重陀螺

1 拉格朗日陀螺

$$L(\varphi,\theta,\psi)=\frac{1}{2}I_1(\dot\varphi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2)+\frac{1}{2}I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2-mgh\cos\theta \tag{1}$$

ψ和φ仍为可遗坐标，即其广义动量仍未守恒量

$$p_\psi=I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)=L_3 \tag{2}$$
$$p_\varphi=I_1\sin^2\theta\dot\varphi+L_3\cos\theta=L_z \tag{3}$$

从而得到

$$\dot\varphi=\frac{L_z-L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \tag{4}$$
$$\dot\psi=\frac{L_3}{I_3}-\frac{L_z-L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cos\theta \tag{5}$$

还剩下一个自由度θ，其运动方程为

$$\begin{aligned}I_1\ddot\theta&=I_1\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta-L_3\dot\varphi\sin\theta+mgh\sin\theta\\&=I_1\left(\frac{L_z-L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\right)^2\sin\theta\cos\theta-L_3\left(\frac{L_z-L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\right)\sin\theta+mgh\sin\theta\end{aligned} \tag{6}$$

该方程可以积分一次得到

$$\frac{1}{2}I_1\dot\theta^2=-\frac{(L_z-L_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}-mgh\cos\theta+\text{const.} \tag{7}$$

不难看出，这正是能量关系（只不过这个能量E扣除了$L_3^2/2I_3$这个常数项）

$$E=\frac{1}{2}I_1\dot\theta^2+\underbrace{\frac{(L_z-L_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+mgh\cos\theta}_{V_{\text{eff}}} \tag{8}$$

通过分析V_{eff}，我们可以得到对θ运动的定性理解：θ会振动，这称为刚体的章动。

设$u=\cos\theta$，式8变为

$$\dot u^2=\frac{2}{I_1}(E-mghu)(1-u^2)-\frac{1}{I_1^2}(L_z-L_3u)^2\triangleq Y(u) \tag{9}$$

这个积分可以表示成Weierstrass椭圆函数，可参见(Whittaker,§71)。我们接下来做一些简单的讨论。$Y(u)$为u的三次函数，满足$Y(\infty)=\infty$，$Y(\pm 1)<0$，而物理区域由$Y(u)\geq 0$给出，即$u_1<u<u_2$。在极值点，

$$\dot{\varphi}_{1,2}=\frac{L_z-L_3u_{1,2}}{I_1(1-u_{1,2}^2)} \tag{10}$$

根据$\dot{\varphi}_{1,2}$的符号，可以得到几种不同的运动。

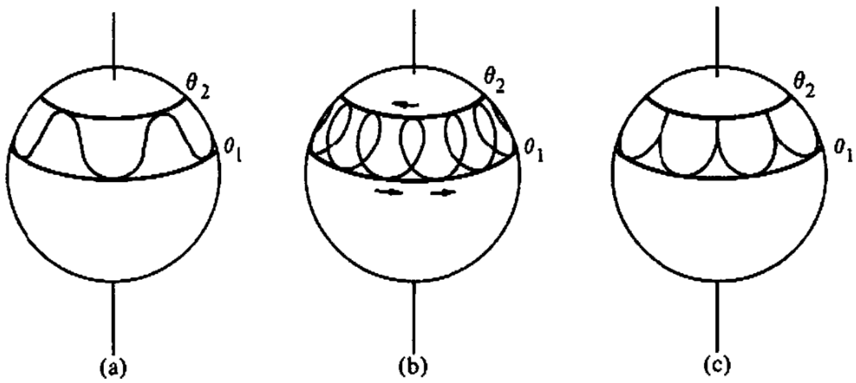

图 1:

- 均匀进动$\dot{\theta}=0$。根据θ的拉格朗日运动方程6，我们得到

$$I_1u\dot{\varphi}^2-L_3\dot{\varphi}+mgh=0 \tag{11}$$

这也可以通过令$Y(u)=Y'(u)=0$得到。从而，存在均匀进动的条件是$L_3^2\geq 4I_1mgh|\cos\theta|$。

- 快速均匀进动。令$L_3^2\gg 4I_1mgh$，可以得到两个解

$$\dot{\varphi}=\frac{L_3}{I_1\cos\theta}, \qquad \dot{\varphi}=\frac{mgh}{L_3} \tag{12}$$

$$\dot{\psi}=\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)L_3, \qquad \dot{\psi}=\frac{L_3}{I_3} \tag{13}$$

$$L_z=\frac{L_3}{\cos\theta}, \qquad L_z=L_3\cos\theta \tag{14}$$

第一支解对应于自由情况，$\mathbf{L}$固定在z方向；第二支解对应于重力引起的进动，$\mathbf{L}$始终沿着$\mathbf{e}_3$方向。

- 睡眠陀螺$\theta=0$。此时，有$L_z=L_3$，从而

$$V_{\text{eff}}=\frac{1}{2}\left(\frac{L_3^2}{4I_1}-mgh\right)\theta^2 \tag{15}$$

因此，只有当$L_3^2>4I_1mgh$时，睡眠陀螺才稳定，这个与前面均匀进动的结果是一致的。

- 然而，如何理解睡眠陀螺的两支解呢？这是因为在$\theta=0$，

$$L=\frac{1}{2}I_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi})^2 \tag{16}$$

进动与自转无法区分，只有$L_z=L_3$为良好定义的，$L_3=\dot{\psi}_1+\dot{\varphi}_1=\dot{\psi}_2+\dot{\varphi}_2$。

- 临界情况。当$u=u_2$时，令$\dot{u}=0$，得$E=mghu_2$。进而展开到$u-u_2$的一阶项，得

$$\dot{u}^2=-\frac{2mgh(u-u_2)}{I_1}(1-u_2^2) \tag{17}$$

得

$$u_2-u=\frac{mgh}{2I_1}(1-u_2^2)t^2 \tag{18}$$

这正是自由落体的结果。但由于$L_z=I_1\sin^2\theta\dot{\varphi}+L_3\cos\theta$守恒，可知随着$\theta$的增加，$\dot{\varphi}$必然会增加，即引起进动。

2 地轴的运动

《宋史·律历志》记载:“虞喜云：‘尧时冬至日短星昴，今二千七百余年，乃东壁中，则知每岁渐差之所至。’”—岁差这一名词由此而来。当然，英文precession of the equinoxes直译为春分点的进动。

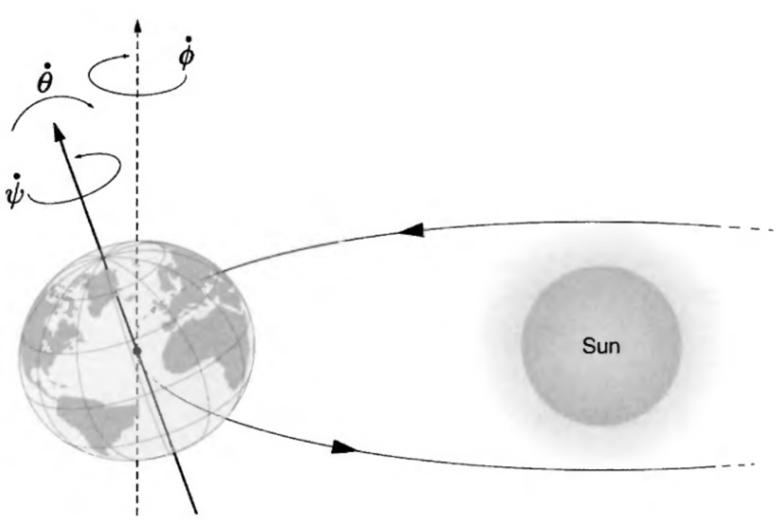

图 2: 进动周期$\sim$ 26000年，章动周期$\sim$ 41000年

地球受到太阳或月亮的引力势为

$$V=-\sum_i\frac{GMm_i}{\sqrt{R^2+r_i^2-2Rr_i\cos\theta_i}}=-\sum_{in}\frac{GMm_i}{R}\left(\frac{r_i}{R}\right)^nP_n(\cos\theta_i) \tag{19}$$

其中$P_n(\cos\theta_i)$为n阶勒让德多项式：$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=(3x^2-1)/2,\cdots$。零阶项正是将地球看成质点的势能。一阶项由于对称性为零。保留到二阶为

$$\begin{aligned}V&=-\frac{GMm}{R}-\frac{GM}{2R^3}\sum_i m_ir_i^2(3\cos^2\theta_i-1)\\&=-\frac{GMm}{R}-\frac{GM}{2R^3}\sum_i m_i\left(3r_i^2-3d_i^2-r_i^2\right)\qquad\text{using } r_i^2\cos\theta_i^2=r_i^2-d_i^2\\&=-\frac{GMm}{R}-\frac{GM}{2R^3}(I_1+I_2+I_3-3I_R)\end{aligned} \tag{20}$$

这里I_R表示绕着质心连线的转动惯量，可以通过R与I_3轴的夹角γ得到，即

$$\begin{aligned} I_R &= I_1 \sin^2\gamma + I_3 \cos^2\gamma \\ &= I_1 + (I_3 - I_1)\cos^2\gamma \\ &= I_1 + (I_3 - I_1)\sin^2\theta\cos^2\eta \approx I_1 + \frac{I_3 - I_1}{2}\sin^2\theta \end{aligned} \tag{21}$$

这里用到几何关系$\cos\gamma = \cos\eta\cos(\pi/2 - \theta)$和$\langle\cos^2\eta\rangle = 1/2$。将$I_R$的结果代入$V$中，得到

$$V = -\frac{GMm}{R} - \frac{GM(I_3 - I_1)}{4R^3}(3\cos^2\theta - 1) \tag{22}$$

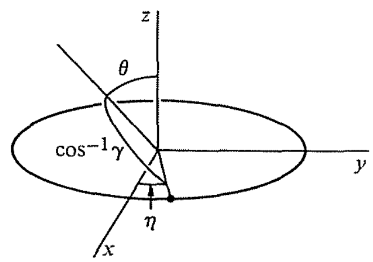

图 3: 图中的$\cos^{-1}\gamma$直接理解为γ就好。

可以看到，这个问题与拉格朗日重陀螺的区别就在于V的形式发生了改变。考虑θ的运动方程6，当$\dot\varphi$和$\ddot\theta$很小，我们就得到

$$\dot\varphi = \frac{1}{L_3}\frac{\partial V}{\partial(\cos\theta)} = -\frac{3}{2}\frac{GM}{R^3}\frac{I_3 - I_1}{I_3\omega_3}\cos\theta \tag{23}$$

对于太阳$GM_{\text{sun}}/R^3_{\text{sun}} = \omega^2_{\text{sun}}$，对于月球$G(M_{\text{moon}} + M_{\text{earth}})/R^3_{\text{moon}} = \omega^2_{\text{moon}}$，从而$GM_{\text{moon}}/R^3_{\text{moon}} = \omega^2_{\text{moon}}M_{\text{moon}}/(M_{\text{moon}} + M_{\text{earth}})$。从而

$$\dot\varphi = -\frac{3}{2}\cos\theta_{\text{sun}}\Omega\frac{\omega^2_{\text{sun}}}{\omega_3^2} - \frac{3}{2}\cos\theta_{\text{moon}}\Omega\frac{\omega^2_{\text{moon}}}{\omega_3^2}\frac{M_{\text{moon}}}{M_{\text{moon}} + M_{\text{earch}}} \tag{24}$$

代入$2\pi/\omega_3 = 1\text{day}$，$2\pi/\omega_{\text{sun}} = 365\text{day}$，$2\pi/\omega_{\text{moon}} = 28\text{day}$，$M_{\text{moon}}/M_{\text{earth}} = 1/81$，$\theta_{\text{sun}} \approx \theta_{\text{moon}} = 23^o$，$(I_3 - I_1)/I_1 \approx= 1/300$，得 $T = 2\pi/\dot\varphi \approx 26000$年。

- 章动周期41000年？利用得到的势能22，可以得到有效势进而估算章动的周期。作业。