

費米液體 (Fermi Liquid)

林秀豪

清華大學物理系

E-mail: hsiuhsu@phys.nthu.edu.tw

什麼是費米液體？

本期雙月刊的主題乃是以超導物理為主題，此篇短文是介紹系統變成超導前的正常態(normal state)，也就是一般金屬的相態。在金屬中，電子之間的交互作用是相當大而不可忽略的。然而就很多方面而言，一般金屬和完全沒有交互作用的自由系統卻十分相像，這有趣的現象正是促使費米液體理論開始發展的起因之一。什麼是費米液體呢？如果一個系統可以由下列的漢米頓量來描述的話，我們就稱之為費米液體

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_0(\mathbf{k}) n(\mathbf{k}) + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') n(\mathbf{k}) n(\mathbf{k}') \quad (1)$$

其中 $n(\mathbf{k})$ 是帶有動量 \mathbf{k} 的電子密度算符。讓我們好好研究一下這個漢米頓量，第一項是很單純的動能，第二項則是電子之間的交互作用。如果沒有第二項的話，這系統就簡化成所謂的費米氣體(Fermi gas)，即便它有時和一般人熟悉的氣體可能相去甚遠。

看到這兒，你可能已經察覺，粒子間的交互作用可以千奇百怪，為什麼只考慮粒子密度-密度交互作用(density-density interaction)呢？如果

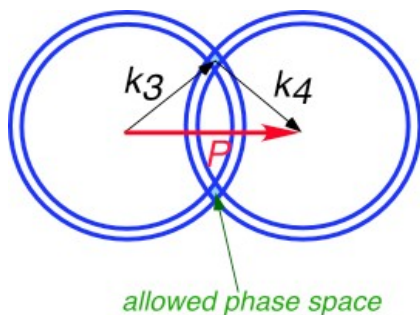
你立刻猜出這是因為如此一來，我們這群有些低能的凝態物理學家就會解出這個問題，那你真的是很有物理天份！一般而言，粒子交互作用應包括以下種種型式

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_0(\mathbf{k}) n(\mathbf{k}) + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \times V(\mathbf{k}_i) \psi^\dagger(\mathbf{k}_1) \psi^\dagger(\mathbf{k}_2) \psi(\mathbf{k}_3) \psi(\mathbf{k}_4) \quad (2)$$

我省去了電子自旋的標示，免得複雜到令你倒盡胃口。這些交互作用的物理圖像是頗簡單的——原先帶有動量 $\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ 的電子們經由交互作用 $V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ 被散射至相空間裡不同的動量 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ 去。其中的狄拉克函數(Dirac delta function)是用來保證總動量是守恆的。唸物理的一項重要常識是，很容易隨手寫得下來的漢米頓量，大多都不太好惹。基本上式子(2)可以用來描述的系統太廣泛了，於是並不存在一個通解。那為什麼我們獨厚式子(1)中密度-密度的交互作用，而把式子(2)中其它的交互作用都扔掉呢？這問題可以用一個相當簡潔的相空間論點(phase space argument)來加以了解。

相空間論點

為了瞭解不同交互作用的重要性，我們可以用重整化群(renormalization group)的角度來看。重整化群是一種瞭解系統基態及其附近激發態的一種手段，可以用來分辨不同交互作用對一個系統的基態及附近激發態的重要性。由重整化群的計算得知，一個交互作用的重要性與其在相空間中所佔的區域大小成正比。因此，只要能估算出一個交互作用在相空間中所佔的區域大小，即可得知哪一些交互作用是可被忽略，而哪一些是扮演著不可取代的角色。首先，假設溫度不是很高而且交互作用也不是頂強。如此一來，只有在費米表面(Fermi surface)附近的電子們才是活蹦亂跳的；離費米表面太遠的電子們，因為在低溫下而死氣沉沉，並不會影響到系統在基態附近的物理行為。



圖一 在一般情形下，交互作用可允許的相空間大小

考慮兩個電子們分別以動量 k_3, k_4 入射，它們可以被散射到相空間哪些區域去呢？由於動量守恆，加上只有費米表面附近才有貢獻，可以被允許的區域是相當狹小的（見圖一）。基本上只有在球心相距 $P = k_3 + k_4$ 且兩個球面相交附近的區域，才有滿足動量守恆的活躍電子們。惟一例外的情形是當總動量為零時， $P = k_3 + k_4 = 0$ 。在這特別的情形下，

原先一點點狹小的區域，由於兩個球面重疊，可允許的區域一下子變成了整個球面。根據之前重整化群的結果，由於這一特殊的交互作用在相空間中所佔的區域很大，它對於基態及附近激發態是十分重要的。事實上，它重要到有個名字叫 BCS 交互作用。

$$H_{BCS} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \psi^\dagger(\mathbf{k}') \psi^\dagger(-\mathbf{k}') \psi(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}) \quad (3)$$

此交互作用描述一對電子($k, -k$)被散射成另一對電子($k', -k'$)，因此有時亦被稱為電子對躍遷項(pair hopping term)。

另一種類型的交互作用則是考慮一個電子以動量 k_3 入射，之後被散射至動量 k_1 去的種種可能性。這和前面的例子十分類似，在一般的情形下，若動量轉換 $Q = k_1 - k_3$ 不為零，允許的相空間是相當狹小的。但若動量轉換 $Q = 0$ ，相空間一下子變成了整個球面。此時對應的交互作用為

$$H_F = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \psi^\dagger(\mathbf{k}) \psi^\dagger(\mathbf{k}') \psi(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}') \quad (4)$$

這密度-密度交互作用就是式子(1)中的主角。由於它描述電子們以動量(k, k')入射，但散射後的動量並無改變，因而被稱為前衝散射(forward scattering)。

到了這個地步，式子(1)中的交互作用已從芸芸眾生中脫穎而出，只剩下惟一可敬對手 BCS 交互作用。很不幸地（或應說幸運地），像過河卒子一般勇猛的前衝散射有時也敵不像戰馬一樣四處

亂跳的電子對躍遷。一般而言，如果電子間交互作用是吸引的，則電子對躍遷的勝算較大，所導至的相態即是一般人熟悉的超導體（本期雙月刊的主題）。反之，如果電子間交互作用是互斥的，則是前衝散射的贏面較好，而導至的相態就是費米液體。如此說來，由電子之間的交互作用所導至的相態豈不是只有超導體和費米液體？事實不然，別忘了在一開始我們就引入了低溫及弱交互作用的假設。在此文末尾，我會討論當交互作用很強時，費米液體會變得不穩定而轉換成另一有趣的相態。現在就讓我們看看在費米液體中有什麼鮮事發生吧！

平均場近似

由於我們只考慮溫度低及交互作用弱的情形，粒子的密度分佈函數和自由電子氣的費米分佈函數是相去不遠的。方便起見，可引入密度改變量為變數

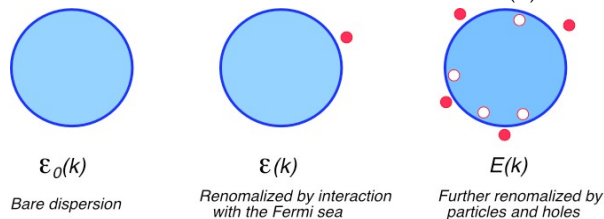
$$\Delta n(\mathbf{k}) = n(\mathbf{k}) - \Theta(k_F - k) \quad (5)$$

經過一番計算及簡化，原先的漢米頓量可由密度改變量表示出來

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) \Delta n(\mathbf{k}) + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta n(\mathbf{k}) \Delta n(\mathbf{k}') \quad (6)$$

第一項是重整化了的粒子能量，第二項則是粒子間的交互作用。你可以看到粒子間的交互作用和之前式子(1)一模一樣，但粒子的能量不再是原先的樣子，而是由下面的式子來描述了！

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon_0(\mathbf{k}) + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}' < k_F} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \quad (7)$$



圖二 交互作用下粒子能量重整化的示意圖

這是因為當我們多放入一隻電子進入系統時，除了原先的動能外，還要加入整個費米表面內電子們的交互作用項（見圖二）。所以，最後在一陣騷動後，這系統和原先的比起來，並不是多了一隻（我們熟悉的）電子，而是一個和電子擁有相同量子數的粒子(quasi-particle)。基本上，這個粒子可以被視為原先的電子在加上其它電子們的騷動(density fluctuations)。你可以想見，這粒子和原先的電子可以是非常不同的（想像一下阿妹被一群熱情的歌迷包圍下，走起路來和平時一定有天南地北的差距）。如果我們不僅放進一隻電子，而是一次好幾隻，這問題就更煩複了（見圖二最右部分）。我們進一步引進平均場假設來處理粒子間的交互作用，將密度改變量由其平均值取代，則粒子的能量就變成

$$E(\mathbf{k}) = \epsilon(\mathbf{k}) + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \langle \Delta n(\mathbf{k}') \rangle \quad (8)$$

由於粒子的能量隱含了粒子本身的分佈函數，因此可以用自治(self-consistent)的方式解出。式子(8)是一般描述費米液體中粒子能量最常見的表示方式，而其物理圖像可以由圖二清楚看出之間的來龍去脈。

一旦知道了費米液體中粒子的能量關係式，就可以用以計算種種不同的物理量。由於一般書本及文章都有詳述，請原諒我偷個懶略去這些細節。我想整個費米液體理論的賣點在於一個類似電子的粒子存在，而使得費米液體和自由系統並沒有太大的不同。這麼好的事情，當然不會放諸四海皆準（否則我就失業了）。在下一段中，我們將看到費米液體有時會不穩定，而另一類型的物態可能取而代之。

磁不穩定性

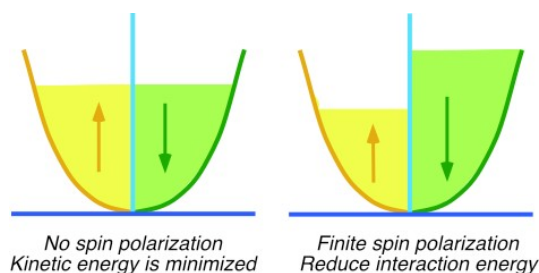
如果粒子之間的交互作用變強的話，費米液體往往會不穩定，系統的基態可能會轉變至完全不同的物相去。在此我舉出一個有關費米液體中磁不穩定性的例子。考慮電子間的交互作用是短距的，則哈柏模型(Hubbard model)是非常恰當，其漢米頓量包含兩項

$$H = (-t) \sum_{\langle r, r' \rangle} [\psi_{\alpha}^{\dagger}(r) \psi_{\alpha}(r') + \psi_{\alpha}^{\dagger}(r') \psi_{\alpha}(r)] + U \sum_r \psi_{\uparrow}^{\dagger}(r) \psi_{\uparrow}(r) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) \psi_{\downarrow}(r) \quad (9)$$

第一項描述的乃是電子們的動能，而第二項則是描述電子們如果靠近的話會有排斥的交互作用。如果第一項遠大於後者，電子們會想辦法散開成平面波，以降低動能。反之，如果排斥的交互作用遠大於前者，電子們會儘可能避開彼此，即使多花一些動能也在所不惜。怎麼樣可以讓大家彼此躲得遠遠的呢？簡單，如果空間部份的波函數是反對稱，那麼電子們撞見彼此得機會就會少了很多。根

據費米統計，整個波函數必須是反對稱，如此一來，自旋部份就會是對稱的。那也就是說，整個系統會有不為零的自旋（見圖三）。

很神奇吧！電子之間的短程排斥力，居然有造就自旋不為零基態的傾向。這個有趣的結果亦可用較嚴謹的數學來理解。讓我們引進平均場假設，自旋向上的電子會因為受到自旋向下的電子們的排斥作用，能量因而升高。反之，對於自旋向下的電子亦有類似的效應。



圖三 電子間交互作用引發的自發性自旋對稱破壞

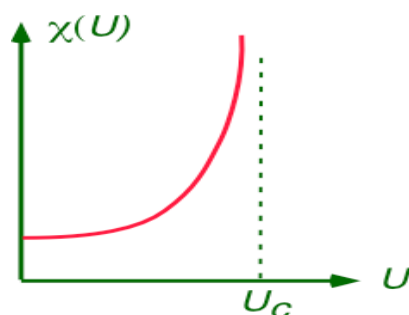
用句比較炫一點的術語就是，電子的能量受到重整化了。其重整化後的結果如下

$$\begin{aligned} E_{\uparrow}(k) &= \epsilon(k) + U \langle n_{\downarrow} \rangle \\ E_{\downarrow}(k) &= \epsilon(k) + U \langle n_{\uparrow} \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

請注意自旋向上及向下的電子，不見得有一樣的能量了。事實上，我們待會兒就可以看到的確存在向上及向下的平均自旋不相等的解答。利用式子(10)，可以直接計算這系統在磁場下的反應。在一番計算之後，可以得到下面的結果

$$\chi(U) = \mu_B^2 D(E_F) \frac{1}{1 - \frac{1}{2} U D(E_F)} \quad (11)$$

顯而易見地，如果交互作用強度 $U = 0$ ，我們會得到出名的鮑力順磁反應 (Pauli's paramagnetic susceptibility)。當交互作用強度 U 逐漸增強之後，順磁反應會越來越大，最後在一個臨界值會發散（見圖四）。



圖四 有電子間交互作用下的磁反應

這意謂著當交互作用強度 U 大於此一臨界值後，即便是一小小點磁場，系統的平均自旋就會突然變為一不為零的有限值。這就表示原先是費米液體的基態，因為交互作用變強而不穩定，因而變成了平均自旋不為零的鐵磁相態。這平均場計算和我們之前的粗略了解（見圖三）殊途同歸。事實上，類似的情形亦發生在量子霍爾效應 (quantum Hall effect) 裡，電子間的交互作用使得其自旋完全同向而造就了自旋偏極化的基態。

費米液體除了上面舉的不穩定性之外，尚有各式各樣千奇百怪的不穩定性。正因如此，我們在凝態系統裡才有很多有趣和有用的相態。在本短文中，我只是粗略的描述了費米液體理論的一小角。想看整座冰山的讀者，可以參閱下列書目及論文。

參閱書目

- [1] R. Shankar, "Renormalization Group Approach to Interacting Fermions", Review of Modern Physics **66**, 129 (1994).
- [2] H.J. Schulz, "Fermi Liquids and Non - Fermi Liquids", cond-mat/9503150.
- [3] G. Rickayzen, "Green's Functions and Condensed Matter", Academic Press (1980).
- [4] J.W. Negele and H. Orland, "Quantum Many-Particle Systems", Addison - Wesley (1988).
- [5] 本文乃從作者在 2002 年國家理論中心暑期學校的演講講義裡摘譯部份來的。對完整版的講義有興趣的人，歡迎自行與國家理論中心物理組接洽。