引言：作用量与对称性

1 参考书

永远不要将知识等同于一本或几本书。要让自己理解，别欺骗自己。

- 梁昆淼，《力学（下册）》（第四版）
- Landau & Lifshitz, 《Mechanics》
- Goldstein, 《Classical Mechanics》
- Arovas, 《Lecture Notes on Classical Mechanics》
- Tong, 《Classical Dynamics》
- Internet: wikipedia, google, baidu ···
- Arnold, 《Mathematical Methods of Classical Mechanics》
- Arnold, Kozlov, Neishtadt, 《Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics》
- 陈滨，《分析动力学》
- Taylor, 《Classical Mechanics》
- Lanczos, 《the Variational Principles of Mechanics》
- Greiner, 《Classical Mechanics》
- Hand & Finch, 《Analytical Mechanics》
- Pars, 《a Treatise on Analytical Dynamics》
- Whittaker, 《 Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies》
- Pletser, 《Lagrangian and Hamiltonian Analytical Mechanics: Forty Exercises Resolved and Explained》

2 写在最开始

经典力学可以说是一门几乎完全建立在理论推演基础之上的物理学科。在其历史发展当中，唯一的“实验”基础就是牛顿力学的正确性，尽管其理论方法后来也被广泛的应用于其他物理领域。因此，我们可以说：经典力学是理论物理的基础。

- 多粒子：统计力学
- 小尺寸：量子力学
- 连续介质：场论
- 高速运动：相对论

在普通力学的学习过程当中，同学们容易产生一个印象：力学就是$F = ma$加上微积分。因此，很容易对经典力学这门课产生轻视感。这种观念一定要避免!

在学习经典力学的过程当中，虽然很多习题仍然可以通过牛顿矢量力学加一些技巧（“要小聪明”）求解，我不推荐如此。希望大家要特别注意研究范式、思想观念的转变：

- 参数化与约束：广义坐标、广义速度、广义动量，约束
- 整体而非个体：拉格朗日、哈密顿、作用量
- 守恒量与对称性：Noether定理
- 相空间：轨道，稳定性分析，混沌，统计力学，几何诠释

3 最小作用量原理

图 1: Pierre de Fermat

在静力学中，能量极小给出物理解；在绝热热力学系统中，熵最大给出平衡态解；在开放热力学系统中，自由能极小给出平衡态解。那么，对于一个动力学问题，是否存在类似的物理量呢？现在，我们知道其答案就是作用量。

最小作用量原理之所以被称为原理，是因为我们实在找不出一种更为基本的方式来得到它。历史上，究竟是谁首次在力学系统中提出最小作用量原理已经成为一桩悬案（主要是Maupertuis与Leibniz之争），但得到公认的是它最早应该来源于几何光学中的费马原理:

$$\delta \int n\mathrm{d}\ell = 0 \tag{1}$$

- 练习：利用费马原理推导几何光学的三个基本定律：直线传播，反射和折射定律。
- 问题：为什么光“知道”哪条路径最好呢？
  这可以从波动光学中的干涉现象得到，因为非极值路径会与附近的路径出现干涉相消。

最小作用量原理有很多形式（可参见wikipedia），但在力学系统中最广为采用的形式应该是由哈密顿给出的，称为哈密顿原理，

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(T - V)}_{L} \mathrm{d}t = 0, \quad \text{with } \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0} \tag{2}$$

这里的被积函数叫做拉格朗日量（拉氏量），是由拉格朗日首次提出的，在经典力学中具有至关重要的地位。在这里，我们暂且不对其做出具体解释，只是通过几个例子来体会一下最小作用量原理的“工作方式”。

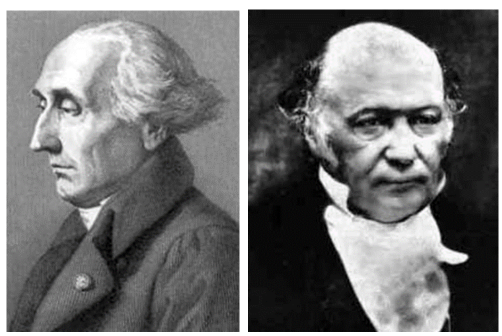

图 2: Lagrange（左）和Hamilton（右）

- 例：自由落体

  $$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz \tag{3}$$

  计算作用量的变分

  $$\begin{aligned}\delta \int_1^2 L\mathrm{d}t &= \int_1^2 m\dot{z}\delta\dot{z}\mathrm{d}t - mg\delta z\mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 m\dot{z}\mathrm{d}\delta z - mg\delta z\mathrm{d}t \\ &= m\dot{z}\delta z\Big|_1^2 - \int_1^2 (m\ddot{z} + mg)\delta z\mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{4}$$

  第一项为零，因为$\delta z(t_1) = \delta z(t_2) = 0$。进而，我们得到牛顿方程$m\ddot{z} + mg = 0$。

- 例：一维谐振子

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{5}$$

- 例：向心力运动

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{\rho} \tag{6}$$

通过上述几个例子，我们发现，应用最小作用量原理，可以自然得到牛顿运动方程。事实上，我们可以一般的得到

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \tag{7}$$

这被称为拉格朗日方程。

进一步，如果选取坐标与动量为独立的参数，通过对拉格朗日量做勒让德变换（这种方法在热力学中被用来得到不同自由能之间的关系），可以得到哈密顿量

$$H = p_i\dot{q}_i - L \tag{8}$$

其满足哈密顿正则方程

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}} \tag{9}$$

该方程实际上描写了在相空间（坐标-动量空间）之上的一种运动，为一阶微分方程，具有一种内禀的辛几何结构。事实上（也许也可以称之为巧合），哈密顿力学后来成为了统计力学的基础和量子力学的一种描述方式（另一种方式则是最小作用量原理的推广—路径积分）。

4 守恒量与对称性

> God made the laws only nearly symmetrical so that we should not be jealous of his perfection! —Feynman

事实上，人们很早就意识到在经典力学系统中存在一些守恒量，记为I_i，即$\mathrm{d}I_i/\mathrm{d}t = 0$. 这些守恒量往往可以通过运动方程的一次积分得到，因此也被称为运动积分。常见的守恒量包括：动量、角动量、能量、宇称等。一个显然的例子是如果$\partial L/\partial q_i = 0$，则$\partial L/\partial \dot{q}_i$为一个守恒量，这可以从拉格朗日方程看到。

然而，究竟在什么情况下存在守恒的运动积分，人们并不完全清楚。这种情况直到1918年才有了改变。Emmy Noether成功的将守恒量与连续对称性联系起来，并给出了完整的数学描述，称为Noether定理。这里，我们考虑一种简单的情况。在下面的对称性操作下

$$q_i \to q_i + \epsilon_j\frac{\delta q_i}{\delta \epsilon_j} \tag{10}$$

拉格朗日函数变为

$$L \to L + \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\delta q_i}{\delta \epsilon_j}\epsilon_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\delta \dot{q}_i}{\delta \epsilon_j}\epsilon_j = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\delta q_i}{\delta \epsilon_j}\right)\epsilon_j \tag{11}$$

图 3: Emmy Noether

如果L不变（这就是对称性的体现）[1]，可以得到

$$\boxed{I_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\delta q_j}{\delta \epsilon_i}} \tag{12}$$

- 动量守恒：空间平移对称性，$L(\mathbf{r}) = L(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{n})$.
  利用Noether定理，我们可以得到守恒量
  $$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}n_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}n_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}n_z = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} \tag{13}$$

- 角动量守恒：空间转动对称性，$L(\theta) = L(\theta+\epsilon)$
  利用Noether定理，守恒量为$\partial L/\partial\dot{\theta} = \mathbf{L}\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta$

事实上，不只是连续对称性，离散对称性也可以对应于某种守恒量，比如镜面对称性对应于宇称守恒。在理论物理中，对称性如此重要，以至于在我们对物理定律缺少足够的了解时仍然可以通过对称性得到很多有用的信息，比如粒子物理中Gell-Mann的夸克模型就是通过SU(3)群的对称性得到。今天，高能与凝聚态物理中的一种常用技巧就是根据对称性构造唯像模型。

- 例：万有引力和库伦定律为什么是沿着两个质点的连线方向？
  如果不是，则旋转对称性破坏。

- 例：具有伽利略不变性的自由粒子（Landau力学第一章）
  $$L(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = L(v^2) \tag{14}$$
  在无穷小平移下，
  $$L[(\mathbf{v}+\epsilon\mathbf{n})^2] = L(v^2+2\epsilon\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2}2\epsilon\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} \tag{15}$$
  只有当$\partial L/\partial v^2$不依赖时间，第二项才能够表示成时间的全微分，进而对作用量没有贡献。因此，我们得到自由粒子的拉格朗日量为$L=\frac{1}{2}mv^2$.

[1]完整的描述是L也可以差一个对时间的全微分，见后面的具体讨论。