# DD の再帰演算

川原 純

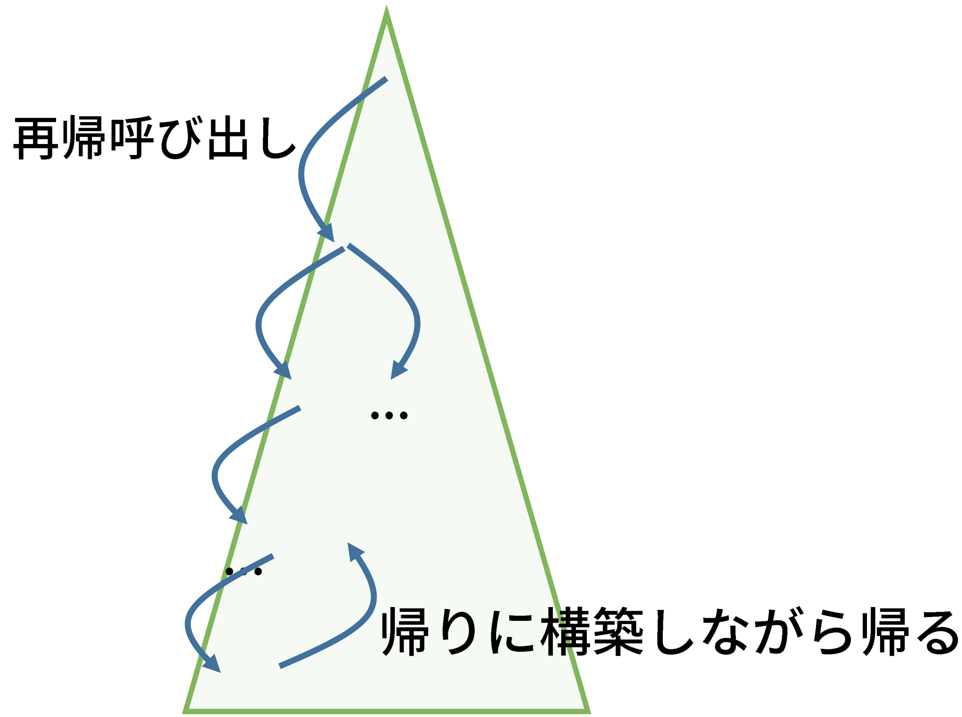
2022/7/29 版

# 本資料の目的

- ZDD の再帰演算の解説と、参考文献や実装に関する情報を提示
- ZDD の基本的な知識は既知であると仮定します。
- その他の情報
  - dd_documents: DD に関する情報を集約
  - DD アルゴリズム: DD のアルゴリズムを解説
  - DD ライブラリ入門: DD を扱うライブラリを紹介
  - DD の再帰演算: 本資料

# ZDD の構築法: ボトムアップ

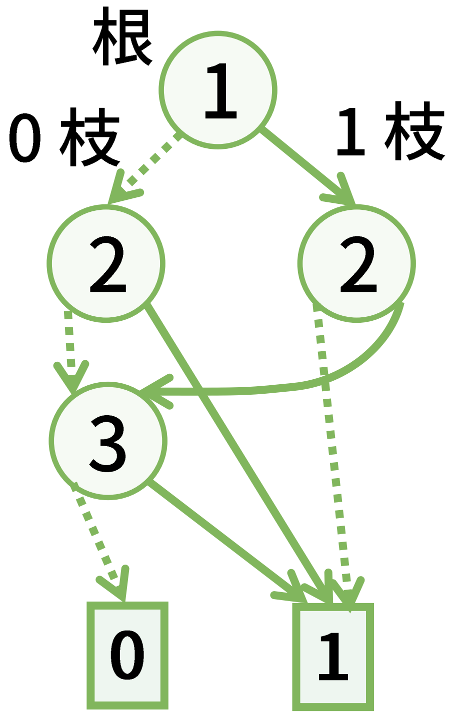
- ZDD の再帰構造を利用した ZDD 構築法を
  ボトムアップ構築法、または Apply 演算という




ボトムアップ構築法の例:
和集合
差集合
共通部分集合
superset
subset
hitting set
頂点・辺両方が故障する
可能性のあるネットワーク信頼性評価
[Kawahara+ 2019]

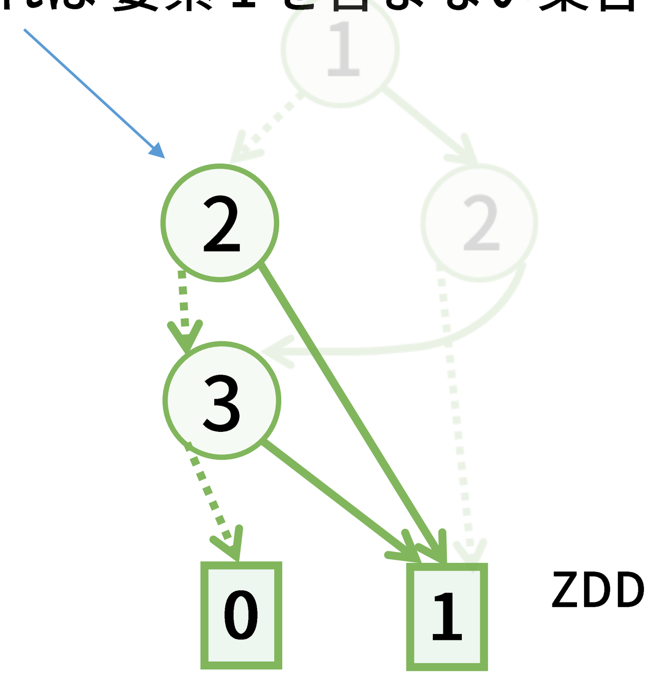
# ZDD の構築法: ボトムアップ: ZDD の再帰構造

- 根の 0枝の先から到達可能なノードもまた ZDD とみなせる




{ {1}, {2}, {3}, {1, 2, 3} }

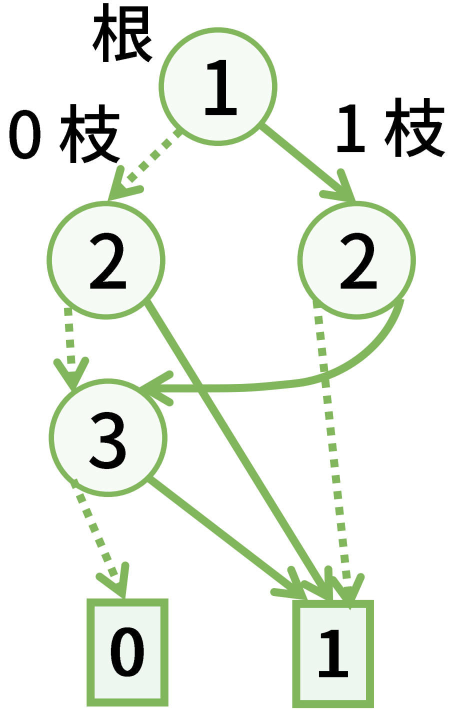
これは 要素 1 を含まない集合の族



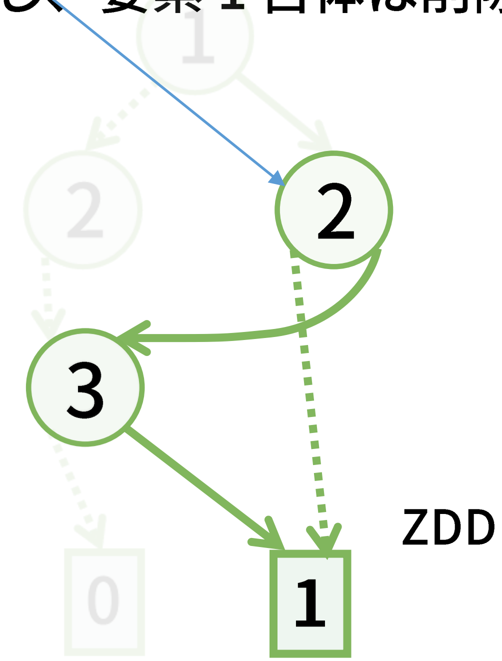

{ {2}, {3} }

# ZDD の構築法: ボトムアップ: ZDD の再帰構造

- 同様に、根の 1枝の先から到達可能なノードもまた ZDD とみなせる



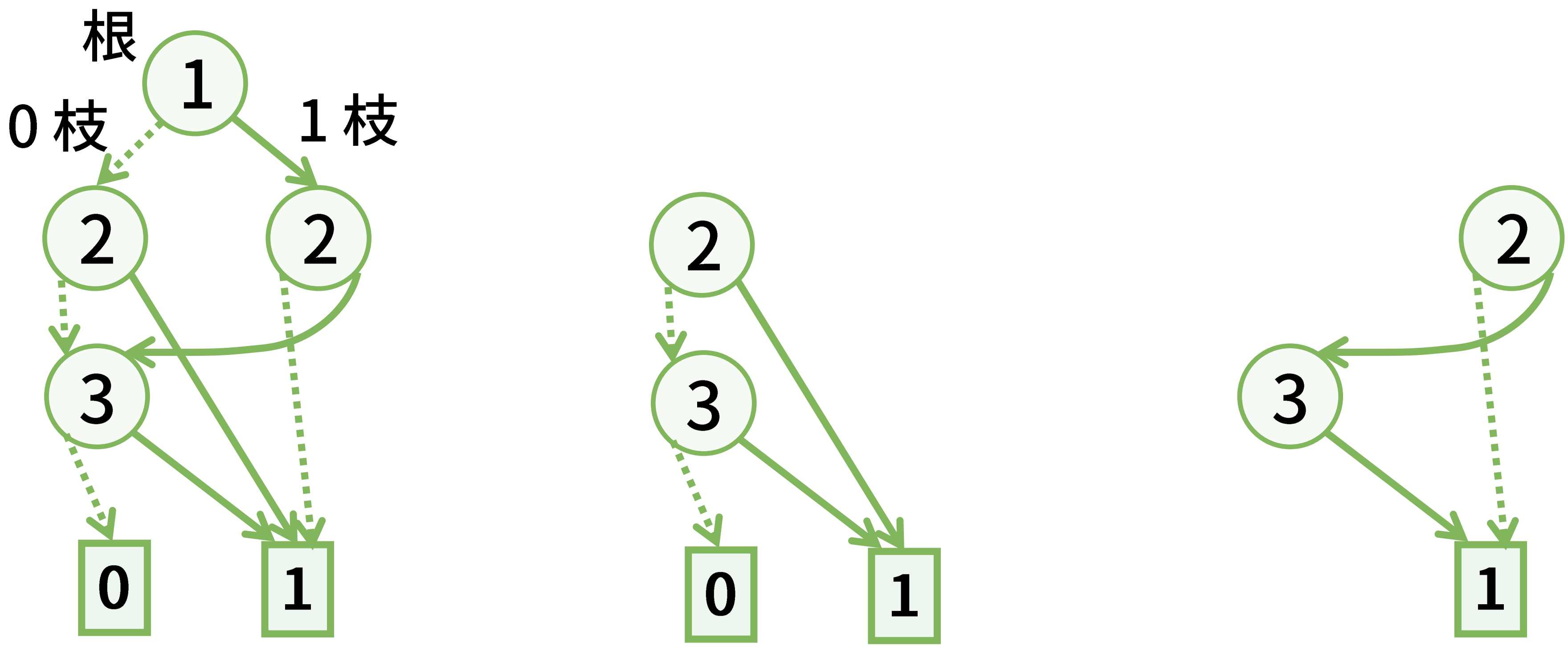

これは要素 1 を含む集合の族。
ただし、要素 1 自体は削除される




{ {1}, {2}, {3}, {1, 2, 3} } { {}, {2, 3} }

# ZDD の構築法: ボトムアップ: ZDD の再帰構造

- 集合族を 1 を含むものと含まないものに分解できる




$$\{\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\ \} = \{\ \{2\}, \{3\}\ \} \ \cup\ \{\{1\}\} \times \{\ \{\}, \{2, 3\}\ \}$$

演算子導入

# ZDD の共通部分演算（Intersection）

- 2つの集合族の共通部分を計算

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\} \cap \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$= \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$$

# ZDD の共通部分演算（Intersection）

- 2つの集合族の共通部分を計算

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\} \cap \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$
$= \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$

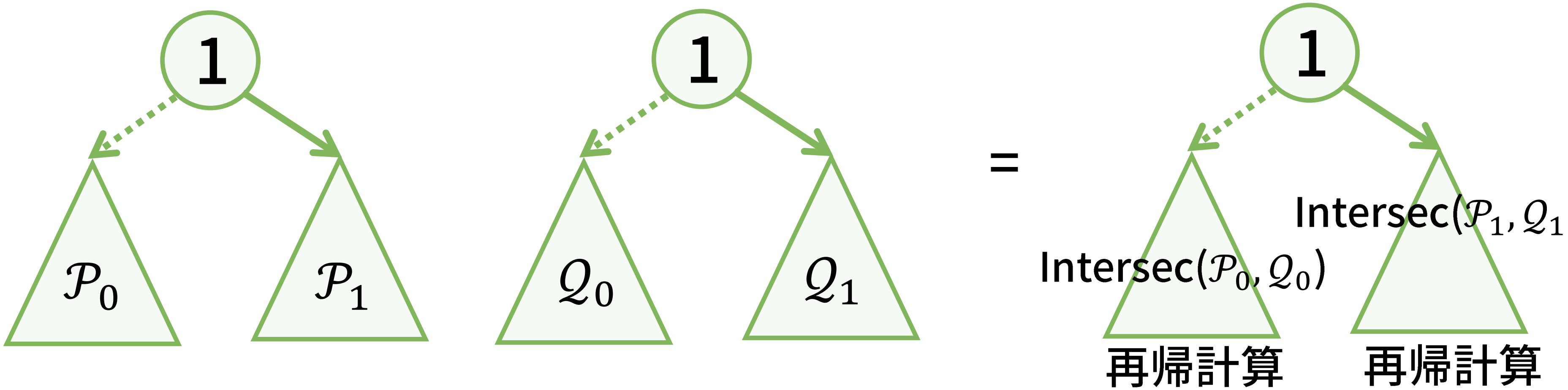
考え方: 再帰構造を用いる

集合族 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ に対し、$\mathrm{Intersec}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ とする

| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{Q}$ | $\mathrm{Intersec}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ |
| --- | --- | --- |
| $\mathcal{P}_0$<br>1 を含まない集合 | $\mathcal{Q}_0$<br>1 を含まない集合 | $\mathrm{Intersec}(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0)$<br>1 を含まない集合 |
| $\{\{1\}\} \times \mathcal{P}_1$<br>1 を含む集合 | $\{\{1\}\} \times \mathcal{Q}_1$<br>1 を含む集合 | $\{\{1\}\} \times \mathrm{Intersec}(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1)$<br>1 を含む集合 |

# ZDD の共通部分演算（Intersection）

- 2つの集合族の共通部分を計算




| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{Q}$ | Intersec$(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ |
|---|---|---|
| $\mathcal{P}_0$<br>1 を含まない集合 | $\mathcal{Q}_0$<br>1 を含まない集合 | Intersec$(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0)$<br>1 を含まない集合 |
| $\{\{1\}\} \times \mathcal{P}_1$<br>1 を含む集合 | $\{\{1\}\} \times \mathcal{Q}_1$<br>1 を含む集合 | $\{\{1\}\} \times$Intersec$(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1)$<br>1 を含む集合 |

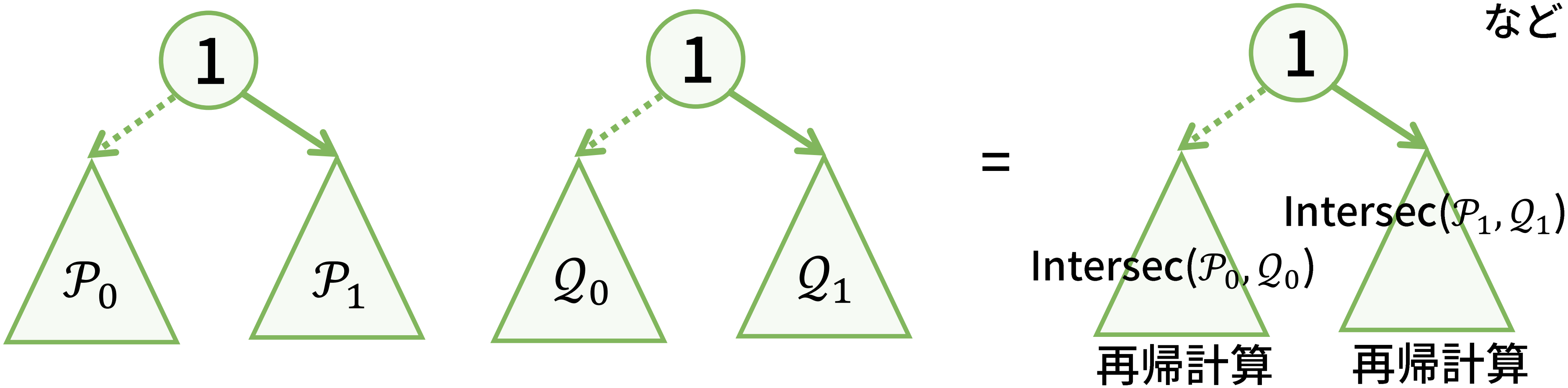
# ZDD の共通部分演算（Intersection）

- 2つの集合族の共通部分を計算

再帰の末端

Intersec( $\boxed{1}$ , $\boxed{1}$ ) = $\boxed{1}$

など




$\mathcal{P}_0$

1 を含まない集合

$\{\{1\}\} \times \mathcal{P}_1$

1 を含む集合

$\mathcal{P}$

$\mathcal{Q}_0$

1 を含まない集合

$\{\{1\}\} \times \mathcal{Q}_1$

1 を含む集合

$\mathcal{Q}$

Intersec($\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0$)

1 を含まない集合

$\{\{1\}\} \times$ Intersec($\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1$)

1 を含む集合

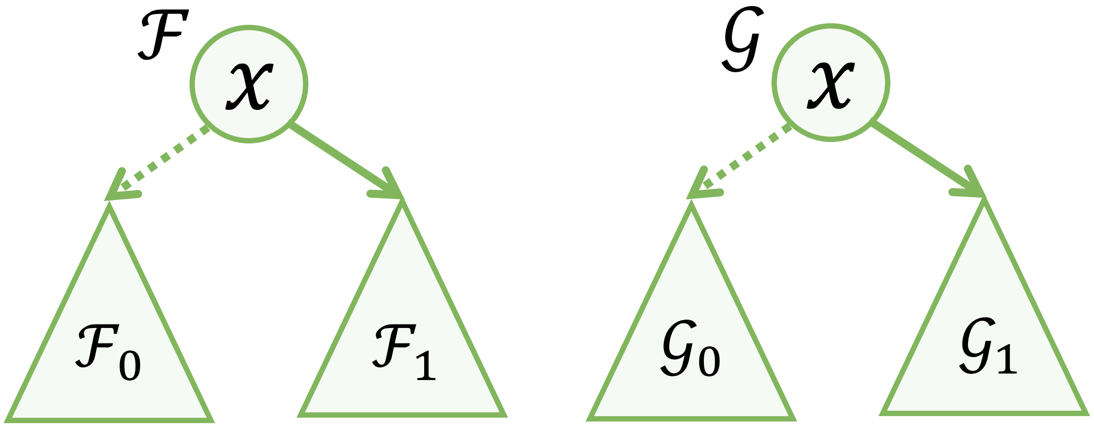
Intersec($\mathcal{P}, \mathcal{Q}$)

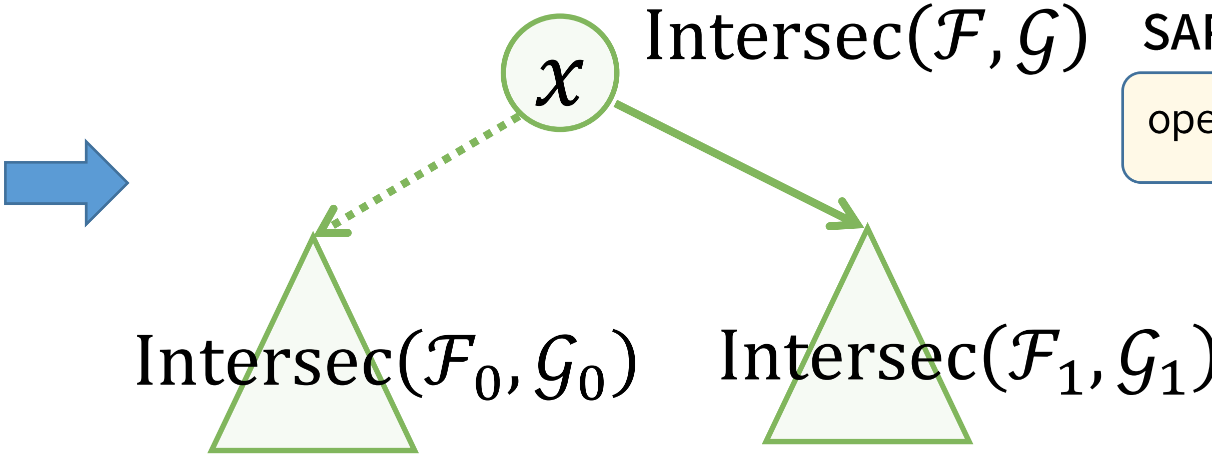
# 演算カタログ

- 以下では、各演算をカタログ形式で紹介する。
- 2 つの ZDD に対する演算と、1 つの ZDD の演算がある
- 2 つの ZDD が与えられた場合、根の変数ラベルが同じ場合と異なる場合で挙動が異なる。また、片方の ZDD が 0/1-終端の場合も特別な動作をする場合が多い。本ドキュメントでは省略することもある
- 再帰の末端は書いていないことがある
- 集合族は花文字（$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ など）、集合は大文字（$F, G$など）、要素は小文字（$f, g$ など）で書く

# Intersection

- $\text{Intersec}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\, A \mid A \in \mathcal{F} \text{ and } A \in \mathcal{G} \}$



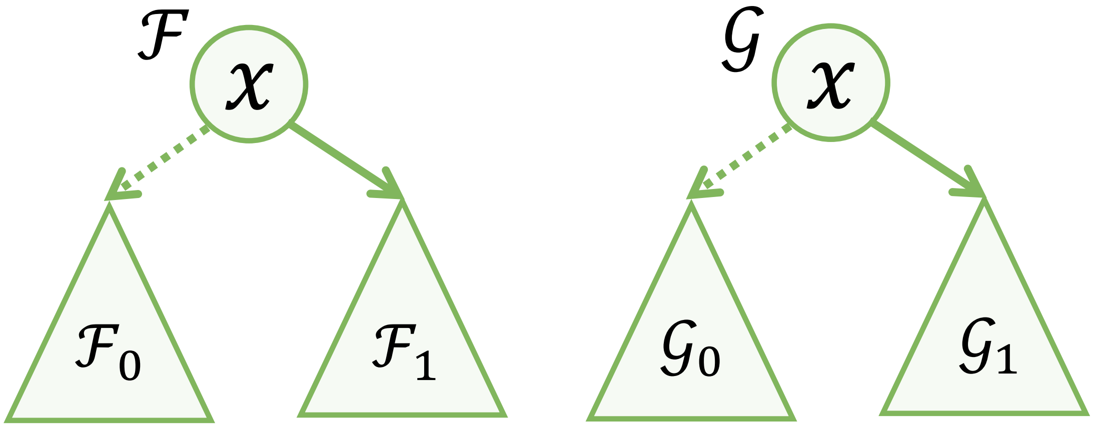

**SAPPOROBDD**

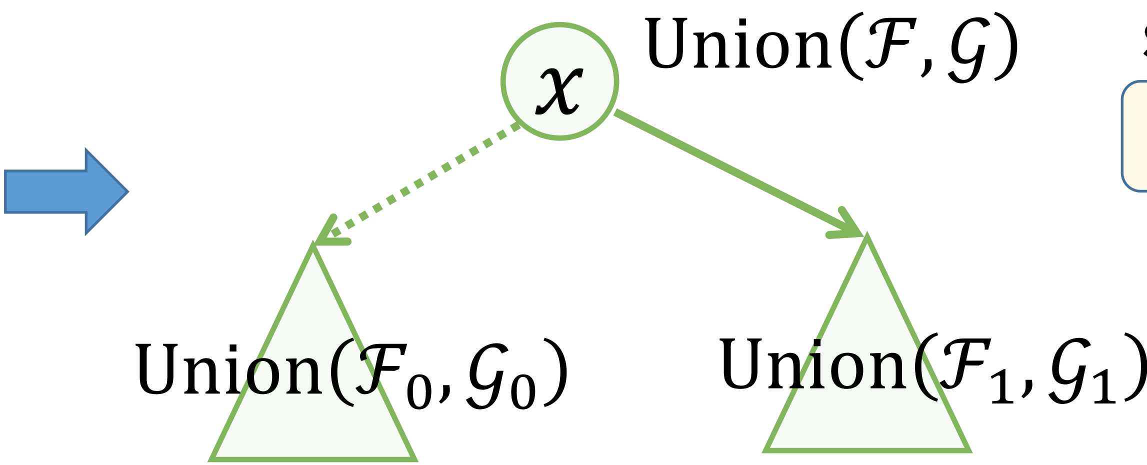
```
operator&(ZBDD f, ZBDD g);
```

正確には const ZBDD& である

# Union

- $\text{Union}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\, A \mid A \in \mathcal{F} \ \text{ or } \ A \in \mathcal{G}\}$



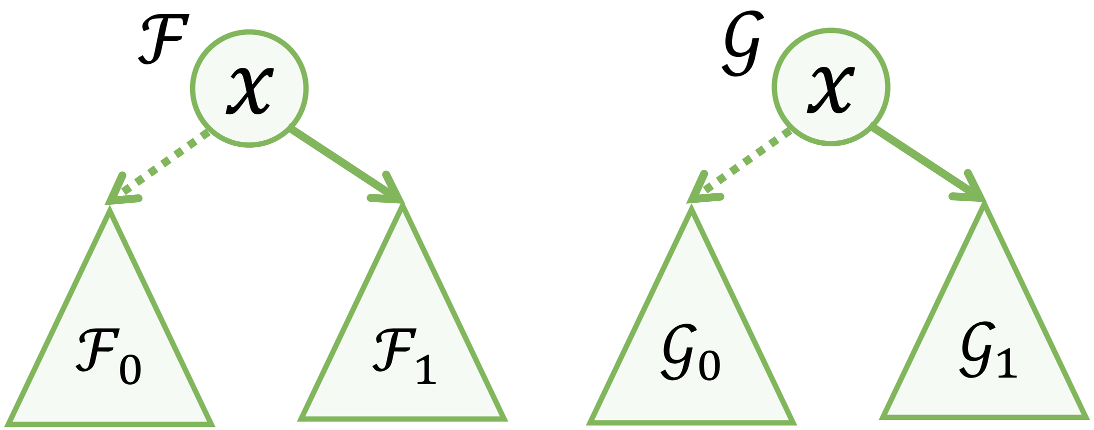



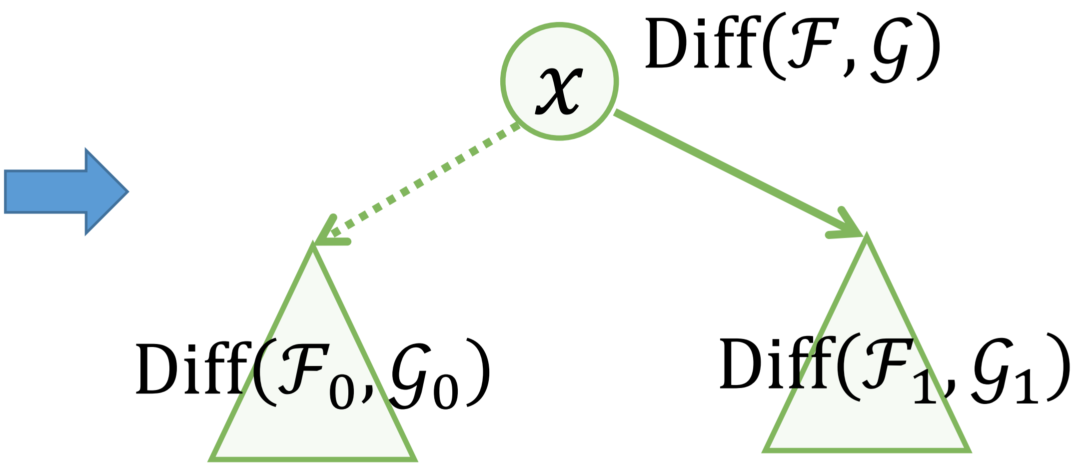

**SAPPOROBDD**

```
operator+(ZBDD f, ZBDD g);
```

# Difference

- $\mathrm{Diff}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{\, A \mid A \in \mathcal{F} \text{ and } A \notin \mathcal{G} \}$



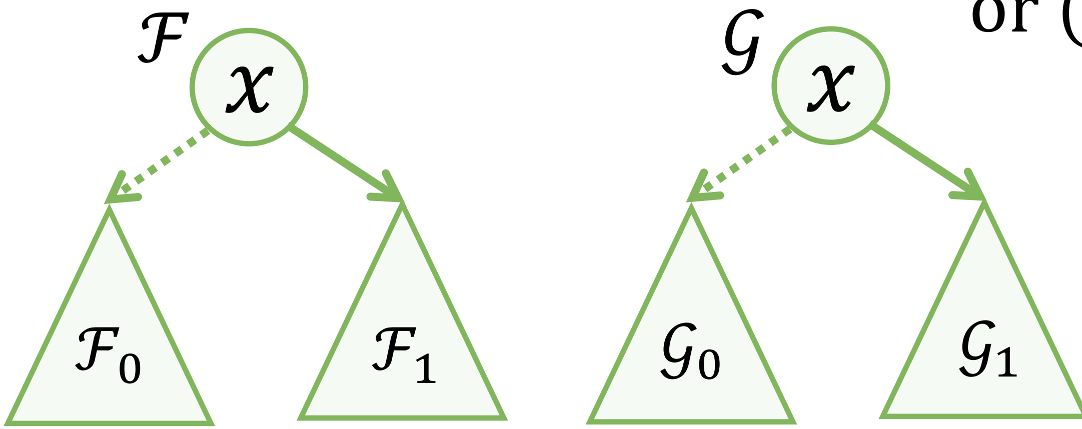



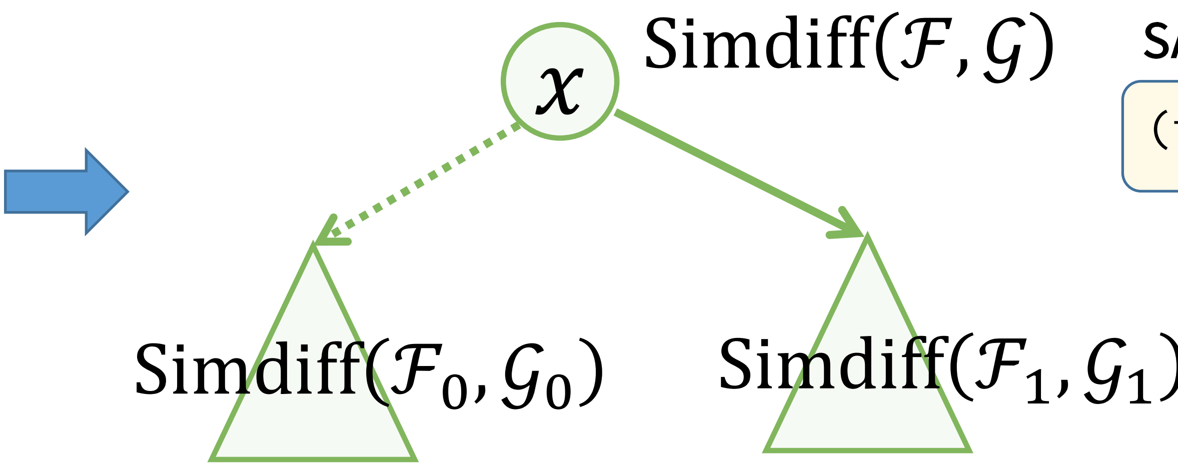

**SAPPOROBDD**

```
operator-(ZBDD f, ZBDD g);
```

# Symmetric Difference

- $\mathrm{Simdiff}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\, A \mid (A \in \mathcal{F} \text{ and } A \notin \mathcal{G})$
  $\text{or } (A \notin \mathcal{F} \text{ and } A \in \mathcal{G})\}$



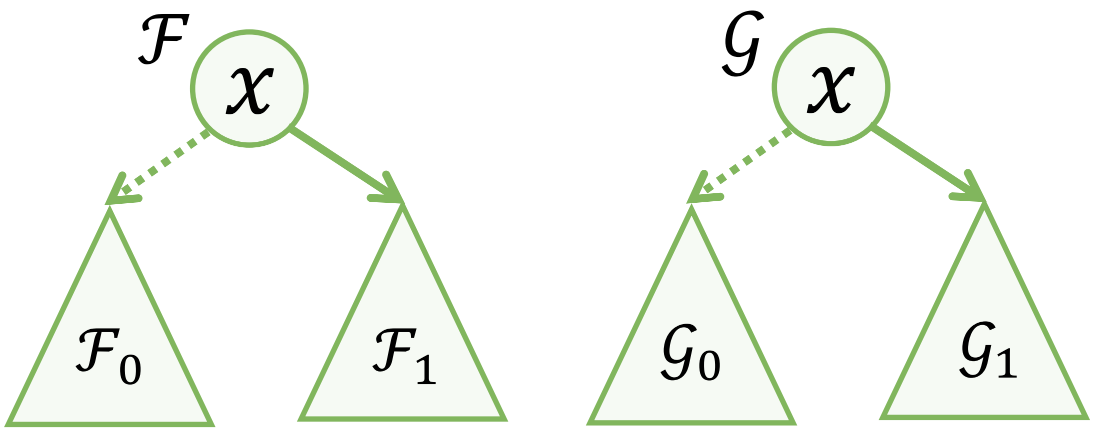



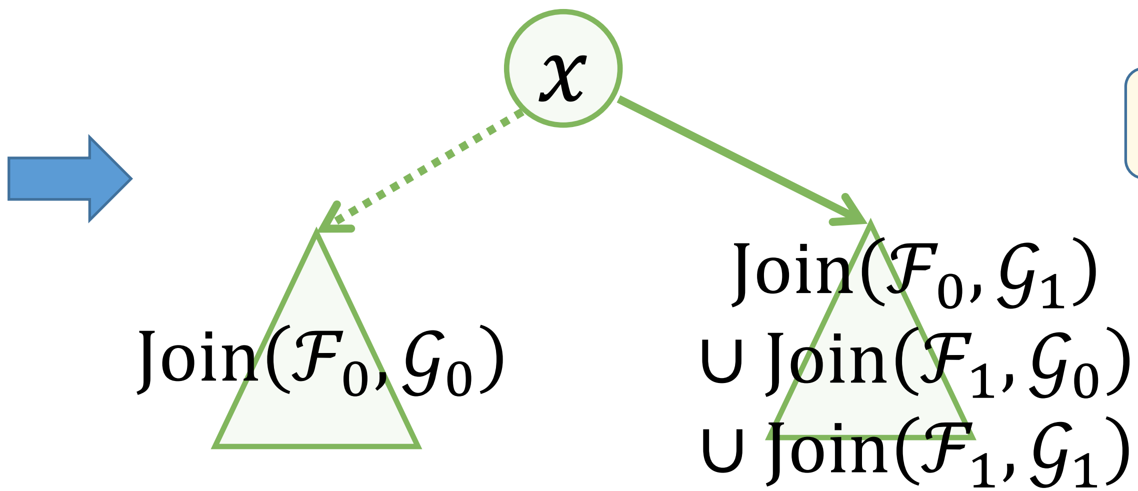

**SAPPOROBDD**

```
(f - g) + (g - f)
```

# Join

- $\mathrm{Join}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\, F \cup G \mid (F \in \mathcal{F} \text{ and } G \in \mathcal{G})\}$



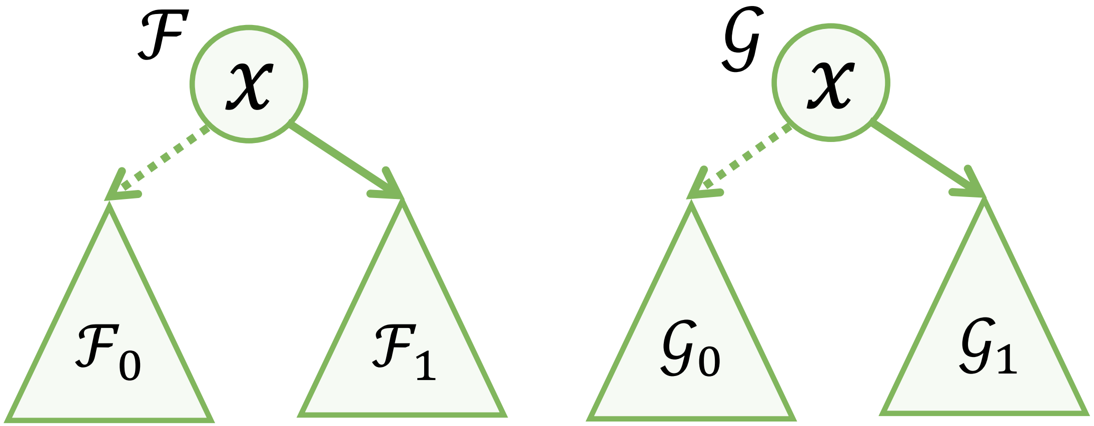



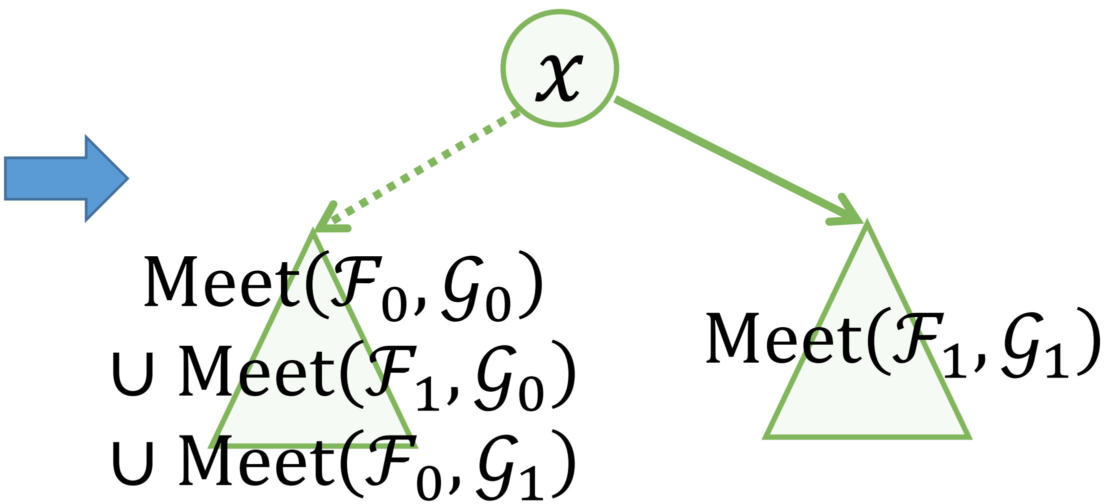

SAPPOROBDD

```
operator*(ZBDD f, ZBDD g);
```

# Meet

- $\mathrm{Meet}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\, F \cap G \mid (F \in \mathcal{F} \text{ and } G \in \mathcal{G})\}$



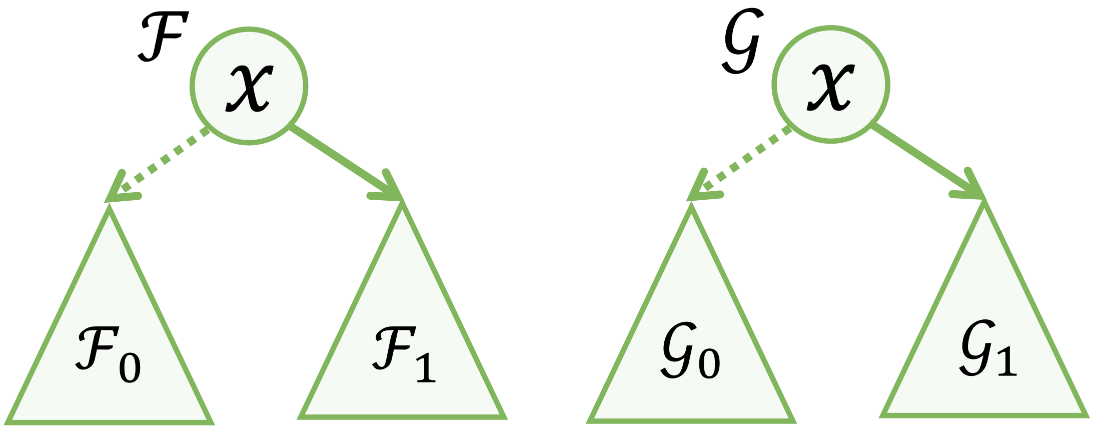



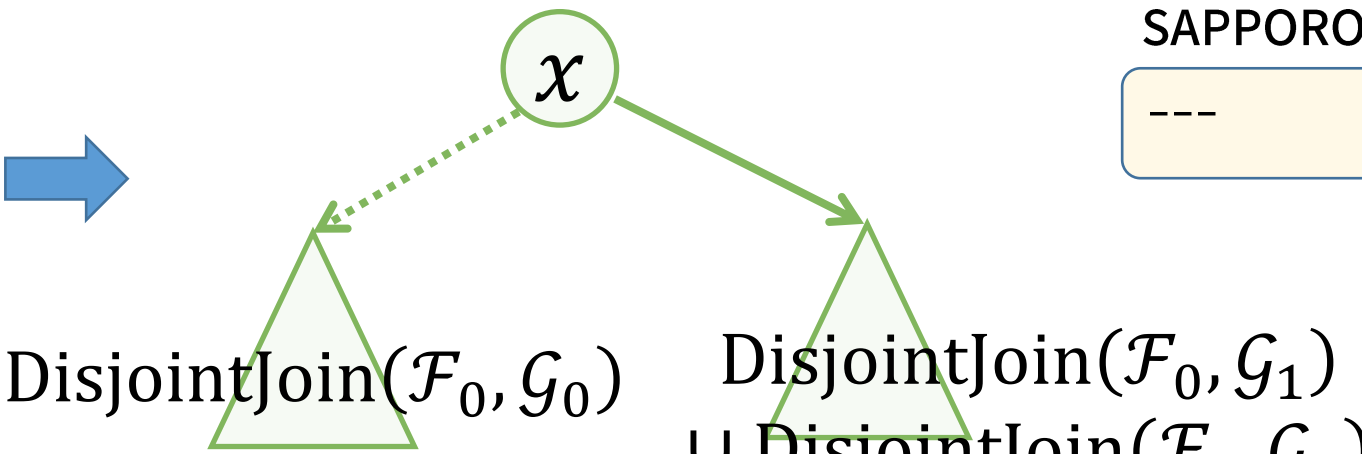

SAPPOROBDD

```
ZBDD_Meet(ZBDD f, ZBDD g);
```

# Disjoint Join

- $\mathrm{DisjointJoin}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\, F \cup G \mid \begin{pmatrix} F \in \mathcal{F} \text{ and } G \in \mathcal{G} \\ \text{and } F \cap G = \emptyset \end{pmatrix} \}$



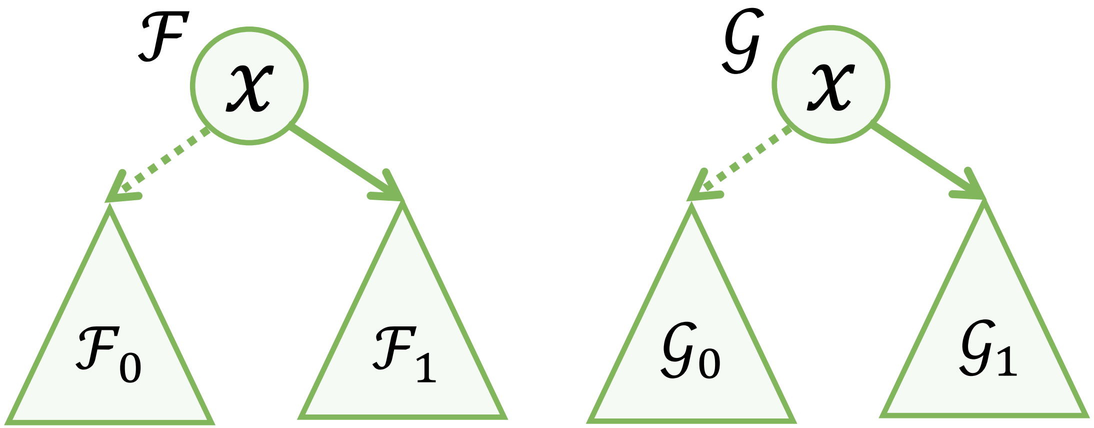



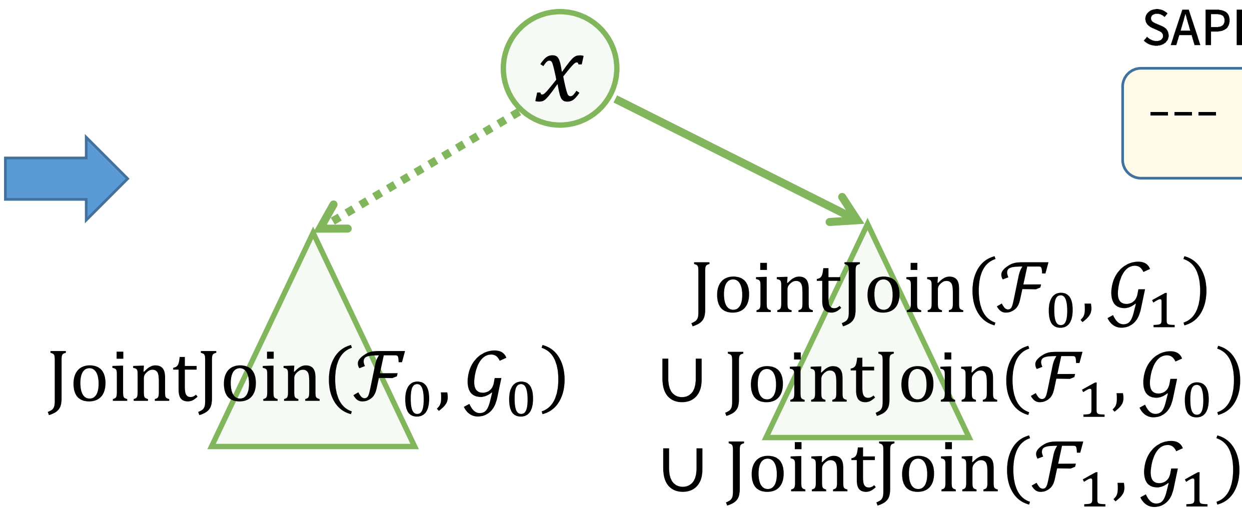

SAPPOROBDD

```
---
```

# Joint Join

- $\mathrm{JointJoin}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\, F \cup G \mid \begin{pmatrix} F \in \mathcal{F} \ \text{ and } \ G \in \mathcal{G} \\ \text{and } F \cap G \neq \emptyset \end{pmatrix} \}$



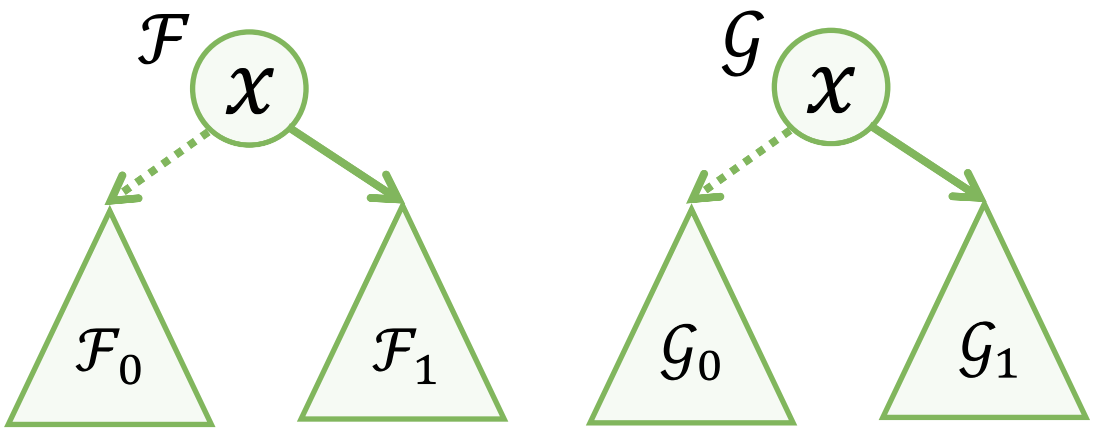



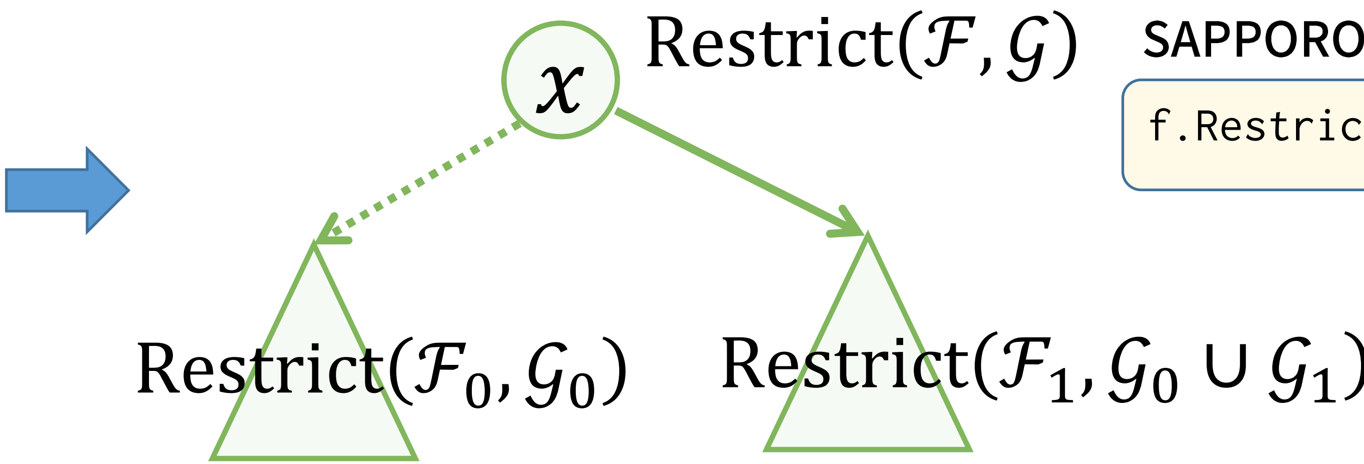

SAPPOROBDD

```
---
```

# Restrict

- $\mathrm{Restrict}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ F \in \mathcal{F} \mid \exists G \in \mathcal{G},\ F \supseteq G \}$



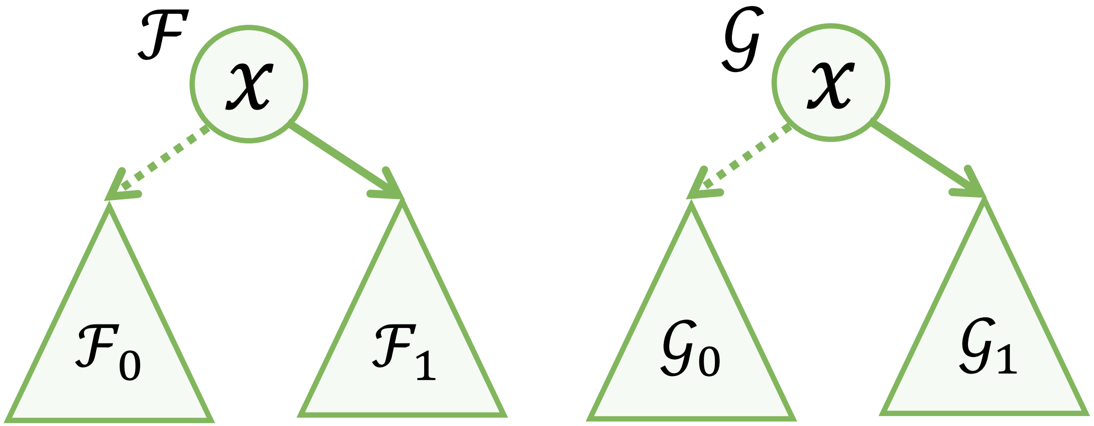



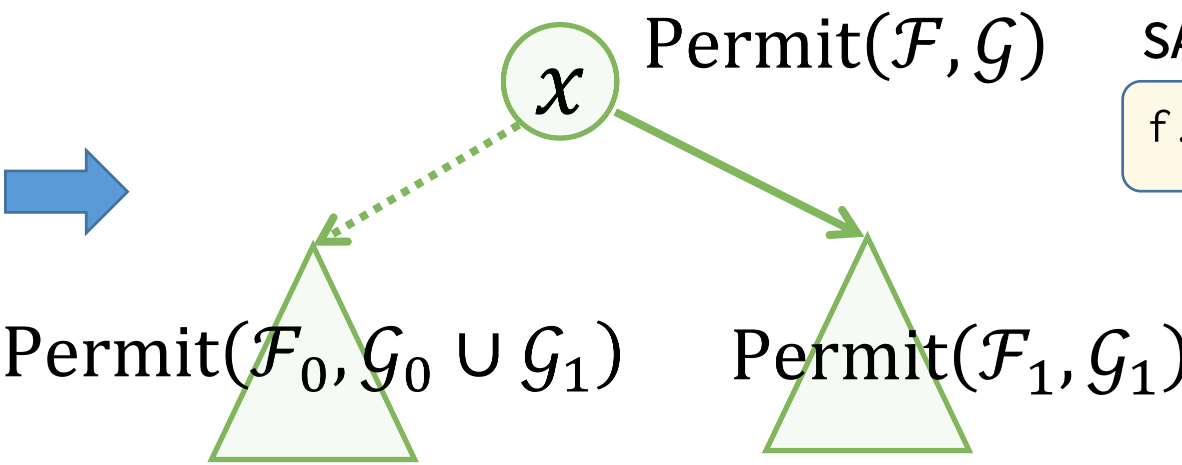

**SAPPOROBDD**

```
f.Restrict(ZBDD g);
```

# Permit

- $\mathrm{Permit}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\, F \in \mathcal{F} \mid \exists G \in \mathcal{G},\ F \subseteq G\}$



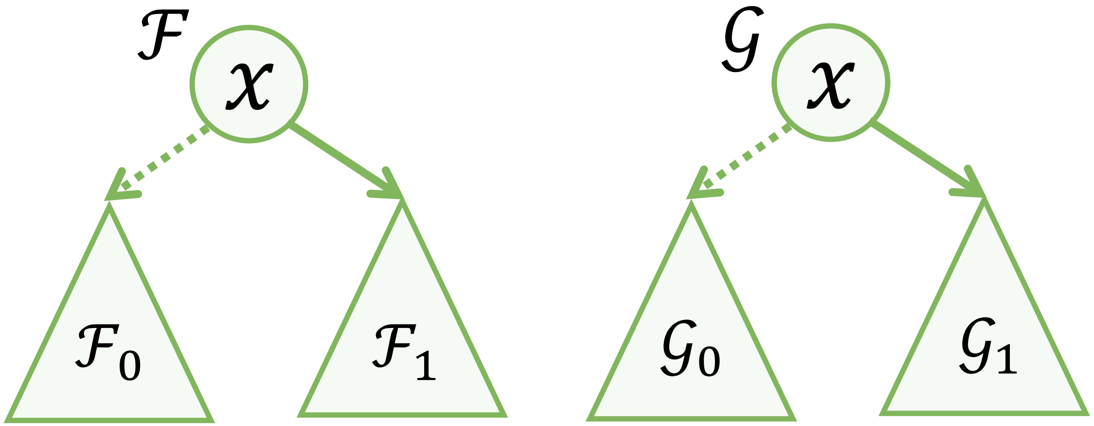




**SAPPOROBDD**

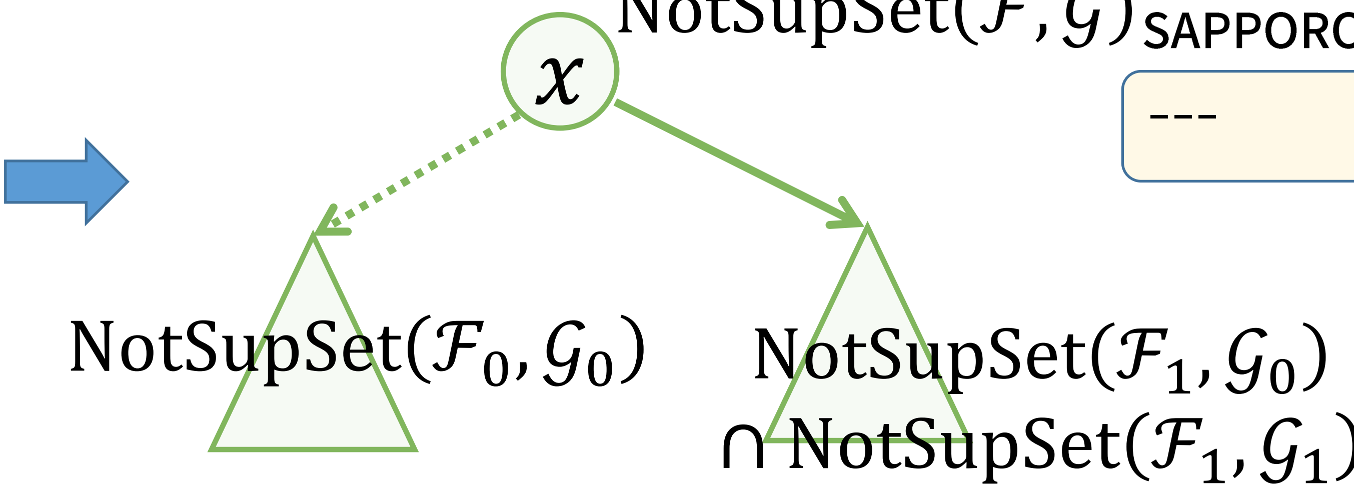
```
f.Permit(ZBDD g);
```

# Not Superset

- $\mathrm{NotSupSet}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\, F \in \mathcal{F} \mid \forall G \in \mathcal{G},\ F \not\supseteq G \}$



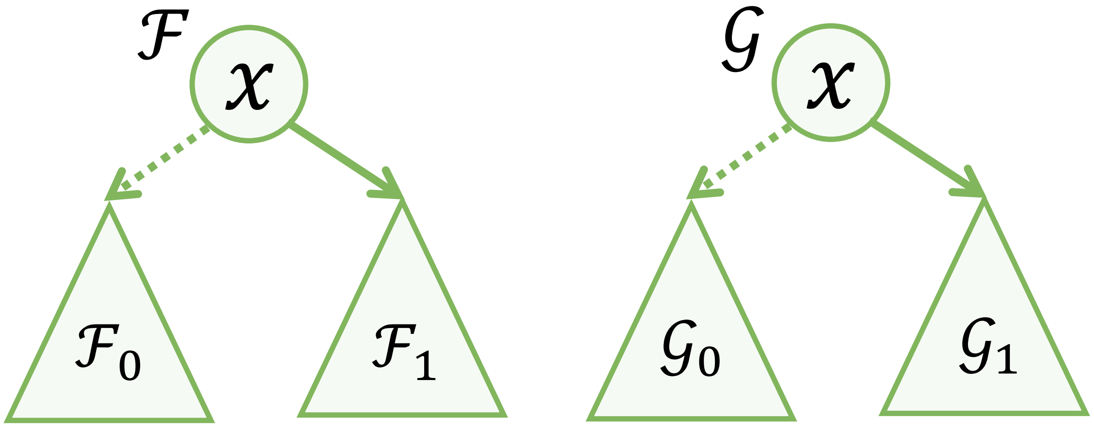

$\mathrm{NotSupSet}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ SAPPOROBDD

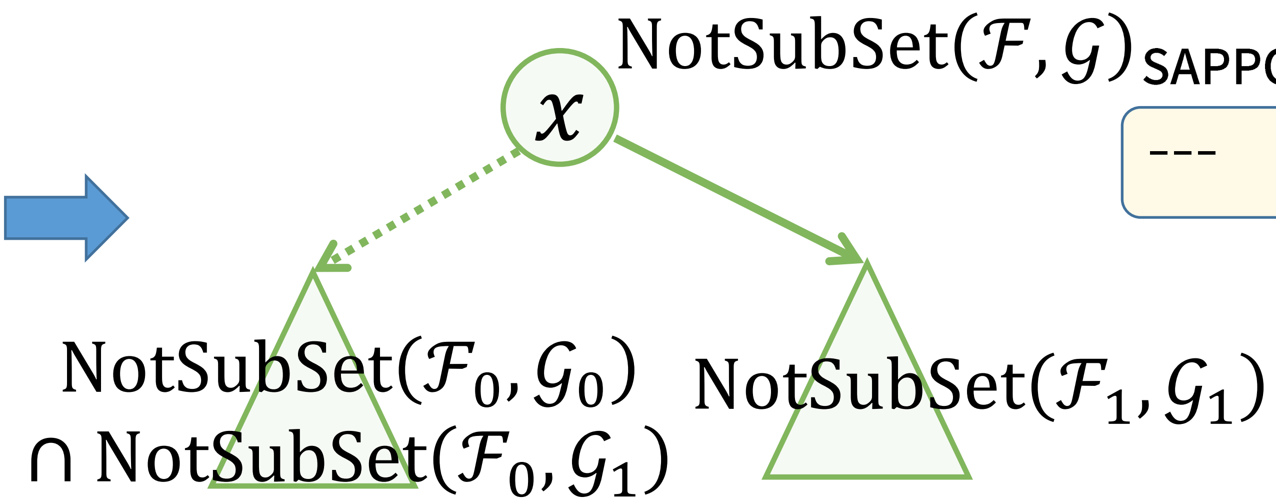



---

# Not Subset

- $\mathrm{NotSubSet}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\, F \in \mathcal{F} \mid \forall G \in \mathcal{G},\ F \not\subseteq G\}$



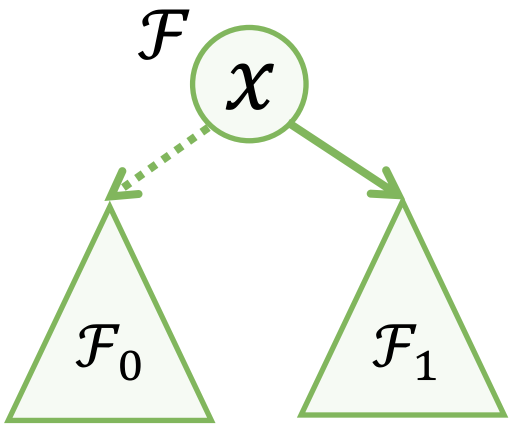



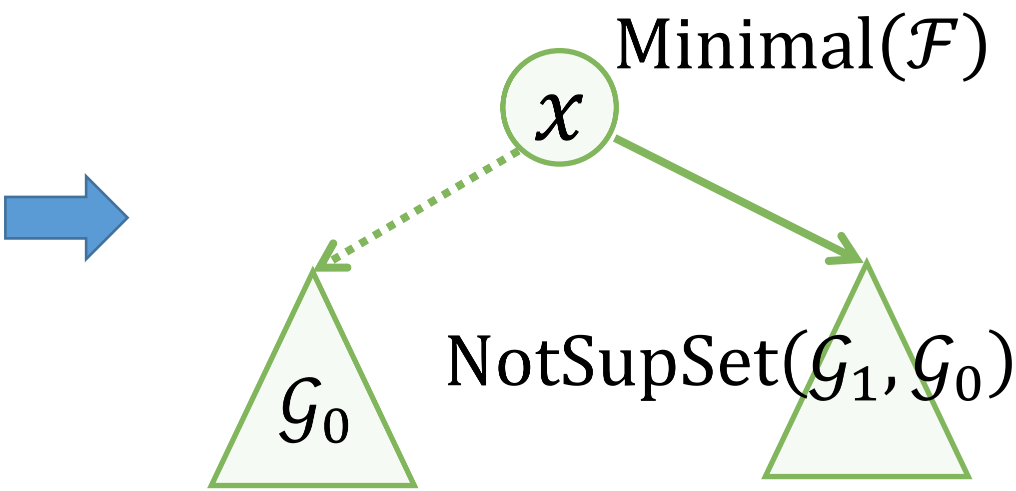

SAPPOROBDD

---

# Minimal

- $\mathrm{Minimal}(\mathcal{F}) = \{\, F \in \mathcal{F} \mid \forall A \in \mathcal{F},\ (A = F \text{ or } A \not\subsetneq F)\}$




SAPPOROBDD

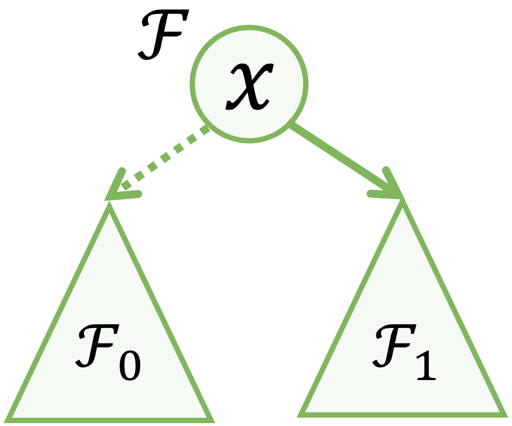
---

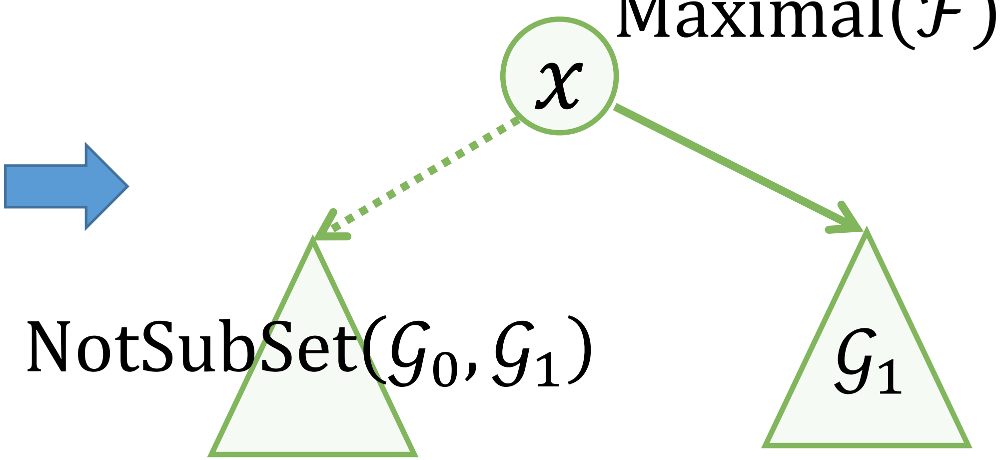
$\mathcal{G}_0 = \mathrm{Minimal}(\mathcal{F}_0)$

$\mathcal{G}_1 = \mathrm{Minimal}(\mathcal{F}_1)$

# Maximal

- $\mathrm{Maximal}(\mathcal{F}) = \{\, F \in \mathcal{F} \mid \forall A \in \mathcal{F},\ (A = F \text{ or } A \not\supseteq F)\}$




SAPPOROBDD

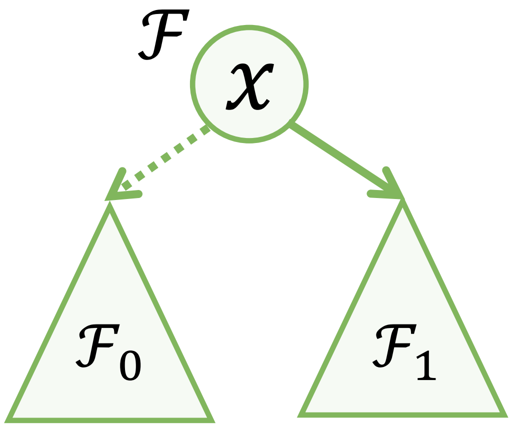
```
---
```

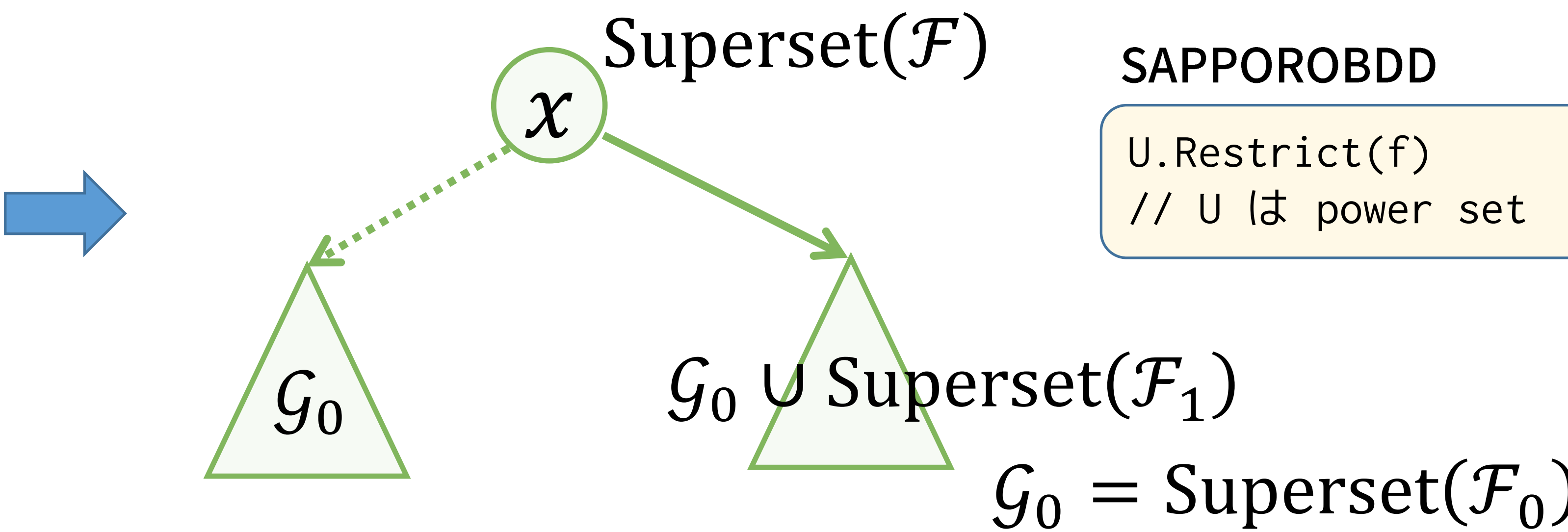
$\mathcal{G}_0 = \mathrm{Maximal}(\mathcal{F}_0)$

$\mathcal{G}_1 = \mathrm{Maximal}(\mathcal{F}_1)$

# Superset

- $\mathrm{Superset}(\mathcal{F}) = \{ A \mid \exists F \in \mathcal{F}, A \supseteq F \}$



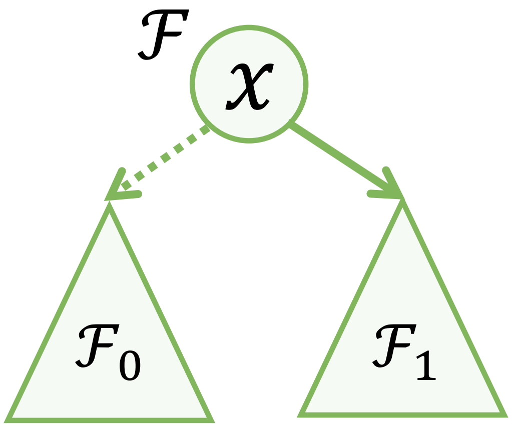



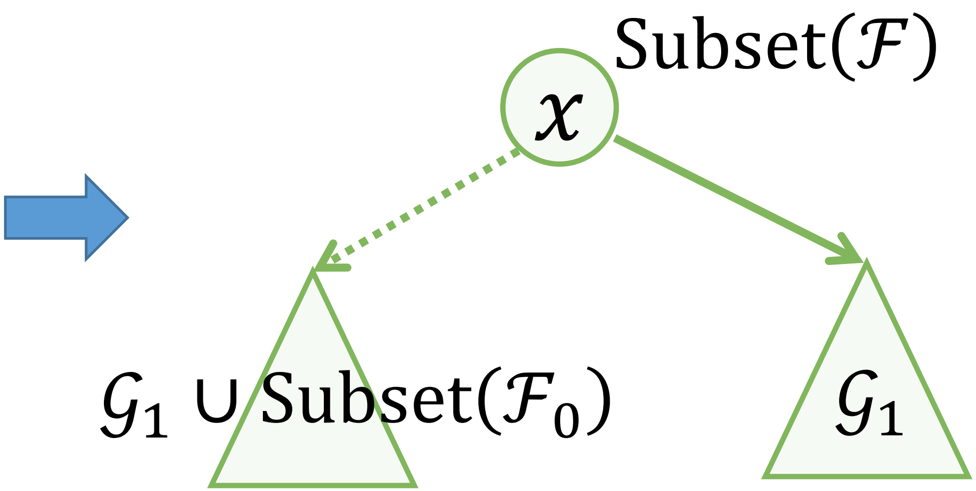

**SAPPOROBDD**

```
U.Restrict(f)
// U は power set
```

# Subset

- $\mathrm{Subset}(\mathcal{F}) = \{ A \mid \exists F \in \mathcal{F}, A \subseteq F \}$



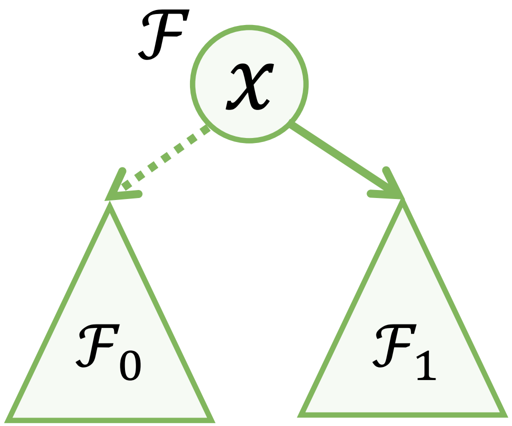

$\mathcal{G}_1 = \mathrm{Subset}(\mathcal{F}_1)$

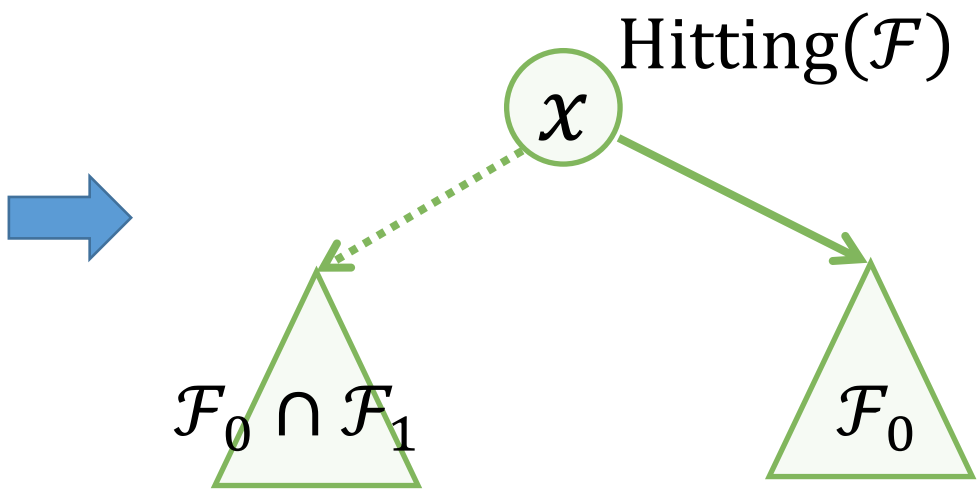
**SAPPOROBDD**

```
U.Permit(f)
// U は power set
```

# Hitting set

- $\text{Hitting}(\mathcal{F}) = \{ A \mid \forall F \in \mathcal{F},\ A \cap F \neq \emptyset\}$




SAPPOROBDD

---