $\underbrace{\sup_n \sup_i g_{n,i}}_{f} \le h$

$\Rightarrow f \le h$.

De plus $g_{n,i} \le f_n \le f$. On en déduit que

$\underbrace{\sup_i \underbrace{\sup_n g_{n,i}}_{h_i}}_{h} \le f$; $h = f$ avec $(h_n) \in (\hat{\mathcal{F}}_+^0)^{\mathbb{N}}$ et $(h_n) \nearrow h = f$

I & A
2.4

De plus $h_n \leq f_n$ (cf diagramme)
donc $\int h_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu \leq \sup \int f_n \, d\mu$.
puisque $(h_n) \in (\mathcal{F}_+^{\infty})^{\mathbb{N}}$ et $(h_n) \nearrow f$, on a $\lim \int h_n \, d\mu = \int f \, d\mu \leq \sup \int f_n \, d\mu$.

Rappel : • Soit $(a_n) \in (\overline{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$ $\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{\sup\limits_{k \geq n} a_k}_{\searrow \text{en } n}$ $\equiv \underbrace{\lim \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n}_{\text{ou } n \to +\infty}$

ou $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}}$.

• de même : $\lim\limits_{n \to +\infty}$ (ou $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}}$) $\inf\limits_{k \geq n} a_k \equiv \lim \inf\limits_{n \in \mathbb{N} \text{ ou } n \to +\infty} a_n$.

• $(a_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \iff \lim \sup a_n = \lim \inf a_n = a$.

$\lim \sup f_n : x \to \lim\limits_{n \to +\infty} \sup f_n(x)$.

Propriétés : Si $(f_n) \in (\mathcal{F}_+)^{\mathbb{N}}$

• $\int \inf f_n \, d\mu \leq \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu$ (a)

• $\sup \int f_n \, d\mu \leq \int \sup f_n \, d\mu$

• $\int \lim \inf f_n \, d\mu \leq \lim \inf \int f_n \, d\mu$.

Démo : $\underbrace{\int \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k \, d\mu}_{\in \mathcal{F}_+} \leq \int f_n \, d\mu$ par passage à l'inf : $\int \inf f_n \, d\mu \leq \inf \int f_n \, d\mu$.

$f_n \leq \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k$

$\lim \inf f_n$
$\lim \inf\limits_{k \in n} f_k$
$g_n \nearrow \lim \inf f_n$

$\int \inf f_n \leq \inf \int f_n$ d'après (a)

donc $\lim \int g_n \, d\mu = \int \underbrace{\lim g_n}_{\lim \inf f_n} \, d\mu \leq \lim \inf \int f_n \, d\mu$

III / Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

Idée : si $x \in \mathbb{R}$, x s'écrit $x = x^+ - x^-$ avec $x^+ \geq 0$ et $x^- \geq 0$
Cette représentation est "économe" si x^+ et x^- sont les plus petits possibles.
Si $x \geq 0$ on prend $x^+ = x$, si $x \leq 0$ on prend $x^- = -x$
donc $x^+ = \max(0, x)$ $x^- = \max(0, -x)$.
Si $x = u - v$ avec u et $v \geq 0$, on a si $x \geq 0$, $u = x + v \geq \underbrace{\max(0, x)}_{x}$

si $x \leq 0$, $v = u - x \geq \underbrace{\max(0, -x)}_{-x}$

Définition : Soit f une fonction $E \to \overline{\mathbb{R}}$, on définit $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = \max(0, -f)$

<u>Définition</u> : Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et f mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

ⓐ On dit que f admet une intégrale si au moins l'une des 2 de $\{\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu\}$ est fini, on pose alors $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

ⓑ On dit que f est intégrable si à la fois $\int f^+ d\mu < +\infty$ et $\int f^- d\mu < +\infty$

alors $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu < +\infty$

<u>Propriété</u> : • f mesurable f intégrable $\iff \int |f| d\mu < +\infty$

<u>Démo</u> : On a $\forall x \; |f|(x) = f^+(x) + f^-(x)$

$|f|$, f^+ et f^- sont des $\mathcal{F}_+$

$\Rightarrow \int |f| d\mu = \underbrace{\int f^+ d\mu}_{<+\infty} + \underbrace{\int f^- d\mu}_{<+\infty}$

<u>Lemmes</u> : • Soit f, u, v mesurables, $u \geq 0$, $v \geq 0$ et $f = u - v$

telle que $\int u d\mu < +\infty$ ou $\int v d\mu < +\infty$ alors f admet une intégrale

et $\int f d\mu = \int u d\mu - \int v d\mu$.

• Soit f, u, v mesurables tq $f = u - v$ l'une des deux de u et v admet une intégrale, l'autre est intégrable, alors $\int f d\mu = \int u d\mu - \int v d\mu$.

<u>Démo</u> : $f = u - v$ par exemple $\int u d\mu < +\infty$ alors $\underbrace{f^+}_{\mathcal{F}^+} \leq \underbrace{u}_{\mathcal{F}^+}$

$\Rightarrow \int f^+ d\mu \leq \int u d\mu < +\infty$

$\Rightarrow f$ admet une intégrale car $\int f^+ d\mu < +\infty$

De plus $f^+ - f^- = u - v$ donc $\int f^+ + \int v = \int u + \int f^-$ ("+" $d\mu$).

$\Rightarrow \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int u d\mu - \int v d\mu$

$f = u - v$ supp que u admet une intégrale et v intégrable

Donc $f^+ - f^- = \underbrace{u^+ - u^-}_{\hookrightarrow \text{ l'un des 2 ad. une intégrale finie par ex } u^+} \underbrace{- v^+}_{<+\infty} + \underbrace{v^-}_{<+\infty} = \underbrace{(u^+ + v^-)}_{\geq 0} - \underbrace{(u^- + v^+)}_{\geq 0}$.

$f^+ + u^- + v^+ = f^- + u^+ + v^-$

de $f^+ \leq u^+ + v^-$ donc $\int f^+ d\mu \leq \int u^+ d\mu + \int v^- d\mu < +\infty$

$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \underbrace{\int u^+ d\mu - \int u^- d\mu}_{\int u d\mu} - \underbrace{\left(\int v^+ d\mu - \int v^- d\mu\right)}_{\hookrightarrow \int v d\mu}$

I & A
2.5

Définition : On appelle $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ l'ens. des fonctions mesurables et intégrables. (ie f mesurable, $\int |f| d\mu < +\infty$).

Propriétés : $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ est un espace vectoriel

$\int : \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu) \to \mathbb{R}$.

$f \mapsto \int f d\mu$ est linéaire.

Si $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ et f mesurable vérifie $|f| < |g|$ alors $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$

$\forall f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu) \quad |\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

Théorème : Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables

lemme de Fatou

- si $\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ tq $\forall n \; g \leq f_n$ alors $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$
- si $\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ tq $\forall n \; f_n \leq g$ alors $\limsup \int f_n d\mu \leq \int \limsup f_n$

Théorème de convergence dominée de Lebesgue.

si $\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ tq $|f_n| < g$ et si $\forall x \; f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$.

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

IV Version finale de l'intégrale

A - Intégrale sur $A \in \xi$

(E, ξ, μ) un espace mesuré. Soit $A \in \xi$. Pour f mesurable on pose, à chaque fois que cela existe $\int_A f d\mu = \int f \times \mathbb{1}_A d\mu$.

Si f est continue en tout point de A, $f . \mathbb{1}_A$ est mesurable de (E, ξ) dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$

B - Ensembles négligeables, tribu complétée, mesure complétée

Le but est d'augmenter la classe des fonctions sur lesquelles on sait définir l'intégrale de L.

Définition : On dit que $N \subset E$ est négl. dans (E, ξ, μ) si $\exists A \in \xi$ tq $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. On appelle $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties négligeables.

Propriétés. • Si $B \in \mathcal{N}$ et $A \subset B$, alors $A \subset \mathcal{N}$

• Si $(A_i)_{i\in I}$ est tel que $\forall i$, $A_i \in \mathcal{N}$ et I quelconque $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{N}$.

• Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est tq $\forall i$ $A_i \in \mathcal{N}$, alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{N}$

Démo • Si $B \in \mathcal{N}$, $\exists C \in \mathcal{E}$ tq $\mu(C) = 0$. Alors $A \subset B \subset C$ dc puisque $\mu(C) = 0$
$A \in \mathcal{N}$.

• $(A_i)_{i\in I}$, $\forall i$, $\exists C_i$ tq $A_i \subset C_i$ et $\mu(C_i) = 0$. Soit $i_0 \in I$, $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_{i_0} \subset C_{i_0}$
avec $\mu(C_{i_0}) = 0$

• Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $\exists C_i$ comme précédemment.

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ $\quad 0 \le \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i) \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu(C_i)}_{0} = 0$

Définition: On appelle tribu complétée de $(E, \mathcal{E}, \mu)$ la tribu $\hat{\mathcal{F}}$. $\hat{\mathcal{F}}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{E} \cup \mathcal{N}$.

Propriété $\hat{\mathcal{F}} = \{A \cup N,\ A \in \mathcal{E},\ N \in \mathcal{N}\}$

Démo: Soit $\mathcal{F}' = \{A \cup N,\ A \in \mathcal{E},\ N \in \mathcal{N}\}$

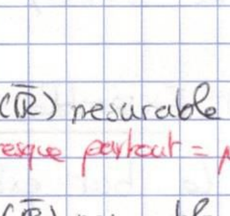
$\mathcal{F}' \subset \hat{\mathcal{F}}$ en effet, si $A \cup N \in \mathcal{F}'$ puisque $A \in \hat{\mathcal{F}}$, $N \in \hat{\mathcal{F}}$ $A \cup N \in \hat{\mathcal{F}}$
(Stabilité par $\cup$ dén. ici finie)

De plus $\mathcal{F}'$ est une tribu.

• $\underset{\mathcal{E}}{\emptyset} \cap \underset{\mathcal{N}}{\emptyset} \in \mathcal{F}'$ car $\emptyset \subset \emptyset$ et $\mu(\emptyset) = 0$.

• $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i = \underbrace{\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)}_{\mathcal{E} \text{ tribu}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i\right)}_{\mathcal{N} \text{ stab pour } \cup \text{ dén.}}$

• $(A \cup N)^c = A^c \cap N^c$; $B^c \cup (B \setminus N) = N^c$


B, $\mu(B) = 0$

$(A \cup N)^c = A^c \cap (B^c \cup (B \setminus N))$
$= \underbrace{(A^c \cap B^c)}_{\in \mathcal{E}} \cup \underbrace{(A^c \cap (B \setminus N))}_{\in B,\ \mu(B) = 0}$

Propriété: Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ mesuré et $\hat{\mathcal{F}}$ le complété associé, f une application de E dans $\overline{\mathbb{R}}$

f est $\hat{\mathcal{F}}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-mesurable ssi $\exists g$ $\mathcal{E}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable
tq $\{x, f(x) \ne g(x)\} \in \mathcal{N} \rightarrow f = g$ μ-presque partout $= \mu$-pp.

________ ssi $\exists$ g et h $\mathcal{E}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurables
tq $g \le f \le h$ et $g = h$ μ-pp.

Exemple : $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 \end{cases}$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \\ x \to \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ +\infty & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$

pour les tribus de boréliens, g est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable et f est $\mathcal{F}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable

Propriétés : (de μ-pp).

- Si $f_1 = f_2$ μ-pp et $g_1 = g_2$ μ-pp alors $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ μ-pp.
- Si $f_i = g_i$ μ-pp alors $\inf_{i \in \mathbb{N}} f_i = \inf_{i \in \mathbb{N}} g_i$ μ-pp.

Démo : $\underbrace{\{x, f_1(x) = f_2(x)\}}_{E_1} \cap \underbrace{\{x, g_1(x) = g_2(x)\}}_{E_2} \subset \underbrace{\{x, (f_1+g_1)(x) = (f_2+g_2)(x)\}}_{E_3}$

Par passage au complémentaire $E_3^c \subset \underbrace{E_1^c}_{\in \mathcal{N}} \cup \underbrace{E_2^c}_{\in \mathcal{N}} \in \mathcal{N}$

Définition : $(E, \mathcal{F}, \mu)$ mesuré, $\hat{\mathcal{F}}$ complété de $\mathcal{F}$.

On pose si $B = \underbrace{A}_{\in \mathcal{F}} \cup \underbrace{N}_{\in \mathcal{N}} \in \hat{\mathcal{F}}$ $\quad \mu'(B) = \mu(A)$

Remarque : Pour que $\mu'(B) = \mu(A)$ pour $B = A \cup N$ définisse un objet mathématique il faut que : si $B = A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$ alors $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

(en effet, on n'a pas montré l'unicité de l'écriture $B = A \cup N$).

Soit $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$ $\quad A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$.

$A_1 \Delta A_2 \subset N_1 \cup N_2$ négligeable $\quad N_1 \subset C_1$. $\mu(C_1) = 0$
$\subset C_1 \cup C_2$. $\quad N_2 \subset C_2$. $\mu(C_2) = 0$.

$A_1 \subset A_2 \cup (A_1 \setminus A_2) \subset A_2 \cup (A_1 \Delta A_2)$.

$$\begin{aligned} \mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup (A_1 \Delta A_2)) &\leq \mu(A_2) + \mu(A_1 \Delta A_2) \\ &\leq \mu(A_2) + \mu(C_1 \cup C_2) \\ &\leq \mu(A_2) + \underbrace{\mu(C_1)}_{0} + \underbrace{\mu(C_2)}_{0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ et symétriquement donc $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Propriétés : Soient f, $\hat{\mathcal{F}}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable et g $\mathcal{F}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable.

tq $f = g$ μ pp

alors f est $\hat{\mathcal{F}}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ - μ' intégrable $\Leftrightarrow$ g $\mathcal{F}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ - μ intégrable.

Démo : f admet une intégrale $\Leftrightarrow$ g admet une intégrale.

Notation : soit f $\mathcal{F}$. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ - μ' mesurable admettant une intégrale $\int f d\mu' = \int f d\mu$

V Théorèmes finaux d'intégration

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Soit (f_n) une suite de fonctions tq

i) $\exists g$ intégrable tq $\forall n, |f_n| \leq g$ μ-pp
ii) $f_n \xrightarrow{C.S} f$ μ-pp

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } \exists g \text{ intégrable tq } \forall n, |f_n| \leq g \ \mu\text{-pp} \\ \text{ii) } f_n \xrightarrow{C.S} f \ \mu\text{-pp} \end{array}\right\} \int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Théorème : • Si f est $\mathbb{R}$-intégrable sur $[a,b]$ $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

f est alors intégrable au sens de $\mathcal{L}$ complété (tribu et mesure complétée)

et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu$ mesure de Lebesgue

• Soit f intégrable au sens de Riemann généralisé en b. alors

$\displaystyle\lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx$ existe, f R intégrable sur $[a,t]$ t proche de b,

Soit f absolument intégrable en b au sens de $\mathbb{R}$-généralisé :

alors $\displaystyle\lim_{t \to b} \int_a^t |f(x)|\,dx$ existe.

Si f est abs. R-intégrable sur $[a,b]$, pb en b. alors f est $\mathcal{L}$ intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx$$

Lebesgue.

Exemple : Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} \frac{1+nx}{(1+x)^n} d\mu$.

→ Résolution : l'intégrale est définie car $x \longmapsto \dfrac{1+nx}{(1+x)^n}$ est cont sur $[0,1]$ donc mesurable.

$$\int_{[0,1]} \left| \frac{1+nx}{(1+x)^n} \right| d\mu = \int_{[0,1]} \frac{1+nx}{(1+x)^n} d\mu = \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$$

d'après ⓐ du thm

. CV dominée : $(1+x)^n = 1 + nx + \underbrace{\ldots}_{\geq 0}$

donc $\dfrac{1+nx}{(1+x)^n} \leq 1$ sur $[0,1]$ et 1 est $\mathcal{L}$-intégrable sur $[0,1]$.

Si $x \in [0,1]$, $\left(\dfrac{1+nx}{e^{\overbrace{n\ln(1+x)}^{}}_{>0 \text{ si } x>0}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[x>0]{n \to +\infty} 0$

$f_n \to \mathbb{1}_{\{0\}} = 0$ μpp donc $\int f_n \, d\mu \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

I & A

2.7 Exemple : $\lim_{n \to +\infty} \int_{[1,+\infty[} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{n}\right)}{x^2}}_{f_n} d\mu$.

→ Résolution : i) f_n est mesurable sur $[1, +\infty[$ car continue

ii) $|f_n| \leq \frac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$.

On sait que $\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \left|\frac{1}{x^2}\right| dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \quad \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = 1$.

↳ $\frac{1}{x^2}$ est alors R intg sur $[1, +\infty[$ donc L intégrable donc sur les f° pos.

$\int_{[1,+\infty[} |f_n| \leq \int_{[1,+\infty[} \frac{1}{x^2} d\mu(x) = 1 \Rightarrow f_n$ intégrable.

Th de Conv dominée : (f_n) mesurable

$$\left.\begin{array}{l} |f_n| \leq \frac{1}{x^2} = g, \ \frac{1}{x^2} \text{ intgble.} \\ x \text{ fixé } \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{x^2} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{x^2} = f \end{array}\right\} \lim \int f_n d\mu = \int_{[0,1]} 1 \, d\mu = 1$$

Application : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(t, x) \xrightarrow{f} f(t,x)$.

tq - $\forall t \in I \quad x \to f(t,x)$ est mesurable. (a)

- $\exists g$ intégrable tq $\forall t \in I \ |f(t,x)| \leq g(x)$ μpp en x (b)
- pour $t_0 \in I$, $[t \to f(t,x)$ est continue en $t_0]$ μpp en x. (c)

alors $\forall t \in I \quad g(t) = \int f(t,x) d\mu_x$ est définie et continue en t_0

Démo : Puisque $x \to f(t,x)$ est mesurable et que $|f(t,x)| \leq g(x)$ pp x

et g intégrable $0 \leq \int |f(t,x)| d\mu_x \leq \int g(x) d\mu_x < +\infty$.

Donc $\forall t \in I$, $g(t)$ est définie

g continue ~~en t_0~~ $\Leftrightarrow$ ($\forall (t_n)$ suite d'élément de I tq $t_n \xrightarrow{n \to +\infty} t_0$ on a $g(t_n) \xrightarrow{n \to +\infty} g(t_0)$)

Soit $(t_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tq $t_n \xrightarrow{n \to +\infty} t_0$. On s'intéresse à la f° $f_n(x) = f(t_n, x)$

1) f_n mesurable ($\forall t$ $f(t,x)$ est mesurable)

2) $|f_n(x)| = |f(t_n, x)| \leq g(x)$ μpp en x et g intgble.

3) $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} f(t_n, x) = f(t_0, x)$ pp en x.

$t \to f(t,x)$ cont pp en x

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\int f(t_n, x) dx}_{g(t_n)} = \int f(t_0, x) dx$

On suppose en plus de (a), (b), (c) que :

- $[t \to f(t,x)$ est dérivable sur $I]$ μpp en x.
- $\exists \tilde{g}$ intégrable tq $\forall t \in I \left[\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \tilde{g}(x) \ \mu pp \text{ en } x\right]$

Alors pour $t_0 \in I$, g est dérivable en t_0 et $g'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, d\mu x$.

Démo : Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ tq $t_n \xrightarrow{n\to\infty} t_0$

On a $f(t_n, x) = f(t_0, x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t', x)(t_n - t_0)$ Taylor-Lagrange
$t' \in]t_0, t_n[$

Alors $\underbrace{\left| \frac{f(t_n, x) - f(t_0, x)}{t_n - t_0} \right|}_{f_n \text{ de la cv dominée}} = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t', x) \right| \leq \hat{g}(x)$ pp en x.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(t_n,x) - f(t_0,x)}{t_n - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)$ pp en x
dérivable en $t_0 \in I$.

Alors par conv-dom

$\lim \int \frac{f(t_n,x) - f(t_0,x)}{t_n - t_0}\, d\mu x \underset{\text{lin de l'}\int}{=} \lim \frac{\overbrace{\int f(t_n,x)\,d\mu x}^{g(t_n)} - \overbrace{\int f(t_0,x)\,d\mu x}^{g(t_0)}}{t_n - t_0} = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, d\mu x$

$\overset{n\to\infty}{=} g'(t_0)$

(car valable pour tte suite $t_n \to t_0$)

Exemple : On considère $g(t) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + t^2}\, d\mu x$ et $t \in \overbrace{]1/2, +\infty[}^{I}$

① Mq g est continue en tout point de I.

② Mq g est dérivable en $t_0 \in I$. Donner une expression de sa dérivée.

→ Résolution : ① Soit $t \in I$, $t > \frac{1}{2}$ $\quad [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2+t^2}$ est continue sur $[0,1]$

donc mesurable

$\left| \frac{1}{x^2+t^2} \right| \leq \frac{1}{x^2 + \frac{1}{4}}$ $\forall x \in [0,1]$ est intégrable sur $[0,1]$.

$\left(\text{car} \left| \frac{1}{x^2 + \frac{1}{4}} \right| \leq 4 \text{. intg sur } [0,1] \right)$

Soit $t_0 \in I$ $\left[t \to \frac{1}{x^2+t^2} \text{ st cont en } t_0 \; (> \tfrac{1}{2}) \right]$ $\forall x \in [0,1]$ (donc μpp en x).

$\Rightarrow g(t) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}\, d\mu x$ est définie continue en tout $t_0 \in I$.

② Soit $x \in [0,1]$ fixé $\quad t \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{x^2+t^2}$ est dv en tt $t > \frac{1}{2}$

$\varphi'(t) = \frac{-2t}{(x^2+t^2)^2} \leq \hat{g}(x)$ pour $t > 1/2$ et $x \in [0,1]$

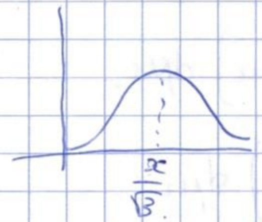
I&A
2.8.

On étudie la fonction $t \to \frac{2t}{(x^2+t^2)^2}$ $\quad -\varphi''(t) = \frac{2(x^2+t^2)^2 - 2(x^2+t^2)4t^2}{(x^2+t^2)^4}$

$$= \frac{2}{(x^2+t^2)^3}(x^2+t^2-4t^2)$$

$$= \frac{2}{(x^2+t^2)^3}(x^2-3t^2)$$

$-\varphi''(t) = 0 \iff t^2 = \frac{x^2}{3}$ $\quad t = \frac{x}{\sqrt{3}}$



	0	$-1/2$	$\frac{x}{\sqrt{3}}$	$1/2$	$+\infty$
$-\varphi''(t)$	$+$		ϕ		$-$
	$1/2$ ↗		$\frac{C}{x^3}$		↘ $1/2$ 0

Alors $\frac{2t}{x^2+t^2} \leq \frac{9}{8\sqrt{3}} x^{-3}$ si $\frac{x}{\sqrt{3}} > 1/2$

$\frac{1}{(x^2+\frac{1}{4})^2}$ si $\frac{x}{\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$

$$\int \frac{2}{x^2+t^2} d\mu x \leq \int_0^1 \left[\frac{1}{(x^2+\frac{1}{4})^2} 1\!\!1_{[0, \frac{\sqrt{3}}{2}]} + \frac{9}{8\sqrt{3}} x^{-3} 1\!\!1_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]} \right] d\mu x$$

$$\leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(x^2+\frac{1}{4})^2} d\mu x + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{9}{8\sqrt{3}} x^{-3} d\mu$$

cont sur $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}] \to$ intégr. $\quad$ cont sur $[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ donc itgb

On a alors $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2} d\mu x = \int_0^1 \frac{-2t}{(x^2+t^2)^2} d\mu$

$$\left[\frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}\right]' = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

VI Intégrale multiple / chgt de variables

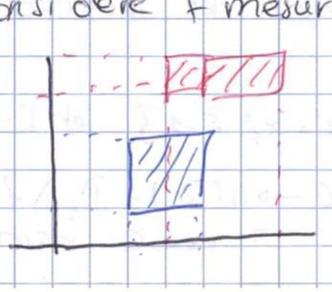
A - Intégrable multiple

Soient $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ deux espaces mesurables.

Définition: On appelle triba produit la triba notée $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ engendrée par les pavés $A \times B$ avec $A \in \mathcal{E}_1$ et $B \in \mathcal{E}_1$.

$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = T(\{A \times B, A \in \mathcal{E}_1, B \in \mathcal{E}_2\})$$

Exemple. On considère f mesurable de $(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$



Théorème de Fubini

Soient $(E_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés.

1) Si $f : E_1 \times E_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable positive et $A \times B \in \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$

$$\int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu_1 \otimes d\mu_2 = \int_A \left(\int_B f(x,y)\, d\mu_2 \right) d\mu_1$$
$$= \int_B \left(\int_A f(x,y)\, d\mu_1 \right) d\mu_2$$

où $\mu_1 \otimes \mu_2$ est la mesure produit induite par μ_1 et μ_2 qui vérifie $\mu_1 \otimes \mu_2 (A \times B) = \mu_1(A) . \mu_2(B)$ $\forall (A,B) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$

2) Si f est mesurable et $|f|$ est intégrable sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$

Alors : $\displaystyle\int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu_1 \otimes d\mu_2 = \int_A \left(\int_B f(x,y)\, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_B \left(\int_A f(x,y)\, d\mu_1 \right) d\mu_2$.

Exemple : $\displaystyle\int_{[1,2]\times[0,2]} y e^{xy}\, d\mu_x \otimes d\mu_y$.

$(x,y) \to y e^{xy}$ cont sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ donc mesurable.

$$\int_{[1,2]\times[0,2]} \underbrace{y e^{xy}}_{\geq 0}\, d\mu_x \otimes d\mu_y \overset{\text{Fubini pos.}}{=} \int_{[0,2]} \left[\int_{[1,2]} y e^{xy}\, d\mu_x \right] d\mu_y$$
$$= \int_{0,2} \left[e^{xy} \right]_{x=1}^{2} d\mu_y = \int_0^2 (e^{2y} - e^y)\, d\mu_x.$$

B - Changement de variable

Théorème : Soit $(E, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré. Ici μ mesure de Lebesgue.

Soient D_1 et D_2 deux ouverts et h une application bijective de D_1 sur D_2 telle que h et h^{-1} soient continûment différentiables. On suppose f mesurable sur D_2.

f intégrable sur $D_2 \iff [y \mapsto f(h(y)) . |\det J_h(y)|]$ intégrable sur D_1.

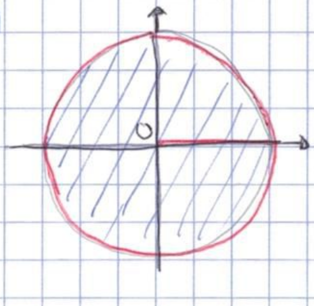
On a alors $(D_2 = h(D_1))$

$$\int_{D_2} f(x)\, dx = \int_{D_1} f(h(y))\, |\det J_h(y)|\, dy$$

Exemple : On s'intéresse à $D_2 = \{x,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ et $f : x \longmapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

On a alors $h :]0,1[\times]0, 2\pi[\to h(D_1) = D_2 \setminus \{ \mathcal{C}(0,1) \cup [0,1] \times \{0\} \}$
$(r, \theta) \longmapsto r\cos\theta, r\sin\theta$.

I & A
2.9.



L'existence, le calcul de $\int_{B(0,1)} f(x)\,d\mu_x$ se ramène à l'étude de

$$\int_{]0,1[\times]0,2\pi[} \overbrace{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{r}\ \underbrace{\left|\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\right|}_{r}\ dr\,d\theta.$$

D'après Fubini $\int_{]0,1[\times]0,2\pi[} r^2\,dr\,d\theta$ (1ère partie)

$$= \int_{]0,1[}\left[\int_{]0,2\pi[} \overset{\geq 0}{r^2}\,d\theta\right]dr$$

intégrable sur un intervalle borné d'une f° (cste) la intégrable.

$$= \int_{]0,1[} 2\pi r^2\,dr. \quad \text{m̂ argument.}$$

$$= \frac{2\pi}{3}[r^3]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$