哈密顿-雅可比理论

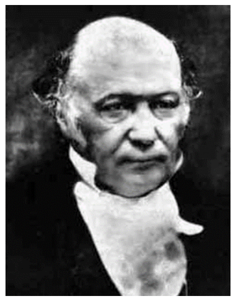

图 1: 哈密顿与雅可比

But when this well known law of least, or as it might be better called, of stationary action, is applied to the determination of the actual motion of the system, it serves only to form, by the rules of the calculus of variations, the differential equations of motion of the second order, which can always be otherwise found. It seems, therefore, to be with reason that Lagrange, Laplace, and Poisson have spoken lightly of the utility of this principle in the present state of dynamics. A different estimate, perhaps, will be formed of that other principle which has been introduced in the present paper, under the name of the law of varying action, in which we pass from an actual motion to another motion dynamically possible, by varying the extreme positions of the system, and (in general) the quantity H, and which serves to express, by means of a single function, not the mere differential equations of motion, but their intermediate and their final integrals. — W. R. Hamilton (1834)
在哈密顿本人看来，（作为母函数的）作用量的意义绝不仅仅是给出微分方程，而是给出运动积分。[1]

目录

[1]尽管后来的研究表明，我们往往并不能找到足够多的运动积分（比如不可积系统）。

1 $\tilde{H}=0$的正则变换

从正则变换的母函数

$$\mathrm{d}U_1 = p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q + (\tilde{H} - H)\mathrm{d}t \tag{1}$$

出发，我们得到

$$p = \frac{\partial U_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial U_1}{\partial Q}, \quad \tilde{H} - H = \frac{\partial U_1}{\partial t} \tag{2}$$

或从母函数

$$\mathrm{d}U_3 = p\mathrm{d}q + Q\mathrm{d}P + (\tilde{H} - H)\mathrm{d}t \tag{3}$$

出发，得到

$$p = \frac{\partial U_3}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial U_3}{\partial P}, \quad \tilde{H} - H = \frac{\partial U_3}{\partial t} \tag{4}$$

不失一般性，我们总可以取$\tilde{H}$的值为0，则

$$H(q, \frac{\partial U_{1,3}}{\partial t}, t) + \frac{\partial U_{1,3}}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

这就是哈密顿-雅可比方程，是哈密顿所构建的一种与求解运动方程不同的“新方法”。

当然，如果可以找到变换以后的$\tilde{H}$作为Q, P的函数为0，那么这个U_1（或U_3）满足

$$\frac{\mathrm{d}U_{1,3}}{\mathrm{d}t} = p\dot{q} - H = L \tag{6}$$

我们发现这个$U_{1,3}$不是别的，正是拉格朗日量的积分，即作用量。

而我们又有最小作用量原理，其中作用量是取极值的。那么，究竟作用量是该取极值还是该作为函数呢？

2 最小作用量原理

考虑一般的非等时变分

$$\mathrm{d}q = \tilde{q}(\tilde{t}) - q(t) = \tilde{q}(\tilde{t}) - q(\tilde{t}) + q(\tilde{t}) - q(t) = \delta q + \dot{q}\mathrm{d}t \tag{7}$$

则

$$\mathrm{d}S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\tau)\mathrm{d}\tau + L\mathrm{d}t\Big|_1^2 \tag{8}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta q\mathrm{d}\tau + (p\mathrm{d}q - H\mathrm{d}t)\Big|_1^2 \tag{9}$$

这里，对于等时变分的情况，我们就得到了哈密顿原理，或一般直接称为最小作用量原理

$$\boxed{\delta\int L\mathrm{d}t=0,\quad \delta q_{1,2}=0} \tag{10}$$

另一方面

$$\mathrm{d}S=\mathrm{d}\int_{t_1}^{t_2}(p\dot{q}-H)\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

如果H为守恒量，则

$$\mathrm{d}S=\mathrm{d}\int_{t_1}^{t_2}p\dot{q}\mathrm{d}\tau-H\mathrm{d}t\Big|_1^2 \tag{12}$$

比较式9和式12，我们就得到简化（abbreviated ）最小作用量原理[2]

$$\boxed{\mathrm{d}\int p\dot{q}\mathrm{d}t=0,\quad \mathrm{d}q_{1,2}=0} \tag{13}$$

对于动能为速度二次型的情况，可以将该结果表述为莫陪督（Maupertuis）原理

$$\mathrm{d}\int 2T\mathrm{d}t=0,\quad \mathrm{d}q_{1,2}=0 \tag{14}$$

或雅可比最小作用量原理

$$\mathrm{d}\int v\mathrm{d}s=0,\quad \mathrm{d}q_{1,2}=0 \tag{15}$$

一个有趣的比较是几何光学中的费马原理

$$\mathrm{d}\int n\mathrm{d}s=0,\quad \mathrm{d}q_{1,2}=0 \tag{16}$$

折射率$n=c/v=ck/\omega=cp/\hbar\omega$，与雅可比表示中的速度相对应的量应该是光的动量（德布罗意关系），因此二者并无矛盾。

	最小作用量原理	母函数
等时变分δ	$\delta S=\delta\int L\mathrm{d}t=0,\quad \delta q_{1,2}=0$	
含时变分d	$\delta S'=\delta\int p\dot{q}\mathrm{d}t=0,\quad \mathrm{d}q_{1,2}=0,\quad H=\mathrm{const.}$	$\mathrm{d}S=p_2\mathrm{d}q_2-p_1\mathrm{d}q_1-H_2\mathrm{d}t_2+H_1\mathrm{d}t_1$

3 作为函数的作用量

在式9中，令$t_1=0,t_2=t,\mathrm{d}t_1=0,\mathrm{d}t_2=\mathrm{d}t$，则

$$\mathrm{d}S=p\mathrm{d}q-p_0\mathrm{d}q_0-H(q,p,t)\mathrm{d}t \tag{17}$$

这正是正则变换的母函数U_1。因此，$-H=\partial_tS$，即得到哈密顿-雅可比方程

$$\boxed{H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0} \tag{18}$$

[2] 该形式应该是由欧拉首先得到，但欧拉坚持要把该结果归功于莫陪督。梁先生的书则将其归于雅可比。

一个插曲：如果取$t_1=0, t_2=t, \mathrm{d}t_1=\mathrm{d}t, \mathrm{d}t_2=0$，则

$$\mathrm{d}S = p\mathrm{d}q - p_0\mathrm{d}q_0 - H(q_0, p_0, 0)\mathrm{d}t \tag{19}$$

这也就给出了哈密顿的另一个偏微分方程

$$H\left(q_0, -\frac{\partial S}{\partial q_0}, 0\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{20}$$

在哈密顿的原始论文中，这两个方程一起构成了对力学系统的完整描述。不过因为这两个偏微分方程的变分条件不同，如果哈密顿量含时，则我们并不能同时要求它们成立。因此，在后来的发展中，人们抛弃了这个多余的方程，只剩下一个方程，即上面的哈密顿-雅可比方程。

哈密顿从运动方程出发，推出了式18，但反过来，式18的解是否一定满足运动方程呢？这个问题由雅可比做出了肯定的回答，被称为雅可比定理。如果哈密顿-雅可比方程可以解出，应该包含s个常数，即

$$S = S(q_1, \cdots, q_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_s, t) \tag{21}$$

那么，我们可以定义α_i所对应的正则变量

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \tag{22}$$

由于$\tilde{H} = H + \partial_t S = 0$，$\alpha_i$和$\beta_i$为2s个常数。或者，我们也可以从定义出发，由于$p_0, q_0$（或$\alpha_i, \beta_i$）为$t=0$时刻的正则变量，它们当然与时间$t$无关。进而，上面的正则表达式22中，我们可以反解出$q_i = q_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_s, t)$，即得到了问题的解。而另一组正则关系

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \tag{23}$$

则给出广义动量作为$(q_1, \cdots, q_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_s, t)$进而的函数，进而$p_i = p_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_s, t)$。

下面，我们来直接证明雅可比定理，即上述“反解”确实存在且满足运动方程。对β_i求时间导数得

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}\beta_i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\dot{q}_j \\ &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\dot{q}_j \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\left(-\frac{\partial H}{\partial p_j} + \dot{q}_j\right) \end{aligned} \tag{24}$$

如果

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\right) \neq 0 \tag{25}$$

则我们得到第一组哈密顿正则方程。接下来对p_i求时间导数得

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j \\ &= -\frac{\partial H(q, \partial_q S, t)}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{26}$$

这样，我们就证明了雅可比定理。当然，根据我们对正则变换的理解，母函数所生成的正则变换并不改变运动方程，因此，雅可比定理也可以看成是正则变换的一个结果。

- 例：一个自由度的自由粒子。

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{27}$$

我们先不去求解这个偏微分方程，而是通过定义来求S，

$$S=\int_0^t \frac{1}{2}mv^2\mathrm{d}t=\frac{m(x-x_0)^2}{2t} \tag{28}$$

可以验证S确实满足哈密顿-雅可比方程。x_0所对应的正则变量（记为p_0）为

$$p_0=\frac{\partial S}{\partial x_0}=-\frac{m(x-x_0)}{t} \tag{29}$$

可以反解出

$$x=-\frac{p_0 t}{m}+x_0 \tag{30}$$

其中，x_0,p_0为两个积分常数，对应于初始位移和初始速度。

4 分离变量

哈密顿-雅可比方程求解的一般策略就是通过分离变量。我们可以寻求如下形式的解[3]：

$$S(q_1,q_2,\cdots,q_s,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,t)=\sum_i S_i(q_i,\alpha_1,\cdots,\alpha_s,t) \tag{31}$$

这称为分离变量。

如果某一个广义坐标，比如q_1，为可遗坐标，则可以直接将其分离出来：

$$S(q_1,q_2,\cdots,q_s,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,t)=\alpha_1 q_1+\sum_{i=2}^{s} S_i(q_i,\alpha_1,\cdots,\alpha_s,t) \tag{32}$$

如果哈密顿不含时，则可以“将时间分离出来”

$$S=W(q_1,\cdots,q_s,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)-Et=\sum_i W_i(q_i,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)-Et \tag{33}$$

进而

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=E \tag{34}$$

这样，如果我们直接取W为母函数，则变换以后的$\tilde{H}=E$。

我们以一个自由度的自由粒子为例

$$H=\frac{p^2}{2m} \tag{35}$$

来阐明上述两种观点，同时展示选取不同的积分常数不会影响最终的运动解。

[3]分离变量的方式并不是唯一的。对于线性的偏微分方程，比如拉普拉斯方程或薛定谔方程，可以令$f(q_1,q_2,\cdots)=f_1(q_1)f_2(q_2)\cdots$。从而将偏微分方程化为常微分方程与本征值问题。但对于非线性的偏微分方程，比如我们这里所遇到的哈密顿-雅可比方程，则并无一般的策略。当然，我们的目的是随便找到一组解即可，而并不是要找到所有的解。

母函数	$S=W-Et$	W
变换以后的哈密顿量$\tilde{H}$	0	E
E所对应的正则变量	$-t_0$	$t-t_0$

表 1: 不含时情况下的两种观点。

- 积分常数为E，母函数为$S=x\sqrt{2mE}-Et$，变换以后$\tilde{H}=0$。

$$
\begin{aligned}
Q_E &= \frac{\partial S}{\partial E} = x\frac{2m}{2\sqrt{E}} - t \\
\dot{Q}_E &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial E} = 0 \to Q_E = \text{const.}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

- 积分常数为E，母函数为$W=x\sqrt{2mE}$，变换以后$\tilde{H}=E$。

$$
\begin{aligned}
Q_E &= \frac{\partial S}{\partial E} = x\frac{2m}{2\sqrt{E}} \\
\dot{Q}_E &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial E} = 1 \to Q_E = t-t_0
\end{aligned}
\tag{37}
$$

- 积分常数为P，母函数为$S=xP-\frac{P^2}{2m}t$，变换以后$\tilde{H}=0$。

$$
\begin{aligned}
Q_P &= \frac{\partial S}{\partial P} = x-\frac{P}{m}t \\
\dot{Q}_P &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial E} = 0 \to Q_P = \text{const.}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

- 积分常数为P，母函数为$W=xP$，变换以后$\tilde{H}=\frac{P^2}{2m}$。

$$
\begin{aligned}
Q_P &= \frac{\partial S}{\partial P} = x \\
\dot{Q}_P &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \frac{P}{m} \to Q_P = \frac{P}{m}(t-t_0)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

不幸的是，变量分离往往是与坐标选取紧密联系在一起的，（到目前为止）并不存在一种普适的方法。因此要对具体的问题做具体的分析。下面，我们来看几个可积的例子。

- 自由粒子。

$$
H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right) \tag{40}
$$

由于x,y,z都是可遗坐标，且H不含时，可直接写出S

$$
S=xP_x+yP_y+zP_z-Et=xP_x+yP_y+zP_z-\frac{P_x^2+P_y^2+P_z^2}{2m}t \tag{41}
$$

利用S，可以得到

$$
\beta_x=\frac{\partial S}{\partial P_x}=x-\frac{P_xt}{m},\quad \beta_y=y-\frac{P_yt}{m},\quad \beta_z=z-\frac{P_zt}{m} \tag{42}
$$

反解之，可得问题的解。

采用另一种观点，取$W = xP_x + yP_y + zP_z = xP_x + yP_y + z\sqrt{2mE - P_x^2 - P_y^2}$为母函数，其中$P_x, P_y, E$为变换以后的三个“广义动量”，则其对应的“广义坐标”为

$$\begin{aligned}\beta_x &= \frac{\partial S}{\partial P_x} = x - \frac{zP_x}{P_z} \\ \beta_y &= \frac{\partial S}{\partial P_y} = y - \frac{zP_y}{P_z} \\ \beta_E &= \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{zm}{P_z} = t - t_0 \end{aligned} \tag{43}$$

亦可反解出问题的解。

比较这里的母函数与式28给出的母函数，显然由于积分常数的选取不同，导致S的形式是不同的。但它们都能给出问题的解，这正是雅可比定理的内容。

- 一维运动。

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{44}$$

取E为积分常数，则[4]

$$W = \int \mathrm{d}x \sqrt{2m(E - V)} \tag{45}$$

因此E所对应的正则变量为

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - V(x)}} = t - t_0 \tag{46}$$

对于谐振子的情况，$V(x) = kx^2/2$，则可以解出W，当然也可以直接代入上式，得到问题的解

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x\right) = t - t_0 \tag{47}$$

- 耦合谐振子。利用简正坐标，可以将其写为

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{k_i x_i^2}{2} \tag{48}$$

该问题可直接分离变量，取E_i为积分常数即可。

有趣的是，对于空间谐振子，即$m_i = m, k_i = k$。

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{k x_i^2}{2} \tag{49}$$

这时，我们有更多的分离变量的可能

$$S = \sum_i \int \mathrm{d}y_i \sqrt{2m\left(E_i - \frac{1}{2} k y_i^2\right)} - \sum_i E_i t \tag{50}$$

其中$y_i = U_{ij} x_j$。这表明该系统具有更高的对称性。

[4]严格来说，此处的W可以差一个E的函数$F(E)$，但由于我们的目的只是找到一个解而不是所有的解，可以略去$F(E)$项。事实上，这一项只会给我们$Q_E = t - t_0$的一个移动，即改变t_0。但如果一个正则变换是给定的，则可能需要$F(E)$这一项来得到给定的正则变换，见“正则变换”一节中的例题。

- 极坐标。

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right)+V(\rho,\varphi) \tag{51}$$

利用分离变量可以求解如下的问题

$$V(\rho,\varphi)=f(\rho)+\frac{g(\varphi)}{\rho^2} \tag{52}$$

代入哈密顿-雅可比方程得

$$\frac{\rho^2}{2m}\left(\frac{\partial S_\rho}{\partial\rho}\right)^2+\rho^2 f(\rho)-\rho^2 E+\underbrace{\left(\frac{\partial S_\varphi}{\partial\varphi}\right)^2+g(\varphi)}_{\alpha}=0 \tag{53}$$

当然，如果$g(\varphi)=0$，则φ为可遗坐标，我们可以直接将φ分离出来，即$S_\varphi=\varphi p_\varphi$，其中$p_\varphi=\sqrt{\alpha}$。

- 抛物线坐标。取

$$\xi=\rho+x,\quad \eta=\rho-x,\quad x=\frac{\xi-\eta}{2},\quad y=\sqrt{\xi\eta} \tag{54}$$

可以看到ξ和η为常数时分别对应于开口沿着x方向的抛物线，因此称为抛物线坐标。利用正则关系，可以得到p_x,p_y与p_ξ,p_η的关系：

$$p_x=\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial W}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{2\xi p_\xi-2\eta p_\eta}{\xi+\eta} \tag{55}$$

$$p_y=\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial W}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{2\sqrt{\xi\eta}(p_\xi+p_\eta)}{\xi+\eta} \tag{56}$$

从而可以得到哈密顿

$$H=\frac{2(\xi p_\xi^2+\eta p_\eta^2)}{m(\xi+\eta)}+V(\xi,\eta) \tag{57}$$

- 抛物线坐标下的开普勒问题。代入$V(\xi,\eta)=-k/\rho=-2k/(\xi+\eta)$得

$$\underbrace{\frac{2\xi}{m}\left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)^2-E\xi-k}_{\alpha}+\underbrace{\frac{2\eta}{m}\left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right)^2-E\eta-k}_{-\alpha}=0 \tag{58}$$

我们就得到运动积分

$$\alpha=\frac{2\xi p_\xi^2}{m}-E\xi-k=-\frac{2\eta p_\eta^2}{m}+E\eta+k \tag{59}$$

写成对称的形式为

$$\alpha=\frac{\xi p_\xi^2-\eta p_\eta^2}{m}-E\frac{\xi-\eta}{2} \tag{60}$$

代入$E=H$，并利用

$$\begin{aligned} p_\xi&=\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}=\frac{p_x}{2}+\frac{p_y}{2}\sqrt{\frac{\rho-x}{\rho+x}}\\ p_\eta&=\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}=-\frac{p_x}{2}+\frac{p_y}{2}\sqrt{\frac{\rho+x}{\rho-x}} \end{aligned} \tag{61}$$

得

$$\alpha = -\frac{p_y}{m}(xp_y - yp_x) + \frac{kx}{\rho} \tag{62}$$

这正是Runge-Lenz矢量的x分量。

- 三维的抛物线坐标。

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x} \tag{63}$$

$$x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \quad z = \frac{\xi-\eta}{2} \tag{64}$$

利用这组坐标，可以得到

$$H = \frac{2(\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2)}{m(\xi+\eta)} + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} + V(\xi,\eta,\varphi) \tag{65}$$

对于如下问题

$$V = -\frac{k}{r} - gz = -\frac{2k}{\xi+\eta} - \frac{g(\xi-\eta)}{2} \tag{66}$$

可分离变量。作业。

- 球坐标。

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) \tag{67}$$

对于如下形式的势能

$$V(r,\theta,\varphi) = f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2\sin^2\theta} \tag{68}$$

可以分离变量

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_\varphi}{\partial\varphi}\right)^2 + h(\varphi) = \alpha_1 \tag{69}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial\theta}\right)^2 + g(\theta) + \frac{\alpha_1}{\sin^2\theta} = \alpha_2 \tag{70}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + f(r) + \frac{\alpha_2}{r^2} = E \tag{71}$$

5 刘维尔可积

参考Whitakker§148。

如果存在s个运动积分，设为$\alpha_i = g_i(q,p,t)$，可反解出$p_i = f_i(q,\alpha,t)$，且这些运动积分相互对合，即$[\alpha_i,\alpha_j]=0$，则可以证明

$$p\mathrm{d}q - H\mathrm{d}t$$

为全微分，即可以写成$\mathrm{d}S$。

证明如下。从下面的恒等式出发

$$[p_i - f_i(q,\alpha,t), p_j - f_j(q,\alpha,t)] = 0 \tag{72}$$

根据$[\alpha_i, \alpha_j] = 0$，可得

$$[f_i(q,\alpha,t), f_j(q,\alpha,t)] = 0 \tag{73}$$

将$f_i(q,\alpha,t)$对α展开，即可得到上面这个结果。进而

$$\frac{\partial p_i(q,\alpha,t)}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j(q,\alpha,t)}{\partial q_i} \tag{74}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_i(q,\alpha,t)}{\partial t} &= \dot{p}_i - \frac{\partial p_i(q,\alpha,t)}{\partial q_j}\dot{q}_j \\ &= -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i(q,\alpha,t)}{\partial q_j}\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_j} \\ &= -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i} - \frac{\partial p_j(q,\alpha,t)}{\partial q_i}\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_j} \\ &= -\frac{\partial H(q,\alpha,t)}{\partial q_i}\end{aligned} \tag{75}$$

进而全微分得证。从而，我们也就得到了作为坐标函数的作用量，即刘维尔可积定理得证。

6 作用量变量与角变量

对于完全可积的**不含时**系统

$$W = \sum_i W_i(q_i, \alpha_1, \cdots, \alpha_s) \tag{76}$$

如果运动受限，则在(p_i, q_i)平面上沿着封闭曲线运动。这时，存在一种“最简单”的正则变量，即将该封闭曲线变换为圆$\mathcal{S}^1$，而系统整体的运动就被限制在s个圆环构成的超曲面上:

$$\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \times \cdots \times \mathcal{S}^1 \tag{77}$$

这被称为刘维尔-Arnold定理。

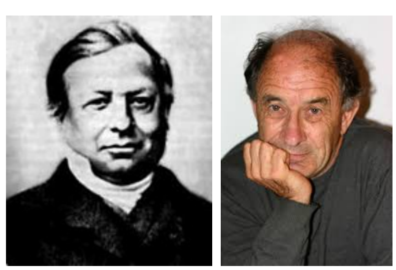

图 2: 刘维尔与阿诺德

取圆环的半径和角度为正则变量(J_i, ϕ_i)，则

$$2\pi = \oint \mathrm{d}\phi_i = \oint \mathrm{d}\left(\frac{\partial W}{\partial J_i}\right) = \oint \left(\frac{\partial^2 S}{\partial J_i \partial q_i}\right)\mathrm{d}q_i = \frac{\partial}{\partial J_i}\oint p_i \mathrm{d}q_i \tag{78}$$

这提示我们，就可以取

$$J_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i \mathrm{d}q_i \tag{79}$$

为“广义动量”。由于这正是作用量的形式，因此称为作用量变量。而与之相对应的“广义坐标”

$$\phi_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} \tag{80}$$

转动角速度可以通过哈密顿正则方程给出

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial E(J_1, \cdots, J_s)}{\partial J_i} = \frac{2\pi}{T_i} = \omega_i \tag{81}$$

- 谐振子。

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \tag{82}$$

作用量变量为

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint p\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{2mE - mkx^2}\mathrm{d}x = E\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{83}$$

从而得到

$$E = J\omega \tag{84}$$

再根据正则方程得角频率为

$$\dot{\phi} = \frac{\partial E}{\partial J} = \omega \tag{85}$$

- 空间谐振子。

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{k(x^2 + y^2 + z^2)}{2} \tag{86}$$

由于该问题可以直接分离变量为三个单独的谐振子，可得

$$E_{x,y,z} = J_{x,y,z}\omega \tag{87}$$

从而得总能量为$J_{x,y,z}$的函数

$$E = (J_x + J_y + J_z)\omega \tag{88}$$

显然，三个角频率简并。这表明这种情况下轨道一定封闭，符合Bertrand定理。

- 极坐标下的开普勒问题。

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right)-\frac{k}{\rho} \tag{89}$$

由于φ为可遗坐标，该问题直接分离变量

$$W=W_\rho(\rho)+\varphi p_\varphi \tag{90}$$

从而

$$J_\varphi=\frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi \mathrm{d}\varphi=p_\varphi \tag{91}$$

$$\begin{aligned}J_\rho&=\frac{1}{2\pi}\oint p_\rho \mathrm{d}\rho=\frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2mE+\frac{2mk}{\rho}-\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}}\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\sqrt{mk}}{2\pi\sqrt{a}}\oint\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\sqrt{a^2e^2-(\rho-a)^2}\qquad(\text{where } a=\frac{k}{-2E},\, e^2=1+\frac{2Ep_\varphi^2}{mk^2})\\&=\sqrt{\frac{mk^2}{-2E}}-p_\varphi\end{aligned} \tag{92}$$

从而

$$E=-\frac{mk^2}{2(J_\rho+J_\varphi)^2} \tag{93}$$

因此，ρ与φ的角速度相同，亦符合Bertrand定理，即轨道封闭。

作用量变量与角变量，作为在几何意义上“最为简单”的一种正则变量，可以被用来进行定理的证明（比如KAM定理）以及微扰计算（比如正则微扰理论）。同时，作用量变量在量子论的早期发挥了巨大的作用，比如玻尔-索末菲量子化条件正是对作用量变量强行量子化，见下一节中的绝热不变量一部分。