向心力

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)} \tag{1}$$

1 一般讨论

由于L不含时，能量是守恒量。

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) \tag{2}$$

根据转动不变性，角动量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \tag{3}$$

也是守恒量，且满足

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0 \tag{4}$$

我们可以取$\mathbf{L}$沿着z轴，则运动仅局限在xy平面内。因此，我们可以取极坐标

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - V(\rho) \tag{5}$$

这里的m应理解为约化质量。由于φ为可遗坐标，其相应的广义动量$p_\varphi = \partial L/\partial\dot{\varphi} = m\rho^2\dot{\varphi} = L_z$为守恒量。设$\rho^2\dot{\varphi} = h$，即$L_z = mh$，拉格朗日为

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \frac{h^2}{\rho^2}\right) - V(\rho) \tag{6}$$

而哈密顿量（能量）为

$$E = H = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{h^2}{\rho^2} + V(\rho)}_{V_{\text{eff}}} \tag{7}$$

通过对有效势V_{eff}的分析，可以得到对运动的整体把握。

- 例：通过有效势对$V(\rho) = k\rho^\alpha$下的运动做定性分析。

一般的，$\rho(t)$可以由积分给出

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}}} \tag{8}$$

在得到$\rho(t)$之后，$\varphi(t)$可以根据关系$\dot{\varphi} = h/\rho^2$给出

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{h \mathrm{d}t}{\rho^2(t)} \tag{9}$$

事实上，我们可以直接研究轨道方程。利用关系式

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t \mathrm{d}\varphi} = \frac{h}{\rho^2} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} \tag{10}$$

代入能量的表达式，

$$E = \frac{1}{2} m \left[\frac{h^2}{\rho^4} \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} \right)^2 + \frac{h^2}{\rho^2} \right] + V(\rho) \tag{11}$$

设$\rho = 1/u$，上式可以被简化为

$$E = \frac{1}{2} m h^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \right)^2 + u^2 \right] + V(u^{-1}) \tag{12}$$

两边对φ求导，得

$$m h^2 u^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u \right) + F = 0 \tag{13}$$

式12和13分别将势能和力与轨道方程联系起来，被称为比内公式。在不涉及时间的计算时，这两个方程往往很有用。

- 例：已知$\rho = p/(1 + e\cos\varphi)$，求力。
- 例：已知$\rho = p/(1 + e\cos\beta\varphi)$，求力。根据比内公式13

$$\begin{aligned} F &= -m h^2 u^2 \left(-\frac{e\beta^2}{p} \cos\beta\varphi + \frac{1 + e\cos\beta\varphi}{p} \right) \\ &= -m h^2 u^2 \left(\frac{1}{p} + \frac{e(1-\beta^2)}{p} \cos\beta\varphi \right) \\ &= -m h^2 u^2 \left(\frac{1}{p} + \frac{e(1-\beta^2)}{p} \frac{pu-1}{e} \right) \\ &= -\frac{\beta^2 m h^2}{p} u^2 + m h^2 (\beta^2 - 1) u^3 \end{aligned} \tag{14}$$

2 封闭轨道与Bertrand定理

> All laws of attraction allow closed orbits, but the law of nature is the only one that imposes them. —Bertrand (1873)

对于圆形轨道$\rho = \rho_0$，我们有

$$E = V_{\text{eff}} = \frac{m h^2}{2\rho_0^2} + V(\rho_0) \tag{15}$$

满足平衡条件

$$V_{\text{eff}}' = -\frac{mh^2}{\rho_0^3} + V'(\rho_0) = -\frac{mh^2}{\rho_0^3} - F(\rho_0) \tag{16}$$

这是个吸引力。进一步，轨道的稳定性由V_{eff}的二阶导数为正给出

$$V_{\text{eff}}'' = \frac{3mh^2}{\rho_0^4} + V''(\rho_0) > 0 \tag{17}$$

- 对于$V = kr^\alpha$，平衡条件为

$$V_{\text{eff}}' = -\frac{mh^2}{\rho_0^3} + \alpha k \rho_0^{\alpha-1} = 0 \tag{18}$$

因此，$\alpha k > 0$。进一步研究稳定条件

$$V_{\text{eff}}'' = \frac{3mh^2}{\rho_0^4} + \alpha(\alpha-1)k\rho_0^{\alpha-2} = 3\alpha k \rho_0^{\alpha-2} + \alpha(\alpha-1)k\rho_0^{\alpha-2} > 0 \tag{19}$$

解得$\alpha > -2$。事实上，这个结论可以由V_{eff}的图很容易的得到。

那么一般的情况呢？是否一定存在闭合的轨道呢？这个问题由Bertrand定理给出：只有当$V = -k\rho^{-1}$（开普勒问题）或$V = k\rho^2$（胡克问题），轨道才一定闭合！不得不说，大自然刚好选择了这两种常见的力，实在是神奇。下面，我们来看Bertrand给出的严格证明。

图 1: Bertrand，开普勒，胡克

根据比内方程12，可以得到

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2(E-V)}{mh^2} - u^2}} = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2} - \frac{2}{mh^2}V(u) - u^2}} \tag{20}$$

轨道的极值点u^*可以通过$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi = 0$给出，即

$$\frac{2E}{mh^2} - \frac{2V(u^*)}{mh^2} - u^{*2} = 0 \tag{21}$$

因此，参数$2E/mh^2$和$-2/mh^2$可以由两个极值（u_1和u_2）给出

$$\frac{2E}{mh^2} = \frac{u_1^2 V_2 - u_2^2 V_1}{V_2 - V_1} \tag{22}$$

$$-\frac{2}{mh^2} = \frac{u_2 - u_1}{V_2 - V_1} \tag{23}$$

其中$V_1=V(u_1)$，$V_2=V(u_2)$。两个极值点之间的角度为

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2}-\frac{2V}{mh^2}-u^2}} \\
&= \int \frac{\sqrt{V_2-V_1}\mathrm{d}u}{\sqrt{(u_1^2V_2-u_2^2V_1)+(u_2-u_1)V(u)-u^2(V_2-V_1)}}
\end{aligned} \tag{24}
$$

如果所有轨道都封闭，则$\Theta=m\pi$，其中m是个有理数。从而m不依赖于E和h^2，或$u_{1,2}$，不然的话E和h^2的连续变化会给出无理数的m。因此，我们可以随意选取$u_{1,2}$。

1. $u_2=u_1+\epsilon$，其中ϵ为无穷小量。式24可以被积出

   $$
   m\pi = \sqrt{\frac{V_1'}{V_1'-u_1V_1''}}\int_0^\epsilon \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(\epsilon-x)}} = \pi\sqrt{\frac{V_1'}{V_1'-u_1V_1''}} \tag{25}
   $$

   其中$V_1'=V'(u_1)$，$V_1''=V''(u_1)$。从而

   $$
   m^2(V_1'-u_1V_1'')=V_1' \tag{26}
   $$

   该积分可以完成，得到

   $$
   V(u)=\frac{C}{2-m^{-2}}u^{2-m^{-2}} \tag{27}
   $$

   这就限定了势能的形式。

2. 如果$2-m^{-2}>0$，取$u_1=0$，$u_2=1$，$V_1=0$，$V_2=C/(2-m^{-2})$，有

   $$
   \begin{aligned}
   m\pi &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^{2-m^{-2}}-u^2}} \\
   &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-1/2m^2}\sqrt{1-u^{1/m^2}}} \\
   &= \int_0^1 \frac{m^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \qquad \text{define } x=u^{1/m^2} \\
   &= m^2\pi
   \end{aligned} \tag{28}
   $$

   从而，$m=1$，对应于$V=Cu=C/r$。

3. 如果$2-m^{-2}<0$，取$u_1=1$，$u_2=0$，$V_1=C/(2-m^{-2})$，$V_2=\infty$，有

   $$
   m\pi = \int_1^0 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2}\pi \tag{29}
   $$

   从而，$m=-1/2$，对应于$V=-\frac{C}{2}u^{-2}=-\frac{C}{2}r^2$。