実現可能性モデルノート

石井大海

2017-07-05

概要

実現可能性モデルの手法は，Curry–Howard 対応を拡張する形で ZF のモデルを与える方法であり，Krivine [6] によって導入された．強制法を特別な場合として含むが，ZFC から開始しても ZF + ¬AC のモデルが得られるという点で強制法を真に一般化するものになっている．

目次

1　背景：組合せ論理とヒルベルトの命題計算

実現可能性モデルの議論に入る前に，背景知識としてヒルベルト流論理体系と Curry の結合子論理の間の関係について振り返っておきます．

1.1　直観主義論理と Curry–Howard 対応

Def. 1.1 (ヒルベルト流の論理体系 HJ). 直観主義命題論理のヒルベルト流の論理体系 **HJ** は推論規則

$$\frac{M : P \to Q \qquad N : P}{MN : Q}\ (\mathrm{MP})$$

および次の論理公理図式から成る：

$$\mathbf{S} : (P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R, \qquad \mathbf{K} : P \to Q \to P.$$

但し $\to$ は右結合とする．命題変数 P_i と論理式 φ_i の組からなる集合 $\{P_1 : \varphi_1, P_2 : \varphi_2, \dots\}$ を**公理系**，あるいは**文脈**と呼ぶ．$M : \varphi$ が公理系 Γ から MP と公理図式 $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ によって証明可能であるとき，$\Gamma \vdash_{\mathbf{P}_1 \cdots \mathbf{P}_n} M : \varphi$ と書く．この時，M を φ の**証明項** (*proof-term*) と呼ぶ．何らかの証明項 M があって $\Gamma \vdash_S M : \varphi$ となる時，単に $\Gamma \vdash_S \varphi$ と書く．特に $\Gamma \vdash_{\mathbf{HJ}} \varphi :\equiv \Gamma \vdash_{\mathbf{SK}} \varphi$ である．

一般的に Hilbert 流で採用されるのは上の論理公理ですが，以下の議論では次を採用します：

定理 1.1. $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{I}, \mathbf{W}$ を次で与えられる公理図式とする：

$$\mathbf{B} : (Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R, \qquad \mathbf{C} : (P \to Q \to R) \to Q \to P \to R,$$
$$\mathbf{I} : P \to P, \qquad \mathbf{W} : (P \to P \to Q) \to P \to Q.$$

この時 $\Gamma \vdash_{\mathbf{HJ}} \varphi \iff \Gamma \vdash_{\mathbf{SKI}} \varphi \iff \Gamma \vdash_{\mathbf{BCKW}} \varphi \iff \Gamma \vdash_{\mathbf{BCKWI}} \varphi.$

S と **K** の組合せは色々混ざっていて意味がわかりづらいですが，推件計算で **B** はカット，**C** は交換規則，**K** は弱化規則，**W** は縮約規則に対応するため，証明論や計算論の文脈ではこれらの規則の振る舞いを分析するために **SK** の代わりに **BCKW** を採用することが多いです．

HJ と深い関係にあるのが，Curry による**結合子論理**です：

Def. 1.2. Λ_0 を原子項とする **CL-項**の全体 $\Lambda_{\mathbf{CL}}(\Lambda_0)$ を次で定まる最小の集合とする：

$$M \in \Lambda_0 \implies M \in \Lambda_{\mathbf{CL}}(\Lambda_0), \qquad x : \text{変数} \implies x \in \Lambda_{\mathbf{CL}}(\Lambda_0),$$
$$M, N \in \Lambda_{\mathbf{CL}}(\Lambda_0) \implies (MN) \in \Lambda_{\mathbf{CL}}(\Lambda_0).$$

$M \in \Lambda_{\mathbf{CL}}$ に現れる変数の全体を $\mathrm{FV}(M)$ で表す．$\mathrm{FV}(M) = \emptyset$ の時 M は**閉 CL 項**または**コンビネータ**と呼ばれる．(MN) の形の項は**適用項**と呼ばれる．適用は左結合とする：$MN_1 \dots N_n \equiv ((MN_1) \dots N_n)$.
以下 $\Lambda_{\mathbf{BCKWI}} := \Lambda_{\mathbf{CL}}(\{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{W}, \mathbf{I}\})$ とする．$\Lambda_{\mathbf{BCKWI}}$ 上の**弱頭部簡約**関係 $\rhd_{wh}$ を次の関係式で定義される Λ 上の二項関係とする：

$$\mathbf{B}MNL \rhd_{wh} M(NL), \qquad \mathbf{C}MNL \rhd_{wh} MLN,$$
$$\mathbf{K}MN \rhd_{wh} M, \qquad \mathbf{W}MN \rhd_{wh} MNN, \qquad \mathbf{I}M \rhd_{wh} M$$
$$M_1 \rhd_{wh} M_2 \implies M_1 N \rhd_{wh} M_2 N.$$

弱簡約関係 $\rhd_w$ を定める：

$$M \rhd_{wh} N \implies M \rhd_w N,$$
$$M_1 \rhd_w M_2 \implies M_1 N \rhd_w M_2 N, \qquad N_1 \rhd_w N_2 \implies MN_1 \rhd_w MN_2.$$

$\rhd_{wh}^*$ を $\rhd_{wh}$ が生成する Λ 上の最小の擬順序とする．$\rhd^*$ も同様．
$M \rhd_w N$ となる **CL**-項 N が存在しない時（つまり $\rhd_w^*$-極大であるとき），項 M が**弱正規形**であると言う．**弱頭部正規形**とは，$\rhd_{wh}^*$ に関する極大元の事である．項 M に対してある $\rhd$-正規形 N があって $M \rhd^* N$ となるとき，M は $\rhd$-**正規形を持つ**，あるいは $\rhd$-**弱正規化定理を満たす**という．
項 M において，原子項に関する簡約規則が適用出来る形になっている部分項を**簡約基** (*redex*) と呼ぶ．
項 $M \in \Lambda$ が $\rhd$-**強正規化定理を満たす** (M *strongly normalises*) とは M から始まる $\rhd$-無限上昇列を持たないことである．M が $\rhd_w$ に関する強正規化定理を満たす時，単に M は強正規化定理を満たすという．

結局，上の議論は **CL**-項に対する項書き換え規則を定めていると思えます．実際，上で定義された **CL**-項の書き換え規則を使うと，任意の再帰関数を **CL**-項でコードすることが出来，簡約はその関数の計算過程に対応しています．

弱頭部簡約と弱簡約は原子項 $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{W}, \mathbf{I}$ に関する書き換え規則は共有していますが，弱頭部簡約では一番先頭に来ている簡約基のみを簡約していくのに対し，弱簡約では手当たり次第に全ての簡約基を簡約していく，という違いがあります．

項 M が $\rhd$-強正規化定理を満たすなら必ず $\rhd$-正規形を持ちますが，逆は成り立ちません：

例 1.1 (弱簡約と弱頭部簡約の違い，弱正規化と強正規化の違い)． $\mathbf{A} := \mathbf{W}(\mathbf{B}(\mathbf{BW}(\mathbf{CB})))$, $\mathbf{\Theta} := \mathbf{AA}$ と置く．この時，$\mathbf{\Theta} M \rhd_{wh}^* M(\mathbf{\Theta} M)$ となる事が手計算によって簡単にわかる．

そこで，$M := \mathbf{\Theta}(\mathbf{KI})$ を考えると，

$$\mathbf{\Theta}(\mathbf{KI}) \rhd_{wh}^{*} \mathbf{KI}(\mathbf{\Theta}(\mathbf{KI})) \rhd_{wh} \mathbf{I}$$

となる．よって M は弱頭部正規形を持ち，特に弱頭部簡約の過程は明らかに一意に定まるので，M は弱頭部簡約にかんして強正規化定理を満たす．また，$\mathbf{I}$ は簡約基を一切含まないので弱正規形になっているから，弱簡約に関する弱正規化定理も満たしている．しかし，M は次のような弱簡約の無限列を持つので，強正規化定理は満たさない：

$$M \rhd_{w}^{*} \mathbf{\Theta}(\mathbf{KI}) \rhd_{w}^{*} \mathbf{KI}(\mathbf{KI}(\mathbf{\Theta}(\mathbf{KI}))) \rhd_{w}^{*} \dots$$

結局の所，M が $\rhd$ に関して「弱正規化定理を満たす」というのは，「上手いこと順番を選べば M の計算が停止する」という事を表すのに対して，「強正規化定理を満たす」というのは「どう計算しても必ず計算が停止する」ことを表しています．

弱簡約と弱頭部簡約の正規化の関係を述べたのが次の定理です：

定理 1.2. M が弱正規形を持つのなら，M は $\rhd_{wh}$ に関して強正規化定理を満たす．

対偶を取れば，「弱頭部簡約で計算が停止しなければ，どんな順番で簡約基を選んでも弱簡約が停止することはない」という事になります．よって，簡約の停止性のみが問題の場合，弱頭部簡約だけを考えていれば良いことになります．

どんな時に項 M が強正規化定理を満たすのか？ という十分条件を与えるのが次の定理です：

定理 1.3 (単純型付 CL-項の強正規化定理). 命題論理の論理式 φ と公理系 Γ が存在して $\Gamma \vdash_{\mathbf{HJ}} M : \varphi$ となるとき，M は強正規化定理を満たす．

このように，**CL**-項 M について $\Gamma \vdash M : \varphi$ となるような φ を（文脈 Γ における）M の**型**と呼びます．

この事から，上の「反例」として出された $\mathbf{\Theta}$ を証明項に持つような直観主義論理の論理式は存在しないことがわかります．この定理は必要十分ではありませんが，**CL**-項の簡約に関する性質と直観主義論理に関する深い関係を示唆しています．こうした計算モデルと論理体系の間に成り立つ対応を *Curry–Howard* **対応**と呼びます．Curry–Howard 対応においては，命題が型に，証明が項に，カット除去が項の簡約に対応しています．

注意 1.1 (理論計算機科学からの注意). 上で触れた $\mathbf{\Theta}$ は一般に Turing の不動点コンビネータと呼ばれています．一般に，$\mathbf{Y}M \rhd^* M(\mathbf{Y}M)$ というような性質を持つようなコンビネータがあると，これにより再帰関数を表現出来るようになります．これに型を付けられると，計算機科学としては嬉しくなります．実際，公理系に $\mathbf{Y} : (P \to P) \to P$ を付け加えれば，$\mathbf{Y}$ を使って定義出来る再帰関数には型が付くようになります．この時，たとえば $\vdash_{\mathbf{HJ},\mathbf{Y}} \mathbf{YI} : A \to A$ となりますが，$\mathbf{YI} \rhd_{wh} \mathbf{I}(\mathbf{YI}) \rhd_{wh} \mathbf{YI} \rhd_{wh} \dots$ と弱頭部簡約は永久に停止しないので，強正規化定理は成り立ちません．それどころか，弱簡約に関する弱正規化も成り立たなくなります．また，これに対応する公理 $(P \to P) \to P$ はただの循環論法ですから，これを直観主義論理に付け加えた体系は明らかに矛盾しています．
計算機科学では，「型」は関数の不変条件や安全性を担保するのに使われます．ですから，少しでも多くの「有用」な関数に型が付き，その事実によって何らかのプログラムの性質が保証されてくれると助かる訳です[*1)]．
一方，我々は以下では結合子代数を用いてマトモなモデルを創りたいという欲求があります．Krivine の実現可能性代数では，代数的な方法によって上の単純型付き結合子論理の型付けを拡張し，論理的な矛盾が出ない範囲で $\mathbf{Y}$ などにも「型」が付くようになっています．

1.2 計算モデルとしての結合子論理

上で結合子論理は計算モデルとして見ることが出来る，と述べました．本節では簡単に $\mathbf{CL}$ における「計算」を概観することにします．

その前に，$\mathbf{CL}$-項を解り易く記述するための「略記法」として λ-**記法**を導入します[*2)]．先に結論を書いてしまうと，$\mathbf{CL}$ 項 M に変数 x に対して，$\lambda x.\, M$ は関数 $x \mapsto M$ に対応し，特に次が成り立つように定義されます：

定理 1.4 (抽象定理). $\mathbf{CL}$-項 M と各 $R, N_1, \dots, N_n \in \Lambda$ に対して次が成立する：

$$(\lambda x.\, M) \left[\begin{smallmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ N_1 & \dots & N_n \end{smallmatrix} \right] R \rhd^*_{wh} M \left[\begin{smallmatrix} x & y_1 & \cdots & y_n \\ R & N_1 & \dots & N_n \end{smallmatrix} \right].$$

*1) 理論計算機科学では，型理論の体系の安全性は進行定理と型保存定理という二つの定理とセットで定式化されることが多いです．

*2) λ-記法は Church による λ-**計算**という計算モデルに由来するもので，本来結合子論理とは同値だが違う体系として定式化されています．本稿ではどうせ $\mathbf{CL}$-項への翻訳でしか出て来ないため，λ-計算そのものの定義は省略します

Def. 1.3. 項 t に対し，変数 x についての λ-**変換**を $\lambda x.\, t :\equiv \lambda^* x.\, \mathbf{I}t$ で，λ^*-変換 $\lambda^* x.\, t$ を次で定める：

$$
\begin{aligned}
\lambda^* x.\, t &:\equiv \mathbf{K}t && (x \notin \mathrm{FV}(t)), && (1)\\
\lambda^* x.\, x &:\equiv \mathbf{I}, && && (2)\\
\lambda^* x.\, tu &:\equiv \mathbf{C}(\lambda^* x.\, t)u && (x \in \mathrm{FV}(t) \setminus \mathrm{FV}(u)) && (3)\\
\lambda^* x.\, tx &:\equiv t && (x \notin \mathrm{FV}(t)), && (4)\\
\lambda^* x.\, tx &:\equiv \mathbf{W}(\lambda^* x.\, t) && (x \in \mathrm{FV}(t)), && (5)\\
\lambda^* x.\, t(uv) &:\equiv \lambda^* x.\, \mathbf{B}tuv && (x \in \mathrm{FV}(uv)). && (6)
\end{aligned}
$$

また，$\lambda x_1.\, \lambda x_2.\, \ldots \lambda x_n.\, M \equiv \lambda x_1 \ldots x_n.\, M$ と略記する．

抽象定理の証明. 頑張ってランク関数を見付ける．詳細は Krivine [9] 参照. □

この記法を使って，まずは自然数がどのようにコードされるかを見てみましょう．以下では，Church エンコーディングと呼ばれる手法[*3)]を使って自然数を表します．直観的には，$n \in \mathbb{N}$ と「関数 f を n 回適用する汎関数」を同一視します：

Def. 1.4. 自然数 $n < \omega$ に対し，**CL**-項 $\underline{n}$ を次で定める：

$$\underline{0} := \lambda sz.\, z, \qquad \underline{n+1} := \sigma\, \underline{n}, \qquad \text{where } \sigma \equiv \mathtt{succ} \equiv \lambda nsz.\, n\, s\, (sz).$$

$\underline{n}$ を自然数 n に対応する数項と呼ぶ.

こうすると，次のようにして加法と乗法を定義出来ます：

$$\mathtt{add} := \lambda m\, n.\, m\, \mathtt{succ}\, n, \qquad \mathtt{mul} := \lambda m\, n.\, m\, (\mathtt{add}\, n)\, \underline{0}.$$

実は，任意の再帰的（部分）関数は **CL**-項により表現することが出来ます：

定理 1.5 (表現定理). $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ を再帰的関数とする．この時，φ を「表現」する **CL**-項 M_φ が存在する．即ち：

$$M_\varphi \underline{n_1} \ldots \underline{n_k} \begin{cases} \rhd^*_{wh} \underline{\varphi(n_1, \ldots, n_k)} & (\varphi(n_1, \ldots, n_k) : \text{defined}) \\ \text{は弱正規形を持たない} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

*3) 厳密には Church エンコーディングと β-同値な項

1.3　直観主義論理から古典論理へ

さて，これまで見てきた対応は直観主義論理の範疇でしたが，我々は ZF や ZFC のモデルを創りたいわけなので，古典論理を扱わなくてはいけません．そこで，これまでの Curry–Howard 対応を拡張して古典論理を扱えるようにできないでしょうか？

論理体系の場合は，排中律なり二重否定除去なりを足せば良いでしょう．以下では，計算機科学と相性がよく，また含意記号だけで定式化できる Peirce の法則を採用します：

Def. 1.5. 古典論理の体系 **HK** は，**HJ** に次の *Perice* **の法則**と呼ばれる公理図式を付け加えて得られる：

$$\mathbf{cc} : ((P \to Q) \to P) \to P.$$

定理 1.6. $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \iff \Gamma \vdash_{\mathbf{HJ}+\text{``}\neg\neg A \to A\text{''}} \varphi.$

計算機科学的には Peirce の法則はどういう意味を持つのでしょうか？ 結論からいってしまえばそれは**継続**です．継続とは，直観的にいえばある **CL**-項の部分項に着目し，その「続きの計算」を関数として取り出したようなものです．たとえば，以下のような **CL**-項

$$A(BC(D(\utilde{EF})G)H)I$$

で下線部 EF に注目した場合の継続は

$$\lambda x.\, A(BC(D\,\utilde{x}\,G)H)I$$

ということになります．そこで，ある時点での継続を取り出して関数に渡すコンビネータ `call/cc` あるいは **cc** を考えましょう [*4)]．つまり，上の項 $A(BC(D(\utilde{EF})G)H)I$ は **cc** を明示的に使って，

$$A(BC(D(\mathbf{cc}(\lambda \underline{\underline{k}}.\, k(EF)))G)H)I$$

と書けるような物を考えます．実は，この **cc** に整合的に型を付けようとすると上記の Peirce の法則が得られます．まず，EF の型を P とすれば，全体として $\mathbf{cc}(\lambda k.\, k(EF))$ も型 P でなくてはいけません．すると，$\mathbf{cc} : (X \to P) \to P$ という形になりそうです．k は P 型の値を渡される継続なので，$\underline{\underline{k}} : P \to Y$ という型が付きそうです．今回の場合は $Y = P$ としても良さそうですが，例えば継続を使わずに

$$A(BC(D(\mathbf{cc}(\lambda \underline{\underline{k}}.\, EF))G)H)I$$

と書いた場合も同じ結果になって欲しいですし，この場合 k の返値の値が何かはわかりません．なので，一番

*4) `call/cc` は “call with current continuation” の略です

一般的な型[*5)]を付けようと思った場合は，$\mathbf{cc} : ((P \to Q) \to P) \to P$ という型にするしかありません．これこそ，まさに Peirce の法則です．

さて，上ではふわっとした議論をしましたが，例えば $\mathbf{cc}M$ で継続を渡された M で二回継続を呼び出していた場合はどうなるのか？ という疑問が湧きます．この場合は，どのような簡約戦略を採るかによって結果が変わってくるでしょう．定理 1.2 によれば，簡約の停止性に関しては弱頭部簡約だけを考えていればよいので，弱頭部簡約を採用しましょう．

しかし，これまでの書き換え規則が局所的な情報だけで決まっていたのに対して，$\mathbf{cc}$ は「残りの計算」という大域的な情報を使います．つまり，簡約基周辺の情報だけではなくて，その簡約に至るまでの「道筋」も一緒に持っていないと，$\mathbf{cc}$ を定式化することは出来ません．そこで，その情報をスタックを使って保存しようと考えて得られるのが，次の *Krivine* **機械**です：

Def. 1.6 (Krivine 機械). 原子項の集合 $\Lambda_0 \supseteq \{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{W}, \mathbf{I}, \mathbf{cc}\}$ とスタック定数の集合 $\Pi_0 \supseteq \{\pi_0\}$ が与えられた時，項の集合 $\Lambda_c = \Lambda(\Lambda_0, \Pi_0)$ およびスタックの全体 $\Pi = \Pi(\Lambda_0, \Pi_0)$ を同時帰納法により次のように定める：

$$M \in \Lambda_0 \implies M \in \Lambda, \qquad x : \text{変数} \implies x \in \Lambda, \qquad \pi \in \Pi_0 \implies \pi \in \Pi,$$
$$M, N \in \Lambda \implies (MN) \in \Lambda, \qquad \pi \in \Pi \implies k_\pi \in \Lambda,$$
$$M \in \Lambda, \pi \in \Pi \implies M \centerdot \pi \in \Pi.$$

k_π を含まない項を特に **c**-項と呼ぶ．
以下，$(M, \pi) \in \Lambda_c \times \Pi$ を $M \star \pi$ と書く．この時，$\Lambda_c \times \Pi$ 上の二項関係 $\rhd$ を次で定める：

$$MN \star \pi \rhd M \star N \centerdot \pi,$$
$$\mathbf{B} \star M \centerdot N \centerdot R \centerdot \pi \rhd M \star (RN) \centerdot \pi, \qquad \mathbf{C} \star M \centerdot N \centerdot R \centerdot \pi \rhd M \star R \centerdot N \centerdot \pi,$$
$$\mathbf{K} \star M \centerdot N \centerdot \pi \rhd M \star \pi, \qquad \mathbf{W} \star M \centerdot N \centerdot \pi \rhd M \star N \centerdot N \centerdot \pi, \qquad \mathbf{I} \star M \centerdot \pi \rhd M \star \pi,$$
$$\mathbf{cc} \star M \centerdot \pi \rhd M \star \mathsf{k}_\pi \centerdot \pi, \qquad \mathsf{k}_\pi \star M \centerdot \varpi \rhd M \star \pi$$

結局の所，**BCKWI** の範囲内では Krivine 機械は「先頭のコンビネータに行き着くまで外していって，あとは書き換え規則を適用していく」という形になっています．

例 1.2 (実行例). 項 $\mathbf{WK}x$ と空スタックから成るプロセスの実行列を見てみよう．

$$\mathbf{WK}x \star \fbox{} \quad \rhd \quad \mathbf{WK} \star \begin{array}{|c|}\hline x \\ \hline\end{array} \quad \rhd \quad \mathbf{W} \star \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{K} \\ \hline x \\ \hline\end{array} \quad \rhd \quad \mathbf{K} \star \begin{array}{|c|}\hline x \\ \hline x \\ \hline\end{array}$$
$$\rhd \quad x \star \fbox{}$$

*5) このように他の型が代入例として得られる型を主要型 (principal type) と言います．

実際，直ちに次がわかります：

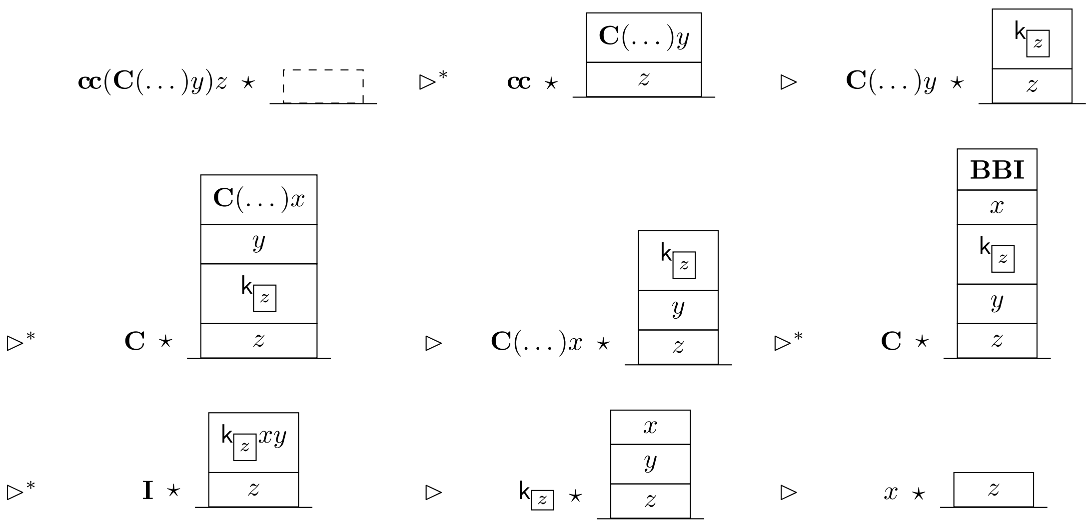
補題 1.1. M, N を $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{W}, \mathbf{I}$ を原子項とする **CL**-項，$\pi \in \Pi$ のとき，

$$M \rhd^*_{wh} N \iff \exists L\, \exists \pi' \quad L \star \pi' \frown \pi \begin{array}{l} \quad\quad M \star \pi \\ \lhd^* \\ \\ \triangledown^* \\ \quad\quad N \star \pi. \end{array}$$

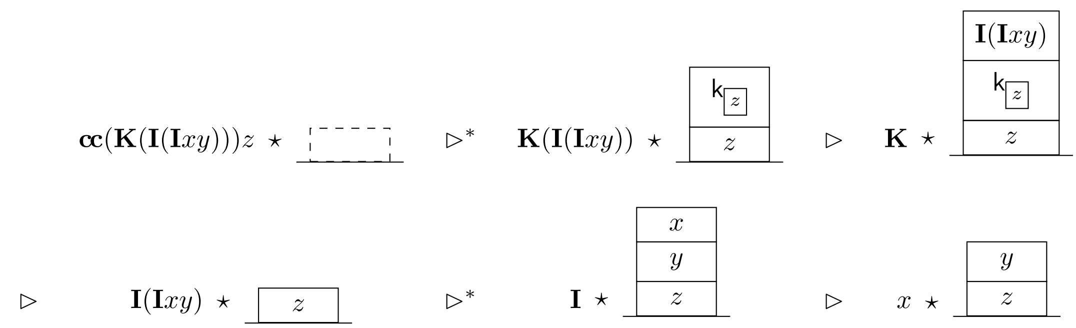
Proof. $N = LL_1 \ldots L_n$ の時 $\pi' = L_1 \,.\, \cdots \,.\, L_n \,.\, \pi$ という形になる.

つまり，Krivine 機械による **CL** 項の簡約は，**BCKW** の範囲内ではきっかり弱頭部簡約に対応している訳です．それに加えて，**cc** がそれまでの評価文脈であるスタック π の情報を閉じ込めた継続 k_π を作成しています．スタックによって文脈を表現したことで，継続をきちんと定式化できたわけです．

例 1.3. 継続の実行例次の形の λ-項を考える：$\mathbf{cc}(\lambda k.\, kxy)z$.　これに λ-変換を施しおえると，$\mathbf{cc}(\mathbf{C}(\mathbf{C}(\mathbf{B}(\mathbf{BI}))x)y)z$ となる．これに空スタックを与えて定義に従って簡約したものが次になる：



cc の内側で kx が評価された瞬間，の時点で後ろ側の値 y が斬り捨てられて，あたかも最初から $\mathbf{cc}(\ldots)$ の位置に x があったかのような簡約結果になっている事がわかる.
では，渡された継続 k を呼ばないとどうなるか．たとえば $\mathbf{cc}(\lambda k.\, Ixy)z$ を考えれば，λ-変換を施すとこれは $\mathbf{cc}(\mathbf{K}(\mathbf{I}(\mathbf{I}xy)))z$ となり，



となる．これは，$\mathbf{cc}(\dots)$ の内側が $\mathbf{cc}$ で囲まれていなかった時と結果的に同じである．
このように，$\mathbf{cc}$ によって渡された継続を使えば，**大域脱出**が可能になる．$\mathbf{cc}$ 内で継続 k が複数呼び出される場合，最初にスタックトップにきた k を使って脱出する．

例 1.4. リストの総積与えられた自然数のリストの総積を右から順に計算する例を考えよう．ここでは，純粋 λ-計算に値をエンコードする方法として以下を用いる：

$$\texttt{true} :\equiv \lambda tf.\, t, \quad \texttt{false} :\equiv \lambda tf.\, f, \qquad \texttt{if}\, p\, \texttt{then}\, t\, \texttt{else}\, f :\equiv p\, t\, f$$
$$\texttt{zero?}\, n :\equiv n\, (\mathbf{K}\, \texttt{false})\, \texttt{true},$$
$$\texttt{nil} :\equiv \lambda cn.\, n \quad \texttt{cons} :\equiv \lambda x\, l\, c\, n.\, c\, x\, (l\, c\, n), \qquad \texttt{fold} :\equiv \lambda\, f\, z\, l.\, l\, f\, z.$$

この時，与えられたリストの総積を計算する関数は $\texttt{prod} := \texttt{fold}\ \texttt{mul}\ \underline{1}$ として定義出来る．これに対応する c-項は次の通りである：

$$\mathbf{BC}(\mathbf{CI})(\mathbf{C}(\mathbf{C}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{BC})\mathbf{C})\mathbf{B})(\mathbf{BW}(\mathbf{BB})))(\mathbf{KI}))(\mathbf{BW}(\mathbf{BB})(\mathbf{KI}))$$

この時，$\rhd$ の公理だけに基づいて $\texttt{prod}\,[1, 2, \dots, 7, 0]$ を実行していくと，停止するまでに 473113 ステップかかる [*6]．
そこで，ゼロが現れたら残りのリストは舐めずに即座に 0 を返すような最適化をしたい．これは $\mathbf{cc}$ を使い $\texttt{prod}' := \lambda l.\, \mathbf{cc}\, (\lambda k.,\texttt{fold}\, (\lambda a\, b.\, \texttt{if}\, [\texttt{zero?}\, a]\, \texttt{then}\, \{k\, 0\}\, \texttt{else}\, \{a \times b\})\, 1\, l)$ と書け，展開すれば：

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}(\mathbf{BIcc})(\mathbf{C}(\mathbf{C}(\mathbf{C}(\mathbf{C}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{BI}))(\mathbf{BC}(\mathbf{CI})))\mathbf{W}))\mathbf{C})(\mathbf{C}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{BB}(\mathbf{BI}))\mathbf{B})(\mathbf{BI})))\mathbf{I})\\ &\qquad(\mathbf{C}(\mathbf{CI}(\mathbf{K}(\mathbf{KI})))\mathbf{K})))))(\mathbf{KI}))(\mathbf{C}(\mathbf{C}(\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{BC})\mathbf{C})\mathbf{B})(\mathbf{BW}(\mathbf{BB})))(\mathbf{KI})))(\mathbf{BW}(\mathbf{BB})(\mathbf{KI}))))\end{aligned}$$

$\texttt{prod}'\,[1, 2, \dots, 7, 0]$ を実行させると，わずか 1830 ステップで停止し，最適化が効いていることがわかる．
継続は他にも，例外処理などの実装にも使われる．

[*6] ここでのステップ数は，実行過程関係 $\rhd$ の各公理を小ステップ簡約の定義と見做して計算している．

2　実現可能性代数と実現可能性モデル

2.1　実現可能性代数の定義と解釈

今回の主題である Krivine の**実現可能性代数**は，上の Krivine 機械を公理化したものである：

Def. 2.1. **実現可能性代数**とは，**項**の集合 Λ，**スタック**の集合 Π および**プロセス**の集合 $\Lambda \star \Pi$ といくつかの関係・写像から成る組 $\langle \Lambda, \Pi, \Lambda \star \Pi, \rhd, \mathbf{.}, \star, \mathsf{k}, \perp\!\!\!\perp, \mathrm{PT} \rangle$ で，次を満たすものである：

(1) 項の**適用** $\Lambda \times \Lambda \ni (\xi, \eta) \mapsto (\xi\eta) \in \Lambda$．$\xi, \eta_i \in \Lambda$ の時，$\xi\eta_1 \ldots \eta_n :\equiv ((\xi\eta_1) \ldots)\eta_n$ と略記.

(2) $(\mathbf{.}) : \Lambda \times \Pi \to \Pi$ を $push$ と呼ぶ.

(3) **プロセス**の作成 $\star : \Lambda \times \Pi \to \Lambda \star \Pi$

(4) **継続** $\mathsf{k} : \Pi \to \Lambda$．$\mathsf{k}_\pi := \mathsf{k}(\pi)$ と書く.

(5) **命令**または**原子項**と呼ばれる定数 $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{I}, \mathbf{K}, \mathbf{W}, \mathbf{cc} \in \Lambda$,

(6) $\rhd$ は**実行過程**と呼ばれる次を満たす $\Lambda \star \Pi$ 上の擬順序：

$$\begin{array}{lll} \xi\eta \star \pi \rhd \xi \star \eta \mathbin{.} \pi, & \mathbf{B} \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \zeta \mathbin{.} \pi \rhd (\xi)(\zeta\eta) \star \pi, & \\ \mathbf{I} \star \xi \mathbin{.} \pi \rhd \xi \star \pi, & \mathbf{W} \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \rhd \xi \star \eta \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi, & \mathbf{K} \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \rhd \xi \star \pi, \\ \mathbf{cc} \star \xi \mathbin{.} \pi \rhd \xi \star \mathsf{k}_\pi \mathbin{.} \pi, & \mathbf{C} \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \zeta \mathbin{.} \pi \rhd \xi \star \zeta \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi, & \mathsf{k}_\pi \star \xi \mathbin{.} \varpi \rhd \xi \star \pi \end{array}$$

(7) **極** $\perp\!\!\!\perp \subseteq (\Lambda \star \Pi)$ は $\rhd$ について下に閉じている．即ち，$p' \rhd p \in \perp\!\!\!\perp \implies p' \in \perp\!\!\!\perp$.
これは，補集合と対偶をとるとわかりやすい．つまり，$\perp\!\!\!\perp$ に属さないプロセスは，実行過程を経ても極には到達しないという事であり，$\perp\!\!\!\perp$ は「発散」する計算の集合だと思える.

(8) $\mathrm{PT} \subseteq \Lambda$ の各元は**証明的項**と呼ばれる．PT は適用で閉じ，$\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{W}, \mathbf{I}, \mathbf{cc} \in \mathrm{PT}$ を満たす必要がある.

例 2.1 (実現可能性代数としての強制法). 強制法は退化した実現可能性代数と思える．$\mathbb{B} = (\mathbb{B}, +, \cdot, 0, \mathbb{1})$ を Boole 代数とする [*7)]．この時，以下の定義により $\mathbb{B}$ には実現可能性代数の構造が入る：

$$\Lambda = \Pi = \Lambda \star \Pi = \mathbb{B}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{K} = \mathbf{W} = \mathbf{I} = \mathbf{cc} = \mathbb{1}, \qquad \mathsf{k}_\pi = \pi,$$
$$(pq) := p \mathbin{.} q := p \star q := p \cdot q, \qquad \perp\!\!\!\perp := \{0\},$$
$$p \rhd q \overset{\text{def}}{\iff} p \leq q.$$

上の例は，実現可能性代数は非可換で極大元が沢山ある強制法だという直観も与えてくれる.
基礎に関わる議論をするので，下記で採用する証明体系の定義を与えておく.

[*7)] 実際には最大元を持つ有界下半束であればよい.

Def. 2.2. 一階古典述語論理の論理式は次で得られる物のみを考える：

(1) $\bot$ および $\top$ は論理式である．
(2) $\tau_1, \ldots, \tau_n$ が項で R が n-変数述語記号の時，$R(\vec{\tau})$ も論理式である．
(3) φ, ψ が論理式の時，$\varphi \to \psi$ は論理式である．
(4) φ が論理式，x が変数の時 $\forall x\, \varphi$ も論理式である．

以下の略記を用いる：

$$\varphi \to \psi \to \chi :\equiv \varphi \to (\psi \to \chi), \qquad \neg\varphi :\equiv \varphi \to \bot, \qquad \varphi \vee \psi :\equiv \neg A \to B,$$
$$\varphi \wedge \psi :\equiv \neg(A \to \neg B), \qquad \exists x\, \varphi :\equiv \neg\forall x\, \neg\varphi$$

一階古典述語論理の証明体系 **HK** は，定義 1.5 の **HK** に次の推論規則を足したもの：

$$\frac{M : \bot}{M : \varphi}\ (\textsc{Abs}) \qquad\qquad \frac{M : \forall x\, \varphi[x]}{M : \varphi[\tau]}\ (\textsc{Subs})$$
$$\frac{M : \varphi\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]}{M : \forall x\varphi}\ (\textsc{Gen}) \qquad \frac{M : \forall x\, (\varphi \to \psi)}{M : \psi \to \forall x\varphi}\ (\to\forall), \text{ where } x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$$

但し τ は項，x, y は変数を表し，(Gen) で y は $M : \varphi$ を導く前提と $\forall x\varphi$ に自由変数として現れない．

さて，以下実現可能性代数 $\mathcal{R}$ を一つ固定する．このとき，集合論の宇宙 V から得られる実現可能性モデル $V^{(\mathcal{R})}$ は二値モデルではなく，論理式 φ に対してその**真理値** $|\varphi| \subseteq \Lambda$ と**虚偽値** $\|\varphi\| \subseteq \Pi$ が与えられている形となる．また，得られるモデルは第一義的には ZF ではなくその保存拡大である ZF_ε のモデルとなる．直観的には，強い所属関係 ε は，同値な名称を同一視せずに，ある名前として見たときに所属するか？ という意味で強い所属関係になっている．

Def. 2.3 (理論 ZF_ε). ZF_ε の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}_\varepsilon}$ は二項述語記号 $\{\notin, \not\varepsilon, \subseteq\}$ から成る．以下の略記法を用いる：

$$a \mathrel{\varepsilon} b :\equiv a \mathrel{\not\varepsilon} b \to \bot, \qquad\qquad a \in b \quad \equiv a \notin b \to \bot,$$
$$a \sqsubseteq b :\equiv \forall x\, (x \mathrel{\not\varepsilon} b \implies x \mathrel{\not\varepsilon} a), \qquad a \simeq b :\equiv a \subseteq b \wedge b \subseteq a.$$

$\varepsilon, \in, \sqsubseteq, \simeq$ はそれぞれ**強い所属関係**，**弱い所属関係**，**強い包含関係**および**弱い同値性**と呼ばれる．「弱い」の代わりに**外延的** (*extensional*)，「強い」の代わりに**内包的** (*intensional*) とも言う．また，量化子の略記を次のように導入する：

$$\forall x \mathrel{\varepsilon} a\, \varphi[x] :\equiv \forall x\, (\neg\varphi[x] \implies x \mathrel{\not\varepsilon} a),$$
$$\forall x \in a\, \varphi[x] :\equiv \forall x\, (\neg\varphi[x] \implies x \notin a).$$

ZF_ε の公理は次の通り：

外延性公理 $\forall x\, \forall y\, [x \in y \iff \exists z \mathrel{\varepsilon} y\, (x \simeq z)], \qquad \forall x\, \forall y\, [x \subseteq y \iff \forall z \mathrel{\varepsilon} x\, (z \in y)],$

基礎の公理図式 ZF_ε-論理式 $\varphi[x,\vec{y}]$ に対し，$\forall\vec{z}\ [\forall x\ (\forall y\ \varepsilon\ x\ (\varphi[y,\vec{z}]) \to \varphi[x,\vec{z}]) \implies \forall a\, \varphi[a,\vec{z}]]$,

内包公理図式 ZF_ε-論理式 $\varphi[x,\vec{y}]$ に対し，$\forall\vec{y}\,\forall a\,\exists b\,\forall x\ [x\ \varepsilon\ b \iff (x\ \varepsilon\ a \wedge \varphi[x,\vec{y}])]$,

対集合公理 $\forall a\,\forall b\,\exists x\,(a\ \varepsilon\ x \wedge b\ \varepsilon\ x)$,

和集合公理 $\forall a\,\exists b\,\forall x\ \varepsilon\ a\,(x\ \varepsilon\ b)$,

冪集合公理 $\forall a\,\exists b\,\forall x\,\exists y\ \varepsilon\ b\,\forall z\ [z\ \varepsilon\ y \iff (z\ \varepsilon\ a \wedge z\ \varepsilon\ x)]$,

収集公理 ZF_ε-論理式 $\varphi[x,y,\vec{z}]$ に対し，$\forall\vec{z}\,\forall a\,\exists b\,\forall x\ \varepsilon\ a\,[\exists y\,\varphi[x,y,\vec{z}] \implies \exists y\ \varepsilon\ b\,\varphi[x,y,z]]$,

無限公理 ZF_ε-論理式 $\varphi[x,y,\vec{z}]$ に対し，

$$\forall\vec{z}\,\forall a\,\exists b\ [a\ \varepsilon\ b \wedge \forall x\ \varepsilon\ b\,(\exists y\,\varphi[x,y,\vec{z}] \implies \exists y\ \varepsilon\ b\,\varphi[x,y,\vec{z}])]\,.$$

注意 2.1. (1) 実現しやすいように，通常は公理図式でないものも公理図式として表現している．

(2) 通常の無限公理は上の公理図式で $\varphi(x,y) :\equiv y = x \cup \{\, x\,\}$ とおけば得られる．

(3) 内包公理から先は，通常の ZF の公理系で $\in$ を ε で置き換えて得られる．

ZF_ε は ZF の保存拡大になっている．ここで，ZF の言語は $\in, \subseteq$ を二項述語記号として持つとする．次が直ちにわかる：

補題 2.1. (1) $\forall a\forall b\,[a\ \varepsilon\ b \implies a \in b]$, $\forall a,b,c\,[a \in b \subseteq c \implies a \in c]$, $\forall a,b,c\,[a \subseteq b \subseteq c \implies a \subseteq c]$,

(2) $\mathrm{ZF}_\varepsilon \vdash$ “$\in$: set-like な整礎関係”,

(3) $\varphi[\vec{x}]$ を ZF-論理式とすると，$\mathrm{ZF}_\varepsilon \vdash \forall\vec{x}\,\forall\vec{y}\,[\vec{x} \simeq \vec{y} \implies$ “$\varphi[\vec{x}] \iff \varphi[\vec{y}]$”].

これらを使えば，ZF_ε が ZF の保存拡大であることはルーチンワークで示せる．

よって，ZF_ε のモデルが得られれば，その外延部分を見てやれば ZF のモデルが得られる．そして，ZF_ε のモデルを得る為の方法が以下の実現可能性モデルである．強制法においては各論理式 φ に対し完備 Boole 代数 $\mathbb{B}$-値の真偽値 $[\![\varphi]\!] \in \mathbb{B}$ が定まっていた．特に，$V[G]$ の各元は，帰納的に定められた $\mathbb{B}$-値所属確率の関数によって表現されていた．対する実現可能性モデルでは，真偽値だけでなく**虚偽値**（あるいは反駁値？）が定まっており，全てを二重否定をとった形で定める．特に，集合 a の所属確率を定めるのではなく，a の**補集合**の所属関係の**虚偽値**によって非所属関係を定める方法を採る．

Def. 2.4 (実現可能性モデル). 集合論の宇宙 V と実現可能性代数 $\mathcal{R} = (\Lambda, \Pi, \Lambda * \Pi, \perp\!\!\!\perp, \ldots)$ に対し，**実現可能性モデル** $V^{(\mathcal{R})}$ の構造を定めたい．

論理式 φ の構成に関する帰納法とランクに関する帰納法により，$|\varphi| \subseteq \Lambda$, $\|\varphi\| \subseteq \Pi$ を次のように定める：

$$\begin{gathered}
|\varphi| := \{\, \xi \in \Lambda \mid \forall \pi \in \|\varphi\|\ \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \,\}, \\
\|\bot\| := \Pi, \qquad \|\top\| := \emptyset, \\
\|a \not\varepsilon b\| := \{\, \pi \in \Pi \mid (a, \pi) \in b \,\}, \\
\|\varphi \to \psi\| := \{\, \xi \cdot \pi \mid \xi \in |\varphi|, \pi \in \|\psi\| \,\}, \\
\|\forall x\, \varphi[x, \vec{b}]\| := \bigcup_{a \in V} \|\varphi[a, \vec{b}]\|, \\
\|a \subseteq b\| := \bigcup_{(c,\pi) \in a} \{\, \xi \cdot \pi \mid \xi \Vdash c \notin b \,\} = \bigcup_{c \in \mathrm{dom}(a)} \|c \notin b \implies c \not\varepsilon a\| \\
\|a \notin b\| := \bigcup_{(c,\pi) \in b} \{\, \xi \cdot \xi' \cdot \pi \mid \xi \Vdash \text{“}a \subseteq c\text{”}, \xi' \Vdash \text{“}c \subseteq a\text{”} \,\} = \|\forall x\, (a \simeq x \implies a \not\varepsilon b)\|
\end{gathered}$$

但し，$\xi \Vdash \varphi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \xi \in |\varphi|$ とする．
ZF_ε の論理式 φ に対して，関係 $V^{(\mathcal{R})} \models \varphi$ を次で定める：

$$V^{(\mathcal{R})} \models \varphi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \xi \in \mathrm{PT}\, \xi \Vdash \varphi \ \ (\iff \mathrm{PT} \cap |\varphi| \neq \emptyset).$$

この時，φ は $V^{(\mathcal{R})}$ で**実現される** (*realised*) と言う．

注意 2.2. 全称量化子の解釈と否定命題について量化子の解釈では，全称変数は基礎モデルの集合だけを亘っている．この状況を見ると，結局新しい元は付加されていないのではないか？ という気がしてしまう．しかし，ここで重要なのは，$\xi \Vdash \forall x\, \varphi(x)$ を示すには，ξ が**どんな** x **についても一様に** $\varphi(x)$ を実現する必要がある，という事である．つまり，任意の $x \in V$ について個別に $V^{(\mathcal{R})} \models \varphi(x)$ が実現されているからといって，$V^{(\mathcal{R})} \models \forall x\, \varphi(x)$ が成り立つとは限らないという事である．対偶を取って考えれば，$V^{(\mathcal{R})}$ において存在命題 $\exists x\, \varphi(x)$ が実現されていても $\varphi(x)$ **を満たす** x **が具体的に取れるとは限らない**という事である．即ち，$V^{(\mathcal{R})}$ はフルモデルではない．
また，ここでは記号を $\models$ を使っているが，これは強制法でいえば「$\mathbb{1}$ が強制する」と同じ条件であり，$V^{(\mathcal{R})} \not\models \varphi$ は $V^{(\mathcal{R})} \models \neg\varphi$ を意味しないことにも気を付ける必要がある．

前述の通り，実現可能性モデルでは虚偽値を基本に置き，すべて否定形で定義している事がわかる．

直観的には，虚偽値は「与えられた命題の反例」となる入力の集合であり，真理値はその反例を「検証」するプログラムであると見ることが出来る．検証プログラムに反例を与えて停止すれば（つまり $\perp\!\!\!\perp$ に入らなければ），虚偽値が勝って反証が完了したことになる．一方，どの反例に対しても検証プロセスが発散するなら（つまりどう反例を選んでも $\perp\!\!\!\perp$ に入ってしまうなら），真理値が勝って反証は失敗したと見做せる．つまり，真理値によってその命題が真ならしめられていると思える．

以下では具体的にどんな論理式が実現されているのかをひたすら調べることになる．

まず，そもそも古典論理の論理式が実現されていることを見なくてはならない．そのための基本的な補題を

並べておく．まず，弱頭部簡約の抽象定理 1.4 と補題 1.1 を組み合わせれば次が示せる：

定理 2.1 (抽象定理)． **CL**-項 M と $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n \in \Lambda$ に対して次が成立する：

$$(\lambda x.\, M)\left[\begin{smallmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{smallmatrix}\right] \star \xi \cdot \pi \rhd M \left[\begin{smallmatrix} x & y_1 & \cdots & y_n \\ \xi & \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{smallmatrix}\right] \star \pi.$$

また，定義を展開すれば，証明的項が演繹について閉じていることがわかる：

補題 2.2 (演繹定理)． (1) $\xi \Vdash \varphi \to \psi$, $\eta \Vdash \varphi$ なら $\xi\eta \Vdash \psi$.
(2) 任意の $\eta \Vdash \varphi$ に対し $\xi\eta \Vdash \psi$ が成り立つなら，$\lambda x.\, \xi x \Vdash \varphi \to \psi$.
よって $\Gamma \subseteq \Lambda$ が $\mathbf{B}, \mathbf{I} \in G$ を満たし，適用で閉じているなら Γ は実現可能性について MP で閉じている．

Proof. (1) $\pi \in \|\psi\|$ を任意に取り，$\xi\eta \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を示せばよい．特に，$\perp\!\!\!\perp$ が反簡約について閉じていて $\xi\eta \star \pi \rhd \xi \star \eta \,.\, \pi$ なので，$\xi \star \eta \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を示せばよい．しかし，定義より $\eta \,.\, \pi \in \|\varphi \to \psi\|$ であり $\xi \in \|\varphi \to \psi\|$ だからめでたく $\xi \star \eta \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を得る．

(2) 仮定を満たす ξ を取り，任意の $\pi \in \|\varphi \to \psi\|$ に対して $\mathbf{BI}\xi \star \varpi \in \perp\!\!\!\perp$ を示す．しかし，定義より ϖ は $\eta \Vdash \varphi$ と $\pi \in \|\psi\|$ により $\eta \,.\, \pi$ の形になっている．すると，

$$(\lambda x.\, \xi x) \star \eta \,.\, \pi \rhd \xi\eta \star \pi \in \perp\!\!\!\perp.$$

よって示せた． □

この定理は演繹定理と見ることが出来ると共に，強制法における含意の定義の非可換な一般化と見ることが出来る．実際，上の例で挙げたように，適用は下限を取る操作で $\lambda x.\, px = \mathbf{BI}p = \mathbb{1} \cdot p = p$ となるから，cBa の場合は $p \Vdash \varphi \to \psi \iff \forall q \leq p\, [q \Vdash \varphi \implies q \Vdash \psi]$ と同値になる．

補題 2.3 (Adequecy Lemma)． $\varphi_i[\vec{z}], \psi[\vec{z}]$: ZF_ε-論理式，x_i:：変数，M：**CL**-項,

$$x_1 : \varphi_1[\vec{z}], \ldots x_n : \varphi_n[\vec{z}] \vdash_{\mathbf{HK}} M : \psi[\vec{z}]$$

とする．この時，$\vec{a} \in V$, $\xi_i \Vdash \varphi_i[\vec{a}]$ なら $M\left[\begin{smallmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{smallmatrix}\right] \Vdash \psi[\vec{a}]$.
よって古典論理のトートロジーは全て実現可能性モデルで実現されている．

Sketch of Proof. 演繹定理があるので，あとは古典論理の公理が実現されていることがわかれば良い．

たとえば，$\mathbf{cc} \Vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ について考えてみよう．まず $\varpi \in \|\psi\|$，$\xi \Vdash \phi$，$\pi \in \|\varphi\|$ に対して $\mathsf{k}_\pi \star \xi \star \varpi \rhd \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ となるから，$\mathsf{k}_\pi \Vdash \varphi \to \psi$ となっている事に注意する．

ここで，改めて $\xi \Vdash (\varphi \to \psi) \to \varphi$ および $\pi \in \|\varphi\|$ を取れば，

$$\mathbf{cc} \star \xi \,.\, \pi \rhd \xi \star \mathsf{k}_\pi \star \pi$$

となり，$\mathsf{k}_\pi \star \pi \in \|(\varphi \to \psi) \to \varphi\|$ なので，結局 $\mathbf{cc} \star \xi \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を得る．公理 $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{W}, \mathbf{I}$ についても同様．

推論規則 Abs，Gen，Subs および $(\to\forall)$ についても定義から直ちに従う．例えば，$\xi \Vdash \forall x\, \varphi \to \psi[x]$ とすると，定義から任意の $a \in V$ に対して $\xi \Vdash \varphi \to \psi[a]$ となる．$x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$ に気を付ければ，これは任意の $\eta \Vdash \varphi$ および $\pi \in \|\psi[a]\|$ に対し $\xi \star \eta \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ ということである．示すべきことは $\eta \Vdash \varphi$ と $\pi \in \|\forall x\, \psi[x]\|$ に対し $\xi \star \eta \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ だが，このとき定義より $a \in V$ で $\pi \in \|\psi[a]\|$ となるものが取れるので良い． □

こうして，古典論理におけるトートロジーが全て $V^{(\mathcal{R})}$ で実現されていることがわかった．しかし，偽なる命題まで実現されては困るので，その為に「良い」実現可能性代数を定義する：

Def. 2.5. 実現可能性代数 $(\Lambda, \Pi, \Lambda \star \Pi, \perp\!\!\!\perp, \dots)$ が**斉一的** (*coherent*) $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の証明的項 $\theta \in \mathrm{PT}$ に対して $\theta \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp$ となるスタック $\pi \in \Pi$ が存在する．

注意 2.3. $V^{(\mathcal{R})} \not\models \perp \iff$ 実現可能性代数が斉一的．

以下，実現可能性代数は全て斉一的なもののみ考える．

2.2 ZF_ε が実現されている事

以後，ZF_ε の公理が $V^{(\mathcal{R})}$ で実現されている事をみていく．
まず，これまでの議論を踏まえて同値性証明を楽するための定義をしておく：

Def. 2.6. 論理式 φ と ψ が ($V^{(\mathcal{R})}$ で) **交換可能** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\xi, \xi' \in \mathrm{PT}$ があって $\xi \Vdash \varphi \to \psi$ かつ $\xi' \Vdash \psi \to \varphi$.

基本的には，各種集合の存在公理については強制法の時と同じように名称を弄ってでっちあげればよい．例えば，φ と a に対する内包公理の証拠は次で与えればよい：

$$\{\, (x, \xi \,.\, \pi) \mid (x, \pi) \in a, \xi \Vdash \neg\varphi[x] \,\}$$

非自明な外延性と基礎の公理について見ていこう．

補題 2.4. $\mathbf{A} := \lambda xf.\, f(xxf)$, $\mathbf{Y} := \mathbf{AA}$ とおく．この時任意の ZF_ε の論理式 $\varphi[x, \vec{z}]$ に対し，

$$\mathbf{Y} \Vdash \forall \vec{z}\, [\forall x\ [\forall y\, (\varphi[y, \vec{z}] \to y \not\varepsilon x) \to \neg\varphi[x, \vec{z}]] \to \forall x\, \neg\varphi[x, \vec{z}]].$$

特に，$V^{(\mathcal{R})}$ で基礎の公理が実現されている．

Proof. これが示せれば，実現可能性モデルが古典論理のトートロジーと演繹で閉じている事から，φ の代わりに $\neg\neg\varphi$ を考えることで基礎の公理が得られる．

以下，簡単のため $\vec{z}$ は省略する．

$a \in V$ のランクについての帰納法により，任意の $\xi \Vdash \forall x\ [\forall y\, (\varphi[y, \vec{z}] \to y \not\varepsilon x) \to \neg\varphi[x, \vec{z}]]$, $\eta \Vdash \varphi[a]$ および $\pi \in \Pi$ に対し，$\mathbf{Y} \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ となる事を示す．

ここで,

$$\mathbf{Y} \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp \rhd \mathbf{A} \star \mathbf{A} \,.\, \xi \,.\, \eta \,.\, \pi \rhd \xi(\mathbf{Y}\xi) \star \eta \,.\, \pi \rhd \xi \star \mathbf{Y}\xi \,.\, \eta \,.\, \pi.$$

定義より $\eta \,.\, \pi \in \|\neg\varphi[a]\|$ なので，あとは $\forall y\ [\varphi[y, \vec{z}] \to y \not\varepsilon x]$ を示せれば良い．結局，$(y, \varpi) \in a$ と $\zeta \Vdash \varphi[y]$ を任意に固定し，$\mathbf{Y}\xi \star \zeta \,.\, \varpi \in \perp\!\!\!\perp$ を示せばよい．しかし，$\mathbf{Y}\xi \star \zeta \,.\, \varpi \rhd \mathbf{Y} \star \xi \,.\, \zeta \,.\, \varpi$ であり，帰納法の仮定よりこれは $\perp\!\!\!\perp$ に属する． □

補題 2.5. $\mathbf{I}$ が外延性の公理を実現する．

Proof. $\|a \notin b\| = \|\forall z\, [z \simeq a \to z \notin b]\|$ に気付けばあとは定義を展開するだけ． □

定理 2.2. $V^{(\mathcal{R})} \models \mathrm{ZF}_\epsilon$.

2.3 関数・述語記号の持ち上げ

ZF_ε には二種類の所属関係があるので，二種類の「関数」の定義が存在する．つまり，強い同値性と両立する意味での関数と，弱い同値性と両立する意味での関数である．

Def. 2.7.

- f が**（非外延）関数的** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x\, \forall y\, \forall y'\, [(x, y)\ \varepsilon\ f \to (x, y')\ \varepsilon\ f \to y = y']$.
  特に定義域・値域を明示する場合，$f : X \underset{\text{str}}{\longrightarrow} Y$ または単に $f : X \to Y$ と書く．
- f が**外延関数的** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x\, \forall x'\, \forall y\, \forall y'\, [(x, y) \in f \to (x, y') \in f \to x \simeq x' \to y \simeq y']$.
  特に定義域・値域を明示する場合，$f : X \underset{\text{ext}}{\longrightarrow} Y$ と書く．

- f が**強い意味の関数**，あるいは ZF_ε-**関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f$: 非外延関数的 $\land \forall x\, \varepsilon\, f\, \exists y\, \exists z\, x = (y, z)$.
- f が**外延的関数**，あるいは ZF-**関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f$: 外延関数的 $\land \forall x\, \varepsilon\, f\, \exists y\, \exists z\, x \simeq (y, z)$.

非外延的関数も外延的関数も，どちらが強くてどちらかが弱いとは言えない．$x \neq y$ だが $x \simeq y$ となるような x, y があった場合，f が非外延的関数であったとしても，$f(x) \not\simeq f(y)$ である可能性があり，この場合 f は外延的関数では有り得ない．また，f が外延的関数であったとしても，$(x, y), (x, y')\, \varepsilon\, f$ で $y \simeq y'$ だが $y \neq y'$ であるような物があるかもしれない．この場合，f は非外延的な関数ではないことになる．あとで見るように，$V^{(\mathcal{R})}$ では「非外延的」な選択公理が成立し得るが，これにより与えられる選択関数が外延的同値性と両立するとは限らないため，$V^{(\mathcal{R})}$ を ZF のモデルとして見た時に必ずしも AC は成立しなくなっている．

さて，$V^{(\mathcal{R})}$ の構造を，V 上の定義可能なクラス関数で拡張することを考えよう．$V^{(\mathcal{R})}$ はドメインは V と一致しているので，V 上で定義された関数はそのまま $V^{(\mathcal{R})}$ 上の関数記号として解釈することが出来，ZF_ε-関数として振る舞うことが出来る．つまり，$V \models \forall \vec{x}\, \exists! y\, \varphi[\vec{x}, y]$ なる論理式 φ によって定義された論理式は，$V^{(\mathcal{R})}$ においても何らかの関数に対応していることになる．また，述語や論理式についても，特性関数を使えば同様に V に持ち上げることが出来る．こうした関数記号を使った ZF_ε の論理式についても，定義を展開して書き直せば ZF_ε の収集・内包公理の内側で使えることがわかる．

一方，そうした関数記号は必ずしも外延的関数であるとは限らないため，ZF の公理としての（つまり，$\notin, \subseteq$ で書かれた）内包・収集公理の内側で使うには外延的同値性とも両立することを示す必要がある．

以下，持ち上げられた定義可能関数が $V^{(\mathcal{R})}$ においてどんな振る舞いをするかを調べていく．実は，各 $a \in V$ に対し強制法における $\check{a}$ に類似の役割をする $\daleth a$ という演算子があり，V における $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ は $f : \daleth A_1 \times \cdots \times \daleth A_n \to \daleth B$ に持ち上がる，という事がわかる．但し，これら $\daleth(a)$ は $\check{a}$ と異なり，V から見て非標準的な元を含むことも後ほど明らかになる．

さて，これらをしっかり議論するためには，まずは $V^{(\mathcal{R})}$ における強い等号の解釈を与えておく必要がある．そこで，ZF_ε の論理式の定義と記号の解釈に次の節を追加する：

Def. 2.8. (5) τ, σ が項，φ が ZF_ε-論理式の時，$\tau = \upsilon \hookrightarrow \varphi$ も ZF_ε の論理式．
以下の略記を用いる：

$$\text{“}\tau \neq \upsilon\text{”} :\equiv \text{“}\tau = \upsilon \hookrightarrow \bot\text{”}, \qquad \text{“}\tau = \upsilon\text{”} :\equiv \text{“}\tau \neq \upsilon \to \bot\text{”}.$$

実現可能性モデル $V^{(\mathcal{R})}$ における論理式の虚偽値の定義に次を追加する：

$$\|t = u \hookrightarrow \varphi\| := \begin{cases} \|\varphi\| & (\text{if } t = u), \\ \emptyset & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

注意 2.4.

$$\|t \neq u\| = \begin{cases} \Pi = \|\bot\| & (t = u) \\ \emptyset = \|\top\| & (\text{otherwise}) \end{cases}, \qquad \|t = u\| = \|(t \neq u) \to \bot\| = \begin{cases} \|\bot \to \bot\| & (t = u) \\ \|\top \to \bot\| & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

以下は $t = u \to \varphi$ と $t = u \hookrightarrow \varphi$ が交換可能である事を示している：

補題 2.6. (1) $\lambda x.\, x\mathbf{I} \Vdash (t = u \to \varphi) \to (t = u \hookrightarrow \varphi)$,
(2) $\lambda xy.\, \mathbf{cc}(\lambda \mathsf{k}.\, y(\mathsf{k}x)) \Vdash (t = u \hookrightarrow \varphi) \to t = u \to \varphi$.

Proof. 同値性の絡む証明と継続の取り扱いに慣れるために，(2) だけ示しておく（残りもやるだけ）.

$\xi \Vdash t = u \hookrightarrow \varphi$, $\eta \Vdash t = u$ および $\pi \in \|\varphi\|$ を固定し，$\lambda xy.\, \mathbf{cc}(\lambda \mathsf{k}.\, y(\mathsf{k}x)) \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を示す.

$$\lambda xy.\, \mathbf{cc}(\lambda \mathsf{k}.\, y(\mathsf{k}x)) \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi \rhd \mathbf{cc} \star (\lambda \mathsf{k}.\, \eta(\mathsf{k}\xi)) \,.\, \pi \rhd \eta \star (\mathsf{k}_\pi \xi) \,.\, \pi,$$

より $\eta \star (\mathsf{k}_\pi \xi) \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を示せば良い.

もし $t = u$ なら $\|t = u \hookrightarrow \varphi\| = \|\varphi\|$ となるので，$\xi \Vdash \varphi$ であり，注意から $\eta \Vdash \bot \to \bot$. ここで $\pi \in \|\varphi\|$ より $\mathsf{k}_\pi \Vdash \varphi \to \bot$ となるから，演繹定理より $\mathsf{k}_\pi \xi \Vdash \bot$. $\pi \in \Pi = \|\bot\|$ より $\xi \,.\, \pi \in \|\bot \to \bot\|$ となるので，結局 $\eta \star \mathsf{k}_\pi \xi \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$.

$t \neq u$ の時は $\eta \Vdash \top \to \bot$ であり，$\xi \Vdash \top$ かつ $\pi \in \|\bot\|$ より明らか. □

また，基礎モデルにおける等号公理から，$V^{(\mathcal{R})}$ における等号公理も直ちに従う：

補題 2.7 ($V^{(\mathcal{R})}$ における等号公理).

$\mathbf{I} \Vdash \forall x(x = x), \forall x \forall y(x = y \hookrightarrow y = x), \forall x \forall y \forall z(x = y \hookrightarrow y = z \hookrightarrow x = z), \forall x \forall y[x = y \hookrightarrow \varphi[x] \to \varphi[y]]$.

こうして導入された等号は，Leibniz 同値性と一致している：

補題 2.8. $\mathbf{I} \Vdash (t = u \hookrightarrow \forall x\,(u \not\varepsilon x \to t \not\varepsilon x)), (\forall x\,(u \not\varepsilon x \to t \not\varepsilon x) \to t = u)$.

Proof. やるだけ. □

以上で $V^{(\mathcal{R})}$ に素性のよい等号が導入出来た．特に，関係の特性関数を使って議論することで，V における

関係記号を $V^{(\mathcal{R})}$ に持ち上げることが出来る．

Def. 2.9. ZF の論理式 $\varphi[\vec{x}]$ について，写像 $V \ni \vec{x} \mapsto \langle\varphi[\vec{x}]\rangle < 2$ を次で定める：

$$\langle\varphi[\vec{x}]\rangle = 1 \iff \varphi[\vec{x}].$$

特に，V で定義可能な関係 R に対して $R^{\mathcal{R}}(\vec{x}) \hookrightarrow \varphi$ は $\langle R(\vec{x})\rangle = 1 \hookrightarrow \varphi$ の略記とし，$\neg R^{\mathcal{R}}(\vec{x})$ や $R^{\mathcal{R}}(\vec{x})$ も同様に定める．

この時，有り難いことにある意味で整礎関係の絶対性が成り立つことがわかる：

補題 2.9. R を V 上の整礎関係とし，$\varphi[x]$ を ZF_ε の論理式とする．この時：

$$\mathbf{Y} \Vdash \forall x\ \big(\forall y\ (y\ R^{\mathcal{R}}\ x \hookrightarrow \varphi[y]) \to \varphi[x]\big) \to \forall x \varphi[x].$$

Proof. 基礎の公理の実現とほぼ同じ． □

以上を踏まえると，$V^{(\mathcal{R})}$ における関数記号の解釈が，V における解釈の拡張になっている事もわかる：

補題 2.10. $\mathcal{R}$ を斉一的とする．$\vec{x}, y \in V$, f：定義可能関数記号とすると，

$$V \models f(\vec{x}) = y \iff V^{(\mathcal{R})} \models f(\vec{x}) = y.$$

Proof. ($\Longrightarrow$) は明らかなので逆を示す．特に $V^{\mathcal{R}} \models f(\vec{x}) = y$ だが $V \models f(\vec{x}) \neq y$ だったとして矛盾を導く（**背理法**）．そこで証明的項 ξ で $\xi \Vdash f(\vec{x}) = y$ となるものを取る．略さずに書けばこれは $\xi \Vdash (f(\vec{x}) = y \hookrightarrow \bot) \to \bot$ である．$f(x) \neq y$ なので $\hookrightarrow$ の定義から結局これは $\xi \Vdash \top \to \bot$ と同値となる．すると，$\xi\mathbf{I} \Vdash \bot$ となるが，$\xi\mathbf{I} \in \mathrm{PT}$ なのでこれは斉一性に反する． □

V の集合 $a \in V$ は単項述語だと思えるので，上の言葉を使って持ち上げが定義出来る．実はこれが上で言及した $\daleth a$ である：

Def. 2.10. 関数 $\daleth : V \to V$ を $\daleth E := E \times \Pi$ により定める．
また，論理式 $\langle x \in E\rangle = 1 \hookrightarrow \varphi$ の代わりに $x\ \varepsilon\ \daleth E \hookrightarrow \varphi$ と略記する．

注意 2.5. $\|a \not\varepsilon \gimel E\| = \{\, \pi \mid (a,\pi) \in \gimel E \,\} = \{\, \pi \in \Pi \mid a \in E \,\} = \|a \,\varepsilon\, \gimel E \hookrightarrow \bot\|$.
よって $a \,\varepsilon\, \gimel E$ の表記に曖昧性はなく，$a \,\varepsilon\, \gimel E \hookrightarrow \varphi$ と $a \,\varepsilon\, \gimel E \to \varphi$ は交換可能である．
特に，論理式 $\forall x \,\varepsilon\, \gimel E\, \varphi$ は $\forall x\, [x \,\varepsilon\, \gimel E \to \varphi]$ の略記であると思って良い．すると定義から

$$\|\forall x \,\varepsilon\, \gimel E\, \varphi[x]\| = \bigcup_{a\in E} \|\varphi[a]\|, \qquad |\forall x \,\varepsilon\, \gimel E\, \varphi[x]| = \bigcap_{a\in E} |\varphi[a]|.$$

さて，等号公理と $V^{(\mathcal{R})}$ における $=$ の定義から，特に次の形の絶対性が手に入る：

定理 2.3. t_i, u_i, t, i を項とする．この時,

$$\begin{aligned} & V \models \forall \vec{x}\ [t_1[\vec{x}] = u_1[\vec{x}] \to \cdots \to t_n[\vec{x}] = u_n[\vec{x}] \to t[\vec{x}] = u[\vec{x}]] \\ \iff\ & V^{(\mathcal{R})} \models \forall \vec{x}\ [t_1[\vec{x}] = u_1[\vec{x}] \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow t_n[\vec{x}] = u_n[\vec{x}] \hookrightarrow t[\vec{x}] = u[\vec{x}]]\,. \end{aligned}$$

系 2.1. A が V において等式的な代数なら，$\gimel A$ は $V^{(\mathcal{R})}$ の意味で同じ代数の構造が入る．

特に上で $t_i[x] \equiv x \in A_i$, $u_i[x] = 1$, $t[x] = x \in B$, $u[x] = 1$ とおけば次を得る：

定理 2.4. V で定義された関数記号 $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ について，$V^{(\mathcal{R})} \models f : \gimel A_1 \times \cdots \times \gimel A_n \to \gimel B$.
特に，ZF-論理式 $\varphi[\vec{x}]$ および $a \in V^{(\mathcal{R})}$ に対して，$\langle \varphi[\vec{a}] \rangle \,\varepsilon\, \gimel 2$. また，$\gimel 2$ には 2 上の自明な Boole 代数演算を持ち上げる形で Boole 代数の構造が入る．

2.4 Boole 代数 $\gimel 2$ の構造と $V^{(\mathcal{R})}$ における作用

Boole 代数 $\gimel 2$ は実現可能性モデルにおいて重要な役割を果たす．特に，もし $\gimel 2$ が非自明なら，超準的な元，特に互いに相異なるアトムが付加されていることをまずは見る．

Def. 2.11. 集合 x と $i \in 2 = \{\, 0, 1 \,\}$ に対し，$i \cdot x$ を次で定める：

$$0 \cdot x := \emptyset, \qquad 1 \cdot x := x$$

この時，写像 $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$ は $V^{(\mathcal{R})}$ 上において $\gimel 2 \times V^{(\mathcal{R})}$ 上に延長されていることに気を付ける．

補題 2.11. $\mathbf{I} \Vdash \forall x \, \forall \alpha \, \varepsilon \, \gimel 2 \, [\alpha \neq 1 \to \forall z \, (z \not\varepsilon \, \alpha \cdot x)]$

Proof. $x \in V$ と $\alpha = 0, 1$ を任意に取る．

まず $\alpha = 0$ の時を考える．この時,

$$\|\alpha \neq 1 \to \forall z (z \not\varepsilon \, \alpha \cdot x)\| = \|\top \to \forall z \, (z \not\varepsilon \, \emptyset)\| = \|\top \to \top\|$$

よって $\mathbf{I} \Vdash \top \to \top$ より OK.

$\alpha = 1$ の時,

$$\|\alpha \neq 1 \to \forall z (z \not\varepsilon \, 1 \cdot x)\| = \begin{cases} \|\bot \to \top\| & (x = \emptyset) \\ \|\bot \to \bot\| & (x \neq \emptyset). \end{cases}$$

$\mathbf{I} \Vdash \bot \to \top$ かつ $\mathbf{I} \Vdash \bot \to \bot$ なのでこの場合も良い． □

補題 2.12. $\emptyset \neq x \in V$ に対し：$\mathbf{I} \Vdash \forall \alpha, \beta \, \varepsilon \, \gimel 2 \, [\alpha \cdot x = \beta \cdot x \hookrightarrow \alpha = \beta]$.

Proof. $\alpha, \beta \in 2$ とする．特に $\alpha = \beta$ の時は定義より $\|\alpha \cdot x = \beta \cdot x \hookrightarrow \alpha = \beta\| = \|\bot \to \bot\|$ となるので OK. $\alpha \neq \beta$ の時は，$x \neq \emptyset$ より $\alpha \cdot x \neq \beta \cdot x$ なので，$\|\alpha \cdot x = \beta \cdot x \hookrightarrow \alpha = \beta\| = \|\top\|$ となるのでこれも良い． □

同様に次が示せる：

補題 2.13.
- $\emptyset \in E \in V$ に対し，$\mathbf{I} \Vdash \forall \alpha \, \varepsilon \, \gimel 2 \, \forall x \, [\langle x \in E \rangle \geq \alpha \hookrightarrow \alpha \cdot x \in \gimel E]$.
- $x \in E \in V$ なら $\mathcal{I} \Vdash x \in \gimel E$.

特に任意の $x \in E$ に対して $V^{(\mathcal{R})} \models \forall \alpha \, \varepsilon \, \gimel 2 \, \alpha \cdot x \in \gimel E$.

ではどんな時に $\gimel 2$ が非自明になるのか？ その十分条件を与えてくれるのが次の補題である：

補題 2.14. 証明的項 ω_0 および ω_1 で次を満たすものがあるとする：

$$\forall \pi \in \Pi \; \omega_0 \mathsf{k}_\pi \Vdash \bot \text{ or } \omega_1 \mathsf{k}_\pi \Vdash \bot.$$

この時，$\gimel 2$ は $V^{(\mathcal{R})}$ で非自明となっている．特に，$\theta := \lambda f. \, \mathbf{cc}(\lambda k. \, f(\omega_1 \mathsf{k})(\omega_0 \mathsf{k}))$ とおけば,

$$\theta \Vdash \neg \forall x \, (x \neq 0 \to x \neq 1 \to x \not\varepsilon \, \gimel 2).$$

Proof. $\xi \Vdash \forall x\,(x \neq 0 \to x \neq 1 \to x \not\varepsilon \beth 2)$ および $\pi \in \Pi$ を任意にとって，$\theta \star \xi \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を示す．この時，

$$\theta \star \xi \,.\, \pi \triangleright \xi \star \omega_1 \mathsf{k}_\pi \,.\, \omega_0 \mathsf{k}_\pi \,.\, \pi.$$

ξ に関する仮定から，任意の $x < 2$ について $\xi \Vdash x \neq 0 \to x \neq 1 \to x \not\varepsilon \beth 2$. よって特に $\xi \Vdash \bot \to \top \to \bot$ かつ $\xi \Vdash \top \to \bot \to \bot$ が成り立つ．$\|\top\| = \Lambda$ に注意すれば，$\omega_0 \mathsf{k}_\pi \Vdash \bot$ でも $\omega_1 \mathsf{k}_\pi \Vdash \bot$ でも上の式は $\perp\!\!\!\perp$ に属することがわかる． □

後ほど具体例を見る時に，実際にこのような ω_0, ω_1 を持つ実現可能性代数の例を与える．

2.5 V を初等拡大する $\beth 2$-値構造

一方，$\beth 2$ は関数 $\langle \varphi[-] \rangle$ によって V の情報をコードするのにも使われている．特に，$V^{(\mathcal{R})}$ には ZF_ϵ-構造の他に，ZF の Boole 代数 $\beth 2$-値構造が入り，それはある意味で V の初等拡大になっている．これは V の Boole 値拡大 $V^{\mathbb{B}}$ が V の初等拡大構造を含んでいた事と非常に似通っている．

まず，$\langle - \rangle$ の値が自然な形で計算できる事を見る：

補題 2.15. $\langle - \rangle$ はメタ的に論理式の関数として見た時，Boole 代数の同型のように振る舞う．即ち：

$$V^{(\mathcal{R})} \models \langle \bot \rangle = 0, \quad \forall \vec{x}\ \langle \varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}] \rangle = -\langle \varphi[\vec{x}] \rangle + \langle \psi[\vec{x}] \rangle,$$
$$V^{(\mathcal{R})} \models \forall \vec{y}\ \langle \forall x\, \varphi(x) \rangle = \prod_{x \in V^{(\mathcal{R})}} \langle \varphi(x) \rangle.$$

Proof. 論理式の構成に関する帰納法で示す．$\langle \bot \rangle = 0$ は明らか．

また，基礎モデルにおいては $\langle \varphi[x] \to \psi[x] \rangle = -\langle \varphi[x] \rangle + \langle \psi[x] \rangle$ はどんな x についても成り立つから，等式に関する絶対性より

$$V^{(\mathcal{R})} \models \forall x\ \langle \varphi[x] \to \psi[x] \rangle = -\langle \varphi[x] \rangle + \langle \psi[x] \rangle$$

は常に成立する．

最後に全称量化の場合を考える．次の二つがそれぞれ実現されていることを見ればよい：

(1) $\forall x\, \forall z\ \langle \forall y\, \varphi(x, y) \rangle \leq \langle \varphi(x, z) \rangle$,
(2) $\forall x\, \forall \alpha\, \varepsilon\, \beth 2\ [\forall z\, \alpha \leq \langle \varphi(x, z) \rangle \implies \alpha \leq \langle \forall y\, \varphi(x, y) \rangle]$.

一つ目の条件，下界である事については $\mathbf{I}$ が実現することがすぐにわかる．二つ目の条件も，実は $\mathbf{I}$ が実現する．これを見るため，$x \in V$ と $\alpha < 2$ を任意に固定し，代入結果がすべて $\mathbf{I}$ で実現されている事を見よう．

$\alpha = 0$ の時は，

$$\|\forall z\, 0 \leq \langle \varphi(x, z) \rangle \to 0 \leq \langle \forall y\, \varphi(x, y) \rangle\,\| = \|(\bot \to \bot) \to (\bot \to \bot)\|$$

なので，$\mathbf{I} \Vdash (\bot \to \bot) \to (\bot \to \bot)$ より OK.

最後に $\alpha = 1$ の時を考える．

$$\|\forall z\, 1 \leq \langle \varphi(x, z) \rangle \to 1 \leq \langle \forall y\, \varphi(x, y) \rangle\,\| = \|\forall z\, [\langle \varphi(x, z) \rangle = 1] \to \langle \forall y\, \varphi(x, y) \rangle = 1\|$$

よって，$\xi \Vdash \forall z\ \langle\varphi(x,z)\rangle = 1$ と $\pi \in \|\langle\forall y\,\varphi(x,y)\rangle = 1\|$ を任意に取って $\mathbf{I} \star \xi \mathbin{.} \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を示す．ここで $V \models \forall y\,\varphi(x,y)$ か否かで場合分けする．

$V \models \forall x\,\varphi(x,y)$ の時は，$\langle x,z\rangle = 1$ が任意の $z \in V$ について成立しているから，

$$|\forall z\ \langle\varphi(x,z)\rangle = 1| = \bigcap_{z\in V} |\langle\varphi(x,z)\rangle = 1| = |\bot \to \bot|.$$

一方で仮定より $\|\langle\forall y\,\varphi(x,y)\rangle = 1\|$ なので $\mathbf{I} \star \xi \mathbin{.} \pi \succ \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ となる．

$V \not\models \forall x\,\varphi(x)$ の時を考える．この時 $V \models \neg\varphi(y_0)$ なる y_0 を取っておけば，$\langle\varphi(x,y_0)\rangle = 0$ であり，

$$|\forall z\ \langle\varphi(x,z)\rangle = 1| = \bigcap_{z\in V} |\langle\varphi(x,z)\rangle = 1| = |\langle\varphi(x,y_0)\rangle = 1| = |\top \to \bot|.$$

また仮定より $\|\langle\forall y\,\varphi(x,y)\rangle = 1\| = \|\top \to \bot\|$．よってこの場合も $\mathbf{I}$ が実現してくれる事がわかる． □

系 2.2. $V^{(\mathcal{R})}$ は $\langle-\rangle$ によって ZF の言語に関する ℷ2-値構造 $V^{\daleth^{\mathcal{R}}2}$ が入る．更に，任意の $x \in V$ に対して $V \models \varphi[x] \iff \langle\varphi[x]\rangle = \mathbb{1}$.

Proof. $\langle-\rangle$ の定義と補題 2.10 および 2.15 から ℷ2-値擬構造が入る事は従う．Boole 値等号公理も普通に分解して証明すればよい． □

一方，強制法における $\check{V}$ と同じような，$V^{(\mathcal{R})}$ の自然な推移的な部分モデルで V の初等拡大になっているようなものが取れないか？ という気分が出て来る．ところが，これは自然な形では出来ないことがわかる：

注意 2.6 ($V^{(\mathcal{R})}$ は単純な V の複製を持たない). ℷ の定義から次が明らかである：

$$\langle x \in y\rangle = 1 \iff x \mathrel{\varepsilon} \daleth y.$$

ℷ が一方のみに付いているのが気持ち悪いので，ハッキリと V の写し身だけを考えるために，仮に $\tilde{x}$ という作用素を次で定義する：

$$\tilde{x} := \{\, (\tilde{y},\pi) \mid \pi \in \Pi \,\}.$$

このとき，$V^{(\mathcal{R})} \models \forall x\,\forall E\,[\langle x \mathrel{\varepsilon} E\rangle = 1 \iff x \mathrel{\varepsilon} \daleth E \iff \tilde{x} \mathrel{\varepsilon} \tilde{E}]$ となる事が容易に示せる．そこで $V^{(\mathcal{R})}$ の中で $\tilde{x}$ の形の元のみを考えてやる事を考えて，

$$\|\forall x \mathrel{\not\varepsilon} \tilde{V}\ \varphi[x]\| := \bigcup_{x\in V} \|\varphi[\tilde{x}]\|, \qquad \|x \mathrel{\not\varepsilon} \tilde{V}\| := \{\, (\tilde{x},\pi) \mid x \in V, \pi \in \Pi \,\} = \daleth\{\, \tilde{x} \mid x \in V \,\}$$

により新たな定数記号 $\tilde{V}$ と量化子 $\forall x \mathrel{\varepsilon} \tilde{V}$ を定めてやる．これらはこれまでと同様の議論から似た形の論理式はすべて交換可能であることがわかる．また，$\tilde{V}$ は ε および $\in$ について $V^{(\mathcal{R})}$ の推移的な部分クラスとなっていることが示せる．

そこで，次の相対化を考える：

$$(x \in y)^{\tilde{V}} :\equiv x \mathrel{\varepsilon} y, \qquad (x = y)^{\tilde{V}} :\equiv x = y, \qquad (\varphi \to \psi)^{\tilde{V}} :\equiv \varphi^{\tilde{V}} \to \psi^{\tilde{V}}$$

$$(\forall x\,\varphi(x,\vec{y}))^{\tilde{V}} :\equiv \forall x \mathrel{\varepsilon} \tilde{V}\ \varphi^{\tilde{V}}(x,\vec{y})$$

こうすれば $V \models \varphi[x] \iff V^{(\mathcal{R})} \models \varphi^{\tilde{V}}[\tilde{x}]$ という形で初等性が成り立ってくれるのではないか？ という気がしてくる．しかし，これは $V^{(\mathcal{R})}$ が存在特性を欠いているために示すことが出来ない！
実際，$\gimel 2$ が非自明なら $\tilde{V}$ は実際に V の初等拡大になっていないことを見る．$x := \{\emptyset\}, E := \{x, \emptyset\}$ とおく．まず次が成り立つ：

$$V \models \forall x \in E\,[x = \emptyset \lor \exists y\,(y \in x)]$$

一方で，$V^{(\mathcal{R})}$ で $\gimel 2$ が非自明なので，補題 2.11 および 2.13 より

$$V^{(\mathcal{R})} \models \exists \alpha \mathrel{\varepsilon} \gimel 2\,[\forall z\,(z \mathrel{\not\varepsilon} \alpha \cdot x), \alpha \cdot x \neq 0 \cdot x = \emptyset, \alpha \cdot x \mathrel{\varepsilon} \gimel E].$$

$V^{(\mathcal{R})}$ は同値変形で閉じており，$\tilde{V}$ が $V^{(\mathcal{R})}$ において ε について推移的であることから：

$$V^{(\mathcal{R})} \models \exists x \mathrel{\varepsilon} \tilde{E}\,[x \neq \emptyset, \nexists y\,(y \mathrel{\varepsilon} x)].$$

したがって $V \not\prec \tilde{V}$.

Krivine [5] では，$\gimel 2$ の超フィルター $\mathcal{D}$ が常に付加されていることが示されている．そこで $\mathcal{D}$ によって $V^{\gimel^{\mathcal{R}} 2}$ を割れば，$V^{(\mathcal{R})}$ の中で二値モデル $M := V^{\gimel^{\mathcal{R}} 2}/D$ が得られる．特に，$\mathcal{D}$ は $\langle x \in \mathrm{trcl}(\{y\}) \rangle \geq \alpha$ が整礎となるような α の全体として定義出来る．すると，この二値モデルは整礎で set-like になっているので，Mostwski 崩壊によってある推移クラスと同型になっている．この時，M は $V^{(\mathcal{R})}$ の $\in$-順序数を全て持ち，上の結果から $V \models \varphi \iff V^{(\mathcal{R})} \models (M \models \varphi)$ が成り立つ．

3 同値な定式化

本節では，より強制法に近い形で ZF の実現可能性モデルの定式化を与える．

3.1 名称を用いた定式化

強制法では，「$\mathbb{P}$-名称」と呼ばれる特殊な項全体 $V^{\mathbb{P}}$ を或る種の V の拡張と思って議論をした．これまでの実現可能性モデルでは名称に制限せず，記号の解釈が異なるのみで $V^{(\mathcal{R})} = V$ となっていた．以下では，ZF のモデルを得る上では強制法と同様に「$\mathcal{R}$-名称」の全体だけを考えていれば十分であることを示す．

Def. 3.1 ($\mathcal{R}$-名称の全体 $V^{\mathcal{R}}$). $\mathcal{R} = (\Lambda, \Pi, \Lambda \star \Pi, \perp\!\!\!\perp)$ を実現可能性代数とする．この時 $\mathcal{R}$-**名称**の全体 $V^{\mathcal{R}}$ を順序数上の帰納法により次で定める：

$$V_0^{(\mathcal{R})} := \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^{(\mathcal{R})} := \mathcal{P}(V_\alpha^{(\mathcal{R})} \times \Pi), \quad V_\gamma^{(\mathcal{R})} := \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha^{(\mathcal{R})} \text{ if } \gamma : \text{limit},$$

$$V^{\mathcal{R}} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{\mathcal{R}}.$$

$V^{(\mathcal{R})}$ 上での ZF_ε-論理式の解釈を真似て，以下では $V^{\mathcal{R}}$ 上で ZF_ε-論理式の解釈を定める：

Def. 3.2 ($V^{\mathcal{R}}$ **における論理式の解釈**)**.** ZF_ε-論理式 φ に対し，$V^{(\mathcal{R})}$ における虚偽値 $\|\varphi\|^* \subseteq \Pi$ および真理値 $|\varphi|^* \subseteq \Lambda$ を次で定める：

$$
\begin{gathered}
|\varphi|^* := \{\, \xi \in \Lambda \mid \forall \pi \in \|\varphi\|^*\, \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \,\}, \\
\|\bot\|^* := \Pi, \qquad \|\top\|^* := \emptyset, \\
\|a \not\varepsilon b\|^* := \{\, \pi \in \Pi \mid (a, \pi) \in b \,\}, \\
\|\varphi \to \psi\|^* := \{\, \xi \cdot \pi \mid \xi \in |\varphi|^*, \pi \in \|\psi\|^* \,\}, \\
\|\forall x\, \varphi[x, \vec{b}]\|^* := \bigcup_{a \in V^{\mathcal{R}}} \|\varphi[a, \vec{b}]\|^*, \\
\|a \subseteq b\|^* := \bigcup_{(c,\pi) \in a} \{\, \xi \cdot \pi \mid \xi \Vdash^* c \notin b \,\} = \bigcup_{c \in \mathrm{dom}(a)} \|c \notin b \implies c \not\varepsilon a\|^* \\
\|a \notin b\|^* := \bigcup_{(c,\pi) \in b} \{\, \xi \cdot \xi' \cdot \pi \mid \xi \Vdash^* \text{“}a \subseteq c\text{”}, \xi' \Vdash^* \text{“}c \subseteq a\text{”} \,\} = \|\forall x\, (a \simeq x \implies a \not\varepsilon b)\|^*
\end{gathered}
$$

但し，$\xi \Vdash^* \varphi \overset{\text{def}}{\iff} \xi \in |\varphi|^*$ とする．
ZF_ε の論理式 φ に対して，関係 $V^{\mathcal{R}} \models \varphi$ を次で定める：

$$
V^{\mathcal{R}} \models \varphi \overset{\text{def}}{\iff} \theta\xi \in \mathrm{PT}\, \theta \Vdash^* \varphi \ \ (\iff \mathrm{PT} \cap |\varphi|^* \neq \emptyset).
$$

すると，$V^{(\mathcal{R})}$ の場合と同様にして，$V^{\mathcal{R}}$ は古典論理のモデルであり，ZF_ε の公理系も満たすことがわかる：

定理 3.1. $V^{\mathcal{R}} \models \mathrm{ZF}_\varepsilon$.

こうして得られた $V^{\mathcal{R}}$ は，当然ながら $V^{(\mathcal{R})}$ よりも少ないアトムを持つ．しかし，ZF 部分については，全く同じ理論を満たすことが示せる．それを正確に述べるため，$V^{(\mathcal{R})}$ と $V^{\mathcal{R}}$ の元の間の翻訳を次で与える：

Def. 3.3. $\Phi : V^{(\mathcal{R})} \to V^{\mathcal{R}}, \Psi : V^{\mathcal{R}} \to V^{(\mathcal{R})}$ をそれぞれ超限帰納法により次のように定める：

$$
\begin{aligned}
\Phi(x) &:= \{\, (\Phi(y), \pi) \mid (y, \pi) \in x \cap (V \times \Pi) \,\}, \\
\Psi(\dot{x}) &:= \{\, (\Psi(\dot{y}), \pi) \mid (\dot{y}, \pi) \in \dot{x} \,\}.
\end{aligned}
$$

Φ と Ψ は本質的には殆んど同じだが，定義域・値域がテレコになっているので，議論の見通しを良くするために違う名前をつけた．次はランクに関する帰納法により直ちに従う：

補題 3.1. 任意の $\dot{x} \in V^{\mathcal{R}}$ に対し $\Phi(\Psi(\dot{x})) = \dot{x}$.

更に，原子論理式についてはこの翻訳によって真偽値が正確に保たれることもわかる：

補題 3.2. $\dot{x}, \dot{y} \in V^{\mathcal{R}}$ および $x, y \in V^{(\mathcal{R})}$ に対し次が成立：

$$\begin{aligned} \|\dot{x} \not\varepsilon \dot{y}\|^* &= \|\Psi(\dot{x}) \not\varepsilon \Psi(\dot{y})\|, & \|\dot{x} \notin \dot{y}\|^* &= \|\Psi(\dot{x}) \notin \Psi(\dot{y})\|, & \|\dot{x} \subseteq \dot{y}\|^* &= \|\Phi(\dot{x}) \subseteq \Phi(\dot{y})\|, \\ \|x \not\varepsilon y\| &= \|\Phi(x) \not\varepsilon \Phi(y)\|^*, & \|x \notin y\| &= \|\Phi(x) \notin \Phi(y)\|^*, & \|x \subseteq y\| &= \|\Phi(x) \subseteq \Phi(y)\|^*. \end{aligned}$$

Proof. $(\max(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y)), \min(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y)))$ などなどの辞書式順序に関する帰納法. □

次が直ちに従う：

系 3.1. $\mathbf{I} \Vdash \forall x\ (\Psi(\Phi(x)) \subseteq x), \forall x\ (x \subseteq \Psi(\Phi(x)))$.

これらを使うと，次のような形で $V^{\mathcal{R}}$ と $V^{(\mathcal{R})}$ の「同値性」が言える：

定理 3.2. 任意の ZF-論理式 φ に対し $\theta_0, \theta_1 \in \mathrm{PT}$ が存在し，任意の $x_1, \ldots, x_n \in V$，$\dot{x}_1 \ldots \dot{x}_n \in V^{\mathcal{R}}$ および $\xi \in \Lambda$ に対し次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \xi \Vdash^* \varphi[\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n] &\implies \theta_0 \xi \Vdash \varphi[\Psi(\dot{x}_1), \ldots, \Psi(\dot{x}_n)], \\ \xi \Vdash \varphi[x_1, \ldots, x_n] &\implies \theta_1 \xi \Vdash^* \varphi[\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)]. \end{aligned}$$

特に任意の ZF-閉論理式 φ に対し $V^{(\mathcal{R})} \models \varphi \iff V^{\mathcal{R}} \models \varphi$.

Proof. φ が原子論理式のときは補題 3.2 より $\theta_0 = \theta_1 = \mathbf{I}$ とすれば良い.

$\varphi \to \psi$ の形の時を考える．帰納法の仮定により $\theta_i^\varphi, \theta_i^\psi$ $(i < 2)$ を取れば，このとき $\theta_0 := \lambda xy.\ \theta_0^\psi(x(\theta_1^\varphi y))$, $\theta_1 := \lambda xy.\ \theta_1^\psi(x(\theta_0^\varphi y))$ が求めるものである.

最後に $\forall x\, \varphi[x, y]$ の形の論理式の場合を考える．帰納法の仮定により $\theta_0^\varphi, \theta_1^\varphi$ を取っておく．以下 $a, b \in V$, $\dot{a}, \dot{b} \in V^{\mathcal{R}}$ とする．$\xi \Vdash \forall x\, \varphi[x, b]$ の時は補題 3.1 と帰納法の仮定から $\theta_1^\varphi \xi \Vdash^* \forall x\, \varphi[x, \Phi(x)]$ となる.

最後に $\xi \Vdash^* \forall x\, \varphi[x, \dot{b}]$ の場合を考えよう．すると定義と帰納法の仮定から，任意の $\dot{x} \in V^{\mathcal{R}}$ に対し $\theta_0^\varphi \xi \Vdash \varphi[\Psi(\dot{x}), \Psi(\dot{b})]$ が成り立つ．この事をつかって，任意の $x \in V$ に対し $\theta_0 \xi \Vdash \varphi[x, \Psi(\dot{b})]$ となるような θ_0 を見付けたい．いま φ は ZF-論理式で $V^{(\mathcal{R})} \models \mathrm{ZF}_\varepsilon$ なので，補題 2.1 の (3) より $\tau \Vdash \forall x \forall x' \forall y\, [x \subseteq x' \to x' \subseteq$

$x \to \varphi[x,y] \to \varphi[x',y]]$ となるような $\tau \in \mathrm{PT}$ が取れる．また系 3.1 より $\mathbf{I} \Vdash \Psi(\Phi(x)) \subseteq x, x \subseteq \Psi(\Phi(x))$ である．そこで $\theta_0 := \lambda x.\ \tau\mathbf{II}(\theta_0^{\varphi}x)$ と定める．この時任意に $x \in V$ を取れば，$\theta_0\xi \Vdash \varphi[x, \Psi(\dot{b})]$ となっている． $\square$

以上を踏まえ，以後は $V^{(\mathcal{R})}$ の代わりに $V^{\mathcal{R}}$ を用い，$\|\quad\|^*$ と書く代わりに $\|\quad\|$ と書いて議論をしていく事にする．

4 $V^{(\mathcal{R})}$ における自然数と従属選択公理

4.1 実現可能性モデルにおける自然数の表現

実現可能性モデルでは，扱い易いよう von Neumann 順序数とは異なる自然数のコードを採用する：

Def. 4.1. 写像 s を $s(x) := \daleth(\{x\}) = \{(x,\pi) \mid \pi \in \Pi\}$ により定める．$0 := \emptyset$ とし，自然数 n と s^n0 を同一視して，基礎モデルで $\mathbb{N} := \{s^n0 \mid n < \omega\}$ と置く．
この時，集合 $\tilde{\mathbb{N}}$ を次で定める：

$$\tilde{\mathbb{N}} := \{(s^n0, \underline{n} \centerdot \pi) \mid n < \omega, \pi \in \Pi\}.$$

ただし，ここで $\underline{n}$ は Church 数項：$\underline{0} := \lambda fz.\ z$, $\underline{n+1} := \sigma\underline{n}$, $\sigma := \lambda nfz.\ nf(fz)$. この時 $\underline{n} \star \xi \centerdot \pi \succ \xi^n\eta \star \pi$ となる．

注意 4.1. $\|a \not\varepsilon s(b)\| = \|b \neq a\|$ かつ $\|a\ \varepsilon\ s(b)\| = \|a = b\|$．とくに $\|x \not\varepsilon s(x)\| = \Pi$ であり，等号公理から $V^{(\mathcal{R})} \models \forall a\, \forall x\, \forall y\, [x\ \varepsilon\ s(a) \to y\ \varepsilon\ s(b) \to x = y]$.

この集合が $V^{(\mathcal{R})}$ で見ると $\in$ の意味でも ε の意味でも自然数全体となっていることを以下では見ていく．特に，$\tilde{\mathbb{N}}$ が 0 を含み s で閉じた最小の集合である事を示せば良く，つまり数学的帰納法の図式が $\tilde{\mathbb{N}}$ について実現されている事を見ればよいことになる．

その前にまず，こうして導入した $s, 0$ が外延的同値性 $\simeq$ と両立することを確かめる：

補題 4.1. (1) $\mathbf{I} \Vdash \forall x\, \forall y\, (s(x) = s(y) \hookrightarrow x = y)$,
(2) $\lambda x.\ x\mathbf{I} \Vdash \forall x\, (s(x) \not\simeq 0)$,
(3) $V^{(\mathcal{R})} \models \forall x\, \forall y\, [x \simeq y \leftrightarrow s(x) \simeq s(y)]$,
(4) $\lambda gx.\ g(\sigma x) \Vdash \forall y\, (s(y) \not\varepsilon \tilde{\mathbb{N}} \to y \not\varepsilon \tilde{\mathbb{N}})$,
(5) $V^{(\mathcal{R})} \models \forall x\, (s(x) \notin \tilde{\mathbb{N}} \to x \notin \tilde{\mathbb{N}})$.
(6) $V^{(\mathcal{R})} \models \forall n, m\ \varepsilon\ \tilde{\mathbb{N}}\, [n \simeq m \to n = m]$.

Proof. (1) は明らか．(2) を示す．特に $\lambda x.\, x\mathbf{I} \Vdash s(x) \not\subseteq \emptyset$ を示そう．略さずに書けば，

$$\lambda x.\, x\mathbf{I} \Vdash (\forall z\,(z \notin \emptyset \to z \not\varepsilon\, s(x))) \to \bot$$

を示せばよい．つまり，$\eta \Vdash \forall z\,(z \notin \emptyset \to z \not\varepsilon\, s(x))$ と $\pi \in \Pi$ に対して $\lambda x.\, x\mathbf{I} \star \eta \,.\, \pi \succ \eta\mathbf{I} \star \pi \in \Pi$ を示せれば良い．しかるに，$\|z \notin \emptyset\| = \|\forall w\,(w \simeq z \to w \not\varepsilon\, 0)\| = \emptyset$ であり，$\|z \not\varepsilon\, s(x)\| = \|z \neq x\|$ なので，任意の $z \in V$ に対して $\eta \Vdash (\forall z\,(z \notin \emptyset \to z \not\varepsilon\, s(x))) \iff \eta \Vdash \top \to z \neq x$ となる．特に $z = x$ に取れば，$\eta \Vdash \top \to \bot$ を得，$\mathbf{I} \Vdash \top$ より $\eta\mathbf{I} \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を得る．

(3) について：演繹について閉じているので，$V^{(\mathcal{R})}$ の中で議論する．任意の a, b について：

$$s(a) \subseteq s(b) \iff \forall x\,(x \notin s(b) \to x \not\varepsilon\, s(a)) \iff \forall x\,(x \notin s(b) \to x \neq a) \iff a \in s(b).$$

いま，$a \simeq b$ なら $a \simeq b\, \varepsilon\, s(b)$ より $\in$ の公理から $a \in s(b)$ が得られる．また，逆に $a \in s(b)$ なら $z\, \varepsilon\, s(b)$ で $a \simeq z$ となるものが取れるが，上の注意より $s(b)$ は $V^{(\mathcal{R})}$ において b のみしか元を持たないので $a \simeq b$.

(4)：やるだけ．

最後に (5) について：次の同値変形から明らか：

$$x \in \tilde{\mathbb{N}} \iff \exists y\, \varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, y \simeq x \iff \exists y\, \varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\,(s(x) \simeq s(y)) \implies s(x) \in \tilde{\mathbb{N}}. \qquad \square$$

$\tilde{\mathbb{N}}$ に関する量化子の虚偽値の計算を簡単にするため，次の記号を導入する：

$$\|\forall x\, \varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, \varphi[x]\| := \{\, \underline{n} \,.\, \pi \mid \pi \in \|\varphi[s^n 0]\|\,\}.$$

これが期待通りの振る舞いをすることはルーチンワークで示せる：

補題 4.2. (1) $\lambda xyz.\, y(xz) \Vdash \forall x\, \varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, \varphi[x] \to \forall x\,(\neg\varphi[x] \to x \not\varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}})$,
(2) $\lambda xy.\, \mathbf{cc}\,(\lambda \mathsf{k}.\, x\mathsf{k}y) \Vdash \forall x\,(\neg\varphi[x] \to x \not\varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}) \to \forall x\, \varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, \varphi[x]$.

Proof. (1) $\xi \Vdash \forall x\, \varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, \varphi[x]$, $x \in V$, $\eta \Vdash \neg\varphi[x]$, $\pi_0 \in \|x \not\varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\|$ とする．この時，$\tilde{\mathbb{N}}$ の定義より $n < \omega$ と $\pi \in \Pi$ で $x = s^n 0$ かつ $\pi_0 = \underline{n} \,.\, \pi$ となるものが取れる．示すべきことは，$\lambda xyz.\, y(xz) \star \xi \,.\, \eta \,.\, \underline{n} \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ である．このとき $\lambda xyz.\, y(xz) \star \xi \,.\, \eta \,.\, \underline{n} \,.\, \pi \succ \eta(\xi\underline{n}) \star \pi \succ \eta \star \xi\underline{n} \,.\, \pi$ であり $\eta \Vdash \varphi[s^n 0] \to \bot$ なので，あとは $\xi\underline{n} \Vdash \varphi[s^n 0]$ が示せれば良い．しかるに $\varpi \in \|\varphi[s^n 0]\|$ を取れば，$\xi\underline{n} \star \pi \succ \xi \star \underline{n} \,.\, \varpi$ となり，定義より $\underline{n} \,.\, \varpi \in \|\forall x\, \varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, \phi[x]\|$ なので $\xi \star \underline{n} \,.\, \varpi \in \perp\!\!\!\perp$ を得る．

(2) 同様． $\square$

それでは，次に掲げる $\tilde{\mathbb{N}}$ の帰納法図式を示していく．

補題 4.3. 任意の ZF_ε-論理式 $\varphi[z, \vec{x}]$ に対し，次が成立：

$$\mathbf{I} \Vdash \forall \vec{x}\, \forall n\, \varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\,(\forall y\,(\varphi[\vec{x}, y] \to \varphi[\vec{x}, s(y)]) \to \varphi[\vec{x}, 0] \to \varphi[\vec{x}, n]).$$

これに加え，$\tilde{\mathbb{N}}$ が $\in$ の意味でも s について閉じていることがわかれば，ZF で見ても（つまり $\in, \subseteq$ だけで書き換えても）帰納法図式が成り立っていることが直ちにわかる：

系 4.1. 任意の ZF-論理式 $\varphi[z, \vec{x}]$ に対し，次が成立：

$$V^{(\mathcal{R})} \models \forall \vec{x}\, \forall n \in \tilde{\mathbb{N}}\, (\forall y\, (\varphi[\vec{x}, y] \to \varphi[\vec{x}, s(y)]) \to \varphi[\vec{x}, 0] \to \varphi[\vec{x}, n]).$$

特に $V^{(\mathcal{R})}$ を ZF のモデルとみたとき，$\tilde{\mathbb{N}}$ は自然数全体の集合と同型.

Proof. 上の補題 4.3 および，ZF-論理式が $\simeq$ と両立するという補題 2.1 の (3) より直ちに従う. □

あとは上の補題 4.3 を示せばよい．それには次の補題を使う：

補題 4.4. $n, k < \omega$ とし，$\xi \Vdash \forall y\, (\varphi(y) \to \varphi(sy))$, $\eta \Vdash \varphi(s^k 0)$ および $\pi \in \|\varphi(s^k n)\|$ とする．このとき $\underline{n} \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \in \perp\!\!\!\perp$.

Proof. n に関する帰納法で示す.

$n = 0$ の時は $\pi \in \|\varphi(s^k 0)\|$ となるので，

$$\underline{0} \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \succ \eta \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$$

となるから OK.

n で成立するとして $n+1$ の場合を考えると，

$$\underline{n+1} \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \equiv \sigma \underline{n} \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \succ \underline{n} \star \xi \mathbin{.} (\xi\eta) \mathbin{.} \pi$$

このとき $(\xi\eta) \Vdash \varphi(s^{k+1} 0)$ であり，$\pi \in \|\varphi(s^k(sn))\| = \|\varphi(s^{k+1} n)\|$ となるから，帰納法の仮定より $\underline{n} \star \xi \mathbin{.} (\xi\eta) \mathbin{.} \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を得る. □

Proof of Lemma 4.3. 簡単のため以下 $\vec{x}$ は省略する．$\varphi(n)$ を ZF_ε の論理式として次を示す：

$$\mathbf{I} \Vdash \forall \vec{x}\, \forall n\, \varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, (\forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(sx)) \to \varphi(0) \to \varphi(n)).$$

そこで $n < \omega$ と $\xi \Vdash \forall x\, \varphi(x) \to \varphi(sx)$，$\eta \Vdash \varphi(0)$ および $\pi \in \|\varphi(s^n 0)\|$ を固定し，次を示せばよい：

$$\mathbf{I} \star \underline{n} \mathbin{.} \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \succ \underline{n} \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \in \perp\!\!\!\perp.$$

しかし，これは補題 4.4 で $k = 0$ と置けば得られることである. □

また，$\tilde{\mathbb{N}}$ が外延的同値性と相性が良いことから，$\tilde{\mathbb{N}}$ 上帰納的に定義された関数は ZF のモデルの中でもちゃんと関数として振る舞うことがわかる：

補題 4.5. ZF_ε のモデルにおいて，自然数上定義された関数は外延的にも関数となる．

$$V^{(\mathcal{R})} \models \forall x\, \forall f : \tilde{\mathbb{N}} \to V^{(\mathcal{R})}\, \forall n, m \in \tilde{\mathbb{N}}\, [n \simeq m \to f(n) = f(m)].$$

Proof. 補題 4.1 より $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ なら $n \simeq m \mathrel{\varepsilon} \tilde{\mathbb{N}}$ なる m は一つしか存在しないので． □

また，今回はそんなに使わないが，部分再帰関数はちゃんと $\tilde{\mathbb{N}}$ 上に拡張されて定義される：

補題 4.6. (1) $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ が部分再帰関数なら $V^{\mathbb{R}} \models F : \tilde{\mathbb{N}}^k \to \tilde{\mathbb{N}}$,
(2) $F : \mathbb{N}^k \to 2$ が部分再帰関数なら $V^{(\mathcal{R})} \models F : \tilde{\mathbb{N}}^k \to \{0, 1\}$.

特に，通常の $\mathbb{N}$ 上の整列順序がそのまま $\tilde{\mathbb{N}}$ 上に持ち上がることを見ておこう：

補題 4.7 ($\tilde{\mathbb{N}}$ における自然な順序). $<$ を V における $\mathbb{N}$ 上の自然な順序とする．この時 $V^{(\mathcal{R})}$ において $x <^{\mathcal{R}} y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \langle x < y \rangle = \mathbb{1}$ で定義される二項関係 $<^{\mathcal{R}}$ は $V^{(\mathcal{R})}$ で整列順序となり，特に $V^{(\mathcal{R})}$ における $\tilde{\mathbb{N}}$ 上の自然な順序に一致する．

Proof. 推移律や非反射律は明らかに $\mathbf{I}$ が実現している．また，$<$ は整列順序であるので，整礎関係の絶対性 2.9 より $<^{\mathcal{R}}$ も整礎である．

自然数の順序のグラフは再帰的なので，上の補題から，$V^{(\mathcal{R})} \models \forall x\, \forall y\ \langle x < y \rangle = 0 \text{ or } 1$. そこで次の式が実現される事を確かめればよいが，これはルーチンワーク：

$$\forall x, y, z \mathrel{\varepsilon} \tilde{\mathbb{N}}\, [x = y + z \hookrightarrow \langle x < y \rangle \neq 1], \quad \forall x, y, z \mathrel{\varepsilon} \tilde{\mathbb{N}}\, [y = x + z + 1 \hookrightarrow \langle x < y \rangle = 1].$$ □

4.2 従属選択公理および非外延的選択公理

濃度に関する条件を課せば，実現可能性モデル内部では従属選択公理が実現されていることを見る．

Def. 4.2. $\mathcal{R}$ を実現可能性代数とする時，$|\mathcal{R}| = |\Lambda \cup \Pi \cup \Lambda \star \Pi|$ と表す．
以下，適当な単射 $\Lambda \times \Pi \ni (\xi, \pi) \mapsto \alpha_{\xi,\pi} \in |\mathcal{R}|$ が固定されているものとする．

補題 4.8. $\mathcal{C}$ を $\mathrm{dom}(\mathcal{C})$ が整列可能なクラス，$\kappa := |\mathcal{R}|$, $\varphi[\vec{x}, y]$ を ZF_ε の論理式とする．この時，次を満たす関数 $f = f^{\mathcal{C}}_\varphi : V \times \kappa \to V$ が定義可能：

(1) 任意の $(a, \pi) \in \mathcal{C}$, $\vec{x} \in V$ と $\xi \Vdash \varphi[\vec{x}, a]$ に対し，$\alpha < \kappa$ で $\xi \mathbin{.} \pi \in \|\varphi[\vec{x}, f(\vec{x}, \alpha)] \to f(\vec{x}, \alpha) \not\varepsilon\, \mathcal{C}\|$ を満たすものが存在，

(2) $\mathbf{I} \Vdash \forall \vec{x}\, \forall y\ [\forall \alpha\, \varepsilon\, \daleth\kappa\, (\varphi[\vec{x}, f(\vec{x}, \alpha)] \to f(\vec{x}, \alpha) \not\varepsilon\, \mathcal{C}) \to \varphi[\vec{x}, y] \to y \not\varepsilon\, \mathcal{C}]$.

特に，集合を値域とする弱い Skolem 関数が常に取れる：

$$V^{(\mathcal{R})} \models \forall X\, \forall Y\, \exists f : {}^{<\omega}X \times \daleth\kappa \underset{\mathrm{str}}{\longrightarrow} Y\ \forall \vec{x} \in {}^{<\omega}X\, \forall y\, \varepsilon\, Y\ [\varphi[\vec{x}, y] \to \exists \alpha\, \varepsilon\, \daleth\kappa\, \varphi[\vec{x}, f(\vec{x}, \alpha)]]\,.$$

Proof. (1) $\mathcal{C}$ の整列順序 $<_{\mathcal{C}}$ を一つ固定する．以下が求めるものとなる：

$$f(\vec{x}, \alpha) := \begin{cases} \min_{<_{\mathcal{C}}} \{\, c \mid \alpha = \alpha_{\xi,\pi}, \xi \Vdash \text{“}\varphi[\vec{x}, c]\text{”}, (c, \pi) \in \mathcal{C} \,\} & (\text{if } \neq \emptyset) \\ \min \mathrm{dom}(\mathcal{C}) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

実際，$(a, \pi) \in \mathcal{C}$ かつ $\xi \Vdash \varphi[\vec{x}, a]$ なら $\xi \Vdash \varphi[\vec{x}, f(\vec{x}, \alpha_{\xi,\pi})]$ かつ $\pi \in \|f(\vec{x}, \alpha_{\xi,\pi}) \notin \mathcal{C}\|$ となる．

(2) 示すべきことは，任意に $\vec{x} \in V, (y, \pi) \in \mathcal{C}, \xi \Vdash \forall \alpha\, \varepsilon\, \daleth\kappa\, (\varphi(\vec{x}, f(\vec{x}, \alpha)) \to f(\vec{x}, \alpha) \not\varepsilon\, \mathcal{C})$ および $\eta \Vdash \varphi(\vec{x}, y)$ を取って，

$$\mathbf{I} \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \rhd \xi \star \eta \mathbin{.} \pi \in \perp\!\!\!\perp$$

である．しかし前の (1) より $\eta \mathbin{.} \pi \in \|\varphi(\vec{x}, f(\vec{x}, \alpha_{\xi,\pi})) \to f(\vec{x}, \alpha_{\xi,\pi}) \not\varepsilon\, \mathcal{C}\|$ であり，$\forall$ の解釈から $\xi \Vdash \varphi(\vec{x}, f(\vec{x}, \alpha_{\xi,\pi})) \to f(\vec{x}, \alpha_{\xi,\pi}) \not\varepsilon\, \mathcal{C}$ なので良い． □

また，$|\mathcal{R}| = \aleph_0$ の時は，よりパラメータの範囲を厳しく制限出来ることが，同様の議論によってわかる：

補題 4.9. $|\mathcal{R}| = \aleph_0$ で $\mathcal{C}$ を $\mathrm{dom}(\mathcal{C})$ が整列可能なクラス，$\varphi[\vec{x}, y]$ を ZF_ε の論理式とする．この時，次を満たす関数 $f = f^{\mathcal{C}}_\varphi : V \times \kappa \to V$ が定義可能：

(1) 任意の $(a, \pi) \in \mathcal{C}$, $\vec{x} \in V$ と $\xi \Vdash \varphi[\vec{x}, a]$ に対し，$n \in \mathbb{N}$ で $\xi \mathbin{.} \pi \in \|\varphi[\vec{x}, f(\vec{x}, n)] \to f(\vec{x}, n) \not\varepsilon\, \mathcal{C}\|$ を満たすものが存在，

(2) $\mathbf{I} \Vdash \forall \vec{x}\, \forall y\ \Big[\forall k\, \varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, (\varphi[\vec{x}, f(\vec{x}, k)] \to f(\vec{x}, k) \not\varepsilon\, \mathcal{C}) \to \varphi[\vec{x}, y] \to y \not\varepsilon\, \mathcal{C}\Big]$.

特に，集合を値域とする弱い Skolem 関数が常に取れる：

$$V^{(\mathcal{R})} \models \forall X\, \forall Y\, \exists f : {}^{<\omega}X \times \daleth\kappa \underset{\mathrm{str}}{\longrightarrow} Y\ \forall \vec{x} \in {}^{<\omega}X\, \forall y\, \varepsilon\, Y\ [\varphi[\vec{x}, y] \to \exists \alpha\, \varepsilon\, \daleth\kappa\, \varphi[\vec{x}, f(\vec{x}, \alpha)]]\,.$$

この Skolem 関数は強い同値性に関する関数にはなっているが，外延的同値性と両立するとは限らない．ともあれ，この弱い Skolem 関数を使えば，特定の条件下で非外延的な選択関数が定義可能となることがわかる：

定理 4.1 (Non-extensional Axiom of Choice, NEAC)**.** $\kappa := |\mathcal{R}|$ とする．この時：

$$V^{(\mathcal{R})} \models \beth\kappa : \text{整列可能} \implies \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\forall z \, \exists F : \text{写像} \, [F \sqsubseteq z \wedge \forall x \, \forall y \, \exists y' \, [(x,y) \in z \to (x,y') \in F]]}.$$

波下線部の命題を**非外延的選択公理**（NEAC）と呼ぶ．特に，$\kappa = \aleph_0$ なら無条件に $V^{(\mathcal{R})} \models$ NEAC.

Proof. $V^{(\mathcal{R})}$ をあたかもモデルであるかのように扱って示そう．そこで $<_{\beth\kappa}$ を $\beth\kappa$ 上の整列順序とする．集合 $z \in V^{(\mathcal{R})}$ を任意にとって，$\varphi(z,x,y) :\equiv (x,y) \, \varepsilon \, z$ とおく．この時，上の補題 4.8 の「特に」部分を φ と $X = \mathrm{dom}(z), Y = \mathrm{ran}(z)$ に適用すれば，$f : \mathrm{dom}(z) \times \beth\kappa \to \mathrm{ran}(z)$ で，

$$V^{(\mathcal{R})} \models \forall x \in \mathrm{dom}(z) \, \forall y \in \mathrm{ran}(z) \, [(x,y) \, \varepsilon \, z \to \exists \alpha \in \beth\kappa \, (x, f(x,\alpha)) \, \varepsilon \, z]$$

を満たすものが取れる．そこで，

$$F := \{ \, (x, f(x,\alpha)) \mid \alpha = \min_{<_{\beth\kappa}} \{ \, \alpha \, \varepsilon \, \beth\kappa \mid (x, f(x,\alpha)) \in z \, \} \, \}$$

により定めれば，これが求めるものである． □

更に，$\mathrm{ZF}_\varepsilon + \mathrm{NEAC}$ から従属選択公理 DC が証明出来る：

補題 4.10.

$$\mathrm{ZF}_\varepsilon + \mathrm{NEAC} \vdash \forall X \, \forall R \, \exists f : \omega \underset{\mathrm{str}}{\longrightarrow} X [\forall x \, \varepsilon \, X \, \exists y \, \varepsilon \, X \, (x,y) \, \varepsilon \, R \to \forall n < \omega \, (f(n), f(n+1)) \, \varepsilon \, R].$$

Proof. $g \subseteq R$ で $g : X \underset{\mathrm{str}}{\longrightarrow} X$ となっているものを取り，$x_0 \in X$ を任意に固定する．$f : \omega \to X$ を次のように帰納的に定義する：

$$f(0) := x_0, \qquad f(n+1) := g(f(n)).$$

すると，任意の $n < \omega$ に対して $(f(n), f(n+1)) \, \varepsilon \, R$ であり，特に $(f(n), f(n+1)) \in R$. ω 上の非外延的関数は外延的になるので，この f が求めるものである． □

系 4.2. ZF + NEAC ⊢ DC.

Proof. R が ZF の意味で極大元を持たない X 上の二項関係だとする．$R^* := \{ \, (x,y) \, \varepsilon \, X \times X \mid (x,y) \in R \, \}$ により R^* を定めれば，R^* は ZF_ε の意味で極大元を持たない X 上の二項関係となる．そこで上の補題 4.10 を使えば，$f : \omega \underset{\mathrm{str}}{\longrightarrow} X$ で $(f(n), f(n+1)) \, \varepsilon \, R^*$ を満たすものが取れる．よって補題 4.5 の議論のように，ε の意味で ω 上の関数になっていれば，$\in$ に関する関数にもなっているとしてよい．すると $f : \tilde{\mathbb{N}} \underset{\mathrm{ext}}{\longrightarrow} X$ と見ることができ，R^* の定義より $(f(n), f(n+1)) \in R$ が成り立つ． □

系 4.3. $\kappa = |\mathcal{R}|$ とおけば，$V^{(\mathcal{R})} \models$ “$\daleth\kappa$: 整列可能 $\implies$ DC”. 特に $|\mathcal{R}| = \aleph_0$ なら $V^{(\mathcal{R})} \models \mathrm{DC}$.

4.3 非外延的選択公理の特徴付け

ZF での通常の議論と同様に，次の議論が成り立つ：

補題 4.11. ZF_ε 上で次は同値：

(1) NEAC,

(2) $\forall X\, \exists f : \mathrm{function}\, \forall x \mathrel{\varepsilon} X\, [\exists w\, (w \mathrel{\varepsilon} x) \to f(x) \mathrel{\varepsilon} x]$.

Proof. (1) $\implies$ (2)：収集公理で $z = \{\, (x, z) \mid z \mathrel{\varepsilon} x \mathrel{\varepsilon} X \,\}$ とおけば，NEAC より関数 $f \sqsubseteq z$ が取れ，この時 $x \mathrel{\varepsilon} X$ が空でなければ $f(x) \mathrel{\varepsilon} x$ となる．

(2) $\implies$ (1)：z が与えられたとし，$I := \mathrm{dom}(z)$ とおく（内包公理と収集公理からこれは $\mathrm{dom}(z)$ は集合として存在する）．$z_i := \{\, (i, x) \mid (i, x) \mathrel{\varepsilon} z, i \mathrel{\varepsilon} I \,\}$ と定め，$X := \{\, z_i \mid i \in I \,\}$ とおく．この時 (2) より関数 g で各 $i \mathrel{\varepsilon} I$ に対し $g(z_i) \mathrel{\varepsilon} z_i$，すなわち $g(z_i) \in z$ となるものが取れる．そこで $f := \mathrm{ran}(g)$ とおけば，これが NEAC が求める z の一様化となっている． □

注意 4.2. 通常の選択公理と同じく，NEAC は次の命題とも同値になるような気がするかもしれない：

> 任意の集合 A と同値関係 $\sim$ に対して完全代表系 A^* が存在する．即ち $\forall x, y \mathrel{\varepsilon} A^*\, [x \sim y \to x = y]$ かつ $\forall x \mathrel{\varepsilon} A\, \exists y \mathrel{\varepsilon} A^*\, x \sim y$ なる $A^* \sqsubseteq A$ が存在する．

しかし，期待に反してこれは $\mathrm{ZF}_\varepsilon + \mathrm{NEAC}$ の公理系だけからは出て来ない．通常，これは x に対する $\sim$-同値類を $[x]_\sim$ と書くことにすれば，求める完全代表系 A^* は $A_0 := \{\, [x]_\sim \mid x \in A \,\}$ に対する選択関数の像を取ることで得られる．しかし，ここでは「完全性」に暗黙裡に集合の外延的同値性を使っている．即ち，$x \sim y$ なら $[x] = [y]$ となることがこの証明のキモだったが，ZF_ε の公理系だけから内包公理の与える集合が外延性を満たすことは従わない．実際，$V^{(\mathcal{R})}$ における内包公理を実現する名称の構成法は同値関係についてこうした互換性が成り立たない．

5 外延性と関数・関係に関する注意

ZF_ε-関数と ZF-関数の間の相互関係について以下では細かく分析する．

Def. 5.1. ZF_ε において集合 X が**外延的** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y \,\varepsilon\, X\, [x \simeq y \to x = y]$.

定義より明らかに次が成り立つ：

補題 5.1. X が外延的で $Y \subseteq X$ なら Y も外延的.

補題 5.2. X, Y が外延的なら $X \times Y$ も外延的.

Proof. $(x, y), (x', y') \,\varepsilon\, X \times Y$ かつ $(x, y) \simeq (x', y')$ とすると，順序対の定義は ZF 部分でも ZF_ε 部分でも同じように出来るので $x \simeq x'$ かつ $y \simeq y'$. すると X, Y の外延性より $x = x', y = y'$ を得，結局 $(x, y) = (x', y')$ を得る. □

定義域・値域の外延性は，ZF_ϵ-関数と ZF-関数の互換性に関して重要な十分条件を与える：

補題 5.3. (1) X が外延的で $f : X \underset{\text{str}}{\longrightarrow} Y$ なら $f : X \underset{\text{ext}}{\longrightarrow} Y$.
(2) Y が外延的で $f : X \underset{\text{ext}}{\longrightarrow} Y$ なら $f \simeq f' := \{\, (x, y) \,\varepsilon\, X \times Y \mid (x, y) \in f \,\}$.
(3) X, Y が共に外延的なら，$f : X \underset{\text{str}}{\longrightarrow} Y \iff f : X \underset{\text{ext}}{\longrightarrow} Y$. 単射全射の概念も一致する.

外延的写像が与えられれば，それを用いて引き戻し・押し出しを考えることが出来る．通常の ZF における議論と同様にして次が成り立つ：

補題 5.4. $f : A \underset{\text{ext}}{\longrightarrow} B$ について，$f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ および $f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ をそれぞれ $f_*(X) := \{\, f(x) \mid x \in X \,\}$ および $f^*(Y) := \{\, x \,\varepsilon\, X \mid f(x) \in Y \,\}$ で定める.

(1) f_*, f^* は共に外延的関数,
(2) f が外延的単射なら f_* も外延的単射,
(3) f が外延的全単射なら f^*, f_* は互いに ZF-逆写像であり，従って ZF-全単射.

これらは個別の写像が ZF と両立するか否かという問題を扱っているが，個別のモデルにおける議論では，良い写像を介して ZF_ε 側の現象を ZF 側にも伝播させる形で種々の独立性を証明する．そのために必要なの

が次の概念である：

Def. 5.2. A, B を集合，$f : A \underset{\mathrm{str}}{\longrightarrow} B$ とする．$x \neq y$ なら $f(x) \not\simeq f(y)$ となるとき，f は A を B に**外延的に埋め込む**と言う．このとき $f : A \hookrightarrow_{\mathrm{e}} B$，あるいは f を略して $A \hookrightarrow_{\mathrm{e}} B$ と書く．

注意 5.1. $a \not\simeq b \implies a \neq b$ なので $f : A \hookrightarrow_{\mathrm{e}} B$ の時 f は $\mathrm{ZF}_{\varepsilon}$ の意味で単射となっている．しかし，$a \simeq b$ なら $f(a) \simeq f(b)$ となるかは定かではないので，外延的埋め込みが ZF-写像であるとは限らず，特に ZF-単射になっているわけではない．なのであまり良い用語法ではないが，言葉にない事には仕方がないので当座そう呼ぶことにする．

明らかに ZF-単射と外延的埋め込みの合成は外延的埋め込みになる：

補題 5.5. $A \xrightarrow[\mathrm{str},1\text{-}1]{f} C \overset{g}{\hookrightarrow}_{\mathrm{e}} D \xrightarrow[1\text{-}1,\mathrm{ext}]{h} B$ なら $h \circ g \circ f : A \hookrightarrow_{\mathrm{e}} B$.

外延的埋め込みがあると，単射と全射を互いに融通しあうことが出来る：

補題 5.6. 下図のような ZF-全射 f, 外延的埋め込み i, j が与えられたとする：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "f", "\mathrm{ext}"'] & B \\
A_0 \arrow[u, hook, "i", "\mathrm{e}"'] \arrow[r, dotted, two heads, "\mathrm{str}", "\exists \hat{f}"'] & B_0 \arrow[u, hook, "\mathrm{e}", "j"']
\end{tikzcd}$$

但し i の全射性は $\mathrm{ZF}_{\varepsilon}$ の意味とする．このとき上図を可換とする $\mathrm{ZF}_{\varepsilon}$-全射 $\hat{f} : A_0 \xrightarrow[\mathrm{str}]{\mathrm{onto}} B_0$ が存在する．

Proof. $b_0 \in B_0$ を一つ固定し，$\hat{f}$ は次で定める：

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} b & \text{if } f(i(a)) \simeq j(b) \text{ for some } b \in B_0, \\ b_0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$j(b') \simeq f(i(a)) \simeq j(b)$ なら j が外延的埋め込みであることから $b' = b$ となるので，この $\hat{f}$ は well-defined であり，特に A_0 の全域で定義されている．

あとは全射を見ればよい．ここで $b \in B_0$ を任意にとれば，f の ZF-全射性より $f(a') \simeq j(b)$ となる $a' \in A$ が取れる．すると i は ZF_ε-全射なので $i(a) = a'$ となる $a \in A_0$ が取れる．よって $f(i(a)) = f(a') \simeq j(b)$ を得る． $\square$

これの双対も成立する：

補題 5.7. 下図のような ZF_ε-単射 f, 外延的埋め込み i, j が与えられたとする：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, dotted, "\exists\hat{f}", "\mathrm{ext}"'] & B \\ A_0 \arrow[u, hook, two heads, "i", "\mathrm{e}"' near end] \arrow[r, tail, "\mathrm{ext}", "f"'] & B_0 \arrow[u, hook, "j"', "\mathrm{e}" near end] \end{tikzcd}$$

このとき上図を可換とする ZF-単射 $\hat{f} : A \xrightarrow[\mathrm{ext}]{\text{1-1}} B$ が存在する．

Proof. i が ZF_ε-全単射なので，$\hat{f}(a) := j(f(i^{-1}(a)))$ により $\hat{f}$ を定めよう．ここで $j(f(i^{-1}(a_0))) \simeq j(f(i^{-1}(a_1)))$ なら j が外延的埋め込みであることから $f(i^{-1}(a_0)) = f(i^{-1}(a_1))$ となり，f の ZF_ε-単射性より $i^{-1}(a_0) = i^{-1}(a_1)$ を得る．すると今度は i が外延的埋め込みであることから $a_0 = i(i^{-1}(a_0)) \simeq i(i^{-1}(a_1)) = a_1$ となる．よって $\hat{f}$ は可換である． $\square$

補題 5.8. 下図のような ZF_ε-全射 f, 外延的埋め込み i, j が与えられたとする：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, dotted, "\exists\hat{f}", "\mathrm{ext}"'] & B \\ A_0 \arrow[u, hook, two heads, "i", "\mathrm{e}"' near end] \arrow[r, two heads, "\mathrm{str}", "f"'] & B_0 \arrow[u, hook, two heads, "j"', "\mathrm{e}" near end] \end{tikzcd}$$

但し i, j の全射性は ZF_ε の意味とする．このとき上図を可換とする ZF-全射 $\hat{f} : A \xrightarrow[\mathrm{ext}]{\text{onto}} B$ が存在する．

Proof. $\hat{f} = j \circ f \circ i^{-1}$. $\square$

補題 5.9. 下図のような ZF-単射 f, 外延的埋め込み i, j が与えられたとする：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f", "\mathrm{ext}"'] & B \\ A_0 \arrow[u, hook, "i", "\mathrm{e}"'] \arrow[r, tail, dotted, "\mathrm{str}", "\exists\hat{f}"'] & B_0 \arrow[u, hook, two heads, "j"', "\mathrm{e}"] \end{tikzcd}$$

但し i の全射性は ZF_ε の意味とする．このとき上図を可換とする ZF_ε-単射 $\hat{f} : A_0 \xrightarrow[\mathrm{str}]{\mathrm{onto}} B_0$ が存在する．

Proof. $\hat{f} = j^{-1} \circ f \circ i$. □

系 5.1. $A_0 \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow_e A$, $B_0 \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow_e B$ なら A と B の間の単射・全射・全単射と A_0 と B_0 の間のそれらの存在は同値になる．

6 具体例：スレッドモデル

以下では，まず標準的な実現可能性モデルについて考える：

Def. 6.1. $\mathcal{A}$ が Π_0 をスタック定数，$\Lambda_0(\supseteq \{\, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{W}, \mathbf{I}, \mathbf{cc} \,\})$ を原子項とする**標準実現可能性代数** $\overset{\text{def}}{\iff} \Lambda$ は $\{\, \mathsf{k}_\pi \mid \pi \in \Pi \,\} \cup \Lambda_0$ の元を原子コンビネータとする **CL**-項の全体，Π の元は $\xi_i \in \Lambda$ $(i < n)$ と $\pi_0 \in \Pi_0$ により $\xi_0 \,.\, \cdots \,.\, \xi_{n-1} \,.\, \pi_0$ の形のみであり，$\rhd$ は Krivine 機械の簡約規則に対応し，$\Lambda \star \Pi = \Lambda \times \Pi$, $\mathrm{PT} := \left\{\, \theta \in \Lambda \;\middle|\; \theta \text{ に } \mathsf{k}_\pi \text{ の形の項が現れない} \,\right\}$.

スレッドモデル (*model of threads*) は Krivine [8] が定義した一番簡単な斉一的な実現可能性代数である：

Def. 6.2. スレッド代数 $\mathcal{T}$ は次を満たす標準的実現可能性代数とする：

- 原子項は $\{\, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{I}, \mathbf{W}, \mathbf{cc}, \varsigma \,\}$,
- 相異なる可算個のスタック定数 $\{\, \pi_n \mid n < \omega \,\}$ を持つ，
- $\Lambda \ni \eta \mapsto n_\eta \in \tilde{\mathbb{N}}$ を（証明的とは限らない）項の再帰的な列挙，$n \mapsto \xi_n$ をその逆関数とし，$n \mapsto \theta_n$ を証明的項 PT の再帰的な列挙とする，
- $\varsigma \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi \rhd \xi \star \underline{n}_\eta \,.\, \pi$,
- $\perp\!\!\!\perp$ を次で定める：

$$\xi \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp \overset{\text{def}}{\iff} \exists n < \omega \; \theta_n \star \pi_n \rhd \xi \star \pi.$$

$\theta_n \star \pi_n$ の簡約過程に現れる項全体を n **番目のスレッド**と呼ぶ．つまり，$\perp\!\!\!\perp$ は何如なるスレッドにも属さないプロセスの集合である．

ソフトウェア工学において，スレッドとは同時並行で計算を行う際に使われる概念で，逐次的な計算を行う独立した単位のことである．

補題 6.1. スレッド代数 $\mathcal{T}$ は斉一的である．

Proof. 任意の $\xi \in \mathrm{PT}$ を取れば，$\xi = \theta_n$ なる n があり，定義より $\theta \star \pi_n \in \perp\!\!\!\perp$ となる． □

スレッド代数の濃度は可算なので補題 4.3 より従属選択公理が成り立つ：

補題 6.2. $V^{(\mathcal{T})} \models \mathrm{DC}$.

本小節の目標は次の独立性証明である：

定理 6.1 (Krivine).

$$V^{(\mathcal{T})} \models \mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \exists \left\{ \mathcal{X}_n \subseteq \mathcal{P}(\tilde{\mathbb{N}}) \;\middle|\; n < \omega \right\} \forall n, m \in \tilde{\mathbb{N}}\ [|\mathcal{X}_n| < |\mathcal{X}_{n+1}| \wedge |\mathcal{X}_n \times \mathcal{X}_m| = |\mathcal{X}_{nm}|]\,,$$
$$+ \exists \left\{ \mathcal{Y}_n \subseteq \mathcal{P}(\tilde{\mathbb{N}}) \;\middle|\; n < \omega \right\} \forall n \in \tilde{\mathbb{N}}\, |\mathcal{Y}_{n+1}| < |\mathcal{Y}_n|.$$

そこで，一旦 $\daleth n$ や $\mathcal{P}(\tilde{\mathbb{N}})$ の構造に関する一般論をやっておく．

6.1 $\daleth 2$ の Boole 構造と $\daleth \mathbf{n}$

以下では，von Neumann 順序数もどきの表現を使って分析をする．特に，$k < n$ なる $s^k 0$ の形の数項全体に太字の表記を用いる．

記号. $\mathbf{n} := \{\, 0, s0, \ldots, s^{n-1}0 \,\}$.
V における関数 $s^n 0 \mapsto \mathbf{n}$ および $s^n 0 \mapsto \daleth \mathbf{n}$ は $V^{(\mathcal{R})}$ では $\daleth \mathbb{N}$ 上定義されている事に注意する．

$\mathbf{n}$ は，期待通り自然数の構造を反映した性質を持っていることがわかる：

補題 6.3. 次の論理式が $V^{(\mathcal{R})}$ で成立：

(1) $\forall m \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N}\, \forall n \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N}\ [\langle m < n\rangle = 1 \iff m \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbf{n}]$,
(2) $\forall m \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N}\, \forall n \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N}\ [\langle m < n\rangle = 1 \to \gimel\mathbf{m} \sqsubseteq \gimel\mathbf{n}]$,
(3) $\forall m \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N}\, \forall n \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N}\ [\langle m < n\rangle = 1 \iff \exists y \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N}\ n = m + y + 1]$.

よって特に $\gimel\mathbf{n} \simeq \{\, x \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N} \mid \langle x < n\rangle = 1 \,\}$.

Proof. (1) $n, m \in \mathbb{N}$ を任意にとれば $\|\,\langle m < n\rangle = 1\| = \|m \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbf{n}\|$. (2) $<^{\mathcal{R}}$ の推移性（補題 4.7）および (1) より．(3) も同様. □

この $\gimel\mathbf{n}$ たちが，実は上の命題の $\mathcal{X}_n$ たちと同じ役割を果す.

補題 6.4. $V^{(\mathcal{R})}$ において，写像 $(x, y) \mapsto my + x$ は $\gimel\mathbf{m} \times \gimel\mathbf{n} \to \gimel(\mathbf{mn})$ への全単射となっている．特に，次の論理式が $\mathbf{I}$ で実現されている：

(1) $\forall m, n \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N}\, \forall x \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbf{m}\, \forall y \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbf{n}\ (my + x) \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbf{mn}$,
(2) $\forall m, n \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N}\, \forall x, x' \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbf{m}\, \forall y, y' \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbf{n}\ [my + x = m'y + x' \hookrightarrow x = x' \wedge y = y']$,
(3) $\forall m, n \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbb{N}\, \forall z \mathrel{\varepsilon} \gimel(\mathbf{mn})\, \exists x \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbf{m}\, \exists y \mathrel{\varepsilon} \gimel\mathbf{n}\ z = my + x$.

Def. 6.3 (可算実現可能性代数の特性関数). V において $\Delta : \tilde{\mathbb{N}} \to 2$ を次で定める：

$$\Delta(n) := \begin{cases} 0 & \text{if } \xi_n \Vdash \bot \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

これを用いると，$V^{(\mathcal{R})}$ における $\gimel 2$ の可算稠密集合が得られる：

補題 6.5. $\theta := \lambda xy.\, \varsigma yxx$ とおくと $\theta \Vdash \forall x \mathrel{\varepsilon} \gimel 2\, [x \neq 0 \to \exists n \mathrel{\varepsilon} \tilde{\mathbb{N}}\, (0 \neq \Delta(n) \leq x)]$.

Proof. 実際には次を示せばよい：

$$\theta \Vdash \forall x \mathrel{\varepsilon} \gimel 2\, [x \neq 0 \to \forall n \mathrel{\varepsilon} \tilde{\mathbb{N}}\, (0 \neq \Delta(n) \to \Delta(n) + a \neq a) \to \bot]$$

そこで $a = 0, 1$ の時に $\xi \Vdash a \neq 0, \eta \Vdash \forall n \mathrel{\varepsilon} \tilde{\mathbb{N}}\,(\Delta(n) \neq 0 \to \Delta(n) + a \neq a), \pi \in \Pi$ を固定し，$\theta \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を示す．ここで，

$$\theta \star \xi \mathbin{.} \eta \mathbin{.} \pi \succ \varsigma \star \eta \mathbin{.} \xi \mathbin{.} \xi \mathbin{.} \pi \succ \eta \star \underline{n}_\xi \mathbin{.} \xi \mathbin{.} \pi.$$

η の取り方より，$\underline{n}_\xi \star \xi \mathbin{.} \pi \in \|\forall n \mathrel{\varepsilon} \tilde{\mathbb{N}}\,(0 \neq \Delta(n) \to \Delta(n) + a \neq a)\|$ を示せばよい．特に $\forall n \mathrel{\varepsilon} \tilde{\mathbb{N}}$ の解釈の定義から，$\xi \mathbin{.} \pi \in \|\Delta(n_\xi) \neq 0 \to \Delta(n_\xi) + a \neq a\|$ が言えればよい．そこで $\xi \Vdash \Delta(n_\xi) \neq 0$ および $\|\Delta(n_\xi) \not\leq a\| = \|\bot\| = \Pi$ を示したい．まず，$\Delta(n_\xi) = 0$ の時は定義より $\xi = \xi_{n_\xi} \Vdash \bot$ かつ $\|\Delta(n_\xi) \neq 0\| = \|\bot\|$ なので良い．$\Delta(n_\xi) = 1$ の時はそもそも $\|\Delta(n_\xi) \neq 0\| = \|\top\|$ となるので $\xi \in \Lambda = \|\top\|$ より良い．

あとは $\|\Delta(n_\xi) \not\leq a\| = \|\bot\|$ を示せばよいが，これは $\not\leq$ の定義より $V \models \Delta(n_\xi) \leq a$ となる事が言えれば良いだけである．$a = 1$ の時は自明．$a = 0$ なら $\xi \Vdash a \neq 0$ より $\xi \Vdash \bot$ となるから $\Delta(n_\xi) = 0$ となりこれもよい．よって示せた． □

これを使うと，$\beth 2$ から $\mathcal{P}(\tilde{\mathbb{N}})$ への ZF の意味での単射が得られていることがわかる：

補題 6.6. $V^{(\mathcal{R})}$ において対応 $\beth 2 \ni x \mapsto D_x := \left\{ n \in \tilde{\mathbb{N}} \,\middle|\, 0 \neq \Delta(n) \leq x \right\}$ は $\beth 2$ から $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ への外延的埋め込みを与える．

Proof. 相異なる $x, y \mathrel{\varepsilon} \beth 2$ を取る．特に $x \cdot y = 0$ である場合について考えよう．そこで $0 < \Delta(n) \leq x + y$ なる $n \mathrel{\varepsilon} \tilde{\mathbb{N}}$ を取れば，x, y が両立しないことから $\Delta(n) \leq x \iff \Delta(n) \not\leq y$ が成り立つ．よって $n \in D_x \mathbin{\triangle_{\mathrm{ext}}} D_y$ となるので，$D_x \not\simeq D_y$．また，$x \cdot y > 0$ の時は $x' = x \cdot (-y), y' y \cdot (-x)$ とおいて $0 < \Delta(n) \leq x' + y'$ となるものを取れば同様の事が成り立つ． □

よって $\beth 2$ 自体は ZF のモデルとして見ると $\{0, 1\}$ に縮退してしまうが，ZF_ε における $\beth 2$ と同じ構造をした実数の集合が ZF の側でも得られている．

補題 2.14 で $\beth 2$ が非自明になる条件を見たが，更に以下ではアトムを持たない十分条件を与える．

補題 6.7. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{PT}$ で任意の $\xi \in \Lambda, \pi \in \Pi$ について $\mathsf{k}_\pi \xi \alpha_0, \mathsf{k}_\pi \xi \alpha_1$ または $\mathsf{k}_\pi \xi \alpha_2$ のいずれかが $\bot$ を実現するような物が存在するとする．このとき $\beth 2$ はアトムを持たない．特に $\theta := \lambda xy.\, \mathbf{cc}(\lambda k.\, x(ky\alpha_0)(x(ky\alpha_1)(ky\alpha_2)))$ とおけば，

$$\theta \Vdash \forall x \mathrel{\varepsilon} \beth 2\,[\forall y \mathrel{\varepsilon} \beth 2\,(x \cdot y > 0 \implies x \not\leq y) \to x = 0]\,.$$

Proof. 結論部分の論理式は，[　] 内の対偶を取れば次の形になる：

$$\forall x \mathrel{\varepsilon} \beth 2\,[x > 0 \to \exists y \mathrel{\varepsilon} \beth 2\,(0 < x \cdot y < x)].$$

そこで適当な $x > 0$ を取れば，$0 < x \cdot y < x$ となる y が存在する．ここでもし $x \cdot (-y) = 0$ とすると $x \cdot y = x$ となり結論に反するから，$x \cdot y$ および $x \cdot (-y)$ は共に非零で互いに両立しない x 未満の元になっている．よっ

て上の結論が示されれば $\beth 2$ は $V^{(\mathcal{R})}$ でアトムを持たない事がわかる．

以下主張を示していく．定義に従って x, y にそれぞれ $0, 1$ を代入して考えれば，結局以下が言えれば良いことがわかる：

(1) $\xi \Vdash \bot \to \bot \to \bot, \eta \Vdash \bot, \pi \in \Pi \implies \theta \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi \in \bot$,
(2) $\xi \Vdash \bot \to \top \to \bot, \xi \Vdash \top \to \bot \to \bot, \eta \in \Lambda, \pi \in \Pi \implies \theta \star \xi \,.\, \eta \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$.

簡約すれば，いずれの場合も $\xi \star \mathsf{k}_\pi \eta \alpha_0 \,.\, \xi(\mathsf{k}_\pi \eta \alpha_1)(\mathsf{k}_\pi \eta \alpha_2) \,.\, \pi \in \perp\!\!\!\perp$ を示せばよい．

(1) $\pi \in \|\bot\|$ より任意の ψ に対し $\mathsf{k}_\pi \Vdash \bot \to \psi$ であり，今 $\eta \Vdash \bot$ より，$\mathsf{k}_\pi \eta$ は任意の型を持ちうることに注意すれば明らか．
(2) $|\top| = \Lambda$ より $k_\pi \eta \alpha_0 \Vdash \bot$ の時は $\xi \Vdash \bot \to \top \to \bot$ を使えば良い．そこで $k_\pi \eta \alpha_0 \nVdash \bot$ とする．この時，一番外側の ξ の型は必然的に $\xi \Vdash \top \to \bot \to \bot$ を使うしかないので，$\xi(\mathsf{k}_\pi \eta \alpha_1)(\mathsf{k}_\pi \eta \alpha_2) \Vdash \bot$ が言えればよい．しかし仮定より $\mathsf{k}_\pi \eta \alpha_1$ または $\mathsf{k}_\pi \eta \alpha_2$ の少なくとも一方は $\bot$ を実現するから，仮定より明らかに成り立つ． □

いま我々は $\beth \mathbf{2}$ には Boole 代数の構造を入れて考えているが，$n > 2$ の場合の $\beth \mathbf{n}$ には Boole ではないにせよ環の構造を持つことがわかる．特に，Boole 代数には通常下限を積として自然に環構造が定まる．そこで以下の定義をする：

Def. 6.4. 任意の $a \in \beth 2$, $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ に対し，$\beth \mathbf{n}$ 上のイデアル $a\beth \mathbf{n}$ を次で定める：

$$x \,\varepsilon\, a\beth \mathbf{n} \overset{\text{def}}{\iff} x \cdot a = x.$$

特に $n = 2$ の場合，これは a による切断 $\downarrow a = \{\, x \,\varepsilon\, \beth 2 \mid x \le a \,\}$ と一致する．
また，等式に関する初等性より $\beth \mathbf{2}$ の各元は $\beth \mathbf{n}$ の中で冪等元になっているので，各 $a \,\varepsilon\, \beth 2$ に対し $x \mapsto ax$ により自然に写像 $\beth \mathbf{n} \to a\beth \mathbf{n}$ が引き起こされる．

まず，$\beth \mathbf{2^n}$ は $\mathcal{P}(\tilde{\mathbb{N}})$ に外延的な意味でも単射で埋め込むことが出来る：

補題 6.8. $V^{(\mathcal{R})} \models \forall n \,\varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, \beth(\mathbf{2^n}) \hookrightarrow_{\mathrm{e}} \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proof. まず補題 6.4 を $n \,\varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}$ についての帰納法で繰り返し適用すれば，$\beth(\mathbf{2^n})$ と $(\beth \mathbf{2})^n$ の間に自然な全単射が存在することがわかる．すると，$(\beth \mathbf{2})^n \ni (b_1, \ldots, b_n) \mapsto D_{b_1} \times \cdots \times D_{b_n} \sqsubseteq \mathcal{P}(\tilde{\mathbb{N}}^n)$. 補題 6.6 の議論より $D_{b_1} \times \cdots \times D_{b_n} \simeq D_{b'_1} \times \cdots \times D_{b'_n}$ なら $b_1 = b'_1, \ldots, b_n = b'_n$ が言えるので，この対応による行き先は外延的に相異なる．$\tilde{\mathbb{N}}^n$ と $\tilde{\mathbb{N}}$ の間の再帰的な全単射は補題 4.6 より自然に $V^{(\mathcal{R})}$ の $\tilde{\mathbb{N}}$ にも持ち上がり，特にこれらは外延的全単射になっているので，補題 5.5 より所望の結果が得られる． □

系 6.1. $V^{(\mathcal{R})} \models \forall n \,\varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, \daleth\mathbf{n} \hookrightarrow_{\mathrm{e}} \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proof. $n < 2^m$ なる m を取れば，補題 6.3 の (2) より $\daleth\mathbf{n} \sqsubseteq \daleth(\mathbf{2^m}) \hookrightarrow_{\mathrm{e}} \mathcal{P}(\mathbb{R})$. □

さて，定理 6.1 で求める集合族のうち $\{\, \mathcal{X}_n \mid n < \omega \,\}$ は $\left\{ \daleth\mathbf{n} \,\middle|\, n \,\varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}} \right\}$ の $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ における像である．更に，（非／外延的）従属選択公理が成り立つなら，$\daleth\mathbf{2}$ の真の無限減少列 $\langle b_n \,|\, n < \omega \rangle$ が取れる．実はこの b_n たちの定める切断が定理 6.1 の $\{\, \mathcal{Y}_n \mid n < \omega \,\}$ に対応する．

これらが増加・減少列になっていることは明らかであり，それらは補題 6.1 と系 5.1 から ZF においても $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ の増加・減少列を生み出す．したがって，あとは $\daleth\mathbf{n}$ 達や $\downarrow b$ 達が真に単調であることがわかればよい．それには次の補題を使う：

補題 6.9. 証明的項 $\omega \in \mathrm{PT}$ で任意の $\xi, \xi' \in \Lambda$, $\xi \neq \xi'$ および $\pi \in \Pi$ に対し $\omega \mathsf{k}_\pi \xi \Vdash \perp$ または $\omega \mathsf{k}_\pi \xi' \Vdash \perp$ が成り立つものが取れたとする．この時 $\theta := \lambda x x'.\, \mathbf{cc}(\lambda \mathsf{k}.\, \mathsf{k}(x'(\lambda z.\, x z z(\omega \mathsf{k} z))))$ とおけば，任意の論理式 $\varphi[x, y, z]$ に対し，

$$\theta \Vdash \forall m, n \,\varepsilon\, \daleth\tilde{\mathbb{N}}\, \forall z \begin{bmatrix} \langle m < n \rangle = 1 \hookrightarrow \forall x, y, y' \left(\varphi[x, y, z] \to \varphi[x, y' z] \to y = y' \right) \\ \to \exists y \,\varepsilon\, \daleth\mathbf{n}\, \forall x \,\varepsilon\, \daleth\mathbf{m}\, \neg\varphi[x, y, z] \end{bmatrix}.$$

特に $\varphi[x, y, z] \equiv (x, y) \in z$ とおけば，$V^{(\mathcal{R})}$ において $m < n$ なら $\daleth\mathbf{m}$ から $\daleth\mathbf{n}$ への全射は存在しない．

補題 6.10. 上と同じ仮定の下で、$\theta := \lambda x x'.\, \mathbf{cc}(\lambda \mathsf{k}.\, x(\lambda n.\, \mathbf{cc}(\lambda \mathsf{h}.\, x' \mathsf{h}\mathsf{h}(\omega \mathsf{k})(\lambda f.\, f \mathsf{h} n))))$ とおくと，

$$\theta \Vdash \forall z \left[\forall x \,\varepsilon\, \daleth\mathbf{2}\, \exists n \,\varepsilon\, \tilde{\mathbb{N}}\, (\varphi[n, x, z]) \to \exists n\, \exists x\, \exists y\, \left(\varphi[n, x, z] \wedge \varphi[n, y, z] \wedge x \neq y \right) \right].$$

特に $V^{(\mathcal{R})}$ において $\tilde{\mathbb{N}}$ から $\daleth\mathbf{2}$ への全射は存在しない．

6.2 スレッドモデルにおける議論

次回予告

- Krivine [8] で取り扱われている次の相対無矛盾性証明を行う：

$$\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \exists \{\, \mathcal{X}_n \subseteq \mathbb{R} \mid n < \omega \,\}\, \forall n, m\, \left[|\mathcal{X}_n| < |\mathcal{X}_{n+1}|, |\mathcal{X}_{n \times m}| = |\mathcal{X}_n| \cdot |\mathcal{X}_m| \right].$$

- 余力があれば上記 D に関する証明を完遂する．

参考文献

[1] functional_yy, **命題論理**, Nov. 20, 2016, (visited on 05/26/2017).

[2] functional_yy, **計算理論**, May 11, 2017, (visited on 05/26/2017).

[3] Joel David Hamkins and Daniel Evan Seabold, *Well-founded Boolean ultrapowers as large cardinal embeddings*, version 0, June 26, 2012, arXiv: `1206.6075 [math.LO]`.

[4] J. Roger Hindley and J. P Seldin, *Lambda-calculus and combinators, an introduction*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008, ISBN: 9780521898850, URL: `http://www.loc.gov/catdir/toc/ecip0810/2008006276.html`.

[5] Jean-Louis Krivine, *On the structure of classical realizability models of ZF*, version 0, Aug. 8, 2014, arXiv: `1408.1868 [cs.LO]`.

[6] Jean-Louis Krivine, *Realizability algebras: a program to well order* $\mathbb{R}$, version 0, Logical Methods in Computer Science 7 (3:2 Aug. 10, 2011), DOI: `10.2168/LMCS-7(3:2)2011`, arXiv: `1005.2395 [cs.LO]`.

[7] Jean-Louis Krivine, *Realizability algebras and new models of ZF*, 2011, URL: `http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~krivine/articles/ZFModels.pdf` (visited on 03/14/2016).

[8] Jean-Louis Krivine, *Realizability algebras II : new models of* ZF + DC, version 0, Logical Methods in Computer Science 8 (1:10 Feb. 27, 2012), DOI: `10.2168/LMCS-8(1:10)2012`, arXiv: `1007.0825 [math.LO]`.

[9] Jean-Louis Krivine, *Realizability algebras III: some examples*, version 0, Mathematical Structures in Computer Science (May 2016), pp. 1–32, DOI: `10.1017/S0960129516000050`, arXiv: `1210.5065 [cs.LO]`.

[10] Alexandre Miquel, *Classical realizability and forcing Part 3: A cardinals' heresy in classical realizability*, July 19, 2014, URL: `https://www.fing.edu.uy/~amiquel/lc14-3.pdf` (visited on 05/25/2017).

[11] Guillaume Munch-Maccagnoni, *Focalisation and Classical Realisability*, Computer Science Logic, ed. by Erich Grädel and Reinhard Kahle, European Association for Computer Science Logic, Coimbra, Portugal: Springer, 2009, pp. 409–423, ISBN: 978-3-642-04026-9.

[12] Benjamin C. Pierce, **型システム入門ープログラミング言語と型の理論ー**, trans. by 住井英二郎 et al., オーム社, Mar. 2013, ISBN: 978-4-274-06911-6.

[13] Lionel Rieg, *On Forcing and Classical Realizability*, PhD thesis, Ecole normale supérieure de lyon, June 2014.

[14] 古森雄一 and 小野寛晰, **現代数理論理学序説**, 日本評論社, 2010.

[15] 高橋正子, **計算論**: **計算可能性とラムダ計算**, vol. 24, コンピュータサイエンス大学講座, 近代科学社, Aug. 1991.