拉格朗日力学：约束与拉格朗日乘子法

1 约束

约束，顾名思义，就是指对质点做出约束。对约束的划分有很多种，这里列举如下

- 单侧约束

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \cdots, t) \geq 0 \tag{1}$$

  与双侧约束

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \cdots, t) = 0 \tag{2}$$

- 含时约束

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \cdots, t) = 0 \tag{3}$$

  与定常约束

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \cdots) = 0 \tag{4}$$

- 速度约束（也叫运动约束、微分约束）

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \cdots, t) = 0 \tag{5}$$

  与几何约束

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, t) = 0 \tag{6}$$

- 完整约束：几何约束或可以积分的速度约束。
  非完整约束：不可以积分的速度约束。实际上，不可积分这个说法不是很容易理解：究竟是“不会”还是“不能”呢？数学上是否可以严格表述“不可积分”呢？当然，同学们可以通过比较滚动的圆柱和滚动的球（见下面的例子）来得到一些体会：前者可以将质心与圆柱的转角联系起来，因此是一个几何约束；而后者无法做到，因为球可以朝任何方向滚动，因此同一个质心位置可以对应于不同的转角（我称之为依赖于历史）。

下面我们举几个约束的例子。

- 约束在一个额平面内：$z = 0$.

- 约束在斜面上运动：$y = x\tan\theta$.
- 约束在任意平面上运动：$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.
- 滚动的圆柱：$\dot{x} = R\dot{\theta}$.这个约束可以积分，得到$x = R\theta + x_0$。
- 滚动的圆环：$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\dot{\theta}$. 这个约束不可积，因为二维空间的线积分必须在给定一条路径时才有意义。竖直滚动的圆环相当于一个非完整约束条件。
- 滚动的球：相当于两个非完整约束，分别对$\dot{x}$和$\dot{y}$做出约束，而对z方向的约束则是一个完整约束。具体可以通过分析与地面接触点的速度为零得到。
- 刚体：$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \ell_{ij}$.
- 冰刀：$(\dot{y}_2 + \dot{y}_1)/(\dot{x}_2 + \dot{x}_1) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. 不可积，为非完整约束。
- 膨胀的气球：$x^2 + y^2 + z^2 = R^2(t)$.

1.1 约束的几何含义与约束力

我们考虑一个一般的完整约束，（对非完整约束，我们会在后面专门对其进行讨论）

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \tag{7}$$

我们可以明确的参数化

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2), \cdots, \mathbf{r}_N = (x_N, y_N, z_N) \tag{8}$$

或

$$\mathbf{r}_1 = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{r}_2 = (u_4, u_5, u_6), \cdots, \mathbf{r}_N = (u_{3N-2}, u_{3N-1}, u_{3N}) \tag{9}$$

那么该约束就可以看成是3N维空间中的曲面

$$f(u_1, u_2 \cdots, u_{3N}, t) = 0 \tag{10}$$

因此物理运动就是发生在该曲面内，而将该物理运动约束在该曲面内的力称为约束力，应该沿着该曲面的法线（梯度）方向

$$\mathbf{N} = (N_{1x}, N_{1y}, N_{1z}, N_{2x}, N_{2y}, N_{2z}, \cdots, N_{Nx}, N_{Ny}, N_{Nz}) \tag{11}$$
$$\propto \boldsymbol{\nabla} f \tag{12}$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_N}, \frac{\partial f}{\partial y_N}, \frac{\partial f}{\partial z_N}\right) \tag{13}$$

- 约束在一个额平面内：$z = 0$. $\mathbf{N} \propto (0, 0, 1)$.
- 约束在斜面上运动：$y = x\tan\theta$. $\mathbf{N} \propto (\tan\theta, -1)$
- 约束在任意平面上运动：$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. $\mathbf{N} \propto (\alpha, \beta, \gamma)$.
- 刚体：$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \ell_{ij}$. $\mathbf{N}_{j\to i} \propto 2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$
- 膨胀的气球：$x^2 + y^2 + z^2 = R^2(t)$. $\mathbf{N} \propto 2(x, y, z)$.

2 虚位移与达朗贝尔原理

D’ Alembert’s principle gives a complete solution of problems of mechanics. All the different principles of mechanics are merely mathematically different formulations of d’Alembert’s principle. — in Lanczos’s book “the variational principles of mechanics”

图 1: 达朗贝尔

我们已经知道，约束会引入约束力，那么一般的，我们就有牛顿定律

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \tag{14}$$

考虑到约束力$\mathbf{N}_i$的性质（约束曲面的法线方向），我们就可以对上式乘以一个与之相“垂直”的“虚位移”，我们记为$\delta\mathbf{r}_i$，

$$\sum_i \mathbf{N}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \propto \sum_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{15}$$

这样，我们就消去$\mathbf{N}_i$，从而得到

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{16}$$

这样我们就得到了达朗贝尔原理。在静力学下，这正是虚功原理。因此达朗贝尔原理可以看成是虚功原理在非惯性系下的推广。

- 比较虚位移和物理位移。在式15中，我们已经通过约束曲面的梯度定义了虚位移。而物理位移满足的条件可以通过对约束条件求导得到，

$$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \tag{17}$$

  因此，我们看到：虚位移实际上是“时间被冻结”了的物理位移。也就是说，对于定常约束（f不含时），二者一致。

- 例，膨胀的气球：$x^2 + y^2 + z^2 = R^2(t)$. $\mathbf{N} \propto 2(x, y, z)$。约束力与虚位移垂直，但与物理位移不垂直。

事实上，经典力学可以从达朗贝尔原理出发进行构建。如果我们将所有的力作为主动力，也就是不考虑约束，所有的$\delta\mathbf{r}_i$是相互独立的，因此我们也就自然得到牛顿定律$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$。

而如果不同的$\delta\mathbf{r}_i$之间并非独立的，而是由一些约束条件约束在一起，我们不再能简单的将虚位移去掉，这时应该怎么办呢？数学上，我们有两个方法处理这种问题。（1）对每个约束条件引入拉格朗日乘子；（2）直接选取“更好”的坐标（也就是广义坐标）。这正是拉格朗日力学处理约束问题的两种方式。方法（1）更普遍，而方法（2）更简单。

下面我们分别加以讨论。

3 拉格朗日乘子法

这是数学上处理约束问题的标准方法。考虑第j个约束

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \tag{18}$$

对其求导，我们可以得到不同$\delta\mathbf{r}_i$满足

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{19}$$

对其乘以一个拉格朗日乘子λ_j，并加到达朗贝尔原理中，我们得到

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{20}$$

这样，不同的$\delta\mathbf{r}_i$就是独立的了，从而我们得到

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} = 0 \tag{21}$$

比较式20与式14，我们发现约束力正可以通过拉格朗日乘子得到

$$\mathbf{N}_i = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \tag{22}$$

- 例：水平面上的质点。
  从约束条件$f = z = 0$得到$\delta z = 0$，乘以拉格朗日乘子代入虚功原理得到
  $$mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = mg + \lambda = 0 \tag{23}$$
  解得$\lambda = -mg$。进而，约束力为
  $$N_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda = -mg \tag{24}$$
  在这个例子中，严格来说，如果给定约束$z = 0$，那么虚位移应该就在xy面内，而且重力不再属于主动力。因此，上述论述仅仅是一种形式上的讨论。

- 例：斜面上的质点。
  约束条件$f = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$，进而
  $$\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z = 0 \tag{25}$$

乘以λ加到达朗贝尔原理中，得到

$$mg\delta z - m\ddot{x}\delta x - m\ddot{y}\delta y - m\ddot{z}\delta z + \lambda\alpha\delta x + \lambda\beta\delta y + \lambda\gamma\delta z = 0 \tag{26}$$

从而，我们得到

$$\lambda\alpha = m\ddot{x} \tag{27}$$

$$\lambda\beta = m\ddot{y} \tag{28}$$

$$\lambda\gamma = m\ddot{z} - mg \tag{29}$$

而约束力的三个分量刚好由$(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$给出。

- 例：膨胀的气球。
  考虑约束条件

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2(t) = 0 \tag{30}$$

对其求导得

$$2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = 0 \tag{31}$$

代入达朗贝尔方程

$$(F_x - \dot{p}_x + \lambda 2x)\delta x + (F_y - \dot{p}_y + \lambda 2y)\delta y + (F_z - \dot{p}_z + \lambda 2z)\delta z = 0 \tag{32}$$

从而可以解出λ。而三个方向的约束力就是

$$N_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda 2x = -F_x + \dot{p}_x \tag{33}$$

- 例：圆周运动。在上面的结果中，令$\mathbf{F} = 0$，而$\dot{\mathbf{p}}$给出向心加速度，因此我们得到约束力$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{p}}$。注意，在这种观点下，由于我们已经约束质点作圆周运动，因此向心力实际上正是由约束力给出。这与不考虑该约束条件得到的结果是一样的。

- 如果没有约束，我们自然得到牛顿第二定律$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$。

- 考虑另一个极端：$\mathbf{F}_i = 0$。这时，将约束条件通过拉格朗日乘子加到达朗贝尔原理中，我们就得到

$$\sum_i \left(-\dot{\mathbf{p}}_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{34}$$

进而，我们就得到约束力

$$\mathbf{N}_i = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} = \dot{\mathbf{p}} \tag{35}$$

因此，我们得到另一种看待力学问题的方式：将质点的运动看成约束条件，那么约束力与加速度之间的关系满足牛顿第二定律。简单来说，牛顿力学是力决定运动，而达朗贝尔原理提供了另一个观点：运动决定约束力。

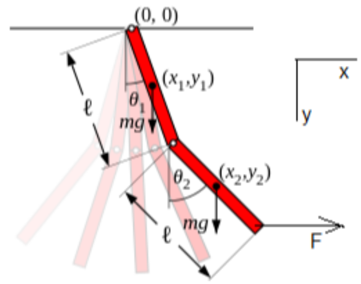

图 2:

- 静态受力双摆（梁书§2.3例题）。
  取两根杆的质心坐标为变量，其满足约束

$$f_1 = x_1^2 + y_1^2 - \frac{\ell_1^2}{4} = 0 \tag{36}$$

$$f_2 = (x_2 - 2x_1)^2 + (y_2 - 2y_1)^2 - \frac{\ell_2^2}{4} = 0 \tag{37}$$

对其求导得

$$2x_1\delta x_1 + 2y_1\delta y_1 = 0 \tag{38}$$

$$2(x_2 - 2x_1)(\delta x_2 - 2\delta x_1) + 2(y_2 - 2y_1)(\delta y_2 - 2\delta y_1) = 0 \tag{39}$$

分别乘以λ_1和λ_2，加到虚功原理得表达式中，得

$$\begin{aligned} &F(2\delta x_2 - 2\delta x_1) + m_1 g\delta y_1 + m_2 g\delta y_2 + \lambda_1(2x_1\delta x_1 + 2y_1\delta y_1) \\ &+\lambda_2[2(x_2 - 2x_1)(\delta x_2 - 2\delta x_1) + 2(y_2 - 2y_1)(\delta y_2 - 2\delta y_1)] = 0 \end{aligned} \tag{40}$$

这样所有的$\delta x_{1,2}$和$\delta y_{1,2}$就是相互独立的，从而前面的系数分别为零，得

$$\begin{aligned} -2F + 2\lambda_1 x_1 - 4\lambda_2(x_2 - 2x_1) &= 0 \\ 2F + 2\lambda_2(x_2 - 2x_1) &= 0 \\ m_1 g + 2\lambda_1 y_1 - 4\lambda_2(y_2 - 2y_1) &= 0 \\ m_2 g + 2\lambda_2(y_2 - 2y_1) &= 0 \end{aligned} \tag{41}$$

这样，一共6个未知数（$x_{1,2}, y_{1,2}, \lambda_{1,2}$），6个方程（上述4个加两个约束条件），可以完成求解。这里，我们来看几个结果。①$+2$②得

$$\lambda_1 x_1 = -F \tag{42}$$

而③$+2$④得

$$m_1 g + 2m_2 g + 2\lambda_1 y_1 = m_1 g + 2m_2 g - \frac{2Fy_1}{x_1} = 0 \tag{43}$$

这给出第一根杆的偏转角度$\tan\theta_1 = x_1/y_1$。再由$\frac{②}{x_2-2x_1} - \frac{④}{y_2-2y_1}$得

$$\frac{x_2 - 2x_1}{y_2 - 2y_1} = \frac{2F}{m_2 g} \tag{44}$$

这给出第二根杆的偏转角度$\tan\theta_2 = (x_2 - 2x_1)/(y_2 - 2y_1)$。
最后，再让我们来看看约束力

$$N_{2x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2\lambda_2(x_2 - 2x_1) = -2F \tag{45}$$

$$N_{2y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = 2\lambda_2(y_2 - 2y_1) = -m_2 g \tag{46}$$

$$N_{1x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2\lambda_1 x_1 - 4\lambda_2(x_2 - 2x_1) = 2F \tag{47}$$

$$N_{1y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 2\lambda_1 y_1 - 4\lambda_2(y_2 - 2y_1) = -m_1 g \tag{48}$$

水平方向的约束力竟然是$2F$！难道不应该是F吗？究竟哪里出了错呢？为了一探究竟，下面我们再来看看受力单摆的情况。

- 静态受力单摆。
  约束条件

$$x^2 + y^2 = \ell^2/4 \tag{49}$$

  求导给出

$$2x\delta x + 2y\delta y = 0 \tag{50}$$

  乘以λ加到虚功原理的表达式中，

$$F2\delta x + mg\delta y + \lambda(2x\delta x + 2y\delta y) = 0 \tag{51}$$

  求出

$$2F + 2\lambda x = 0 \tag{52}$$

$$mg + 2\lambda y = 0 \tag{53}$$

  约束力为

$$N_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2\lambda x = -2F \tag{54}$$

$$N_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 2\lambda y = -mg \tag{55}$$

  结果仍然是$2F$！

- 哪里错了呢？
  根据我们已有的知识，我们可以猜测出这个$2F$的结果应该是来源于力矩或转动的效果。也就是说，我们本来想计算与平动相对应的力，却求出了与转动相对应的力，这应该是来源于我们对虚位移没有恰当的处理。对于一个刚体（杆也是刚体），运动可以分质心的平动和整体的转动。因此，我们应该在考虑平动的同时不让它转动。这可以通过引入杆的偏转角θ作为变量得到。进而F所对应的虚位移应该为$\delta(x + \frac{1}{2}\ell\sin\theta)$，（而不是简单的$2\delta x$），从而式51应变为

$$F(\delta x + \frac{1}{2}\ell\cos\theta\delta\theta) + mg\delta y + \lambda(2x\delta x + 2y\delta y) = 0 \tag{56}$$

  这样，解出$\lambda = -F/2x$，进而水平方向约束力$N_x = 2x\lambda = -F$。
  同样道理，受力双摆也可以通过选取角度作为变量而得以解决。

- 约束解除问题：质点从半圆形的光滑半球顶滑下，何处开始脱离？
  取水平向右为x方向，竖直向上为y方向，圆心在原点。约束条件为

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{57}$$

  虚功原理给出

$$-mg\delta y - m\ddot{x}\delta x - m\ddot{y}\delta y + 2\lambda x\delta x + 2\lambda y\delta y = 0 \tag{58}$$

  因为dx和dy独立，

$$-m\ddot{x} + 2\lambda x = 0 \tag{59}$$

$$-mg - m\ddot{y} + 2\lambda y = 0 \tag{60}$$

  ①dx + ②dy，并利用对约束条件求全微分得到的关系$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0$，得

$$-mg\mathrm{dy} - \frac{1}{2}\mathrm{md}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0 \tag{61}$$

  积分给出动能定理

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mg(R - y) \tag{62}$$

  再代入关系$x\dot{x} + y\dot{y} = 0$，可以求出

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 = mg\frac{(R-y)^2(R+y)}{R^2} \tag{63}$$

  将其代回到约束力的表达式得

$$2\lambda y = mg + m\ddot{y} = mg + \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}\dot{y}^2}{\mathrm{d}y} = mg\frac{3y^2 - 2Ry}{R^2} \tag{64}$$

  因此随着y得减小，λ会减小至零当$y = 2R/3$，即约束解除，质点脱离球面。

- 采用极坐标重解上一题。
  约束条件为

$$r = R \tag{65}$$

  达朗贝尔原理为

$$-mg\cos\theta\delta r + mg\sin\theta R\delta\theta + mR\dot{\theta}^2\delta r - mR\ddot{\theta}R\delta\theta + \lambda\delta r = 0 \tag{66}$$

  其中第三项和第四项分别为径向和切向加速度项，求解可得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta) \tag{67}$$

  径向约束力为

$$\lambda = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 = mg(3\cos\theta - 2) \tag{68}$$

  从这个结果，我们很容易看出径向的约束力随着θ的增大而减小并于$\cos\theta = 2/3$时减小到零。