

Co je to matematika?

Hello FIT 2019

Daniel Dombek, Tomáš Kalvoda, Karel Klouda

KAM FIT ČVUT

19. září 2019



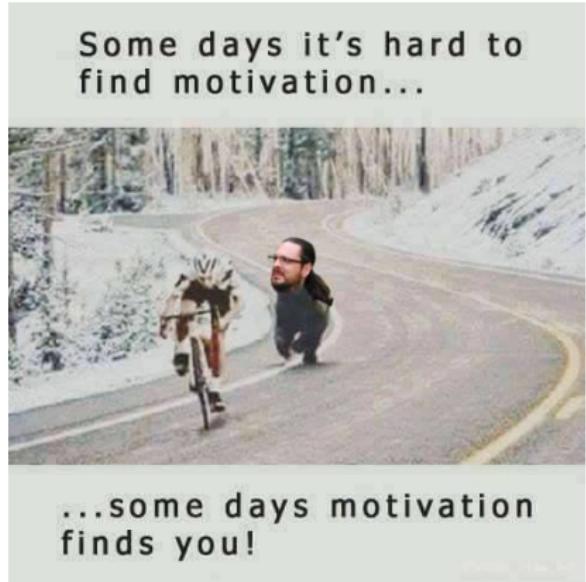
FAKULTA
INFORMAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ
ČVUT V PRAZE

Přednášející



**THE
LiNiNG**

Daniel Dombek
daniel.dombek@fit.cvut.cz



Tomáš Kalvoda
[@kalvotom](https://twitter.com/kalvotom)

Úvod



Úvod



Úvod

- ▶ Blíží se akademický Nový rok (neděle 22. září – narozeniny Bilba a Frodo Pytlíka)!
- ▶ Již příští týden začne výuka!
- ▶ Co vás v matematických předmětech čeká a nemine?
- ▶ Jak přistupovat k učení matematiky a na co se zaměřit
v matematických předmětech?

Úvod

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.

(John von Neuman)

Úvod

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.

(John von Neuman)

- ▶ Matematika je opravdu **jednoduchá**, protože se řídí jednoduchými logickými pravidly.
- ▶ Matematiku nekomplikuje **realita**, je to jediná věda, která zkoumá sama sebe!
- ▶ Zároveň ale tvoří nevyvratitelný základ **exaktních** věd, které realitu popisují.

Úvod: řečnické otázky

- ▶ Proč matematika není „příliš oblíbená“?

- ▶ Proč naše matematické předměty nemají vyšší průchodnost?

¹Resp. k něčemu, co jí je podstatně blíže.

Úvod: řečnické otázky

- ▶ Proč matematika není „příliš oblíbená“?
- ▶ Proč naše matematické předměty nemají vyšší průchodnost?
- ▶ Je potřeba se nebát a s otevřenou myslí zvládnout přechod ze **středoškolské matematiky** k **matematice¹**.

¹Resp. k něčemu, co jí je podstatně blíže.

Úvod: některé předměty oblíbené jsou!



Středoškolská matematika...

- ▶ ... klade **důraz** na počítání příkladů.

Středoškolská matematika...

- ▶ ... klade **důraz** na počítání příkladů.
- ▶ ... vyvolává mylný dojem, že pro **každý** příklad existuje **postup**, pomocí kterého ho lze **vyřešit**.

Středoškolská matematika . . .

- ▶ ... kladě **důraz** na počítání příkladů.
- ▶ ... vyvolává mylný dojem, že pro **každý** příklad existuje **postup**, pomocí kterého ho lze **vyřešit**.
- ▶ ... vyvolává mylný dojem, že **rozumět a chápout** je ekvivalentní pouhé znalosti tohoto postupu.

Středoškolská matematika . . .

- ▶ ... klade **důraz** na počítání příkladů.
- ▶ ... vyvolává mylný dojem, že pro **každý** příklad existuje **postup**, pomocí kterého ho lze **vyřešit**.
- ▶ ... vyvolává mylný dojem, že **rozumět a chápout** je ekvivalentní pouhé znalosti tohoto postupu.
- ▶ ... často nejde hlouběji k jádru problému a neklade si otázku **proč?**

Středoškolská matematika...

- ▶ ... klade **důraz** na počítání příkladů.
- ▶ ... vyvolává mylný dojem, že pro **každý** příklad existuje **postup**, pomocí kterého ho lze **vyřešit**.
- ▶ ... vyvolává mylný dojem, že **rozumět a chápat** je ekvivalentní pouhé znalosti tohoto postupu.
- ▶ ... často nejde hlouběji k jádru problému a neklade si otázku **proč?**
- ▶ ... zavádějícím způsobem odděluje **teorii** („to divné nedůležité“) od **praxe** („počítání příkladů“).

Středoškolská matematika...

- ▶ ... klade **důraz** na počítání příkladů.
- ▶ ... vyvolává mylný dojem, že pro **každý** příklad existuje **postup**, pomocí kterého ho lze **vyřešit**.
- ▶ ... vyvolává mylný dojem, že **rozumět a chápout** je ekvivalentní pouhé znalosti tohoto postupu.
- ▶ ... často nejde hlouběji k jádru problému a neklade si otázku **proč?**
- ▶ ... zavádějícím způsobem odděluje **teorii** („to divné nedůležité“) od **praxe** („počítání příkladů“).
- ▶ ... je poměrně **daleko** od toho, cím je matematika tak zajímavá a důležitá.

Stačí to? Tohle je Matematika?

- ▶ Ne.

Stačí to? Tohle je Matematika?

- ▶ Ne.
- ▶ Ne.

Stačí to? Tohle je Matematika?

- ▶ **Ne.**
- ▶ **Ne.**
- ▶ Odpověď na tuto otázku ovšem zdaleka není jednoduchá a ani krátká.

Stačí to? Tohle je Matematika?

- ▶ Ne.
- ▶ Ne.
- ▶ Odpověď na tuto otázku ovšem zdaleka není jednoduchá a ani krátká.
- ▶ Matematika je zejména **způsob myšlení a přístup k řešení problémů**, který se vyznačuje...
 - ▶ ... hledáním a studiem abstraktních **vzorů**.
 - ▶ ... argumentací založenou na **logických** pravidlech.
 - ▶ ... snahou dostat se co nejblíže k jádru problému a k jeho porozumění.
 - ▶ ... **krásou**.

Co to znamená, že něčemu rozumím?

- ▶ Opravdové porozumění znamená, že...

Co to znamená, že něčemu rozumím?

- ▶ Opravdové porozumění znamená, že...
 - ▶ ... umíte řešit příklady, pro které jste se „postup“ neučili!

Co to znamená, že něčemu rozumím?

- ▶ Opravdové porozumění znamená, že...
 - ▶ ... umíte řešit příklady, pro které jste se „postup“ neučili!
 - ▶ ... dokážete za problémem vidět cestu, kterou by šel vyřešit, i když problém není formulován jedním konkrétním způsobem (nepotřebujete nutně „kuchařkovitost“).

Co to znamená, že něčemu rozumím?

- ▶ Opravdové porozumění znamená, že...
 - ▶ ... umíte řešit příklady, pro které jste se „postup“ neučili!
 - ▶ ... dokážete za problémem vidět cestu, kterou by šel vyřešit, i když problém není formulován jedním konkrétním způsobem (nepotřebujete nutně „kuchařkovitost“).
 - ▶ ... dokážete si věci odvodit, i když jste tvrzení dávno zapomněli.

Co to znamená, že něčemu rozumím?

- ▶ Opravdové porozumění znamená, že...
 - ▶ ... umíte řešit příklady, pro které jste se „postup“ neučili!
 - ▶ ... dokážete za problémem vidět cestu, kterou by šel vyřešit, i když problém není formulován jedním konkrétním způsobem (nepotřebujete nutně „kuchařkovitost“).
 - ▶ ... dokážete si věci odvodit, i když jste tvrzení dávno zapomněli.
- ▶ Pokud lze úlohy jistého typu řešit opakováním známého postupu, pak jsou to všechno **vyřešené úlohy** a příslušnou práci lze nechat strojí.

Co to znamená, že něčemu rozumím?

- ▶ Opravdové porozumění znamená, že...
 - ▶ ... umíte řešit příklady, pro které jste se „postup“ neučili!
 - ▶ ... dokážete za problémem vidět cestu, kterou by šel vyřešit, i když problém není formulován jedním konkrétním způsobem (nepotřebujete nutně „kuchařkovitost“).
 - ▶ ... dokážete si věci odvodit, i když jste tvrzení dávno zapomněli.
- ▶ Pokud lze úlohy jistého typu řešit opakováním známého postupu, pak jsou to všechno **vyřešené úlohy** a příslušnou práci lze nechat stroji.
- ▶ Příklady budete počítat (ó ano!), ale je v nich nutné vidět **demonstraci** probrané teorie, typicky (zejména z počátku) nejde o skutečné **aplikace** teorie.

K čemu mi to bude?

Obecný přehled, schopnost řešit problémy:

K čemu mi to bude?

Obecný přehled, schopnost řešit problémy:

- ▶ IT se snaží řešit problémy ze spousty různorodých oblastí.
Váš obor je **univerzální**. Není zaměřen na opakované řešení jednoho problému.

K čemu mi to bude?

Obecný přehled, schopnost řešit problémy:

- ▶ IT se snaží řešit problémy ze spousty různorodých oblastí.
Váš obor je **univerzální**. Není zaměřen na opakované řešení jednoho problému.
- ▶ Analýza problému (doménový model, vhodný návrh řešení), algoritmické řešení (důkaz),...

K čemu mi to bude?

Obecný přehled, schopnost řešit problémy:

- ▶ IT se snaží řešit problémy ze spousty různorodých oblastí.
Váš obor je **univerzální**. Není zaměřen na opakované řešení jednoho problému.
- ▶ Analýza problému (doménový model, vhodný návrh řešení), algoritmické řešení (důkaz),...
- ▶ Schopnost vhodně navrhnut databázi, napsat dobře čitelný a udržitelný program, sepsat dokumentaci nebo BP dávající smysl je přímo navázána na schopnost abstrahovat a systematicky přemýšlet.

K čemu mi to bude?

Obecný přehled, schopnost řešit problémy:

- ▶ IT se snaží řešit problémy ze spousty různorodých oblastí.
Váš obor je **univerzální**. Není zaměřen na opakované řešení jednoho problému.
- ▶ Analýza problému (doménový model, vhodný návrh řešení), algoritmické řešení (důkaz),...
- ▶ Schopnost vhodně navrhnut databázi, napsat dobře čitelný a udržitelný program, sepsat dokumentaci nebo BP dávající smysl je přímo navázána na schopnost abstrahovat a systematicky přemýšlet.
- ▶ Jde o jeden z nejrychleji se rozvíjejících oborů. Umět se orientovat v nových myšlenkách (nová programovací paradigmata, jazyky, frameworky, ...) je pro vás zásadní.
Celý život se budete učit něco nového.

K čemu mi to bude?

Při řešení řady konkrétních problémů narazíte na konkrétní matematické partie, velmi namátkou:

- ▶ strojové učení, AI (obecná optimalizace),
- ▶ zpracování audio/video (DFT, FFT, wavelety),
- ▶ bezpečnost (obecná algebra, teorie čísel),
- ▶ grafika (lineární algebra),
- ▶ Google page rank (vlastní čísla),
- ▶ analýza dat (PCA, regrese, statistika),
- ▶ ...

K čemu mi to bude?

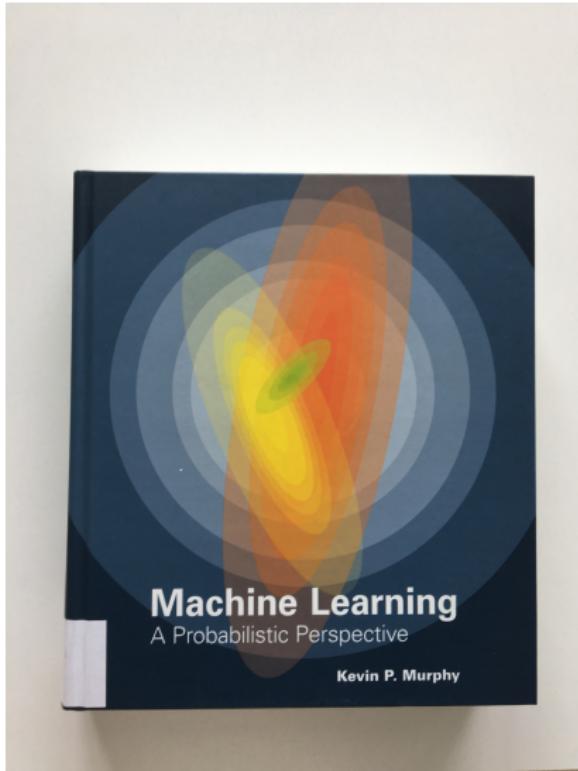


Figure 24.1 Example of image denoising. We use an Ising prior with $W_{ij} = J = 1$ and a Gaussian noise model with $\sigma = 2$. We use Gibbs sampling (Section 24.2) to perform approximate inference. (a) Sample from the posterior after one sweep over the image. (b) Sample after 5 sweeps. (c) Posterior mean, computed by averaging over 15 sweeps. Compare to Figure 21.3 which shows the results of using mean field inference. Figure generated by `isingImageDenoiseDemo`.

$\{-1, +1\}$, the full conditional becomes

$$p(x_t = +1 | \mathbf{x}_{-t}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\prod_{s \in \text{nbr}(t)} \psi_{st}(x_t = +1, x_s)}{\prod_{s \in \text{nbr}(t)} \psi(s_t = +1, x_s) + \prod_{s \in \text{nbr}(t)} \psi(x_t = -1, x_s)} \quad (24.2)$$

$$= \frac{\exp[J \sum_{s \in \text{nbr}(t)} x_s]}{\exp[J \sum_{s \in \text{nbr}(t)} x_s] + \exp[-J \sum_{s \in \text{nbr}(t)} x_s]} \quad (24.3)$$

$$= \frac{\exp[J \eta_t]}{\exp[J \eta_t] + \exp[-J \eta_t]} = \text{sigmoid}(2J\eta_t) \quad (24.4)$$

where J is the coupling strength, $\eta_t \triangleq \sum_{s \in \text{nbr}(t)} x_s$ and $\text{sigmoid}(u) = 1/(1 + e^{-u})$ is the sigmoid function. It is easy to see that $\eta_t = x_t(a_t - d_t)$, where a_t is the number of neighbors that agree with (have the same sign as) t , and d_t is the number of neighbors who disagree. If this number is equal, the “forces” on x_t cancel out, so the full conditional is uniform.

We can combine an Ising prior with a local evidence term ψ_t . For example, with a Gaussian observation model, we have $\psi_t(x_t) = \mathcal{N}(y_t | x_t, \sigma^2)$. The full conditional becomes

$$p(x_t = +1 | \mathbf{x}_{-t}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\exp[J \eta_t |\psi_t(+1)}}{\exp[J \eta_t |\psi_t(+1)] + \exp[-J \eta_t |\psi_t(-1)}} \quad (24.5)$$

$$= \text{sigmoid}\left(2J\eta_t - \log \frac{\psi_t(+1)}{\psi_t(-1)}\right) \quad (24.6)$$

Now the probability of x_t entering each state is determined both by compatibility with its neighbors (the Ising prior) and compatibility with the data (the local likelihood term).

See Figure 24.1 for an example of this algorithm applied to a simple image denoising problem. The results are similar to mean field (Figure 21.3) except that the final estimate (based on over-sampling) is somewhat “blurrier”, due to the fact that mean field tends to be over-confident.

Jak na to?

- ▶ Často budeme studovat **důkazy**: to jsou jednoduché odpovědi na otázku „**proč** to tvrzení platí?“
- ▶ Důkaz je v podstatě dialog s vaším nedůvěřivým a kritickým já.

Jak na to?

- ▶ Často budeme studovat **důkazy**: to jsou jednoduché odpovědi na otázku „**proč** to tvrzení platí?“
- ▶ Důkaz je v podstatě dialog s vaším nedůvěřivým a kritickým já.
- ▶ Nebojte se o nejasnostech a svých pochybách
 - ▶ mluvit,
 - ▶ zvednout ruku na cvičení či přednášce,
 - ▶ konzultovat cvičícího či přednášejícího,
 - ▶ položit dotaz na FB/MARASTu.

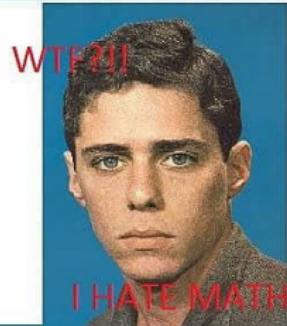
Jak na to?

- ▶ Často budeme studovat **důkazy**: to jsou jednoduché odpovědi na otázku „**proč** to tvrzení platí?“
- ▶ Důkaz je v podstatě dialog s vaším nedůvěřivým a kritickým já.
- ▶ Nebojte se o nejasnostech a svých pochybách
 - ▶ mluvit,
 - ▶ zvednout ruku na cvičení či přednášce,
 - ▶ konzultovat cvičícího či přednášejícího,
 - ▶ položit dotaz na FB/MARASTu.
- ▶ Kdyby vám vše bylo jasné, tak není co vás učit.
Neporozumění a nepochopení je první fáze poznávání.

Jak na to?

Nebojte se
symbolického zápisu!
Osvojte si ho přjměte ho
za vlastní.

$$\begin{cases} x + x + x = 60 \\ x + y + y = 30 \\ y - 2z = 3 \\ z + x + y = ? \end{cases}$$



Can you solve this?

$$\text{Red flower} + \text{Red flower} + \text{Red flower} = 60$$

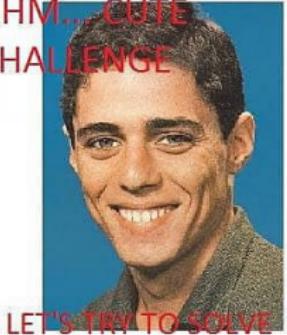
$$\text{Red flower} + \text{Blue flower} + \text{Blue flower} = 30$$

$$\text{Blue flower} - \text{Yellow flower} = 3$$

$$\text{Yellow flower} + \text{Red flower} + \text{Blue flower} = ?$$

rounding.cz

UHM... CUTE
CHALLENGE

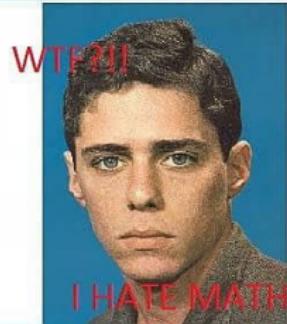


Jak na to?

Nebojte se
symbolického zápisu!
Osvojte si ho přjměte ho
za vlastní.

Vždyť programování
samotné je z části tvorba
symbolického zápisu
svázaného velmi tvrdými
pravidly.

$$\begin{cases} x + x + x = 60 \\ x + y + y = 30 \\ y - 2z = 3 \\ z + x + y = ? \end{cases}$$



Can you solve this?

$$\text{red flower} + \text{red flower} + \text{red flower} = 60$$

$$\text{red flower} + \text{blue flower} + \text{blue flower} = 30$$

$$\text{blue flower} - \text{yellow flower} = 3$$

$$\text{yellow flower} + \text{red flower} + \text{blue flower} = ?$$

rounding.cz

UHM... CUTE
CHALLENGE



Děkujeme za pozornost!