引言：非惯性系

1 单粒子非惯性系

我们已经知道，一般的坐标系是会随着时间变化的，而坐标系的时间变化可以一般的表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{bmatrix}=\dot{U}\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{bmatrix}=\dot{U}U^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{bmatrix} \tag{1}$$

若该坐标系仍为正交坐标系，满足$\hat{\mathbf{e}}_i\cdot\hat{\mathbf{e}}_j=\delta_{ij}$，所以$U^tU=I$，即$U$表示一个正交变换。进而

$$\left(\dot{U}U^{-1}\right)^t=U\dot{U}^t=-\dot{U}U^t \tag{2}$$

因此，我们得到结论：$\dot{U}U^t$是一个反对称矩阵。这样我们就可以写出一个一般的矢量$\mathbf{A}$的变化律

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\sum_i\dot{A}_i\hat{\mathbf{e}}_i+\begin{bmatrix}0&\alpha&\beta\\ -\alpha&0&\gamma\\ -\beta&-\gamma&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\hat{\mathbf{e}}_1\\ A_2\hat{\mathbf{e}}_2\\ A_3\hat{\mathbf{e}}_3\end{bmatrix} \tag{3}$$

可以定义$\alpha=\omega_3,\ \beta=-\omega_2,\ \gamma=\omega_1$，可以将上式写为矢量形式

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\sum_i\dot{A}_i\hat{\mathbf{e}}_i+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}} \tag{4}$$

相比于绝对坐标系，这里多出一项，称为牵连变化率。这个结论适用于非惯性系中的任意矢量。

将该结论应用于位移$\mathbf{r}_{ab}=\mathbf{r}+\mathbf{r}_0$，我们得到

$$\mathbf{v}_{ab}=\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}+\mathbf{v}_0 \tag{5}$$

这里，我们用下标0表示坐标系本身的速度，而$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$来源于坐标系的转动，称为牵连速度。这个结论也可以通过示意图来理解。

进一步，对速度求导，可以得到加速度

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{ab}&=\mathbf{a}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+\mathbf{a}_0\\ &=\mathbf{a}+\underbrace{2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}}_{\text{Coriolis}}+\underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}}_{\text{tangential}}+\underbrace{\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}_{\text{centrifugal}}+\mathbf{a}_0\end{aligned} \tag{6}$$

我们也可以定义后4个加速度所对应为惯性力分别为$-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v},\ -m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r},\ -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}),\ -m\mathbf{a}_0$。

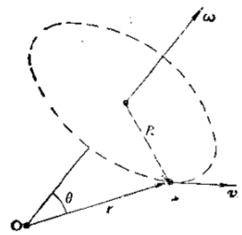


图 1:

- 傅科摆
  建立坐标系，x轴朝东，y轴朝北，

$$
\begin{aligned}
F_{c,x} &= 2m\Omega\dot{y}\cos\theta \\
F_{c,y} &= -2m\Omega\dot{x}\cos\theta
\end{aligned}
\tag{7}
$$

  再计及弹簧的回复力，我们有运动方程

$$
\begin{aligned}
2m\Omega\dot{y}\cos\theta - kx &= m\ddot{x} \\
-2m\Omega\dot{x}\cos\theta - ky &= m\ddot{y}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

  这是一个2D谐振子。在微振动一章，我们会仔细讨论这种问题的一般解法。这里，我们采用一种更为简介的方法来求解。定义$z = x + iy$，通过① $+ i$②，得到

$$
m\ddot{z} + 2mi\Omega\cos\theta\dot{z} + kz = 0 \tag{9}
$$

  设$z = z_0\mathrm{e}^{i\omega t}$，代入可得

$$
-m\omega^2 - 2m\Omega\cos\theta\omega + k = 0 \tag{10}
$$

  进而可以求出

$$
\omega = \frac{-2m\Omega\cos\theta \pm \sqrt{4m^2\Omega^2\cos^2\theta + 4mk}}{2m} \tag{11}
$$

  考虑到地球自转的角速度远远低于单摆的角速度，即$\Omega \ll \sqrt{k/m}$，

$$
\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} - \Omega\cos\theta \tag{12}
$$

  从而，我们得到傅科摆的一般解为

$$
z = z_0\mathrm{e}^{-i\Omega\cos(\theta)t}\mathrm{e}^{i(\sqrt{k/m}t+\varphi)} \tag{13}
$$

- 思考题: 在马桶冲水实验中，北半球顺时针，南半球逆时针，这种说法对吗？ wikipedia
  在傅科摆中，令$k = 0$，我们得到周期为$24h/\cos\theta$。从这个角度，确实很难想象这会对马桶产生重要的影响。[1]

[1] 当然，水流加速旋转流出是合理的，这源于角动量守恒。而旋转的方向则依赖于具体的条件。

1.1 非惯性系下能量的讨论

现在，让我们来对非惯性力所做的功进行一些讨论。首先，科里奥利力不做功，因为力总是与速度垂直

$$-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{14}$$

而切向惯性力和离心力做的功很难表示成全微分的形式（我尚未成功）。考虑一个均匀转动的非惯性系，即$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$，切向力不存在，而离心力做功为

$$-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2\right] \qquad (\text{if } \boldsymbol{\omega} = \text{const.}) \tag{15}$$

我们就得到了与离心力所对应势能$-m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2/2$，不妨叫做离心势能。

- 事实上，更为简单且一般的方案是直接写出在“绝对”坐标系下的动能，再利用关系式5代入可得动能的一般表达式。（朗道§39）

  $$T = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + m\dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \tag{16}$$

  第一项正是非惯性系中的动能，而后两项我们可以看成是非惯性系中的势能，只不过要加上一个负号。

- 不过，上述方案的一个缺点是：我们总要先找到一个合适的“绝对”参考系，或惯性参考系。有什么更好的方案吗？（感觉这个问题正是广义相对论的基本问题……）

2 多粒子非惯性系

我们的出发点是

$$\mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j{}' \mathbf{F}_{ji} - 2m_i\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i - m_i\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_i - m_i\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) - m_i\mathbf{a}_0 = m_i\mathbf{a}_i \tag{17}$$

对于动量定理，我们有类似的结论，即可以将系统看成一个整体，用总质量和质心来表示，只不过要计入额外的惯性力

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} - 2M\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}_c - M\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}_c - M\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c) - M\mathbf{a}_0 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} \tag{18}$$

但对于角动量定理和动能定理，事情就会变得很复杂。这种困难主要来源于

$$\sum_i m_i r_i^2 \neq MR_c^2 \tag{19}$$

我们可以对角动量定理和动能定理做一些简化，但总的来说，还是比较复杂。所以这里，我们仅考虑最简单的情况：$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$。

$$\mathbf{M}^{(e)} - M\mathbf{R}_c \times \mathbf{a}_0 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} \tag{20}$$

$$\underbrace{\mathrm{d}\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i}_{W^{\text{ext}}} + \underbrace{\sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{F}_{ji}\mathrm{d}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}_{W^{\text{int}}} \underbrace{-M\mathbf{a}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{R}_c}_{W_0} = \mathrm{d}T \tag{21}$$

进一步，对于质心系$\mathbf{R}_c = 0$，我们就得到与惯性系同样的结果。

- 非惯性系中的两体问题
  此时，我们的出发点为

$$\mathbf{F}_{21} - 2m_1\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_1 - m_1\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_1 - m_1\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) - m_1\mathbf{a}_0 = m_1\dot{\mathbf{p}}_1 \tag{22}$$

$$\mathbf{F}_{12} - 2m_2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_2 - m_2\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_2 - m_2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2) - m_2\mathbf{a}_0 = m_2\dot{\mathbf{p}}_2 \tag{23}$$

  两式相加，得到

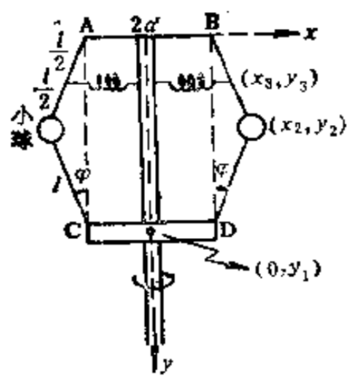
$$-2M\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c - M\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}_c - M\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c) - M\mathbf{a}_0 = M\ddot{R}_c \tag{24}$$

  而两式分别除以$m_{1,2}$再相减，得

$$\mathbf{F}_{21} - 2\mu\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{12} - \mu\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{12} - \mu\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{12}) = \mu\ddot{\mathbf{r}}_{12} \tag{25}$$

  因此，非惯性系中的两体问题还是可以约化为两个单体问题。

- 例：离心机（梁书§2.1）。求平衡时张角φ与角速度ω的关系。
  显然，从能量考虑最为简单。需要注意的是要计入非惯性系带来的动能（或离心势能，见上一节



  的讨论）。

$$V = -2P\ell\cos\varphi - 2mg\ell\cos\varphi + \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\varphi \underbrace{-2\cdot\frac{1}{2}m\omega^2(a+\ell\sin\varphi)^2}_{\text{centrifugal energy}} \tag{26}$$

  令$\mathrm{d}V/\mathrm{d}\varphi = 0$，即可得到解。