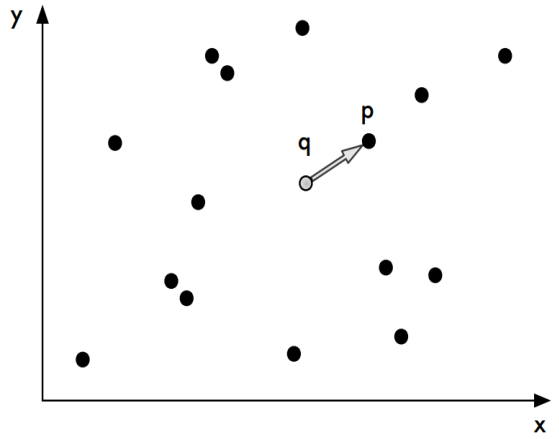
7. LSH

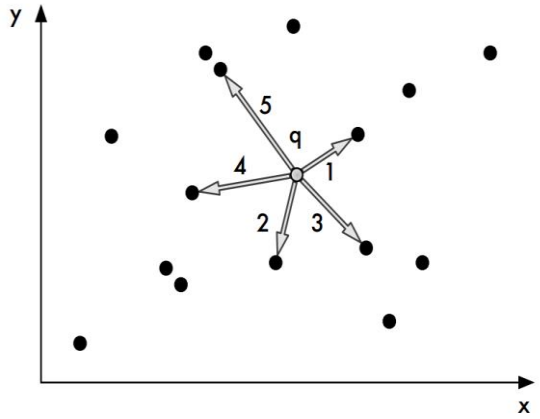
- 基于彩色直方图的图像特征提取
- LSH 预处理
- 检索算法流程

Why use LSH?

- 用 Nearest Neighbor (NN) 或 k-Nearest Neighbor (kNN)在数据库中检索和输入数据距离最近的1个或k个数据，一般情况下算法复杂度为 O(n)（例如暴力搜索），优化情况下可达到 O(log n)（例如二叉树搜索），其中 n 为数据库中的数据量。当数据库很大（即 n 很大时），搜索速度很慢。
- 而 LSH 算法可以很好的解决这一问题。在通常情况下，用户只需要得到被检索图片的一个近似即可，即在数据库中和输入数据距离最近的 1 个或 k 个数据。考虑到采用哈希可以将检索的开销降低至 O(1) 左右，只需增大相似图片发生哈希冲突的概率，即可在检索时优先检索到这些图片获得令人满意的结果。基于此，Aristides Gionis 等提出了一种可用于高维度数据检索的 LSH 算法。



NN



KNN

- [Aristides Gionis, Piotr Indyk, and Rajeev Motwani. Similarity Search in High Dimensions via Hashing.]

基于彩色直方图提取图像特征

图像特征提取

- 数据（图像、视频、音频等）都可以表示成一个 d 维的整数向量 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots p_d)$。
  其中 p_i 是整数，满足 $0 \le p_i \le C$，这里 C 是整数的上限。
- 在本实验中，每幅图像用一个 12 维的颜色直方图 $\mathbf{p}$ 表示，构成方式如图所示。
  其中 $H_i, i = 1,2,3,4$ 是3维颜色直方图。其可以表现各种颜色在图像各部分的分布情况，进而反映图像的特征。

特征向量量化

- 对于得到的特征向量，每个分量满足 $0 \le p_j \le 1$。
  将其按照以下规则量化，即将每个分量分别用 0，1，2 表示：

$$p_j = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \le p_j < 0.3 \\ 1, & \text{if } 0.3 \le p_j < 0.6 \\ 2, & \text{if } 0.6 \le p_j \end{cases}$$

- 也可以用别的量化方法，目的是使 0，1，2 的分布尽可能平均。

Locality-Sensitive Hashing

Fact 1

- d 维整数向量 **p** 可用 $d'=d*C$ 维的 Hamming 码表示：$v(\mathbf{p}) = \text{Unary}_C(p_1) \cdots \text{Unary}_C(p_d)$。
- 其中 $\text{Unary}_C(p_1)$ 表示 C 个二进制数，前 p_1 个为 1，后 $C-p_1$ 个为 0。
  如当 $C = 10$：$\text{Unary}_C(5) = 1111100000$；$\text{Unary}_C(3) = 1110000000$。
- 如 **p** = (0, 1, 2, 1, 0, 2)，这里 $d = 6$，$C = 2$，于是 $v(\mathbf{p}) = 00\ 10\ 11\ 10\ 00\ 11$。

Fact 2

- 选取集合 {1, 2, …, d'} 的 L 个子集 $\{I_i\}_{i=1}^{L}$，定义 $v(\mathbf{p})$ 在集合 $Ii = \{i_1, i_2, \cdots i_m\}: 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le d'$ 上的投影为 $g_i(\mathbf{p}) = p_{i1}p_{i2}\cdots p_{im}$，其中 p_{ij} 为 $v(\boldsymbol{p})$ 的第 i_j 个元素。
  对于上述 **p**，它在 {1, 3, 7, 8} 上的投影为 (0, 1, 1, 0)。

Locality-Sensitive Hashing - 计算方法

- 值得注意的是，一般不必显式的将 d 维空间中的点 **p** 映射到 d' 维 Hamming 空间向量 v(**p**)。
- 令 $\{I|i\}$ 表示 I 中范围在 $(i\text{-}1)*C+1 \sim i*C$ 中的坐标，则 v(**p**) 在 I 上的投影即是 v(**p**) 在 $\{I|i\}(i = 1, 2, \ldots, d)$ 上的投影串联。v(**p**) 在 $\{I|i\}$ 上的投影是一串 1 紧跟一串 0 的形式，需要求出 1 的个数，并进行串联。
- 如 $I = \{1, 3, 7, 8\}$，则 $\{I/1\} = \{1\}$，$\{I/2\} = \{3\}$，$\{I/3\} = \emptyset$，$\{I/4\} = \{7, 8\}$，$\{I/5\} = \emptyset$，$\{I/6\} = \emptyset$。
  $\{I/1\}$ 中小于等于 $p_1 = 0$ 的个数为 0，投影：0；
  $\{I/2\}$ - 2 中小于等于 $p_2 = 1$ 的个数为 1，投影：1；
  $\{I/4\}$ - 3 * 2 中小于等于 $p_4 = 1$ 的个数为 1，投影：10；
  串联得到：(0, 1, 1, 0)。

LSH 预处理

- 首先，生成 l 个 Hash Table。最简单的生成 l 个 Hash Table 的方式即为生成 l 个 Hash 函数，即 $g(\mathbf{p})$。
- 对于容量为 N 的数据集 $P = \{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{N}$，$g(\mathbf{p})$ 可能的输出有 n 个，其中 n 远小于 N，这样就将原先的 N 个数据分成了 n 个类别，其中每个类别中的数据具有相同的 Hash 值，不同类别的数据具有不同的 Hash 值。由于采用了 LSH，具有类似的特征的数据发生冲突的概率更大。
- 在遇到冲突时，论文选择不插入对应的哈希表。这是由于当两个点距离很近时，其冲突的概率非常高，即会在多个哈希表中均发生冲突。放弃在某个哈希表中插入不会对最终结果产生显著影响，比较邻近的点仍然会被找到。
- 具体的算法见伪代码。

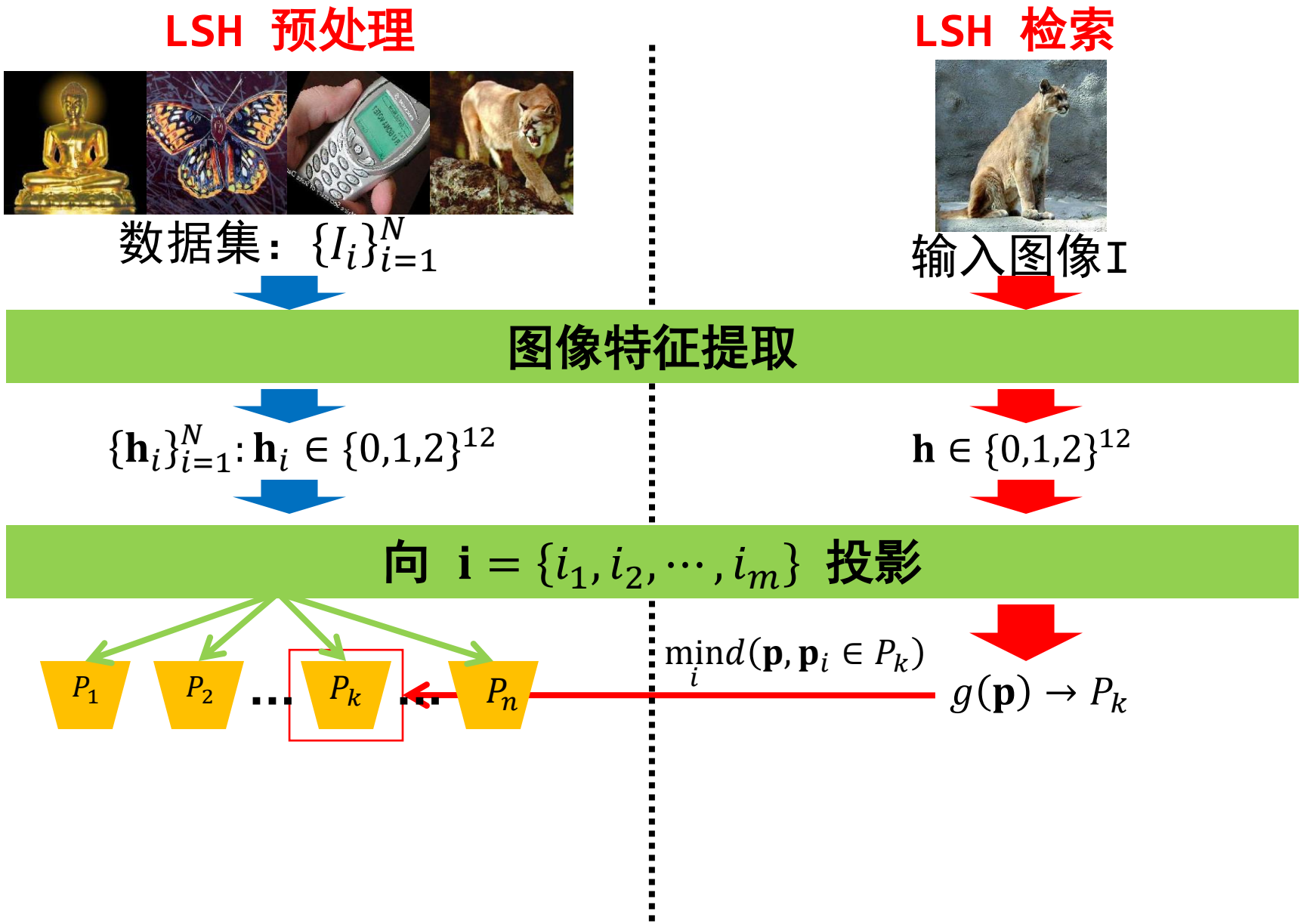
Algorithm Preprocessing
Input A set of points P,
l (number of hash tables),
Output Hash tables $\mathcal{T}_i$, $i = 1, \ldots, l$
Foreach $i = 1, \ldots, l$
Initialize hash table $\mathcal{T}_i$ by generating
a random hash function $g_i(\cdot)$
Foreach $i = 1, \ldots, l$
Foreach $j = 1, \ldots, n$
Store point p_j on bucket $g_i(p_j)$ of hash table $\mathcal{T}_i$

LSH 检索

- 对于目标特征向量，分别调用 l 个哈希函数，从 l 个哈希表中找到与之冲突的向量。并从中找出距离最近的 k 个点（本实验中令 $k = 1$）。其中，距离最近的点的标签即为特征向量的类别。
- 根据论文作者的测试，当特征函数为颜色直方图时，使用的距离函数可以为 L_1-norm，也可以为 L_2-norm。其中 L_1-norm 的检索效果略优于 L_2-norm，但差别不大。
- 具体的算法见伪代码。

Algorithm Approximate Nearest Neighbor Query
Input A query point q,
K (number of appr. nearest neighbors)
Access To hash tables $\mathcal{T}_i$, $i = 1, \ldots, l$
generated by the preprocessing algorithm
Output K (or less) appr. nearest neighbors
$S \leftarrow \emptyset$
Foreach $i = 1, \ldots, l$
$S \leftarrow S \cup \{\text{points found in } g_i(q) \text{ bucket of table } \mathcal{T}_i\}$
Return the K nearest neighbors of q found in set S
/* Can be found by main memory linear search */

LSH 流程示意


LSH 预处理
LSH 检索
数据集：$\{I_i\}_{i=1}^N$
输入图像I
图像特征提取
$\{\mathbf{h}_i\}_{i=1}^N : \mathbf{h}_i \in \{0,1,2\}^{12}$
$\mathbf{h} \in \{0,1,2\}^{12}$
向 $\mathbf{i} = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ 投影
P_1
P_2
P_k
P_n
$\min_i d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i \in P_k)$
$g(\mathbf{p}) \rightarrow P_k$

练习

- 利用 LSH 算法在图片数据库中搜索与目标图片最相似的图片。自行设计投影集合，尝试不同投影集合的搜索的效果。
- 对比 NN 与 LSH 搜索的执行时间、搜索结果。

拓展与思考

- 本实验中使用了颜色直方图特征信息，检索效果符合你的预期吗？
- 检索出的图像与输入图像的相似性体现在哪里？
- 能否设计其他的特征？