デジタルフィルタ

（バターワースタイプフィルタ）

1. 計算方法

2. 設計例

3. デジタルフィルタに関連した関数

1. 計算方法

無限インパルス応答を持つデジタル IIR(Infinite Impulse Response)フィルタの設計について説明する。

この種のフィルタの設計は、古くから用いられているアナログフィルタの設計方法を利用できるという利点がある。従って、本質的なフィルタ特性の設計においては、アナログフィルタの設計理論を完全に利用することができる。それ故、このアナログフィルタのデジタル化のみを問題の中心として捕えることができる。ここでは、まず、アナログフィルタの設計、特にリップルのない最大平坦特性（バターワース又はワグナー特性）を有するアナログフィルタの設計法について述べ、次に中心的課題であるアナログフィルタのデジタル化について述べる。

具体的には、まず、与えられたカットオフ周波数と減衰率を満たす基本アナログバターワースフィルタの設計法について述べる。

次に、このアナログフィルタを忠実にデジタルフィルタに変換する方法を述べ、さらに、この変換によって得られたデジタルフィルタを任意の周波数に対して摘要可能なフィルタに変換するいわゆる周波数変換について述べる。

以下に、順にこの方法について詳しく述べる。

サンプリング　適用

1-1) 基本ローパスフィルタの設計理論

アナログバターワースフィルタの振幅自乗特性$|H_c(j\omega)|^2$は次式で与えられる。

$$|H_c(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} \tag{1}$$

ここで、ω_cはカットオフ周波数である。

設計条件より、減衰率を A［dB/Oct.］、平坦条件を B［%］と与えられたとする。減衰率の定義より、通過域の端をω_p［rad/s］とすると、阻止域の端ω_s［rad/s］は

$$\omega_s = 2\omega_p \qquad A = 20\log_{10}\frac{\delta_1}{\delta_2} \tag{2}$$

で表される。

図１のように、δ_1、δ_2を定義すると、

$$\delta_1 = \frac{B}{100}, \quad \delta_2 = 10^{-\frac{A}{20}+\log_{10}\delta_1} \tag{3}$$

で与えられる。

(1)式に代入して、

$$\delta_1^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N}} \tag{4}$$

$$\delta_2^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}} \tag{5}$$

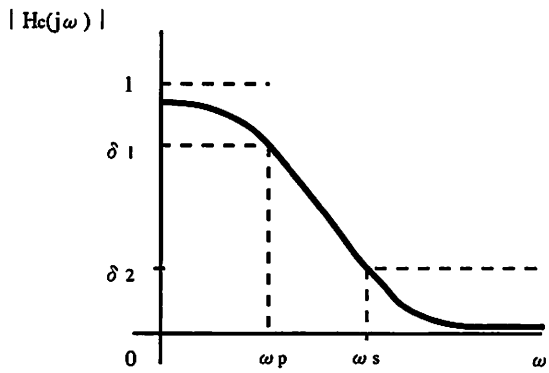

図１　周波数特性

となる。

(3)、(4)、(5)式より、Nについて解くと、

$$N = \frac{\log\left[\left(\frac{1}{\delta_1{}^2}-1\right)\Big/\left(\frac{1}{\delta_2{}^2}-1\right)\right]}{2\log\frac{\omega_p}{\omega_s}} \tag{6}$$

となる。

N は整数でなければならないので、(6)式右辺より大きい最小の整数を N に選ぶならば、上記減衰条件を満足する。また、N は偶数でも奇数でも理論的には可能であるが、以下においては紙面の都合上、N を偶数として議論を進める。従って、もし、N が奇数ならば、更に 1 を加える。

また、(4)式より、カットオフ周波数ω_cは、

$$\omega_c = 10^{\log\omega_p - \frac{1}{2N}\log\left(\left(\frac{1}{\delta_1}\right)^2 - 1\right)} \tag{7}$$

と求められる。

(1)式において、$\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c} = \mathrm{s}$ とすると、

$$\left|H_c(\omega_c s)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(-s^2\right)^N} \tag{8}$$

と表される。

(8)の分母は、$1+\left(-s^2\right)^N = 0$ の解を用いて、

$$1+\left(-s^2\right)^N = \prod_{k=0}^{N-1}\left[j\exp\left(j\pi\frac{2k+1}{2N}\right)-s\right]\left[j\exp\left(j\pi\frac{2k+1}{2N}\right)+s\right] \tag{9}$$

と因数分解できる。

(9)式の零点の中から左半面にあるものを集めて g(s)とすると、この g(s)は次式で表わされる。

$$g(s) = \prod_{k=1}^{\frac{N}{2}}\left(s^2+2a_k s+1\right) \qquad \left(a_k = \sin\frac{2k-1}{2N}\pi, k=1,2,\cdots,\frac{N}{2}\right) \tag{10}$$

(10)式を用いて、伝達関数$H_c(j\omega)$は

$$H_c(\omega_c s) = \frac{1}{g(s)} = \prod_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{1}{s^2+2a_k s+1} \tag{11}$$

と表される。

更に、$s \to \dfrac{s}{\omega_c}, a_k\omega_c \to a_k$ とおくと、

$$H_c(s) = \prod_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{\omega_c{}^2}{s^2+2a_k s+\omega_c{}^2} \qquad \left(a_k = \omega_c\sin\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \tag{12}$$

となり、アナログフィルタの伝達関数が求まる。

1-2)アナログフィルタのデジタルフィルタへの変換

アナログフィルタの減衰特性を減衰量を低下することなくデジタルフィルタで実現するためには、重複歪が生じないようにする必要がある。そのためには、アナログフィルタのｓ平面の全虚軸をｚ平面の原点を中心とする全単位円上に、ｓ平面の左半分全てをｚ平面の原点を中心とする単位円内への写像するｓとｚの変換をする双一次変換を行えばよい。

そのために、

$$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \tag{13}$$

と置き換える。ここでTはサンプリング周期である。

(13)式をｚについて解くと、

$$z=\frac{\frac{2}{T}+s}{\frac{2}{T}-s} \tag{14}$$

を得る。

$s=\sigma+j\omega$と置き、(14)式に代入すると、

$$z=\frac{\frac{2}{T}+\sigma+j\omega}{\frac{2}{T}-\sigma-j\omega} \tag{15}$$

と表わされる。

$\sigma<0$の時$|z|<1$となりｓ平面の左半面はｚ平面の単位円内に写像され、$\sigma=0$の時$|z|=1$となりｓ平面の虚軸はｚ平面の単位円上に写像されるのでエイリアジングは生じないことが分かる。

$\sigma=0$の時、$z=e^{j\Omega}$を(13)式に代入すると、

$$s=\frac{2j}{T}\tan\frac{\Omega}{2} \tag{16}$$

となり、$\omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2}$を得る。これをΩについて解くと、

$$\Omega=2\arctan\frac{\omega T}{2} \tag{17}$$

施

を得る。

(12)式をデジタルに変換するために、(13)から(17)式において$T=1$とした時のｚをＺとおいた(13)式 を用い、双一次変換をほどこすと、

$$H(Z)=\prod_{k=1}^{\frac{N}{2}}A_k\frac{1+a_1^kZ^{-1}+a_2^kZ^{-2}+a_3^kZ^{-3}+a_4^kZ^{-4}}{1+b_1^kZ^{-1}+b_2^kZ^{-2}+b_3^kZ^{-3}+b_4^kZ^{-4}} \tag{18}$$

$$A_k=\frac{\omega_c^{\ 2}}{4B_k},B_k=1+a_k+\frac{\omega_c^{\ 2}}{4}$$

$$a_1^k=2,a_2^k=1,a_3^k=0,a_4^k=0$$

$$b_1^k = \frac{2\left(\frac{\omega_c^2}{4} - 1\right)}{B_k}, b_2^k = \frac{1 - a_k + \frac{\omega_c^2}{4}}{B_k}, b_3^k = 0, b_4^k = 0$$

となる。

従って、基本となるデジタルローパスフィルタの伝達関数は(18)式で表わされる。

1-3) Lowpass - Lowpass 変換

カットオフ周波数ω_cの基本ローパスフィルタを、1次オールパス関数を用いて希望のカットオフ周波数のローパスフィルタに変換することを Lowpass-Lowpass 変換という。

希望のフィルタのアナログカットオフ周波数をf_c、サンプリング周波数をf_sとし、f_cをデジタル周波数Ω_pに変換すると、(17)式より、

$$\Omega_p = 2\arctan\left(\frac{\pi f_c}{f_s}\right) \tag{19}$$

と表される。

また、基本フィルタのアナログカットオフ周波数ω_cをデジタル周波数ϑ_pに変換すると、(17)式より、

$$\vartheta_p = 2\arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \tag{20}$$

と表される。

(18)式の基本となるデジタルローパスフィルタの伝達関数におけるZ^{-1}を1次オールパス関数

$$Z^{-1} = g\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \tag{21}$$

を用いて置き換える。

αはϑ_pをΩ_pに写像するという条件

$$e^{-j\vartheta_p} = \frac{e^{-j\Omega_p} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\Omega_p}} \tag{22}$$

よりαについて解くと、

$$\alpha = \frac{\sin\frac{\vartheta_p - \Omega_p}{2}}{\sin\frac{\vartheta_p + \Omega_p}{2}} \tag{23}$$

と求まる。

従って、このαを用い、(21)式で表わされるZ^{-1} を (18)式に代入すれば$H(Z)$の係数は、

$$\begin{aligned} &A_k \to \frac{(1-\alpha)^2}{C} A_k \\ &b_1^k \to \frac{\left(1+\alpha^2\right)b_1^k - 2\alpha\left(1 + b_2^k\right)}{C}, b_2^k \to \frac{\alpha^2 - b_1^k\alpha + b_2^k}{C} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\left(C = 1 - b_1^k\alpha + b_2^k\alpha^2\right)$$

と変換でき、希望のデジタルローパスフィルタの伝達関数が求まる。

1-4) Lowpass - Highpass 変換

カットオフ周波数ω_cの基本ローパスフィルタを希望のカットオフ周波数のハイパスフィルタに変換することを Lowpass-Highpass 変換という。

まず、与えられたの仕様をカットオフ周波数$\left(\pi - \Omega_p\right)$の低域フィルタに変換し、1次オールパス関数を用いて$z \to -z$と置換を行えばよい。

希望のフィルタのアナログカットオフ周波数をf_c、サンプリング周波数をf_sとし、f_cをデジタル周波数Ω_pに変換すると、(17)式より、

$$\Omega_p = 2\arctan\left(\frac{\pi f_c}{f_s}\right) \tag{25}$$

と表される。

また、基本フィルタのアナログカットオフ周波数ω_cをデジタル周波数ϑ_pに変換すると、(17)式より、

$$\vartheta_p = 2\arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \tag{26}$$

と表される。

1次オールパス関数(21)式において、$z \to -z$と置換すると、

$$g\left(z^{-1}\right) \to -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \tag{27}$$

となる。

また、ϑ_pを$\left(\pi - \Omega_p\right)$のローパスフィルタに写像するという条件

$$e^{-j\vartheta_p} = \frac{e^{-j\left(\pi - \Omega_p\right)} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\left(\pi - \Omega_p\right)}}$$

よりαについて解くと、

$$\alpha = -\frac{\cos\dfrac{\vartheta_p + \Omega_p}{2}}{\cos\dfrac{\vartheta_p - \Omega_p}{2}} \tag{28}$$

と求まる。

従って、このαを用い、(27)式で表わされるZ^{-1}を(18)式に代入すれば、$H(Z)$の係数は、

$$A_k \to \frac{(1-\alpha)^2}{C} A_k$$

$$a_1^k \to -a_1^k$$

$$b_1^k \to \frac{-\left(1 + \alpha^2\right)b_1^k + 2\alpha\left(1 + b_2^k\right)}{C}, b_2^k = \frac{\alpha^2 - b_1^k\alpha + b_2^k}{C} \tag{29}$$

$$\left(C = 1 - b_1^k \alpha + b_2^k \alpha^2\right)$$

と変換でき、希望のデジタルハイパスフィルタの伝達関数が求まる。

1-5) Lowpass - Bandpass 変換

バンドパスフィルタはローパスフィルタとハイパスフィルタを組み合わせて作ることができる。

希望のフィルタの最低アナログカットオフ周波数をf_1、最高アナログカットオフ周波数をf_2、アナログサンプリング周波数をf_sとし、f_1、f_2をデジタル周波数Ω_{p1}, Ω_{p2}に変換すると、(17)式より、

$$\Omega_{p1} = 2\arctan\left(\frac{\pi f_1}{f_s}\right),\ \Omega_{p2} = 2\arctan\left(\frac{\pi f_2}{f_s}\right) \tag{30}$$

と表される。

また、基本フィルタのアナログカットオフ周波数ω_cをデジタル周波数ϑ_pに変換すると、(17)式より、

$$\vartheta_p = 2\arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \tag{31}$$

と表される。

ローパスフィルタを $\dfrac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$、 $a = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\beta - \Omega_{p2}}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta + \Omega_{p2}}{2}\right)}$ ハイパスフィルタを $-\dfrac{z^{-1} + b}{1 + bz^{-1}}$、

$b = -\dfrac{\cos\left(\dfrac{\beta + \Omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\beta - \Omega_{p1}}{2}\right)}$ とおくと、バンドパスフィルタは

$$-\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} + b}{1 + bz^{-1}} = -\frac{z^{-2} - (a - b)z^{-1} - ab}{1 - (a - b)z^{-1} - abz^{-2}} \tag{32}$$

と表される。

$a - b = \dfrac{2\alpha k}{k + 1}, -ab = \dfrac{k - 1}{k + 1}$ とおき、α、kについて解くと、

$$\alpha = \frac{\cos\dfrac{\Omega_{p2} + \Omega_{p1}}{2}}{\cos\dfrac{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}{2}},\ k = \cot\frac{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}{2}\tan\frac{\vartheta_p}{2} \tag{33}$$

と求まる。

従って、α、kを(33)式とおき、Z^{-1}を(32)式に変換すると、

$$Z^{-1} \to -\frac{z^{-2} - \dfrac{2\alpha k}{k + 1}z^{-1} + \dfrac{k - 1}{k + 1}}{\dfrac{k - 1}{k + 1}z^{-2} - \dfrac{2\alpha k}{k + 1}z^{-1} + 1} = -\frac{z^{-2} - Az^{-1} + B}{Bz^{-2} - Az^{-1} + 1} \qquad \left(A = \frac{2\alpha k}{k + 1}, B = \frac{k - 1}{k + 1}\right) \tag{34}$$

と変換すると、(18)式の$H(Z)$の係数は、

$$A_k \to \frac{(1-B)^2}{C}A_k, a_1^k \to -a_1^k$$

$$b_1^k \to \frac{A}{C}\left[B\left(b_1^k - 2b_2^k\right) + \left(b_1^k - 2\right)\right]$$

$$b_2^k \to \frac{1}{C}\left[A^2\left(1 - b_1^k + b_2^k\right) + 2B\left(1 + b_2^k\right) - b_1^k B^2 - b_1^k\right] \tag{35}$$

$$b_3^k \to \frac{A}{C}\left[B\left(b_1^k - 2\right) + \left(b_1^k - 2b_2^k\right)\right], b_4^k \to \frac{1}{C}\left[B^2 - b_1^k B + b_2^k\right]$$

$$\left(C = 1 - b_1^k B + b_2^k B^2\right)$$

と変換でき、希望のデジタルバンドパスフィルタの伝達関数が求まる。

1-6) Lowpass - Notch 変換

希望のフィルタのアナログ中心周波数をf_c、アナログサンプリング周波数をf_sとする。f_cの前後 x ［%］ を落とすとすると、最低カットオフ周波数f_1、最高カットオフ周波数f_2は、

$$f_1 = \left(1 - \frac{x}{100}\right)f_c, f_2 = \left(1 + \frac{x}{100}\right)f_c \tag{36}$$

と表される。

f_1、f_2をデジタル周波数Ω_{p1}、Ω_{p2}に変換すると、

$$\Omega_{p1} = 2\arctan\left(\frac{\pi f_1}{f_s}\right), \Omega_{p2} = 2\arctan\left(\frac{\pi f_2}{f_s}\right) \tag{37}$$

と表される。

また、基本フィルタのアナログカットオフ周波数ω_cをデジタル周波数ϑ_pに変換すると、

$$\vartheta_p = 2\arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \tag{38}$$

と表される。

$$\alpha = \frac{\cos\frac{\Omega_{p2} + \Omega_{p1}}{2}}{\cos\frac{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}{2}}, k = \tan\frac{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}{2}\tan\frac{\vartheta_p}{2}$$ とおき、

$$Z^{-1} \to \frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + 1} = -\frac{z^{-2} - Az^{-1} + B}{Bz^{-2} - Az^{-1} + 1} \quad \left(A = \frac{2\alpha}{k+1}, B = \frac{1-k}{1+k}\right) \tag{39}$$

と変換すると、(18)式の$H(Z)$の係数は、

$$A_k \to \frac{(1+B)^2}{C}A_k$$

$$a_1^k \to -\frac{4A}{B+1}, a_2^k \to 2\left(\frac{2A^2}{(B+1)^2}+1\right), a_3^k \to -\frac{4A}{B+1}, a_4^k \to 1$$

$$b_1^k \to -\frac{A}{C}\left[B\left(b_1^k+2b_2^k\right)+\left(2+b_1^k\right)\right]$$

$$b_2^k \to \frac{1}{C}\left[A^2\left(1+b_1^k+b_2^k\right)+2B\left(1+b_2^k\right)+b_1^kB^2+b_1^k\right] \quad (40)$$

$$b_3^k \to -\frac{A}{C}\left[B\left(b_1^k+2\right)+\left(b_1^k+2b_2^k\right)\right], b_4^k \to \frac{1}{C}\left[B^2+b_1^kB+b_2^k\right]$$

$$\left(C=1+b_1^kB+b_2^kB^2\right)$$

と変換でき、希望のデジタルノッチフィルタの伝達関数が求まる。

1-7) Lowpass - Bandstop 変換

希望のフィルタの最低アナログカットオフ周波数をf_1、最高アナログカットオフ周波数をf_2、アナログサンプリング周波数をf_sとする。f_1、f_2をデジタル周波数Ω_{p1}、Ω_{p2}に変換すると、

$$\Omega_{p1}=2\arctan\left(\frac{\pi f_1}{f_s}\right), \Omega_{p2}=2\arctan\left(\frac{\pi f_2}{f_s}\right) \quad (41)$$

と表される。

また、基本フィルタのアナログカットオフ周波数ω_cをデジタル周波数ϑ_pに変換すると、

$$\vartheta_p=2\arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \quad (42)$$

と表される。

$$\alpha=\frac{\cos\dfrac{\Omega_{p2}+\Omega_{p1}}{2}}{\cos\dfrac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{2}}, k=\tan\frac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{2}\tan\frac{\vartheta_p}{2}$$ とおき、

$$Z^{-1} \to \frac{z^{-2}-\dfrac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+\dfrac{1-k}{1+k}}{\dfrac{1-k}{1+k}z^{-2}-\dfrac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+1}=-\frac{z^{-2}-Az^{-1}+B}{Bz^{-2}-Az^{-1}+1} \qquad \left(A=\frac{2\alpha}{k+1}, B=\frac{1-k}{1+k}\right) \quad (43)$$

と変換すると、(18)式の$H(Z)$の係数は、

$$A_k \to \frac{(1+B)^2}{C}A_k$$

$$a_1^k \to -\frac{4A}{B+1}, a_2^k \to 2\left(\frac{2A^2}{(B+1)^2}+1\right), a_3^k \to -\frac{4A}{B+1}, a_4^k \to 1$$

$$b_1^k \to -\frac{A}{C}\left[B\left(b_1^k+2b_2^k\right)+\left(2+b_1^k\right)\right]$$

$$b_2^k \to \frac{1}{C}\left[A^2\left(1+b_1^k+b_2^k\right)+2B\left(1+b_2^k\right)+b_1^k B^2+b_1^k\right]$$

$$b_3^k \to -\frac{A}{C}\left[B\left(b_1^k+2\right)+\left(b_1^k+2b_2^k\right)\right], b_4^k \to \frac{1}{C}\left[B^2+b_1^k B+b_2^k\right] \quad (44)$$

$$\left(C=1+b_1^k B+b_2^k B^2\right)$$

と変換でき、希望のデジタルバンドストップフィルタの伝達関数が求まる。

以上の 1-3)～1-7)より、低域フィルタから各種フィルタへの周波数変換をまとめると、以下の表１のようになる。

表１　基本デジタルローパスフィルタから各種フィルタへの周波数変換

フィルタの種類	変換式	設計定数
Lowpass	$\dfrac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$	$\alpha=\dfrac{\sin\frac{\vartheta_p-\Omega_p}{2}}{\sin\frac{\vartheta_p+\Omega_p}{2}}$
Highpass	$-\dfrac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$	$\alpha=-\dfrac{\cos\frac{\vartheta_p+\Omega_p}{2}}{\cos\frac{\vartheta_p-\Omega_p}{2}}$
Bandpass	$-\dfrac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}$	$\alpha=\dfrac{\cos\frac{\Omega_{p2}+\Omega_{p1}}{2}}{\cos\frac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{2}}$ $k=\cot\frac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{2}\tan\frac{\vartheta_p}{2}$
Notch ・ Bandstop	$\dfrac{z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+\frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+1}$	$\alpha=\dfrac{\cos\frac{\Omega_{p2}+\Omega_{p1}}{2}}{\cos\frac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{2}}$ $k=\tan\frac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{2}\tan\frac{\vartheta_p}{2}$

ϑ_p：基本低域フィルタのデジタルカットオフ周波数
Ω_p：希望のフィルタのデジタルカットオフ周波数
Ω_{p1}: 希望のフィルタの最低デジタルカットオフ周波数
Ω_{p2}: 希望のフィルタの最高デジタルカットオフ周波数

以上によって求めた伝達関数の係数を用いて、バターワースタイプの任意のデジタルフィルタを実現することができる。
以下に具体的な実現法について述べる。

1-8)デジタルフィルタの実現法

(24)式、(29)式、(35)式によって係数変換された(18)式の伝達関数$H(Z)$は、次式によって表わされる。

$$H(Z)=\prod_{k=1}^{\frac{N}{2}} H_D^k(Z) \qquad (45)$$

ただし、$H_D^k(Z)=A_k\dfrac{1+a_1^kZ^{-1}+a_2^kZ^{-2}}{1+b_1^kZ^{-1}+b_2^kZ^{-2}}$

$H(Z)$を１つの回路の伝達関数と考え､その回路を図２のように伝達関数$H_D^k(Z)$の部分回路の縦続接続と考える。要素回路は入力$\{x(n)\}$の時の$H_D^1(Z)$の応答を$\{y_1(n)\}$、入力$\{y_1(n)\}$の時の$H_D^2(Z)$の応答を$\{y_2(n)\}$とする。

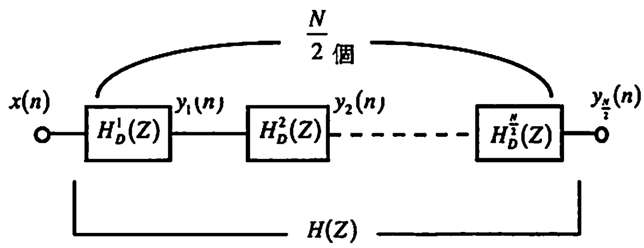

図２　H(z)の回路構成

以下同様に、入力$\left\{y_{\frac{N}{2}-1}(n)\right\}$の時の$H_D^{\frac{N}{2}}(Z)$の応答を$\left\{y_{\frac{N}{2}}(n)\right\}$とすると次の差分方程方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned}y_1(n)&=A_1x(n)+A_1a_1^1x(n-1)+A_1a_2^1(n-2)\\&\quad-b_1^1y_1(n-1)-b_2^1y_1(n-2)\\y_2(n)&=A_2y_1(n)+A_2a_1^2y_1(n-1)+A_2a_2^2(n-2)\\&\quad-b_1^2y_2(n-1)-b_2^2y_2(n-2)\\&\vdots\\y_{\frac{N}{2}}(n)&=A_{\frac{N}{2}}y_{\frac{N}{2}-1}(n)+A_{\frac{N}{2}}a_1^{\frac{N}{2}}y_{\frac{N}{2}-1}(n-1)+A_{\frac{N}{2}}a_2^{\frac{N}{2}}(n-2)\\&\quad-b_1^{\frac{N}{2}}y_{\frac{N}{2}}(n-1)-b_2^{\frac{N}{2}}y_{\frac{N}{2}}(n-2)\end{aligned}$$

これらの式より$y_1(n),y_2(n),\cdots$と順次求められる。

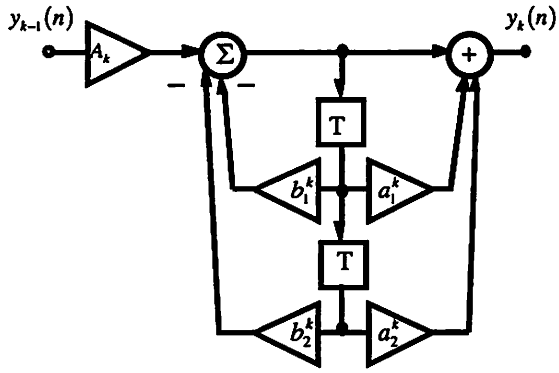

図３　図２の要素回路$H_D^k(Z)$

$k=1,\cdots,\dfrac{2}{N}$

(40)式、(44)式によって係数変換された(18)式の伝達関数$H(Z)$は次式によって表わされる。

$$H(Z)=\prod_{k=1}^{\frac{N}{2}} H_D^k(Z) \qquad (46)$$

ただし、$H_D^k(Z)=A_k\dfrac{1+a_1^kZ^{-1}+a_2^kZ^{-2}+a_3^kZ^{-3}+a_4^kZ^{-4}}{1+b_1^kZ^{-1}+b_2^kZ^{-2}+b_3^kZ^{-3}+b_4^kZ^{-4}}$

と表せる。

従って、前記のの変換の場合と同様に考えると、

$$
\begin{aligned}
y_1(n) &= A_1x(n)+A_1a_1^1x(n-1)+A_1a_2^1(n-2)\\
&\quad +A_1a_3^1(n-3)+A_1a_4^1(n-4)-b_1^1y_1(n-1)\\
&\quad -b_2^1y_1(n-2)-b_3^1y_1(n-3)-b_4^1y_1(n-4)\\
y_2(n) &= A_2y_1(n)+A_2a_1^2y_1(n-1)+A_2a_2^2(n-2)\\
&\quad +A_2a_3^2(n-3)+A_2a_4^2(n-4)-b_1^2y_2(n-1)\\
&\quad -b_2^2y_2(n-2)-b_3^2y_2(n-3)-b_4^2y_2(n-4)\\
&\vdots\\
y_{\frac{N}{2}}(n) &= A_{\frac{N}{2}}y_{\frac{N}{2}-1}(n)+A_{\frac{N}{2}}a_1^{\frac{N}{2}}y_{\frac{N}{2}-1}(n-1)+A_{\frac{N}{2}}a_2^{\frac{N}{2}}(n-2)\\
&\quad +A_{\frac{N}{2}}a_3^{\frac{N}{2}}(n-3)+A_{\frac{N}{2}}a_4^{\frac{N}{2}}(n-4)-b_1^{\frac{N}{2}}y_{\frac{N}{2}}(n-1)\\
&\quad -b_2^{\frac{N}{2}}y_{\frac{N}{2}}(n-2)-b_3^{\frac{N}{2}}y_{\frac{N}{2}}(n-3)-b_4^{\frac{N}{2}}y_{\frac{N}{2}}(n-4)
\end{aligned}
$$

次の差分方程式が成立する。

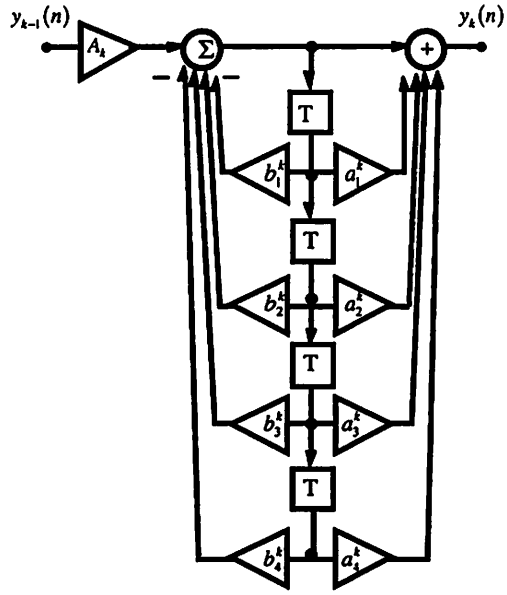

図4　図2の要素回路 $H_D^k(Z)$

$k=1,\cdots,\frac{2}{N}$

これらの式より $y_1(n), y_2(n), \cdots$ と順次求められる。

アナログ周波数によるフィルタ特性を求めるためには，(45) (46)式に $Z=e^{-j\omega}$ を代入し、$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ を求めればよい。

2. 設計例

ここでは、具体的設計例として、通過域の端が 0.3π［rad/s］、阻止域の端が 0.6π［rad/s］、減衰率 48［dB/Oct.］、平坦条件 99.99［%］となるようなバターワースタイプのローパスフィルタを設計し、このフィルタをカットオフ周波数 100［Hz］、サンプリング周波数 500［Hz］のデジタルローパスフィルタに変換する例を述べる。

(3)式より

$$\delta_1=0.9999,\ \delta_2=0.00398$$

となるから

$$N=16$$

とできる。
(7)式より

$$\omega_c=0.39148\pi$$

と求められる。
従って、(1)式より振幅自乗特性は

$$|H_c(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{0.3915\pi}\right)^{32}}$$

と表される。

上式において、$j\frac{\omega}{\omega_c}=s$とすると、

$$|H_c(0.3915\pi s)|^2 = \frac{1}{1+(-s^2)^{16}}$$

と表される。

この分母は

$$1+(-s^2)^{16} = \prod_{k=0}^{15}\left[j\exp\left(j\pi\frac{2k+1}{32}\right)-s\right]\left[j\exp\left(j\pi\frac{2k+1}{32}\right)+s\right]$$

と因数分解できるので、上式の零点の中から左半分にあるものを集めて$g(s)$とすると、(10)式より$g(s)$は次式で与えられる。

$$g(s)=(s^2+0.196s+1)(s^2+0.5806s+1)(s^2+0.9428s+1)(s^2+1.2688s+1)$$
$$(s^2+1.5460s+1)(s^2+1.7638s+1)(s^2+1.9139s+1)(s^2+1.9904s+1)$$

よって伝達関数は(11)式より、

$$H(\omega_c s)=\frac{1}{g(s)}$$

と表される。

$s=\frac{s}{\omega_c}, a_k\omega_c = a_k$とおくと、(12)式より

$$H(s)=\frac{1.5126}{\begin{aligned}&(s^2+0.2411s+1.5126)(s^2+0.714s+1.5126)(s^2+1.1595s+1.5126)\\&\cdot(s^2+1.5605s+1.5126)(s^2+1.9014s+1.5126)(s^2+2.1693s+1.5126)\\&\cdot(s^2+3.5538s+1.5126)(s^2+2.4479s+1.5126)\end{aligned}}$$

となる。

$s=2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$を用いて双一次変換をすると、(18)式より

$$H(Z)=\prod_{k=1}^{8}A_k\frac{1+2Z^{-1}+Z^{-2}}{1+b_1^kZ^{-1}+b_2^kZ^{-2}}$$

$$A_1=0.2523, b_1^1=-0.8299, b_2^1=0.8391$$
$$A_2=0.2179, b_1^2=-0.7168, b_2^2=0.5885$$
$$A_3=0.1931,\ b_1^3=-0.6352, b_2^3=0.4078$$
$$A_4=0.1752, b_1^4=-0.5762, b_2^4=0.277$$
$$A_5=0.1624, b_1^5=-0.534,\ \ b_2^5=0.1835$$
$$A_6=0.1535, b_1^6=-0.505,\ \ b_2^6=0.1192$$

$$A_7 = 0.148,\ \ b_1^7 = -0.4868, b_2^7 = 0.0788$$

$$A_8 = 0.1453, b_1^8 = -0.4778, b_2^8 = 0.0593$$

と変換される。

これをカットオフ周波数 100［Hz］、サンプリング周波数 500［Hz］のデジタルローパスフィルタに変換する。

まず、希望のフィルタのアナログカットオフ周波数をデジタルカットオフ周波数Ω_pに、基本フィルタのアナログカットオフ周波数ω_cをデジタルカットオフ周波数ϑ_p直すと、(19)、(20)式より

$$\Omega_p = 1.122,\ \vartheta_p = 1.1027$$

と表される。

(23)式より$\alpha = 0.0108$と求まり、$Z^{-1} \to \dfrac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$と変換すると、(18)式の$H(Z)$の係数は(24)式より、

$$A_1 \to 0.2447, b_1^1 \to -0.8618, b_2^1 \to 0.7068$$

$$A_2 \to 0.2116, b_1^2 \to -0.7452, b_2^2 \to 0.3514$$

$$A_3 \to 0.1877, b_1^3 \to -0.661,\ \ b_2^3 \to 0.172$$

$$A_4 \to 0.1704, b_1^4 \to -0.6,\ \ \ \ b_2^4 \to 0.0825$$

$$A_5 \to 0.158,\ \ b_1^5 \to -0.5564, b_2^5 \to 0.0393$$

$$A_6 \to 0.1494, b_1^6 \to -0.5263, b_2^6 \to 0.0196$$

$$A_7 \to 0.1441, b_1^7 \to -0.5074, b_2^7 \to 0.0115$$

$$A_8 \to 0.1415, b_1^8 \to -0.4982, b_2^8 \to 0.0087$$

と変換でき、希望のデジタルローパスフィルタの伝達関数が求められる。

3. デジタルフィルタに関連した関数

名称　filt.h：ヘッダーファイル

#define　MAXDATA　5000：最大データ数

構造体変数：lpass,hpass,bpass,bstop

メンバー	型	引用するときの内容
l_cutoff	float	最低カットオフ周波数
h_cutoff	float	最高カットオフ周波数
decay	float	減衰率
npl	int	ローパスフィルタ次数/2
nph	int	ハイパスフィルタ次数/2

構造体変数：notch

メンバー	型	配列	引用するときの内容
notchf[5]	float	1次元	カットオフ周波数
decay	float	—	減衰率
np[5]	int	1次元	フィルタ次数/2
n_no	int	—	ノッチの数（5以下）

構造体変数：COMPLEX

メンバー	型	引用するときの内容
r	double	複素数の実数部
x	double	複素数の虚数部

その他の変数

変数名	型	配列	引用するときの内容
smpf	float	—	サンプリング周波数
filt_name[64]	char	1次元	フィルタ係数を保存するファイル名
f_se[3]	int	1次元	フィルタセレクション f_se[0]=1：ローパスフィルタ f_se[0]=2：ハイパスフィルタ f_se[0]=3：バンドパスフィルタ

			f_se[1]=1：ノッチフィルタ f_se[2]=1：バンドストップフィルタ
ggl[36]	double	1次元	ローパスフィルタの(18)式の係数 A_k
ggh[36]	double	1次元	ハイパスフィルタの(18)式の係数 A_k
ggn[5][36]	double	2次元	ノッチフィルタの(18)式の係数 A_k
ggb[36]	double	1次元	バンドストップフィルタの(18)式の係数 A_k
aal[36][2]	double	2次元	ローパスフィルタの(18)式の係数 a_m^k(m=1,2)
aah[36][2]	double	2次元	ハイパスフィルタの(18)式の係数 a_m^k(m=1,2)
aan[5][36][4]	double	3次元	ノッチフィルタの(18)式の係数 a_m^k(m=1,2,3,4)
aab[5][4]	double	2次元	バンドストップフィルタの(18)式の係数 a_m^k(m=1,2,3,4)
bbl[36][2]	double	2次元	ローパスフィルタの(18)式の係数 b_m^k(m=1,2)
bbh[36][2]	double	2次元	ハイパスフィルタの(18)式の係数 b_m^k(m=1,2)
bbn[5][36][4]	double	3次元	ノッチフィルタの(18)式の係数 b_m^k(m=1,2,3,4)
bbb[5][4]	double	2次元	バンドストップフィルタの(18)式の係数 b_m^k(m=1,2,3,4)

名称　filter( )：データを希望のフィルタに通したときの値の取得。
ソースコードを次ページに示す。

構文　filter(indata,outdata,datano)

引数

引数	型	配列	引用するときの内容	引用後の内容
indata[ ]	float	1次元	データ	不変
outdata[ ]	float	1次元	任意（戻り値）	フィルタリングされた値
datano	int	—	データ数	不変

説明　indata で指定された datano 個の入力から、フィルタリングされた datano 個の値、outdata を返す。

使用例

ここでは具体的な使用例として、減衰率 96.0［dB/Oct.］、カットオフ周波数 50.0［Hz］、サンプリング周波数 500.0［Hz］のデジタルハイパスフィルタに $\sin(40\pi/500\times i)+\cos(300\pi/500\times i)$（i:整数、$0\le i<500$）の 500 個のデータを通したときの値を求める。

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "filt.h"
main( )
{
   float indata[3000],outdata[3000];
   int datano;
   int i;
   float dt,t1,t2;
   static float PAI = 3.14159265357989324;
   f_se[0]=2; f_se[1]=0; f_se[2]=0;
   hpass.decay = 96.0;
   hpass.h_cutoff = 50.0;
   smpf = 500.0;
   datano = 500;
   dt =1.0/smpf;

   for(i=0;i<datano;i++) {
       t1 = 40.0 * PAI * dt * (float)i;
       t2 = 300.0 * PAI * dt * (float)i;
       indata[i] = sin(t1) + cos(t2);
       }
   filter(indata,outdata,datano);
   for(i=0;i<datano;i++)
       printf("%f %f %f¥n",indata[i],outdata[i],cos(300.0*PAI*dt*(float)i));
}

filter(indata,outdata,datano)
float indata[ ],outdata[ ];
int datano;
```

```
{
  int i,exno;

  total_coef( );
  exno = 0.3 * datano;
  for(i=0;i<datano;i++) {
      outdata[i] = indata[i];
      }
  for(i=0;i<exno;i++) {
      outdata[i+datano] = indata[datano-i-1];
      }
  exno = datano + exno;
  total_filt(outdata,exno);
}
```

この関数を構成しているものは以下の通りである。

名称　　bcoef( ) : 平坦条件 99%の基本ローパスフィルタの伝達関数の係数、カットオフ周波数、フィルタ次数/2 の取得。

構文　　#include<math.h>

bcoef(e,gg,aa,bb,n,omc)

引数

引数	型	配列	引用するときの内容	引用後の内容
e	double	—	減衰率[dB/Oct.]	不変
gg[ ]	double	1次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 A_k
aa[ ][2]	double	2次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 a_m^k(m=1,2)
bb[ ][2]	double	2次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 b_m^k(m=1,2)
*n	int	—	任意（戻り値）	フィルタ次数/2
*omc	double	—	任意（戻り値）	カットオフ周波数[Hz]

説明　　e で指定された入力から n 個の gg,aa,bb の値と omc の値を返す。
n はフィルタ次数/2 を gg,aa,bb は(18)式の係数 A_k、a_m^k、b_m^k(m=1,2)を、omc はカットオフ周波数を表す。

名称　lcoef( )：基本ローパスフィルタを希望のカットオフ周波数のローパスフィルタに変換した時の伝達関数の係数の取得。

hcoef( )：基本ローパスフィルタを希望のカットオフ周波数のハイパスフィルタに変換した時の伝達関数の係数の取得。

構文　#include<math.h>

lcoef(ee,gg,aa,bb,n,fc,fs)

hcoef(ee,gg,aa,bb,n,fc,fs)

引数

引数	型	配列	引用するときの内容	引用後の内容
ee	float	—	減衰率[dB/Oct.]	不変
gg[ ]	double	1次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 A_k
aa[ ][2]	double	2次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 a_m^k(m=1,2)
bb[ ][2]	double	2次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 b_m^k(m=1,2)
*n	int	—	任意（戻り値）	フィルタ次数/2
fc	float	—	カットオフ周波数[Hz]	不変
fs	float	—	サンプリング周波数[Hz]	不変

説明　ee,fc,fs で指定された入力から、n 個の gg,aa,bb の値を返す。
n はフィルタ次数/2 を、gg,aa,bb は(18)式の係数 A_k、a_m^k、b_m^k(m=1,2)を表す。

名称　notch_coef( )：基本ローパスフィルタを希望の中心周波数の前後 5％を落としたノッチフィルタに変換した時の伝達関数の係数の取得。

構文　#include<math.h>

notch_coef(ee,gg,aa,bb,n,fc,fs)

引数

引数	型	配列	引用するときの内容	引用後の内容
ee	float	—	減衰率[dB/Oct.]	不変
gg[ ]	double	1 次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 A_k
aa[ ][4]	double	2 次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 a_m^k (m=1,2,3,4)
bb[ ][4]	double	2 次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 b_m^k (m=1,2,3,4)
n	int	—	任意（戻り値）	フィルタ次数/2
fc	float	—	中心周波数[Hz]	不変
fs	float	—	サンプリング周波数[Hz]	不変

説明　ee,fc,fs で指定された入力から、n 個の gg,aa,bb の値を返す。

n はフィルタ次数/2 を、gg,aa,bb は(18)式の係数 A_k、a_m^k、b_m^k (m=1,2,3,4) を表す。

名称　bncoef( ) : 基本ローパスフィルタを希望の最低・最高周波数のバンドストップフィルタに変換した時の伝達関数の係数の取得。

構文　#include<math.h>

bncoef(ee,gg,aa,bb,n,fcl,fch,fs)

引数

引数	型	配列	引用するときの内容	引用後の内容
ee	float	—	減衰率[dB/Oct.]	不変
gg[ ]	double	1次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 A_k
aa[ ][4]	double	2次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 a_m^k (m=1,2,3,4)
bb[ ][4]	double	2次元	任意（戻り値）	(18)式の係数 b_m^k (m=1,2,3,4)
*n	int	—	任意（戻り値）	フィルタ次数/2
fcl	float	—	最低周波数[Hz]	不変
fch	float	—	最高周波数[Hz]	不変
fs	float	—	サンプリング周波数[Hz]	不変

説明　ee,fcl,fch,fs で指定された入力から、n 個の gg,aa,bb の値を返す。
n はフィルタ次数/2 を、gg,aa,bb は(18)式の係数 A_k、a_m^k、b_m^k (m=1,2,3,4) を表す。

名称　　sfilt( ) : データをローパス・ハイパス・バンドパスフィルタに通したときの値の取得。

構文　　#include<stdio.h>
#include<math.h>
sfilt(data,datano,gg,aa,bb,nn)

引数

引数	型	配列	引用するときの内容	引用後の内容
data[ ]	float	1次元	データ	フィルタを通した値
datano	int	—	データ数	不変
gg[ ]	double	1次元	(18)式の係数 A_k	不変
aa[ ][2]	double	2次元	(18)式の係数 a_m^k(m=1,2)	不変
bb[ ][2]	double	2次元	(18)式の係数 b_m^k(m=1,2)	不変
nn	int	—	フィルタ次数/2	不変

説明　　data,datano,gg,aa,bb,nn で指定された入力から、datano 個のフィルタリングされた値、data を返す。

名称　ffilt( ) : データをノッチ・バンドストップフィルタに通したときの値の取得。

構文　#include<stdio.h>
#include<math.h>
ffilt(data,datano,gg,aa,bb,nn)

引数

引数	型	配列	引用するときの内容	引用後の内容
data[ ]	float	1次元	データ	フィルタを通した値
datano	int	—	データ数	不変
gg[ ]	double	1次元	(18)式の係数 A_k	不変
aa[ ][4]	double	2次元	(18)式の係数 a_m^k(m=1,2,3,4)	不変
bb[ ][4]	double	2次元	(18)式の係数 b_m^k(m=1,2,3,4)	不変
nn	int	—	フィルタ次数/2	不変

説明　data,datano,gg,aa,bb,nn で指定された入力から、datano 個のフィルタリングされた値、data を返す。

名称　　total_filt( )　：データを希望のフィルタに通した値の取得。

構文　　#include<math.h>
　　　　#include"filt.h"
　　　　total_filt(data,datano)

引数

引数	型	配列	引用するときの内容	引用後の内容
data[ ]	float	1次元	データ	フィルタを通した値
datano	int	—	データ数	不変

説明　　data で指定された datano 個の入力から、datano 個のフィルタリングされた値、data を返す。

名称　write_firter( ) : 希望のデジタルフィルタの係数をファイルに書き込む。

構文
```
#include<stdio.h>
#include"filt.h"
write_filter(iid)
```

引数

引数	型	引用するときの内容	引用後の内容
iid	int	ファイル指定の有無	不変

説明　iid=0 ならば指定したファイルに希望のデジタルフィルタの係数を書き込み、iid≠0 ならば TMP.flt に希望のデジタルフィルタの係数を書き込む。

名称　read_filter( ):ファイルから希望のデジタルフィルタの係数を読み込む。

構文　#include<stdio.h>
#include"filt.h"
read_filter(iid)

引数

引数	型	引用するときの内容	引用後の内容
iid	int	ファイル指定の有無	不変

説明　iid=0 ならば指定したファイルから希望のデジタルフィルタの係数を読み込み、iid≠0 ならば TMP.flt から希望のデジタルフィルタの係数を読み込む。

名称　lfiltf( )：任意の周波数におけるローパス、ハイパス、バンドパスフィルタの伝達関数の値の取得。

構文　#include<math.h>
#include"filt.h"
COMPLEX lfiltf(ggf,aa,bb,nn,f,fs)

引数

引数	型	配列	引用するときの内容	引用後の内容
ggf[ ]	double	1次元	(36)式の係数 A_k	不変
aa[ ][2]	double	2次元	(36)式の係数 a_m^k (m=1,2)	不変
bb[ ][2]	double	2次元	(36)式の係数 b_m^k (m=1,2)	不変
nn	int	—	フィルタ次数/2	不変
f	float	—	周波数[Hz]	不変
fs	float	—	サンプリング周波数[Hz]	不変

説明　ggf,aa,bb,nn,fs で入力された値から任意の f における伝達関数の値を返す。

戻り値　任意の周波数における伝達関数の値を返す。

名称　bnfiltf( )：任意の周波数におけるノッチ、バンドストップフィルタの伝達関数の値の取得。

構文　#include<math.h>
#include"filt.h"
COMPLEX　bnfiltf(ggf,aa,bb,nn,f,fs)

引数

引数	型	配列	引用するときの内容	引用後の内容
ggf[ ]	double	1次元	(36)式の係数 A_k	不変
aa[ ][4]	double	2次元	(36)式の係数 a_m^k(m=1,2,3,4)	不変
bb[ ][4]	double	2次元	(36)式の係数 b_m^k(m=1,2,3,4)	不変
nn	int	—	フィルタ次数/2	不変
f	float	—	周波数[Hz]	不変
fs	float	—	サンプリング周波数[Hz]	不変

説明　ggf,aa,bb,nn,fs で入力された値から任意の f における伝達関数の値を返す。

戻り値　任意の周波数における伝達関数の値を返す。

名称　　total_ffilt( )：任意の周波数における周波数特性の取得。

構文　　#include<math.h>

#include"filt.h"

total_filt(h,f)

引数

引数	型	引用するときの内容	引用後の内容
*h	float	任意（戻り値）	周波数特性[dB/Oct.]
f	float	周波数[Hz]	不変

説明　　f で入力された周波数における周波数特性を返す。

libfilt.a 使用時のコンパイル，リンクの方法

<path> : libfilt.a が存在するディレクトリパス名

インクルード	/<path>/include
リンク	/<path>
コンパイル	cc -I/<path>/include -L/<path> -o *** ***.c -lfilt -lm

参考文献

武部幹：ディジタルフィルタの設計／東海大学出版会
中村尚五：ビギナーズデジタルフィルタ／東京電機大学出版局
喜安善市、斎藤伸自：回路論／朝倉書店