拉格朗日力学：广义坐标与拉格朗日方程的导出

1 广义坐标

前面，我们讲了一种处理约束的方式是拉格朗日乘子法，这是一种普遍的方法。而另一种处理约束的方式就是引入合适的新的变量。一个简单的例子就是：如果运动被约束在圆周上，则只要用一个角度变量θ就可以刻画该运动；而如果还是用x和y作为变量，则需要时刻记着它们之间满足约束$x^2+y^2=R^2$。因此，选取角度θ为变量就相当于已经考虑了约束。

广义坐标，字如其意，是一种推广的坐标，只要可以刻画系统的状态即可，不再要求其是位移。比如我们常用的角度就是一种广义坐标。当然，在拉格朗日力学中，我们一般都是取具有长度或角度量纲的物理量作为广义坐标。但在哈密顿力学中，我们将会随心所欲的使用广义坐标，甚至将具有动量、角动量或能量量纲的物理量作为广义坐标！

对于N个质点的系统，如果没有任何约束，总共具有3N个坐标。如果考虑m个完整约束，则剩下3N-m个变量，即广义坐标的数目，也叫做有限运动中的自由度数目。而非完整约束则可以进一步约束每个时刻的运动。因此如果非完整约束存在的话，为了刻画每个时刻的运动，我们实际上并不需要广义坐标个数那么多的参数。刻画每个时刻的运动的参数个数称为无穷小运动的自由度。本书中，如果只用自由度三个字，指的就是无穷小运动自由度。[1] 总结一下，对于N个质点，如果完整约束有m个，非完整约束有k个，那么广义坐标个数为3N-m个，自由度个数为3N-m-k。[2]

- 斜面：2个独立的广义坐标，(x, y)为建立在斜面之上的坐标系
- 圆环：1个独立的广义坐标，θ
- 球面：2个独立的广义坐标，(θ, ϕ)
- 滚动的圆柱：1个独立的广义坐标，θ或x
- 竖直滚动的圆环：4个独立的广义坐标，(x, y, θ, ϕ)，2个无限小运动自由度，因为有两个非完整约束
- 滚动的球：5个独立的广义坐标，$(x, y, \psi, \theta, \phi)$（后三个为欧拉角），3个无限小运动自由度，因为有两个非完整约束

接下来，让我们给出几个具体应用广义坐标求解达朗贝尔原理的例子。

[1]这里需要指出，不同的教材对自由度的定义是有些不同的，而wiki上更是直接将广义坐标的数目等同于自由度的数目。大家在阅读不同的参考书时需要注意。

[2]关于自由度，在经典统计物理中有一个著名的定理：能量均分定理，说的是每个自由度的动能对应于$kT/2$。对于非完整系统$k>0$，究竟该自由度指的是哪一种自由度呢？（很抱歉，我也不知道答案。）

- 例：斜面。我们可以选取斜面上的水平方向为x方向，沿斜面最速下降的方向为y方向，这样就不必再显然的考虑约束条件了。达朗贝尔原理可以写成

$$mg\cos\theta\delta y - m\ddot{x}\delta x - m\ddot{y}\delta y = 0 \tag{1}$$

  δx与δy独立，给出两个方程，正对应于两个方向上的受力方程。

- 例：圆周运动。我们可以选取θ为广义坐标。如果外力始终指向圆心，也就没有主动力分量，

$$-m\ddot{\theta}R\delta\theta = 0 \tag{2}$$

  给出匀速运动解$\dot{\theta} = \text{const.}$。

  进一步，如果存在切向的力，比如回旋加速器，则

$$(F_\theta - mR\ddot{\theta})R\delta\theta = 0 \tag{3}$$

  给出切向的运动方程

$$F\theta = mR\ddot{\theta} \tag{4}$$

- 单摆（轻杆）。选取偏转角θ为广义坐标，

$$mg\delta(\ell\cos\theta) - m\ell\ddot{\theta}\ell\delta\theta = 0 \tag{5}$$

  给出

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{6}$$

- 单摆（均匀质量杆）。达朗贝尔原理可以写为

$$mg\delta(\frac{1}{2}\ell\cos\theta) - \frac{m}{\ell}\int_0^\ell x\ddot{\theta}x\delta\theta\mathrm{d}x = mg\delta(\frac{1}{2}\ell\cos\theta) - \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}\delta\theta = 0 \tag{7}$$

  给出

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\sin\theta = 0 \tag{8}$$

- Atwood machine。一个滑轮悬挂一根长度为ℓ的绳，两边分别悬挂质量为m_1和m_2的小块。求运动方程。取m_1一段的绳长z为广义坐标，写出达朗贝尔原理

$$m_1\delta z - m_2\delta z - \dot{p}_z\delta z = 0 \tag{9}$$

  其中p_z是对应于δz的动量，可以表示为两个小块的（沿着绳子方向的）动量和$p = (m_1 + m_2)\dot{z}$。从而，我们得到运动方程

$$(m_1 + m_2)\ddot{z} = (m_1 - m_2)g \tag{10}$$

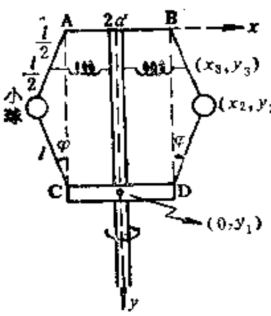

图 1: 离心机

- 离心机。让我们应用达朗贝尔原理重新求解这个问题。取角度φ为广义坐标，有

$$P\delta(2\ell\cos\varphi)+2mg\delta(\ell\cos\varphi)-k\ell\sin\varphi\delta(\ell\sin\varphi)+2m\omega^2(a+\ell\sin\varphi)\delta(\ell\sin\varphi)=0 \tag{11}$$

- 双摆（轻杆）。我们可以选取两个杆的偏转角度为广义坐标。处理静力学问题会比较容易。但当我们处理一般的动力学问题时，则并不容易，主要在于想直接写出与$\delta\theta_1$和$\delta\theta_2$所对应的虚功并不容易。（大家可以尝试一下。）这里，我们先写出直角坐标

$$\begin{aligned} x_1&=\ell_1\sin\theta_1,\quad x_2=\ell_1\sin\theta_1+\ell_2\sin\theta_2\\ y_1&=\ell_1\cos\theta_1,\quad y_2=\ell_1\cos\theta_1+\ell_2\cos\theta_2 \end{aligned} \tag{12}$$

对其求导，可得速度

$$\dot{x}_1=\ell_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1 \tag{13}$$
$$\dot{y}_1=-\ell_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1 \tag{14}$$
$$\dot{x}_2=\ell_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1+\ell_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2 \tag{15}$$
$$\dot{y}_2=-\ell_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1-\ell_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2 \tag{16}$$

再求导，得加速度

$$\ddot{x}_1=\ell_1\cos\theta_1\ddot{\theta}_1-\ell_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 \tag{17}$$
$$\ddot{y}_1=-\ell_1\sin\theta_1\ddot{\theta}_1-\ell_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1^2 \tag{18}$$
$$\ddot{x}_2=\ell_1\cos\theta_1\ddot{\theta}_1-\ell_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1^2+\ell_2\cos\theta_2\ddot{\theta}_2-\ell_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 \tag{19}$$
$$\ddot{y}_2=-\ell_1\sin\theta_1\ddot{\theta}_1-\ell_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1^2-\ell_2\sin\theta_2\ddot{\theta}_2-\ell_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2^2 \tag{20}$$

从而，达朗贝尔原理可以写成

$$m_1g\delta y_1+m_2g\delta y_2-m_1\ddot{x}_1\delta x_1-m_1\ddot{y}_1\delta y_1-m_2\ddot{x}_2\delta x_2-m_2\ddot{y}_2\delta y_2=0 \tag{21}$$

整理，可得两个运动方程

$$(m_1+m_2)\ell_1\ddot{\theta}_1+m_2\ell_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2+m_2\ell_2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2+(m_1+m_2)g\sin\theta_1=0 \tag{22}$$
$$\ell_2\ddot{\theta}_2+g\sin\theta_2-\ell_1\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2+\ell_1\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1=0 \tag{23}$$

在双摆这个例子中，我们虽然使用的广义坐标只有两个角度，但为了写出加速度项所对应的虚功时，我们又不得不回到直角坐标，从而使得计算过程非常复杂。那么有没有办法不去计算这种复杂的虚功呢？也许，这正是促使拉格朗日所面临的一个问题。在下一节中，我们来看拉格朗日是如何解决这个问题的。

在前面的讨论中，我们学究式的将3N-m个独立坐标称为广义坐标。接下来，我们要做一个推广。事实上，我们总可以选取个数多于3N-m个（记为s个）广义坐标，而这s个广义坐标之间还存在一些（s-3N+m个）约束。极端情况当然是，s=3N。因此，今后我们将统一的使用广义坐标这一术语，其包括了原始的直角坐标而不再局限于相互独立（3N-m个）的情况。

3N个直角坐标与s个广义坐标之间的关系可以一般的表示为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \qquad (i \leq N) \tag{24}$$

或

$$u_i = u_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \qquad (i \leq 3N) \tag{25}$$

其满足如下两个性质：

1. 速度的线性约束仍为线性
   一个速度的线性约束可以被写成

$$\sum_j a_{ij}\dot{u}_j + b_i = 0 \tag{26}$$

   代入式25得

$$\sum_j a_{ij}\left(\sum_\alpha \frac{\partial u_j}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial u_j}{\partial t}\right) + b_i = 0 \tag{27}$$

   注意到除了$\dot{q}_\alpha$，其他变量均为q_α和t的函数，因此这个约束仍然为速度的线性约束。

2. 不引入广义加速度
   考虑一个一般的约束

$$\begin{aligned}&f(u_1, \cdots, u_{3N}, \dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_{3N}, t)\\ =&f\left(u_1, \cdots, u_{3N}, \sum_\alpha \frac{\partial u_1}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial u_1}{\partial t}, \cdots, \sum_\alpha \frac{\partial u_{3N}}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial u_{3N}}{\partial t}, t\right)\end{aligned} \tag{28}$$

   显然，这里面只出现了广义坐标的速度项，而不具有更高阶时间导数项。

这两个性质使得我们可以放心的应用广义坐标，而不必担心它会给约束带来额外的复杂性。

2 去掉虚位移

在前面应用达朗贝尔原理的例子中，我们总是要先搞清楚主动力与虚位移（均为矢量），因此从这个意义上，我们并未完全脱离牛顿矢量力学的范畴。而且，我们也看到往往我们并不能直接应用广

义坐标写出虚功，而是又要回到直角坐标。那么有没有办法能够避免这种基于矢量的图像呢？实际上，这正是拉格朗日所面临的问题。

如果广义坐标已经考虑了所有的约束，且那么它们之间为相互独立的话，我们可以寻求一般的去掉虚位移的方式。从达朗贝尔原理出发，代入$\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(q_1\cdots q_s,t)$，得

$$\sum_{i\alpha}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \tag{29}$$

$$=\sum_\alpha\underbrace{\left(\sum_i\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)}_{Q_\alpha}\delta q_\alpha-\sum_{i\alpha}m_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\underbrace{\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}}_{\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}}\right)\delta q_\alpha+\sum_{i\alpha}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)}_{\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha}}\delta q_\alpha=0 \tag{30}$$

$$=\sum_\alpha Q_\alpha\delta q_\alpha-\sum_\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha+\sum_\alpha\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=0 \tag{31}$$

因为不同的δq_α独立，我们得到

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)}_{\text{generalized momentum}}=\underbrace{Q_\alpha}_{\text{generalized force}}+\underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}}_{\text{Lagrange force}}} \tag{32}$$

其中，Q_α称为广义力，$\partial T/\partial q_\alpha$称为拉格朗日力。

对于保守系统，

$$Q_\alpha=-\sum_i\frac{\partial V}{\partial\mathbf{r}_i}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \tag{33}$$

如果势能不依赖于速度，我们有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0} \tag{34}$$

（在后面，我们会看到这个结果仍然适用于势能含速度的情况）

在上述的推到中，我们用到了两个拉格朗日关系，现证明如下：

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t}\right)=\left(\dot{q}_\beta\frac{\partial}{\partial q_\beta}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) \tag{35}$$

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t}\right)=\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{36}$$

在推导过程中，要注意$\mathbf{r}_i$是q_α和t的函数，而$\dot{\mathbf{r}}_i$则是q_α、$\dot{q}_\alpha$和t的函数。

上述的推导是针对广义坐标进行的。事实上，我们可以直接验证：上述结果对于不含有约束的直角坐标仍然成立，即

$$\mathbf{F}_i-m_i\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{r}_i}-\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}\right)=0 \tag{37}$$

2.1 如果δq_α不独立？

这时，我们需要在达朗贝尔原理中加入拉格朗日乘子项，即

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{38}$$

重复上述推导，只是在出现Q_α的地方加上一个约束力项即可，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)}_{\text{generalized momentum}} = \underbrace{Q_\alpha}_{\text{generalized force}} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}}_{\text{Lagrange force}} + \underbrace{\sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}}_{\text{constraint force}}} \tag{39}$$

对于保守系统，可以写成拉格朗日量的形式

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}} \tag{40}$$