相空间

Hamiltonian mechanics is geometry in phase space. — V. I. Arnold

广义坐标与广义动量张成的空间就叫做相空间。一个系统的运动就相当于在相空间中的一条轨迹。如果哈密顿量不含时，则由于哈密顿正则方程为一阶微分方程，其相空间的轨迹一般不会出现交叉的情况，除非该“交叉点”为不动点。

相空间的运动满足哈密顿正则方程，因此相流速度的散度为零，

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} = [H, H] = 0 \tag{1}$$

这表明相空间的速度矢量为无源场。进一步，可以得到相空间流动的Jacobiian保持为1，即刘维尔保体积定理，或相空间不可压缩定理。考虑无穷小变换，其Jacobian为

$$\det\left(\frac{\partial \xi_i + \dot{\xi}_i \mathrm{d}t}{\partial \xi_j}\right) = \det(1 + \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} \mathrm{d}t) = 1 \tag{2}$$

而对于有限运动，也满足如下的关系

$$\mathrm{d}^{2s}\xi = \mathrm{d}^{2s}\eta \tag{3}$$

这可以从接下来要讲到的正则变换关系得到。

- 例：单摆。
- 例：自由对称陀螺。由于p_ψ和p_φ为守恒量，可以在(ψ, φ)空间（轮胎面）中画出相轨迹。如果$\dot{\psi}/\dot{\varphi}$是有理数，则轨道封闭；如果无理数，则铺满整个轮胎面。
- 耗散谐振子的含时哈密顿量表述[1]。拉格朗日量为

$$L = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{m}t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2\right) \tag{4}$$

  哈密顿为

$$H = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{m}t}\frac{p^2}{2m} + \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{m}t}\frac{kx^2}{2} \tag{5}$$

- 庞加莱回归。相空间不可压缩定理指出，如果一个系统的相空间有限，则总存在一个时间，系统会回到初始点的邻域。

[1] Volker Perlick, Lagrangian and Hamiltonian Dynamics, from internet.

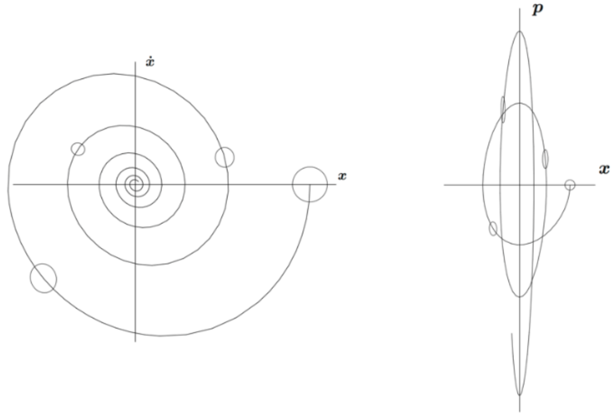

图 1: 耗散谐振子的相轨道。

1　二维相空间

Poincare-Bendixson定理：在开的二维连通空间，如果仅包含有限个不动点，则只能有三种情况：（1）不动点；（2）周期轨道；（3）连接不动点的同宿/异宿轨道。

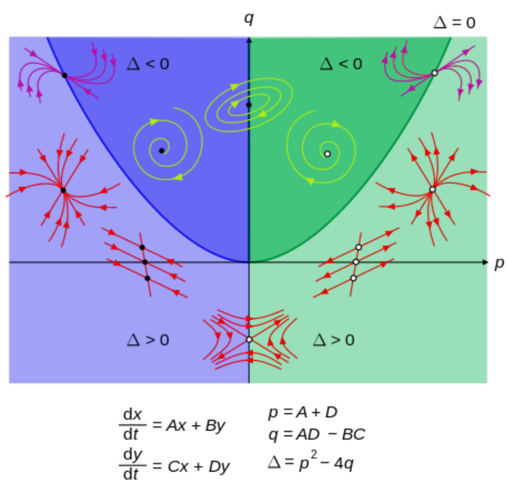

图 2: 二维空间中的不动点。注意这里的符号与正文中不同。

考虑一个一般的一阶微分方程组在不动点附近，

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \tag{6}$$

代入$[q,p]^t = [q_0, p_0]^t \mathrm{e}^{\lambda t}$，得

$$\lambda_{\pm} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \tag{7}$$

其中$B = a + d$，$C = ad - bc$. 具体可以分为如下7种情况。作业：画出下面7种情况在不动点附近的流动图。

1. $B=0$ and $C>0$. $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{C}$ and $\xi = \alpha\xi_+^0 \mathrm{e}^{i\sqrt{C}t} + h.c.$。中心
2. $B=0$ and $C<0$. $\lambda_\pm = \pm\sqrt{|C|}$ and $\xi = \alpha_+\xi_+^0\mathrm{e}^{\lambda_+ t} + \alpha_-\xi_-^0\mathrm{e}^{\lambda_- t}$。鞍点。
3. $B\neq 0$ and $C<0$, $\lambda_+>0$, $\quad \lambda_- < 0$ and $\xi = \alpha_+\xi_+^0\mathrm{e}^{\lambda_+ t} + \alpha_-\xi_-^0\mathrm{e}^{\lambda_- t}$
4. $B\neq 0$ and $C=0$, $\lambda = B, 0$ and $\xi = \alpha_B\xi_B^0\mathrm{e}^{Bt} + \alpha_0\xi_0^0$
5. $B\neq 0$ and $C>0$ and $B^2-4C>0$. $\lambda_1<\lambda_2<0 \quad$ or $\quad \lambda_1>\lambda_2>0$ and $\xi = \alpha_1\xi_1^0\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \alpha_2\xi_2^0\mathrm{e}^{\lambda 2-t}$
6. $B\neq 0$ and $C>0$ and $B^2-4C<0$. $\lambda_2 = \lambda_1^*$ and $\xi = \left(\alpha_1\xi_1^0\mathrm{e}^{i\lambda_1'' t} + h.c.\right)\mathrm{e}^{\lambda_1' t}$
7. $B\neq 0$ and $C>0$ and $B^2-4C=0$. $\lambda_1=\lambda_2=B$ and $\xi = (\alpha_1\xi_1^0 + \alpha_2 t\xi_2^0)\mathrm{e}^{Bt}$。注意这里两个本征矢量不一定正交，因为矩阵不一定厄密。

但，回到相空间，由于刘维尔保体积定理，只有中心和鞍点是合理的。

2 高维相空间：混沌与遍历性

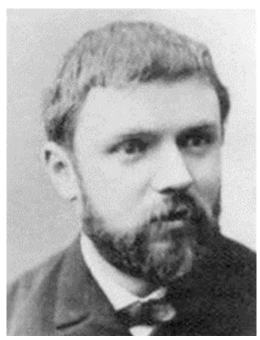

图 3:

- 可积系统中的不变环面。一般的，这相当于角变量张成的环面。以二维环面为例，如果ω_1/ω_2是有理数，则轨道封闭；如果无理数，则铺满整个轮胎面。

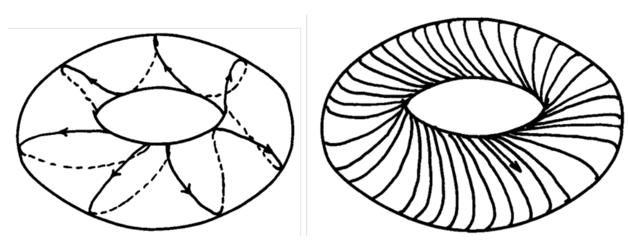

图 4: 有理环面与无理环面。

- 庞加莱截面。庞加莱提出，可以画出2s维空间中的相轨道每次穿过一个2s-1维“平面”的交点。该交点满足一种离散映射，称为庞加莱映射

$$\xi_{i+1} = T\xi_i \tag{8}$$

通过对这些交点的研究可以得到对系统运动的认识。如果有一些量为守恒量，比如能量，则可以进一步降低庞加莱截面的维度。下面就让我们着眼于二维的庞加莱截面。

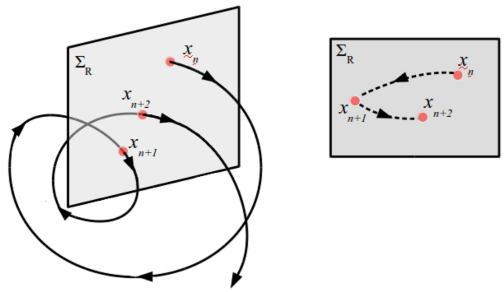

图 5: 庞加莱截面

- Kolmogorov-Arnold-Moser定理。KAM在这个定理中指出一个不变环面在微扰下不被破坏的条件是

$$|\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s}| > \frac{K(\varepsilon)}{s^{2.5}} \tag{9}$$

其中r和s为任意整数。这也就是说如果ω_1/ω_2为无理数，则在微扰下还可以存活，称为KAM不变环面。但如果ω_1/ω_2为有理数，则上面的KAM条件不满足，即有理环面可以很容易被破坏。

- 有理环面被破坏，会形成相等数目的中心和鞍点，且交替分布。这被称为庞加莱最后的定理，或庞加莱-Birkhoff定理。

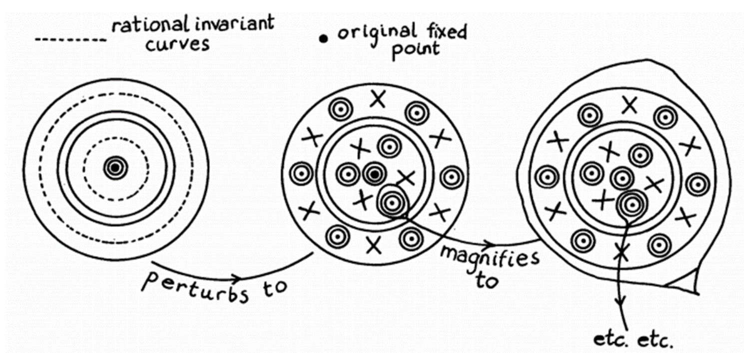

图 6:

- 连接鞍点的轨道有两种：常规和非常规轨道，如图所示。这种非常规的看似病态的轨道由庞加莱首先发现，最初被认为是数学上的病态解，直到半个世纪之后才由于计算机的发展得到认可。

- 混沌。连接鞍点的这种非常规轨道正是混沌的来源。在高维空间中，KAM环面的维数（最多s维）小于庞加莱截面的维度（考虑到能量守恒为2s-2维），因此混沌运动可以遍历整个相空间。混沌运动是确定性系统中一种内禀的“不确定运动”！

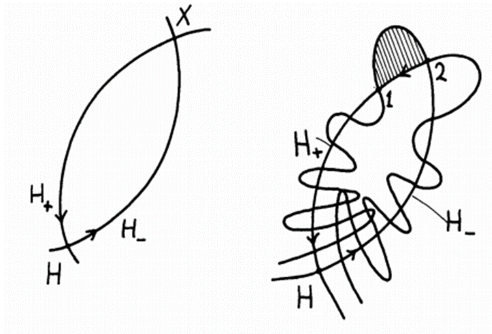

图 7:

> ...it may happen that small difference in the initial conditions produce very great differences in the final phenomena. A small error in the former will produce an enormous error in the latter. Prediction becomes impossible, and we have the fortuitous phenomenon. —Poincare (1903)

- 遍历性定理。在得到相空间的遍历性之后，我们就可以将对时间的平均转换为对系综的平均。我们复制许多份的系统，称为系综，每一个系统对应于相空间上的一个点，只不过这些系统代表点的初始位置完全随机。那么
$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} A(t)\mathrm{d}t = \int A(\xi,t)\rho(\xi,t)\mathrm{d}\xi \tag{10}$$
其中ρ表示系综代表点的概率密度。

3 刘维尔定理

图 8:

对于具有遍历性的系统，其统计行为可以用概率密度$\rho(\xi,t)$来表述。根据流守恒关系
$$\nabla\cdot(\rho\dot{\boldsymbol{\xi}}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{11}$$
得到
$$\rho\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}} + \nabla\rho\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{12}$$

代入$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$，得

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, H] = 0} \tag{13}$$

这就是刘维尔定理，是统计物理的出发点。

- 平衡态统计。对于平衡态，ρ不含时，应该是守恒量的函数。而角动量和动量对应于系统整体的运动。对于探究系统内部的运动，就只剩下能量这个守恒量。由于$\rho_1\rho_2 = \rho_{12}$，知$\ln \rho$为可加量。而能量也是可加量。一个最简单的情况就是

$$\ln \rho = \alpha + \beta E \tag{14}$$

  这也就是Gibbs正则系综分布函数。

- 一个推论：磁性无法在经典统计中得以解释，因为B并不进入到E的表达式中。