刚体的运动

刚体一共有6个自由度：3个平动+3个转动。因此，一共有$3N-6$个约束。

- 直接考虑约束。

质点数	1	2	3	4	5	$\cdots$	N
约束数	0	1	3	6	9	$\cdots$	3N-6

- 再进一步约束6个刚体自由度，可以将运动划分为：平动、定轴转动、平面平行运动、定点转动等。

1 转动

平动当然可以用质心的位移(x, y, z)来表示，那么转动如何参数化呢？可以通过固定在刚体上的坐标系（称为本体坐标系）的转动来描写：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中U满足$UU^t = I$，因为坐标系满足正交归一。因此U需要3个参数（9个未知数-6个约束条件）。如果有多次转动，则$U = U_1 U_2 \cdots$仍满足$UU^t = I$。也就是说，多个转动操作等同于一个转动操作。

对于一个给定的转动U，必存在一个转轴$\mathbf{n}$满足

$$U\mathbf{n} = \mathbf{n} \tag{2}$$

图 1:

这被称为**欧拉转动定理**。证明如下：$(U-I)\mathbf{n}=0$若有解，则要求$\det(U-I)=0$。因为

$$\det(U-I)=\det(U-UU^t)=\det(U)\det(I-U^t)=\det(I-U)=(-1)^3\det(U-I) \tag{3}$$

得$\det(U-I)=0$成立。当然，也可以从几何角度来理解欧拉转动定理。

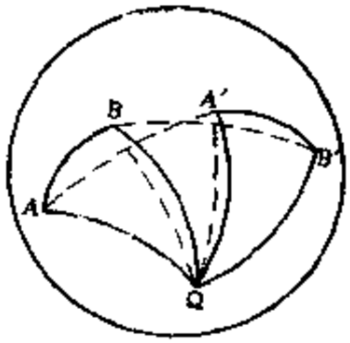

图 2: 在转动下，$A\rightarrow A'$，$B\rightarrow B'$。作AA'和BB'中垂线交于Ω。因为$\angle A\Omega B=\angle A'\Omega B'$，给出$\angle A\Omega A'=\angle B\Omega B'$，即$A$和$B$的转动对应于同一个转动，转轴为$O\Omega$。

根据欧拉转动定理，任意一个有限转动都存在一个转轴。因此可以从几何关系写出转动ϕ之后的位移满足

$$\mathbf{r}'=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}+[\mathbf{r}-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}]\cos\phi+(\mathbf{n}\times\mathbf{r})\sin\phi \tag{4}$$

对于无穷小变换$\phi\rightarrow 0$，有

$$\delta\mathbf{r}=\mathbf{r}'-\mathbf{r}=\delta\phi\mathbf{n}\times\mathbf{r} \tag{5}$$

对时间求导，就得到

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{n}$为角速度矢量。

- 考虑无穷小转动，$U=I+\delta U$，满足$U^tU=I$给出$\delta U^t+\delta U=0$。令

$$\delta U=\delta\phi\begin{bmatrix}0 & -n_3 & n_2\\ n_3 & 0 & -n_1\\ -n_2 & n_1 & 0\end{bmatrix}=\delta\phi G \tag{7}$$

  也可以得到式5。
  注意到$(I+\delta U_1)(I+\delta U_2)=(I+\delta U_2)(I+\delta U_1)$，即$\delta U_1+\delta U_2=\delta U_2+\delta U_1$，即无穷小转动是可以交换的。相比之下，角位移则无法定义为一个矢量。（当然，如果你愿意，你可以定义$\phi\mathbf{n}$为“定轴转动中的角位移矢量”，但其即不能简单的进到位移的表达式当中，也不能推广到非定轴转动的情况，因为$U_1U_2\neq U_2U_1$。）

- *考虑有限转动，可以写为

$$U = (I + \delta U)^N = \left(I + \frac{\phi}{N} G\right)^N = \mathrm{e}^{\phi G} \tag{8}$$

其中

$$G = n_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + n_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + n_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \tag{9}$$

2 一般运动

一般的，如果转动的定点$\mathbf{r}_A$也在运动，我们有

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)} \tag{10}$$

而如果参考系本身又是一个角速度为$\boldsymbol{\Omega}$的非惯性系，则应该附加上参考系角速度所带来的牵连速度

$$\mathbf{v}_P^{ab} - \mathbf{v}_A^{ab} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_P^{ab} - \mathbf{r}_A^{ab}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P^{ab} - \mathbf{r}_A^{ab}) = (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A) \tag{11}$$

代入$\mathbf{v}_A^{ab} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_A$得

$$\mathbf{v}_P^{ab} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A) \tag{12}$$

这也可以理解为P点的速度直接附加上$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_P$。

再来看加速度

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P^{ab} &= \mathbf{a}_A^{ab} + (\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A) + (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times [(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)] \quad (13) \\ &= \mathbf{a}_A^{ab} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)] \\ &+ 2\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)] + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A) + \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)] \\ &= \mathbf{a}_O^{ab} + \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)] + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_P + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_P) \end{aligned} \tag{14}$$

第一项为参考系原点的加速度，第二项为基点A的加速度，后三项来源于非惯性系，第三和第四项则来源于刚体本体坐标系的旋转。

- 基点A的选取不改变$\boldsymbol{\omega}$。考虑另一点B满足$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$，与$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)$相减，得

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_B) \tag{15}$$

- 例：竖直圆环沿着水平圆轨道滚动（梁书§6.1例题）。圆环绕着竖直轴的角速度为$\boldsymbol{\omega}_1$，绕着自身对称轴的角速度为$\boldsymbol{\omega}_2$。求圆盘最高点的速度。可以采用不同的观点来看这个问题：
  (1)静止参考系，基点取在参考系原点。$\mathbf{r}_M = R\mathbf{i} + r\mathbf{k}$，$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{k} - \omega_2 \cos(\omega_1 t)\mathbf{i} - \omega_2 \sin(\omega_1 t)\mathbf{j}$。
  (1')静止参考系，基点取在刚体中心。$\mathbf{r}_A = R\mathbf{i}$。

(2)转动参考系$\mathbf{\Omega} = \omega_1 \mathbf{k}$，原点在轨道中心，基点同原点。$\boldsymbol{\omega} = -\omega_2 \mathbf{i}$，$\mathbf{r}_M = R\mathbf{i} + r\mathbf{k}$。

(2')转动参考系$\mathbf{\Omega} = \omega_1 \mathbf{k}$，原点在轨道中心，基点取在刚体中心。$\mathbf{r}_A = R\mathbf{i}$。

(3)转动参考系$\mathbf{\Omega} = \omega_1 \mathbf{k}$，原点在刚体中心，基点同原点。$\boldsymbol{\omega} = -\omega_2 \mathbf{i}$，$\mathbf{r}_M = r\mathbf{k}$。

(4)将参考系就取为本体坐标系，基点同原点。$\mathbf{\Omega} = \omega_1 \mathbf{k} - \omega_2 \cos(\omega_1 t)\mathbf{i} - \omega_2 \sin(\omega_1 t)\mathbf{j}$，$\boldsymbol{\omega} = 0$，$\mathbf{r}_M = r\mathbf{k}$。