正则变换

相空间拓宽了我们的视角。类比于坐标变换，我们现在可以在相空间中寻求变换，但要求变换以后仍满足哈密顿正则方程。

$$\dot{\xi} = J\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \dot{\eta} = J\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \eta} \tag{1}$$

1 辛条件

如果变换$\eta = \eta(\xi)$不含时，则

$$\dot{\eta}_i = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}\dot{\xi}_j = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}J_{jk}\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}J_{jk}\frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_k}\frac{\partial H}{\partial \eta_l} \tag{2}$$

因此，如果

$$\boxed{\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}J_{jk}\frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_k} = J_{il}} \tag{3}$$

则η仍满足正则方程$\dot{\eta}_i = J_{il}\partial H/\partial \eta_l$。上述条件也就是正则变换的条件，写成矩阵的形式即

$$\boxed{MJM^t = J, \qquad M_{ij} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}} \tag{4}$$

这可以看成是辛矩阵的定义，因此正则变换其实也就是一种辛变换。辛条件也可以表示成

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}J_{jk} = J_{ij}\frac{\partial \xi_k}{\partial \eta_j} \tag{5}$$

- 设$\xi = (q, p)$，$\eta = (Q, P)$，写出上述辛条件的具体表达式。

$$-\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \tag{6}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \tag{7}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \tag{8}$$

$$-\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \tag{9}$$

- 泊松括号在正则变换下不变。

$$[a, b]_\xi = J_{ij}\frac{\partial a}{\partial \xi_i}\frac{\partial b}{\partial \xi_j} = J_{ij}\frac{\partial a}{\partial \eta_k}\frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial b}{\partial \eta_l}\frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j} = J_{ij}\frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j}\frac{\partial a}{\partial \eta_k}\frac{\partial b}{\partial \eta_l} = J_{kl}\frac{\partial a}{\partial \eta_k}\frac{\partial b}{\partial \eta_l} = [a, b]_\eta \tag{10}$$

- 保体积。这可以从辛条件直接得到：

$$J = \det\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right) = 1 \tag{11}$$

注意：反过来则不成立，即保体积不一定给出辛条件。

- 例：$Q = p, P = -q$，则

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

满足辛条件。这个正则变换可以将坐标变为动量，动量变为坐标。

- 例：$Q = \alpha q, P = \alpha^{-1} p$，则

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

满足辛条件$MJM^t = J$。这个变换相当于作了一个重新标度。

- 例：$Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right), P = q\cot p$，则

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{q} & \cot q \\ \cot q & -\frac{q}{\sin^2 p} \end{bmatrix} \tag{14}$$

满足辛条件。

- 例：一维谐振子。

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) \tag{15}$$

设$x = f(P)\sin Q$，$p = f(P)\cos Q$，则根据$[x, p] = 1$可得$f(P) = \sqrt{2P}$。这个变换得到了一个守恒量$P = E$，这提示我们可以将任意一个守恒量变换为一种广义动量。

事实上，如果直接从泊松括号的不变性出发，我们也可以得到辛条件，即使对于含时的变换$\eta = \eta(\xi, t)$也成立。因此，**辛条件是正则变换的一般条件**。

2 *含时变换$\eta = \eta(\xi, t)$？

根据变换前后的哈密顿正则方程不变，得

$$\dot{\eta}_i = \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} J_{jk} \frac{\partial H}{\partial \xi_k} = J_{ij} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \eta_j} \tag{16}$$

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} J_{jk} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \eta_k} = J_{ij} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \tag{17}$$

显然，辛条件本身无法保证两边相等，我们还需要令$\tilde{H} = H + G$，再利用辛条件，得

$$\left.\frac{\partial \eta_i}{\partial t}\right|_{\xi} = J_{ij} \left.\frac{\partial G}{\partial \eta_j}\right|_{\eta}, \qquad \left.\frac{\partial \xi_i}{\partial t}\right|_{\eta} = -J_{ij} \left.\frac{\partial G}{\partial \xi_j}\right|_{\xi} \tag{18}$$

如果G可以表示成$\partial_t U$的形式，则有

$$\eta_i = J_{ij}\frac{\partial U}{\partial \eta_j}, \quad \xi_i = -J_{ij}\frac{\partial U}{\partial \xi_j} \tag{19}$$

这与接下来要讲到的母函数的表达式是一致的。但要注意的是：并非任意两个哈密顿量都可以通过正则变换联系起来。比如考虑正则变换$\eta_i = \xi_i$，显然任意两个哈密顿量$\tilde{H}(\eta,t)$与$H(\xi,t)$是没有关系的，因此不存在一种母函数将其联系起来。

3 生成函数

我们可以从生成函数的角度来理解正则变换。利用拉格朗日量可以相差一个全微分，我们就得到

$$p\mathrm{d}q - H\mathrm{d}t = P\mathrm{d}Q - \tilde{H}\mathrm{d}t + \mathrm{d}U_1 \tag{20}$$

我们就发现$U_1(q,Q,t)$可以作为一种生成函数。再通过勒让德变换，可以进一步得到其它几种生成函数。

$$\mathrm{d}U_1 = p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q + (\tilde{H} - H)\mathrm{d}t \tag{21}$$

$$\mathrm{d}U_2 = -q\mathrm{d}p - P\mathrm{d}Q + (\tilde{H} - H)\mathrm{d}t \tag{22}$$

$$\mathrm{d}U_3 = p\mathrm{d}q + Q\mathrm{d}P + (\tilde{H} - H)\mathrm{d}t \tag{23}$$

$$\mathrm{d}U_4 = -q\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}P + (\tilde{H} - H)\mathrm{d}t \tag{24}$$

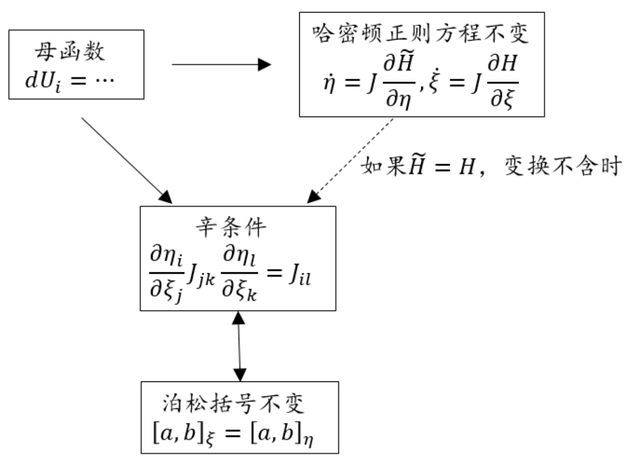

图 1: 正则变换几种表述之间的关系。

- 利用生成函数证明辛条件。比如对于U_1，有

$$\frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial Q \partial q} = -\frac{\partial P}{\partial q} \tag{25}$$

- 证明$\partial U_i/\partial t$的结果与i无关。

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = \left.\frac{\partial (U_1 - pq)}{\partial t}\right|_{p,Q} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} - p\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial U_1}{\partial t} \tag{26}$$

  其他类似。

- 证明哈密顿正则方程不变。

$$\dot{\eta}_i = \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} J_{jk} \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_k} \frac{\partial H}{\partial \eta_l} = \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + J_{il} \frac{\partial H}{\partial \eta_l} \tag{27}$$

利用母函数U_1和U_3，可以得到

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial U_{3,4}}{\partial t} + H\right) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial}{\partial Q_i}\left(\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} + H\right) = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} \end{aligned} \tag{28}$$

- 例：$U = qQ$。$p = Q,\ P = -q$，即$(q,p) \to (p,-q)$。
- 例：$U = pQ$。$q = -Q,\ P = -p$，即$(q,p) \to (-q,-p)$。
- 例：$U = qP$。$p = P,\ Q = q$，即$(q,p) \to (q,p)$。
- 例：$U = pP$。$q = -P,\ Q = p$，则$(q,p) \to (p,-q)$。
- 例：$U = \alpha qP$。$p = \alpha P,\ Q = \alpha q$，即$(q,p) \to (\alpha q, \alpha^{-1} p)$，表示标度变换。
- 例：$U = f(q,t)P$。$p = f'_q(q,t)P,\ Q = f(q,t)$，表示一般的坐标变换。
- 求一维谐振子的母函数。$x = \sqrt{P}\sin Q,\ p = \sqrt{P}\cos Q$，则

$$U_1(x,Q) = \int p\mathrm{d}x + h(Q) = \int \frac{x\cos Q}{\sin Q}\mathrm{d}x + h(Q) = \frac{x^2 \cot Q}{2} + h(Q) \tag{29}$$

再根据$P = -\partial U_1/\partial Q$，可得$h(Q) = 0$。

4 无穷小变换

由于$U_3 = qP$表示“相等变换”，我们可以在其基础上加上一个无穷小量，即

$$U_3 = qP + \varepsilon G(q,P) \tag{30}$$

给出

$$Q = q + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P} \tag{31}$$

$$P = p - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q} \tag{32}$$

因此，我们说G给出一种无穷小变换。比如：

- $G = p$给出空间平移变换。
- $G = xP_y - yP_x$给出空间转动变换。
- $G = H$给出时间演化，即哈密顿正则方程。

考虑一个不含时的物理量u，则

$$\mathrm{d}u = \varepsilon[u, G] \tag{33}$$

取$u = H$，则

$$\mathrm{d}H = \varepsilon[H, G] = -\varepsilon\dot{G} \tag{34}$$

这表明如果G为守恒量，则在G的无穷小变换下，H不变。反之亦成立。这可以看成是Noether定理的一种简化版本。