拉格朗日方程的相关讨论

至此，拉格朗日方程就已经建立完毕，剩下非完整约束的部分留待后面讨论。接下来，让我们对不考虑约束力的完整情况的拉格朗日方程其做一些讨论。

1 广义动量

$\partial L/\partial \dot{q}_\alpha$被定义为广义动量$p_\alpha$，而$\partial L/\partial q_\alpha$被定义为广义力。对于不含速度的势能和非相对论形式的动能$T = \sum_i m\dot{\mathbf{r}}_i^2$，我们有

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{1}$$

而

$$Q_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$

- 平动

$$\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i + \delta q_\alpha \mathbf{n} \tag{3}$$

  则

$$p_\alpha = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \tag{4}$$

$$Q_\alpha = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \tag{5}$$

- 转动

$$\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i + \delta q_\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \tag{6}$$

  则

$$p_\alpha = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i m_i \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} \tag{7}$$

$$Q_\alpha = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \tag{8}$$

- 膨胀

$$\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i + \delta q_\alpha \mathbf{r}_i \tag{9}$$

则

$$p_\alpha = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{r}_i^2\right) \tag{10}$$

这个量并不对应于一个常见的物理量，它只是出现在我们对位力定理的证明过程中。（我们对该物理量并不关心，主要的一个原因是我们的自然界并不具有膨胀不变性。）

2 对称性

- $L \to \alpha L$，运动方程不变。显然。
- $L \to L + \mathrm{d}\Phi(q_1, \cdots, q_s, t)/\mathrm{d}t$，运动方程不变。这个可以被证明如下

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \\
=&\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial q_\alpha}\right) - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\alpha \partial t}\right) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

  这里用到二阶偏微分与顺序无关。

- 如果q_α不出现在L当中，称为可遗坐标，则根据拉格朗日方程，$\dot{p}_\alpha = 0$。
- 如果L不含时，也存在一个守恒量为哈密顿量H，因为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L &= \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha + p_\alpha \ddot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_\alpha \dot{q}_\alpha) + \frac{\partial L}{\partial t}
\end{aligned} \tag{12}$$

  所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{(p_\alpha \dot{q}_\alpha - L)}_{H} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{13}$$

  对于约束$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q, t)$，动能为

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_i \left(\sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2 = T_2 + T_1 + T_0 \tag{14}$$

  其中，$T_{2,1,0}$分别表示广义速度的二次、一次、零次项。进而利用齐次函数的性质，我们有

$$H = 0T_0 + 1T_1 + 2T_2 - (T_0 + T_1 + T_2 - V) = T_2 - T_0 + V \tag{15}$$

  只有当$T_0 = T_1 = 0$，即约束不含时，哈密顿量才等于机械能。

  例：以角速度ω旋转的竖直圆环上的蚂蚁的动能为

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2\theta = T_2 + T_0 \tag{16}$$

- Noether定理：一个连续对称性对应于一个守恒量。
  首先，对于一个给定的连续对称性，定义其无穷小变换，其中ϵ表示无穷小量

$$\tilde{q}_\alpha = q_\alpha + \epsilon\eta_\alpha \tag{17}$$

$$\tilde{t} = t + \epsilon\xi \tag{18}$$

进而

$$\dot{\tilde{q}}_\alpha = \frac{\mathrm{d}\tilde{q}_\alpha}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \frac{\mathrm{d}q_\alpha + \epsilon\mathrm{d}\eta_\alpha}{\mathrm{d}t + \epsilon\mathrm{d}\xi} = \dot{q}_\alpha + \epsilon\dot{\eta}_\alpha - \epsilon\dot{q}_\alpha\dot{\xi} \tag{19}$$

代入L得

$$\begin{aligned} L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{t}) &= L(q_\alpha + \epsilon\eta_\alpha, \dot{q}_\alpha + \epsilon\dot{\eta}_\alpha - \epsilon\dot{q}_\alpha\dot{\xi}, t + \epsilon\xi) \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\epsilon\eta_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}(\epsilon\dot{\eta}_\alpha - \epsilon\dot{q}_\alpha\dot{\xi}) + \frac{\partial L}{\partial t}\epsilon\xi \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \dot{p}_\alpha\epsilon\eta_\alpha + p_\alpha(\epsilon\dot{\eta}_\alpha - \epsilon\dot{q}_\alpha\dot{\xi}) - \dot{H}\epsilon\xi \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_\alpha\eta_\alpha - H\xi) - \epsilon L\dot{\xi} \end{aligned} \tag{20}$$

另一方面，我们直接将无穷小变换代入L，如果（这可以看成时对称性的定义）

$$L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{t}) = L(q, \dot{q}, t) + \epsilon\frac{\mathrm{d}\Phi(q, t)}{\mathrm{d}t} - \epsilon L\dot{\xi} \tag{21}$$

比较上述两式，我们得到守恒量

$$\boxed{I = \sum_\alpha p_\alpha\eta_\alpha - H\xi - \Phi} \tag{22}$$

下面我们来看几个例子：

  - **可遗坐标与广义动量守恒**。无穷小变换为

$$q_\alpha \to q_\alpha + \epsilon, \quad t \to t \tag{23}$$

    对应于$\eta_\beta = \delta_{\alpha\beta}$[1]，$\xi = 0$，从而守恒量为 $I = p_\beta\eta_\beta - H\xi = p_\alpha$。
  - **时间平移不变性与哈密顿量守恒**。无穷小变换为$\eta_\alpha = 0$，$\xi = 1$，从而守恒量为$I = -H$。
  - **直角坐标系下的转动不变性与角动量守恒**。考虑无穷小转动

$$x \to x - \epsilon y, \quad y \to y + \epsilon x \tag{24}$$

    对应于$\eta_x = -y$，$\eta_y = x$，$\xi = 0$，从而$I = p_x(-y) + p_y x = L_z$。
  - **伽利略不变性**。无穷小变换为

$$x \to x + vt, \quad t \to t \tag{25}$$

[1] $\delta_{\alpha\beta} = 1$ when $\alpha = \beta$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ when $\alpha \neq \beta$

取速度v为ϵ，$\eta=t$，$\xi=0$。守恒量为$I=pt=m\dot{x}t$?这个结果显然是错误的。因为在伽利略变换下，L会差一个全微分！

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}+v)^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+vm\dot{x}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mx) \tag{26}$$

因此，$\Phi=mx$，从而守恒量应该为

$$I=m\dot{x}t-mx=m(\dot{x}t-x) \tag{27}$$

这当然是对的，尽管没什么用。

– **Lorentz不变性**。这里我们直接给出相对论下的自由粒子拉格朗日量

$$L=-mc^2\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2/c^2} \tag{28}$$

可以验证，拉格朗日方程确实给出运动方程

$$\frac{m\ddot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2/c^2}}=0 \tag{29}$$

对于无限小Lorentz变换（v表示无穷小量）

$$x\to x-vt,\quad y\to y,\quad z\to z,\quad t\to t-vx/c^2 \tag{30}$$

对应于

$$\eta_x=-t,\quad \eta_y=0,\quad \eta_z=0,\quad \xi=-x/c^2 \tag{31}$$

进而根据式19，

$$\dot{x}\to\dot{x}-v+v\dot{x}^2/c^2,\quad \dot{y}\to\dot{y}+v\dot{x}\dot{y}/c^2,\quad \dot{z}\to\dot{z}+v\dot{x}\dot{z}/c^2 \tag{32}$$

我们发现

$$L\to L+vm\dot{x}\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2/c^2}=L-vL\dot{\xi} \tag{33}$$

后一项正是式21中的最后一项。进而，我们得到守恒量

$$I=-p_xt+Hx/c^2=mx-p_xt \tag{34}$$

这与非相对论极限下的伽利略变换对称性的结果是一样的。事实上，上述守恒量可以看成是在x-t平面内“转动的一种角动量”。它们（共3个）与3个角动量共同构成Minkowski四维空间中的6个“角动量”。

– **Ronge-Lenz矢量**。（见wikipedia上的相关讨论）对于向心力$V=-k/r$问题，考虑变换（或许我们也可以通过parabolic坐标找到该变换，见Hand&Finch第六章）

$$x_i\to x_i+\frac{\epsilon_j}{2}[2p_ix_j-x_ip_j-\delta_{ij}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})] \tag{35}$$

在该变换下，

$$L\to L+\epsilon_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mkx_j}{r}\right) \tag{36}$$

从而，我们得到守恒量

$$I_j = \frac{1}{2}[2p_i x_j - x_i p_j - \delta_{ij}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})]p_i - \frac{mkx_j}{r} = \mathbf{p}^2 x_j - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})p_j - \frac{mkx_j}{r} \tag{37}$$

写成矢量形式就是$\mathbf{A} = (I_1, I_2, I_3)$，

$$\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}} \tag{38}$$

– **共形对称性**。我们已经知道，对于齐次函数的势能，考虑变换

$$x \to \alpha x \tag{39}$$

$$t \to \beta t \tag{40}$$

在该变换下，如果$\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$，$L \to \alpha^k L$，运动方程不变。将其写成无穷小变换的形式

$$x \to x + \epsilon x, \quad t \to t + \epsilon\left(1 - \frac{k}{2}\right)t, \quad L \to L + \epsilon k L \tag{41}$$

根据对称性的定义式21，只有当第二项等于$-\epsilon L\dot{\xi}$，即$k = -2$时，该变换为一种对称性，称为共形对称性。进而，可以得到守恒量

$$I = p_x \eta_x - H\xi = xp_x - 2Et \tag{42}$$

第一项是与膨胀相对应的广义动量，因为膨胀本身不是对称性，而时空一起的共形变换才是。这里，我们得到的一个守恒量是还有时间的，可以看成是一个运动积分。这是很有趣的一个结果，因为我们根本没有求解运动方程，却找到一个含有时间的运动积分，就相当于直接得到了运动方程的解！

3 应用实例

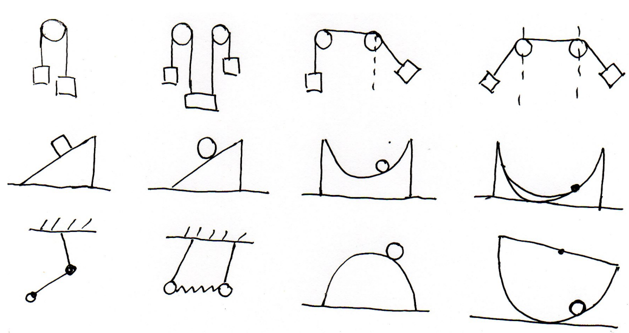

图 1: 几种典型的习题

- 非惯性系。
考虑一个非惯性系中的自由粒子，动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2 = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2 \tag{43}$$

代入拉格朗日方程，得

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega} \tag{44}$$

移至左边，得

$$m\ddot{\mathbf{r}} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0 \tag{45}$$

第二、三、四项分别为科里奥利加速度、切向加速度、向心加速度。

- 速度依赖势。
  在上一个例子中，我们也可以将动能的后两项归为势能，即

  $$V = -m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \tag{46}$$

  后一项正是离心势能，而前一项依赖于速度$\dot{\mathbf{r}}$，这提示我们可以在是能中将广义速度包括进去，称为速度依赖的势能。

- 电动力学中的速度依赖势。对比科里奥利力与洛伦兹力的表达式，不难猜测，可以通过定义势能

  $$V = e\underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r})}_{\text{vector potential}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - e\underbrace{\phi}_{\text{electrical potential}} \tag{47}$$

  而得到洛伦兹力和库仑力。可以验证，对于

  $$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2}e(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + e\phi \tag{48}$$

  拉格朗日方程确实给出

  $$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + e\nabla\phi \tag{49}$$

- 规范变换。我们可以对$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$和$\phi$做如下的变换

  $$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \qquad \mathbf{A} \to \mathbf{A} - \nabla\chi \tag{50}$$

  拉格朗日变为

  $$L \to L + e(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\chi + \partial_t\chi) = L + e\mathrm{d}\chi/\mathrm{d}t \tag{51}$$

  刚好差一个全微分，因此运动方程不变。

4 *非完整约束

对于线性的速度约束

$$f_i = A_{i\alpha}\dot{q}_\alpha + B_i = 0 \tag{52}$$

有（因为时间冻结）

$$A_{i\alpha}\delta q_\alpha = 0 \tag{53}$$

代入达朗贝尔原理，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_i A_{i\alpha} \tag{54}$$

一般的，如果存在k_h个完整约束和k_{nh}个非完整约束，有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{k_\mathrm{h}} \lambda_i^\mathrm{h} \frac{\partial f_i^\mathrm{h}}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{k_\mathrm{nh}} \lambda_i^\mathrm{nh} A_{i\alpha}} \tag{55}$$

一个猜想是将$A_{i\alpha}$一般的换成$\partial f_i^\mathrm{nh}/\partial \dot{q}_\alpha$.（Chetaev条件，梁书§3.3，这个条件在大多数经典力学教材中并未被提及，也许毕竟它还只是个猜想。）

另外一种可能的非完整约束来源于耗散，比如摩擦。这时，我们可以定义Rayleigh耗散函数（Goldstein §1.5）

$$f_i^\mathrm{d} = \frac{1}{2}k_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \tag{56}$$

进而，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{k_\mathrm{h}} \lambda_i^\mathrm{h} \frac{\partial f_i^\mathrm{h}}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{k_\mathrm{nh}} \lambda_i^\mathrm{nh} \frac{\partial f_i^\mathrm{nh}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \sum_{i=1}^{k_\mathrm{d}} \frac{\partial f_i^d}{\partial \dot{q}_\alpha}} \tag{57}$$

- 耗散函数的物理含义（朗道§25）。
  考虑只有一个耗散函数f的情况，拉格朗日方程为

  $$\dot{p}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{58}$$

  两边同乘以$\dot{q}_\alpha$并对α求和，利用Rayleigh函数的齐次性质，得

  $$\begin{aligned} &\dot{p}_\alpha\dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha = -\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha = -2f \\ =&\dot{p}_\alpha\dot{q}_\alpha - \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right) \\ =&\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -2f \end{aligned} \tag{59}$$

  从中可以看出，如果L不含时，$H = H_0\mathrm{e}^{-2ft}$，即$2f$给出系统能量的衰减速率。因此，f被称为耗散函数。