开普勒问题$V = -k/\rho$

1 轨道方程

根据力的比内方程

$$mh^2u^2(u'' + u) - ku^2 = 0 \tag{1}$$

可以解出

$$u = A\cos(\varphi + \varphi_0) + \frac{k}{mh^2} = \frac{1 + e\cos(\varphi + \varphi_0)}{p} \tag{2}$$

其中A为待定参数，可以由能量的表达式（势能的比内方程）给出

$$A = \sqrt{\frac{2}{mh^2}\left(E + \frac{k^2}{2mh^2}\right)} \tag{3}$$

与椭圆方程$\rho = p/[1 + e\cos(\varphi + \varphi_0)]$比较，得到

$$p = \frac{mh^2}{k}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2mh^2E}{k^2}} \tag{4}$$

注意到p仅仅由角动量决定而与能量无关。

接下来，让我们对轨道方程$\rho = p/(1 + e\cos\varphi)$做一些具体的讨论。

- $e = 0$ or $E = -k^2/2mh^2$, 圆

$$\rho = p = \frac{mh^2}{k} \tag{5}$$

- $0 < e < 1$ or $-k^2/2mh^2 < E < 0$, 椭圆

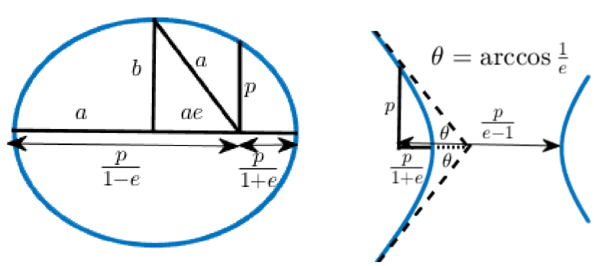


图 1:

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e}+\frac{p}{1-e}\right)=-\frac{k}{2E} \tag{6}$$

$$b=a\sqrt{1-e^2}=\sqrt{\frac{-mh^2}{2E}} \tag{7}$$

利用a和b的表达式，可以得到轨道周期

$$T=\frac{\pi ab}{h/2}=\frac{2\pi a}{h}\sqrt{-\frac{mh^2}{2E}}=2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{8}$$

由于太阳质量M_{sun}远大于行星的质量m_p，约化质量$m \approx m_p$，因此$m/k \approx m_p/GM_{sun}m_p = 1/GM_{sun}$与行星质量无关。这正是开普勒第三定律。

注意到，a仅仅由E决定，因此，在应用时可以取a和e作为变量往往比较简单

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\varphi+\varphi_0)} \tag{9}$$

- $e=1$ or $E=0$, 抛物线
- $e>1$ or $E>0$, 双曲线
  渐近线为$\cos\varphi=-1/e$。与椭圆轨道类似，这里我们也可以取a和e为变量

$$\rho=\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos(\varphi+\varphi_0)} \tag{10}$$

其中a由能量直接给出

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{e-1}-\frac{p}{e+1}\right)=\frac{k}{2E} \tag{11}$$

2 时间依赖

利用$\dot{\rho}=\sqrt{2(E-V_{\text{eff}})/m}$，有

$$\begin{aligned}
t-t_0&=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{E-V_{\text{eff}}}}\\
&=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\frac{2E\rho^2}{m}-h^2+\frac{2k\rho}{m}}}\\
&=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\frac{2E}{m}\left(\rho+\frac{k}{2E}\right)^2-\frac{k^2}{4E^2}\left(1+\frac{2Emh^2}{k^2}\right)}}\\
&=\begin{cases}
\sqrt{\frac{ma}{k}}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{a^2e^2-(\rho-a)^2}}=\sqrt{\frac{m}{k}}a^{3/2}(\xi-e\sin\xi)|_{\xi_0}^{\xi}, & E<0, \rho-a=-ae\cos\xi\\
\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho-\frac{mh^2}{2k}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}p^{3/2}\left(\xi+\frac{\xi^3}{3}\right)|_{\xi_0}^{\xi}, & E=0, \rho=\frac{mh^2}{2k}(1+\xi^2)\\
\sqrt{\frac{ma}{k}}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{-a^2e^2+(\rho+a)^2}}=\sqrt{\frac{m}{k}}a^{3/2}(e\sinh\xi-\xi)|_{\xi_0}^{\xi}, & E>0, \rho-a=ae\cosh\xi
\end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

这结果由开普勒首先得到，称为开普勒方程。对于椭圆轨道，结果可以用周期T表示为

$$2\pi\frac{t-t_0}{T}=(\xi-e\sin\xi)|_{\xi_0}^{\xi} \tag{13}$$

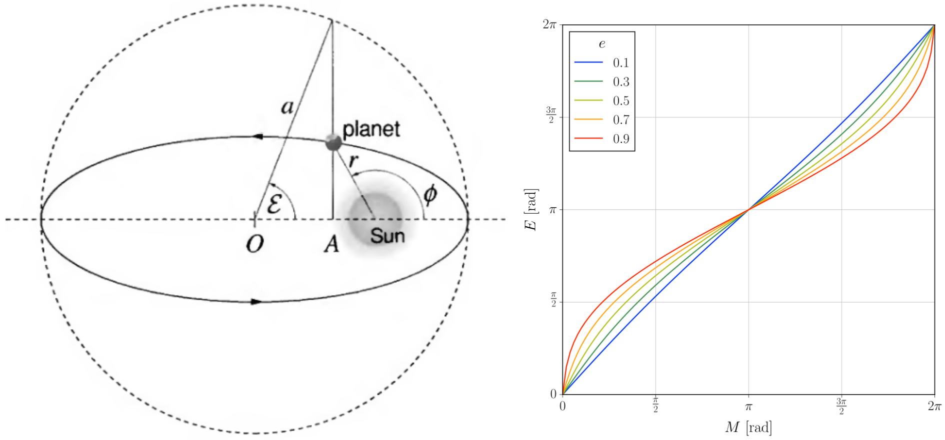


图 2: 开普勒方程。左图：Eccentric anomaly ξ，在图中标为$\mathcal{E}$。摘自Hand&Finch书。右图：开普勒方程的解。图中E表示ξ，M就是$2\pi t/T$。摘自wikipedia。

两边均为无量纲量。

另一方面，我们也可以利用$\dot{\varphi}=h/\rho^2$得到时间依赖，

$$t-t_0=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi}{h}=\frac{p^2}{h}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+e\cos(\varphi))^2} \tag{14}$$

当然，这个积分可以通过变量代换（其实还是上面定义的ξ）进行求解：

$$(1+e\cos\varphi)(1-e\cos\xi)=1-e^2,\qquad e<1 \tag{15}$$

$$(1+e\cos\varphi)(e\cosh\xi-1)=e^2-1,\qquad e>1 \tag{16}$$

$$\xi=\tanh(\varphi/2),\qquad e=1 \tag{17}$$

不过，上面的积分变换显然难以想到。

一个更有效的方式当然是通过Mathematica！ [1]当$e<1$，

$$t-t_0=\frac{p^2}{h}\frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}\left[2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}\right] \tag{18}$$

设（见stackexchange上的这个讨论）

$$\tan\frac{\xi}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2} \tag{19}$$

可以证明，

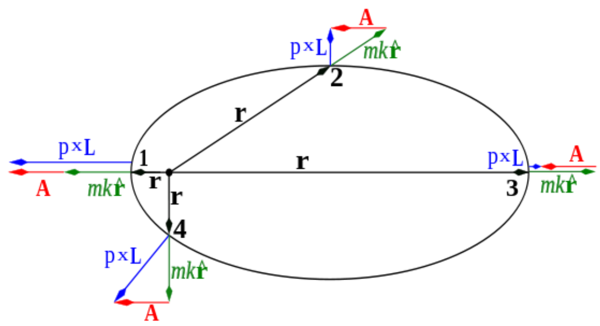
$$\frac{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}=\sin\xi \tag{20}$$

从而

$$t-t_0=\sqrt{\frac{m}{k}}a^{3/2}\left(\xi-e\sin\xi\right)\Big|_{\xi_0}^{\xi} \tag{21}$$

[1]感谢张泓轩同学指出，这类积分可以通过三角函数中的“万能公式”方法进行积分。

3 Laplace-Runge-Lenz矢量



考虑如下的矢量

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}} \tag{22}$$

可以通过对时间求导直接证明$\mathbf{A}$是守恒量，并沿着半长轴方向。该守恒量在历史上被多次重复“发现”，现被称为Laplace-Runge-Lenz矢量。[2] [3]

进一步，通过计算$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$可以得到轨道方程。因为

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mk\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = L^2 - mk\rho = A\rho\cos\varphi \tag{24}$$

进而

$$\rho = \frac{L^2}{mk + A\cos\theta} \tag{25}$$

这正是圆锥曲线的方程，对比之前的结果，我们得到

$$p = \frac{L^2}{mk} = \frac{mh^2}{k}, \qquad e = \frac{A}{mk} \tag{26}$$

原来$\mathbf{A}/mk$的大小就是偏心率e！我们也可以通过计算A^2得到e的具体表达式

$$\begin{aligned} A^2 &= p^2L^2 + m^2k^2 - 2mk(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &= 2m\left(E + \frac{k}{\rho}\right)L^2 + m^2k^2 - \frac{2mk}{\rho}L^2 \\ &= 2mEL^2 + m^2k^2 \end{aligned} \tag{27}$$

进而

$$e = \frac{A}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2mEL^2}{m^2k^2}} = \sqrt{1 + \frac{2mEh^2}{k^2}} \tag{28}$$

[2]这个Lenz并不是Lenz定律的那个Lenz。

[3] 有趣的是，$\mathbf{L}$和$\mathbf{A}$这样两个守恒的矢量，对应于这个系统中存在的一种隐藏的对称性：

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \varepsilon_{ijk}L_k, \\ [A_i, L_j] &= \varepsilon_{ijk}A_k, \\ [A_i, A_j] &= -2mE\varepsilon_{ijk}L_k. \end{aligned} \tag{23}$$

这正是SO(4)群的特征，对应于在4维空间中的一种旋转不变性。事实上，正是该对称性给出了氢原子的主量子数n。

4 一些应用

4.1 三个宇宙速度

第一宇宙速度也被称为环绕速度，可由$V'_{\text{eff}}=0$得到

$$v_1=\sqrt{\frac{k}{mR}}=\sqrt{\frac{GM}{R}} \tag{29}$$

第二宇宙速度称为逃逸速度，可由$V_{\text{eff}}=0$得到

$$v_2=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2}v_1 \tag{30}$$

第三宇宙速度比较复杂，为在行星上逃出太阳系的速度。根据能量守恒

$$\frac{1}{2}mv_3^2-\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}m(v_{2\odot}-v_{1\odot})^2 \tag{31}$$

解得

$$v_3=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2v_{1\odot}^2+v_2^2} \tag{32}$$

其中，$\odot$表示太阳。

4.2 潮汐与卫星姿态

考虑一个物体在引力场下的势能

$$\begin{aligned}
V&=-\int\frac{GM\mathrm{d}m}{|\boldsymbol{\ell}+\mathbf{r}|}=-\int\frac{GM\rho\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{|\boldsymbol{\ell}+\mathbf{r}|}\\
&=-\int\frac{GM\rho\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\ell}\left(1+\frac{2\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\ell}}{\ell^2}+\frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1/2}\\
&=-\frac{GMm}{\ell}+\int\frac{GM\rho(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\ell})\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\ell^3}-\int\frac{GM\rho\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\ell}\left[\frac{3(\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{r})^2-r^2\ell^2}{2\ell^4}\right]+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)
\end{aligned} \tag{33}$$

第一项为将该物体看成质点的势能，第二项为偶极矩（一阶勒让德函数$P_1=\cos\theta$）的贡献，第三项为引力四极距（二阶勒让德函数$P_2=3\cos^2\theta-1$）的贡献。正是四极矩项造成了潮汐现象（一天两次）。

利用引力极距，可以很容易理解卫星的平衡姿态。对于哑铃形状的卫星，其平衡位置应该是其连线方向指向地心的方向。

4.3 轨道变更问题

在描述一个轨道的时候，需要3个参数：p，e，φ_0。当然，从几何含义考虑，也可以采用a，e，φ_0作为参数

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\varphi+\varphi_0)} \tag{34}$$

而动力学量E和h则由a和e给出

$$a=\frac{k}{2|E|},\qquad e=\sqrt{1+\frac{2mh^2E}{k^2}} \tag{35}$$

常见的轨道变更方案如下：

- 在极值点改变速度的大小，比如$v \to \lambda v$，称为霍曼转移，则

$$h \to \lambda h, \qquad E \to E + \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)v^2, \tag{36}$$

$$p \to \lambda^2 p, \qquad e \to \lambda^2 - 1 + e\lambda^2, \tag{37}$$

其中，e的结果可以通过$e = A/mk$得到，

$$e = \frac{A}{mk} = \frac{pL}{mk} - 1 \to \frac{\lambda^2 pL}{mk} - 1 = \lambda^2(e+1) - 1 \tag{38}$$

当然，也可以利用变轨条件

$$\frac{p}{1+e} = \frac{\lambda^2 p}{1+e'} \tag{39}$$

得到，因为该极值点不发生改变（速度与位移仍保持垂直）。

- 在极值点附加上一个沿径向的速度$v_\perp = \alpha v$，则

$$h \to h, \qquad E \to E + \frac{1}{2}\alpha^2 v^2 \tag{40}$$

$$p \to p, \qquad e \to \sqrt{e^2 + \frac{m^2 h^2 \alpha^2}{k^2}} \tag{41}$$

这时，轨道会发生一个转角φ_0'，根据

$$\frac{p}{1+e} = \frac{p}{1+e'\cos\varphi_0'} \tag{42}$$

得 $\varphi_0' = \arccos(e/e')$。因此，如果$e = 0$，则$\varphi_0' = \pi/2$。

- 如果一般的改变轨道，我们总可以根据动力学量的改变得到新的h'和E'，进而得到新的p'和e'，再根据变轨时的位置条件得到轨道转角的改变φ_0'

$$\frac{p}{1+e\cos(\varphi+\varphi_0)} = \frac{p'}{1+e'\cos(\varphi+\varphi_0')} \tag{43}$$

- 例：飞船从半径为R_1的圆轨道出发，想到达(R_2, ϕ_2)（$R_2 > R_1$）的位置，可以如何做？如何尽可能的节省能量？

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\varphi_1+\varphi_0)}, \\ R_2 &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\phi_2+\varphi_0)} \end{aligned} \tag{44}$$

2个方程，4个未知数。

如果想要最节省能量，应该让半长轴a尽可能小。因此，可以取(R_2, ϕ_2)为极值点，进而

$$\phi_2 + \varphi_0 = \pi \tag{45}$$

$$a(1+e) = R_2 \tag{46}$$

而轨道极小值应该满足

$$a(1-e) \geq R_0 \tag{47}$$

取等号时，得到$a=(R_0+R_2)/2$，$e=(R_2-R_0)/(R_2+R_0)$。进一步，利用a和e，可以得到变轨时的角度

$$\varphi_1+\pi-\phi_2=\arccos\left[\frac{a(1-e^2)}{eR_1}-\frac{1}{e}\right]=\arccos\left[\frac{2R_0R_2-R_0R_1-R_1R_2}{R_1(R_2-R_0)}\right] \tag{48}$$

4.4 引力助推

在行星的参考系中，入射与出射的速度大小相同，即

$$(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_0)^2=(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_0)^2 \tag{49}$$

得

$$v_2^2-v_1^2=2(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{v}_0 \tag{50}$$

如果$\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$沿着$\mathbf{v}_0$的分量大于零，则可以起到加速的效果。那么增加的动能从何而来呢？当然是行星的能量。

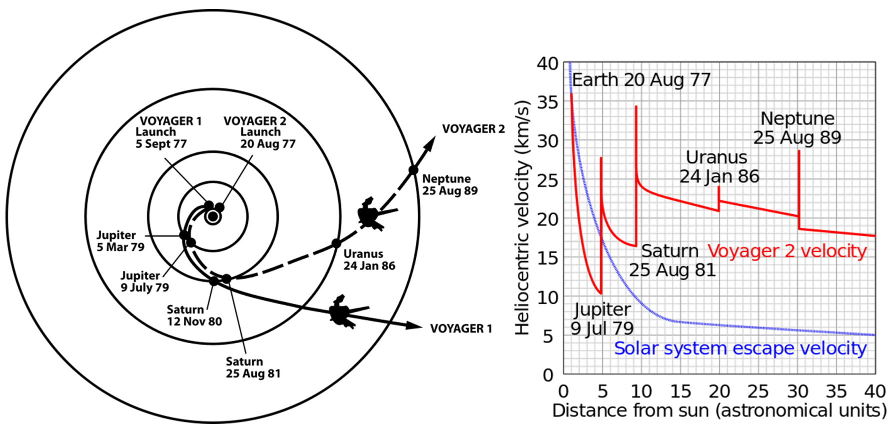


图 3: 旅行者号的轨道与引力助推

利用引力助推的方法，旅行者号只用了12年从地球到达冥王星，而霍曼轨道则需要

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(r_N+r_E)}{2r_E}\right]^{3/2}\approx 30\text{ years} \tag{51}$$

其中，用到$r_N=30r_E$。在Arovas的讲义9.5中，给出了一个具体的计算，仅考虑木星的散射。推荐大家阅读。

4.5 限制性三体问题

假定两个大质量的质点m_1和m_2在相互围绕着做圆周运动，设其间距为r，满足

$$\omega^2=\frac{G(m_1+m_2)}{r^3} \tag{52}$$

现在放入第三个小质量m_3的质点，其拉格朗日量为

$$L=\frac{1}{2}m_3(\dot{x}-\omega y)^2+\frac{1}{2}m_3(\dot{y}+\omega x)^2-\frac{Gm_1m_3}{r_{13}}-\frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \tag{53}$$

历史上，彭加莱正是在对该问题进行研究中开创了混沌理论。

当$\dot{x}=\dot{y}=0$，可以得到5个不动点，称为拉格朗日点，分别记为$L_{1\sim5}$。其中，$L_{1,2,3}$为不稳定不动点，而$L_{4,5}$为稳定不动点。