单振子问题

The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction. — Sidney Coleman

将势能做展开

$$
\begin{aligned}
V(x) =& V(x_0) + V'_x(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}V''_{xx}(x_0)(x-x_0)^2 \\
&+ \frac{1}{3!}V'''_{xxx}(x_0)(x-x_0)^3 + \frac{1}{4!}V''''_{xxxx}(x_0,t)(x-x_0)^4 + \cdots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

选取坐标，使得$x_0 = 0$，

$$V(x) = V(0) - f_{\text{ext}}x + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{3}\alpha x^3 + \frac{1}{4}\beta x^4 + \cdots \tag{2}$$

为了描写耗散项，再引入耗散函数

$$F = \frac{1}{2}\gamma\dot{x}^2 \tag{3}$$

将V和F代入一般的拉格朗日方程，得

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx + \alpha x^2 + \beta x^3 + \cdots = f_{\text{ext}} \tag{4}$$

1 简谐振子

线性的振子称为简谐振子。

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = f_{\text{ext}}(t) \tag{5}$$

这种线性的方程可以用复数表示形式求解：设$x(t) = \mathrm{Re}[X(t)]$，$f_{\text{ext}}(t) = \mathrm{Re}[F(t)]$，[1] 对$X(t)$和$F(t)$做傅里叶变换

$$X(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad F(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} F(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{6}$$

代入运动方程，得

$$(-m\omega^2 + i\gamma\omega + k)x(\omega) = F(\omega) \tag{7}$$

[1]对于线性振子，我们完全可以利用复表示进行计算，最后在回到物理量时取实部即可。因此，我们可以忽略复表示$X(t)$与实表示$x(t)$的区别。

- 如果$F(\omega)=0$，则 $\omega_\pm=\pm\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4m^2}}+i\frac{\gamma}{2m}$，其中$\omega_0=\sqrt{k/m}$。根据$\gamma/2m$与$\omega_0$的相对大小，可以进一步将解划分为三种情况：
  1. 欠阻尼：$\omega_0>\gamma/2m$。记$\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4m^2}=\nu$，则通解
  $$x(t)=[a\cos(\nu t)+b\sin(\nu t)]\mathrm{e}^{-\gamma t/2m} \tag{8}$$
  2. 过阻尼：$\omega_0<\gamma/2m$。记$\sqrt{\gamma^2/4m^2-\omega_0^2}=\nu$，则通解为
  $$x(t)=[a\mathrm{e}^{\nu t}+b\mathrm{e}^{-\nu t}]\mathrm{e}^{-\gamma t/2m} \tag{9}$$
  3. 临界阻尼：$\omega_0=\gamma/2m$。解为
  $$x(t)=(a+bt)\mathrm{e}^{-w_0 t} \tag{10}$$

- 如果$F(\omega)\neq 0$，则
$$X(\omega)=\frac{F(\omega)}{-m\omega^2+i\gamma\omega+k} \tag{11}$$
$$=\frac{\omega_0^2-\omega^2-i\frac{\gamma\omega}{m}}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}\frac{F(\omega)}{m} \tag{12}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{i\delta}}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}}\frac{F(\omega)}{m} \tag{13}$$
  其中$\delta=\mathrm{angle}(\omega_0^2-\omega^2,-\gamma\omega/m)$。可以看到，如果$\gamma<\sqrt{2}m\omega_0$，则在$\omega=\sqrt{\omega_0-\frac{\gamma^2}{2m^2}}$处发生共振。

- 一个特殊情况：当$\gamma=0$，$F(\omega)=F_0\delta(\omega-\omega_0)$[2]，即$F(t)=F_0\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$，上述积分失效。我们可以回到初始的运动方程，得到问题的一个特解
$$X(t)=\frac{F_0 t}{2m\omega_0}\mathrm{e}^{i\omega_0 t} \tag{14}$$
  结果随着t线性增大！这也就意味着势能只保留到二阶的近似失效，需要记及更高阶展开，即非线性效应。

将上面的本征解（8、9或10）与受迫振动解13加到一起，就构成了问题的完整解。比如对于欠阻尼情况：
$$x(t)=[a\cos(\nu t)+b\sin(\nu t)]\mathrm{e}^{-\gamma t/2m}+\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\cos(\omega t+\delta)}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}}\frac{F(\omega)}{m} \tag{15}$$

2 *格林函数

可以把式受迫振动解中的被积函数定义为格林函数
$$X(\omega)=G(\omega)F(\omega) \tag{16}$$

[2] $\delta(x)$为Dirac的δ函数，表示只有当$x=0$时才不等于零。

其中

$$G(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + i\gamma\omega + k} \tag{17}$$

格林函数的极点就对应于系统的一个本征模式。

进一步，可以求出$G(\omega)$的反傅里叶变换。对欠阻尼情况，

$$G(t) = \int \frac{1}{2\pi} G(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{m\nu} \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t} \sin(\nu t)\,\theta(t) \tag{18}$$

其中，$\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$，$\theta(t)$为阶跃函数，表明因果关系：在0时刻的外力只会影响$t > 0$时刻的状态。利用$G(t)$可以将$X(t)$表示为卷积的形式

$$X(t) = \int G(t-t')F(t')\mathrm{d}t' \tag{19}$$

3 快速受迫振动（朗道§30）

考虑一个单频外场$F(x,t) = F_0(x)\mathrm{e}^{i\Omega t}$（$\Omega \gg \omega_0$），我们可以将$x(t)$分为快场分量$\xi(t)$与缓变分量$X(t)$，

$$x(t) = X(t) + \xi(t) \tag{20}$$

则

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} + \gamma\dot{X} + kX = F_0(X)\mathrm{e}^{i\Omega t} + \frac{\partial F_0(X)}{\partial X}\mathrm{e}^{i\Omega t}\xi \tag{21}$$

这里，令快场分量与慢场分量分别相等。快场ξ满足

$$\ddot{\xi} = F_0(X)\mathrm{e}^{i\Omega t} \tag{22}$$

解得

$$\xi = -\frac{F_0(X)}{m\Omega^2}\mathrm{e}^{i\Omega t} \tag{23}$$

代入慢场方程，对时间取平均，利用$\langle\cos^2\Omega t\rangle = 1/2$，得 [3]

$$m\ddot{X} + \gamma\dot{X} + kX = -\left\langle \frac{\partial F_0(X)}{\partial X}\frac{F_0(X)}{m\Omega^2}\cos^2(\Omega t)\right\rangle = -\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{F_0^2(X)}{4m\Omega^2}\right) \tag{24}$$

这相当于一个有效的势场$V_{\mathrm{eff}}(X) = F_0^2(X)/4m\Omega^2$。

- 例：悬挂点沿竖直方向快速振动的单摆。（Arovas 7.5.1）取水平方向为x方向，竖直向下方向为y方向，则

$$L = \frac{1}{2}m(\ell\cos\theta\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{h} - \ell\sin\theta\dot{\theta})^2 + mh(h + \ell\cos\theta) \tag{25}$$

[3]注意在非线性的计算中，要先取实部再平方，而不能先平方再取实部！

运动方程

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=\frac{\ddot{h}}{\ell}\sin\theta \tag{26}$$

设$\theta=\Theta+\xi$，$h(t)=h_0(t)\cos\Omega t$，代入得

$$\ddot{\Theta}+\ddot{\xi}+\frac{g}{\ell}\sin\Theta=\frac{-h_0\Omega^2}{\ell}\sin\Theta+\frac{-h_0\Omega^2}{\ell}\xi\cos\Theta \tag{27}$$

求解快场部分得

$$\xi=\frac{h_0\sin\Theta}{\ell}\cos(\Omega t) \tag{28}$$

进而代到慢场方程中，对时间取平均，得

$$\ddot{\Theta}+\frac{g}{\ell}\sin\Theta=-\frac{h_0^2\Omega^2}{4\ell^2}\sin(2\Theta) \tag{29}$$

因此，得到有效势

$$V_{\mathrm{eff}}(\Theta)=-\frac{g}{\ell}\cos\Theta-\frac{h_0^2\Omega^2}{8\ell^2}\cos 2\Theta \tag{30}$$

这是$\cos\Theta$的二次函数。当$\Omega>\sqrt{2}(\ell/h_0)\sqrt{g/\ell}$，会出现新的亚稳态平衡点$\Theta=\pi$，即竖直向上的单摆为稳定平衡点。

4 非线性效应

现在，我们考虑非谐项$\alpha x^2+\beta x^3$的后果。考虑运动方程

$$\ddot{x}+\omega_0 x+ax^2+bx^3=0 \tag{31}$$

设$x=x_0+x_1+x_2+\cdots$，代入得

$$\ddot{x}_0+\omega_0^2x_0=0 \tag{32}$$

$$\ddot{x}_1+\omega_0^2x_1+ax_0^2=0 \tag{33}$$

$$\ddot{x}_2+\omega_0^2x_2+2ax_0x_1+bx_0^3=0 \tag{34}$$

$$\vdots$$

解零阶方程，得

$$x_0=A\cos(\omega_0 t) \tag{35}$$

代入一阶方程，得

$$x_1=-\frac{aA^2}{2\omega_0^2}+\frac{aA^2\cos(2\omega_0 t)}{6\omega_0^2} \tag{36}$$

这里出现了二倍频。再代入二阶方程，$2ax_0x_1+bx_0^3$中出现了$\cos(\omega_0 t)$项，这将导致共振的出现！因此为非物理的结果。这时，应该考虑基频的改变，即ω_0应变为$\omega_0+\omega_2$，其中ω_2可以由共振项消失来确定。具体计算见梁书§10.1和朗道§28。

小结一下非线性效应的特点：（1）倍频的出现；（2）基频的改变。

5 参数共振

研究如下形式的振子（称为Hill方程）

$$\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = 0 \tag{37}$$

其中$\omega_0^2(t+T) = \omega_0^2(t)$，则根据Floquet定理 [4]，有两个独立的解

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}u_1(t), \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}u_2(t) \tag{39}$$

其中$u_{1,2}(t) = u_{1,2}(t+T)$为周期函数，而$\lambda_{1,2}$满足：

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 T}\mathrm{e}^{\lambda_2 T} = 1 \tag{40}$$

如果$\lambda_{1,2}$为实数，则存在共振解。注意到，这个共振解随时间是e指数增加，与受迫振动中的共振不同（线性增加）。

- 例：荡秋千（Mathieu方程）

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + q\cos(\Omega t)]x = 0 \tag{41}$$

当$\Omega = 2\omega_0$，可以得到共振解。设$x = a(t)\cos\omega_0 t + b(t)\sin\omega_0 t$，代入并略去$\ddot{a}$、$\ddot{b}$以及三倍频项，得到

$$4\dot{a} + q\omega_0 b = 0 \tag{42}$$

$$4\dot{b} + q\omega_0 a = 0 \tag{43}$$

设$a = a_0\mathrm{e}^{\lambda t}$，$b = b_0\mathrm{e}^{\lambda t}$，得

$$\det\begin{bmatrix} 4\lambda & q\omega_0 \\ q\omega_0 & 4\lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{44}$$

得到$\lambda = \pm q\omega_0/4$。正号即对应于共振解。

[4]Floquet定理：微分方程组$\dot{x} = A(t)x$，如果$A(t+T) = A$，则$x(t) = \mathrm{e}^{tB}u(t)$，其中$u(t+T) = u(t)$。Hill方程就相当于

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2(t) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{38}$$