欧拉角

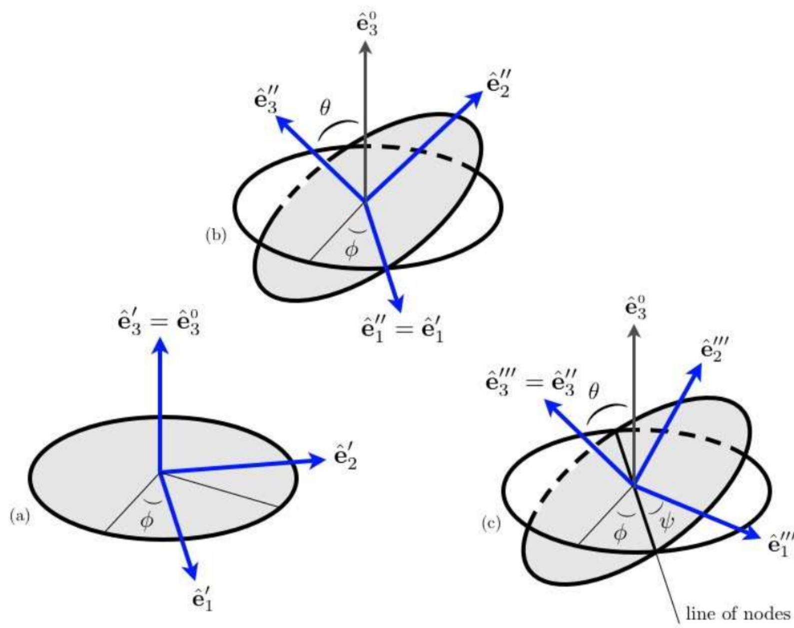

图 1: Euler angles

对欧拉方程的求解可以直接得到本体坐标系下对刚体的描述，但对空间坐标系中的行为却并不那么直接。为了描述刚体在空间坐标系中的行为，欧拉引入了三个角度，称为欧拉角。任何一个空间构型$\mathbf{e}_{1,2,3}$可以由空间坐标系$\mathbf{ijk}$通过旋转得到。描述该旋转一共需要三个自由度，欧拉角就定义为

$$\boxed{U(\psi,\theta,\varphi) = U_Z(\psi)U_X(\theta)U_Z(\varphi)} \tag{1}$$

表示先绕z轴转φ，再绕x轴转θ，再绕z轴转ψ，即

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\-\sin\psi & \cos\psi & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1'\\\mathbf{e}_2'\\\mathbf{e}_3'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\-\sin\psi & \cos\psi & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & \sin\theta\\0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1''\\\mathbf{e}_2''\\\mathbf{e}_3''\end{bmatrix} \tag{2}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\-\sin\psi & \cos\psi & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & \sin\theta\\0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\-\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\\mathbf{j}\\\mathbf{k}\end{bmatrix} \tag{3}$$

其中$(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$为空间坐标系，$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$为本体坐标系。角速度矢量为

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\psi}\mathbf{e}_3'+\dot{\theta}\mathbf{e}_1''+\dot{\varphi}\mathbf{k}=\omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2+\omega_3\mathbf{e}_3 \tag{4}$$

其中$(\mathbf{e}_3',\mathbf{e}_1'',\mathbf{k})$为三次转动的转轴，可分别记为$(\mathbf{e}_\psi,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi)$，满足

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_\varphi&=\sin\theta\sin\psi\hat{\mathbf{e}}_1+\sin\theta\cos\psi\hat{\mathbf{e}}_2+\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_3\\ \hat{\mathbf{e}}_\theta&=\cos\psi\hat{\mathbf{e}}_1-\sin\psi\hat{\mathbf{e}}_2\\ \hat{\mathbf{e}}_\psi&=\hat{\mathbf{e}}_3\end{aligned} \tag{5}$$

代入式4，得

$$\begin{aligned}\omega_1&=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_2&=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_3&=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\end{aligned} \tag{6}$$

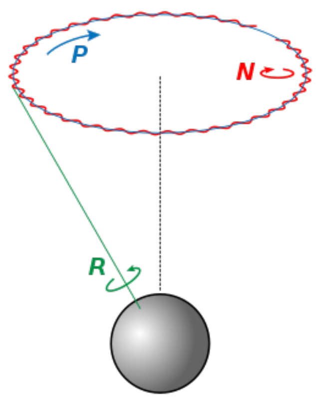

图 2: 进动(precession), 章动(nutation)，自转(rotation)

欧拉角的变化率就给出几种不同的运动：$\dot{\varphi}$-进动，$\dot{\theta}$-章动，$\dot{\psi}$-自转。利用欧拉角，可以写出定点转动的拉格朗日量

$$\begin{aligned}L(\varphi,\theta,\psi)=&\frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}I_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2\\ &+\frac{1}{2}(I_2-I_1)(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi)^2-V(\varphi,\theta,\psi)\end{aligned} \tag{7}$$

- 计算$(\dot{\varphi},\dot{\theta},\dot{\psi})$。当然，也可以将$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$用$(\mathbf{e}_\psi,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi)$表示出来代入式4中，（或直接反解出$\dot{\varphi},\dot{\theta},\dot{\psi}$），得到

$$\dot{\varphi}=\omega_1\sin\psi\csc\theta+\omega_2\cos\psi\csc\theta \tag{8}$$
$$\dot{\theta}=\omega_1\cos\psi-\omega_2\sin\psi \tag{9}$$
$$\dot{\psi}=-\omega_1\sin\psi\cot\theta-\omega_2\cos\psi\cot\theta+\omega_3 \tag{10}$$

- 用欧拉角表示$(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$。可以把$(\mathbf{e}_\psi,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi)$用$\mathbf{ijk}$表示出来代入角速度的表达式$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k}$，即可得到结果。作业。

- 如何证明欧拉角是完备的，即$\forall U, U = U_z(\psi)U_x(\theta)U_z(\varphi)$？
  根据欧拉转动定理，任何转动可以等效于绕着一个轴$\mathbf{n}$转动ψ角度。这个$\mathbf{n}$总可以由$\mathbf{k}$轴经过两次旋转，比如$U_x(\theta)U_z(\varphi)$得到。

- Tait-Bryan角，表示三次旋转绕着不同的轴。其中，$U_xU_yU_z$一般被应用于航天领域。

- 例：绕着非主轴方向匀速转动的杆。力矩可通过拉格朗日乘子得到。

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\omega^2) \tag{11}$$

$$f = \theta - \theta_0 = 0 \tag{12}$$

  拉格朗日方程为

$$I_1\ddot{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = I_1\omega^2\sin\theta\cos\theta + \lambda \tag{13}$$

  得$\lambda = -I_1\omega^2\sin\theta\cos\theta$为约束力，即外力矩。

- 自由杆。

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \sin\theta^2\dot{\varphi}^2) \tag{14}$$

  由于φ可遗，p_φ为守恒量

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta \tag{15}$$

  可得$\dot{\varphi} = p_\varphi/I_1\sin^2\theta$，进而$\dot{\theta} = \dot{\varphi}\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\varphi$，代入能量表达式得

$$E = \frac{1}{2}I_1\left[\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta\right]\frac{p_\varphi^2}{I_1^2\sin^4\theta} \tag{16}$$

  积分得

$$\varphi - \varphi_0 = \int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\alpha\sin^4\theta - \sin^2\theta}} \tag{17}$$

  其中$\alpha = 2EI_1/p_\varphi^2$。设$\cot\theta = x$，积分可完成

$$\cot\theta = \sqrt{\alpha - 1}\sin(\varphi - \varphi_0) \tag{18}$$

  这正是球面上的大圆方程，因此只要将z轴取为大圆的对称轴方向（即角动量方向），则不存在章动。为了看出这是大圆方程，只要写出与对称轴垂直的平面与球面的交线

$$-\sin\theta_0 y + \cos\theta_0 z = -\sin_0\sin\theta\sin(\varphi - \varphi_0) + \cos\theta_0\cos\theta = 0 \tag{19}$$

  即 $\cot\theta = \tan\theta_0\sin(\varphi - \varphi_0)$。

1 自由对称刚体

首先，让我们利用欧拉角重新求解对称的自由刚体问题。

$$L(\varphi,\theta,\psi)=\frac{1}{2}I_1(\dot\varphi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2)+\frac{1}{2}I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2 \tag{20}$$

由于φ和ψ是可遗坐标，它们的广义动量守恒

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)=L_3=I_3\omega_3 \tag{21}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=I_1\sin^2\theta\dot\varphi+I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)\cos\theta=I_1\sin^2\theta\dot\varphi+L_3\cos\theta=L \tag{22}$$

以及θ的运动方程

$$I_1\ddot\theta=\frac{\partial L}{\partial\theta}=I_1\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta-L_3\dot\varphi\sin\theta \tag{23}$$

选取$\mathbf{L}$沿着$\mathbf{k}$方向[1]，则$p_\theta=I_1\dot\theta=\mathbf{L}\cdot\mathbf{e}_\theta=0$，因此运动方程可解出

$$\dot\varphi=\frac{L_3}{I_1\cos\theta} \tag{24}$$

再代入到L_3的表达式，得

$$\dot\psi=\frac{L_3}{I_3}-\dot\varphi\cos\theta=\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)L_3=\frac{I_1-I_3}{I_1}\omega_3 \tag{25}$$

这里得到的进动与自转的角速度与之前通过欧拉动力学方程的到的结果是一致的。

再将$\dot\theta,\dot\varphi,\dot\psi$代入角速度的表达式6，可得

$$\begin{aligned}\omega_1&=\frac{L}{I_1}\sin\theta\sin(-\Omega t+\psi_0)=\frac{L}{I_1}\sin\theta\cos(\Omega t+\psi_0')\\ \omega_2&=\frac{L}{I_1}\sin\theta\cos(-\Omega t+\psi_0)=\frac{L}{I_1}\sin\theta\sin(\Omega t+\psi_0')\\ \omega_3&=\frac{L}{I_1}\cos\theta-\Omega=\omega_3\end{aligned} \tag{26}$$

这也正是前面利用欧拉动力学方程再本体坐标系得到的结果。

2 自由非对称刚体

对于非对称刚体，也可以直接对欧拉角进行求解，利用角动量在本体坐标系的三个分量可以分别表示成

$$L\sin\theta\sin\psi=I_1\omega_1=I_1(\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi) \tag{27}$$

$$L\sin\theta\cos\psi=I_2\omega_2=I_2(\dot\varphi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi) \tag{28}$$

$$L\cos\theta=I_3\omega_3=I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta) \tag{29}$$

接下来还是可以利用动能$T=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2$，将该微分方程组化为单变量$\cos\theta$的微分方程，进而通过Jacobi椭圆函数进行求解。具体可参见（Whittaker,§69）。

[1] 如果$\mathbf{L}$不沿着$\mathbf{k}$呢？就会绕着任意一个给定的轴进动，有没有办法解出来呢？