行列の標準形

経済動学 **2016Q1**
資料番号: **16ED04**

mail@**kenjisato**.jp

2016 年 4 月 25 日

前回までに固有値がすべて異なる場合の固有値問題を検討した. ここでは一般の場合と, 比較的高度な話題の導入を行う.

1. 一般固有空間への分解

1.1. ハミルトン・ケーリーの定理

X を有限次元線形空間, $f : X \to X$ を線形とする. 特定の基底に関する行列表現を A としたとき, 特性多項式を

$$\phi_A(z) = \det(zI - A) \tag{1}$$

と定義した. 基底の取り替えによって f の表現が $P^{-1}AP$ となるようにした場合,

$$\phi_{P^{-1}AP}(z) = \det(zI - P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det(zI - A) \det P = \phi_A(z) \tag{2}$$

が成り立つことに注意すると, 固有多項式は基底に依存しないことが分かる. したがって, 行列の固有値問題はその背後にある線形写像の固有値問題である. 以下では, 固有多項式を $\phi_f(z)$ と書く.

定理 1 (ハミルトン・ケーリーの定理)**.** X を有限次元線形空間, $f : X \to X$ を線形とする. このとき, 任意の $x \in X$ について $\phi_f(f)x = 0$ が成り立つ. すなわち f の任意の行列表現 A について, $\phi_f(A)$ はゼロ行列となる.

証明. 付録 Aを参照. □

$\dim X = n$ とすると方程式 $\phi_f(z) = 0$ には重複度を込めて n 個の解を持つ. 重複を除いた解を

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \phi_f(z) = 0\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \tag{3}$$

とし, n_i を λ_i, $i = 1, \ldots, r$ の重複度とすると, $\phi_f(z)$ は次のように因数分解できる.

$$\phi_f(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \cdots (z - \lambda_r)^{n_r}. \tag{4}$$

ハミルトン・ケーリーの定理により

$$(f-\lambda_1)^{n_1}\cdots(f-\lambda_r)^{n_r}=0 \tag{5}$$

が成り立つ. 各 $(f-\lambda_1)^{n_1},\ldots,(f-\lambda_r)^{n_r}$ は互いに可換であるから, 積 (合成) の順序が自由に交換できることに注意してほしい.

定義 2. 多項式 $p(z), q(z)$ が互いに素であるとは, 多項式 $\tilde{p}(z), \tilde{q}(z), c(z)$ が $p(z)=\tilde{p}(z)c(z)$, $q(z)=\tilde{q}(z)c(z)$ であれば必ず $c(z)=1$ が成り立つことをいう.

補題 3. 多項式 $p(z)$, $q(z)$ が互いに素であれば, ある多項式 $a(z)$, $b(z)$ が存在して

$$a(z)p(z)+b(z)q(z)=1 \tag{6}$$

が成り立つ.

この等式をベズーの等式という. 単項イデアル整域と呼ばれる特別な環では常に成り立つ.[1] 多項式全体が作る環は単項イデアル整域である. 身近な例としては整数の集合 $\mathbb{Z}$ は単項イデアル整域であり, 互いに素な整数 p, q にもこの等式を満たす整数 x, y がある.

補題 4. 実 *(*複素*)* 係数多項式 $p(z)$, $q(z)$ が互いに素であることの必要十分条件は, $\mathbb{C}$ において共通根をもたないことである.

補題 5. X を次のように直和分解できる.

$$X=\ker(f-\lambda_1)^{n_1}\oplus\cdots\oplus\ker(f-\lambda_r)^{n_r}. \tag{7}$$

各 $\ker(f-\lambda_i)^{n_i}$ は f の不変部分空間であり, 一般固有空間という. それらの基底に関する f の行列表現はブロック対角行列である.

証明. 定理の前半は, 非ゼロベクトル x が $(f-\lambda_i)^{n_i}x_1=0$ と $\prod_{j\neq i}(f-\lambda_j)^{n_j}x_2=0$ を満たす2つのベクトルの和として一意的に表現できることを示せばよい. 多項式 $p(z)=(z-\lambda_i)^{n_i}$ と $q(z)=\prod_{j\neq i}(z-\lambda_j)^{n_j}$ は互いに素なので, ベズー等式により多項式 $a(z)$, $b(z)$ が存在して

$$a(z)p(z)+b(z)q(z)=1 \tag{8}$$

が成立する. 任意の $x\in X$ について $a(z)p(z)x+b(z)q(z)x=x$ が成り立つので,

$$a(f)p(f)x+b(f)q(f)x=x \tag{9}$$

を得る. ハミルトン・ケーリーの定理により

$$a(f)p(f)x\in\ker q(f),\quad b(f)q(f)x\in\ker p(f) \tag{10}$$

なので, $\ker p(f)+\ker q(f)=X$ が成り立つ. あとは, $v\in\ker p(f)\cap\ker q(f)$ なら $v=0$ であることを示せばよい. 再びハミルトン・ケーリーの定理により

$$v=a(f)p(f)v+b(f)q(f)v=0. \tag{11}$$

[1] 環とは, 和と差と積が定義されている代数構造である. 例えば, 行列の集合 $\mathbb{R}^{n\times n}$ や任意次数の多項式の集合は環 $P[z]$ である. 積の逆元は必ずしも存在しない. 例えば, $1, z\in P[z]$ に対して $1/z\notin P[z]$ である. 除算にあたる演算は $P[z]$ について閉じていない.

最後の等式は $v \in \ker p(f) \cap \ker q(f)$ を使った.

次に, 各 $\ker(f-\lambda_i)^{n_i}$ は f の不変部分空間であることを示す. 実際, $x \in \ker(f-\lambda_i)^{n_i}$ とすれば, $f(f-\lambda_i)^{n_i}x = (f-\lambda_i)^{n_i}f(x) = (f-\lambda_i)^{n_i}\lambda_i x = \lambda_i(f-\lambda_i)^{n_i}x = 0$. [16ED03] の結果によると, 上の様に構成した基底の下で f はブロック対角行列になる. □

線形写像の固有値が定める部分空間によって $X \simeq \mathbb{F}^n$ を直和分解できることが分かった.

$$\dim X = n_1 + \cdots + n_r = n \tag{12}$$

だから, 固有値の代数的重複度が対応する部分空間の次元とならなければならない (証明せよ).

例 **6.** 次の 2 つの行列

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

について

$$\ker(I_2 - 1) = \ker(I_2 - 1)^2 = \mathbb{R}^2 \tag{14}$$

である一方で

$$\ker(J_2(1) - 1) \subsetneq \ker(J_2(1) - 1)^2 = \mathbb{R}^2 \tag{15}$$

である. 固有値と代数的重複度が同じでも一般固有空間の構造が同じとは限らない. □

1.2. 最小多項式

ハミルトン・ケーリーの定理より固有多項式が $\phi_f(f) = 0$ を満たすことを確認した. しかし, $\phi_f(z)$ はこの性質をもつ唯一の多項式ではない.

定義 7. 最高次の係数が 1 であり, $m_f(f) = 0$ を満たす多項式 $m_f(z)$ を最小多項式という.

最小多項式は特定の行列表現に依存しないことに注意.

例 **8.** 例 6の記号を用いる. I_2 と $J_2(1)$ の最小多項式はそれぞれ

$$m_{I_2}(z) = z - 1, \tag{16}$$

$$m_{J_2(1)}(z) = (z-1)^2. \tag{17}$$

□

最小多項式 m_f は ϕ_f と共通のゼロ点をもつので, 因数分解すると

$$m_f(z) = (z-\lambda_1)^{\tilde{n}_1} \cdots (z-\lambda_r)^{\tilde{n}_r} \tag{18}$$

とできる. 自然数 $\tilde{n}_1, \ldots, \tilde{n}_r$ を固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ の幾何的重複度とよぶ.

定理 9. 線形写像が対角化可能であることの必要十分条件は最小多項式が重根を持たないことである.

証明. f が対角化可能であるとしよう. 対角成分には固有値が並ぶことから $m(z) = (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_r)$ が $m(A) = 0$ を満たす最小多項式であることを簡単に示せる. 逆に $m_f = (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_r)$ であれば, ある多項式 $p_1(z), \ldots, p_r(z)$ が存在して,

$$p_1(z)(z - \lambda_1) + \cdots + p_r(z)(z - \lambda_r) = 1 \tag{19}$$

が成り立つ (これはベズー等式を拡張したものである). したがって,

$$\mathbb{F}^n = \ker(A - \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_r). \tag{20}$$

$\ker(A - \lambda_1), \ldots, \ker(A - \lambda_r)$ の基底 (つまり固有ベクトル) について f を表現すれば対角行列を得る. □

補題 5 を強めて次のように分解できる. 証明は同様である.

定理 10. X を次のように直和分解できる.

$$X = \ker(f - \lambda_1)^{\tilde{n}_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_r)^{\tilde{n}_r}. \tag{21}$$

1.3. 一般固有空間への分解

一般固有空間の構造を定めよう. 表記の簡単のため, $n := n_i$, $\tilde{n} := \tilde{n}_i$, $F := f - \lambda_i$, $M_k := \ker F^k$ とする.

$$\mathbb{F}^n = M_{\tilde{n}} \supsetneq M_{\tilde{n}-1} \supsetneq \cdots \supsetneq M_1 \supsetneq M_0 = \{0\} \tag{22}$$

に注意する. $M_{\tilde{n}_{-1}}$ の基底に $V_{\tilde{n}} = \{v_1^{\tilde{n}}, \ldots, v_{r(\tilde{n})}^{\tilde{n}}\}$ を付け加えて,[2] $M_{\tilde{n}} = \mathbb{F}^{n_i}$ の基底になるようにできる. すなわち

$$\mathbb{F}^n = \mathrm{span} V_{\tilde{n}} \oplus M_{\tilde{n}-1}. \tag{23}$$

このとき, $FV_{\tilde{n}} := \{Fv_1^{\tilde{n}}, \ldots, Fv_{r(\tilde{n})}^{\tilde{n}}\} \subset M_{\tilde{n}-1}$ である. これらのベクトルは 1 次独立であり,

$$\mathrm{span} FV_{\tilde{n}} \cap M_{\tilde{n}-2} = \{0\} \tag{24}$$

が成り立つ. なぜなら,

$$\alpha_1 F v_1^{\tilde{n}} + \cdots + \alpha_{r(\tilde{n})} F v_{r(\tilde{n})}^{\tilde{n}} \in M_{\tilde{n}-2} \tag{25}$$

とすれば,

$$\alpha_1 v_1^{\tilde{n}} + \cdots + \alpha_{r(\tilde{n})} v_{r(\tilde{n})}^{\tilde{n}} \in M_{\tilde{n}-1}. \tag{26}$$

$V_{\tilde{n}}$ の構成により, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{r(\tilde{n})} = 0$ となる. したがって, $M_{\tilde{n}-2}$ の基底に

$$FV_{\tilde{n}} \cup \{v_1^{\tilde{n}-1}, \ldots, v_{r(\tilde{n}-1)}^{\tilde{n}-1}\} =: FV_{\tilde{n}} \cup V_{\tilde{n}-1} = \bigcup_{k=0}^{1} F^{1-k} V_{\tilde{n}-k} =: W_{\tilde{n}-1} \tag{27}$$

[2]通常の集合記号 $\{v_1^{\tilde{n}}, \ldots, v_{r(\tilde{n})}^{\tilde{n}}\}$ を使っているが, 以下の議論では要素の順序が意味をもつ.

を付け加えて ($V_{\tilde{n}-1}=\emptyset$ かもしれない, $0\le r(\tilde{n}-1)$), $M_{\tilde{n}-1}$ の基底を構成できる. $FW_{\tilde{n}-1}$ の元は 1 次独立であり, $FW_{\tilde{n}-1}\cap M_{\tilde{n}-3}=\{0\}$ が成り立つ. したがって, $M_{\tilde{n}-3}$ の基底に,

$$W_{\tilde{n}-2}:=FV_{\tilde{n}-1}\cup\{v_1^{\tilde{n}-2},\dots,v_{r(\tilde{n}-2)}^{\tilde{n}-2}\}=:FV_{\tilde{n}-1}\cup V_{\tilde{n}-2} \tag{28}$$

を付け加えて, $M_{\tilde{n}-2}$ の基底を構成できる. 同様の手続きを $(\tilde{n}-1)$ 回続けると, M_1 の基底

$$W_1:=FV_2\cup\{v_1^1,\dots,v_{r(1)}^1\}=:FV_2\cup V_1 \tag{29}$$

を得る. このようにして得た,

$$V=\left\{\begin{matrix} F^{\tilde{n}-1}V_{\tilde{n}} & F^{\tilde{n}-2}V_{\tilde{n}-1} & F^{\tilde{n}-3}V_{\tilde{n}-2} & \cdots & FV_2 & V_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & V_2 & \\ F^2V_{\tilde{n}} & FV_{\tilde{n}-1} & V_{\tilde{n}-2} & & & \\ FV_{\tilde{n}} & V_{\tilde{n}-1} & & & & \\ V_{\tilde{n}} & & & & & \end{matrix}\right\} \tag{30}$$

は $\mathbb{F}^n$ の基底を成す. 基底の並べ方は, 次のように縦方向にならんでいると考えよう.

$$V=\left\{\begin{array}{ccccc} F^\bullet V_{\tilde{n}} & F^\bullet V_{\tilde{n}-1} & F^\bullet V_{\tilde{n}-2} & \cdots & V_1 \\ \hline 1,6 & 11,15 & 19,23 & \vdots\vdots & m-1,m \\ 2,7 & 12,16 & 20,24 & \vdots\vdots & \\ 3,8 & 13,17 & 21,25 & \vdots\vdots & \\ 4,9 & 14,18 & 22,26 & & \\ 5,10 & & & & \end{array}\right\} \tag{31}$$

定理 11. 基底 V に関する f の表現行列はジョルダン標準形である.

証明. 式 (31) の適当な 1 列を $\{v_1,\dots,v_k\}$ と表そう. 基底の構成方法より,

$$(f-\lambda_i)v_{s+1}=v_s,\quad s=1,\dots,k-1 \tag{32}$$

および

$$(f-\lambda_i)v_1=0 \tag{33}$$

が成り立つ. $\mathrm{span}\{v_1,\dots,v_k\}$ は不変部分空間を成すから, f の行列表現はこの典型的な例に対する表現を対角成分に並べたブロック対角行列になる. 上の関係を整理すると,

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} fv_1 & fv_2 & \cdots & fv_{k-1} & fv_k\end{bmatrix}\\ &\qquad=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{k-1} & v_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{34}$$

を得る. これはジョルダン細胞 $J_k(\lambda_i)$ に他ならない. $\square$

2. 一般化固有値問題

固有値問題を拡張した

$$Av = \lambda Ev, \quad v \neq 0, \quad v \in \mathbb{C}^n \tag{35}$$

を (E, A) に対する一般化固有値問題という. 標準的な状態方程式 $x_{t+1} = Ax_t$ に対しては, 固有値問題 $Av = \lambda v$ が重要であったように, デスクリプタシステム $Ex_{t+1} = Ax_t$ の分析では一般化固有値問題 $Av = \lambda Ev$ が重要な役割を果たす. 一般に因果性が成り立たないデスクリプタシステムについては, 解が未来の入力に依存することがある. 一般固有値問題はシステムを前向き成分と後ろ向き成分に直和分解するシステマティックな方法を与えてくれる.

通常の固有値問題は, A が「良い形」になるような基底を探すことを目標とした. 一般化固有値問題では, (E, A) が同時にに「良い形」になるような基底を探す. 1 点違いを強調しておくと, 定義域と終域ではことなる基底をとる. したがって, 変換された行列は $(P^{-1}EQ, P^{-1}AQ)$ によって与えられる. このような問題を扱う場合には, ペンシルと呼ばれる多項式行列 $zE - A$ を考えると便利なことが多いので, 同じ問題が「ペンシルの正準形」の問題と呼ばれることもある.

この節は Lewis (1984), Lewis (1986) および片山徹 (1999) を参考にした.

2.1. 一般化固有値

(E, A) の固有多項式を

$$\varphi(z) = \det(zE - A) \tag{36}$$

と定義する. 次の仮定を置く.

仮定 12. $\varphi(z)$ は恒等的にはゼロでない. このとき, (E, A) はレギュラーであるという.

$E = (e_{ij}), A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ として固有多項式を計算してみると,

$$\varphi(z) = (\det E)z^2 - (e_{11}a_{22} + e_{22}a_{11} + e_{12}a_{21} + e_{21}a_{12})z + \det A \tag{37}$$

が成り立つ. $\det E = 0$ であれば, $\varphi(z)$ の次数は n を下回る. 一般に, $\varphi(z)$ が恒等的にゼロでなければ, $\varphi(z) = 0$ は $d \leq n$ 個の解を持つ. これらの解を (E, A) の有限固有値 (finite eigenvalues) という. 有限固有値の集合を $\mathrm{sp}(E, A) = \{z \in \mathbb{C} \mid \varphi(z) = 0\}$ と定義する.

同時に, $\det E = 0$ であればゼロ固有値 (重複度 $n - d$) が存在し,

$$Ev = 0, \quad v \neq 0, \quad v \in \mathbb{C}^n \tag{38}$$

なるベクトルが存在する. これらを (E, A) の無限大固有値 (infinite eigenvalue) という.

一般化固有ベクトルの構成はジョルダン標準形のケースとほとんど同じである.

1 次の有限固有ベクトル　$\lambda_i \in \mathrm{sp}(E, A)$ とする.

$$(A - \lambda_i E)v_{ij}^1 = 0 \tag{39}$$

なる非ゼロベクトル $v_{ij}^1, j = 1, \ldots, \eta_i = \dim\ker(A - \lambda_i E)$ を 1 次独立に選ぶことができる.

k 次の有限固有ベクトル　$\mathrm{span}\{v_{i1}^1, \ldots, v_{i\eta_i}^1\}$ が λ_i の代数的重複度と同じ次元を持てば, λ_i に対応する一般化固有空間が完成している．この場合は行列が対角化されている．さもなくば, 各 $\lambda_i \in \mathrm{sp}(E, A)$ と各 $j = 1, \ldots, \eta_i$ について, 高次の一般化固有ベクトル, すなわち

$$(A - \lambda_i E)v_{ij}^{k+1} = Ev_{ij}^k, \quad k \geq 1 \tag{40}$$

なる固有ベクトルを探す．ジョルダン標準形の理論ではまさに同じ手続きが重複固有値に対するジョルダン標準形の構造を決定するのであった．このようにして, λ_i の代数的重複度と同じ数のベクトルの組

$$V_i = \begin{bmatrix} v_{i1}^1 & \cdots & v_{i1}^{k_{i1}} & | & \cdots & \cdots & | & v_{i\eta_i}^1 & \cdots & v_{i\eta_i}^{k_{i\eta_i}} \end{bmatrix} \tag{41}$$

が, 1 次独立になるようにできる．

表現行列　各 v_{ij}, $j = 1, \ldots, \eta_i$ に対して定まる部分行列の表現は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} Av_{ij}^1 & Av_{ij}^2 & \cdots & Av_{ij}^{k_{ij}-1} & Av_{ij}^{k_{ij}} \end{bmatrix} \\ &\qquad = \begin{bmatrix} Ev_{ij}^1 & Ev_{ij}^2 & \cdots & Ev_{ij}^{k_{ij}-1} & Ev_{ij}^{k_{ij}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{42}$$

終域の基底として, $\begin{bmatrix} Ev_{ij}^1 & Ev_{ij}^2 & \cdots & Ev_{ij}^{k_{ij}-1} & Ev_{ij}^{k_{ij}} \end{bmatrix}$ を取っていることに注意せよ．これらが 1 次独立であることは, v_{ij}^1 が $\ker E$ の成分をもたないことから従う (確認せよ).

1 次の無限大固有ベクトル　E のゼロ固有値に対応する固有ベクトルを求める．

$$Ev_{\infty j}^1 = 0, \tag{43}$$

$v_{\infty j}^1 \neq 0$, $j = 1, \ldots, \eta = \dim\ker E$.

k 次の無限大固有ベクトル　非ゼロベクトルの列, $v_{\infty j}^1, \ldots, v_{\infty j}^{k_{\infty j}}$ を

$$Ev_{\infty j}^{k+1} = Av_{\infty j}^k, \quad k \geq 1$$

が成り立つように選ぶ.

表現行列　各 $v_{\infty j}$, $j=1,\dots,\eta_i$ に対して定まる部分行列の表現は, 以下のようにできる.

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}Ev_{\infty j}^1 & Ev_{\infty j}^2 & \cdots & Ev_{\infty j}^{k_{\infty j}-1} & Ev_{\infty j}^{k_{\infty j}}\end{bmatrix}\\ &\qquad = \begin{bmatrix}Av_{\infty j}^1 & Av_{\infty j}^2 & \cdots & Av_{\infty j}^{k_{\infty j}-1} & Av_{\infty j}^{k_{\infty j}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1\\ & & & & 0\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{44}$$

ここで, 終域の基底として $\begin{bmatrix}Av_{\infty j}^1 & Av_{\infty j}^2 & \cdots & Av_{\infty j}^{k_{\infty j}-1} & Av_{\infty j}^{k_{\infty j}}\end{bmatrix}$ を取っていることに注意せよ.

定理 13 (ワイエルシュトラス形式)**.** (E,A) はレギュラーであるとする. このとき, 上のように得た非ゼロベクトルを並べた行列

$$V=[v_{ij}^k \mid v_{\infty j}^k],\quad W=[Ev_{ij}^k \mid Av_{\infty j}^k]$$

は非正則であり,

$$W^{-1}EV=\begin{bmatrix}I & \\ & N\end{bmatrix}, \tag{45}$$

$$W^{-1}AV=\begin{bmatrix}J & \\ & I\end{bmatrix}, \tag{46}$$

ただし, N は優対角成分にのみ *1* をもつべきゼロ行列. J は有限固有値を対角成分にもつジョルダン標準形行列である.

デスクリプタシステムについて次の結果を得る.

定理 14. (E,A) をレギュラーとする. デスクリプタシステム

$$Ex_{t+1}=Ax_t+Bu_t \tag{47}$$

を前向きのシステム方程式と, 後ろ向きのシステム方程式に分解することができる. すなわち, 適当な変数変換のもとで,

$$\hat{x}_{t+1}^f=J\hat{x}_t^f+B^fu_t, \tag{48}$$

$$\hat{x}_t^b=N\hat{x}_{t+1}^b+B^bu_t. \tag{49}$$

と分解できる.

証明. 式 (47) をワイエルシュトラス形式に変換しよう.

$$(W^{-1}EV)(V^{-1}x_{t+1})=(W^{-1}AV)(V^{-1}x_t)+W^{-1}Bu_t.$$

$\hat{x}_t:=V^{-1}x_t$, $\hat{x}_t=(\hat{x}_t^f,\hat{x}_t^b)$, $W^{-1}B=(B^f,-B^b)$ の分解を式 (45), (46) と適合するようにすれば

$$\begin{bmatrix}I & \\ & N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_{t+1}^f\\ \hat{x}_{t+1}^b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J & \\ & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_t^f\\ \hat{x}_t^b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B^f\\ -B^b\end{bmatrix}u_t. \tag{50}$$

これを整理すれば結果の式を得る. □

レギュラーなデスクリプタシステムは, $\hat{x}^f$ の初期条件と, $\hat{x}^b$ の終端条件, および u_t によって解軌道が一意的に定まる. これは Luenberger (1977) の結果である.

問題 15. 式 (48) と (49) で表されるシステムの一般解を書き下しなさい.

A. ハミルトン・ケーリーの定理の証明

A を $n \times n$ 行列とする. A の第 i 行目と第 j 行目を除いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを A の (i, j) 余因子といい, $\Delta_{i,j}$ と記す.

事実 16. 任意の $i = 1, \ldots, n$ と $j = 1, \ldots, n$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \\ \det A &= a_{1j}\Delta_{1j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}. \end{aligned}$$

証明. 練習問題とする. □

A の随伴行列 (adjugate matrix) を

$$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

と定義する. このとき, 次の結果が得られる.

定理 17. 任意の $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して次が成り立つ.

$$A\,(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A)\,A = (\det A)\,I_{n \times n}.$$

証明. 行列積の定義より

$$\begin{aligned} [A\,(\mathrm{adj}A)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,(\mathrm{adj}A)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk}. \end{aligned}$$

$i = j$ のときは事実 16より $\det A$ に一致する. $i \neq j$ としよう. $\Delta_{j1}, \ldots, \Delta_{jn}$ は A の j 行目を取り除いて作られるので, A の j 行目を変更してもこれらの小行列式は不変である. したがって, A の j 行目を i 行目と同じ値をもつようにしてもよい. このように作った $\tilde{A}$ は $\det \tilde{A} = 0$ が成り立つ. この行列を j 行目に関して展開すると,

$$0 = \det \tilde{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\Delta_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk}$$

を得る. $(\mathrm{adj}A)\,A = (\det A)\,I_{n \times n}$ についても同様に証明できる. □

定理 *1* の証明. 定理 17 より

$$\begin{aligned}\det(zI - A)\cdot I &= (zI - A)\,[\mathrm{adj}(zI - A)]\\ &= [\mathrm{adj}(zI - A)]\,(zI - A)\end{aligned}$$

が成り立つ. $\mathrm{adj}(zI{-}A)$ は高々 $(n{-}1)$ 次の多項式を成分とする行列なので, $[\mathrm{adj}(zI - A)]_{ij} = \Delta_{ji} = b_{ij,0} + b_{ij,1}z + \cdots + b_{ij,n-1}z^{n-1}$ と書ける. 整理すると

$$\mathrm{adj}(zI - A) = B_0 + B_1 z + \cdots + B_{n-1}z^{n-1}.$$

A と 各 $B_0, \ldots, B_{n-1}$ が可換であることに注意しよう.

$$\begin{aligned}\phi_A(z) &= z\left(B_0 + B_1 z + \cdots + B_{n-1}z^{n-1}\right) - A\left(B_0 + B_1 z + \cdots + B_{n-1}z^{n-1}\right)\\ &= \left(B_0 z + B_1 z^2 + \cdots + B_{n-1}z^n\right) - \left(B_0 A + B_1 A z + \cdots + B_{n-1}Az^{n-1}\right)\\ &= -B_0 A + (B_0 - B_1 A)\,z + \cdots + (B_{n-2} - B_{n-1}A)\,z^{n-1} + B_{n-1}z^n.\end{aligned}$$

ここで $z = A$ を代入すると, $\phi_A(A) = 0$ が成り立つことが分かる. □

Lewis, F. L. (1984): “Descriptor systems: Decomposition into forward and backward systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-29, 167–170.

——— (1986): “A survey of linear singular systems,” *Circuits Systems Signal Process*, 5, 3–36.

Luenberger, D. G. (1977): “Dynamic equations in descriptor form,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22, 312–321.

片山徹 (1999): 線形システムの最適制御—デスクリプタシステム入門, 近代科学社.