转动惯量

1 惯量矩阵

考虑角动量

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times [\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A)] \\ &= M\mathbf{R} \times \mathbf{v}_A - M[(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_A)\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_A] + \sum_i m_i[(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_i]\end{aligned} \tag{1}$$

最后一项写出分量形式就是

$$L_\mu = \sum_\nu \sum_i m_i(r_i^2 \delta_{\mu\nu} - r_{i\mu} r_{i\nu})\omega_\nu = I_{\mu\nu}\omega_\nu \tag{2}$$

这里我们定义了惯量矩阵[1]

$$\boxed{I_{\mu\nu} = \sum_i m_i(r_i^2 \delta_{\mu\nu} - r_{i\mu} r_{i\nu})} \tag{3}$$

明确的写出其矩阵形式为

$$I = \sum_i m_i \begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

我们再来看式1中的前两项。当A取为原点，前两项都为零。而当A取为质心，第一项为质心平动对应的角动量，第二项正是刚体转动所带来的质心绕原点的角动量$M[(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{R}]$。比较柯尼希定理，我们知道后两项共同构成刚体绕质心的角动量，因此

$$I(A = CM) = I(A = O) - M[(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{R}] \tag{5}$$

即

$$I(A = O) = I(A = CM) + M[(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{R}] \tag{6}$$

这正是平行轴定理：刚体绕某个点的转动惯量等于绕质心的转动惯量加上所有质量集中于质心相对于某个点的转动惯量。

[1] 也可以将其写为并矢的形式：$I = \sum_i m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i)$。

我们再来看动能：

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot [\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A)] \\
&= \frac{1}{2} M \mathbf{V} \cdot (\mathbf{v}_A - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) + \frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \\
&= \frac{1}{2} M \mathbf{V} \cdot (\mathbf{v}_A - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}
\end{aligned} \tag{7}
$$

如果A处于原点，则前两项为零；如果A处于质心，则第一项表示刚体平动的动能，这正是柯尼希定理的结果。

根据上面的讨论，刚体相对于质心的角动量和动能可以被表示为

$$
\boxed{L_\mu = I_{\mu\nu} \omega_\nu, \quad T = \frac{1}{2} I_{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu} \tag{8}
$$

- 惯量矩阵定义中的“求和”：零维(0D)-求和；一维(1D)-线积分；2D-面积分；3D-体积分。

- 立方体绕着一个顶点的惯量矩阵。绕着中心的惯量矩阵可以简单得到

$$
I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{m}{a^3} \iiint \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z (y^2 + z^2) = \frac{1}{6} m a^2, \quad I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0 \tag{9}
$$

绕着定点的惯量矩阵可以根据平行轴定理得到

$$
\begin{aligned}
I_{11} = I_{22} = I_{33} &= \frac{1}{6} m a^2 + \frac{1}{2} m a^2 = \frac{2}{3} m a^2, \\
I_{12} = I_{13} = I_{23} &= 0 - \frac{1}{4} m a^2 = -\frac{1}{4} m a^2
\end{aligned} \tag{10}
$$

- 例：等边三角形绕着中心和顶点的惯量矩阵。 绕着顶点的惯量矩阵为

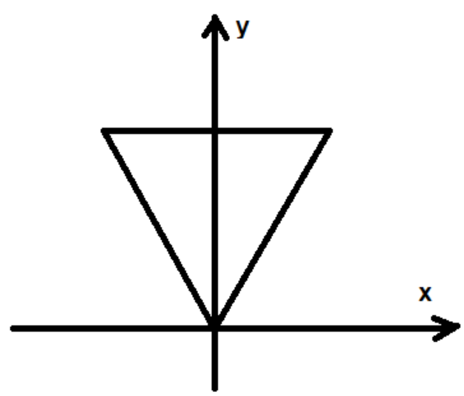

图 1:

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{4m}{\sqrt{3}a^2}\int_0^{\sqrt{3}a/2}\mathrm{d}y\int_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}}\mathrm{d}xy^2 = \frac{3}{8}ma^2 \\
I_{22} &= \frac{4m}{\sqrt{3}a^2}\int_0^{\sqrt{3}a/2}\mathrm{d}y\int_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}}\mathrm{d}xx^2 = \frac{1}{24}ma^2 \\
I_{33} &= \frac{4m}{\sqrt{3}a^2}\int_0^{\sqrt{3}a/2}\mathrm{d}y\int_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}}\mathrm{d}x(x^2+y^2) = I_{11}+I_{22} = \frac{5}{12}ma^2 \\
I_{12} &= \frac{4m}{\sqrt{3}a^2}\int_0^{\sqrt{3}a/2}\mathrm{d}y\int_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}}\mathrm{d}x(-xy) = 0 \\
I_{13} &= I_{23} = 0
\end{aligned} \tag{11}
$$

绕着中心的惯量矩阵由平行轴定理得到

$$
I^{CM} = I - \begin{bmatrix} m\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix} ma^2 \tag{12}
$$

这里，你看到$I_{33} = I_{11} + I_{22}$，如果你愿意，你可以将其描述为一个定理：一个二维物体绕着垂直轴的转动惯量为绕着平面内两个方向转动惯量之和。

2 惯量主轴

一般的，$\mathbf{L}$与$\boldsymbol{\omega}$不一定沿着相同的方向，除非当$\boldsymbol{\omega}$沿着I的本征矢量的方向：

$$
I\boldsymbol{\omega}_i = I_i\boldsymbol{\omega}_i \tag{13}
$$

其中$i = 1, 2, 3$。这样三个方向称为惯量主轴的方向，而$I_{1,2,3}$称为主转动惯量。

- 例：立方体。（1）绕着中心的惯量矩阵已经对角，且正比于单位阵，因此任何方向都可以取为主轴方向。（2）绕着定点的惯量矩阵需要作对角化处理，可以得到

  $$
  I_1 = I_2 = \frac{11}{12}ma^2, \quad I_3 = \frac{1}{6}ma^2 \tag{14}
  $$

  相应的本征矢量为

  $$
  u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}
  $$

  u_1和u_2张成一个二维简并空间，也就是说其中的任何方向均可以取为主轴。

- 例：等边三角形。（1）绕着定点，无简并，三个主轴方向直接为x,y,z三个方向。（2）绕着中心，则出现二重简并，因此任意平面内的方向均可以取为主轴方向。

- 对称性与主转动惯量的简并。如果存在对称性$PI = IP$，则$I_iP\boldsymbol{\omega}_i = IP\boldsymbol{\omega}_i$，即：$\boldsymbol{\omega}_i$和$P\boldsymbol{\omega}_i$同时是$I_i$的本征向量。因此如果$P$作用于$\boldsymbol{\omega}_i$不再是$\boldsymbol{\omega}_i$，则一定存在简并。这也是对称性导致简并的一个例子。

3 惯量椭球

考虑角速度沿任意方向的情况，设沿着该方向作定轴转动的转动惯量为I_n，其动能可以写为

$$T = \frac{1}{2} I_n \omega^2 = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \omega^2 \cos\alpha_i \cos\alpha_j \tag{16}$$

因此，我们得到

$$I_n = I_{ij} \cos\alpha_i \cos\alpha_j \tag{17}$$

定义$x_i = \cos\alpha_i / \sqrt{I_n}$，则

$$I_{ij} x_i x_j = 1 \tag{18}$$

这是一个椭球的方程，称为惯量椭球。

- 惯量椭球上任一点到原点的距离就给出沿着该方向的转动惯量的倒数，因为

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i \cos^2\alpha_i / I_n = 1/I_n \tag{19}$$

- 法线方向给出角动量，因为

$$\nabla_i f = 2 I_{ij} x_j = \frac{2 I_{ij} \omega_j}{\omega \sqrt{I_n}} = \frac{2 L_i}{\omega \sqrt{I_n}} \tag{20}$$

  注意到椭球的法线方向一般与到中心连线方向不一致，这对应于角动量与角速度方向一般是不一致的，除了三个主轴方向。

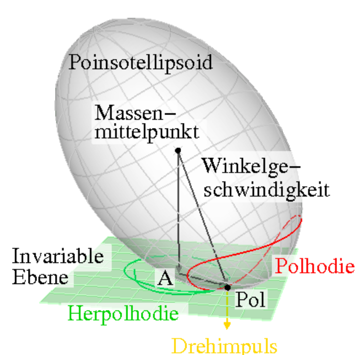

图 2: 潘索椭球

- 潘索构造。基于对惯量椭球的研究，潘索构造了一个利用几何方式可视化自由刚体运动的方法，称为潘索构造。注意到另一个事实：

$$OA = OP \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{\omega L} = \frac{2T}{\sqrt{I_P} \omega L} = \frac{\sqrt{2T}}{L} \tag{21}$$

  对于自由刚体，其运动过程当中动能和角动量均守恒，因此可以设想将惯量椭球放在一个平面上，固定其中心高度，令椭球在平面上滚动，就会在椭球上留下一条轨迹，这就是角速度的运动

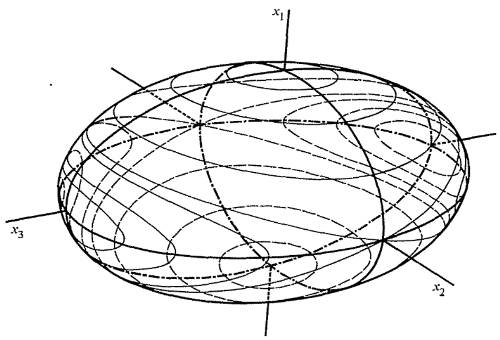

图 3: 比内椭球

轨迹。从中，我们可以得到一个结论：只有绕着最小和最大的主转动惯量的主轴方向的转动是稳定的。这被称为网球拍定理或中间轴定理。这里给出一个相关的实频，以及和平号空间站宇航员演示网球拍定理的视频。

- 比内椭球。另一种可视化自由刚体运动的方式是比内椭球。考虑动能和角动量这两个守恒量，有

$$T = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \tag{22}$$

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \tag{23}$$

因此动能和角动量守恒分别给出一个椭球和一个球，它们的交线也就给出了角动量在本体坐标系中的运动轨迹。事实上，通过对比内椭球的分析，我们也可得到网球拍定理。