欧拉动力学方程

考虑本体坐标系，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L} = \dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \tag{1}$$

再利用牛顿方程$\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = \mathbf{M}$，我们就得到了欧拉动力学方程

$$\boxed{\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}} \tag{2}$$

在一般的坐标系下，I会随着时间改变，带来复杂性。因此，在处理刚体问题时，我们往往就将坐标系固定在刚体上，称为主轴坐标系，这样I就是个不变的物理量。在主轴坐标系下，写出欧拉动力学方程的分量形式为

$$\begin{aligned}
M_1 &= I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\
M_2 &= I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\
M_3 &= I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2
\end{aligned} \tag{3}$$

这是个非线性的方程组，一般情况下难以求解。事实上，一般的刚体问题是不可积（目前可以理解为不能严格求解）的。只有少数的几种情况下才能够严格求解，包括自由陀螺（欧拉陀螺）、拉格朗日陀螺、Kovalevskaya陀螺。

- 本体参考系下的证明。在本体参考系中，刚体不动，$\mathbf{L} = 0$，因此$\mathbf{M}' = 0$。$\mathbf{M}'$包括外力矩和惯性力的力矩

$$\begin{aligned}
0 =& \mathbf{M} - \sum_i m_i\mathbf{r}_i \times [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] \\
=& \mathbf{M} - \sum_i m_i\mathbf{r}_i \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i) - \boldsymbol{\omega} \times \left[\sum_i m_i\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)\right] \\
=& \mathbf{M} - \dot{\mathbf{L}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}
\end{aligned} \tag{4}$$

  我们得到的正是欧拉动力学方程。

- 拉莫进动。$\mathbf{M} = g\mathbf{L} \times \mathbf{B} = (e/2m)\mathbf{L} \times \mathbf{B}$，给出$\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = -g\mathbf{B} \times \mathbf{L}$，从而$\boldsymbol{\omega} = -g\mathbf{B}$。

- 重力引起高速转子进动。$\mathbf{r} \times m\mathbf{g} = \mathbf{w} \times \mathbf{L}$，得$\mathbf{w}_p = -m\mathbf{g}r/L$。

- 科里奥利陀螺（梁书习题6.26）。作业。

- 杆绕着非对称轴做原速转动。由于$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{\omega}$不平行，会产生一个力矩$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$。

1 自由对称刚体

这里，我们应用欧拉动力学方程来研究对称的欧拉陀螺（自由对称刚体）。设定$I_1 = I_2$。

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 &= (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 \\
I_1\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\
I_3\dot{\omega}_3 &= 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

可见，ω_3为守恒量。前两个方程可以得到

$$
\dot{z} = i\Omega z \tag{6}
$$

其中$z = \omega_1 + i\omega_2$，

$$
\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3 \tag{7}
$$

上面的微分方程可解出

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= A\cos(\Omega t + \alpha), \\
\omega_2 &= A\sin(\Omega t + \alpha)
\end{aligned} \tag{8}
$$

其中

$$
\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3 \tag{9}
$$

这表示$\boldsymbol{\omega}$绕着$\mathbf{e}_3$方向以角速度Ω画圆锥，称为本体极锥。再来考虑角动量，$L_3 = I_3\omega_3$为守恒量，而$L_{1,2} = I_1\omega_{1,2}$。因此，我们得到$\mathbf{L}$也是绕着$\mathbf{e}_3$轴，与$\boldsymbol{\omega}$同步作圆锥运动。只不过角动量画出的圆锥与角速度的圆锥角度不同:

$$
\tan\theta_L = \frac{I_1}{I_3}\tan\theta_\omega \tag{10}
$$

接下来，让我们**回到空间坐标系**，其中$\mathbf{L}$守恒，可取为z轴。由于本体坐标系中$\mathbf{L}$绕着$\mathbf{e}_3$画圆锥，在空间坐标系中$\mathbf{e}_3$绕着$\mathbf{L}$画圆锥，称为空间极锥。那么，该角速度为多少呢？（如果想当然的认为还是Ω就错了！因为坐标轴本身在旋转。）在空间坐标系中，我们有

$$
\mathbf{L} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_1\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3 = I_1 A\cos(\Omega t + \alpha)\mathbf{e}_1 + I_1 A\sin(\Omega t + \alpha)\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3 \tag{11}
$$

其中A可以由能量关系

$$
T = \frac{1}{2}I_1 A^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \tag{12}
$$

给出。而$\mathbf{L}$与$\mathbf{e}_3$的夹角$\theta = \theta_L$由$I_3\omega_3 = L\cos\theta$给出。进一步，可以证明

$$
\mathbf{L} \times \mathbf{e}_3 = I_1\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = I_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}t} \tag{13}
$$

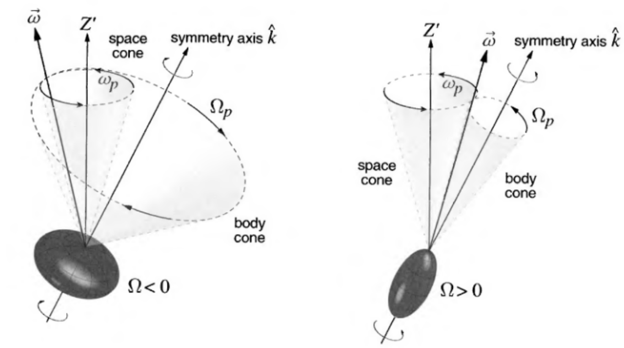

图 1: 空间极锥与本体极锥（Hand&Finch）。角速度被分为自转角速度Ω与进动角速度ω_p。注意图中的Ω与文中的定义差一个符号。

这表明$\mathbf{e}_3$是绕着$\mathbf{L}$画圆锥，称为进动，进动角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{\mathbf{L}}{I_1} \tag{14}$$

再来看总的角速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3 \\ &= \frac{\mathbf{L}}{I_1} - \frac{I_3}{I_1}\omega_3\mathbf{e}_3 + \omega_3\mathbf{e}_3 \\ &= \boldsymbol{\omega}_p - \Omega\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{15}$$

也就是说，角速度被分成两部分，一部分贡献自转$-\Omega\mathbf{e}_3$，一部分贡献进动$\boldsymbol{\omega}_p$。

- Chandler移动(wobble)。由于地球的$I_3 \neq I_1$，可知地球的自转轴会绕着对称轴进动，称为Chandler移动。根据地球半径可以估算出I_3/I_1，进而得到Chandler进动的周期为大约10个月。具体见作业。事实上，为什么潮汐没有使得Chandler wobble完全停下来还没有被很好的理解，这可能与地震等地球内部的运动有关。

- 飞盘进动。对于飞盘，有$I_3 = 2I_1$，因此自转角速度$\Omega = (I_3/I_1 - 1)\omega_3 = \omega_3$。对于几乎水平转动的情况，$\theta \approx 0$，有$L \approx I_3\omega_3$，而进动角速度$\omega_p = L/I_1 \approx (I_3/I_1)\Omega = 2\Omega$是自转角速度的2倍。（按照费曼的说法，正是这个结果重新燃起了他对物理的热情并搞出了量子电动力学。可是我实在没搞明白这个飞盘与电子自旋有啥关系。。）

2 非对称刚体：中间轴定理

动平衡被定义为$\mathbf{M} = 0$。现在让我们来用代数方式证明网球拍定理（中间轴定理）。考虑绕着$\mathbf{e}_3$轴的转动，取$\omega_{1,2}$为小量，因此

$$I_3\dot{\omega}_3 \approx 0 \tag{16}$$

以及

$$\begin{bmatrix}\dot\omega_1\\ \dot\omega_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{I_2-I_3}{I_1}\omega_3\\ \frac{I_3-I_1}{I_2}\omega_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix} \tag{17}$$

设$z=[\omega_1,\omega_2]^t=z_0\mathrm{e}^{\lambda t}$，代入得特征方程

$$\lambda^2=-\frac{(I_1-I_3)(I_2-I_3)}{I_1I_2}\omega_3 \tag{18}$$

当I_3最小或最大，λ为虚数，表示稳定振动解，$z=0$是一个稳定不动点；当I_3处于中间，则λ为实数（一正一负），除非z_0沿着负得本征值对应的本征矢量方向，不然z就会随时间发散，这意味着系统不稳定，$z=0$是一个不稳定不动点。

3 非对称刚体的一般解（朗道§37）

直接积分欧拉动力学方程是一件很困难的事情。但无外力矩的情况是可以严格求解的，称为欧拉陀螺，历史上由Jacobi首次完成。我们可以利用能量和角动量这两个运动积分

$$2E=I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2 \tag{19}$$

$$L^2=I_1^2\omega_1^2+I_2^2\omega_2^2+I_3^2\omega_3^2 \tag{20}$$

从而可以得到，设$I_1<I_2<I_3$，

$$\begin{aligned}\omega_1^2&=\frac{L^2-2I_3E-I_2(I_2-I_3)\omega_2^2}{I_1(I_1-I_3)}\\ \omega_3^2&=\frac{L^2-2I_1E-I_2(I_2-I_1)\omega_2^2}{I_3(I_3-I_1)}\end{aligned} \tag{21}$$

代入到欧拉动力学方程，得到单变量ω_2的一阶微分方程

$$\begin{aligned}I_2\dot\omega_2&=(I_3-I_1)\omega_1\omega_3\\ &=\sqrt{\frac{[L^2-2I_1E-I_2(I_2-I_1)\omega_2^2][2I_3E-L^2-I_2(I_3-I_2)\omega_2^2]}{I_1I_3}}\\ &=\sqrt{(L^2-2I_1E)(2I_3E-L^2)\frac{\left[1-\frac{I_2(I_2-I_1)\omega_2^2}{L^2-2I_1E}\right]\left[1-\frac{I_2(I_3-I_2)\omega_2^2}{2I_3E-L^2}\right]}{I_1I_3}}\end{aligned} \tag{22}$$

设

$$\begin{aligned}x&=\omega_2\sqrt{\frac{I_2(I_2-I_1)}{L^2-2I_1E}},\\ k&=\sqrt{\frac{(I_3-I_2)(L^2-2I_1E)}{(I_2-I_1)(2I_3E-L^2)}}\\ \tau&=t\sqrt{\frac{(I_2-I_1)(2I_3E-L^2)}{I_1I_2I_3}}\end{aligned} \tag{23}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \tag{24}$$

- 当$k^2<1$，即$L^2<2I_2E$，这是一个椭圆积分，其逆函数由Jacobi椭圆函数给出，即

$$x=\mathrm{sn}(\tau,k) \tag{25}$$

- 当$k^2>1$，可以定义$y=kx$，$\tau'=k\tau$，还是可以将结果化为Jacobi椭圆函数的形式

$$kx=\mathrm{sn}(k\tau,k^{-1}) \tag{26}$$

- 当$k=1$，即$L^2=2I_2E$，x的微分方程变为$\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau=1-x^2$，可直接积出得到

$$x=\tanh(\tau) \tag{27}$$

  从这个结果可以看出，从$x=1$到$x=-1$，即连接两个分叉点的时间为无穷大!（这是否对应于力学系统中运动的唯一性？）

在得到ω_2之后，ω_1和ω_3可以由式21进一步得到。