経済動学講義概要

経済動学 **2016Q1**
資料番号**: 16ED00**

佐藤 健治
神戸大学大学院経済学研究科
mail@kenjisato.jp

1 連絡事項

1.1 対象

この講義は神戸大学経済学研究科の大学院生（本科・専修コース）向けです．学部生・他学部生・他大学生の聴講を妨げるものではありませんが、補講や面談のスケジュール調整にあたっては本学院生の希望を優先します．

1.2 オフィスアワー

火曜 3 限 (13:20–14:50), 水曜 2 限 (10:40–12:10)．研究室は第 2 研究室 208 号室です．他の時間帯を希望する場合はメールで連絡してください．オフィスアワーを中止する場合には原則的に http://www.kenjisato.jp/blog/ に情報掲載する予定です．

1.3 ウェブサイト

公開可能な資料は http://www.kenjisato.jp/teaching/ed/2016/ に掲載します．

1.4 予備知識

この授業では、初歩的な解析学（級数の収束条件, 多変数関数の微分，ラグランジュ未定乗数法など）や線形代数学（固有値，対角化など）を使える程度には知っていることを前提として進めます．ただし必要な数学については基礎的なものであれ高度なものであれ, できる限り講義内で説明を行うか, あるいは参考書を紹介します．

経済学に関する特定の知識は要求しません．ただし，期末レポートとしてマクロ経済モデルのシミュレーション分析を行ってもらいますので，各自関心のある分野の論文や教科書で扱われているモデルを講義期間中に 1 つ習得するようにしてください．

1.5 講義スケジュール

各回の前半 60 分間で理論的な講義を行い, 後半 30 分では講義内容に関する計算問題を解いたり, 数値計算の実習を行います. ワークショップでは, コンピュータを利用する場合がありますのでラップトップ PC を持っている人は持ってきてください.

おおよその講義スケジュールは次の通りです. 講義の進行状況に応じて適宜調整されます.

		講義 (60 分)	ワークショップ (30 分)	課題
1.	4/7 木	講義ガイダンス $+\alpha$	Octave と Python の紹介	宿題 1 配布
2.	4/11 月	線形代数学の復習	固有値と固有ベクトルの計算	宿題 1 〆切
3.	4/14 木	ジョルダン標準形の理論	ジョルダン標準形の計算	宿題 2 配布
4.	4/18 月	線形システム (1)	未定	—
5.	4/21 木	線形システム (2)	未定	宿題 2 〆切
6.	4/25 月	非線形システム (1)	未定	宿題 3 配布
7.	4/28 木	非線形システム (2)	未定	—
8.	5/2 月	デスクリプタシステム (1)	未定	宿題 3 〆切
9.	5/9 月	デスクリプタシステム (2)	未定	宿題 4 配布
10.	5/12 木	確率システム (1)	未定	—
11.	5/16 月	確率システム (2)	未定	宿題 4 〆切
12.	5/19 木	カルマンフィルタ	未定	宿題 5 配布
13.	5/23 月	合理的期待モデル (1)	未定	—
14.	5/26 木	合理的期待モデル (2)	未定	宿題 5 〆切
15.	5/30 月	合理的期待モデル (3)	未定	
–	6/6 月	—	—	レポート〆切

1.6 評価

宿題と期末レポートで評価します. 重み付けは宿題 5 題が各 10%ずつ, 期末レポートが 50%です. 期末試験は実施しません.

2 概要

この講義では主に次のような動的システム (dynamical system) について学びます:

$$Ex_{t+1} = Ax_t + Bu_t.$$

ここで，$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ とします．E が正則行列 (nonsingular matrix) のとき，すなわち $\det E \neq 0$ のときには, 逆行列 E^{-1} (inverse matrix) を用いて

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= E^{-1}Ax_t + E^{-1}Bu_t \\ &= \tilde{A}x_t + \tilde{B}u_t \end{aligned}$$

に変形すれば「状態方程式」(state equation) と呼ばれる表現形が得られます.[1] この形の方程式は容易に解くことができて, 一般解 ($t \geq 1$) は

$$\begin{aligned} x_t &= \tilde{A}^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \tilde{A}^k \tilde{B} u_{t-1-k} \\ &= \left(E^{-1}A\right)^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \left(E^{-1}A\right)^k E^{-1}Bu_{t-1-k} \qquad (1) \end{aligned}$$

となります．一方, E が非正則行列 (singular matrix) であるときにはこのような変形はできず，非正則システム (singular system, descriptor system) 特有の取り扱いが必要になります．

なぜこのようなシステムが経済学にとって重要なのでしょうか？1 つには，状態方程式では各時点で成り立つべき恒等式関係を表現できないという制約があるからです．ここでは, Kendrick (1972, *Quarterly Journal of Economics*) と Luenberger and Arbel (1977, *Econometrica*) の例を見ることにします．彼らは動学的 Leontief モデルと呼ばれる次の n セクターモデルを分析しました．

$$x_t = Ax_t + B\left(x_{t+1} - x_t\right) + d_t.$$

ベクトルの成分が明らかになるように書くと,

$$\begin{aligned} x_{1,t} &= a_{11}x_{1,t} + \cdots + a_{1n}x_{n,t} + b_{11}(x_{1,t+1} - x_{1,t}) + \cdots + b_{1n}(x_{n,t+1} - x_{n,t}) + d_{1,t} \\ &\vdots \\ x_{n,t} &= a_{n1}x_{1,t} + \cdots + a_{nn}x_{n,t} + b_{n1}(x_{1,t+1} - x_{1,t}) + \cdots + b_{nn}(x_{n,t+1} - x_{n,t}) + d_{n,t} \end{aligned}$$

となります．n 本ある方程式のそれぞれが, 各セクターが満たすべき方程式です．$x_{i,t}$ は第 i セクターの t 期の産出量, a_{ij} は j 財を 1 単位作るのに必要な i 財の量を表します．従って,

$$a_{i1}x_{1,t} + \cdots + a_{in}x_{n,t}$$

は i 財に対する中間需要を表します．行列 A はレオンチェフの投入産出行列 (input-output matrix) と呼ばれます．次に,

$$b_{i1}(x_{1,t+1} - x_{1,t}) + \cdots + b_{in}(x_{n,t+1} - x_{n,t})$$

[1] 入出力関係 $(u_0, u_1, \cdots) \mapsto (y_0, y_1, \ldots)$ の表現

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t \\ y_t &= Cx_t \end{aligned}$$

のことをシステムの「状態空間表現」 (state space representation) と呼びます．ここで, x_t は「状態」(state) と呼ばれる内部変数です．

は資本蓄積のために需要される i 財の量であり, 投資財への需要を表します. もし, 第 i セクターが消費財・サービスなどの資本蓄積に貢献しないセクターであれば, この部分はゼロになります. つまり, 資本係数行列 (capital coefficient matrix) B は多くの行がゼロである非正則行列です. 最後に, $d_{i,t}$ は i 財に対する最終需要を表します. このモデルの項を並べ替えたシステム

$$Bx_{t+1} = (I - A + B)x_t + d_t$$

は $\det B = 0$ なので, 非正則システムです.

この例から読み取れるように, 非正則システムでは動的な (x_{t+1} と x_t の関係によって記述される方程式, intertemporal) と静的な (同一時刻内 $x_{1,t}, \ldots, x_{n,t}$ の間の関係によって記述される方程式, intratemporal) 方程式の 2 つを同時に含んでいます.

同様のシステムは経済学の分析で頻出します. 上で挙げた決定論的なモデル以外には, 動学的確率的一般均衡モデル (Dynamic Stochastic General Equilibrium, DSGE) と呼ばれるクラスのモデルの多くが, 対数線形化を施すことによって

$$A\mathbb{E}_t x_{t+1} = Bx_t + Cz_t$$

という形式に帰着されます. このようなシステムに対する解析法と数値計算法を学ぶことが本講義の目標です.

3 リーディングリスト

Blanchard, O. J. and C. M. Kahn (1980): "The solution of linear difference models under rational expectations," *Econometrica*, 48, 1305–1312.

Kline, P. (2000): "Using the generalized Schur form to solve a multivariate linear rational expectations model," *Journal of Economic Dynamics & Control*, 24, 1405–1423.

Lewis, F. L. (1986): "A survey of linear singular systems," *Circuits Systems Signal Process*, 5, 3–36.

Luenberger, D. G. (1977): "Dynamic equations in descriptor form," *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22, 312–321.

Luenberger, D. G. and A. Arbel (1977): "Singular dynamic Leontief systems," *Econometrica*, 45, 991–995.

Miao, J. (2014): *Economic Dynamics in Discrete Time*, MIT Press.

Sims, C. A. (2001): "Solving linear rational expectations models," *Computational Economics*, 20, 1–20.

Uhlig, H. (1995): "A toolkit for analyzing nonlinear dynamic stochastic models easily," in *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, ed. by R. Marimon and A. Scott, Oxford University Press, chap. 3, 30–61.

片山徹 (1999): 線形システムの最適制御—デスクリプタシステム入門, 近代科学社.