引言：牛顿力学

1 坐标系

在描述一个物体时，我们需要将其参数化在给定的坐标系中。常见的坐标系包括：直角坐标系，极坐标系和球坐标系等。

- 自然坐标系$\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}\}$。沿着运动路径建立坐标系，切向为$\boldsymbol{\tau}$，径向为$\mathbf{n}$。

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\dot{\theta}\mathbf{n} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n} \tag{1}$$

- 直角坐标系$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$可以定义为不随时间变化的坐标系$\mathrm{d}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}/\mathrm{d}t = 0$

- 柱坐标系$\{\rho, \varphi, z\}$。

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j} \\
\mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j} \\
\mathbf{e}_z &= \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{2}$$

通过位移$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho$对时间求导，我们可以计算其速度和加速度，

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \tag{3}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi \tag{4}$$

- 球坐标系$\{r, \theta, \phi\}$。

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k} \\
\mathbf{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\mathbf{i} + \cos\theta\sin\phi\mathbf{j} - \sin\theta\mathbf{k} \\
\mathbf{e}_\phi &= -\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}
\end{aligned} \tag{5}$$

在球坐标系下，速度和加速度可以相应的求出。

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \tag{6}$$

$$\mathbf{a} = \cdots \tag{7}$$

- 例：由开普勒定律推导平方反比律。椭圆的轨道可以写成$\rho = p/(1 + e\cos\varphi)$，并且掠面速度守恒$h = \rho^2\dot{\varphi}$。（回到直角坐标系，我们可以得到该轨道的方程为$x^2 + y^2 = (p - xe)^2$，因此表示一个

椭圆。）

解：对

$$1 + e\cos\varphi = \frac{p}{\rho} \tag{8}$$

两边求导，得到

$$\dot{\rho} = \frac{eh}{p}\sin\varphi \tag{9}$$

再求一次导，得

$$\ddot{\rho} = \frac{eh^2}{p\rho^2}\cos\varphi = \frac{h^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{p}\right) \tag{10}$$

代入到加速度表达式中，

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = \frac{h^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{p}\right) - \frac{h^2}{\rho^3} = -\frac{h^2}{p\rho^2} \tag{11}$$

最后，我们列出几种坐标系中动能的表达式：

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{12}$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{13}$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) \tag{14}$$

1.1 *一般的曲线坐标系

一个一般的坐标变换可以被表示成

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{bmatrix} = U_{3\times3}\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\\mathbf{j}\\\mathbf{k}\end{bmatrix} \tag{15}$$

其中U是一个矩阵。对时间求导，我们就可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{bmatrix} = \dot{U}\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\\mathbf{j}\\\mathbf{k}\end{bmatrix} = \dot{U}U^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{bmatrix} \tag{16}$$

- 例：利用这种方式推导柱坐标和球坐标中的速度和加速度的表达式。

更多内容，可参见wiki:curvilinear-coordinates和wiki:orthogonal-coordinates

2 单粒子牛顿力学

从牛顿定律出发，

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \tag{17}$$

两边同时作用$\mathbf{r}\times$，

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} \tag{18}$$

当$\mathbf{F}=0$和$\boldsymbol{\tau}=0$时，分别得到动量守恒和角动量守恒。

进一步，如何得到能量的表达式呢？这可以通过考虑做功得到。

$$\mathrm{d}W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{19}$$

从而，我们得到动能的表达式$T=\frac{1}{2}mv^2$。而$\mathrm{d}W=dT$有时被叫做动能定理。进一步，如果力为保守力$\mathbf{F}=-\nabla U$，则

$$\mathrm{d}W=-\mathrm{d}U=\mathrm{d}T \tag{20}$$

因此，$\mathrm{d}(T+U)=0$，对应于机械能守恒。

- 例：一维谐振子。
- 例：Drude模型。
- 例（梁书1.2）：质点从边缘运动到半径为R、摩擦系数为μ的半圆形碗底。这里遇到了伯努利微分方程，可以通过积分因子方法求解。

2.1 两类微分方程

这里，我们给出两类常见的微分方程的求解方法。

- 线性微分方程求解。考虑一个一般的线性微分方程

  $$\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=b \tag{21}$$

  首先考虑$b=0$时的通解。设$y=\mathrm{e}^{\lambda x}$，代入得

  $$\sum_n a_n\lambda^n=0 \tag{22}$$

  通过求解该方程，可以得到N个λ_i。利用这些λ_i，我们就得到了该微分方程得一般解为

  $$y=\sum_{i=1}^{N}c_i\mathrm{e}^{\lambda_i x}+y_0 \tag{23}$$

  其中y_0为任意一个特解，而N个待定系数c_i由初始条件或其他边值条件给出。

- 积分因子方法。考虑如下类型的微分方程

  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+A(x)y=B(x) \tag{24}$$

  注意到$\mathrm{e}^{\int A\mathrm{d}x}$满足（被称为积分因子）

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\int A\mathrm{d}x}=A\mathrm{e}^{\int A\mathrm{d}x} \tag{25}$$

我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y(x)\mathrm{e}^{\int A\mathrm{d}x}\right]=\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Ay\right]\mathrm{e}^{\int A\mathrm{d}x}=B\mathrm{e}^{\int A\mathrm{d}x} \tag{26}$$

从而，y可以被求出

$$y=\mathrm{e}^{-\int A\mathrm{d}x}\int B\mathrm{e}^{\int A\mathrm{d}x}+y_0 \tag{27}$$

3 多粒子牛顿力学

这时，我们要记及多粒子之间的相互作用$\mathbf{F}_{ji}=-\mathbf{F}_{ij}$。[1]对于质点$i$，满足牛顿定律

$$\mathbf{F}_i^{(e)}+\sum_j{}^{'}\mathbf{F}_{ji}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}_i \tag{28}$$

两边对i求和，得到

$$\mathbf{F}=\sum_i\mathbf{F}_i^{(e)}+\underbrace{\sum_{ij}{}^{'}\mathbf{F}_{ji}}_{=\sum_{\langle ij\rangle}(\mathbf{F}_{ji}+\mathbf{F}_{ij})=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\mathbf{p}_i=\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} \tag{29}$$

式28两边同时作用$\mathbf{r}_i\times$，再对i求和，得到

$$\mathbf{M}=\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i^{(e)}+\underbrace{\sum_{ij}{}^{'}\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_{ji}}_{=\sum_{\langle ij\rangle}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\times\mathbf{F}_{ji}=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i=\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} \tag{30}$$

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}W_i^{(e)}+\sum_j{}^{'}\mathrm{d}W_{ji}=\mathrm{d}\left(\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2\right)=\mathrm{d}T \tag{31}$$

因此，动量定理、角动量定理和动能定理的形式与单粒子是一样的。进一步，对于保守力系统，动能定理可以表示为总的机械能守恒

$$\mathrm{d}\left(T+\sum_i V_i+\sum_{\langle ij\rangle}V_{ij}\right)=0 \tag{32}$$

接下来，让我们考察总动量、角动量和动能的具体形式。对于总动量，

$$\mathbf{P}=\sum_i m_i\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_i m_i\frac{\sum_i m_i\dot{\mathbf{r}}_i}{\sum_i m_i}=M\dot{\mathbf{R}}_c \tag{33}$$

这里，我们定义质心

$$\mathbf{R}_c=\frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{34}$$

[1]实际上，这不一定成立，比如Biot-Savart定律。这时由于场的存在，两个质点之间的相互作用并不满足牛三律。

进而，任意一点可以用质心和相对于质心的位移表示，即$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_c + \mathbf{r}'_i$。将其代入总角动量和总动量的表达式，可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_i m_i(\mathbf{R}_c + \mathbf{r}'_i) \times (\dot{\mathbf{R}}_c + \dot{\mathbf{r}}'_i) \\
&= \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{R}_c \times \dot{\mathbf{R}}_c}_{=\mathbf{L}_c} + \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{R}_c \times \dot{\mathbf{r}}'_i + \sum_i m_i \dot{\mathbf{R}}_c \times \mathbf{r}'_i}_{=0} + \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i}_{=\mathbf{L}'} \\
&= \mathbf{L}_c + \mathbf{L}' \qquad (35) \\
T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{R}}_c + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 \\
&= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{R}}_c^2}_{T_c} + \underbrace{\sum_i m_i \dot{\mathbf{R}}_c \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i}_{=0} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}'^2_i}_{=T'} \\
&= T_c + T'c \qquad (36)
\end{aligned}$$

上述结果称为柯尼希定理。

- 例：圆环上的蚂蚁。光滑圆环放于光滑平面上，质量均为m。问蚂蚁在圆环上转一圈，圆环转多少角度？
  根据角动量守恒，利用柯尼希定理

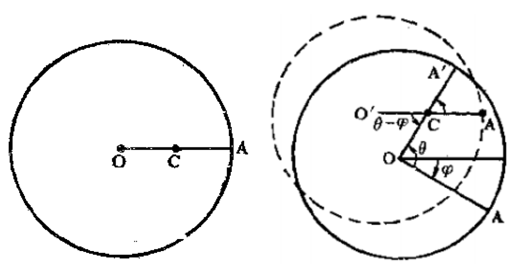

图 1:

$$m\left(\frac{r}{2}\right)^2 \dot{\theta} + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 \dot{\theta} - mr^2\dot{\varphi} = 0 \qquad (37)$$

解出$\theta = 2\varphi$。进而如果$\theta + \varphi = 2\pi$，得到$\varphi = 2\pi/3$。

3.1 两体问题

对于一个孤立的两体问题，如果不考虑外力，则这个两体问题总可以约化为两个独立的单体问题。我们的出发点还是牛顿定律

$$\mathbf{F}_{21} = m_1 \dot{\mathbf{p}}_1 \qquad (38)$$

$$\mathbf{F}_{12} = m_2 \dot{\mathbf{p}}_2 \qquad (39)$$

两式相加，得到质心运动方程

$$0 = M\ddot{\mathbf{R}}_c \tag{40}$$

38/m_1与39/m_2相减，得相对运动得方程

$$\underbrace{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}_{=1/\mu}\mathbf{F}_{21} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \tag{41}$$

这里我们定义了约化质量$\mu^{-1} = m_1^{-1}+m_2^{-1}$。

当然，我们也可以采用另一种观点，即直接取$\mathbf{r}_1'$作为另一个自由度，即

$$\mathbf{F}_{21} = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1' \tag{42}$$

而$\mathbf{r}_2'$可以利用质心关系得出，即$\mathbf{r}_2' = -m_1\mathbf{r}_1'/m_2$。

因此，我们就找到两种方式来将两体问题约化为两个单体问题：（1）$\mathbf{R}_c$和$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$，质量应采用约化质量；（2）$\mathbf{R}_c$和$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1-\mathbf{R}_c$，质量直接用$m_1$。

- 例：两小球正碰撞。计算其碰撞后的速度。

  按照观点（1），碰撞后

$$\tilde{v}_1-\tilde{v}_2 = -v_1+v_2 \tag{43}$$

$$m_1\tilde{v}_1+m_2\tilde{v}_2 = m_1v_1+m_2v_2 \tag{44}$$

  按照观点（2），碰撞后

$$\tilde{v}_1-v_c = v_c-v_1 \tag{45}$$

$$v_c = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} \tag{46}$$

  从上面两种方式，我们都可以得到碰撞后的速度为

$$v_1 = \frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2} \tag{47}$$

3.2 力学相似性（朗道§10）

如果一个N粒子的势能满足齐次条件

$$V(\alpha\mathbf{r}_1,\alpha\mathbf{r}_2,\cdots,\alpha\mathbf{r}_N) = \alpha^kV(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\cdots,\mathbf{r}_N) \tag{48}$$

那么，如果做标度变换

$$\mathbf{r}_i\to\alpha\mathbf{r}_i,\quad t\to\beta t \tag{49}$$

则动能变为

$$T\to\frac{\alpha^2}{\beta^2}T \tag{50}$$

当动能与势能的比值保持不变，即

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k \tag{51}$$

时，系统的运动保持相似。我们得到$\beta = \alpha^{1-k/2}$。也就是说空间尺度变化α倍的时候，时间尺度变化β倍。

- 例：谐振动$k = 2$，$\beta = \alpha$。这表明周期与振幅无关。
- 例：开普勒运动$k = -1$，$\beta = \alpha^{3/2}$。这表明轨道周期与轨道半径的3/2次方成正比，即开普勒第三定律。

3.3 Virial（位力）定理（朗道§10）

考虑多粒子系统的动能

$$T = \sum_i \frac{1}{2}\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i - \frac{1}{2}\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i \tag{52}$$

如果$\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$是一个有限函数，那么它对时间导数的平均值应该为零，进而我们得到

$$\langle T \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\sum_i \nabla_i V \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle \tag{53}$$

右边被称为位力。对于齐次函数的势能48，有$\sum_i \nabla_i V \cdot \mathbf{r}_i = kV$，我们就得到了位力定理的一种简单表述

$$\langle T \rangle = \frac{k}{2}\langle V \rangle \tag{54}$$

- 例：谐振动$k = 2$，$\langle T \rangle = \langle V \rangle$。
- 例：开普勒运动$k = -1$, $\langle T \rangle = -\langle V \rangle/2$。