TD 1 – Optimisation
Formulation mathématique

▷ **Exercice 1.** Le carbone radioactif ^{14}C est produit dans l'atmosphère par l'effet des rayons cosmiques sur l'azote atmosphérique. Il est oxydé en $^{14}CO_2$ et absorbé sous cette forme par les organismes vivants qui, par suite, contiennent un certain pourcentage de carbone radioactif relativement aux carbones ^{12}C et ^{13}C qui sont stables. On suppose que la production de carbone ^{14}C atmosphérique est demeurée constante durant les derniers millénaires. On suppose d'autre part que, lorsqu'un organisme meurt, ses échanges avec l'atmosphère cessent et que la radioactivité due au carbone ^{14}C décroit suivant la loi exponentielle suivante :

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

où λest une constante positive, t représente le temps en année et $A(t)$ est la radioactivité exprimée en nombre de désintégrations par minute et par gramme de carbone. On désire estimer les paramètres A_0 et λ par la méthode des moindres carrés. Pour cela on analyse les troncs (le bois est un tissu mort) de très vieux arbres *Sequoia gigantea* et *Pinus aristaca*. Par un prélèvement effectué sur le tronc, on peut obtenir :

— son age t en année, en comptant le nombre des anneaux de croissance,
— sa radioactivité A en mesurant le nombre de désintégration.

t	500	1000	2000	3000	4000	5000	6300
A	14.5	13.5	12.0	10.8	9.9	8.9	8.0

1.1.

Visualiser les résidus pour $A_0 = 15$ et $\lambda = 0.001$;

1.2. Écrire le problème sous la forme :

$$\begin{cases} Min \quad f(\beta) = \frac{1}{2} \parallel r(\beta) \parallel^2 \\ \beta \in \mathbf{R}^p. \end{cases}$$

On donnera l'expression de $r(\beta)$.

▷ **Exercice 2.** Les données ci-dessous représentent le rendement de la repousse d'une prairie en fonction du temps écoulé depuis la première fauche. Les unités ne sont pas précisées.

temps	9	14	21	28	42	57	63	70	79
rendements	8.93	10.80	18.59	22.33	39.35	56.11	61.73	64.62	67.08

On choisit d'ajuster ces données à un modèle de croissance de Weibull de la forme :

$$y(t) = x_1 - x_2 \exp(-x_3 t^{x_4})$$

On désire estimer les paramètres x_1, x_2, x_3 et x_4 par la méthode des moindres carrés.

2.1. On veut estimer les paramètres par les moindres carrés. Écrire le problème sous la forme :

$$\begin{cases} Min \quad f(\beta) = \frac{1}{2} \parallel r(\beta) \parallel^2 \\ \beta \in \mathbf{R}^p \end{cases}$$

Que représente β ? On donnera l'expression de $r(\beta)$.

2.2. Visualiser les résidus.

▷ **Exercice 3. Régression linéaire simple**

Soit n points expérimentaux $M_i = (x_i, y_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. On considère le modèle suivant : $y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$. On estime les paramètres par les moindres carrés.

3.1. On veut estimer les paramètres par les moindres carrés. Écrire le problème sous la forme :

$$\begin{cases} Min \quad f(\beta) = \frac{1}{2}\|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2} \parallel y - X\beta \parallel^2 \\ \beta \in \mathbf{R}^p \end{cases}$$

On donnera les valeurs de X et de y et à quoi correspond β.

3.2. On souhaite maintenant trouver la meilleure droite au sens des moindres carrés qui passe par l'origine. Écrire le problème d'optimisation.

3.3. Dans l'exercice 1 on pose $y(t) = \ln A(t), \theta_0 = \ln A_0, \theta_1 = -\lambda$ et $y_i = \ln(A_i)$. Écrire le problème d'estimation par les moindres carrés de θ_0 et θ_1.

▷ **Exercice 4.** On donne ci-dessous la population des États Unis pour les années 1900 à 2000 [1].

On désire ajuster ces données sur le modèle

$$y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

On utilise la méthode des moindres carrés.

1. Exemple provenant du cours de Cleve Moler page 4 chap. 5 "Numerical computing with Matlab"

années	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960
pop.	75.995	91.972	105.711	123.203	131.669	150.697	179.323
années	1970	1980	1990	2000			
pop.	203.212	226.505	249.633	281.422			

TABLE 1 – Données provenant de "U.S. Census"

4.1. Donner la formulation mathématique de ce problème et visualiser la fonction à minimiser.

4.2. Écrire le problème sous la forme :

$$\begin{cases} Min \quad f(\beta) = \frac{1}{2}\|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2} \parallel y - X\beta \parallel^2 \\ \beta \in \mathbf{R}^p \end{cases}$$

On donnera les valeurs de X et de y et à quoi correspond β.

▷ Exercice 5. Maintenance d'un réseau de distribution[2]

Un ingénieur responsable de la maintenance d'un réseau de distributeurs de boissons aimerait prédire le temps nécessaire pour l'approvisionner. Le service d'approvisionnement comprend le remplissage des machines et leurs réglages éventuels. Deux variables influencent ce temps : le nombre de caisses à charger et la distance parcourue par l'employé pour approvisionner l'ensemble des machines. Le responsable dispose de 25 observations, qui sont résumées dans le tableau suivant :

Obs.	Temps	Nb caisses	Dist.	Obs.	Temps	Nb. caisses	Dist.
1	16.68	7	560	13	13.50	4	255
2	11.50	3	220	14	19.75	6	462
3	12.03	3	340	15	24.00	9	448
4	14.88	4	80	16	29.00	10	776
5	13.75	6	150	17	13.35	6	200
6	18.11	7	330	18	19.00	7	132
7	8.00	2	110	19	9.50	3	36
8	17.83	7	210	20	35.10	17	770
9	79.24	30	1460	21	17.90	10	140
10	21.50	5	605	22	52.32	26	810
11	40.33	16	688	23	18.75	9	450
12	21.00	10	215	24	19.83	8	685
				25	10.75	4	150

2. Exemple provenant du livre d'A. Antoniadis, J. Berruyer et R. Carmona, régression non linéaire et applications", editions Economica, p. 45

On désire ajuster à cet ensemble de données un modèle de régression multiple

$$y(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

où y est le temps requis, x_1 est le nombre de caisses utilisées et x_2 est la distance parcourue.

5.1. Donner la formulation mathématique de ce problème.

5.2. Écrire le problème sous la forme :

$$\begin{cases} Min \quad f(\beta) = \frac{1}{2}\|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2} \parallel y - X\beta \parallel^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

On donnera les valeurs de X et de y et à quoi correspond β.

▷ **Exercice 6** (Courbe étalon). La première étape d'un dosage radioimmunologique consiste à établir une courbe étalon. Un dosage repose sur l'hypothèse qu'une hormone et son *isotope marqué* se comportent de façon équivalente vis-à-vis de leur anticorps spécifique : lorsque l'on met en présence une quantité déterminée d'anticorps, une quantité déterminée d'hormone radioactive et une quantité variable d'hormone froide, la dose de complexe anticorps-hormone marquée en fin de réaction est d'autant plus faible que la quantité d'hormone froide est importante. Néanmoins, la relation qui existe entre la dose d'hormone froide mise en réaction et la radioactivité de complexe extrait n'est pas stable et doit être appréciée dans chaque situation expérimentale. C'est l'objet de l'établissement de la courne étalon, à partir d'une gamme de dilutions connues d'une quantité déterminée de l'hormone à doser. La table 2 donne les données recueillies pour une telle courbe dans le cas d'un dosage du cortisol : on a mesuré la radioactivité du complexe (en coups par minutes ou cpm). On considère le modèle suivant :

$$y(x) = \beta_2 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{(1 + \exp(\beta_3 + \beta_4 x))^{\beta_5}}. \tag{1}$$

On désire estimer les paramètres par les moindres carrés (attention, il y a pour chaque dose 4 observations de y). On notera $(x_i)_{i=1,\ldots,16}$ (respectivement $(y_{i,j})_{i=1,\ldots,16; j=1\ldots,4}$) les éléments de la première colonne (respectivement des 4 dernières colonnes) de la table 2 et $r_{i,j}(\beta)$ le résidu liés au point $(x_i, y_{i,j})$.

6.1. Écrire le résidu lié au point (0.04,2378).

6.2. 1. Quelle est la dimension du vecteur des paramètres β.

2. Quel est le nombre de points n ?

6.3. Écrire le problème d'optimisation des paramètres par les moindres carrés.

Dose en ng/.1 ml	Réponse en c.p.m.			
0	2868	2785	2849	2805
0	2779	2588	2701	2752
0.02	2615	2651	2506	2498
0.04	2474	2573	2378	2494
0.06	2152	2307	2101	2216
0.08	2114	2052	2016	2030
0.1	1862	1935	1800	1871
0.2	1364	1412	1377	1304
0.4	910	919	855	875
0.6	702	701	689	696
0.8	586	596	561	562
1	501	495	478	493
1.5	392	358	399	394
2	330	351	343	333
4	250	261	244	242
100	131	135	134	133

TABLE 2 – Données pour un dosage de Cortisol

▷ Exercice 7. Géoréférence d'une image satellite[3]

On dispose d'une image satellite que l'on désire recaler par rapport à une carte géographique que l'on a à notre disposition. Pour cela on définit n points, appelés points d'amer, que l'on peut parfaitement faire correspondre sur la carte et sur l'image satellite. On prend par exemple un croisement de route, un point particulier sur une rivière, ... Concrètement on a donc à notre disposition n coordonnées (x_i, y_i) des n points d'amer sur la carte et n coordonnées (x'_i, y'_i) de ces mêmes points sur l'image satellite. On choisit d'exprimer ces coordonnées :

- en pixels pour les (x'_i, y'_i) (coordonnées (0,0) pour le coin inférieur gauche) ;
- en mètres relativement à un référentielle géodésique particulier pour les (x_i, y_i), via une carte IGN par exemple.

On a par exemple les données suivantes :

Numéros	x_i	y_i	x'_i	y'_i
1	252	2661	458805	1831634
2	235	2603	458157	1830577
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
23	1021	2254	471301	1819574

En pratique l'image satellite est déformée par rapport à la réalité. Cette

3. Voir cours de C. Monteil

déformation a plusieurs origines : satellite non verticale par rapport à la prise de vue, présence de nuages dans l'atmosphère, ... En conséquence on suppose que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} x = \gamma_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 x'^2 + \gamma_4 x'y' + \gamma_5 y'^2 \\ y = \delta_0 + \delta_1 x' + \delta_2 y' + \delta_3 x'^2 + \delta_4 x'y' + \delta_5 y'^2 \end{cases}$$

On désire estimer les paramètres par les moindres carrées

7.1. Pour l'estimation des paramètres $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_5)$ quelles sont les données ?

7.2. Écrire le problème d'estimation par les moindres carrés linéaires de γ.

7.3. Mêmes questions pour δ.

$\triangleright$ **Exercice 8.** On désire construire un réservoir de forme cylindrique de volume maximum dont la surface latérale est inférieure à S_{lat} et la surface totale est inférieure à S_{tot}.

8.1. Formaliser le problème.

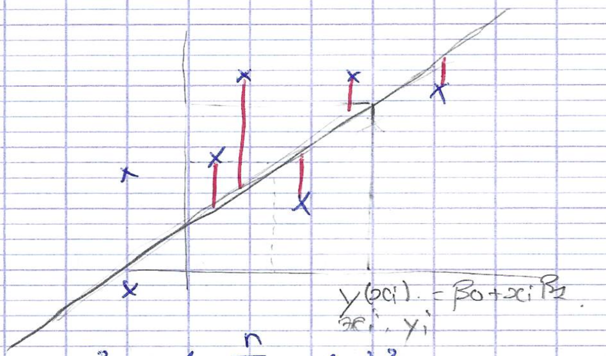
$\triangleright$ **Exercice 9.** Soit $B(a, \delta)$ la boule de centre a et de rayon $\delta > 0$ fixée. Soient p frères ennemis. On désire enfermer ces frères ennemis dans $B(a, \delta)$ en maximisant la distance minimale ξ qui les sépare deux à deux.

9.1. Formaliser le problème.

TD Opti 1.1 Exercice 3 : $M_i = (x_i, y_i)$ $y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$

$$f(\beta) = \frac{1}{2} \| y - X\beta_1 \|^2$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



3.1/ $\begin{cases} F(\beta) = \frac{1}{2} \| r(\beta) \|^2 = \frac{1}{2} \| y - X\beta \|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i(\beta)^2 \\ \beta \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$$r_i(\beta) = y_i - (\cancel{\beta_0} + \beta_1 x_i)$$

$$r : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \beta \longrightarrow r(\beta) = \begin{pmatrix} y_1 - (\beta_0 + \beta_1 x_1) \\ \vdots \\ y_n - (\beta_0 + \beta_1 x_n) \end{pmatrix} = y - X\beta \end{cases}$$

fonction résidus.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \cancel{1} & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cancel{1} & x_n \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

3.2/ $\beta_0 = 0$

3.3/ $\ln(A(t)) = \ln(A_0) - \lambda t$

$y(t) = \theta_0 + \theta_1 t$

$$f(\beta) = \frac{1}{2} \| y - T\Theta \|^2 \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} \ln(14,5) \\ \ln(13,5) \\ \ln(12) \\ \ln(10,8) \\ \ln(9,9) \\ \ln(8,9) \\ \ln(8) \end{pmatrix}$$

On obtient pas les mêmes valeurs d'opti par l'opti linéaire et classique pour l'exercice 1.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 500 \\ 1 & 1000 \\ 1 & 2000 \\ 1 & 3000 \\ 1 & 4000 \\ 1 & 5000 \\ 1 & 6500 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : 6.1/ $r_{4,3}(\beta) = y(0{,}04) - 2378.$

$$= \beta_2 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\left(1+e^{\beta_3 + 0{,}04\beta_4}\right)^{\beta_5}} - 2378.$$

6.2/ a β est de dimension 5

b Il y a $16 \times 4 = 64$ points.

6.3/
$$r : \begin{cases} \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^{64} \\ \beta \longrightarrow r(\beta) = \begin{pmatrix} r_{1,1}(\beta) \\ r_{1,2}(\beta) \\ r_{1,4}(\beta) \\ \vdots \\ r_{16,4}(\beta) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min f(\beta) = \frac{1}{2}\|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2}\left\| y(x_{i,j}) - y_{i,j} \right\|^2_{(i,j)\in [\![1,16]\!]\times[\![1,4]\!]} \\ \beta \in \mathbb{R}^5 \end{cases}$$

Exercice 7 : 7.1/ les données sont les pixels et les positions.

7.2/
$$r : \begin{cases} \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^{23} \\ \gamma \longrightarrow r(\gamma) = \begin{pmatrix} r_1(\gamma) \\ \vdots \\ r_{23}(\gamma) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^{23} \\ \gamma \longrightarrow r(\gamma) = \begin{pmatrix} r_1(\gamma) \\ \vdots \\ r_{23}(\gamma) \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec $r_i(\gamma) = x_i - (\gamma_0 + \gamma_1 x_i' + \gamma_2 y_i' + \gamma_3 x_i'^2 + \gamma_4 x_i' y_i' + \gamma_5 y_i'^2)$

$$\frac{1}{2}\|x - X'\gamma\|^2. \qquad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{23} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1' & y_1' & x_1'^2 & y_1' x_1' & y_1'^2 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 1 & x_{23}' & y_{23}' & x_{23}'^2 & x_{23}' y_{23}' & y_{23}'^2 \end{pmatrix}$$

TD Opti 1.2 : $\begin{cases} \min f(\gamma) = \frac{1}{2}\|r(\gamma)\|^2 = \frac{1}{2}\|x - X'\gamma\|^2 \\ \gamma \in \mathbb{R}^6 \end{cases}$

où $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_5 \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{23} \end{pmatrix}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} 1 & x_1' & y_1' & x_1'^2 & x_1'y_1' & y_1'^2 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 1 & x_{23}' & y_{23}' & x_{23}'^2 & x_{23}'y_{23}' & y_{23}'^2 \end{pmatrix}$

7.3/ (P_2) : $\begin{cases} \min f(\delta) = \frac{1}{2}\|r(\delta)\|^2 = \frac{1}{2}\|y - Y'\delta\|^2 \\ \delta \in \mathbb{R}^6 \end{cases}$

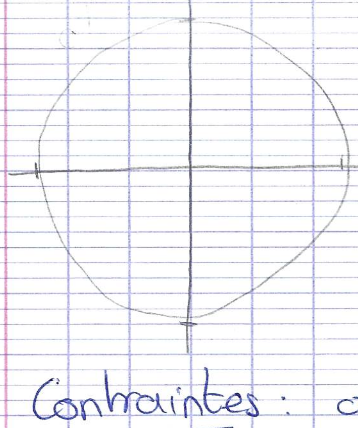
$r : \begin{cases} \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^{23} \\ \delta \longrightarrow r(\delta) = \begin{pmatrix} r_1(\delta) \\ \vdots \\ r_{23}(\delta) \end{pmatrix} \end{cases}$

$r_i(\delta) = y_i - (\delta_0 + \delta_1 x_i' + \delta_2 y_i' + \delta_3 x_i'^2 + \delta_4 x_i' y_i' + \delta_5 y_i'^2)$.

avec $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{23} \end{pmatrix}$ $\quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_5 \end{pmatrix}$ $\quad Y' = \begin{pmatrix} 1 & x_1' & y_1' & x_1'^2 & x_1'y_1' & y_1'^2 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 1 & x_{23}' & y_{23}' & x_{23}'^2 & x_{23}'y_{23}' & y_{23}'^2 \end{pmatrix}$

Exercice 8 : $\begin{cases} \max V(r,h) = \pi r^2 h \\ 2\pi r h \leq S_{lat} \\ 2\pi r h + 2\pi r^2 \leq S_{tot} \\ r \geq 0 \; ; \; h \geq 0 \end{cases}$

Exercice 9 :



param : x_i, y_i de chaque frère

$\begin{cases} \max \min \varepsilon_i(X,Y) \\ \quad = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \\ \forall i \in [\![1,p]\!] \quad x_i, y_i \in [a-\delta, a+\delta] \end{cases}$

Contraintes : $d(A, M_i)^2 \leq \delta^2 \quad \forall i = 1, \dots, p$.

$(x_i - a)^2 + (y_i - a^2) \leq \delta^2$.

$$\max f(x,y) = \max \min_{i<j} d^2(M_i, M_j)$$

$$\begin{cases} \max f(x,y,z) = J \\ d(A, M_i)^2 \leq \delta^2. \\ d^2(M_i, M_j) \geq J^2 \quad i<j \end{cases}$$