散射问题

1 散射角

对于散射问题，入射与出射角度可以通过$\rho=\infty$给出，进而散射角θ可以表示为：

$$\theta=\pi-[\varphi_f(\rho=\infty)-\varphi_i(\rho=\infty)] \tag{1}$$

对于开普勒问题，由于轨道方程已知$\rho=p/(1+e\cos\varphi)$，则可以直接求出散射角（当$e>1$，不然不存在散射轨道）

$$\theta=\pi-2\arccos(-\frac{1}{e})=\pi-2(\pi-\arccos\frac{1}{e})=-2\arcsin\frac{1}{e} \tag{2}$$

这里的负号来源于吸引力。当然，对于给定的问题，它并不会带来困惑。

- 库伦排斥力场。这相当于将开普勒问题中的k反号，进而p反号

$$\rho=\frac{-p}{1+e\cos\varphi}=\frac{p}{-1+e\cos(\varphi+\pi)} \tag{3}$$

  显然，我们可以将π位相吸收到φ的定义中，从而

$$\rho=\frac{p}{-1+e\cos(\varphi)} \tag{4}$$

  注意到由于能量E总是大于零，因为势能总是正，$e>1$。散射角由$2\arcsin(1/e)$给出。

一般的，如果轨道方程并不知道，散射角可以通过积分得到

$$\theta=\pi-2\int_{\rho_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\frac{2(E-V)}{mh^2}\rho^4-\rho^2}} \tag{5}$$

$$=\pi-2\int_{0}^{u_0}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2(E-V)}{mh^2}-u^2}} \tag{6}$$

其中，极值点ρ_0（或u_0）可以由$\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\varphi=0$（或$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi=0$）给出：

$$E-V=\frac{mh^2}{2\rho_0^2}=\frac{mh^2u_0^2}{2} \tag{7}$$

- 开普勒问题中散射角的积分计算。
  首先，由极值条件

$$E=\frac{1}{2}mh^2u_0^2-ku_0 \tag{8}$$

可以得到

$$u_0 = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 2mh^2E}}{mh^2} = \frac{1 \pm e}{p} \tag{9}$$

负解舍去，只保留$u_0 = (1+e)/p$。从而散射角为

$$\begin{aligned}
\theta &= \pi - 2\int_0^{u_0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \frac{k^2}{m^2h^4} - \left(u - \frac{k}{mh^2}\right)^2}} \\
&= \pi - 2\int_0^{u_0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{e^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}} \\
&= \pi - 2\arcsin(x)|_{x=-1/e}^{x=1} = -2\arcsin\frac{1}{e}
\end{aligned} \tag{10}$$

- 立方反比力场中的散射角。

$$\begin{aligned}
\theta &= \pi - 2\int_0^{u_0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2} - \frac{2ku^2}{mh^2} - u^2}} \\
&= \pi - 2\sqrt{\frac{mh^2}{2E}}\int_0^{u_0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \left(\frac{mh^2+2k}{2E}\right)u^2}} \\
&= \pi - 2\sqrt{\frac{mh^2}{2E}\frac{2E}{mh^2+2k}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{mh^2+2k}{2E}}u\right)\Bigg|_0^{u_0} \\
&= \pi - \pi\sqrt{\frac{mh^2}{mh^2+2k}}
\end{aligned} \tag{11}$$

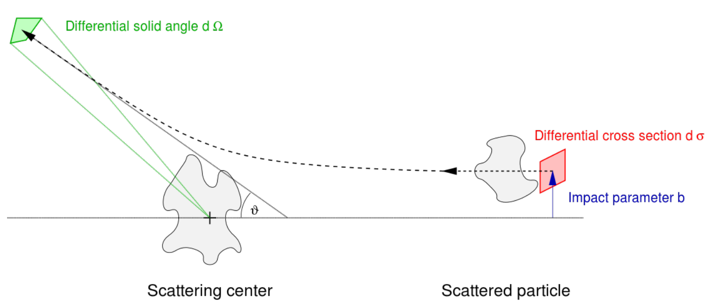

图 1: 散射问题示意图。散射参数ℓ在图中标为b。

在描述散射问题时，一般可以引入碰撞参数ℓ，表示入射线与力心的垂直距离，进而

$$E = \frac{1}{2}mv_i^2, \qquad h = v_i\ell \tag{12}$$

这样，就可以用ℓ和E来表示散射角度。

- 平方反比力。由$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{e}$得

$$\cot\frac{\theta}{2}=\sqrt{e^2-1}=\sqrt{\frac{2mh^2E}{k^2}}=\sqrt{\frac{2mv^2\ell^2E}{k^2}}=\frac{2E\ell}{k} \tag{13}$$

该结论也可以由LRL矢量守恒得到，见作业。

- 立方反比力。

$$\theta=\pi-\pi\sqrt{\frac{E\ell^2}{E\ell^2+k}} \tag{14}$$

- 硬球散射。由几何关系，可以直接得到

$$\theta=\pi-2\arcsin\frac{\ell}{R} \tag{15}$$

2 散射截面

散射截面是散射问题的一个重要的物理量，它描写了出射粒子在不同角度的分布，从而可以直接与实验结果比较。在入射端，假定粒子均匀分布，则

$$\mathrm{d}N_i=I\mathrm{d}S=2\pi\ell\mathrm{d}\ell \tag{16}$$

而在出射端，得到的粒子数是依赖于立体角的。在$\mathrm{d}\Omega$内，测量到的粒子数是

$$\mathrm{d}N_f=I\sigma(\Omega)\mathrm{d}\Omega \tag{17}$$

如果粒子数守恒

$$\int\mathrm{d}N_i=\int\mathrm{d}N_f \tag{18}$$

如果ℓ唯一的对应于一个散射角θ，则

$$2\pi\ell\mathrm{d}\ell=2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{19}$$

从而

$$\sigma(\theta)=\left|\frac{\ell}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta}\right| \tag{20}$$

这里，加上绝对值保证结果为正。

- 平方反比力。由$\cot(\theta/2)=2E\ell/k$（式13）得

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{k}{4E}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \tag{21}$$

代入式20，得

$$\sigma=\frac{k}{4E}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{\frac{k}{2E}\cot\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{k^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \tag{22}$$

这正是卢瑟福公式。

- 立方反比力。由式14得

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}(\ell^2/2)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{k\pi^2(\pi-\theta)}{E\theta^2(2\pi-\theta)^2\sin\theta} \tag{23}$$

- 硬球散射。由式15得

$$\sigma(\theta) = R^2/4 \tag{24}$$

总散射截面为

$$\sigma = \int \sigma(\theta) 2\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta = \pi R^2 \tag{25}$$

3 实验室参考系

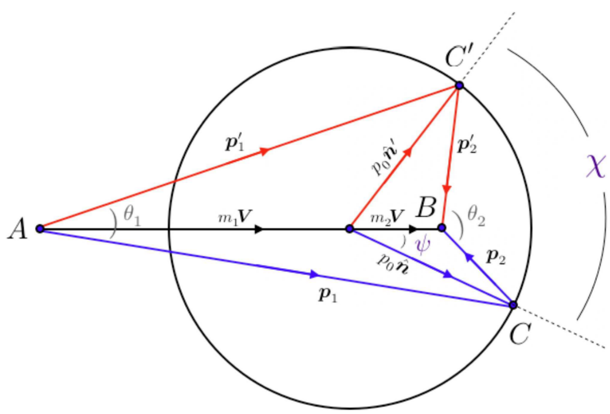

图 2: 摘自Arovas, 11.1。图中，p_1, p_2, p_1', p_2'表示实验实坐标系中的动量，V表示质心速度，$p_0\hat{\mathbf{n}} = \mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$表示质心坐标系中粒子1的动量。注意图中的$\theta_{1,2}$为我们的$\Theta_{1,2}$，而质心系散射角$\theta$为$\hat{\mathbf{n}}$与$\hat{\mathbf{n}}'$的夹角，在图中标为$\chi$。

实验实坐标系与质心坐标系的速度之间满足关系

$$\mathbf{v}_i^{\text{lab}} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_i \tag{26}$$

进而

$$\mathbf{p}_i^{\text{lab}} = m_i \mathbf{v}_i^{\text{lab}} = m_i \mathbf{V} + m_i \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{V} + \mathbf{p}_i \tag{27}$$

对$i = 1, 2$求和，得$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$，即在质心系中两个粒子动量相反。根据式27，可以画出$(1+2 \to 1'+2')$散射前后的动量。从图2中，根据几何关系，可以求出碰撞后的散射角θ_1和θ_2。

如果2粒子初始为静止，则图中B与C重合，1粒子在实验室坐标系中的散射角为

$$\tan\Theta_1 = \frac{m_2 \sin\theta}{m_1 + m_2 \cos\theta} \tag{28}$$

- 如果$m_1 = m_2$，$\tan\Theta_1 = \tan\frac{\theta}{2}$，即$\theta = 2\Theta_1$。同时，$\Theta_1 + \Theta_2 = \pi/2$。这正是桌球的一条基本规律。

- 如果$m_1 > m_2$，则$\sin\Theta_1 < m_2/m_1$。进一步，如果$m_1 \gg m_2$，则$\Theta_1 \approx (m_2/m_1)\sin\theta$。这是这一点，促使卢瑟福开始质疑汤姆森的果冻原子模型，而随后提出了卢瑟福原子模型。

- 如果$m_1 < m_2$，则Θ_1可以为任意角度。进一步，如果$m_1 \ll m_2$，则$\tan\Theta_1 \approx \tan\theta_1$，即实验室坐标系与质心坐标系几乎没有区别。

利用不同坐标系中的散射粒子数相同，可以得到

$$\sigma^{\text{lab}}(\Theta)\sin\Theta \mathrm{d}\Theta = \sigma(\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{29}$$

利用式28可以得到

$$\cos\Theta_1 = \frac{\gamma + \cos\theta}{\sqrt{1 + 2\gamma\cos\theta + \gamma^2}} \tag{30}$$

其中，$\gamma = m_1/m_2$。进而，实验室坐标系下的微分散射截面可以表示为

$$\sigma^{\text{lab}}(\Theta_1) = \sigma(\theta)\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\cos\Theta} = \sigma(\theta)\frac{(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\theta)^{3/2}}{1 + \gamma\cos\theta} \tag{31}$$

其中$\theta(\Theta_1)$由关系式28给出。

- 如果$m_1 = m_2$，则$\tan\Theta_1 = \tan(\theta/2)$，即$\Theta_1 = \theta/2$。

$$\sigma^{\text{lab}}(\Theta_1) = 4\cos\Theta\sigma(2\Theta) \tag{32}$$