耦合多振子问题

1 耦合多振子问题的求解方法

$$V(q_1,q_2,\cdots,q_s)\approx V(q_1^0,q_2^0,\cdots,q_s^0)+\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0}_{k_{ij}}x_ix_j \tag{1}$$

其中q_i^0表示平衡位置，而$x_i=q_i-q_i^0$表示相对平衡位置的广义坐标的改变量。定义再结合动能项[1] $T=\frac{1}{2}m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$，得到拉格朗日量

$$L=\frac{1}{2}m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j-\frac{1}{2}k_{ij}x_ix_j=\frac{1}{2}\dot{X}^tM\dot{X}-\frac{1}{2}X^tKX \tag{2}$$

其中$k_{ij}=k_{ji}$，$m_{ij}=m_{ji}$，$X=[x_1,x_2,\cdots,x_s]^t$，$M_{ij}=m_{ij}$，$K_{ij}=k_{ij}$。利用拉格朗日方程，可以得到s个运动方程（$i=1,2,\cdots,s$）：

$$m_{ij}\ddot{x}_j+k_{ij}x_j=0\quad\text{or}\quad M\ddot{X}+KX=0 \tag{3}$$

做傅里叶变换（等价于设$x_i=x_{i0}\mathrm{e}^{i\omega t}$或$X=X_0\mathrm{e}^{i\omega t}$），得

$$\boxed{\left(-m_{ij}\omega^2+k_{ij}\right)x_{j0}=0\quad\text{or}\quad(-\omega^2M+K)X_0=0} \tag{4}$$

若ω有解，则

$$\det(-\omega^2M+K)=0 \tag{5}$$

解出$\omega=\omega_k$称为简正频率，而X_0就是当$\omega=\omega_k$时方程$(-\omega_k^2M+K)X_{0k}=0$的解，称为简正坐标，表示简正振动模式。在得到所有的简正频率与简正坐标后，问题的完整解就是

$$x_i=\sum_k\alpha_kX_{0ki}\mathrm{e}^{i\omega_kt}\overset{\mathrm{Re}}{\equiv}\sum_k a_kX_{0ki}\cos(\omega_kt+\varphi_k)\quad\text{or}\quad X(t)=\sum_k\alpha_kX_{0k}\mathrm{e}^{i\omega_kt} \tag{6}$$

- 证明$\omega^2>0$。由式4得

$$\omega^2=\frac{\sum_{ij}x_{i0}^*k_{ij}x_{j0}}{\sum_{ij}x_{i0}^*m_{ij}x_{j0}}=\frac{X_0^\dagger KX_0}{X_0^\dagger MX_0} \tag{7}$$

  由于k和m均对称，可得分子与分母均为实数。进一步，根据势能与动能得正定性质，知$\omega^2>0$。这个结果当然是合理的。如果ω含有虚数，则会由于$\mathrm{e}^{i\omega t}$因子而出现耗散，这将与问题本身的能量守恒相矛盾。

[1] 如果广义坐标变换不含时，则$T_1=T_0=0$

- 例：k-m-K-m-k振子。

$$M=\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}k+K & -K\\ -K & k+K\end{bmatrix}, \tag{8}$$

令$\det(-\omega^2 M+K)=0$得

$$\omega_1^2=\frac{k}{m},\quad \omega_2^2=\frac{k+2K}{m} \tag{9}$$

相应得振动模式为

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad \xi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \tag{10}$$

问题的完整解为

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{i\omega_1 t}+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{i\omega_2 t} \tag{11}$$

其中c_1和c_2为两个待定的复数参数，或

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \tag{12}$$

其中$c_{1,2}$和$\varphi_{1,2}$为4个待定的实数参数，或

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}[c_1\cos(\omega_1 t)+d_1\sin(\omega_1 t)]+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}[c_2\cos(\omega_2 t)+d_2\sin(\omega_2 t)] \tag{13}$$

其中$c_{1,2}$和$d_{1,2}$为4个待定的实数参数。

事实上，利用ξ_1和ξ_2，可以直接将拉格朗日量写成两个独立振动之和

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\xi_1}^2-\frac{1}{2}k\xi_1^2+\frac{1}{2}m\dot{\xi_2}^2-\frac{1}{2}(k+2K)\xi_2^2=L_1+L_2 \tag{14}$$

- 宇称或交换对称性。在上一个例子中，ξ_1和ξ_2在1、2互换下，$\xi_1\to\xi_1$，$\xi_2\to-\xi_2$，我们称其具有置换对称性。等价的，在镜面变换下，$\xi_1\to-\xi_1$，$\xi_2\to\xi_2$，我们称其具有宇称对称性，前者为奇宇称，后者为偶宇称。[2]

  这提示我们，如果我们可以事先知道解的对称性，就可以更简单的得到振动频率。比如对于奇宇称解$[1,1]$，直接代入特征方程4，得

$$(-m\omega^2+k+K)1+(-K)1=0 \tag{15}$$

直接解出$\omega^2=k/m$。而对于偶宇称解$[1,-1]$，代入特征方程得

$$(-m\omega^2+k+K)1+(-K)(-1)=0 \tag{16}$$

直接解出$\omega^2=(k+2K)/m$。当然，我们也可以直接引入广义坐标$\xi_{1,2}$，而写出拉格朗日量14。

[2]这里交换对称变换Z为$[x_1,x_2]\to[x_2,x_1]$，而镜面（宇称）变换P为$[x_1,x_2]\to[-x_2,-x_1]$，因此，$P=-Z$。因为$P^2=Z^2=1$，其（本征）值只能为±1。

- 零模。在k-m-K-m-k振子中，令$k=0$，得到一个$\omega=0$的解，这对应于整体平移。一般的，如果引入的广义坐标的个数多于振动自由度的数目，我们就会得到一些零模解。这些零模解可以通过引入更少的广义坐标或约束得以消除。

  如果零模存在，则相当于在该自由度方向不存在"回复力"，即$V''=0$ 在这个例子中，当$k=0$，我们可以看到

$$K=\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \tag{17}$$

  该矩阵有一个零本征值，对应的模式可以通过$KX_0=0$解出，即$X_0=[1,1]^t$。

- 线性双摆。作业

- m-k-M-k-m振子。

$$M=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad K=\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \tag{18}$$

  代入特征方程，可解得

$$\omega_1^2=\frac{k}{m}, \quad ,\omega_2^2=\frac{(2m+M)k}{mM}, \quad \omega_3^2=0 \tag{19}$$

  对应的振动模式为

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2=\frac{1}{\sqrt{2+\frac{4m^2}{M^2}}}\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

  当然，第三个为零模。

  如果我们注意到该问题具有宇称对称性和平移对称性，就可以直接写出三个模式（两个振动和一个平移）。这正是对称性的威力!

- 双原子分子。6=3平动+2转动+1振动。

- 线性ABA分子。9=3平动+2转动+4振动。其中两个纵向振动直接由前面的m-k-M-k-m振子给出，而剩下的两个横向振动相当于m-k-M-k-m振子问题中的ξ_2解，只不过要将k换成相应的k。[3]

- 如何消除平动与转动？可以利用动量与角动量为零。

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i=0, \qquad \sum_i m_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{r}_i=0 \tag{21}$$

  其中，$\mathbf{R}_i$表示原子位置，$\mathbf{r}_i$表示微振动中的小位移。

[3]对于横向振动，如果将ABA都看成质点且其相互作用仅依赖于其相对距离的话，可以证明$k=0$。但对于实际的分子，原子都是有结构的，因此其相互作用并非仅仅依赖于其质心相对距离，这时可以存在$k>0$。

- 非共线的ABA分子。（朗道§24）（直角三角形和等边三角形可以看成是其特例）消除平动与转动：

$$
\begin{aligned}
& m(x_1+x_3)+M(x_2)=0, \\
& m(y_1+y_3)+M(y_2)=0, \\
& m(z_1+z_3)+M(z_2)=0, \\
& m(x_1\cos\alpha+x_3\cos\alpha+y_1\sin\alpha-y_3\sin\alpha)=0 \\
& m(z_1\cos\alpha+z_3\cos\alpha)=0 \\
& m(z_1\sin\alpha-z_3\sin\alpha)=0
\end{aligned} \tag{22}
$$

9个自由度，这里有6个约束条件，因此剩下三个振动自由度。由三、五、六式，我们就得到$z_1=z_2=z_3=0$。再考虑到宇称对称性，可以设$x_1\pm x_3$，$y_1\pm y_3$为新的坐标。又因为x_1+x_3与y_1-y_3通过第四个约束条件联系在一起，而x_2和y_2也可以通过前两个约束条件由x_1+x_3和y_1+y_3得到。因此，我们可以选取广义坐标

$$
X=x_1+x_3,\quad Y=y_1+y_3,\quad \xi=x_1-x_3 \tag{23}
$$

因为ξ和Y在镜面操作下为偶，而X在镜面操作下为奇，我们就得到X为一个简正坐标，而ξ和Y并无进一步的对称性将其分开，所以需要通过求解特征方程得到简正模式。

$$
L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{x}_3^2+\dot{y}_3^2)+\frac{1}{2}M(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2)^2-\frac{1}{2}k(\delta\ell_{12}^2+\delta\ell_{23}^2)-\frac{1}{2}K\delta\ell_{13}^2 \tag{24}
$$

代入

$$
\delta_{12}=(x_2-x_1)\sin\alpha-(y_2-y_1)\cos\alpha \tag{25}
$$

$$
\delta_{23}=(x_3-x_2)\sin\alpha+(y_3-y_2)\cos\alpha \tag{26}
$$

$$
\delta_{13}=x_3-x_1 \tag{27}
$$

选取基矢为$[X,Y,\xi]$，得到M和K矩阵为

$$
M=\begin{bmatrix} \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{2m}{M}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2}\left(1+\frac{2m}{M}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \tag{28}
$$

$$
K=\begin{bmatrix} \frac{k\sin^2\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{2m}{M}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k\cos^2\alpha}{2}\left(1+\frac{2m}{M}\right)^2 & -\frac{k\sin\alpha\cos\alpha}{2}\left(1+\frac{2m}{M}\right) \\ 0 & -\frac{k\sin\alpha\cos\alpha}{2}\left(1+\frac{2m}{M}\right) & \frac{k\sin^2\alpha}{2}+K \end{bmatrix} \tag{29}
$$

确实，X自己为一个简正坐标，对应的频率为

$$
\sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m\sin^2\alpha}{M}\right)} \tag{30}
$$

而Y与ξ需要重新组合成简正坐标。

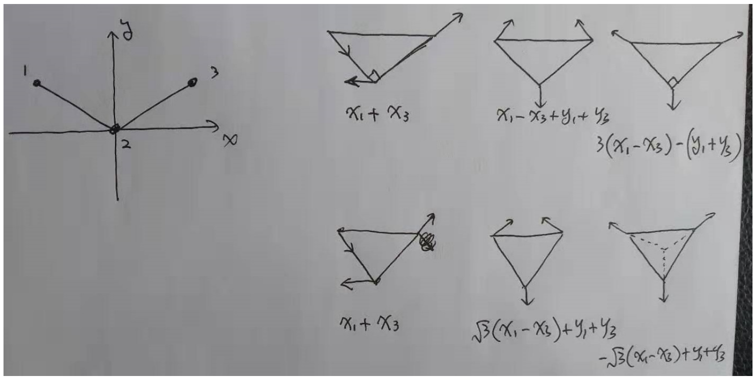

图 1: 三角形分子的振动模式。

考虑两个特例。（1）等腰三角形：$\alpha = \pi/4$，$K = k$，$m = M$。可以解得三个简正频率为

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}, \quad \frac{k}{m}, \quad \frac{3k}{m} \tag{31}$$

对应的简正坐标为

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{32}$$

（2）等边三角形：$\alpha = \pi/6$，$K = k$，$m = M$。解得

$$\omega^2 = \frac{3k}{2m}, \quad \frac{3k}{2m}, \quad \frac{3k}{m} \tag{33}$$

对应的简正坐标为

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{34}$$

前两个模式简并，这来源于此时的一个额外的对称性：120度旋转对称性。比如$X_1 + \sqrt{3}X_2$得到的模式刚好就是X_1旋转120度得到的结果。

2 本征值（对角化）问题

特征方程

$$(-\omega^2 M + K)X_0 = 0 \tag{35}$$

等价于

$$M^{-1}KX_0 = \omega^2 X_0 \tag{36}$$

定义$U=[X_{01},X_{02},\cdots]$，$\Omega^2=\mathrm{diag}[\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots]$，则

$$MU\Omega^2=KU \tag{37}$$

进而

$$U^\dagger MU\Omega^2=\Omega^2U^\dagger MU \tag{38}$$

给出

$$(\omega_i^2-\omega_j^2)(U^\dagger MU)_{ij}=0 \tag{39}$$

当$\omega_i\neq\omega_j$，$(U^\dagger MU)_{ij}=0$；当$\omega_i=\omega_j$，可以通过施密特正交化将$U^\dagger MU$化为对角型。（注意：这里的正交化是要求$U^\dagger MU$对角，而非$U^\dagger U$对角！）因此，

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2}\dot{X}^tM\dot{X}-\frac{1}{2}X^tKX &(40)\\&=\frac{1}{2}\dot{X}^tU^{-\dagger}U^\dagger MUU^{-1}\dot{X}-\frac{1}{2}X^tU^{-\dagger}U^\dagger KUU^{-1}X &(41)\\&=\frac{1}{2}\dot{Y}^\dagger(U^\dagger MU)\dot{Y}-\frac{1}{2}Y^\dagger(U^\dagger KU)Y=\sum_k L_k &(42)\end{aligned}$$

其中，$Y=U^{-1}X$就表示简正模式。

而特征方程变为

$$(-\omega^2M+K)UU^{-1}X_0=[-\omega^2(U^\dagger MU)+(U^\dagger KU)]Y_0=0 \tag{43}$$

由于$U^\dagger MU$和$U^\dagger KU$均已对角，则

$$[-\omega^2+(\Omega^2)_{kk}]Y_{0k}=0 \tag{44}$$

解得对于简正模式Y_{0k}，振动频率应该为$\omega^2=(\Omega^2)_{kk}=\omega_k^2$。

- 三点链：一个施密特正交化的例子。

$$M=\begin{bmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&m\end{bmatrix},\qquad K=\begin{bmatrix}2k&-k&-k\\-k&2k&-k\\-k&-k&2k\end{bmatrix} \tag{45}$$

令$\det(-\omega^2M+K)=0$，得

$$\omega^2(-\omega^2m+3k)^2=0 \tag{46}$$

给出

$$\omega^2=0,\quad\frac{3k}{m},\quad\frac{3k}{m} \tag{47}$$

这里出现了简并频率$\omega^2=3k/m$，代入特征方程得

$$\begin{bmatrix}-k&-k&-k\\-k&-k&-k\\-k&-k&-k\end{bmatrix}X_0=0 \tag{48}$$

可以先随便选取一个解，比如$X_1 = [1, -1, 0]^t$。再寻求第二个与X_1不同的解，比如$X_2 = [1, 0, -1]^t$。由于$X_1^\dagger M X_2 \neq 0$，需要通过施密特正交化得到与X_1正交的解：

$$X_2 \to X_2 - X_1 \frac{X_1^\dagger M X_2}{X_1^\dagger M X_1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

3 离散对称性

如果$PMP^{-1} = M$且$PKP^{-1} = K$，我们有

$$0 = (-\omega^2 M + K)X_0 = P(-\omega^2 M + K)P^{-1}PX_0 = (-\omega^2 M + K)PX_0 \tag{50}$$

即PX_0也是简正模式。如果该ω模式无简并，PX_0一定还是X_0（可能差一个系数），即X_0是P的本征向量。如果ω有简并，PX_0也一定还属于该子空间。所以，我们可以用P的本征向量来表示该简正模式，属于P的不同本征值的X_0是不会混合在一起的。这可以看成是离散情况下对称性的一种应用。

- 宇称

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

其本征值与本征向量为

$$1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad -1 : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

- ABA分子。如果考虑到

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{53}$$

其本征值与本征向量为

$$1 : \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad 1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad -1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{54}$$

由于前两个本征向量具有相同的P本征值，因此可以线性组合。实际上，它们刚好组合成一个平移和一个振动。而最后一个本征向量并无简并，因此可以预期它就是ABA分子的一个解。

- 周期一维链。平移对称性，$P_{i,i+1} = 1$。以L=4为例

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

由于$P^L=1$，其本征值只能为$\mathrm{e}^{i(2\pi/L)j}$，其中$j=0,1,\cdots,L-1$。相应的本征向量可以求出

$$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{L}j}:\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{L}0j}\\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{L}1j}\\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{L}2j}\\ \vdots\\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{L}(L-1)j}\end{bmatrix} \tag{56}$$

以L=4为例：

$$1:\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\qquad i:\begin{bmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{bmatrix},\qquad -1:\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\qquad -i:\begin{bmatrix}1\\-i\\-1\\i\end{bmatrix} \tag{57}$$

现在，让我们应用该对称性来求解周期一维链。拉格朗日量为

$$L=\sum_j[\frac{1}{2}m\dot{x}_j^2-\frac{1}{2}k(x_j-x_{j+1})^2]=\sum_j[\frac{1}{2}m\dot{x}_j^2-kx_j^2-\frac{1}{2}kx_jx_{j+1}-\frac{1}{2}kx_jx_{j-1}] \tag{58}$$

将$x_j=\mathrm{e}^{i(2\pi/L)\ell j}$代入特征方程得

$$(-\omega^2m+2k)\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{L}\ell j}-k\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{L}\ell(j+1)}-k\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{L}\ell(j-1)}=0 \tag{59}$$

解得

$$\omega_\ell^2=\left(2-2\cos\frac{2\pi\ell}{L}\right)\frac{k}{m}=\frac{4k}{m}\sin^2\frac{2\pi\ell}{L} \tag{60}$$

当$\ell=0$，$\omega_\ell=0$，即对应于零模。

- 正方形分子。自由度总共12个，3个平动，3个转动，剩下6个振动。约束条件

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0 \tag{61}$$
$$y_1+y_2+y_3+y_4=0 \tag{62}$$
$$z_1+z_2+z_3+z_4=0 \tag{63}$$
$$y_1-x_2-y_3+x_4=0 \tag{64}$$
$$z_1-z_3=0 \tag{65}$$
$$z_2-z_4=0 \tag{66}$$

尝试选取广义坐标：$x_1+x_3,y_1+y_3,x_1-x_3,y_1-y_3,y_2-y_4,z_1$。（$x_2+x_4,y_2+y_4,x_2-x_4,z_2,z_3,z_4$可以由约束条件得到。）写出这些坐标在对称变换下的本征值，如下表格所示

从对称性分析可以看出，我们发现前2个模式总是混合在一起（无法同时满足C_4和$C_{2y,2x}$的对角化），因此构成一个二维的简并振动模式。第3个和第5个可以组合成$(x_1-x_3)\pm(y_2-y_4)$，因此分别为一个简正振动模式，第4和第6个直接作为简正模式。

	C_4	C_2	C_{2y}	C_{2x}
x_1+x_3	$-(y_1+y_3)$	$-$	$-$	$+$
y_1+y_3	(x_1+x_3)	$-$	$+$	$-$
x_1-x_3	(y_2-y_4)	$+$	$+$	$+$
y_1-y_3	$-$	$+$	$-$	$-$
y_2-y_4	(x_1-x_3)	$+$	$+$	$+$
z_1	$-$	$+$	$-$	$-$

表 1: C_4表示绕z轴转90度，C_2表示绕z轴转180度，C_{2y}和C_{2x}表示绕y和x轴转180度。

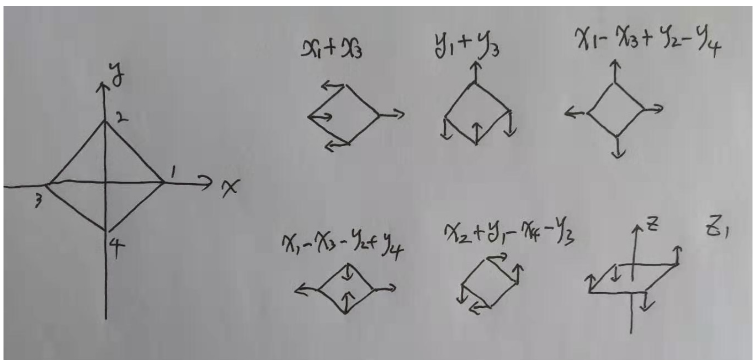

图 2: 正方形分子的6个振动模式。前两个为简并模式。

4 受迫阻尼耦合振子问题

现在，让我们把T_1和T_0找回来，还可以计入势能中的速度依赖项，最终

$$L=\frac{1}{2}\dot{X}^tM\dot{X}+\frac{1}{2}\dot{X}^t\Gamma X+\frac{1}{2}X^tKX \tag{67}$$

运动方程为

$$M\ddot{X}+\Gamma\dot{X}+KX=0 \tag{68}$$

计入阻尼函数$F=\frac{1}{2}\dot{X}^t\Gamma\dot{X}$，并利用推广的拉格朗日方程，也可以得到上述运动方程。对X做傅里叶变换，得

$$(-\omega^2M+i\omega\Gamma+K)X_0=0 \tag{69}$$

同样可以利用行列式为零来求解。但此时得到的ω可以包含虚数，对应于耗散的存在。

另外，我们还可以计入受迫外力项，将运动方程推广为更一般的形式

$$M\ddot{X}+\Gamma\dot{X}+KX=F \tag{70}$$

从而受迫振动解满足

$$(-\omega^2M+i\omega\Gamma+K)X_0=F_0 \tag{71}$$

可得

$$X_0 = (-\omega^2 M + i\omega\Gamma + K)^{-1} F_0 \tag{72}$$

也可以利用Cramer法则将其简化为

$$X_{0i} = \frac{\det D_i}{\det D} \tag{73}$$

其中，$D = -\omega^2 M + i\omega\Gamma + K$，$D_i$为将$D$的第$i$列替换为$F_0$。