

DD の再帰演算のカタログ

川原 純

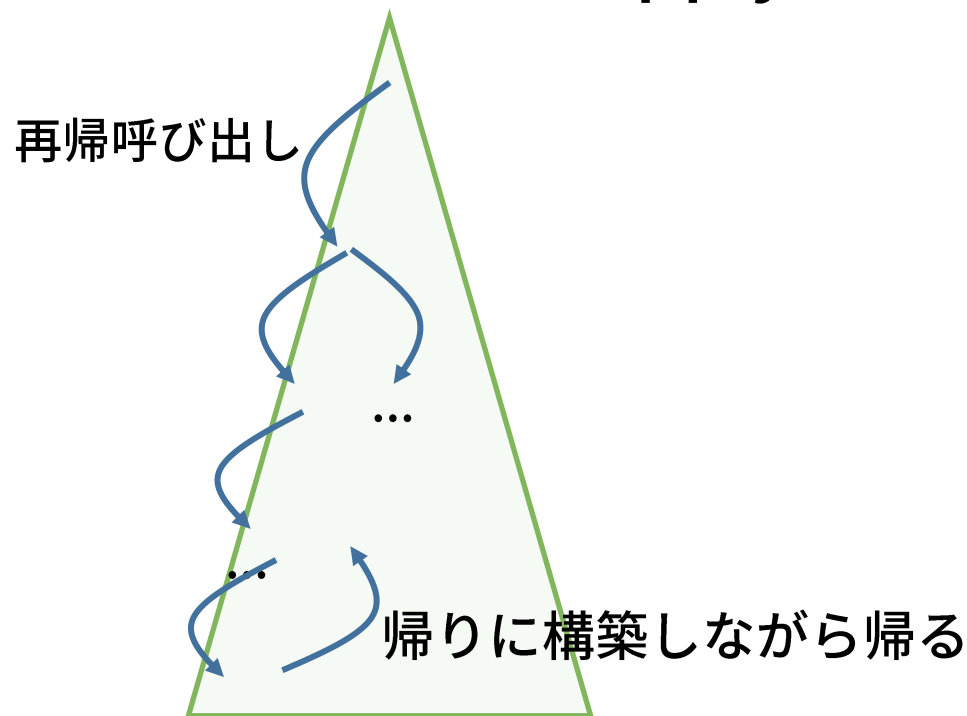
2022/7/29 版

本資料の目的

- ZDD の再帰演算の解説と、参考文献や実装に関する情報を提示
- ZDD の基本的な知識は既知であると仮定します。
- その他の情報
 - [dd_documents](#): DD に関する情報を集約
 - [部分グラフ集合を扱うDD アルゴリズム](#): DD のアルゴリズムを解説
 - [DD ライブラリ入門](#): DD を扱うライブラリを紹介
 - DD の再帰演算のカatalog: 本資料

ZDD の構築法: ボトムアップ

- ZDD の再帰構造を利用した ZDD 構築法をボトムアップ構築法、または Apply 演算という



ボトムアップ構築法の例:

和集合

差集合

共通部分集合

superset

subset

hitting set

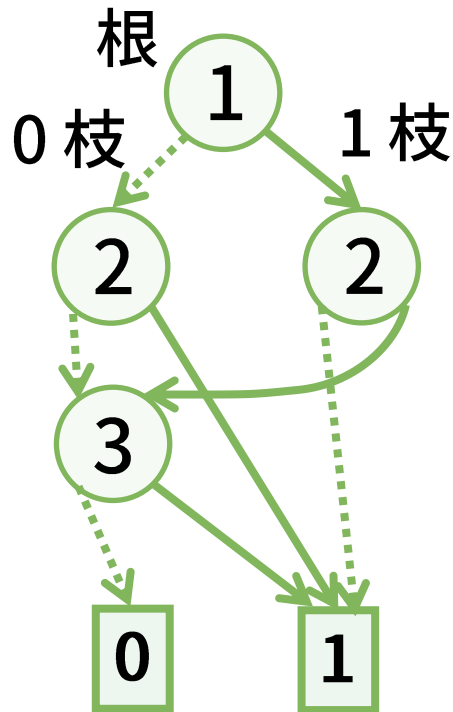
頂点・辺両方が故障する

可能性のあるネットワーク信頼性評価

[Kawahara+ 2019]

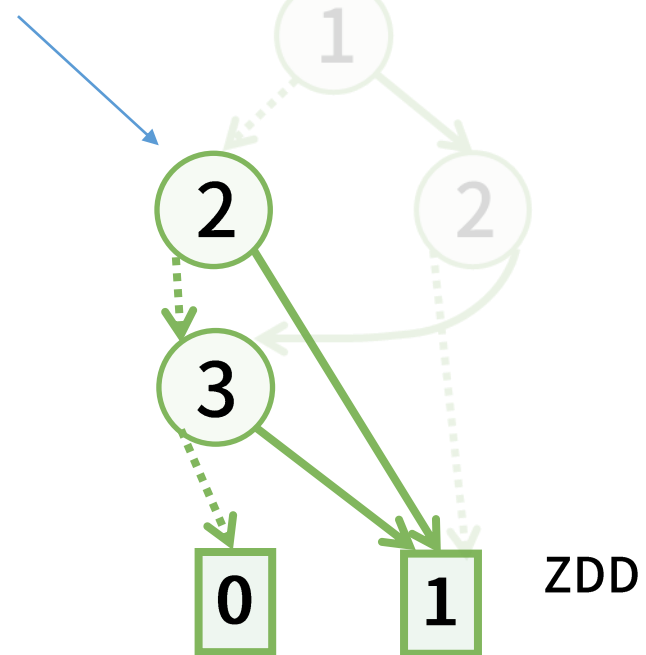
ZDD の構築法: ボトムアップ: ZDD の再帰構造

- 根の 0 枝の先から到達可能なノードもまた ZDD とみなせる



{ {1}, {2}, {3}, {1, 2, 3} }

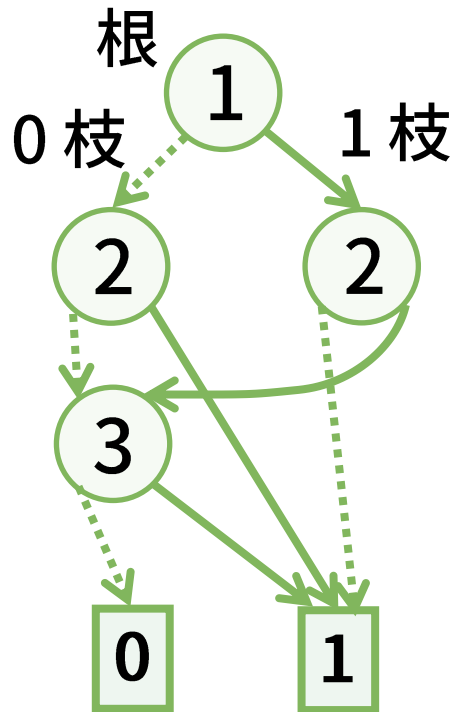
これは要素 1 を含まない集合の族



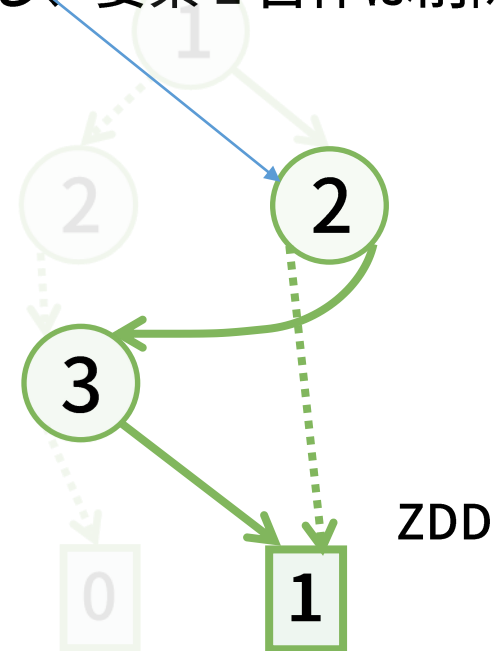
{ {2}, {3} }

ZDD の構築法: ボトムアップ: ZDD の再帰構造

- 同様に、根の 1 枝の先から到達可能なノードもまた ZDD とみなせる



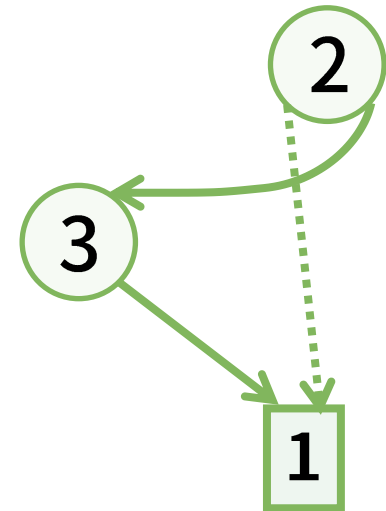
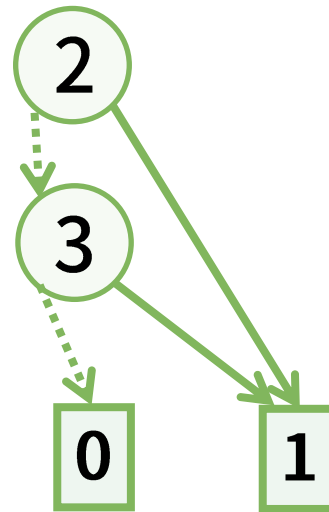
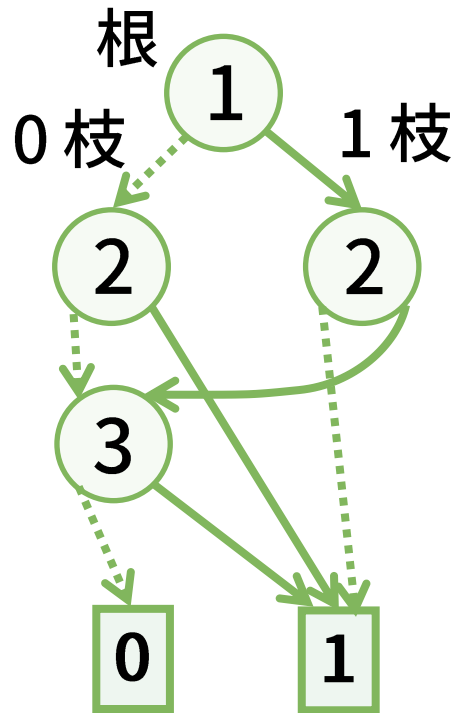
これは要素 1 を含む集合の族。
ただし、要素 1 自体は削除される



$\{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\} \}$ $\{ \{\}, \{2, 3\} \}$

ZDD の構築法: ボトムアップ: ZDD の再帰構造

- 集合族を 1 を含むものと含まないものに分解できる



$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\} = \{\{2\}, \{3\}\} \cup \{\{1\}\} \times \{\{\}, \{2, 3\}\}$$

演算子導入

ZDD の共通部分演算 (Intersection)

- 2つの集合族の共通部分を計算

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\} \cap \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\} \\ = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$$

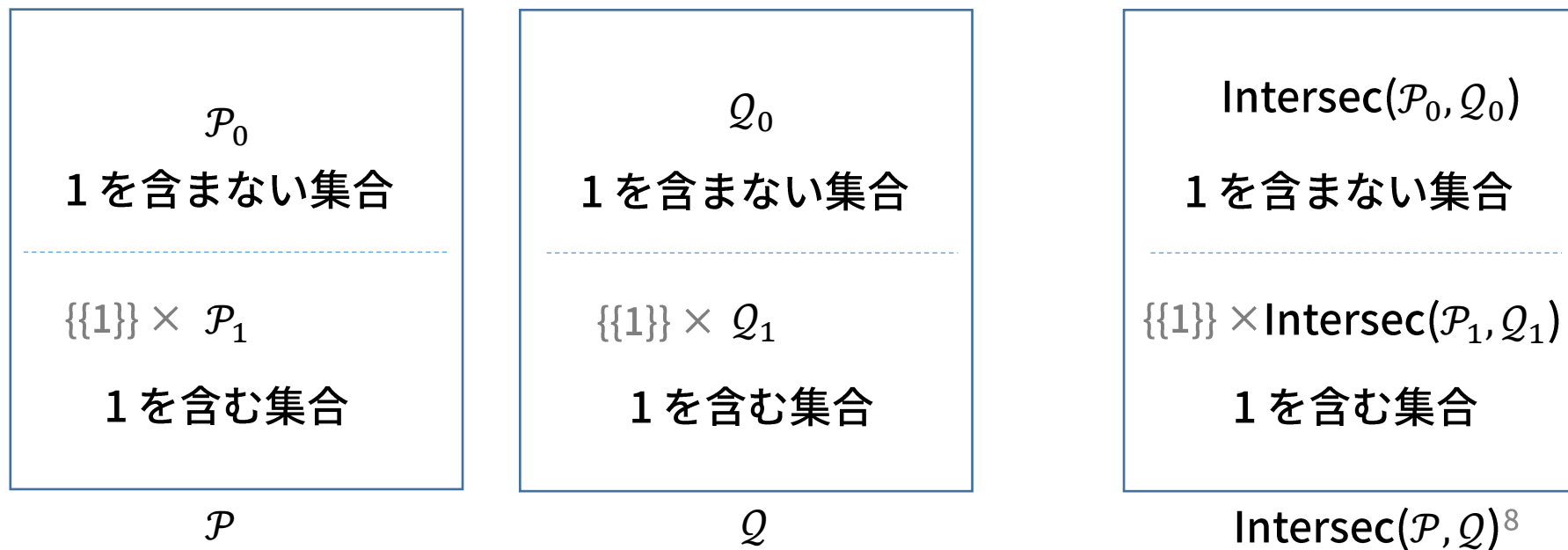
ZDD の共通部分演算 (Intersection)

- 2つの集合族の共通部分を計算

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\} \cap \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\} \\ = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$$

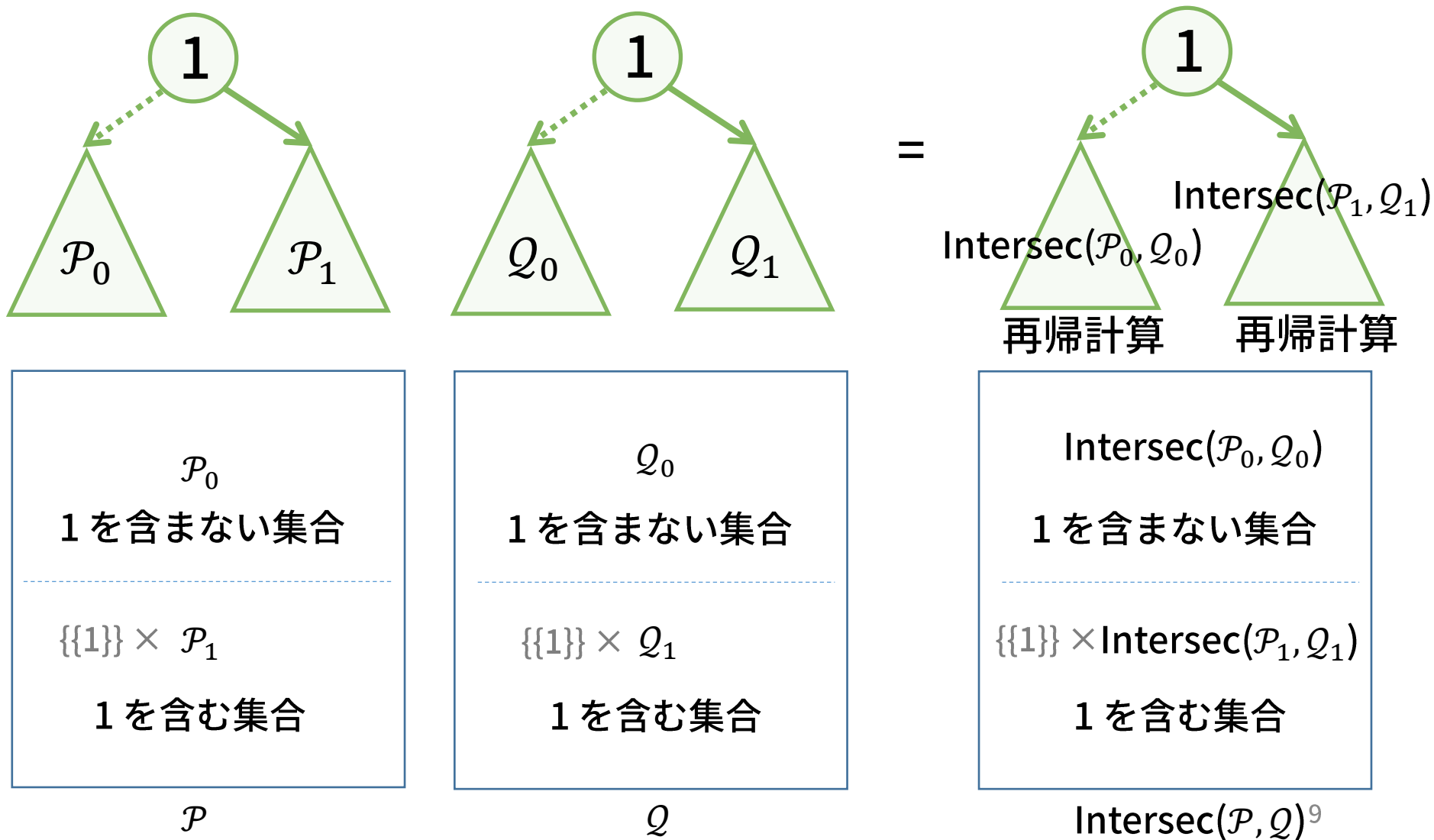
考え方: 再帰構造を用いる

集合族 \mathcal{P}, \mathcal{Q} に対し、 $\text{Intersec}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ とする



ZDD の共通部分演算 (Intersection)

- 2つの集合族の共通部分を計算

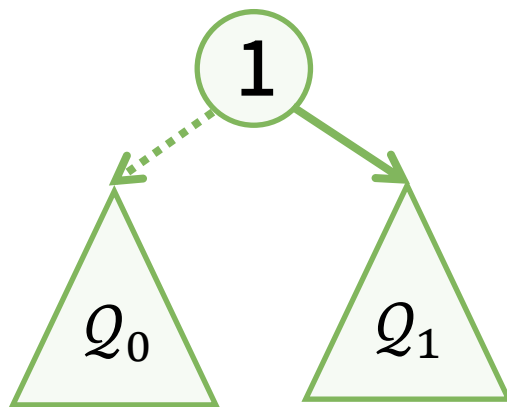
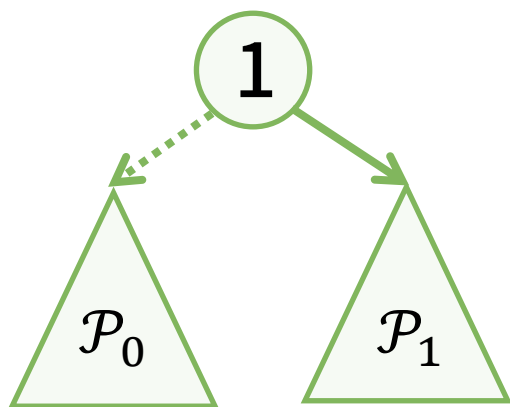


ZDD の共通部分演算 (Intersection)

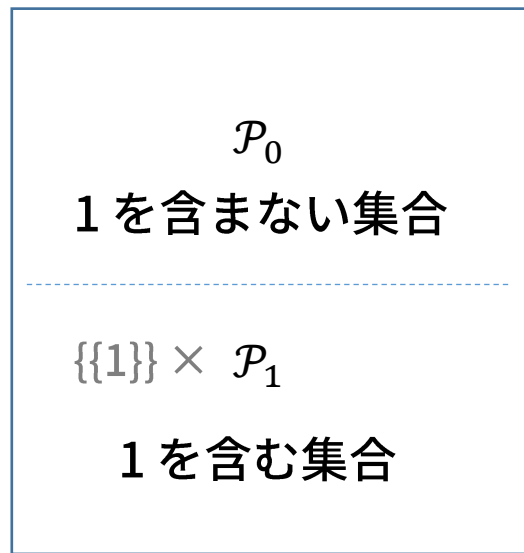
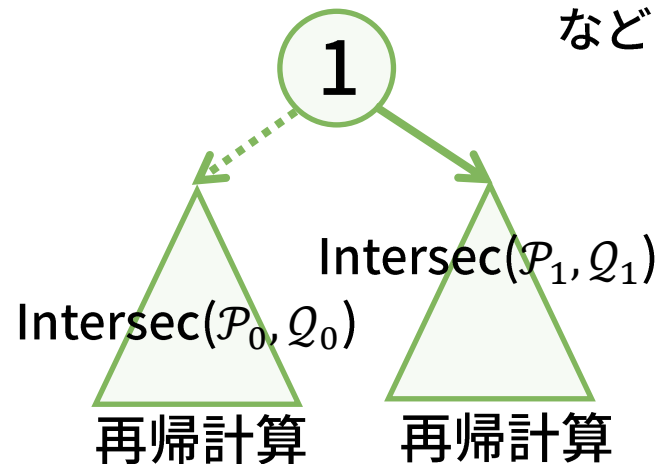
- 2つの集合族の共通部分を計算

再帰の末端

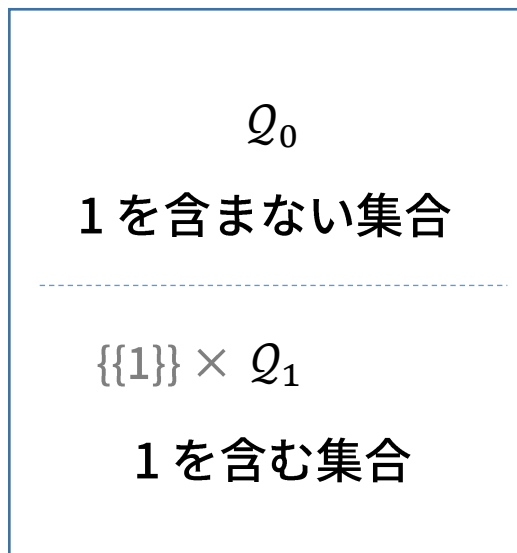
$$\text{Intersec}(\boxed{1}, \boxed{1}) = \boxed{1} \quad \text{など}$$



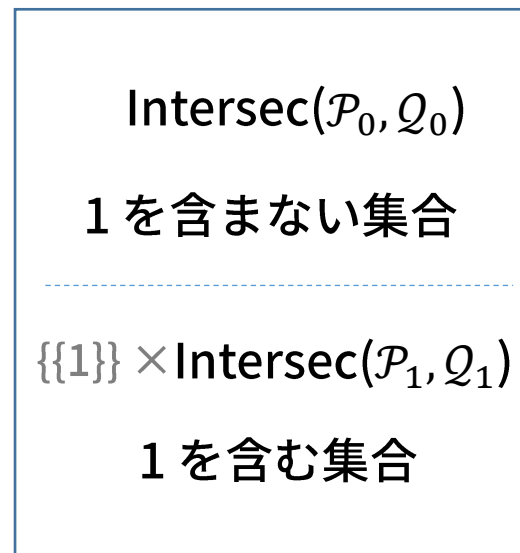
=



\mathcal{P}



\mathcal{Q}



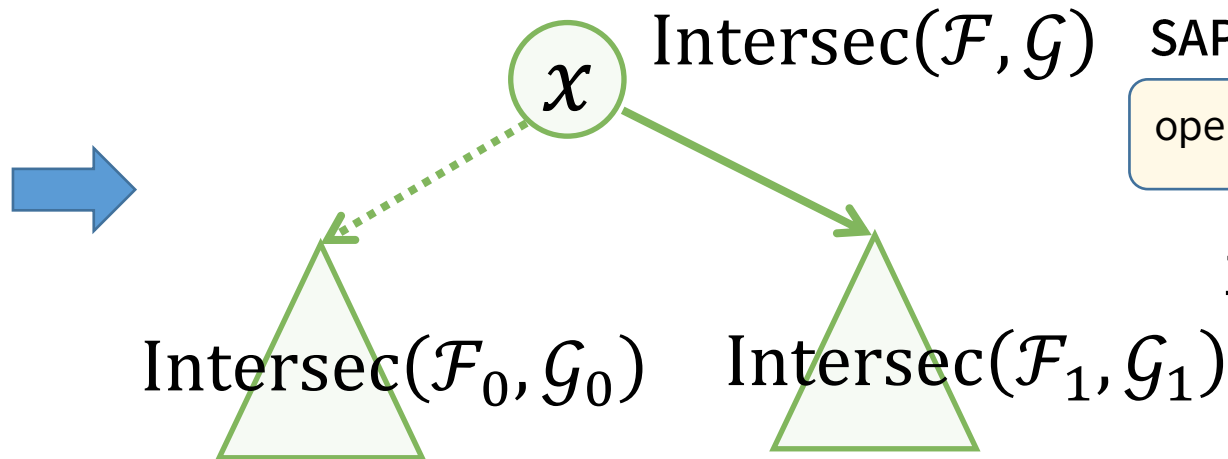
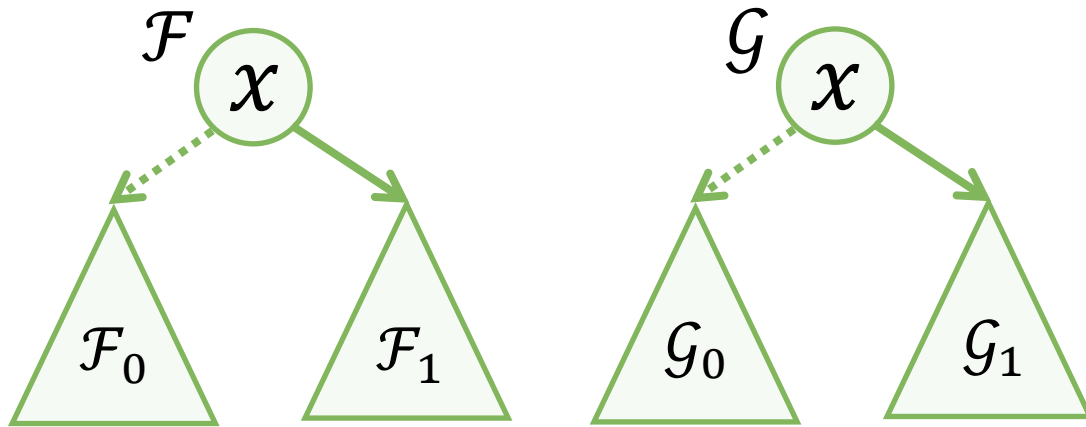
$\text{Intersec}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})^0$

演算カタログ

- 以下では、各演算をカタログ形式で紹介する。
- 2つの ZDD に対する演算と、1つの ZDD の演算がある
- 2つの ZDD が与えられた場合、根の変数ラベルが同じ場合と異なる場合で挙動が異なる。また、片方の ZDD が 0/1-終端の場合も特別な動作をする場合が多い。本ドキュメントでは省略することもある
- 再帰の末端は書いていないことがある
- 集合族は花文字 (\mathcal{F}, \mathcal{G} など)、集合は大文字 (F, G など)、要素は小文字 (f, g など) で書く

Intersection

- $\text{Intersec}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ A \mid A \in \mathcal{F} \text{ and } A \in \mathcal{G} \}$



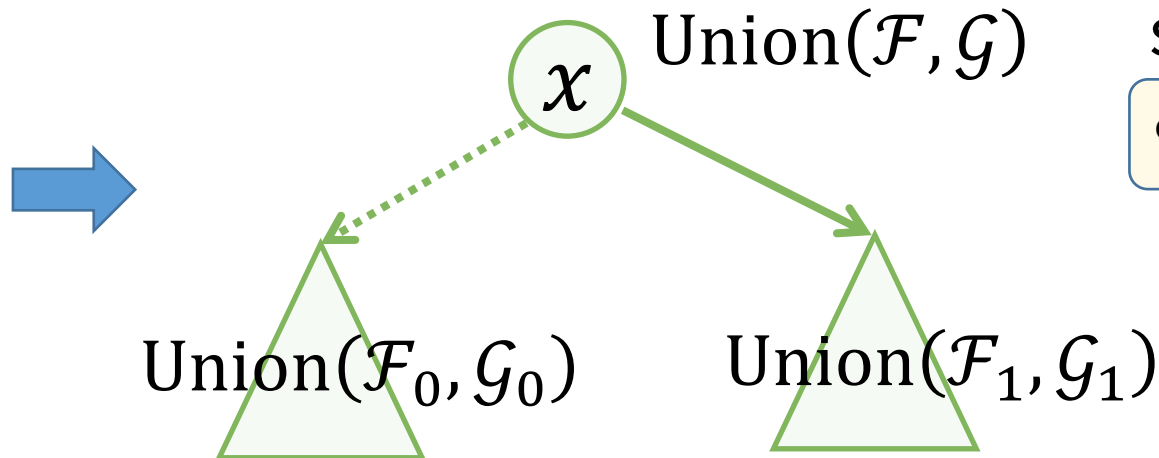
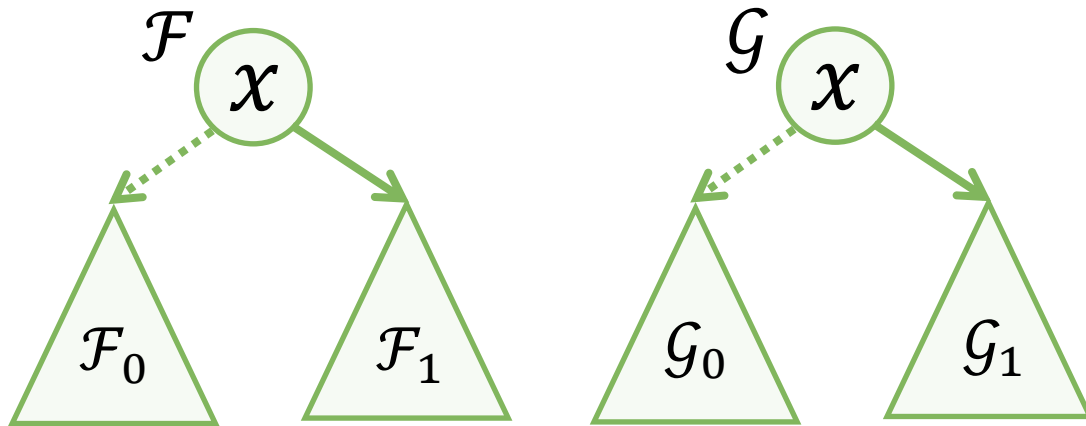
SAPPOROBDD

```
operator&(ZBDD f, ZBDD g);
```

正確には `const ZBDD&` である

Union

- $\text{Union}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ A \mid A \in \mathcal{F} \text{ or } A \in \mathcal{G} \}$

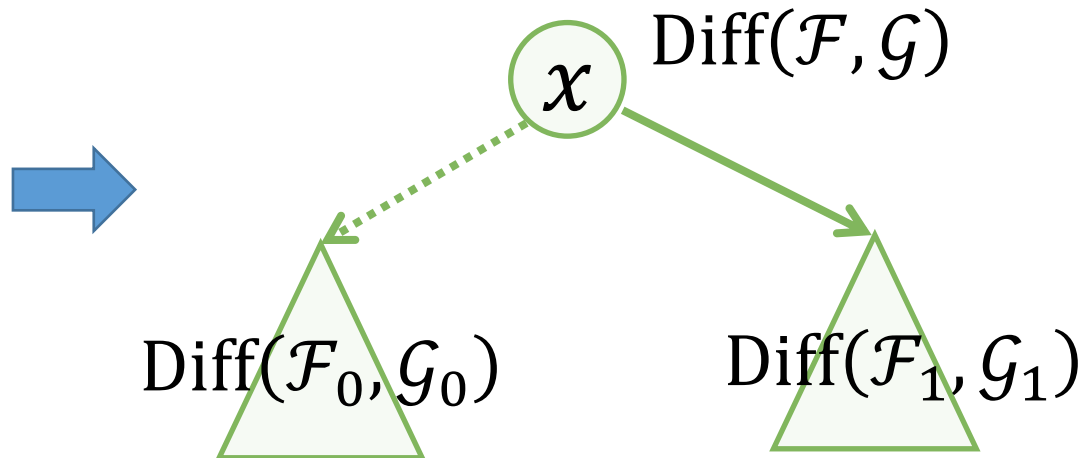
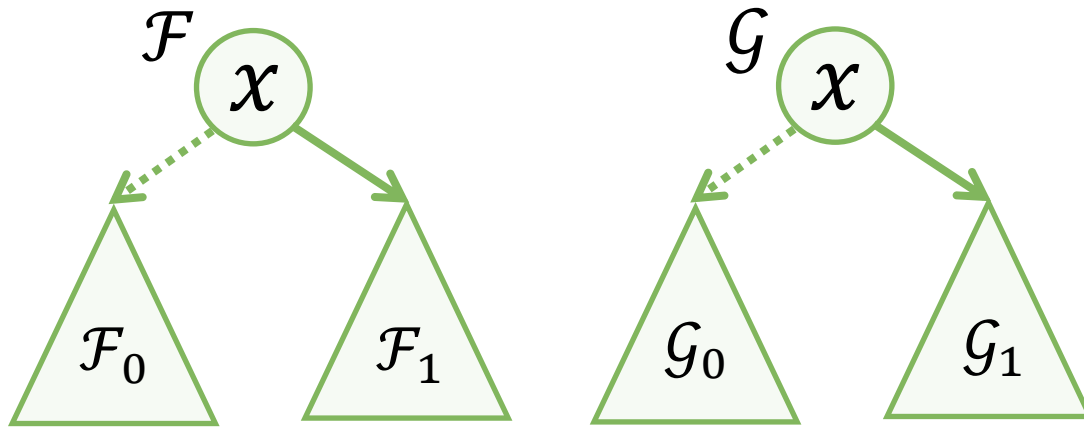


SAPPOROBDD

```
operator+(ZBDD f, ZBDD g);
```

Difference

- $\text{Diff}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ A \mid A \in \mathcal{F} \text{ and } A \notin \mathcal{G} \}$

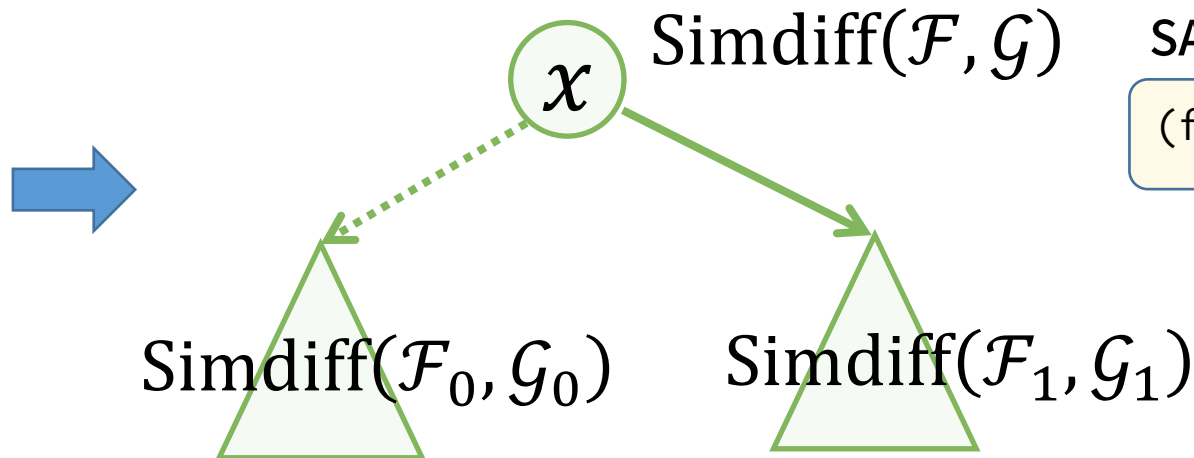
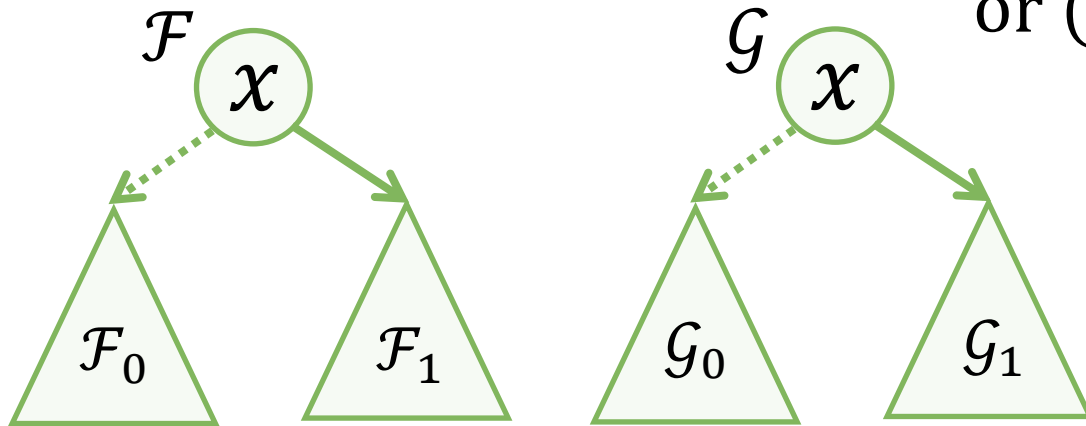


SAPPOROBDD

```
operator-(ZBDD f, ZBDD g);
```

Symmetric Difference

- $\text{Simdiff}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ A \mid (A \in \mathcal{F} \text{ and } A \notin \mathcal{G}) \text{ or } (A \notin \mathcal{F} \text{ and } A \in \mathcal{G}) \}$

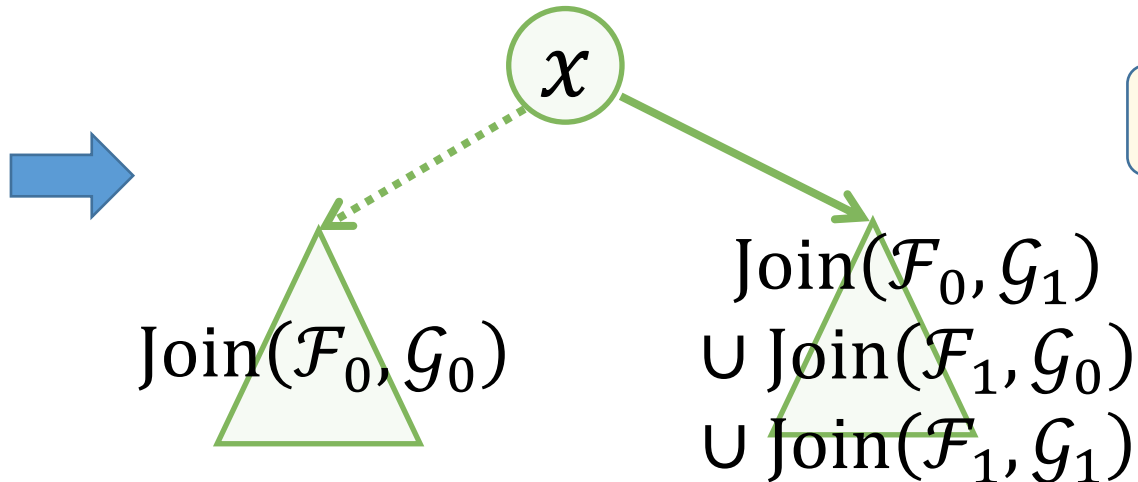
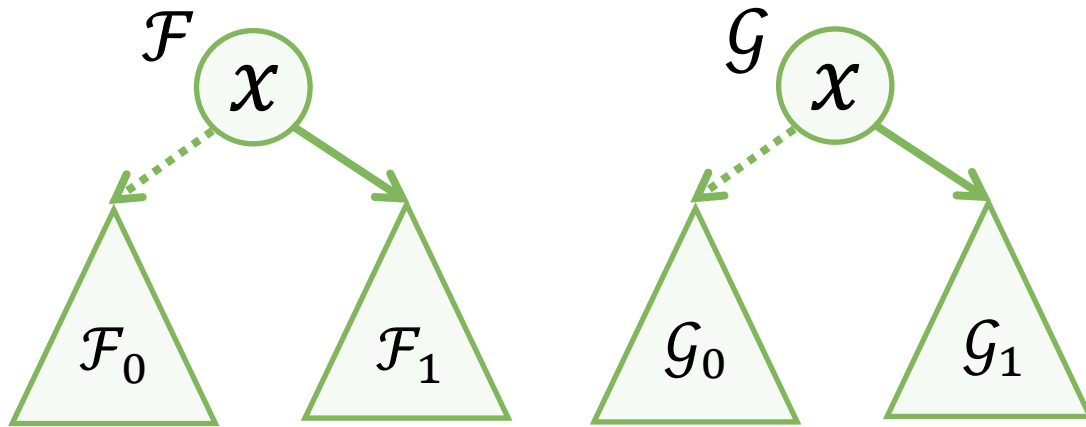


SAPPOROBDD

$$(f - g) + (g - f)$$

Join

- $\text{Join}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ F \cup G \mid (F \in \mathcal{F} \text{ and } G \in \mathcal{G}) \}$

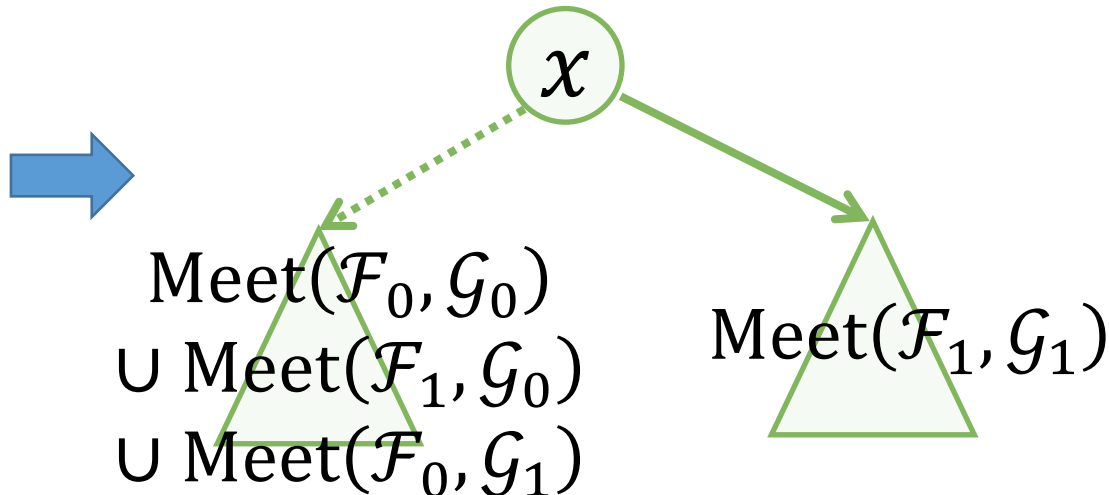
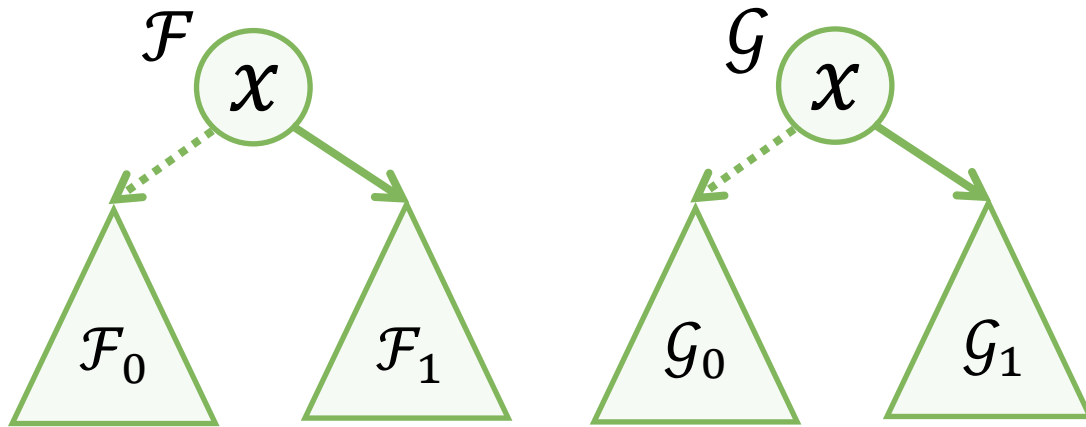


SAPPOROBDD

```
operator*(ZBDD f, ZBDD g);
```


Meet

- $\text{Meet}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ F \cap G \mid (F \in \mathcal{F} \text{ and } G \in \mathcal{G}) \}$

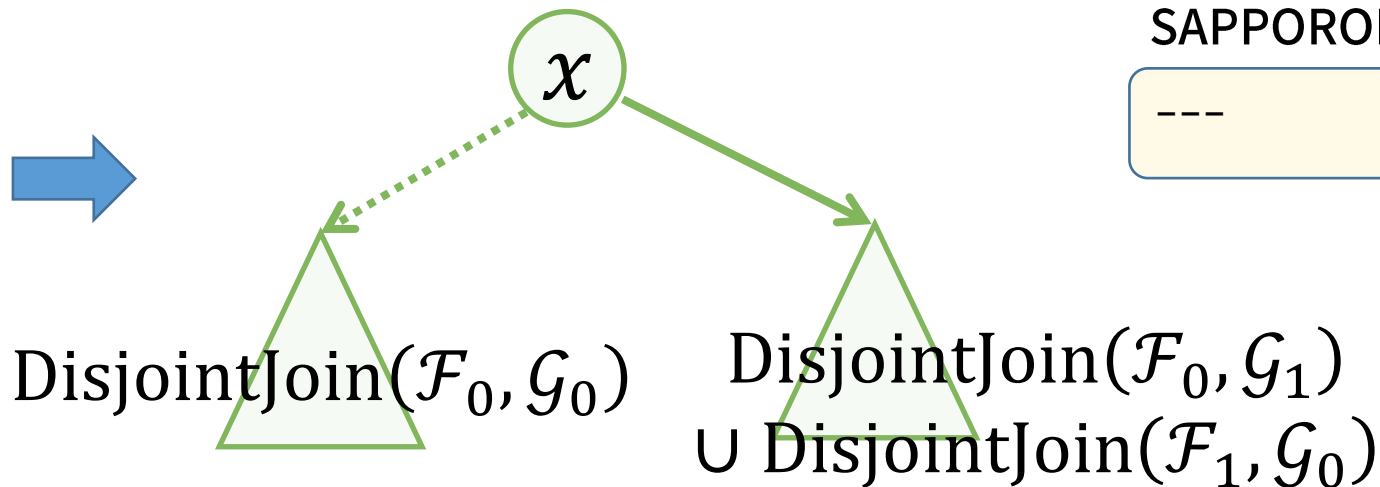
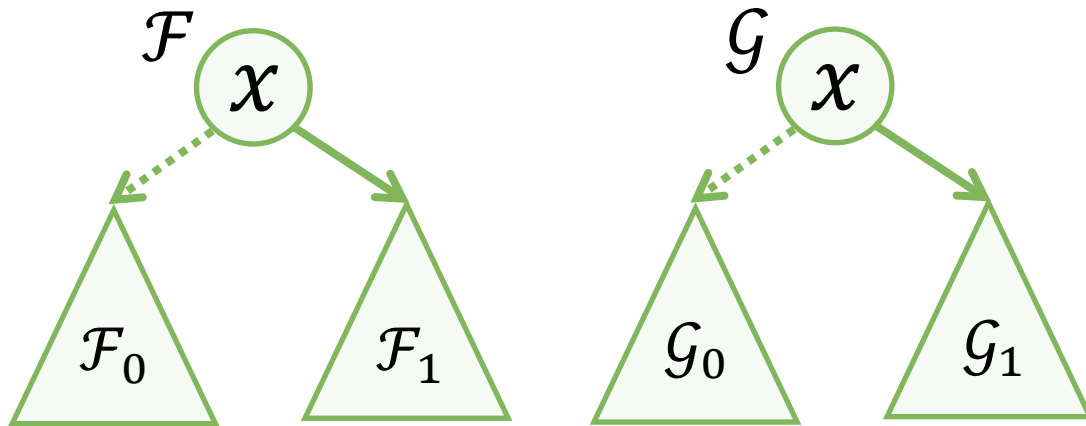


SAPPROBDD

```
ZBDD_Meet(ZBDD f, ZBDD g);
```

Disjoint Join

- $\text{DisjointJoin}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ F \cup G \mid \begin{pmatrix} F \in \mathcal{F} \text{ and } G \in \mathcal{G} \\ \text{and } F \cap G = \emptyset \end{pmatrix} \}$

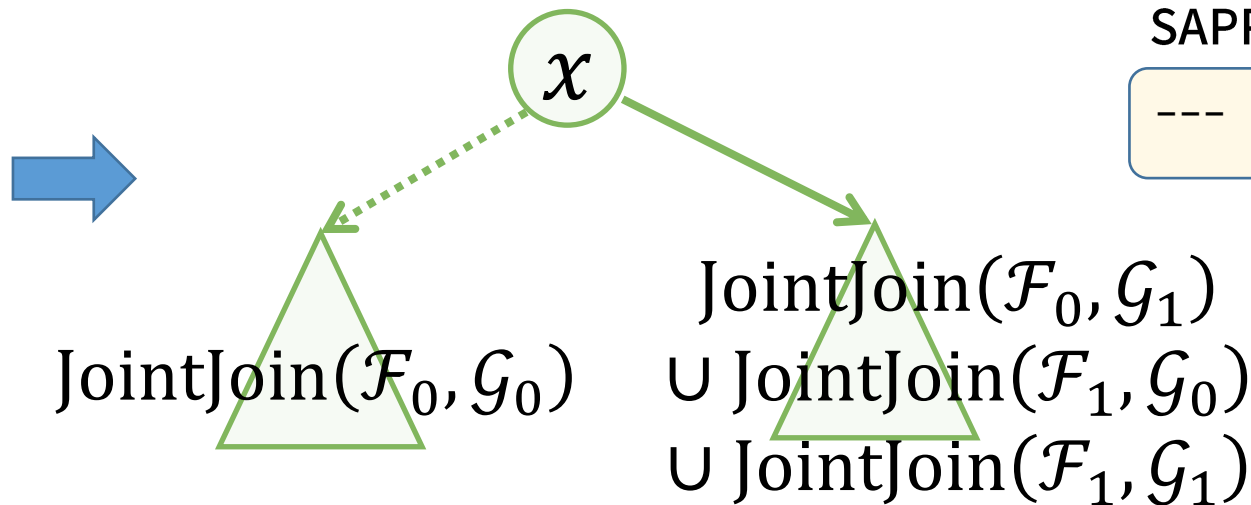
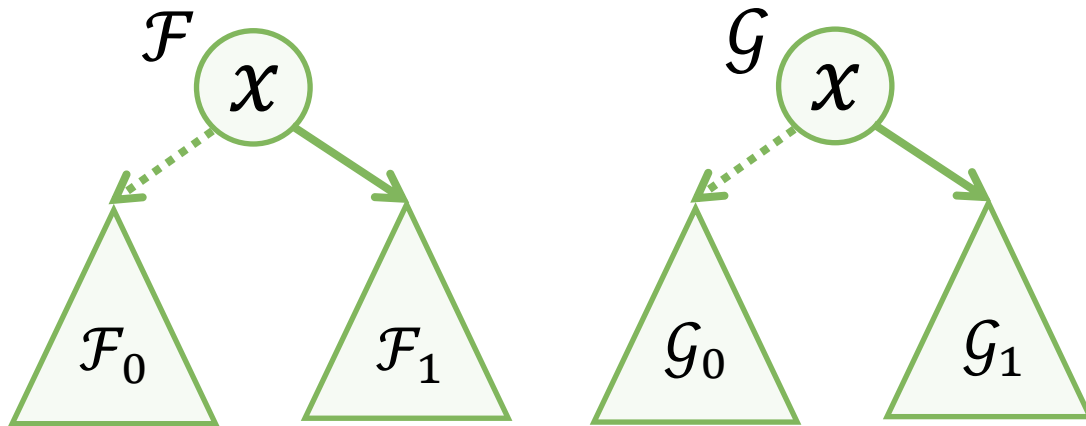


SAPPOROBDD



Joint Join

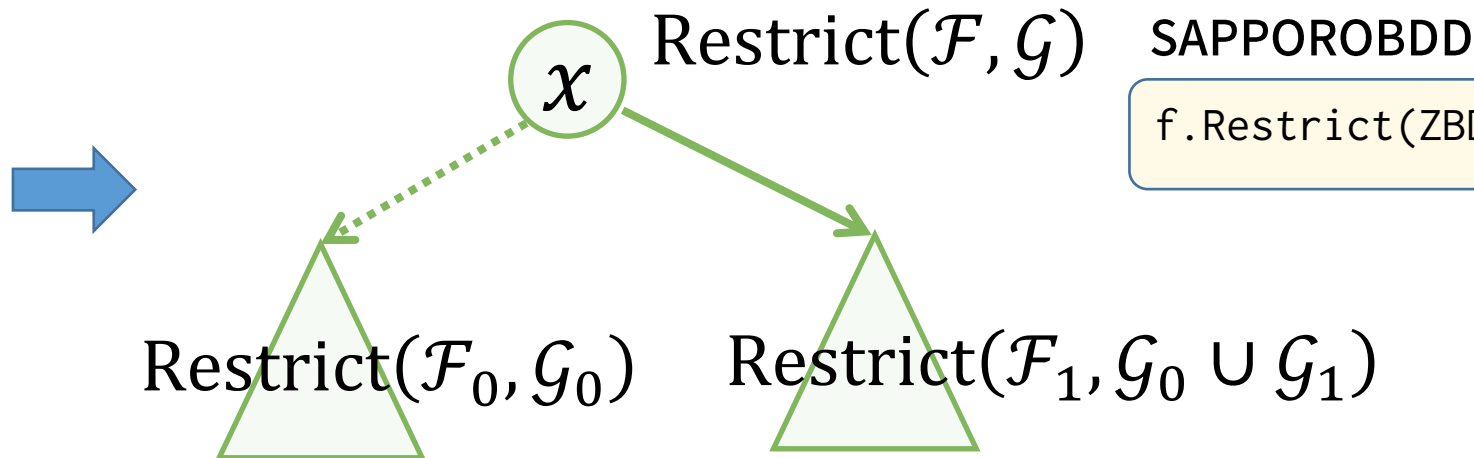
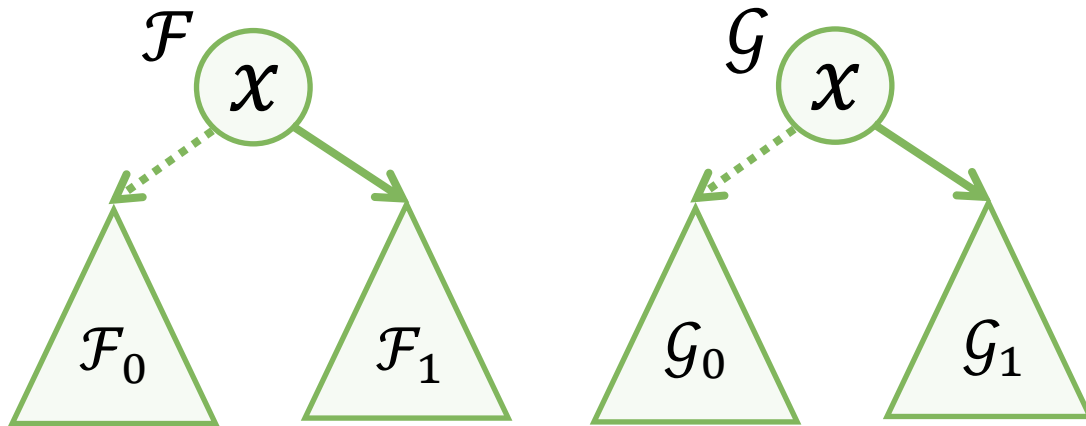
- $\text{JointJoin}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ F \cup G \mid \begin{array}{l} (F \in \mathcal{F} \text{ and } G \in \mathcal{G}) \\ \text{and } F \cap G \neq \emptyset \end{array} \}$



SAPPOROBDD

Restrict

- $\text{Restrict}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ F \in \mathcal{F} \mid \exists G \in \mathcal{G}, F \supseteq G \}$

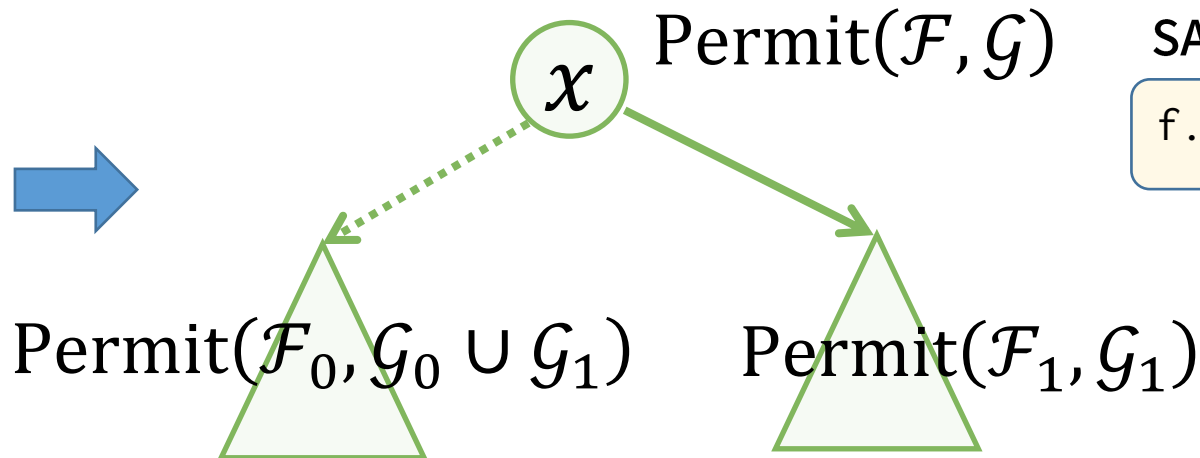
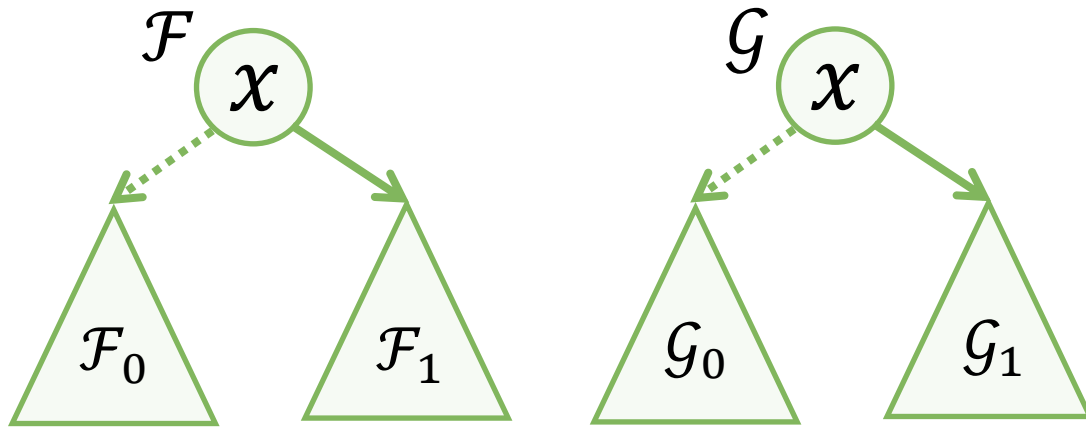


SAPPOROBDD

```
f.Restrict(ZBDD g);
```

Permit

- $\text{Permit}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ F \in \mathcal{F} \mid \exists G \in \mathcal{G}, F \subseteq G \}$

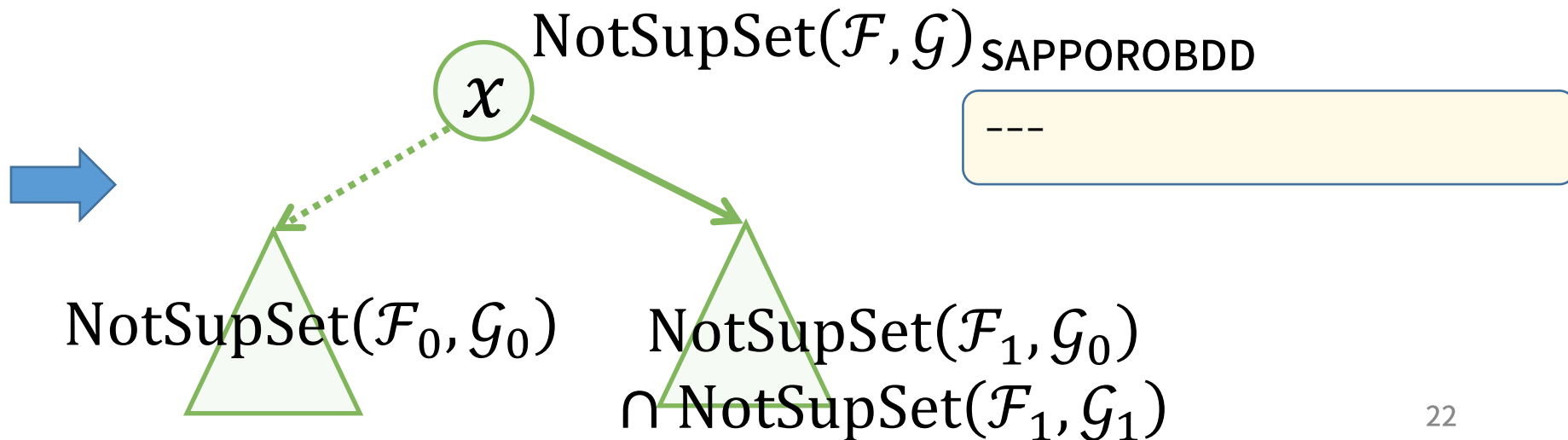
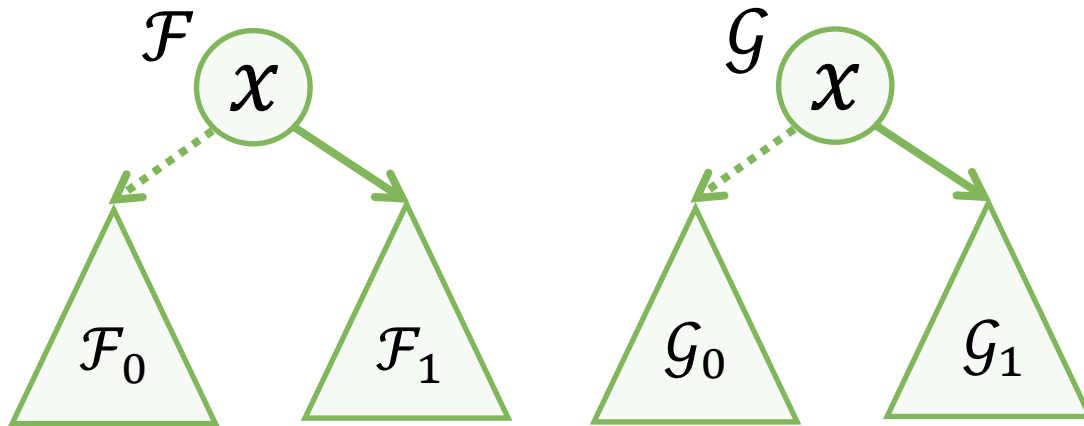


SAPPOROBDD

```
f.Permitt(ZBDD g);
```

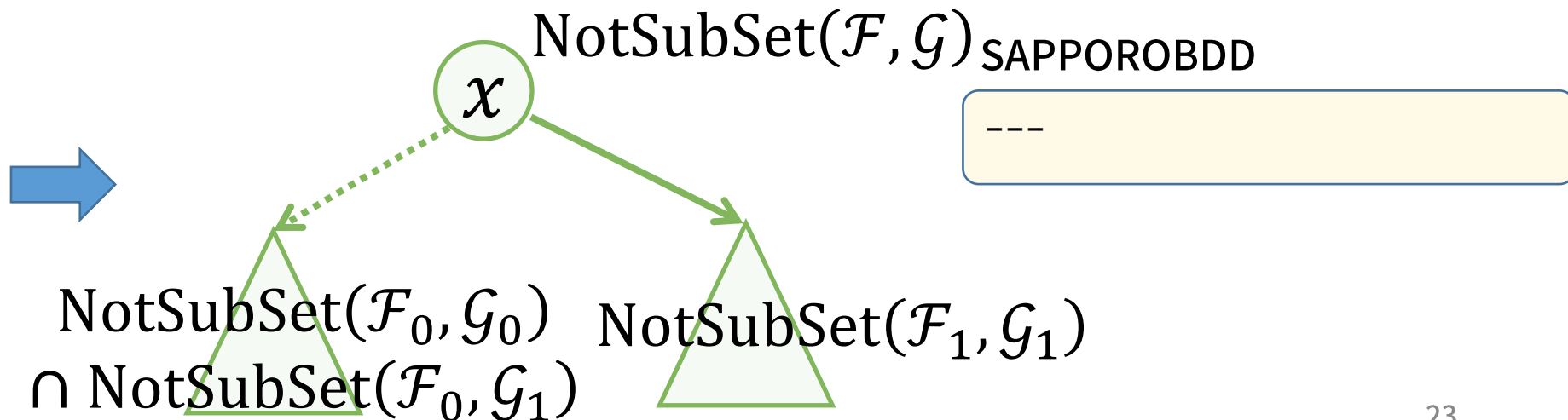
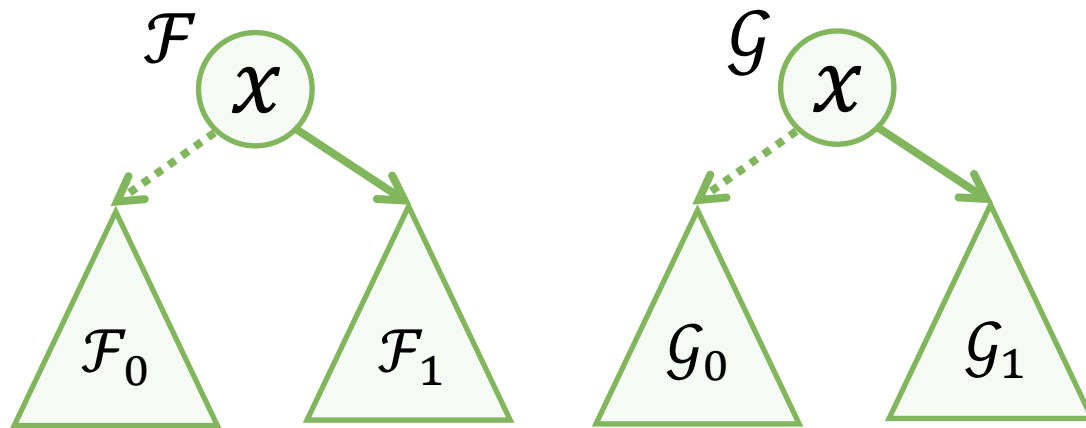
Not Superset

- $\text{NotSupSet}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ F \in \mathcal{F} \mid \forall G \in \mathcal{G}, F \not\supseteq G \}$



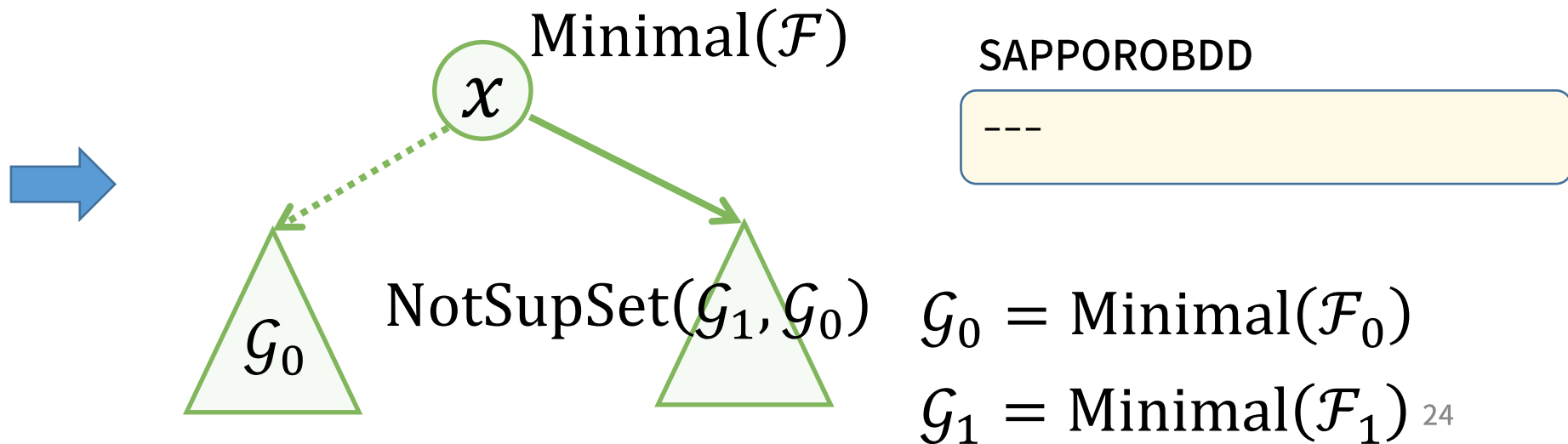
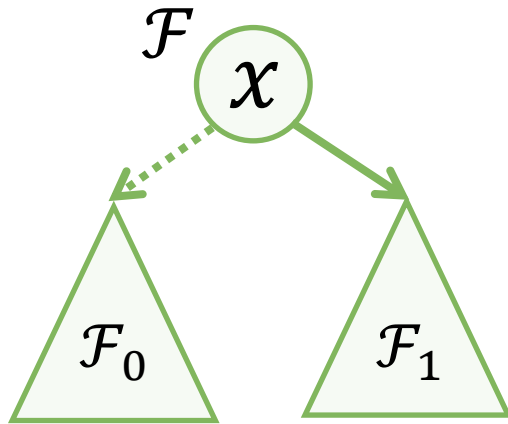
Not Subset

- $\text{NotSubSet}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{ F \in \mathcal{F} \mid \forall G \in \mathcal{G}, F \not\subseteq G \}$



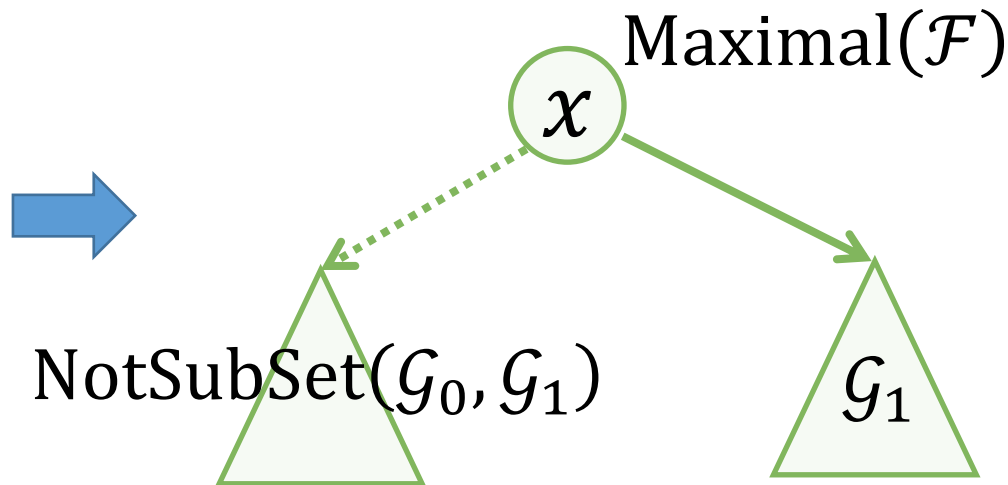
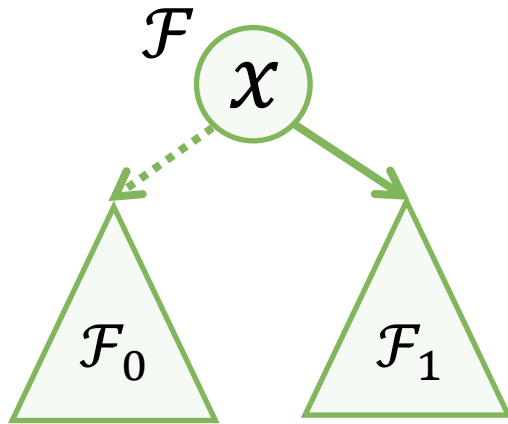
Minimal

- $\text{Minimal}(\mathcal{F}) = \{ F \in \mathcal{F} \mid \forall A \in \mathcal{F}, (A = F \text{ or } A \not\subseteq F) \}$



Maximal

- $\text{Maximal}(\mathcal{F}) = \{ F \in \mathcal{F} \mid \forall A \in \mathcal{F}, (A = F \text{ or } A \not\supseteq F) \}$



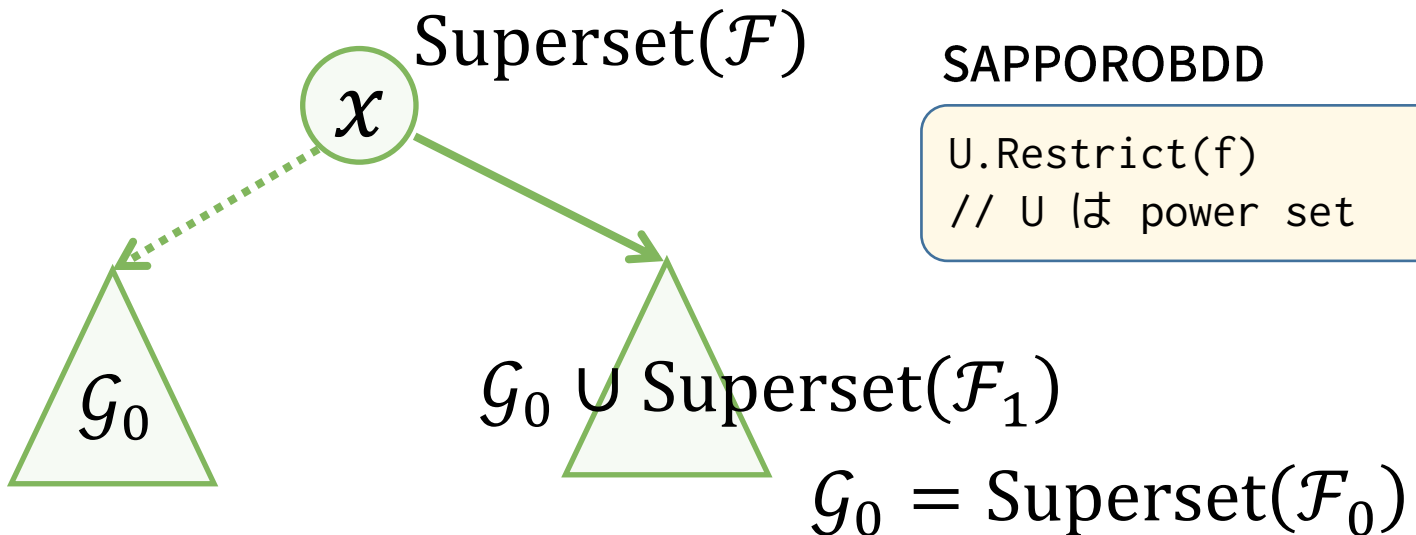
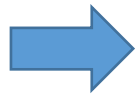
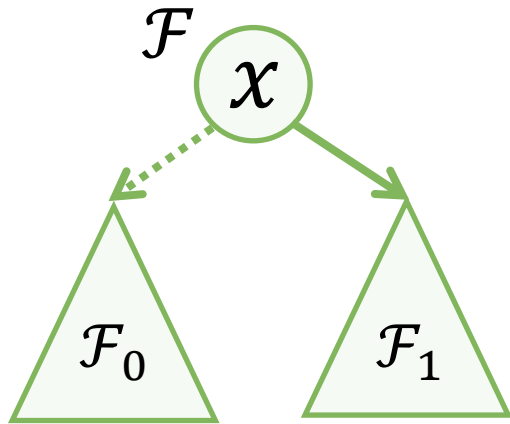
SAPPOROBDD

$$\mathcal{G}_0 = \text{Maximal}(\mathcal{F}_0)$$

$$\mathcal{G}_1 = \text{Maximal}(\mathcal{F}_1)$$

Superset

- $\text{Superset}(\mathcal{F}) = \{ A \mid \exists F \in \mathcal{F}, A \supseteq F \}$

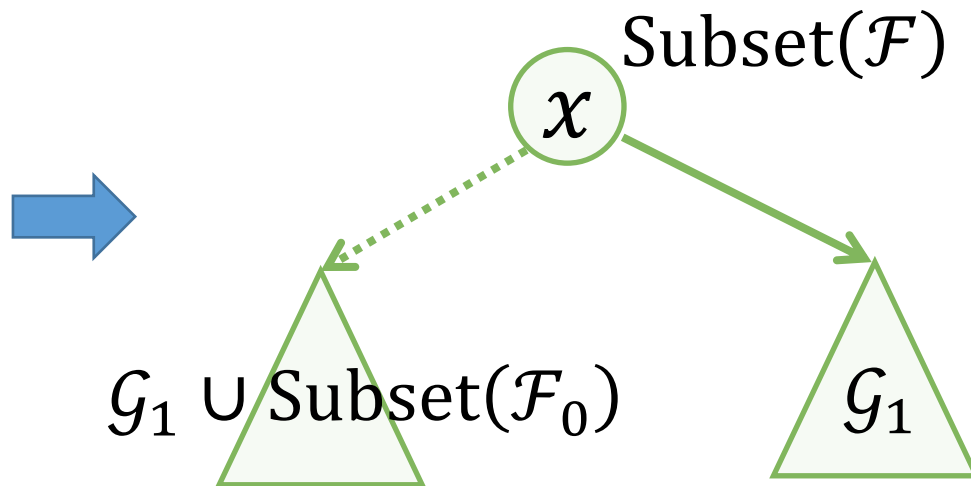
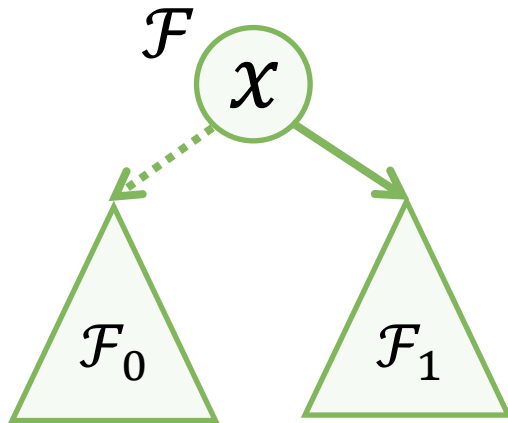


SAPPOROBDD

U.Restrict(f)
// U は power set

Subset

- $\text{Subset}(\mathcal{F}) = \{ A \mid \exists F \in \mathcal{F}, A \subseteq F \}$



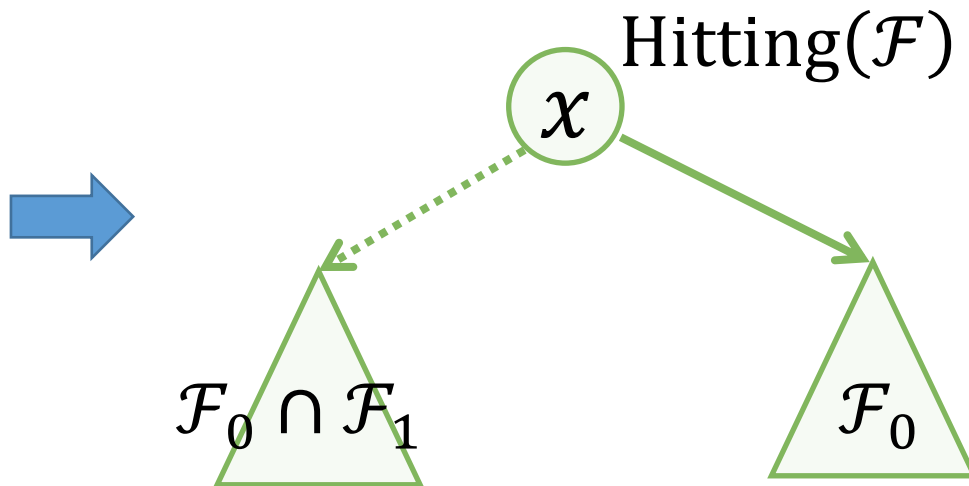
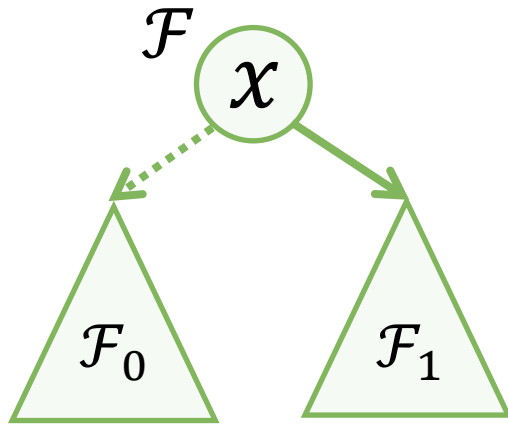
SAPPOROBDD

```
U.Permit(f)  
// U は power set
```

$$\mathcal{G}_1 = \text{Subset}(\mathcal{F}_1)$$

Hitting set

- $\text{Hitting}(\mathcal{F}) = \{ A \mid \forall F \in \mathcal{F}, A \cap F \neq \emptyset \}$



SAPPOROBDD
