正则微扰

很多力学系统不可积，因此需要在可积系统附近做微扰。哈密顿-雅可比理论刚好提供了一种处理微扰的理论方案，即寻求一种正则变换，使得

$$H_0 + \varepsilon H_1 + \frac{\partial S}{\partial t} = \tilde{H} \tag{1}$$

1 $S = S_0, \tilde{H} = \varepsilon H_1$

对于未微扰情况，

$$H_0 + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

即

$$(q, p) \xrightarrow{S_0} (Q, P) \tag{3}$$

如果考虑微扰项之后，仍然取$S = S_0$，则

$$\tilde{H} = \varepsilon H_1(Q, P, t) \tag{4}$$

从而有哈密顿正则方程

$$\dot{Q} = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial Q} \tag{5}$$

作为近似，可以将右边直接代为零级量，得到一级近似，接下来可以利用迭代的方法得到高阶结果，即

$$\dot{Q}^{(n)} = \varepsilon \left.\frac{\partial H_1^{(n)}}{\partial P}\right|_{(n-1)}, \qquad \dot{P}^{(n)} = -\,\varepsilon \left.\frac{\partial H_1^{(n)}}{\partial Q}\right|_{(n-1)} \tag{6}$$

- 例：谐振子，将$\frac{1}{2}kx^2$作为微扰。
  不考虑微扰，为自由粒子，取

$$S(x, P, t) = xP - \frac{P^2}{2m}t, \qquad X = x - \frac{P}{m}t, \qquad p = P \tag{7}$$

  利用X, P可以将εH_1写为

$$\varepsilon H_1 = \frac{1}{2}k\left(X + \frac{P}{m}t\right)^2 \tag{8}$$

严格的正则方程为

$$\dot{X}=\frac{\partial\varepsilon H_1}{\partial P}=\frac{kt}{m}\left(X+\frac{P}{m}t\right),\qquad \dot{P}=-\frac{\partial\varepsilon H_1}{\partial X}=-k\left(X+\frac{P}{m}t\right) \tag{9}$$

严格积出，就给出严格解！这里，我们按照微扰论进行计算，取初始条件x_0,p_0，得

$$\begin{aligned}
X_1&=\frac{kx_0}{2m}t^2+\frac{kp_0}{3m^2}t^3+x_0=x_0\left(1+\frac{\omega^2t^2}{2}\right)+\frac{p_0}{\sqrt{mk}}\frac{\omega^3t^3}{3}\\
P_1&=-kx_0t-\frac{kp_0}{2m}t^2+p_0=p_0\left(1-\frac{\omega^2t^2}{2}\right)-\sqrt{mk}x_0\omega t\\
X_2&=x_0\left(1-\frac{\omega^2t^2}{2}-\frac{\omega^4t^4}{8}\right)+\frac{p_0}{\sqrt{mk}}\left(\frac{\omega^3t^3}{3}-\frac{\omega^5t^5}{30}\right)\\
P_2&=p_0\left(1-\frac{\omega^2t^2}{2}+\frac{\omega^4t^4}{24}\right)-\sqrt{mk}x_0\left(\omega t-\frac{\omega^3t^3}{6}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

再带回到原始物理量，得

$$\begin{aligned}
p&=P_2=p_0\left(1-\frac{\omega^2t^2}{2!}+\frac{\omega^4t^4}{4!}\right)-\sqrt{mk}x_0\left(\omega t-\frac{\omega^3t^3}{3!}\right)\\
x&=X_2+\frac{P_2}{m}t=x_0\left(1-\frac{\omega^2t^2}{2!}+\frac{\omega^4t^4}{4!}\right)+\frac{p_0}{\sqrt{mk}}\left(\omega t-\frac{\omega^3t^3}{3!}+\frac{\omega^5t^5}{5!}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

已经可以看到，随着阶数得增长，结果将趋向于严格解

$$\begin{aligned}
p&=p_0\cos\omega t-\sqrt{mk}x_0\sin\omega t\\
x&=x_0\cos\omega t+\frac{p_0}{\sqrt{mk}}\sin\omega t
\end{aligned} \tag{12}$$

- 例：非线性振子。

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{4}\varepsilon bx^4 \tag{13}$$

首先，找到正则变换，解出零级解。选取$\alpha=E_0$作为积分常数，其相应的正则变量为$\beta=-t_0$，得

$$x=\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\sin\omega_0(t+\beta) \tag{14}$$

从而可以用α,β表示出微扰项

$$\varepsilon H_1=\frac{\varepsilon b\alpha^2}{k^2}\sin^4[\omega_0(t+\beta)] \tag{15}$$

其正则微扰方程给出

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_1&=\left.\frac{\partial\varepsilon H_1}{\partial\beta}\right|_{\alpha=\alpha_0=E_0,\beta=\beta_0=-t_0}\\
\dot{\beta}_1&=-\left.\frac{\partial\varepsilon H_1}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0=E_0,\beta=\beta_0=-t_0}
\end{aligned} \tag{16}$$

对于微振动，E_0很小，则只保留到α_0的最低阶（一阶），得

$$\dot{\alpha}_1 = 0 \tag{17}$$

$$\dot{\beta}_1 = \frac{2\varepsilon b E_0}{k^2}\sin^4[\omega_0(t-t_0)] \tag{18}$$

积分得

$$\beta_1 = \frac{3\varepsilon b E_0}{4k^2}t - t_0 + \text{oscillating terms} \tag{19}$$

随着时间得增长，忽略振动项，得

$$x = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}\sin\left[\omega_0 t\left(1+\frac{3\varepsilon b E_0}{4k^2}\right) - \omega_0 t_0\right] \tag{20}$$

即得到基频的改变。

2 $\tilde{H} = \tilde{H}(J)$

在前面的微扰方案中，我们保持$S = S_0$不变，因此得到的新的正则变量(Q,P)在$\tilde{H}$的作用下不再保持为常数。实际上，另外一种更为有效的微扰方案是寻求一种新的正则变换，使得$\tilde{H} = 0$。当然，对于H不含时的情况，我们采用W作为母函数，则寻求一组新的正则变量(Q,P)，使得$\tilde{H} = \tilde{H}(P)$。显然，P最简单的选择就是作用量变量。

对于未微扰系统，假设已经找到一组作用量变量与角变量(J_0,ϕ_0)。现在，我们寻求一组新的变量(J,ϕ)：

$$(\phi_0, J_0) \xrightarrow{W(\phi_0,J,\varepsilon)} (\phi, J) \tag{21}$$

使得

$$H(\phi_0, \frac{\partial W}{\partial \phi_0}, \varepsilon) = H_0(J_0) + \varepsilon H_1(\phi_0, J_0) = E(J,\varepsilon) \tag{22}$$

对E,W展开

$$W(\phi_0, J, \varepsilon) = \phi_0 J + \varepsilon W_1(\phi_0, J) + \varepsilon^2 W_2(\phi_0, J) + \cdots \tag{23}$$

$$E(J,\varepsilon) = E_0(J) + \varepsilon E_1(J) + \varepsilon^2 E_2(J) + \cdots \tag{24}$$

注意到

$$J_0 = \frac{\partial W}{\partial \phi_0} = J + \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial \phi_0} + \varepsilon^2\frac{\partial W_2}{\partial \phi_0} + \cdots \tag{25}$$

将上述关系代入到式22中，得

$$\begin{aligned}
E_0(J) &= H_0(J) \\
E_1(J) &= H_1(\phi_0, J) + \frac{\partial H_0}{\partial J}\frac{\partial W_1}{\partial \phi_0} \\
E_2(J) &= \frac{\partial H_1}{\partial J}\frac{\partial W_1}{\partial \phi_0} + \frac{\partial H_0}{\partial J}\frac{\partial W_2}{\partial \phi_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial W_1}{\partial \phi_0}\frac{\partial^2 H_0}{\partial J \partial J}\frac{\partial W_1}{\partial \phi_0} \\
&\ \ \vdots
\end{aligned} \tag{26}$$

接下来，由于ϕ_0为角变量，以2π为周期，可以对其作傅里叶变换

$$
\begin{aligned}
W_k(\boldsymbol{\phi_0},\mathbf{J}) &= \sum_{\mathbf{m}} W_{k\mathbf{m}}(\mathbf{J})\mathrm{e}^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\phi_0}} \\
H_1(\boldsymbol{\phi_0},\mathbf{J}) &= \sum_{\mathbf{m}} H_{1\mathbf{m}}(\mathbf{J})\mathrm{e}^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\phi_0}}
\end{aligned} \tag{27}
$$

其中的系数$W_{k\mathbf{m}}$即为待定的参数，代入式26可得

$$
H_{1\mathbf{0}}(\mathbf{J}) = E_1(\mathbf{J}) \tag{28}
$$

$$
H_{1\mathbf{m}}(\mathbf{J}) = -i\mathbf{m}\cdot\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}}W_{1\mathbf{m}}(\mathbf{J}) = -i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}W_{1\mathbf{m}}(\mathbf{J}) \qquad (\mathbf{m}\neq\mathbf{0}) \tag{29}
$$

$$
\vdots
$$

- 例：一维非线性谐振子。

$$
H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\varepsilon bx^4 \tag{30}
$$

首先，找到未微扰系统的作用量变量：

$$
J_0 = \oint p\mathrm{d}x = \frac{E_0}{\omega} \tag{31}
$$

角变量可以通过母函数找到，或者也可以通过辛条件

$$
\frac{\partial p}{\partial J_0} = \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \tag{32}
$$

积分得到

$$
\phi_0 = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2J_0\omega_0}}x\right) \tag{33}
$$

这样，就可以将H_1表示成ϕ_0, J_0的函数

$$
H_1(\phi_0, J_0) = \frac{bJ_0^2\omega_0^2}{k^2}\sin^4\phi_0 \tag{34}
$$

从而

$$
E_1 = \frac{1}{2\pi}\int H_1(\phi_0, J)\mathrm{d}\phi_0 = \frac{3bJ^2\omega_0^2}{8k^2} \tag{35}
$$

这样，我们就得到近似到一阶，

$$
E = E_0 + \varepsilon E_1 = J\omega_0 + \frac{3\varepsilon bJ^2\omega_0^2}{8k^2} \tag{36}
$$

其角频率为

$$
\omega = \frac{\partial E}{\partial J} = \omega_0 + \frac{3\varepsilon bJ\omega_0^2}{4k^2} \approx \omega_0\left(1+\frac{3\varepsilon bE_0}{4k^2}\right) \tag{37}
$$

- 对于自由度多于1的情况，如果$\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}=0$，则微扰失效！这被称为“小分母问题”，正是KAM定理所解决的问题。

3 绝热不变量

假定系统的哈密顿量依赖于某个缓变参数$\lambda(t)$，则系统的运动积分（比如能量）会随着时间缓变。一个有趣的结果是，存在一种特殊的运动积分，其随着时间“几乎不变”，称为绝热不变量。比如一维谐振子，如果ω_0随着时间缓变，那么能量E也会随着时间改变，但$E(t)/\omega_0(t)$，即作用量变量J，随着时间“几乎不变”。事实上，可以证明作用量变量是绝热不变量。

由于$\lambda(t)$随时间缓变，则可以在每个时间段内将其看作常数，因此可以找到每个时间段内的作用量变量与角变量。

$$\begin{aligned} t=0: &\quad \lambda_0, \quad (\phi_0, J_0) \\ t: &\quad \lambda, \quad\ (\phi, J) \end{aligned} \tag{38}$$

t时刻和$t=0$时刻可以通过正则变换联系起来:

$$\mathrm{d}W(\phi, J_0, \lambda) = J\mathrm{d}\phi + \phi_0 \mathrm{d}J_0 \tag{39}$$

进而可以得到J的时间变化率

$$\dot{J} = \frac{\partial J}{\partial \lambda}\dot{\lambda} = \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial \phi} \tag{40}$$

对ϕ做傅里叶变换

$$\dot{J} = \sum_m im \frac{\partial W_m(J_0, \lambda)}{\partial \lambda} \mathrm{e}^{im\phi} \dot{\lambda} \tag{41}$$

在一段时间段内$\phi = \frac{\partial E}{\partial J} = \omega t$，代入上式积分得

$$J = \sum_m \int \underbrace{\frac{\partial W_m(J_0, \lambda)}{\partial \lambda}\dot{\lambda}}_{f_m(t)} \mathrm{e}^{im\omega t} \mathrm{d}t \tag{42}$$

接下来的讨论则比较tricky。在Goldstein书与梁书中，都是对一个周期内取平均，给出$\left\langle \dot{J} \right\rangle = 0$。因此$J$是一个近乎不变的量。

只是由于该不变性，在量子论发展早期，玻尔和索墨菲提出直接将绝热不变量量子化。

- 绝热不变量的近似程度（朗道§51）。如果$f_m(t)$在复平面上具有奇点，设其虚部为τ_m，将时间积分上下限取为$\pm\infty$，得

  $$\Delta J = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{J} \mathrm{d}t \sim \sum_m \mathrm{e}^{-|m|\omega \tau_m} \tag{43}$$

  由于τ表示$\lambda(t)$演化的特征时间，而T为给定λ时的振动周期，因此$\tau \gg T$是一个合理的假设，进而J的变化随着演化变慢而指数减小。

- 例：谐振子。随着ω缓慢变化，相轨道面积$\propto J = E/\omega$不变。作为比较，E会随着ω而改变。

4 哈内角

如果关注ϕ的变化，则有

$$\dot{\phi} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{\lambda} + \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial J} + \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \tag{44}$$

第一项为动力学项。第二项由参数的变化给出，表示一种几何效应。考虑到$\lambda(t)$缓变，得

$$\Omega = \int \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right\rangle \mathrm{d}\lambda \tag{45}$$

这里平均表示对“快变量”ϕ求平均。如果参数空间为一维，则当λ经过一个周期，$\Omega = 0$。但对于高维的参数空间

$$\Omega = \oint \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right\rangle \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \iint \nabla \times \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right\rangle \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{46}$$

可以非零，称为哈内角。

- 例：傅科摆。随着地球转一圈，傅科摆额外转过得角度称为哈内角。线性近似下，傅科摆有两个自由度，可以取为极坐标的两个分量。地球自转一圈，ϕ所转过的角度，记为哈内角。在北极点，这个效果最为明显，即2π。