

第十四章 光 学

[基本要求]

1. 理解作为几何光学基础的光的直线传播定律、反射定律、折射定律和光的可逆性原理的物理内容；
2. 掌握近轴光线在单球面上折射的规律,并能够熟练地运用计算法和作图法处理单球面成像问题；
3. 了解普通光源所发射的光波的性质,掌握相干条件和获得相干光波的方法,透彻掌握杨氏双缝干涉、薄膜干涉和迈克耳孙干涉仪的原理、干涉现象的规律、特点及应用,并以杨氏双缝干涉为例,分析干涉条纹的可见度；
4. 理解惠更斯-菲涅耳原理的物理内容和它对光的衍射现象的解释,掌握单缝、圆孔和光栅的夫琅禾费衍射的规律和特点；理解光学仪器分辨率的瑞利判据的物理涵义、最小分辨角的表示和提高分辨率的途径；掌握 X 射线在晶体中衍射的基本规律；
5. 理解阿贝二次衍射成像原理和全息照相原理,并能说明利用 $4f$ 系统进行光学信息处理的基本思想；
6. 掌握自然光、线偏振光、部分偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光的物理图像,以及获得和检测它们的基本方法；掌握测量物质旋光性的基本方法 and 应用；
7. 理解物质对光的吸收、色散和散射的基本规律。

[概念阐释]

一、几何光学中的基本定律和原理(§ 14-1)

1. 光的直线传播定律

光在均匀介质中沿直线传播。这就是光的直线传播定律。在学习这个定律时应注意以下几点。

(1) 光的直线传播定律是几何光学的基础。

(2) 光的直线传播性质对于光的实际行为,只具有近似的意义。因为光作为一种电磁波必定具有波的特性,衍射是波的特性之一。只有在衍射效应不明显时,才能近似认为光是沿直线传播的。

(3) 光沿直线传播的性质只发生在均匀介质中。在不均匀介质中或在两种

介质的交界面处,由于折射效应,光线将偏离直线路径。所以,均匀介质是光沿直线传播的必要条件。

2. 折射定律和反射定律

当光线由一种介质向另一种介质传播时,在两种介质的分界面上,入射光会发生折射和反射。

折射光服从折射定律:折射光线处于入射面内,并与入射光线分居于法线的两侧,入射角 i 的正弦与折射角 r 的正弦之比,等于第二种介质的折射率 n_2 与第一种介质的折射率 n_1 之比,即

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21};$$

反射光服从反射定律:反射光线处于入射面内,并与入射光线分居于法线的两侧,反射角 i' 等于入射角 i ,即

$$i = -i'.$$

式中负号表示入射角和反射角分别处于法线的两侧。

关于这两个定律,应说明以下几点。

(1) 这两个定律虽然都是几何光学中的基本定律,但都可以根据光的波动性,利用惠更斯原理(见教材上卷 §7-4)加以证明。

(2) 在折射定律中涉及了介质的折射率,这里我们想就折射率的问题作些解释。因为光的本性也是波,所以介质对光的折射率和对波的折射率具有相同的涵义。介质对光的折射率 n 可以定义为,光在真空中的速率 c 与光在该介质中的速率 v 之比,即

$$n = \frac{c}{v}.$$

n 也称为介质的绝对折射率。

第二种介质对第一种介质的相对折射率 n_{21} ,就是第二种介质的绝对折射率 n_2 与第一种介质的绝对折射率 n_1 之比,即

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}.$$

如果光在第二种介质中的速率为 v_2 ,在第一种介质中的速率为 v_1 ,则

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{c}{v_2}}{\frac{c}{v_1}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

可见,两种介质的绝对折射率之比,等于光在两种介质中的传播速率之比的倒数。这表示,在折射率大的介质中光的传播速率小,在折射率小的介质中光的传播速率大。

通常把对光的折射率较大的介质,称为光密介质,而把对光的折射率较小的介质,称为光疏介质。可以认为真空是光的最疏介质。

(3) 反射定律可以看作为折射定律在 $n_2 = -n_1$ 情况下的特例。也正因为这个缘故,我们可以把重点放在对光的折射的讨论上。

3. 光的可逆性原理

当光线的方向逆转时,光的传播路径不变。这个原理在研究成像问题时特别有用,这时该原理可以表述为,物与像互换位置,光的传播方向逆转,但光路不变。

二、几何光学中的一些概念(§ 14-2)

1. 光线和光束

表示光能量传播方向的几何线称为光线,而具有一定关系的许多光线集合在一起就称为光束。与这两个概念有关的还有以下概念。

(1) 在波动学中我们曾介绍过波线的概念(见教材上卷 § 7-4),这个概念与几何光学中光线的概念有相同的涵义。把光线与波线联系起来,能帮助我们理解光线概念的物理意义。

(2) 互相平行的光线的集合,称为平行光束。与平行光束相对应的是平面波,即波面是一系列平行的平面。

(3) 由一点发出的或会聚于一点的光线组成的光束,称为同心光束(或单心光束)。与同心光束相对应的是球面波,即波面是一系列同心球面。

光束本身并不会聚于一点,而光束中所有光线的延长线相交于一点,这样的光束也属于同心光束;光束本身不会聚于一点,其延长线也不相交于一点的光束,称为像散光束。

2. 物和像

如果发光点发出的同心光束经光学系统会聚于一点,即保持同心光束,那么会聚点就称为发光点的像,该发光点就是物。关于物和像的概念,还应指出以下几点。

(1) 像有实像和虚像之分:若像点是由实际光线会聚而成的,该像点是实像;若像点是实际光线的反向延长线的交点,该像点是虚像。

(2) 物有实物和虚物之分:不过虚物的概念超出了我们课程的要求,只要求读者知道物有虚实之分就够了,我们这里所涉及的物都是实物。

(3) 根据光路的可逆性原理,物点和像点的位置可以互换,即若将物置于像所在的地方,其像将呈现在原来物所在的地方。物和像的这种关系,称为物像共轭。

3. 近轴光束

在主光轴附近很小范围内的光束,称为近轴光束。组成近轴光束的光线是近轴光线。具体地说,近轴光线应满足下列条件:

(1) 对于不平行于主光轴的光线,它与主光轴的夹角应小到其正弦值和正切值能用角度本身的弧度值代替。显然,符合这个条件的夹角应小于 10° ;

(2) 对于平行于主光轴的光线,在折射面上的入射点到主光轴的最大距离对主光轴上的物点或像点所张的角,应满足上面的条件(1)。

4. 焦点和焦距

平行于主光轴的光线经折射面折射后会聚于一点,这一点是折射面的第二主焦点。第二主焦点到折射球面顶点的距离,是折射面的第二焦距。主光轴上一点发出的光经折射面折射后平行于主光轴,这一点是折射面的第一主焦点。第一主焦点到折射球面顶点的距离,是折射面的第一焦距。关于焦点和焦距的概念,还应注意以下几点。

(1) 焦点有虚、实之分。实焦点是光线的真正会聚点,虚焦点则是光线沿反向延长线的交点。

(2) 焦距有正、负之别。上面所说的折射单球面的焦距,应该按照符号的约定,冠以正、负号。

(3) 上面关于折射单球面焦点和焦距的定义,对薄透镜完全适用,只是要用透镜的光心代替折射面的顶点。

5. 关于符号的约定

在我们的教材中采用下面的符号约定:

(1) 沿主光轴的线段,光线自左向右行进,由折射点或反射点算起,到被观察点所形成的线段的方向,与光线行进的方向相同者为正,与光线行进的方向相反者为负;

(2) 垂直于主光轴的线段,在主光轴上方者为正,在主光轴下方者为负。

关于符号的约定还应注意以下几点。

(1) 符号约定是研究几何光学所必需的,在不同的教材或参考书中可能会采用不同的符号约定,不同的符号约定各有优、缺点。

(2) 采用不同的符号约定,公式的形式会有不同,一定不要将不同符号约定的公式互相混用。

(3) 应用公式时,已知量应连同符号一起代入公式,所得带有正负号的未知量,应根据符号的约定确定其物理涵义。

三、光线在单球面上的折射 (§ 14-2)

1. 单球面折射公式

教材中得到如下的单球面折射公式

$$\frac{n_2}{l_2} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

对于这个公式,需指出以下几点。

(1) 这个公式只适用于近轴光线。公式表明,任何满足近轴光线条件的同心光束,经单球面折射后仍然保持同心性,也就是说,在近轴光线条件下,物点和像点之间存在一一对应关系。

(2) 公式的形式与我们采用的符号约定有关,所以,在使用上述形式的单球面折射公式时,必须采用我们教材中的符号约定。

(3) 引入折射面焦距的概念之后,上式可以化为下面的形式

$$\frac{f_1}{l_1} + \frac{f_2}{l_2} = 1,$$

这个公式称为单球面折射的高斯公式。高斯公式与上面的单球面折射公式是完全等效的,使用方法和注意事项也与上述相同。

2. 成像的作图法

用作图法求像可以与计算法所得结果互相验证。还需指出以下几点。

(1) 在一般情况下有三条光线容易画出,只要画出其中两条就可以确定像点的位置。这三条光线在教材中已有说明。

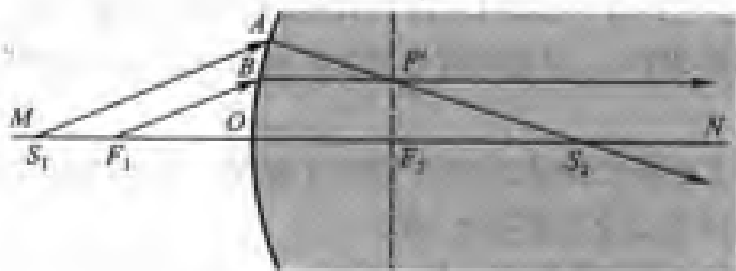


图 14-1

(2) 但是对于处于主光轴上的物点,用上面的方法无法确定像点的位置,这时必须借助于焦平面来解决。设物点处于主光轴 MN 上的 S_1 点,如图 14-1 所示。由 S_1 向折射面引光线 S_1A ,过第一主焦点 F_1 引一条与 S_1A 平行的光线 F_1B ,光线 F_1B 经球面折射后应平行于主光轴。 S_1A 和 F_1B 可视为不平行于主光轴的平行光,折射后应会聚于第二焦面(图中虚线所示)上的 F' 点。连接

AF' 并延长, 与主光轴交于 S_2 点, S_2 就是物点 S_1 的像。

(3) 以上作图法对于薄透镜折射成像也是适用的。

3. 横向放大率

像的高度 y_2 与物的高度 y_1 之比, 即

$$m = \frac{y_2}{y_1} = \frac{n_1 l_2}{n_2 l_1},$$

称为横向放大率, 也称为垂轴放大率。理解这一概念时应注意以下几点。

(1) 在我们教材涉及的范围内, 有下面的规律:

横向放大率 $m > 0$, 表示正立虚像;

横向放大率 $m < 0$, 表示倒立实像。

(2) 光学系统除了横向放大率以外, 还有视角放大率和纵向放大率, 不要混淆。在讨论放大镜时涉及了视角放大率, 而纵向放大率教材中未涉及, 这些都不作要求。

四、薄透镜 (§ 14-4)

1. 什么是薄透镜

两个球面把一种透明介质与周围的其他介质分开所形成的光学系统, 称为透镜。而当两个球面顶点之间的距离与球面的曲率半径相比足够小时, 这样的透镜称为薄透镜。通常在不作特别说明时, 提及透镜都是指薄透镜。对于薄透镜还应说明以下几点。

(1) 通常认为组成薄透镜的两个球面的顶点是重合在一起的, 该点称为薄透镜的光心。凡是通过光心的光线, 都不改变传播方向。

(2) 既通过光心又通过两球面中心的直线, 称为透镜的主光轴, 简称光轴或主轴; 只通过光心的直线称为透镜的副光轴。

(3) 透镜按其对光束所起的作用可分为两大类: 一类称为凸透镜, 或称会聚透镜, 或称正透镜; 另一类称为凹透镜, 或称发散透镜, 或称负透镜。

(4) 凸透镜的第二主焦点和第一主焦点都是实焦点, 按上述符号约定, 第二焦距为正值, 第一焦距为负值; 凹透镜的第二主焦点和第一主焦点都是虚焦点, 按上述符号约定, 第二焦距为负值, 第一焦距为正值。无论凸透镜还是凹透镜, 两个焦距的长度是相等的, 即

$$|f_1| = |f_2|,$$

所以透镜的焦距通常就用 f 表示, 并且一般指的是第二焦距, 在这种情况下更要注意焦距的正、负号。

2. 薄透镜成像

薄透镜成像遵从下面两个基本关系:

$$\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f},$$

$$m = \frac{l_2}{l_1}.$$

从第一个公式出发可以得到

$$l_2 = \frac{l_1 f}{l_1 + f},$$

代入第二式,得

$$m = \frac{f}{l_1 + f},$$

由此式可以得到薄透镜成像的几种主要情况,归结如下:

(1) 对于凸透镜($f > 0, l_1 < 0$):

a) 当物距大于两倍焦距,即 $|l_1| > 2f$ 时,形成倒立的、缩小的实像;

b) 当物距大于焦距而小于两倍焦距,即 $f < |l_1| < 2f$ 时,形成倒立的、放大的实像;

c) 当物距小于焦距,即 $|l_1| < f$ 时,形成正立的、放大的虚像。

(2) 对于凹透镜($f < 0, l_1 < 0$):只能形成正立的、缩小的虚像。

五、光波及其相干条件 (§ 14-5)

1. 光波

(1) 波列是发光原子或分子从高能态到低能态跃迁而发出的能量辐射。在相互作用可以完全忽略的情况下,发光原子或分子发射波列的持续时间不会大于 10^{-8} s,所以波列的长度不超过米的数量级。同时,因为这种跃迁是随机的和间歇的,每个原子或分子先后发射的不同波列,以及不同原子或分子发射的各个波列之间,彼此在振动方向上和相位上都是没有联系的。光源中大量原子或分子持续发出的许多波列,就组成了普通光源发出的宏观上连续的光波。

(2) 若波列的长度为 l_0 ,波列的持续时间为 $\Delta\tau$,则

$$l_0 = c\Delta\tau.$$

式中 c 为真空中的光速。利用傅里叶分析或其他方法(见下节),可以得到

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{l_0}.$$

可见,波列的长度 l_0 越长,光波的波长范围 $\Delta\lambda$ 就越窄,光的单色性就越好。如果光波的波长范围远小于其平均波长,那么这样的光波就称为准单色光,可以近似用单色波波函数来表示。我们所说的普通光源发出的单色光,实际上就是这种准单色光。

(3) 激光光源发出的波列长度可达几十公里,乃至上百公里,可以认为是理想的单色波。

(4) 波的平均能流密度就是波的强度,对光波来说就是光的强度,简称光强。光强可以表示为

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{n}{2\mu c} E_0^2 \propto E_0^2.$$

(5) 将沿 r 方向传播的单色平面简谐波波函数写为复数形式,即

$$\tilde{E}(r, t) = E_0 e^{i(k \cdot r - \omega t - \varphi_0)} = E_0 e^{i(k \cdot r - \varphi_0)} e^{-i\omega t} = \tilde{E}(r) e^{-i\omega t},$$

其中

$$\tilde{E}(r) = E_0 e^{i(k \cdot r - \varphi_0)}$$

是单色简谐波的复振幅,包含了我们所需要的信息:复振幅的模代表光强,复振幅的辐角就是相位,所以经常成为研究的重要议题。

2. 光程

(1) 光程 l 是光传播的路程 x 与所在介质折射率 n 的乘积,即

$$l = nx.$$

光程可以理解为在相同的时间内光在真空中传播的距离。利用光程这个概念,可以将光在介质中所经过的路程折算为光在真空中的路程,以便比较光在不同介质中所经过路程的长短。在不同的介质中,光经过相同的光程所需要的时间是相等的。

(2) 物点与其像点之间的各条光线的光程都相等,这就是物、像之间的等光程性。

(3) 可以证明,一束光所经过的两点的相位差,正比于此两点间的光程,即

$$\varphi(Q) - \varphi(P) \propto l_{PQ}.$$

所以可以用光程差的计算代替相位差的计算。

3. 相干条件

所谓干涉就是当两列或多列光波在空间相遇时,在相遇区域,由于光波的叠加而引起光强度重新分布的现象,称为光的干涉。

(1) 光波的干涉是光波遵从叠加原理的结果,两列相干波相遇而叠加,得到波强度按如下规律的重新分布:

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2E_{01}(P) \cdot E_{02}(P) \cos \delta(P),$$

这就是光波的干涉,其中 $2E_{01}(P) \cdot E_{02}(P) \cos \delta(P)$ 称为干涉项。

(2) 但是,不是在任何介质中传播的波都能够应用叠加原理的。波在有些介质中传播时会出现不遵从叠加原理的现象,这样的介质称为非线性介质。遵从叠加原理的介质称为线性介质。波在真空中传播总是遵从叠加原理的。在我们的教材中所涉及介质,都属于线性介质。

(3) 相干条件就是产生干涉现象的必要条件,包括

- a) 频率相同;
- b) 存在互相平行的振动分量;
- c) 具有固定的相位关系。

(4) 要获得干涉现象,还应当满足下面的补充条件,它们是:

a) 两束光在相遇点所产生的振动的振幅不能相差悬殊,否则该点的合振动的振幅与大振幅的单一光振动无实际差异,因而观察不到干涉现象;

b) 两束光在相遇点的光程差不能太大,因为我们无论用什么方法获得相干光波,都不外乎把同一波列分为两束,再让这两束相遇面发生干涉,也就是让同一波列发生干涉。如果两者的光程差太大,同一波列就不能重叠,甚至不能相遇,也就不能发生干涉现象了。

4. 获得相干光波的方法

为便于读者学习和掌握,这里要指出以下几点。

(1) 分波前法是让同一波面上的两个子波源发出的两列子波,经历不同的路径后相遇而发生干涉。因为这两个子波源处于同一个波面上,它们振动相位是相同的,所以由它们发出的子波的初相位也是相同的,使相干条件得以满足。

(2) 分振幅法是利用反射和折射将同一列光波分解为强度不同的两部分,它们经不同的路径后又相遇,从而发生干涉。因为光强度正比于振幅的平方,故将这种方法称为分振幅法。被分解出来的两部分是来自同一列波,它们的初相位总是相同的,只是经历的反射和折射过程不同,所以振幅不同,光程不同,满足相干条件。

(3) 分波前法和分振幅法是两种常用的获得相干光波的方法,而分振动面法则属于偏振光干涉的内容,超出了本教材的范围。

(4) 上面我们说过,无论用什么方法获得相干光波,都不外乎把同一波列分为两束或多束,使它们经过不同的路径后再相遇而发生干涉,也就是说,实现让一束光波中的同一波列自身相干涉,是从普通光源中获得相干光波的基本思想。

(5) 对于激光光源,从激光束任意两点引出的光都是相干的,可以方便地观察到干涉现象,因而不必采用上述获得相干光波的方法。

六、分波前干涉 (§ 14-6)

1. 杨氏实验

杨氏双缝干涉是利用分波前法获得相干光波的典型实验,要求读者透彻理解和掌握。在学习时应注意以下问题。

(1) 在杨氏实验中,若用两个完全独立的光源代替狭缝 S_1 和 S_2 ,接收屏上能否出现干涉条纹?

回答是,接收屏上不会出现干涉条纹。因为由两个独立光源发出的两列光波,各自都包含了大量断断续续的有限长度的波列,它们之间不存在确定的和稳定的相位关系,相干条件不可能得到满足。

(2) 在杨氏实验中, S 是一很小的狭缝(或小孔),试问这个狭缝的存在是否必要?若用一个普通光源代替 S 去照射 S_1 和 S_2 ,接收屏上能否出现干涉条纹?

回答是,狭缝 S 的存在是必要的,用普通光源代替 S ,接收屏上不可能出现干涉条纹。由普通光源射出的光到达 S_1 和 S_2 ,彼此间不可能存在稳定的相位关系,相干条件不可能得到满足。由于狭缝 S 很小,光波到达 S ,按照惠更斯原理, S 就成为发射柱面子波(S 若为小孔,则发射球面子波)的波源,又由于 S_1 和 S_2 的对称性,正好处于同一个柱状波面上, S_1 和 S_2 的振动是同相位的,所以由子波源 S_1 和 S_2 发出的柱面子波具有相同的初相位,相干条件得到满足。可见,这是利用分波前法获得相干光波的典型方法。

(3) 在杨氏实验中,为什么 S_1 和 S_2 的距离不能太大?观察点 P 到 O 点的距离不能太远?

要观察到干涉现象,必须保证由同一个波列分解出来的两束光到达相遇点的光程差不能过大,否则同一波列就不能重叠,甚至不能相遇,也就不能发生干涉现象。这正是相干条件中第二个补充条件所规定的。

2. 对干涉条纹可见度的分析

(1) 可见度也称衬比度,或对比度,就是平常所说的反差。条纹的可见度定义为

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

(2) 所谓空间相干性,实际上就是从干涉条纹的可见度不为零的条件出发,根据杨氏双缝干涉自身的规律,所得出的对光源宽度($2b$)和两狭缝间距($2a$)的要求。对于波长为 λ 的光,光源宽度($2b$)和两狭缝间距($2a$)必须满足

$$2a < \frac{\lambda R}{2b}$$

的条件,接收屏上才可能出现可见度不为零的干涉条纹。

(3) 时间相干性就是我们在上一节所讨论的波列长度对干涉现象影响的问题,也就是在相干条件中补充条件的第二条。

七、分振幅干涉 (§ 14-7)

1. 薄膜干涉

入射光被薄膜的上、下两个表面反射和折射所分解的各部分光波之间的干涉现象,就是薄膜干涉。在学习中应注意以下几点。

(1) 等倾干涉是在薄膜厚度均匀、而入射光具有不同的人射角的情况下,发生的干涉现象。具有相同入射角的光所形成的反射光相位相同,处于同一条干涉条纹上。

在等倾干涉中,薄膜上、下两个表面对同一条入射光的反射光线是相互平行的,也就是说,它们将在无限远处相遇而发生干涉,所以干涉条纹必定出现在无限远处,若使用会聚透镜,干涉条纹将呈现在透镜的焦面上。

(2) 等厚干涉是在薄膜厚度不均匀、而入射光具有大致相同的人射角的情况下,发生的干涉现象。薄膜厚度相同的地方形成的反射光相位相同,处于同一条干涉条纹上。

在等厚干涉中,当薄膜很薄时,只要光到达薄膜的人射角不大,可以认为干涉条纹出现在薄膜的表面,用眼睛可以直接观察到。

(3) 实际的干涉情况往往比较复杂,在等倾干涉中不能保证薄膜上、下两表面严格平行,而在等厚干涉中有时也不能确保入射角绝对相等。所以,在以等倾干涉为主的干涉现象中存在等厚干涉的成分,在以等厚干涉为主的干涉现象中也有等倾干涉的成分。

(4) 在观察等倾干涉时常用面光源,试问:用点光源是否可以?

我们说,用点光源同样可以观察到等倾干涉条纹,只是所产生的干涉亮条纹比较暗淡些罢了。在使用面光源的情况下,等倾干涉亮条纹的强度会大大加强。我们用图 14-2 来说明这个问题。图中 S 和 S' 是面光源上两个小区域,它们发出的射向薄膜的入射光中各有一条光线(1 和 $1'$)具有相同的人射角 i ,被薄膜的两个表面反射而形成光线 $1, 2$ 和 $1', 2'$, 1 与 2 是相干的, $1'$ 与 $2'$ 也是相干的。由于 1 与 2 的光程差和 $1'$ 与 $2'$ 的光程差相等,所以它们干涉后形成暗点或形成亮点的情况是相同的,经透镜

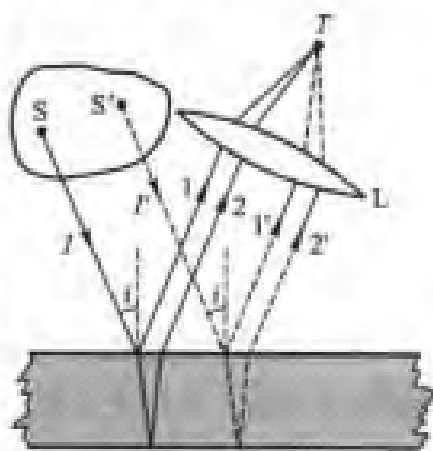


图 14-2

会聚于 T 点。若 1 与 2 干涉形成亮点,则 $1'$ 与 $2'$ 干涉也形成亮点, T 点的光强度显然比由 1 或 $1'$ 单独形成的干涉亮点的光强度要强。面光源上有无数这样的小区域,所以 T 点的光强度比用点光源要强得多。

(5) 观察等厚干涉一般采用平行光,或距薄膜较远的光源,或观察干涉条纹用的仪器的孔径很小,以致在整个视场内光线到达薄膜具有相同的人射角,使干涉光束之间的光程差主要由薄膜厚度的差异所决定。

(6) 通常把反射波相位发生 π 突变或产生附加相位差 π 的现象,称为半波损失。在薄膜干涉的情况下,由薄膜上、下两表面反射的光束之间产生的附加相

位差(不包括由光程差引起的相位差)有如下规律:

a) 当薄膜的折射率介于上、下方介质的折射率之间时,两束反射光之间没有附加相位差;

b) 当薄膜的折射率同时大于或同时小于上、下方介质的折射率时,两束反射光之间存在附加相位差,其值为 π ,即附加光程差为 $\lambda/2$,故称半波损失。

上述规律对于入射角小于临界角的任何角度都成立。

在光程差公式中,半波损失用加 $\lambda/2$ 表示,还是用减 $\lambda/2$ 表示,无本质差异,只是要注意 k 值的取法。在我们的教材中,半波损失都用加 $\lambda/2$ 表示,在有的书上可能用减 $\lambda/2$ 表示,这时 k 的取值会有不同,希望读者注意。

(7) 劈形气隙干涉和牛顿环都属于等厚干涉,形成相干光束的是两块玻璃板之间或玻璃板与透镜之间的空气隙。入射的平行光被空气隙的上、下两个表面所反射,即被上玻璃板(或透镜)的下表面和下玻璃板的上表面所反射,反射光是相干光束。有人可能会问:上玻璃板(或透镜)的上表面的反射光和下玻璃板的下表面的反射光是否会发生干涉?它们与上述反射光是否也会发生干涉?所观察到的干涉条纹为什么不是这些反射光干涉形成的,而是气隙两表面反射光干涉形成的?我们在讨论相干条件的补充条件时说过,要求相干光束到达相遇点的光程差不能太大。而上面的问题中所说的这些反射光,都由于光程差太大而不会发生干涉。所以,由于这个补充条件的要求,作为“薄膜干涉”的“膜”必须很薄。为了实现这个补充条件的要求,在劈形气隙干涉中,两玻璃板之间的夹角必须很小,一般应在 1° 以内。在牛顿环实验中,透镜的曲率半径必须很大。当然,若采用激光光束观察,这些要求则是多余的,这时必须设法分辨由不同的反射光所形成的干涉条纹。

2. 迈克耳孙干涉仪

(1) 迈克耳孙干涉仪的干涉条纹形状有等倾干涉条纹和等厚干涉条纹两种:

a) 如果 M_1 与 M_2 严格垂直(即 M_1' 与 M_2 严格平行),这时发生的干涉就是等倾干涉,观察到的干涉条纹应是一组亮暗相间的同心圆环。移动可动镜 M_2 ,相当于改变 M_1' 与 M_2 之间的空气隙厚度($L_2 - L_1$),干涉环将向中心缩进(距离减小)或由中心冒出(距离增大)。

b) 如果 M_1 与 M_2 不严格垂直(即 M_1' 与 M_2 不严格平行),就形成一劈形气隙,这时发生的干涉就是等厚干涉,观察到的干涉条纹应是一组亮暗相间、平行且等距的直线或弧线。移动可动镜 M_2 ,干涉条纹将发生平移。

(2) 在现代科学技术中,迈克耳孙干涉仪的最重要的应用是将长度或长度的变化以光的波长表示出来。在迈克耳孙干涉仪出现等厚干涉时, M_2 镜每移动

$\lambda/2$ 的距离,视场中就有一个条纹移过,所以只要测出条纹移过的数目 m ,就可以得出 M_2 镜移动的距离

$$d = m \frac{\lambda}{2}.$$

可见,要达到长度的准确测量,必须做到 m 计数正确和波长 λ 的单一、稳定。在现代干涉测长仪中,已采用光电脉冲自动计数技术,并配有可逆计数器,以消除干扰引起的误记,使 m 的读数达到小数点后第二位。

八、惠更斯-菲涅耳原理和衍射现象分类 (§ 14-8)

1. 惠更斯-菲涅耳原理

学习这一原理,重点在于掌握原理所表达的基本思想。惠更斯-菲涅耳原理的基本思想包括以下几点。

(1) 波前上各点都是发射球面子波的波源,这一思想是在惠更斯原理中已经表述过的。

(2) 空间任一点的光振动是这些子波在该点的相干叠加。具体地说,由同一波前上各子波源发出的子波是相干波,它们在空间相遇可以互相叠加而发生干涉现象。这一思想是菲涅耳的新发展,这不仅弥补了惠更斯原理的缺陷,而且确认衍射现象中出现的亮、暗条纹是子波干涉的结果,从而圆满地解释了波的衍射现象,成为研究衍射现象的理论基础。

在考虑各个子波对空间任一点 P 的光振动的贡献时,应注意下述关系:

a) 点 P 的光振动应正比于波前的面积,波前面积越大,所包含的子波波源越多,所以有

$$d\tilde{E}(P) \propto d\Sigma;$$

b) 点 P 的光振动应正比于子波振动的强度,所以有

$$d\tilde{E}(P) \propto \tilde{E}_0(Q),$$

其中 Q 代表波前上的任意一点, $\tilde{E}_0(Q)$ 是波前上的复振幅分布;

c) 因为子波源发射的是球面波,所以点 P 的光振动应反比于波前面元到点 P 的距离,故有

$$d\tilde{E}(P) \propto \frac{e^{ikr}}{r};$$

d) 与点 P 相对于子波面元的方位有关,表示为

$$d\tilde{E}(P) \propto F(\theta_0, \theta).$$

于是就写成了反映惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式——菲涅耳衍射积分公式。但是此公式只是菲涅耳的直觉和猜想,缺乏严格的理论论证。六十多年后,基尔霍夫建立了严格的数学理论,证明了菲涅耳的思想基本上是正确的,只

是对倾斜因子作了修正,得到了菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式:

$$\tilde{E}(P) = -\frac{i}{2\lambda} \iint_{\Sigma_0} \tilde{E}_0(Q) (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma.$$

2. 衍射现象的分类

(1) 菲涅耳衍射:当光源到衍射屏的距离或接收屏到衍射屏的距离不是无限大时,或两者都不是无限大时所发生的衍射现象。

(2) 夫琅禾费衍射:当光源到衍射屏的距离和接收屏到衍射屏的距离都是无限大时,所发生的衍射现象。可见在夫琅禾费衍射中,入射光和衍射到接收屏上任意一点的光都是平行光。在实验室里总是借助于透镜实现夫琅禾费衍射的条件。

九、单缝和圆孔的夫琅禾费衍射 (§ 14-9)

1. 单缝的夫琅禾费衍射

单缝的夫琅禾费衍射是利用惠更斯-菲涅耳原理分析衍射现象的最简单、最典型的例子。在学习时读者应注意以下问题。

(1) 在单缝的夫琅禾费衍射的分析中,哪些地方体现了惠更斯-菲涅耳原理?

这里我们将主要体现原理的地方归纳如下:

a) 当单色平行光垂直照射单缝时,单缝平面就是入射波的波前,根据惠更斯-菲涅耳原理,单缝平面上各点都是发射子波的波源。所以,我们将单缝平面分割为平行于长度方向的许多等宽度的窄条,以便考查各个窄条波源发射的子波;

b) 根据惠更斯-菲涅耳原理,波所以会绕行,是由于子波源发出的子波是射向各个方向的球面波(在此则是柱面波),这些球面子波的包络面必然会偏离原先直线传播的路径,所以,每个窄条发出的子波射线,即衍射光线也将射向各个方向。我们将所有衍射光线加以分类组合,凡是具有相同衍射方向的衍射光线组成一组平行光,因此整个单缝将发射各个方向的平行衍射光。每一组平行光通过透镜后,将会聚在处于焦面的接收屏上的同一点。我们在教材中只分析了其中的两组平行光,一组是衍射角等于零的平行光,另一组是衍射角等于 φ 的平行光。

c) 根据惠更斯-菲涅耳原理,由各个子波源发出的子波在空间相遇时,要互相叠加而发生干涉。所以每一组平行光都将在无限远处发生干涉,通过透镜后将在焦面的会聚点上发生干涉,因而接收屏上就出现亮、暗条纹。有人可能会问:两组或多组平行光之间会不会发生干涉呢?我们说不会,因为它们不相遇,不同组的平行光,会聚于接收屏的不同点上。所以,接收屏上任意一点的光强都

是由同一组平行衍射光相干叠加所决定的。

(2) 教材图 14-27 中的折线是怎样得到的?

在分析一组平行衍射光相干叠加时,必然要将由不同窄条发出的这组平行光合成起来,教材在分析这个问题时使用了振动的矢量图解法,如果单缝被割成 n 个窄条,第 1 个窄条与第 n 个窄条发出的子波射线到达 AC 面的相位差为 δ ,则任何两相邻窄条发出的子波射线的相位差都是 δ/n 。我们把 §7-2 的两个同频率简谐振动合成的方法,推广到 n 个同方向、同频率的简谐振动的合成,于是就得到教材(下卷)中图 14-27 所示的情形。 n 个小矢量依次头尾相接,并且每一个都比前一个转过 δ/n 的角度,这样就形成 A、B 之间的折线,有向线段 \overrightarrow{AB} 就代表这一组平行衍射光在 P 点引起的合振动。 \overrightarrow{AB} 的长度 A_p 就是合振动的振幅。

若 $n \rightarrow \infty$,则每个窄条的宽度无限缩小,A、B 之间的折线就趋于圆弧,圆弧 AB 所对应的圆心角必定等于 δ ,通过几何关系即可得到

$$A_p = AB \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

圆弧 AB 的长度等于这无限多个小矢量的长度之和,它对应于小矢量之间无相位差时合振动的振幅,即 O 点的光振动的振幅,用 A_o 表示,上式变为

$$A_p = A_o \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

于是就得到 P 点的光强度与 O 的光强度之间的关系

$$I_p = I_o \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2.$$

根据这个关系,就可以得到单缝夫琅禾费衍射光强度分布的六个特点。

(3) 在单缝衍射图样的六个特点中,实用上最感兴趣的问题之一,是中央亮条纹(即主极大)的宽度。对于任何波长的单色光,中央亮条纹的宽度是由两个第一级暗条纹的位置决定的。因为中央亮条纹的半角宽度 φ_0 就是第一级暗条纹所对应的衍射角,即

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{\lambda}{a} \approx \frac{\lambda}{a}.$$

可见,中央亮条纹的半角宽度 φ_0 与单缝的宽度成反比,与波长 λ 成正比。对于一定的 a 值,波长 λ 越大,中央亮条纹的半角宽度就越大;对于一定的波长 λ ,单缝宽度 a 越大,中央亮条纹的半角宽度就越小。当 $a \gg \lambda$ 时,中央亮条纹的半角宽度趋于零,这时整个衍射花样压缩成为一条亮斑,这条亮斑正好是单缝经透镜后所成的像,这与几何光学的结论一致。

(4) 以上分析的是单色光的单缝衍射情况,若用白色平行光照射单缝,接收屏上将出现怎样的衍射图样呢?

对于任何波长的光,当 $\varphi = 0$ 时, $\alpha = 0$, 所以各色光的主极大基本重合,只是对于不同波长的光,主极大的半角宽度不同,红光为最大,紫光为最小。各色光的同级次极大位置不再重合,波长越大的光,同级次极大对应的衍射角越大,离开主极大的位置越远。这样屏上就出现彩色条纹,这种彩色条纹称为衍射光谱。

2. 圆孔的夫琅禾费衍射

(1) 大多数光学仪器的通光孔都是圆形的,并且都是对平行光或近似平行光成像,所以对圆孔的夫琅禾费衍射的研究和所得结果具有普遍意义。

(2) 圆孔衍射图样的第一个暗环所包围的中央亮斑就是艾里斑,应注意的是,艾里斑的中心是圆孔的几何光学的像点。

(3) 艾里斑的大小反映了衍射光的弥散程度。艾里斑越大表示衍射光越弥散,成像就越不清晰;艾里斑越小,衍射光越集中在几何光学的像点上,成像就越清晰。

十、衍射光栅 (§ 14-10)

读者在学习光栅的夫琅禾费衍射时应注意以下几个方面。

1. 光栅的构成

(1) 在平玻璃上刻有许多等宽度、等间距的平行刻痕,就制成了平面透射光栅。刻痕不能透光,而两相邻刻痕之间的光滑部分可以透光,相当于单缝。光栅常量等于缝宽度 a 和刻痕宽度 b 之和,即 $d = a + b$ 。本节就是用这种光栅讨论光栅衍射规律的。

(2) 闪耀光栅是一种反射式平面光栅,它是在金属平板上刻有一系列平行等间距的锯齿形槽面而制成的。这种光栅克服了光能很大部分都集中于中央亮条纹(零级)的问题。

反射式光栅除了平面光栅还有凹面光栅。凹面光栅不仅具有一般光栅的功能,还兼有准光和聚焦的作用。

(3) 晶体的晶格结构是天然的三维光栅,下节我们将讨论这种光栅对 X 射线的衍射。

2. 光栅衍射的规律

(1) 光栅的衍射图样是单缝衍射和多缝干涉的共同结果。我们可以把光栅看作为许多等宽度单缝作等间距平行排列而形成的。当单色平行光垂直地照射光栅时,从每条狭缝射出的衍射光一定遵从单缝衍射的规律。而由不同狭缝射出的衍射光都是相干光束,必定发生干涉。所以,光栅的衍射图样一定是单缝衍射和多缝干涉两种规律的共同体现。

(2) 光栅方程:屏上出现的主极大亮条纹,其衍射角 φ 满足 $\beta = k\pi$, 即

$$(a + b) \sin \varphi = k\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

这个公式称为光栅方程,有两点必须注意:

a) 因为光栅方程实际上是多缝干涉出现光强度极大的条件,并不涉及单缝衍射的作用。所以屏上的亮条纹一定满足光栅方程,但满足光栅方程的 φ 角,并不一定在屏上形成亮条纹;

b) 这个形式的光栅方程只适用于入射光垂直照射光栅平面的情形。

(3) 满足光栅方程应出现的主极大,由于单缝衍射的调制作用而在接收屏上消失,这种现象称为缺级。对于衍射角为 φ 的衍射光,如果满足光栅方程的第 k 级主极大条件,应有

$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda,$$

同时也正好满足单缝衍射光强度极小的条件,即

$$a\sin\varphi = k'\lambda, \quad k' = \pm 1, \pm 2, \dots$$

则从以上两式可解得 k 与 k' 的关系为

$$k = \frac{a+b}{a}k', \quad k' = \pm 1, \pm 2, \dots$$

于是满足上式的第 k 级主极大必定在接收屏上消失。上式称为光栅缺级公式。

3. 光栅光谱

若用平行白光(或包含不同波长的色光)照射光栅,其中的各种单色光将各自产生衍射条纹。各种波长的中央亮条纹($k=0$)重叠在一起,仍呈白色(或入射光的本色),在中央亮条纹的两侧对称地排列着各色光的第一级亮条纹、第二级亮条纹等,分别称为第一级光谱、第二级光谱等,这就是光栅光谱。

光栅光谱广泛用于光波波长的精确测量和物质的发射光谱及吸收光谱的研究中。

十一、衍射规律的应用 (§ 14-11)

1. 光学系统分辨本领的分析

(1) 当一个物点的艾里斑的中心正好处于另一个物点的艾里斑的边缘上时,规定为这两个物点刚刚能够被分辨的极限,这个极限就是瑞利判据,这时两个物点(或相应的两个艾里斑的中心)对光学系统的张角 θ_0 就是该光学系统的最小分辨角,并可表示为

$$\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$

可见,光学系统的最小分辨角 θ_0 就是圆孔的夫琅禾费衍射图样中艾里斑的半角宽度,也就是第一暗环的衍射角。最小分辨角 θ_0 的倒数,就是光学仪器的分辨本领。

值得注意的是,瑞利判据并不是一个很严格的判据,在有利条件下,有的人

的眼睛可以分辨更小的角宽度。

(2) 在圆孔的夫琅禾费衍射中,艾里斑的大小与衍射孔的孔径 D 成反比,对于光学仪器而言,就是与光学仪器的孔径 D 成反比。我们总希望通过光学仪器得到清晰的像,就要求光学系统的最小分辨角 θ_0 尽量小,这就要求衍射光的弥散尽量小,即艾里斑尽量小,所以应该尽可能增大光学仪器的孔径 D 。另外,艾里斑的大小与所用光波的波长 λ 成正比,要提高光学仪器的分辨本领,就应该尽可能减小观测光的波长 λ 。

2. X 射线在晶体中的衍射

(1) 虽然结晶体晶格可以作为 X 射线的天然光栅,但是 X 射线在晶体中的衍射与光栅的衍射却是不同的。最显著的不同是, X 射线在晶体中的衍射,对于任一确定的晶面而言,只有在符合反射定律的衍射方向上强度为最大,而在其他方向上衍射的 X 射线强度很弱,甚至根本没有衍射光。这一点与镜面对光的反射很相似。

(2) 要获得 X 射线在晶体中的衍射图样,可以采用以下几种办法:

a) 当单晶体的方位固定时,需用连续谱 X 射线入射,其中总有一种波长的 X 射线能符合布拉格公式,产生加强反射。

b) 当采用单色 X 射线入射时,单晶体需绕自身任一轴线旋转,总可以出现合适的入射角,满足布拉格公式。

c) 以单色 X 射线入射,采用晶体粉末(即多晶体)样品,大量取向无规的晶粒为射线提供了满足布拉格公式的充分机会。

十二、信息光学 (§ 14-12)

1. 光学信息处理

(1) 空间频谱和阿贝二次衍射成像原理

a) 在夫琅禾费衍射中,用平行光照射物体,在透镜的像方焦面上,将出现物体的衍射图样,在像平面上将出现物体的像(参看教材中图 14-37)。在透镜的像方焦面上出现的物体的衍射图样,表示了物面透射光波的傅里叶展开式中各分量的频率和强度,因而称为物的空间频谱。

b) 既然通过透镜可以得到物面透射光波的傅里叶展开式中各分量的频率和强度,所以透镜就是一个傅里叶变换的转换器。要完成对某个函数的傅里叶变换,一般是通过计算机进行,而一个简单的凸透镜竟能完成如此复杂的工作,真是不可思议。

c) 所谓二次衍射成像,就是从物到空间频谱是第一次衍射过程,从空间频谱到像是第二次衍射过程。

从物到空间频谱的第一次衍射,就是我们一直在讨论的夫琅禾费衍射。物

面是波前,波前上各点作为子波源发射的子波,相干叠加就得在像方焦面上的空间频谱;

从空间频谱到像的第二次衍射,就是以频谱面上的光点作为子波源发射的子波,相干叠加就得到在像平面上的像。

(2) 空间滤波,就是在空间频谱面上人为地遮挡空间频谱中的某些频率的分量,以改变像平面上像的性质。通过空间滤波,使像发生各种变化,真可以说是太神奇了。

(3) 各种光信息处理,可以在 $4f$ 系统上方便地进行。

(4) 光信息处理技术的一些常见应用例证,这里举出几项供参考。

a) 对图像或照片进行清晰化处理,如对低对比度图形进行轮廓突出处理,新闻照片的平滑化,照相底片的光学去污等。

b) 特征识别技术,如指纹的识别,癌细胞的检测以及大规模和超大规模集成电路板缺陷的检测等,此技术在航测、物探、医学、军事情报检索和电子技术等部门都有实用价值。

c) 光学图像的相减和相加,例如,在不同时间对同一地点所拍摄的遥感照片进行相减处理,可以发现该地点的地形、植被或设施的变化情况。

d) 对透明物体进行光密度编码,使物体或标本清晰显现。此项技术广泛应用于临床解剖标本的观察、微生物研究和晶体矿物的识别。

e) 模糊图像的清晰化处理,无论是由于未准确对焦,或者由于目标与照相机之间的相对运动所引起的照片模糊不清,都可以用 $4f$ 系统进行清晰化处理。

f) 对黑白图像进行假彩色处理,这样做,一方面是满足人们对丰富色调的追求,另一方面是人眼对黑白深浅程度不太敏感,而对于不同的色彩却十分敏感,所以对黑白图像进行假彩色处理就成为技术上的需要。例如,肺部的 X 光透射底片中,某些早期病灶只表现为一块灰度稍大的阴影,稍不注意就可能漏检,造成误诊。如果对这张 X 光透射底片作假彩色处理,不同灰度表现不同的色调,人们就很容易把病灶检查出来。

2. 全息照相

(1) 何谓“全息”?

物体发出或反射的光本身包含三方面的信息:光的波长、光的振幅和光的相位。光自身的颜色表示了光的波长,彩色照相记录了这个信息。光的强度与光的振幅的平方成正比,黑白和彩色照相都能记录这个信息。光波的相位代表了光波振动过程的状态,一般的黑白和彩色照相都无法记录这个信息。所谓“全息记录”,通常是指同时记录物光的强度和相位。

(2) 全息图是什么?

a) 物光和参考光到达感光胶片(波前)并进行相干叠加,感光胶片冲洗后显

示出来的斑点或条纹,就是物光与参考光的干涉图样,它携带了物光到达波前的全部信息,称为全息图。全息图记录了物光到达波前的全部信息,故称波前的全息记录。

b) 从全息的角度,也就是从同时记录物光的强度和相位的角度来说,前面我们所讨论的各种衍射图样以及空间频谱图,都是物光的“全息图”,它们都包含了物光的强度和相位两方面信息,所不同的是,这些“全息图”中的相位信息是各物点发出的子波之间的相位比较,而全息照相所得到的全息图中的相位信息,则是各物点发出的子波与参考光之间的相位比较。

c) 要得到全息图,必须让物点发出的子波与参考光相干叠加,使用激光可以方便地实现。普通光源发出的光只能做到子波之间的相干叠加,根据相干条件的补充条件,要实现子波与参考光相干叠加是十分困难的,几乎是不可能的。这正是全息技术在激光发现之后才得以迅速发展的原因。

(3) 波前重现为什么可以获得如同原物存在时的逼真效果?

在非涅耳-基尔霍夫衍射积分公式

$$\tilde{E}(P) = -\frac{i}{2\lambda} \iint_{\Sigma_0} \tilde{E}_0(Q) (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

中, Q 代表波前上的任意一点, $\tilde{E}_0(Q)$ 是波前上的复振幅分布, 上式表明, 被波前隔开的那部分无源空间里任意一点 P 的光振动 $\tilde{E}(P)$ 由波前上的复振幅分布 $\tilde{E}_0(Q)$ 唯一地确定。这就是教材中所说的“无源空间的边值定解”。

根据边值定解的惟一性, 在原物不存在时, 全息图上的复振幅分布 [即 $\tilde{E}_0(Q)$], 惟一地决定了无源空间各点的光振动的复振幅分布, 这就是说, 在此空间的观测效果与原物存在时相同。这就是波前重现时能够获得如同原物存在时的逼真效果的理论依据。

十三、光的偏振态 (§ 14-13)

1. 自然光和线偏振光

干涉和衍射是纵波和横波共同具有的特性, 而偏振则是横波所独具的性质。所以, 光的偏振有力地证明了光波是横波。关于线偏振光和自然光, 教材中都有明确的定义和示意图, 读者可以结合示意图去正确理解它们的定义, 同时还应注意以下问题。

(1) 为什么自然光可以用两个互相垂直的光振动来表示?

这是因为在与传播方向相垂直的平面内自然光的光矢量具有各种不同的振动方向, 并且各个方向上振动的振幅都是相等的, 而任何一个方向的振动, 都可以分解为两个互相垂直方向上的分振动。因此, 我们可以任意选择两个互相垂直的方向, 将所有方向的振动都沿这两个方向分解, 再将两个方向的分振动分别

相加,最后必然得到两个互相垂直的且幅度相等的光振动。这两个光振动在总光强中各自占据 $1/2$ 的份额。

(2) 为什么自然光中的两个互相垂直的光振动不可以再合成起来,从而得到线偏振光?

理论和实验都证明,两个互相垂直的同频率的振动,若具有固定的相位关系,则必定可以合成起来,合振动或是线偏振,或是椭圆(或圆)偏振。只有在这两个分振动的相位差为 0 或 $\pm\pi$ 的情况下,合振动才成为线偏振。可见,要将自然光的两个互相垂直的光振动再合成起来,必须要求这两个振动之间存在固定的相位差,若合成为线偏振光,则要求它们之间的相位差为 0 或 $\pm\pi$,这显然是办不到的。在自然光中,不仅两个互相垂直的振动之间不存在固定的相位关系,而且由于这两个振动中的每一个都是由大量波列分解得到的,因而自身就没有固定的相位。所以将这两个互相垂直的振动合成是没有意义的,更不能由此而获得线偏振光。

(3) 如何由自然光获得线偏振光?

由自然光获得偏振光,可以使用一定的方法将两个互相垂直的振动中的一个滤去,剩下的一个就是线偏振光;或者通过一定的途径将两个互相垂直的振动分开,分开后的每一个都是线偏振光,它们的振动面互相垂直。

2. 部分偏振光

(1) 部分偏振光是振动态介于自然光和线偏振光之间的光振动,也可以像自然光那样用两个互相垂直的光振动来表示,不过这两个互相垂直的光振动的振幅是不相等的,所以这两个光振动在总光强中各自占据的份额不同。

(2) 在部分偏振光中,两个互相垂直的光振动之间同样不存在固定的相位关系,所以将它们合成也是没有意义的。

(3) 若将自然光的两个互相垂直的光振动减弱任意一个,可以获得部分偏振光。若将部分偏振光中两个互相垂直的光振动滤去任意一个,剩下的一个就是线偏振光;若将两个互相垂直的光振动分开,可以获得振幅不同、振动面互相垂直的两个线偏振光。

3. 椭圆偏振光和圆偏振光

(1) 光矢量末端的轨迹是椭圆的光振动,是椭圆偏振光;光矢量末端的轨迹是圆的光振动,是圆偏振光。

(2) 椭圆偏振光是由两个互相垂直的、存在固定相位差 ϕ 的线偏振光合成而得到的,并且 ϕ 是不为 0 或 $\pm\pi$ 的任意值。当 $\phi = \pm\pi/2$ 时,光振动是以坐标轴为主轴的正椭圆。当 $\phi = \pm\pi/2$ 、并且两个线偏振光的振幅相等时,椭圆偏振光变为圆偏振光。

(3) 迎着光的传播方向看去,光矢量的末端沿顺时针方向旋转,称为右旋,

这时 $\phi > 0$; 迎着光的传播方向看去, 光矢量的末端沿逆时针方向旋转, 称为左旋, 这时 $\phi < 0$ 。

十四、偏振光的获得和检测 (§ 14-14)

1. 偏振光的获得

(1) 线偏振光和部分偏振光的获得

a) 根据布儒斯特定律, 当自然光以起偏角的方向射至某物体的表面时, 反射光是线偏振光, 而折射光一般是部分偏振光。

b) 自然光通过尼科耳棱镜可以获得线偏振光, 这是利用晶体的双折射现象获得线偏光的。

c) 自然光通过偏振片可以得到振动方向沿透振方向的线偏振光, 这是利用偏振片的二向色性获得线偏振光的。

(2) 椭圆偏振光和圆偏振光的获得

a) 将线偏振光垂直入射至 $1/4$ 波片, 只要线偏振光的振动方向与 $1/4$ 波片的光轴不平行或垂直, 出射光便是椭圆偏振光。

b) 当线偏振光垂直入射至 $1/4$ 波片时, 使其振动方向与 $1/4$ 波片的光轴成 45° 角时, 出射光便是圆偏振光。

2. 偏振光的检测

(1) 自然光、部分偏振光和线偏振光的检测

a) 利用偏振片就可以检测自然光、部分偏振光和线偏振光。当入射光垂直射至偏振片的表面, 以入射光为轴旋转偏振片, 当光强不变时, 入射光是自然光; 当光强变化但无消光现象时, 入射光是部分偏振光; 当光强变化并有消光现象时, 入射光是线偏振光。

b) 上述方法的理论根据, 就是马吕斯定律。

(2) 椭圆偏振光和圆偏振光的检测

a) 圆偏振光通过 $1/4$ 波片后变为线偏振光, 然后用偏振片鉴别。

b) 椭圆偏振光通过 $1/4$ 波片后一般仍为椭圆偏振光, 只有当波片的光轴与椭圆的主轴平行时, 才变为线偏振光, 然后用偏振片加以鉴别。

c) 自然光和圆偏振光通过偏振片后, 光强都不随偏振片的透振方向的改变而变化, 所以无法单用偏振片去区分它们。圆偏振光通过 $1/4$ 波片后变为线偏振光, 自然光通过 $1/4$ 波片后仍为自然光, 从而可用偏振片鉴别之。

d) 部分偏振光和椭圆偏振光通过偏振片后, 光强随偏振片的透振方向的改变而变化的情形是相似的, 所以也无法单用偏振片去区分它们。让椭圆偏振光通过 $1/4$ 波片, 并使椭圆的主轴与 $1/4$ 波片的光轴相平行时, 透射光是线偏振光, 而部分偏振光通过 $1/4$ 波片后仍为部分偏振光, 从而可用偏振片鉴别之。

十五、旋光现象和电磁场的光效应 (§ 14-15)

1. 旋光现象

线偏振光通过某种透明物质其振动面会以光的传播方向为轴旋转一定的角度,这就是旋光现象。

(1) 按照菲涅耳对物质旋光性的唯象解释,沿光轴方向传播的线偏振光,是由两个旋转方向相反、频率相同的圆偏振光所组成,这两个圆偏振光有不同的传播速度,致使通过旋光物质后合成的线偏振光的振动面与原先相比转过了某个角度。

(2) 对于固体旋光物质,振动面转过的角度 θ 正比于光在旋光物质内通过的距离 l ,即

$$\theta = \alpha l.$$

对于液体旋光物质,还与溶液的浓度 c 成正比,即

$$\theta = \alpha c l.$$

(3) 物质的旋光性与入射光的波长有关,波长不同振动面旋转的角度也不同,这种现象称为旋光色散。

(4) 旋光物质有左旋和右旋之分。

2. 磁致旋光效应

(1) 透明介质在磁场的作用下产生的旋光性,称为磁致旋光效应。振动面的旋转角 θ 正比于光在介质中通过的距离 l ,正比于介质内的磁感应强度 B ,即

$$\theta = V l B.$$

(2) 磁致旋光性的右旋和左旋,与光相对于磁场的传播方向有关,若光沿磁场方向传播是右旋的,则逆着磁场方向传播变为左旋。这是磁致旋光性与天然旋光性显著差异之处。

3. 电光效应

(1) 有些各向同性的透明介质在外加电场的作用下,转变为具有单轴晶体特性的各向异性物质,从而产生双折射现象,这称为克尔效应。

a) 有显著克尔效应的透明介质一般为液体;

b) 单轴晶体的光轴与电场方向一致;

c) 由克尔效应所引起的 o 光和 e 光的相位差与外加电场强度(或电压)的平方成正比,与光在介质中通过的距离成正比,可表示为

$$\delta = 2\pi k l E^2.$$

d) 克尔盒作为高速光开关和光调制器,在高速摄影、影视制作和激光通讯等方面广泛使用。

(2) 某些晶体,特别是压电晶体,在外加电场的作用下,改变了原先各向异

性的性质(如沿原先光轴的方向产生了附加的双折射效应),这种电光效应称为泡克耳斯效应。泡克耳斯效应与克尔效应相比,有以下特点:

a) 具有泡克耳斯效应的透明介质一般为晶体;

b) 泡克耳斯效应是线性电光效应,由附加双折射效应所引起的 o 光和 e 光的相位差与外加电场强度(或电压)的一次方成正比,而在克尔效应中, o、e 两光的相位差与外加电压的平方成正比,所以用泡克耳斯盒代替克尔盒,更适合于制作光调制器等器件;

c) 因为泡克耳斯盒所需施加的电压比克尔盒低得多,前者只有后者的 $1/5 \sim 1/10$,甚至更低,所以使用上十分方便。

十六、光的吸收、色散和散射 (§ 14-16)

1. 光的吸收

(1) 任何一种物质都不会在整个电磁波段只表现为普遍吸收。如果某物质在可见光范围内表现为普遍吸收,那么它往往在红外波段或紫外波段表现为选择吸收。

a) 普遍吸收的主要特点是:物质对光的吸收很少,并且在给定波段内几乎保持不变;与光的波长无关,光通过时只改变强度而不改变颜色。

b) 选择吸收的主要特点是:物质对光的吸收强烈;随光的波长的改变而急剧变化。

c) 地球的大气层对可见光和波长在 300 nm 以上的紫外光表现为普遍吸收,可以说是透明的,透明的波段称为“大气窗口”,而对红外光的某些波段和波长小于 300 nm 的紫外光却表现为选择吸收。红外波段的主要吸收气体是水蒸气,波长小于 300 nm 的紫外光的主要吸收气体是臭氧。研究大气的状况与大气窗口的关系,对于红外遥感、红外导航和红外跟踪等工作有重要意义;大气层中“臭氧空洞”的出现严重损坏了人类的生存环境,密切关注大气中臭氧量的变化,严格限制温室气体的排放,是当前乃至今后相当长的时间内,环境保护的重要课题之一。

(2) 朗伯定律是描述光吸收现象的通用规律,这个定律可以表示为

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

吸收系数 α 一般是波长的函数。在普遍吸收情况下, α 值很小,并近似为常量;在选择吸收情况下, α 值很大,并对波长有强烈的依赖性。

对于某些溶液,光的吸收可以用比尔定律

$$I = I_0 e^{-ACx}$$

来描述。不过比尔定律只对浓度不大、溶剂分子不明显影响溶质分子对光的吸收的溶液才成立。

(3) 具有连续谱的光通过有选择吸收的物质后,在其连续光谱的背景上会显示出暗线或暗带,表示某些波长的光或某些波段的光被吸收,这种光谱称为吸收光谱。

研究吸收光谱的意义:

a) 原子吸收光谱对原子含量具有很高的灵敏度,所以在定量分析中广泛应用;

b) 固体和液体分子的红外吸收光谱是鉴别分子的种类,测定分子的振动频率,分析分子的结构的有效手段。

2. 光的色散

光在物质中的传播速度 u 随波长 λ 而改变的现象,称为色散;折射率随波长的变化曲线,称为色散曲线。

(1) 任何物质的全部色散图都是由正常色散区域和反常色散区域构成的。同一种物质,在普遍吸收波段内表现出正常色散,而在选择吸收波段附近和选择吸收波段内表现出反常色散。这是物质色散的基本状况。

(2) 折射率和色散率都随波长的增加而减小,是正常色散的基本特征。正常色散的规律可以用柯西公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

准确地加以描述。

(3) 反常色散不能用柯西公式描述,在选择吸收波段附近折射率随波长的增加而减小得比柯西公式所预示的要快得多,在选择吸收波段内折射率随波长的增加而增大。

3. 光的散射

进入物质的光偏离入射方向而向四面八方散开的现象,称为光的散射,向四面八方散开的光,就是散射光。

(1) 引起光散射的原因是物质中存在的不均匀团块。

a) 颗粒线度比光波波长大的不均匀团块所引起的光散射,散射光强与波长的关系不明显。云是由水滴组成的,水滴的线度远大于可见光的波长,云对太阳光的散射与波长关系不大,散射光呈白色,所以晴朗的云是白色的。

b) 颗粒线度比光波波长小的不均匀团块所引起的光散射,散射光强与波长的四次方成反比,即

$$I \propto \frac{1}{\lambda^4},$$

这一规律称为瑞利散射定律,这类散射称为瑞利散射。

大气对阳光的散射属于瑞利散射,太阳光中的短波成分更多地被散射,看晴

空,看到的是散射光的颜色,自然呈蔚蓝色。看旭日,看夕阳,看到的是透射光的颜色,这时阳光通过较厚的大气层,太阳光中的短波成分更多地被散射,透射光自然呈红色。

(2) 引起瑞利散射的不均匀团块可分为两类:

a) 乳浊液中的固体微粒、大气中的烟、雾或灰尘等,由这类不均匀团块引起的散射,称为悬浮质点散射。

b) 在纯净的液体或气体中由于分子热运动会造成密度的局部涨落,由这种因素引起的散射,称为分子散射。

(3) 在散射光中出现与入射光频率不同的散射光,这种散射称为拉曼散射。拉曼散射光谱的主要特征:

a) 在入射光谱线的两侧对称地分布着红伴线和紫伴线;

b) 角频率差与入射光的角频率无关,而与散射物质的红外吸收角频率相对应,表征了散射物质的分子振动频率。

所以说,拉曼散射为研究分子结构、分子的对称性和分子内部的作用力等提供了重要的分析手段,已成为分子光谱学中红外吸收方法的重要补充。

[例题分析]

例题 14-1 如果把人眼的成像归结为一个曲率半径为 $R = 5.70 \text{ mm}$ 、介质折射率为 $n_2 = 1.333$ 的单球面折射,试计算:

(1) 焦点的位置;

(2) 某物若在角膜后 24.02 mm 处的视网膜上成像,该物应放在何处? 横向放大率为多大?

解 这是单球面折射的典型问题。焦点的位置可以利用焦距公式求出,物距可以根据单球面折射公式或高斯公式得出。求得物距后,即可利用横向放大率公式求出横向放大率。

(1) 已知 $n_1 = 1.000$, $n_2 = 1.333$, $R = 5.70 \text{ mm}$,将这些数据代入单球面的焦距公式,得

$$f_1 = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} R = -\left(\frac{1.000}{1.333 - 1.000} \times 5.70\right) \text{ mm} = -17.12 \text{ mm},$$

$$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R = \left(\frac{1.333}{1.333 - 1.000} \times 5.70\right) \text{ mm} = 22.82 \text{ mm}.$$

这表示第一主焦点 F_1 位于主光轴上、在角膜之前 17.12 mm 处,第二主焦点 F_2 位于主光轴上、在角膜之后 22.82 mm 处。

(2) 将 $n_1 = 1.000$, $n_2 = 1.333$, $R = 5.70 \text{ mm}$ 和 $l_2 = 24.02 \text{ mm}$ 代入单球折

射公式,得

$$\frac{1.333}{24.02} - \frac{1.000}{l_1} = \frac{0.333}{5.70},$$

由此解得物距 $l_1 = -342 \text{ mm}$ 。这表示要在视网膜上呈现清晰的像,物体应放在角膜之前 342 mm 的地方。

也可以利用高斯公式来求物距 l_1 。将 $f_1 = -17.12 \text{ mm}$, $f_2 = 22.82 \text{ mm}$ 和 $l_2 = 24.02 \text{ mm}$ 代入高斯公式,得

$$\frac{-17.12}{l_1} + \frac{22.82}{24.02} = 1,$$

由此解得 $l_1 = -342 \text{ mm}$ 。与上面的结果相同。

将 $n_1 = 1.000$, $n_2 = 1.333$, $l_1 = -342 \text{ mm}$ 和 $l_2 = 24.02 \text{ mm}$ 代入横向放大率公式,得

$$m = \frac{n_1 l_2}{n_2 l_1} = \frac{1.000 \times 24.02}{1.333 \times (-342)} = -0.0527.$$

横向放大率为负值表示像是倒立的实像,绝对值小于 1 表示像是缩小的。

例题 14-2 双凸透镜的两个球面的曲率半径都是 0.12 m , 折射率为 1.50 。现要得到横向放大率分别为 $m = -1.0$ 、 $m = 20$ 和 $m = -0.20$ 的像,问物体和像分别在何处?

解 此问题的求解过程应是这样的:首先根据折射率和曲率半径求出该双凸透镜的焦距 f ,然后利用透镜的横向放大率公式和成像公式,求得物距 l_1 和像距 l_2 。

将折射率 $n = 1.50$ 、第一个球面曲率半径 $R_1 = 0.12 \text{ m}$ 和第二个球面曲率半径 $R_2 = 0.12 \text{ m}$ 代入薄透镜的焦距公式:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (1.50 - 1.00) \left(\frac{1}{0.12} - \frac{1}{-0.12} \right) \text{ m},$$

由此解得

$$f = 0.12 \text{ m}.$$

对于横向放大率 $m = -1.0$:由凸透镜成像规律可以断定,像是与物等大的倒立实像,物距约等于两倍焦距,物和像分居于透镜两侧。因为

$$m = \frac{l_2}{l_1},$$

所以

$$l_2 = -l_1.$$

将这个关系和 $f = 0.12 \text{ m}$ 代入成像公式:

$$\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f}.$$

可求得

$$l_1 = -0.24 \text{ m}, l_2 = 0.24 \text{ m}.$$

这表示,物位于透镜前、距光心 0.24 m 处,像位于透镜后、距光心 0.24 m 处。

对于横向放大率 $m = 20$;由凸透镜成像规律可以断定,像是放大的正立虚像,物距应小于焦距,物和像处于透镜的同侧。将 $l_2 = 20l_1$ 和 $f = 0.12 \text{ m}$ 代入成像公式,可求得

$$l_1 = -0.114 \text{ m}, l_2 = -2.28 \text{ m}.$$

这表示,物位于透镜前、距光心 0.114 m 处,像位于透镜前、距光心 2.28 m 处。

对于横向放大率 $m = -0.20$;可以断定,像是缩小的倒立实像,物距应大于两倍焦距,物和像应分居于透镜两侧。将 $l_2 = -0.20 l_1$ 和 $f = 0.12 \text{ m}$ 代入成像公式,可求得

$$l_1 = -0.72 \text{ m}, l_2 = 0.144 \text{ m}.$$

这表示,物位于透镜前、距光心 0.72 m 处,像位于透镜后、距光心 0.144 m 处。

例题 14-3 有一条光线通过发散透镜的第二主焦点射向透镜,问这条光线经发散透镜折射后射向何方?

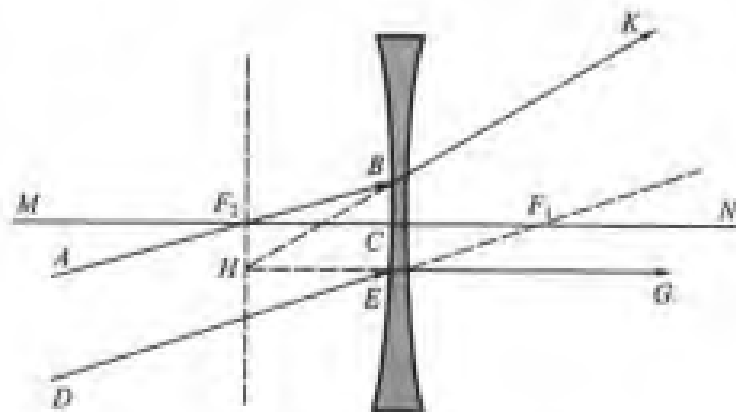


图 14-3

解 根据题意,光线 AB 通过发散透镜的第二主焦点 F_2 到达透镜的 B 点,如图 14-3 所示。可以肯定,光线 AB 经发散透镜折射后不可能平行于主光轴 MN。我们可以画一条与光线 AB 平行的光线 DE,并使 DE 的延长线通过发散透镜的第一主焦点 F_1 。根据发散透镜的性质,光线 DE 经发散透镜折射后必定平行于主光轴 MN,即图中所画的光线 EG。光线 AB 和 DE 是平行于副光轴的平行光,经发散透镜折射后的光线的反向延长线必定相交于第二焦面上,即图中的 H 点。连接 HB 并延长,所得光线 BK 就是 AB 的折射光线。

例题 14-4 在杨氏双缝实验中所用入射光的波长为 λ 。现用折射率为 n 的云母片将狭缝 S_2 遮盖,观察到接收屏上的中央亮条纹移到了原来第 k 级亮条纹的地方,求云母片的厚度。

解 沿接收屏向上为 x 轴,建立如图 14-4 所示的坐标系。设两缝间距为 $2a$,云母片的厚度为 e ,狭缝到接收屏的距离为 D 。在没遮盖云母片时,接收屏上坐标为 x 的点 P 的光程差为

$$\Delta = \frac{2a}{D}x;$$

在狭缝 S_2 用云母片遮盖后,将引起附加光程差 $(n-1)e$,所以点 P 的光程差变为

$$\Delta = \frac{2ax}{D} + (n-1)e.$$

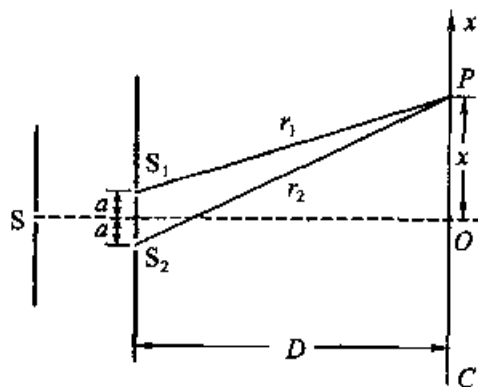


图 14-4

中央亮条纹应满足光程差为零的条件,在上式中令 $\Delta = 0$,并从中解出

$$x = -\frac{(n-1)eD}{2a}, \quad (1)$$

式中负号表示条纹向 x 的负方向移动,即向接收屏的下方移动。上式表示,中央亮条纹移到了 x 处,而此处是原先第 k 级亮条纹所在的位置,应满足

$$x = \frac{D}{2a}k\lambda. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$k\lambda = (n-1)e,$$

从中解出云母片的厚度,为

$$e = \frac{n-1}{k}\lambda.$$

例题 14-5 在单缝夫琅禾费衍射中,用焦距为 1.50 m 的凸透镜将衍射图样投射在处于焦面的接收屏上。若使用波长为 $\lambda_1 = 500.0$ nm 的光,测得第三暗条纹到主极大中心的距离为 3.00 mm;若使用波长为 λ_2 的光,测得第二暗条纹到主极大中心的距离为 3.00 mm。求:

(1) 单缝的宽度 a ;

(2) 波长 λ_2 。

解 图 14-5 是单缝夫琅禾费衍射的示意图。

(1) 由图中可见,若第三暗条纹处于接收屏的点 P ,衍射角 φ 应满足下面的关系:

$$\tan \varphi = \frac{x}{f} = \frac{3.00 \times 10^{-3}}{1.50} = 2.00 \times 10^{-3}.$$

在 φ 角很小的情况下, 下面的关系成立:

$$\tan \varphi \approx \sin \varphi.$$

k 级暗条纹满足

$$a \sin \varphi = k_1 \lambda_1,$$

将 $k_1 = 3$, $\lambda_1 = 500.0 \text{ nm}$ 和 $\sin \varphi = 2.00 \times 10^{-3}$ 代入上式, 可求得单缝的宽度为

$$\begin{aligned} a &= \frac{k_1 \lambda_1}{\sin \varphi} = \frac{3 \times 500.0 \times 10^{-9}}{2.00 \times 10^{-3}} \\ &= 750 \times 10^{-9} \text{ m} = 0.750 \text{ mm}. \end{aligned}$$

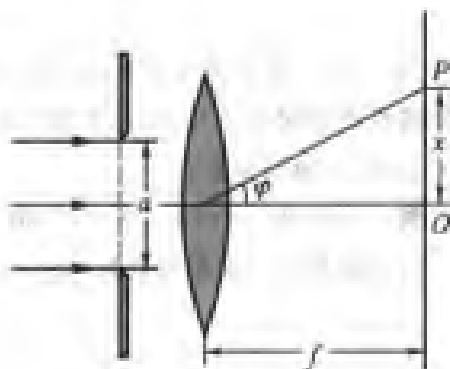


图 14-5

(2) 对于波长为 λ_2 的光, 其第二暗条纹也处于接收屏的点 P , 衍射角也为 φ , 故有

$$a \sin \varphi = k_2 \lambda_2,$$

由上式可以求得

$$\lambda_2 = \frac{a \sin \varphi}{k_2} = \frac{0.750 \times 10^{-3} \times 2.00 \times 10^{-3}}{2} = 750 \text{ nm}.$$

例题 14-6 自然光垂直通过偏振片和某种波片之后偏振态如何变化? 已知偏振片的透振方向与波片的光轴成 α 角, 波片分别为: (1) 波长片, (2) $1/2$ 波片, (3) $1/4$ 波片。

解 自然光通过偏振片后成为线偏振光, 线偏振光进入波片后将分解为振动方向互相垂直的线偏振光, 它们分别是 e 光和 o 光, 其中 e 光的振动方向沿波片的光轴。至于 e 光和 o 光之间的相位差, 决定于波片的性质: 波长片引起的相位差为 2π ; $1/2$ 波片引起的相位差为 π ; $1/4$ 波片引起的相位差为 $\pi/2$ 。从波片出射的光的性质, 既决定 e 光和 o 光之间的相位差, 也与波片光轴的方向有一定关系。

(1) 波片为波长片: 线偏振光进入波长片后, 被分解为振动方向互相垂直的两束线偏振光, 出射时它们之间的相位差为 2π , 合成后, 为与入射光的振动方向相同的线偏振光, 而无论 α 为何值。

(2) 波片为 $1/2$ 波长片: 线偏振光进入半波片后, 被分解为振动方向互相垂直的两束线偏振光, 出射时它们之间的相位差为 π , 合成后, 仍为线偏振光, 只是振动方向与入射线偏振光相比转过 2α 角。

(3) 波片为 $1/4$ 波长片: 线偏振光进入 $1/4$ 波片后, 被分解为振动方向互相垂直的两束线偏振光, 出射时它们之间的相位差为 $\pi/2$, 当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 合成后为圆偏振光, 当 $\alpha \neq 45^\circ$ 时, 合成后为椭圆偏振光。

[习题解答]

14-1 一根直径为 8.0 cm 的长玻璃棒的一端被磨成半径为 4.0 cm 的光滑凸状球面, 已知玻璃的折射率为 1.50。如果将物体放于棒轴上距此端面分别为无限远、16.0 cm 和 4.0 cm 处, 求像的位置。

解 已知 $R = 4.0 \text{ cm}$, $n_1 = 1.00$, $n_2 = 1.50$, $l_1 = -\infty$ 、 -16.0 cm 和 -4.0 cm , 求 l_2 。

将已知数据代入单球面折射公式

$$\frac{n_2}{l_2} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

中。当 $l_1 = -\infty$ 时, 求得 $l_2 = 12 \text{ cm}$, 表示像在玻璃棒内距端面 12 cm 处; 当 $l_1 = -16.0 \text{ cm}$ 时, 求得 $l_2 = 24 \text{ cm}$, 表示像在玻璃棒内距端面 24 cm 处; 当 $l_1 = -4.0 \text{ cm}$ 时, 求得 $l_2 = -12 \text{ cm}$, 表示像在玻璃棒外距端面 12 cm 处。

14-2 将上题中的玻璃棒浸在某种液体里, 在棒轴上离棒的端面 60.0 cm 处放一物体, 发现像呈现在玻璃棒内距端面 100.0 cm 处。求液体的折射率。

解 已知 $R = 4.0 \text{ cm}$, $l_1 = -60 \text{ cm}$, $l_2 = 100 \text{ cm}$ 和 $n_2 = 1.50$, 求 n_1 。

将已知数据代入单球面折射公式, 得

$$\frac{1.50}{100} - \frac{n_1}{-60} = \frac{1.50 - n_1}{4.0},$$

从中解得

$$n_1 = \frac{0.36}{0.267} = 1.35.$$

14-3 折射率为 1.50、直径为 10.0 cm 的长玻璃棒, 端面被磨成半径为 5.0 cm 的光滑凸状球面。有一长为 1.0 mm 的细棒, 垂直地放于玻璃棒轴上距端面 20.0 cm 处。求细棒的像的位置和横向放大率。

解 已知 $R = 5.0 \text{ cm}$, $n_1 = 1.00$, $n_2 = 1.50$, $l_1 = -20.0 \text{ cm}$ 和 $y_1 = 1.0 \text{ mm}$, 求像距 l_2 和横向放大率 m 。

将已知数据代入单球面折射公式, 得

$$\frac{1.50}{l_2} - \frac{1.00}{-20.0} = \frac{1.50 - 1.00}{5.0},$$

从中解得

$$l_2 = 30.0 \text{ cm}.$$

所以像在棒内距端面 30.0 cm 处。

横向放大率为

$$m = \frac{n_1 l_2}{n_2 l_1} = -1.00,$$

这表示, 像是与物等大的倒立实像。

14-4 有一曲率半径为 20.0 cm 的凹面镜, 先后放在空气(折射率为 1.00)和水(折射率为 1.33)中, 求在这两种情况下的焦距。

解 反射镜的焦距之取决于镜面的曲率半径,与介质的性质无关。

$$f = \frac{R}{2} = \frac{-20.0}{2} \text{ cm} = -10.0 \text{ cm}.$$

14-5 高度为 2.0 cm 的细棒,放于曲率半径为 16.0 cm 的凹面镜之前,如果细棒垂直地处于主光轴上,并分别距离顶点 4.0 cm、16.0 cm 和 24.0 cm。

(1) 求在三种情况下像的位置,大小,正倒和虚实;

(2) 用作图法求像。

解 已知 $R = -16.0 \text{ cm}$, $y_1 = 2.0 \text{ cm}$, $l_1 = -4.0 \text{ cm}$, -16.0 cm 和 -24.0 cm 。

(1) 在 $l_1 = -4.0 \text{ cm}$ 的情况下;将已知量代入球面镜公式

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{2}{R},$$

得

$$\frac{1}{-4.0} + \frac{1}{l_2} = \frac{2}{-16.0},$$

从中解得

$$l_2 = 8.0 \text{ cm},$$

横向放大率为

$$m = -\frac{l_2}{l_1} = -\frac{8.0}{-4.0} = 2.0,$$

以上结果表示,像处于球面镜之后距离顶点 8.0 cm 处,是物的 2 倍,是正立的虚像。

在 $l_1 = -16.0 \text{ cm}$ 的情况下;将已知量代入球面镜公式,可求得

$$l_2 = -16.0 \text{ cm},$$

横向放大率为

$$m = -1.0,$$

以上结果表示,像处于球面镜之前距离顶点 16.0 cm 处,与物等大,是倒立的实像。

在 $l_1 = -24.0 \text{ cm}$ 的情况下;将已知量代入球面镜公式,可求得

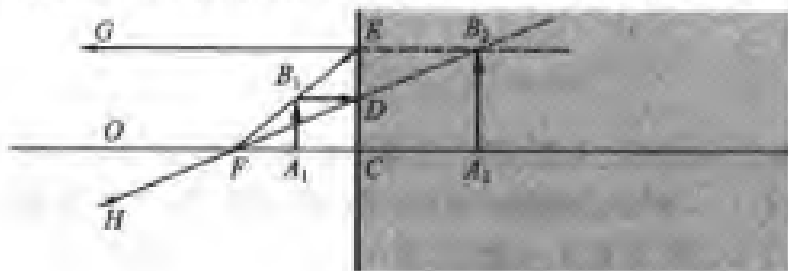
$$l_2 = -12.0 \text{ cm},$$

横向放大率为

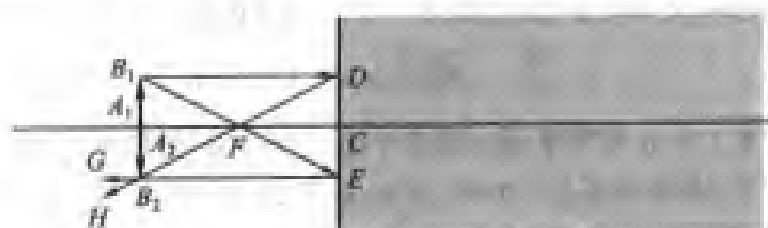
$$m = -0.50,$$

以上结果表示,像处于球面镜之前距离顶点 12.0 cm 处,是物的 1/2,是倒立的实像。

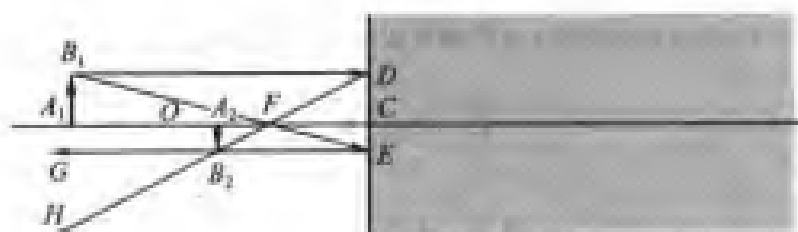
(2) 题意要求的三种情形分别用图 14-6(a)、图 14-6(b)和图 14-6(c)表示。图中;凹



(a)



(b)



(c)

图 14-6

面镜右侧光线射不到,故用阴影表示;物用 A_1B_1 表示,像用 A_2B_2 表示。由物点 B_1 发出的平行于主光轴的光线到达凹面镜的 D 点,反射后必定通过焦点 F ,这就是光线 DH ;由物点 B_1 发出的通过焦点 F 的光线到达凹面镜的 E 点,反射后必定平行于主光轴,这就是光线 EG 。光线 DH 和光线 EG 的交点(或反向延长线的交点),就是像点 B_2 。

14-6 有一曲率半径为 20.0 cm 的凹面镜,在距顶点 10.0 cm 处垂直于主光轴放置一高度为 20 mm 的细棒,计算像的位置和横向放大率,然后作图。

解 已知 $R = -20.0\text{ cm}$, $y_1 = 2.0\text{ cm}$, $l_1 = -10.0\text{ cm}$ 。将已知量代入球面镜公式

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{2}{R},$$

得

$$\frac{1}{-10.0} + \frac{1}{l_2} = \frac{2}{-20.0},$$

从中解得

$$l_2 = +\infty.$$

横向放大率为

$$m = -\frac{l_2}{l_1} = -\frac{\infty}{-10.0} = +\infty.$$

以上结果表示,像处于球面镜之后距离顶点无限远处,是无限大的、正立的虚像。

作图示于图 14-7。图中,凹面镜右侧光线射不到,故用阴影表示,物用 A_1B_1 表示,根据题意, A_1B_1 垂直于主光轴,并且 A_1 与焦点相重合。由物点 B_1 发出的平行于主光轴的光线到达凹面镜的 D 点,反射后必定通过焦点 F (即 A_1 点),这就是光线 DH ,其反向延长线就是 DH' ;由物点 B_1 发出的通过曲率中心 O 的光线到达凹面镜的 E 点,反射后必定按原路径返

同,这就是光线 EG ,其反向延长线是 EG' 。容易证明, $DH' \parallel EG'$,它们必定相交于无限远处,也就是说,像点 B_2 必定在无限远处。

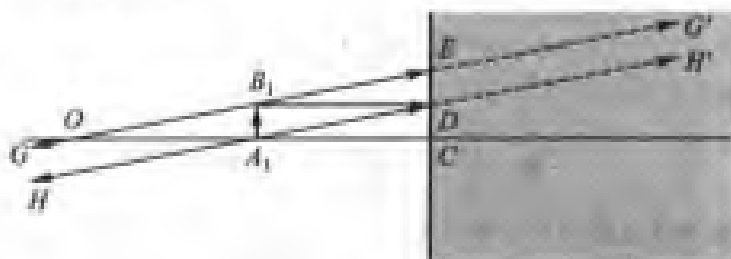


图 14-7

14-7 试证明:当凸面对物体成像时,无论物体放于何处,像总是缩小的虚像。

解 根据球面镜的高斯公式

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f},$$

可以得到

$$l_2 = \frac{l_1 f}{l_1 - f}.$$

将上式代入球面反射的横向放大率公式,得

$$m = -\frac{l_2}{l_1} = -\frac{f}{l_1 - f}.$$

对于凸面镜,总有 $f > 0$, $l_1 < 0$,也就是说,上式分子总为正值,分母总为负值,并且分母的绝对值总是大于分子的,所以,由上式决定的横向放大率总是小于 1 的正值。这表示,凸面镜所成的像总是缩小的虚像,并且是正立的。

14-8 一个人身高 1.70 m,头顶到眼睛的距离为 0.10 m。如果此人能够从铅直放置的平面镜中看到自己的全身,这个平面镜应至少多高? 它应放置在什么位置?

解 由图 14-8 可以看出,这个平面镜的最小高度为

$$h_{\min} = \frac{1}{2}(10 \text{ cm}) + \frac{1}{2}(160 \text{ cm}) = 85 \text{ cm},$$

应铅直放置,下端距地面 80 cm。

14-9 会聚透镜的焦距为 10.0 cm,当物点处于主光轴上并距光心分别为 20.0 cm 和 5.0 cm 时,试确定像的位置、大小、正倒和虚实。

解 已知 $f = 10.0 \text{ cm}$, l_1 分别为 -20.0 cm 和 -5.0 cm ,确定像的位置和性质。

在 $l_1 = -20.0 \text{ cm}$ 的情况下,将已知量代入薄透镜成像公式

$$\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f},$$

得

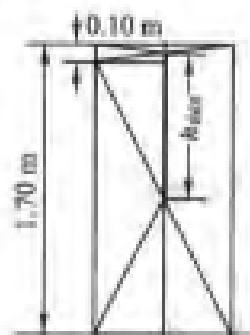


图 14-8

$$\frac{1}{l_2} - \frac{1}{-20.0} = \frac{1}{10.0},$$

从中解得

$$l_2 = 20.0 \text{ cm}.$$

此时横向放大率为

$$m = \frac{l_2}{l_1} = \frac{20.0}{-20.0} = -1.00.$$

以上结果表示,像处于薄透镜之后距离光心 20.0 cm 处,与物等大,是倒立的实像。

在 $l_1 = -5.0 \text{ cm}$ 的情况下,将已知量代入薄透镜成像公式,得

$$l_2 = -10.0 \text{ cm},$$

此时横向放大率为

$$m = \frac{l_2}{l_1} = \frac{-10.0}{-5.0} = 2.00.$$

上面结果表示,像处于薄透镜之前距离光心 10.0 cm 处,像是物的 2 倍,是正立的虚像。

14-10 一发散透镜的两个球面的曲率半径分别为 10.0 cm 和 30.0 cm,其折射率为 1.50。现有高度为 2.0 cm 的细棒处于主光轴上并与主光轴相垂直,与光心相距 40.0 cm。求像的位置和高度。

解 已知发散透镜的曲率半径分别为 10.0 cm 和 30.0 cm, $n = 1.50$, $y_1 = 2.0 \text{ cm}$, 以及 $l_1 = -40.0 \text{ cm}$ 。

根据薄透镜的焦距公式,可以求得该发散透镜的焦距为

$$f = -30.0 \text{ cm}.$$

将已知量代入薄透镜成像的高斯公式

$$\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f},$$

得

$$\frac{1}{l_2} - \frac{1}{-40.0} = \frac{1}{-30.0},$$

可以求得

$$l_2 = -\frac{120.0}{7} \text{ cm} = -17.1 \text{ cm}.$$

横向放大率为

$$m = \frac{l_2}{l_1} = \frac{-17.1}{-40.0} = 0.427.$$

像的大小为

$$y_2 = my_1 = 0.427 \times 2.0 \text{ cm} = 0.86 \text{ cm}.$$

上面结果表示,像处于薄透镜之前距离光心 17.1 cm 处,像是高度为 0.86 cm,是正立的虚像。

14-11 把两个焦距分别为 f_1 和 f_2 的薄透镜相接触组成共轴光学系统。证明此透镜组的焦距 f 与 f_1 和 f_2 有如下关系:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

解 设 l' 为由第一个透镜所成像的像距, 当然对于第二个透镜来说, 就是物距。因为两个透镜是相接触的, l' 的量值对于两个透镜是相同的。

对于第一个透镜: 设两球面的半径分别为 R_1 和 R_2 , 透镜介质的折射率为 n , 将这些值代入薄透镜的成像公式, 得

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l_1} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

将上式改写为

$$\frac{1}{l'} = \frac{1}{l_1} + (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (1)$$

对于第二个透镜: 设两球面的半径分别为 R_A 和 R_B , 透镜介质的折射率为 n , 将这些值代入薄透镜的成像公式, 得

$$\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right),$$

将式(1)代入上式, 得

$$\frac{1}{l_2} - \left[\frac{1}{l_1} + (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] = (n-1) \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right),$$

整理后为

$$\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n-1) \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right). \quad (2)$$

根据薄透镜成像的高斯公式, 式(2)的等号右端应该是该光学系统的焦距的倒数, 即

$$\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f},$$

所以,

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n-1) \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right), \quad (3)$$

根据薄透镜的焦距公式, 第一个薄透镜和第二个薄透镜的焦距分别为

$$\frac{1}{f_1} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ 和 } \frac{1}{f_2} = (n-1) \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

将上式代入式(3), 得

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

证毕。

14-12 有两个薄透镜相距 5.0 cm, 组成共轴系统: 第一个薄透镜是焦距为 10.0 cm 的会聚透镜, 第二个薄透镜是焦距为 -10.0 cm 的发散透镜。现有一物点放于会聚透镜前方 20.0 cm 处, 试确定像的位置和虚实。

解

对于第一个透镜(会聚透镜): 根据薄透镜成像的高斯公式, 有

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{-20.0} = \frac{1}{10.0},$$

求得像距为

$$l = 20.0 \text{ cm}.$$

对于第二个透镜(发散透镜):根据薄透镜成像的高斯公式,有

$$\frac{1}{l_2} - \frac{1}{(20.0 - 5.0)} = -\frac{1}{10.0},$$

求得像距为

$$l_2 = -30.0 \text{ cm},$$

这表示,像处于发散透镜前 30.0 cm 处,即处于会聚透镜前 25.0 cm 处,在物的左侧 5.0 cm 处,是虚像。

14-13 有一焦距为 10.0 cm 的放大镜,可以看作为薄透镜。如果像呈现在观察者的明视距离,即在眼前方 25.0 cm 处,那么应把被观察的物体放在什么位置?若物体高度为 1.0 mm,像的高度多大?

解 已知 $f = 10.0 \text{ cm}$, $l_2 = -25.0 \text{ cm}$, $y_1 = 1.0 \text{ mm}$ 。将已知数据代入薄透镜成像的高斯公式,有

$$\frac{1}{-25.0} - \frac{1}{l_1} = \frac{1}{10.0},$$

求得物距为 $l_1 = -7.1 \text{ cm}$,被观察物体应放在镜前 7.1 cm 处。像的高度为

$$y_2 = my_1 = \frac{l_2}{l_1} y_1 = \frac{-25.0}{-7.1} \times 1.0 \text{ mm} = 3.5 \text{ mm}.$$

14-15 光源 S_1 和 S_2 在真空中发出的光都是波长为 λ 的单色光,现将它们分别放于折射率为 n_1 和 n_2 的介质中,如图 14-9 所示。界面上一点 P 到两光源的距离分别为 r_1 和 r_2 。

- (1) 两束光的波长各为多大?
- (2) 两束光到达点 P 的相位变化各为多大?
- (3) 假如 S_1 和 S_2 为相干光源,并且初相位相同,求点 P 干涉加强和干涉减弱的条件。

解

(1) 已知光在真空中的波长为 λ ,那么它在折射率为 n 的介质中的波长 λ' 可以表示为

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n},$$

所以,在折射率为 n_1 和 n_2 的介质中的波长可分别表示为

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1} \text{ 和 } \lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2}.$$

(2) 光传播的距离为 r ,所引起的相位变化为

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r}{\lambda},$$

所以,第一束光到达点 P 相位的变化为

$$\Delta\varphi_1 = 2\pi \frac{r_1}{\lambda_1} = 2\pi \frac{n_1 r_1}{\lambda}.$$

第二束光到达点 P 相位的变化为

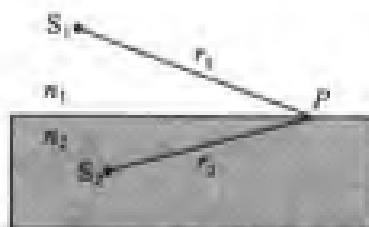


图 14-9

$$\Delta\varphi_2 = 2\pi \frac{r_2}{\lambda_2} = 2\pi \frac{n_2 r_2}{\lambda}.$$

(3) 由于两光源的初相位相同, 则两光相遇时的相位差是由光程差决定的, 所以, 点 P 干涉加强的条件是

$$\Delta = n_1 r_1 - n_2 r_2 = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

点 P 干涉减弱的条件是

$$\Delta = n_1 r_1 - n_2 r_2 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

14-16 若用两根细灯丝代替杨氏实验中的两个狭缝, 能否观察到干涉条纹? 为什么?

解 观察不到干涉条纹, 因为它们不是相干光源。

14-17 在杨氏干涉实验中, 双缝的间距为 0.30 mm , 以单色光照射狭缝, 在离开双缝 1.2 m 处的光屏上, 从中央向两侧数两个第 5 条暗条纹之间的间隔为 22.8 mm 。求所用单色光的波长。

解 在双缝干涉实验中, 暗条纹满足

$$x = \frac{D}{2a} (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

第 5 条暗条纹的级次为 4, 即 $k = 4$, 所以

$$x_4 = \frac{9D\lambda}{4a} = \frac{9D\lambda}{2d},$$

其中 $d = 2a$ 。两个第 5 条暗条纹的间距为

$$\Delta x_4 = \frac{9D\lambda}{d},$$

等于 22.8 mm , 将此值代入上式, 可解出波长为

$$\lambda = \frac{\Delta x_4 d}{9D} = 6.3 \times 10^{-4} \text{ mm} = 6.3 \times 10^2 \text{ nm}.$$

14-18 在杨氏干涉实验中, 双缝的间距为 0.30 mm , 以波长为 $6.0 \times 10^2 \text{ nm}$ 的单色光照射狭缝, 求在离双缝 50 cm 远的光屏上, 从中央向一侧数第 2 条与第 5 条暗条纹之间的距离。

解 因为第 1 条暗条纹对应于 $k = 0$, 所以第 2 条暗条纹和第 5 条暗条纹分别对应于 $k = 1$ 和 $k = 4$ 。根据双缝干涉的规律, 暗条纹的位置应满足

$$x_k = \frac{D}{2a} (2k + 1) \frac{\lambda}{2} = \frac{D}{2d} (2k + 1) \lambda.$$

所以, 第 2 条与第 5 条暗条纹之间的距离为

$$\Delta x = x_4 - x_1 = \frac{D\lambda}{2d} (9 - 3) = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

14-20 在空气中垂直入射到折射率为 1.40 的薄膜上的白光, 若使其中的紫光 (波长为 400 nm) 成分被薄膜的两个表面反射而发生干涉相消, 问此薄膜厚度的最小值应为多大?

解 光从第一个表面反射要产生半波损失, 但从第二个表面反射无半波损失, 所以光程差应表示为

$$\Delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

式中 e 为薄膜的厚度,此厚度应为最小值,干涉级次 k 最小应取 1,因为当 $k=0$ 时,薄膜的厚度必须取零,上式才能成立。将 $k=1$ 代入上式,并从中解出薄膜厚度的最小值为

$$e = \frac{\lambda}{2n} = 0.143 \mu\text{m}.$$

14-21 在空气中肥皂膜的厚度为 $0.32 \mu\text{m}$,折射率为 1.33。若用白光垂直照射,肥皂膜呈什么颜色?

解 反射光的颜色是由反射光干涉加强的光波波长所决定的。干涉加强的条件是

$$2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k=1,2,\cdots$$

由此解得

$$\lambda = \frac{2ne}{k - \frac{1}{2}}.$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时,} \quad \lambda_1 = \frac{2ne}{1 - \frac{1}{2}} = 1.70 \mu\text{m} = 1.70 \times 10^3 \text{ nm};$$

$$\text{当 } k=2 \text{ 时,} \quad \lambda_2 = \frac{2ne}{2 - \frac{1}{2}} = 0.567 \mu\text{m} = 5.67 \times 10^2 \text{ nm};$$

$$\text{当 } k=3 \text{ 时,} \quad \lambda_3 = \frac{2ne}{3 - \frac{1}{2}} = 0.340 \mu\text{m} = 3.40 \times 10^2 \text{ nm}.$$

在以上干涉加强的光波中, λ_1 是红外光, λ_3 是紫外光,只有 λ_2 处于可见光范围内,且为黄光。

14-22 在观察薄膜干涉时常说使用面光源,这是为什么?能否使用点光源呢?

解 在观察薄膜干涉时,可以使用点光源。使用面光源可以增大干涉条纹的衬比度。具体分析见本章的[概念阐释]。

14-23 试分析一下等倾干涉条纹可能是什么形状?

解 因为等倾干涉图样定位于无限远处,使用透镜则呈现于透镜的焦面上。又因为等倾干涉条纹是以相同角度入射和出射的平行光在光屏上会聚点的轨迹。如果光屏面与焦面重合,则干涉条纹为同心圆环。若光屏面不与透镜光轴相垂直,干涉条纹的形状可能是椭圆、双曲线等圆锥截线。

14-24 两块矩形的平板玻璃叠放于桌面上,将一薄纸条从一边塞入它们之间,使两玻璃板之间形成一个劈形气隙。用钠光(波长为 589 nm)垂直照射,将观察到干涉条纹。沿垂直于劈棱的方向上每厘米有 10 条亮纹(或暗纹),求劈形气隙的角度。

解 设相邻亮条纹或相邻暗条纹的间距为 l ,劈角为 θ ,因为相邻亮条纹或相邻暗条纹所对应的气隙厚度差为半波长,所以下面的关系成立:

$$\theta = \frac{\lambda}{2l}.$$

根据已知条件, $l = 1.00 \times 10^{-3} \text{ m}$,代入上式,得

$$\theta = \frac{589 \times 10^{-9}}{2 \times 1.00 \times 10^{-3}} \text{ rad} = 2.95 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

14-25 两块矩形的平板玻璃叠放在一起,使其一边相接触,在与此边相距 20 cm 处夹

一直径为 $5.0 \times 10^{-2} \text{ mm}$ 的细丝,如图 14-10 所示,于是便形成一劈形气隙。若用波长为 589 nm 的钠光垂直照射,劈形气隙表面出现干涉条纹,求相邻暗条纹之间的间距。

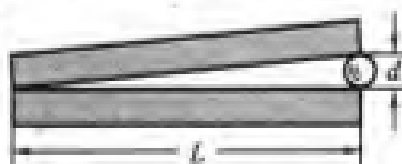


图 14-10

解 设相邻亮条纹或相邻暗条纹的间距为 l ,劈角为 θ ,下面的关系成立:

$$\theta = \frac{\lambda}{2l}.$$

所以

$$l = \frac{\lambda}{2\theta} = \frac{\lambda}{2 \frac{\lambda}{2L}} = \frac{\lambda L}{2d} = 1.2 \text{ mm}.$$

14-26 若用波长为 589 nm 的钠光观察牛顿环,发现 k 级暗环的半径为 $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$,而其外侧第 5 个暗环的半径为 $3.0 \times 10^{-3} \text{ m}$. 求透镜凸面的曲率半径和 k 的值。

解 第 k 个暗环的半径为

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (1)$$

当 $k=0$ 时,为中心的暗点,当 $k=1$ 时,为第 1 条暗环,等等。第 k 个暗环之外的第 5 个暗环,对应于 $k+5$,其半径为

$$r_{k+5} = \sqrt{(k+5)R\lambda}. \quad (2)$$

将以上两式平方后相除,得

$$\frac{r_k^2}{r_{k+5}^2} = \frac{k}{k+5}.$$

将数值代入并求出 k 值,得

$$\frac{4}{9} = \frac{k}{k+5},$$

$$k=4.$$

将 k 值代入式(1),可求得透镜凸面的曲率半径,为

$$R = \frac{r_k^2}{k\lambda} = 1.7 \text{ m}.$$

14-27 一平凸透镜的凸面曲率半径为 1.2 m ,将凸面朝下放在平玻璃板上,用波长为 650 nm 的红光观察牛顿环。求第三条暗环的直径。

解 第 3 条暗环对应的 k 值为 3,其半径为

$$r_3 = \sqrt{kR\lambda} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.5 \text{ mm},$$

所以,第 3 条暗环的直径为 $d_3 = 3.0 \text{ mm}$ 。

14-28 在单缝夫琅禾费衍射中,单缝宽度 $a = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$,透镜焦距 $f = 50 \text{ cm}$ 。分别用 $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ 和 $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$ 的单色平行光垂直入射,问中央亮条纹的宽度分别为多大?

解 两个第一暗条纹中心的距离,就是中央亮条纹的宽度。而第一暗条纹的衍射角 φ_0 ,就是中央亮条纹的半角宽度(即角宽度的一半)。根据式(14-81)

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{\lambda}{a} \approx \frac{\lambda}{a},$$

对应于两种波长 λ_1 和 λ_2 , 中央亮条纹的宽度分别为

$$\Delta x_1 = 2\varphi_{01}f = \frac{2\lambda_1 f}{a} = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m};$$

$$\Delta x_2 = 2\varphi_{02}f = \frac{2\lambda_2 f}{a} = 7.6 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

14-29 单缝被氦氖激光器产生的激光(波长为 632.8 nm)垂直照射, 所得夫琅禾费衍射图样的第一级暗条纹对单缝法线的夹角为 5° , 求单缝的宽度。

解 第 1 级暗条纹对单缝法线的夹角, 就是第 1 级暗条纹的衍射角 φ_0 , 并且根据衍射的规律有

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{\lambda}{a} \approx \frac{\lambda}{a}.$$

所以, 可以求得单缝的宽度为

$$a = \frac{\lambda}{\varphi_0} = \frac{632.8 \times 10^{-9}}{\pi/36} = 7.251 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

14-30 一束波长为 600 nm 的平行光垂直照射到透射平面衍射光栅上, 在与光栅法线成 45° 角的方向上观察到该光的第二级谱线。问该光栅每毫米有多少刻痕?

解 根据光栅方程

$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda,$$

式中 $\varphi = 45^\circ$, $k = 2$, 于是可求得光栅常量为

$$a+b = \frac{2\lambda}{\sin\varphi} = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{1/\sqrt{2}} = 1.697 \times 10^{-6} \text{ m},$$

所以, 该光栅每毫米的刻痕数为

$$N = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{1.697 \times 10^{-3}} = 589.$$

14-31 可见光的波长范围大约在 400 nm ~ 760 nm, 将这个范围的可见光垂直入射到每厘米有 6 000 条刻痕的平面光栅上, 求第一级可见光谱的角宽度。

解 在光栅方程

$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda$$

中, 取 $k = 1$, φ 就是波长为 λ 的光的衍射角。分别求出波长为 400 nm 和 760 nm 的衍射角 φ_1 和 φ_2 , 两者之差就是第一级可见光谱的角宽度。这从教材(下卷)第 101 页的图 14-25 中可以看得很清楚。

$$\sin\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{a+b} = \frac{400 \times 10^{-9}}{1.667 \times 10^{-6}} = 0.240,$$

$$\therefore \varphi_1 = 13^\circ 53';$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{\lambda_2}{a+b} = \frac{760 \times 10^{-9}}{1.667 \times 10^{-6}} = 0.456,$$

$$\therefore \varphi_2 = 27^\circ 08'.$$

所以, 第一级可见光谱的角宽度为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 13^\circ 15'.$$

14-32 有一透射平面光栅每毫米有 500 条刻痕, 并且刻痕间距是刻痕宽度的两倍。若

用波长为 600 nm 的平行光垂直照射该光栅,问最多能观察到几条亮条纹?并求出每一条亮条纹的衍射角。

解 根据已知条件可以求得光栅常量

$$d = a + b = \frac{1.000 \times 10^{-3}}{500} = 2.00 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

由光栅方程,得

$$d \sin \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = k\lambda,$$

于是求得

$$k = \pm 3.3,$$

取整数,为

$$k = \pm 3.$$

这表示,在无限大的光屏上可能出现 k 值为 0、 ± 1 、 ± 2 和 ± 3 的七条亮条纹。

但是由于缺级现象,有些亮条纹消失了。由于刻痕间距(a)是刻痕宽度(b)的两倍,所以

$$\frac{d}{a} = \frac{a+b}{a} = \frac{3}{2}.$$

消失的亮条纹的 k 值为

$$k = \frac{d}{a} k' = \frac{3}{2} k', \quad k' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

当 $k' = \pm 2$ 时, $k = \pm 3$, 这表示,在光屏上消失的亮条纹的级次为 $k = \pm 3$ 。这样,出现在无限大光屏上的亮条纹只有 5 条,它们的级次分别是 $k = 0, \pm 1, \pm 2$ 。

根据光栅方程,可以求得各亮条纹的衍射角:

$k = 0$ 的亮条纹

$$\sin \varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0;$$

$k = \pm 1$ 的亮条纹

$$\sin \varphi_1 = \pm \frac{\lambda}{d} = \pm 0.300, \quad \varphi_1 = \pm 17^\circ 28';$$

$k = \pm 2$ 的亮条纹

$$\sin \varphi_2 = \pm \frac{2\lambda}{d} = \pm 0.600, \quad \varphi_2 = \pm 36^\circ 52'.$$

14-33 波长为 0.296 nm 的 X 射线投射到一块晶体上,产生的第一级衍射线偏离入射线方向为 31.7° ,求相应于此衍射线的晶面间距。

解 晶面、入射方向、衍射方向以及晶面法线之间的关系,如图 14-11 所示。由图可见, X 射线的掠射角 $\theta = 31.7^\circ / 2 = 15^\circ 51'$ 。根据布拉格公式

$$2d \sin \theta = k\lambda,$$

取 $k = 1$, 则有

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{0.296 \times 10^{-9}}{2 \times 0.2732} = 0.542 \text{ nm}.$$

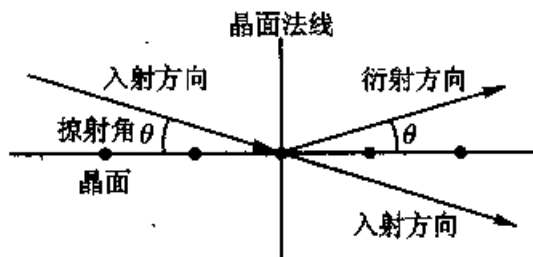


图 14-11

14-34 有一直径为 5.0 cm、焦距为 25 cm 的会聚透镜,用波长为 550 nm 的光观察远处的两个物点,刚好能分辨。问这两个物点在透镜焦面上中央亮斑的中心相距多远?

解 既然两个物点刚好能分辨,那么它们对透镜中心的张角,就是最小分辨角 θ_0 ,并可以表示为

$$\theta_0 = \frac{1.22\lambda}{D} = 1.34 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

在透镜焦面上这两个物点的中央亮斑的中心间距为

$$l = \theta_0 f = 1.34 \times 10^{-5} \times 25 \times 10^{-2} \text{ m} = 3.4 \times 10^{-3} \text{ mm.}$$

14-35 设人眼瞳孔的直径为 3.0 mm,对于可见光中波长为 $6.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ 的光,试求:

(1) 人眼的最小分辨角;

(2) 在明视距离 25 cm 处人眼能分辨的最小距离。

解

(1) 人眼的最小分辨角

$$\theta_0 = \frac{1.22\lambda}{D} = \frac{1.22 \times 6.0 \times 10^{-7}}{3.0 \times 10^{-3}} \text{ rad} = 2.4 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

(2) 在明视距离 25 cm 处人眼能分辨的最小距离为

$$l = \theta_0 f = 2.4 \times 10^{-4} \times 25 \times 10^{-2} \text{ m} = 6.1 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

14-38 水的折射率为 1.33,玻璃的折射率为 1.50。当光由水中射向玻璃而被界面反射时,起偏角为多大?当光由玻璃中射向水而被界面反射时,起偏角又为多大?

解 设水的折射率为 $n_1 (=1.33)$,玻璃的折射率为 $n_2 (=1.50)$ 。光由水射向玻璃的起偏角 i_0 为

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} = 1.13, \quad i_0 = 48^\circ 27';$$

光由玻璃射向水的起偏角 i'_0 为

$$\tan i'_0 = \frac{n_1}{n_2} = 0.887, \quad i'_0 = 41^\circ 34'.$$

14-39 两偏振片的透振方向成 30° 角,透射光强度为 I_1 。若入射光不变而使两偏振片的透振方向之间的夹角变为 45° 角,求透射光的强度。

解 设透过第一个偏振片的光强为 I_0 ,当两个偏振片的透振方向成 $\alpha = 30^\circ$ 角时,透过第二个偏振片的光强为 I_1 ,并有下列的关系:

$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha_1,$$

所以

$$I_0 = \frac{I_1}{\cos^2 \alpha_1} = \frac{4}{3} I_1.$$

当两个偏振片的透振方向夹角变为 $\alpha_2 = 45^\circ$ 时,透射光强 I_2 为

$$I_2 = I_0 \cos^2 \alpha_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{2}{3} I_1.$$

14-40 两偏振片 A 和 B 放置在使光完全不能透过的相对位置上,现在 A、B 之间插入第三块偏振片 C,光就能部分地通过,并当 C 旋转时,透射光的强度也随着变化。设透过偏振

片 A 的光强度为 I_0 , 求当偏振片 A 和 C 的透振方向夹角为 α 时透射光的强度。

解 根据题意, 只有当 A 与 B 的透振方向互相垂直时, 光才完全不能通过。所以, 当 C 与 A 成 α 角时, C 与 B 必成 $(90^\circ - \alpha)$ 角。由马吕斯定律, 透过 C 的光强为

$$I' = I_0 \cos^2 \alpha,$$

式中 I_0 为透过 A 的光强。透过 B 的光强为

$$I = I' \cos^2 (90^\circ - \alpha) = I_0 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} I_0 \sin^2 2\alpha.$$

14-41 两偏振片 A 和 B 的透振方向成 45° 角, 强度为 I_0 的入射光是线偏振光, 且振动方向与偏振片 A 的透振方向相平行。分别求入射光沿从 A 至 B 的方向和沿从 B 至 A 的方向透过两个偏振片后的光强。

解

(1) 当入射光沿 A→B 的方向通过 A 和 B 时: 因为入射光的振动方向与 A 的透振方向平行, 而与 B 的透振方向成 45° 角, 所以光通过 A 后强度不变, 通过 B 后的光强为

$$I = I_0 \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} I_0;$$

(2) 当入射光沿 B→A 的方向通过 B 和 A 时: 入射光通过 B 后的光强为

$$I' = I_0 \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} I_0.$$

强度为 I' 的光的振动方向与 B 的透振方向一致, 而与 A 的透振方向成 45° 角, 所以通过 A 后的光强为

$$I = I' \cos^2 45^\circ = \frac{1}{4} I_0.$$

14-42 如何将自然光转变为椭圆偏振光和圆偏振光? 椭圆偏振光和圆偏振光各在什么情况下转变为线偏振光?

解 自然光通过起偏器变为线偏振光, 线偏振光垂直入射至 $1/4$ 波片, 出射光便是椭圆偏振光; 当线偏振光垂直入射至 $1/4$ 波片时, 且使其振动方向与 $1/4$ 波片的光轴成 45° 时, 出射光便是圆偏振光。

圆偏振光垂直入射至 $1/4$ 波片后, 出射光变为线偏振光; 椭圆偏振光垂直入射至 $1/4$ 波片时, 且使椭圆的主轴与波片的光轴相平行, 则出射光为线偏振光。

14-43 在一对正交的偏振片之间放一块 $1/4$ 波片, 用自然光入射。

(1) 转动 $1/4$ 波片光轴方向, 出射光的强度怎样变化?

(2) 如果有强度极大和消光现象, 那么 $1/4$ 波片的光轴应处于什么方向? 这时从 $1/4$ 波片射出的光的偏振状态如何?

解

(1) 转动 $1/4$ 波片光轴方向出射光强度的变化情形:

a) 当 $1/4$ 波片转至其光轴与第一个偏振片的透振方向相平行时, 从 $1/4$ 波片出射的光是振动方向与光轴同方向的线偏振光, 不能通过第二个偏振片, 故产生消光现象;

b) 当 $1/4$ 波片转至其光轴与第一个偏振片的透振方向有一夹角 α 时, 从 $1/4$ 波片出射的光是以其光轴为主轴的椭圆偏振光, 当 α 角很小时, 通过第二个偏振片的光强也很小;

c) 随着 α 的增大, 通过第二个偏振片的光强增加, 当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 从 $1/4$ 波片出射的光是圆偏振光, 通过第二个偏振片的光强达到最大值;

d) 随着 α 的继续增大, 通过第二个偏振片的光强又逐渐减小;

e) 当 $1/4$ 波片转至其光轴与第二个偏振片的透振方向相平行时, 从 $1/4$ 波片出射的光为垂直于光轴的线偏振光, 则不能通过第二个偏振片, 所以再次出现消光现象。

f) 以后继续转动 $1/4$ 波片所出现的现象, 重复上面的过程。

(2) 光强极大对应于 $1/4$ 波片的光轴与两个偏振片的透振方向都成 45° 的位置, 这时从 $1/4$ 波片射出的光是圆偏振光。

出现消光现象时, $1/4$ 波片的光轴应处在两个位置上, 即分别平行于两个偏振片的透振方向。当 $1/4$ 波片的光轴与第一个偏振片的透振方向相平行时, 从 $1/4$ 波片射出的光是线偏振光, 其振动方向平行于 $1/4$ 波片的光轴, 而与第二个偏振片的透振方向相垂直; 当 $1/4$ 波片的光轴与第二个偏振片的透振方向相平行时, 即 $1/4$ 波片的光轴与第一个偏振片的透振方向相垂直, 从 $1/4$ 波片射出的光是线偏振光, 其振动方向垂直于 $1/4$ 波片的光轴, 也与第二个偏振片的透振方向相垂直。

14-44 椭圆偏振光通过 $1/4$ 波片, 在一般情况下仍然为椭圆偏振光, 对此应如何解释?

解 椭圆偏振光可以看成是两个互相垂直的线偏振光的合成, 这两个互相垂直的线偏振光可以表示为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= A_1 \cos \omega t \\ E_y &= A_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \right\}$$

式中 ϕ 是不为 0 和 $\pm\pi$ 的任意角。当椭圆偏振光通过 $1/4$ 波片后, 这两个互相垂直的线偏振光都要分解为平行于光轴和垂直于光轴的两个线偏振光, 并且这两个线偏振光存在 $\pi/2$ 的相位差。于是就得到了四个线偏振光, 其中两个平行于光轴方向振动, 它们之间存在 ϕ 的相位差, 另外两光垂直于光轴方向振动, 它们之间也存在 ϕ 的相位差。无论平行于光轴方向的两个振动的合成, 还是垂直于光轴方向的两个振动的合成, 都属于同一直线上的两个同频率振动的合成。最后仍然得到振动方向分别平行于光轴和垂直于光轴的两个线偏振光, 不过它们之间的相位差一般不再是 $\pi/2$, 还与每个方向的合成结果有关, 一般情况下是不为 0 和 $\pm\pi$ 的任意角, 故仍为椭圆偏振光。

若光轴平行于椭圆偏振光

$$\left. \begin{aligned} E_x &= A_1 \cos \omega t \\ E_y &= A_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \right\}$$

的主轴, 则两个互相垂直的线偏振光相位差变为 $\pi/2$, 通过 $1/4$ 波片后成为线偏振光。

14-45 将石英晶片放置在透振方向互相平行的两偏振片之间, 波长为 435.8 nm 的蓝光正好不能通过。已知石英对此波长蓝光的旋光率为 $41.5^\circ \text{mm}^{-1}$, 求石英片的厚度。

解 根据题意, 石英晶片使光的振动面旋转了 $\theta = 90^\circ$, 代入公式

$$\theta = \alpha l,$$

即可求得石英片的厚度, 为

$$l = \frac{\theta}{\alpha} = \frac{90^\circ}{41.5^\circ \text{mm}^{-1}} = 2.17 \text{ mm}.$$

14-46 某种物质的吸收系数为 $\alpha = 3.1 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$, 求透射光强分别为入射光强的 0.2、0.4、0.6 和 0.8 时物质的厚度。

解 根据朗伯定律

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

可以推得

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha x},$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\alpha x.$$

当透射光强之比为 0.2 时, 代入上式可求得物质的厚度为

$$x_{0.2} = -\frac{\ln 0.2}{3.1 \times 10^{-3}} \text{ m} = 5.2 \times 10^2 \text{ m}.$$

同样可以求得

$$x_{0.4} = 3.0 \times 10^2 \text{ m};$$

$$x_{0.6} = 1.7 \times 10^2 \text{ m};$$

$$x_{0.8} = 0.72 \times 10^2 \text{ m}.$$

14-47 某光学玻璃在可见光范围内为正常色散, 对波长为 435.8 nm 的蓝光和波长为 546.1 nm 的绿光的折射率分别为 1.652 50 和 1.624 50。试确定柯西公式中的常数 A 和 B, 并计算此光学玻璃对波长为 589.3 nm 的钠黄光的折射率和色散率。

解 柯西公式可以表示为

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

将蓝光和绿光的波长及相应的折射率代入上式, 可得到两个方程式:

$$1.652\ 50 = A + \frac{B}{(435.8 \times 10^{-9})^2};$$

$$1.624\ 50 = A + \frac{B}{(546.1 \times 10^{-9})^2}.$$

两式联立可以解得

$$A = 1.575,$$

$$B = 1.464 \times 10^{-14} \text{ m}^2.$$

将 A、B 和钠黄光的波长代入柯西公式, 可求得此光学玻璃对钠黄光的折射率, 为

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} = 1.575\ 4 + \frac{1.464\ 2 \times 10^{-14}}{(589.3 \times 10^{-9})^2} = 1.618;$$

色散率为

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} = -\frac{2 \times 1.464 \times 10^{-14}}{(589.3 \times 10^{-9})^3} \text{ m}^{-1} = -1.431 \times 10^5 \text{ m}^{-1}.$$

14-49 在一根长为 32 cm 的玻璃管内盛有含烟雾的气体, 某波长的光通过后强度为入射光的 56%, 若将烟雾除去, 透射光的强度为入射光的 88%。如果烟雾对该波长的光只散射无吸收, 而气体却只吸收无散射, 试计算含烟雾气体的吸收系数和散射系数。

解 设入射光的强度为 I_0 , 该光通过含烟雾的气体后的光强为 I , 该光通过无烟雾气体后的光强为 I' 。根据散射和吸收的规律可以列出下面的两个方程式:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -(\alpha + \beta)x; \quad (1)$$

$$\ln \frac{I'}{I_0} = -\alpha x. \quad (2)$$

由式(2)可解得气体的吸收系数

$$\alpha = -\frac{1}{x} \ln \frac{I'}{I_0} = -\frac{1}{32} \ln 0.88 \text{ cm}^{-1} = 4.0 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1};$$

将 α 值代入式(1)可求得气体的散射系数, 为

$$\beta = -\frac{1}{x} \ln \frac{I}{I_0} - \alpha = -\frac{1}{32} (\ln 0.56 - \ln 0.88) \text{ cm}^{-1} = 1.4 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}.$$

第十五章 波与粒子

[基本要求]

1. 掌握黑体辐射、光电效应和康普顿效应的基本实验规律与经典理论在解释这些规律时所遇到的困难,以及普朗克引入的能量子和爱因斯坦引入的光子论是如何对这些实验规律做出圆满解释的;

2. α 粒子散射实验为原子的核型结构模型的建立提供了坚实的实验基础,要求能对此实验的结果作出正确的分析;掌握玻尔量子论的基本思想和它对原子结构及氢原子光谱规律性的解释;

3. 理解微观粒子的波粒二象性,牢固掌握德布罗意关系;正确理解海森伯不确定关系。

[概念阐释]

一、黑体辐射 (§ 15-1)

1. 热辐射

(1) 当分子作热运动时,组成物体的分子中所包含的带电粒子,将随之一起作热运动,因而将会向外辐射电磁波,这就是热辐射。物体的热辐射具有以下特点:

a) 由于热辐射是由分子热运动引起的,所以它是物体处于任何温度下都在进行着的一种能量辐射,并且永不停息;

b) 与物体的温度密切相关,随着物体温度的升高,不仅辐射能量在增大,而且辐射能的波长范围向短波区移动,当物体的温度超过 $800\text{ }^{\circ}\text{C}$ 以后,辐射能的波长范围逐渐进入可见光区域;

c) 热辐射能谱是连续谱。

(2) 在任何温度下、对任何波长的人射辐射能的吸收比都等于 1 的物体,就是绝对黑体,简称黑体。

读者可能会提出这样的问题,既然任何物体都会发生热辐射,为什么单单选择黑体作为热辐射研究的对象或研究的核心?有人回答说,因为黑体是理想物体,研究物理现象总要选取一定的理想模型,这是我们惯用的方法。总体来说是如此,但对于热辐射问题,还必须作具体的分析和回答。

对于一般物体而言,我们所接收到由它发出的辐射能实际上包括两部分,一部分是由它所发射的热辐射,另一部分则是由它所反射的辐射能,并且这两部分是无法分开的。而我们所要研究的正是第一部分。至于第二部分,不仅与物体自身的性状有关,也与被它所反射的辐射能的性状有关。

对于黑体,情况就不同了。既然黑体在任何温度下、对任何波长的入射辐射能的单色吸收比都等于 1,即

$$\alpha_0(\lambda, T) = 1,$$

那么在任何温度下、对任何波长的入射辐射能的单色反射比必定等于零,即

$$r_0(\lambda, T) = 0,$$

这表示黑体不会反射电磁能量。所以,我们所接收到由黑体发出的辐射能,仅仅是它自身的热辐射,这就为我们研究物体的热辐射提供了便利。这就是为什么我们把黑体作为研究热辐射的对象或核心的原因。

(3) 任何物体的单色辐出度与单色吸收比之比,等于同一温度下绝对黑体的单色辐出度,即

$$\frac{M_\lambda(T)}{\alpha(\lambda, T)} = M_{\lambda 0}(T),$$

这就是基尔霍夫辐射定律。

必须注意,基尔霍夫辐射定律只有在平衡辐射的条件下才成立。

2. 黑体辐射的基本规律

根据黑体的单色辐出度 $M_{\lambda 0}(T)$ 按波长 λ 分布的实验曲线和理论分析,得到关于黑体辐射的两个基本定律:

(1) 斯特藩-玻尔兹曼定律:黑体的辐射出射度 $M_0(T)$ 与黑体温度 T 的四次方成正比,即

$$M_0(T) = \int_0^\infty M_{\lambda 0}(T) d\lambda = \sigma T^4.$$

(2) 维恩位移律:随着黑体温度的升高,其单色辐出度最大值所对应的波长 λ_m 按照 T^{-1} 的规律向短波方向移动,即

$$\lambda_m T = b.$$

3. 普朗克辐射公式和能量子的概念

(1) 根据经典理论导出的公式与黑体辐射的实验结果明显不符,其中瑞利-金斯公式在短波区与实验不符,维恩公式在长波区与实验不符。

(2) 普朗克从他的能量子的概念出发得到了与实验结果相符的黑体辐射公式

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left(\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \right).$$

对于能量量子化的概念可以从下面两个方面理解:

a) 电磁辐射的能量是由一份一份组成的, 每一份的能量是

$$\epsilon = h\nu,$$

其中 ν 是电磁波的频率。

b) 电磁辐射源的能量是量子化的, 这种量子化的能量由离散的能级表示。发射(或吸收)电磁波, 对应于辐射源从一个能级跃迁到另一个能级。

下面我们还将对这些概念作进一步讨论。

二、光电效应 (§ 15-2)

1. 光电效应的实验规律

(1) 单位时间内逸出金属表面的光电子数, 与入射光强成正比。

(2) 光电子的初动能随入射光的频率上升而线性增大, 与入射光强无关。

(3) 如果入射光的频率低于该金属的红限, 则无论入射光强多大, 都不会使这种金属产生光电效应。

(4) 只要入射光的频率大于该金属的红限, 当光照射到这种金属的表面时, 几乎立即产生光电子, 而无论光强多小。

2. 经典理论遇到的困难

从波动论看, 作为电磁波的光波投射到金属表面上, 引起金属中自由电子的受迫振动, 当自由电子从入射光波中吸收到足够的能量后, 就可以克服金属表面的约束而逸出, 成为光电子, 用这个观点解释光电效应的实验规律, 所遇到的主要困难有以下几点。

(1) 光电子初动能问题: 从上述观点看, 光电子初动能应正比于入射光的强度, 光强度又正比于光波振幅的平方, 所以光电子的初动能应正比于入射光的振幅的平方。而实际上光电子的初动能正比于入射光的频率 ν , 与入射光的强度无关, 与入射光的振幅无关。

(2) 光电效应的红限问题: 按照波动论, 光强度正比于光波振幅的平方, 如果入射光的频率较低, 总可以用增大振幅的方法, 使入射光达到足够的强度, 使自由电子获得足够的能量而逸出金属表面。所以, 按波动论的观点, 光电效应不应该存在红限 ν_0 。而实际上每一种金属都存在确定的红限值, 当入射光的频率低于该金属的红限时, 无论光强多大, 都无电子逸出。

(3) 发生光电效应的时间问题: 根据波动论的解释, 自由电子从入射光波中获得能量需要一个积累的过程, 特别是当入射光强度较弱时, 更需要较长的时间积累能量。而实际上光电子出现的时间均小于 10^{-9} s, 且与入射光的强弱无关。

3. 爱因斯坦的光子论及其对光电效应的解释

(1) 爱因斯坦认为, 光是一粒一粒以光速 c 运动的粒子流, 这种粒子称为光

子;每个光子的能量由光的频率决定,对于频率为 ν 的光子,其能量为

$$\epsilon = h\nu.$$

而且也应具有质量 m_γ 和动量 $m_\gamma c$ 。根据相对论关系,光子的质量可表示为

$$m_\gamma = \frac{m_{\gamma 0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

因为光子的运动速度 $v = c$,而其质量 m_γ 应该是有限值,所以,光子的静质量 $m_{\gamma 0}$ 必定等于零。根据相对论的质能关系,静质量为 m_0 的物体的总能量应该等于其动能 ϵ_k 与静能 $m_0 c^2$ 之和,即

$$mc^2 = \epsilon_k + m_0 c^2,$$

式中 m 为物体的质量。对于光子, $m = m_\gamma$, $m_0 = m_{\gamma 0} = 0$,所以上式成为

$$m_\gamma c^2 = \epsilon_k,$$

光子的动能就是它的总能量,故有

$$m_\gamma c^2 = h\nu.$$

由此可以得到光子的质量为

$$m_\gamma = \frac{h\nu}{c^2}.$$

光子的动量应表示为

$$p = m_\gamma c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

爱因斯坦的光子论是继普朗克能量量子假说之后量子理论的又一重大发展,它的提出确立了光的波粒二象性,人们对物质的波粒二象性的认识,从此便开始了。

(2) 按照光子论,一束光的能量决定于以下两点,即每个光子的能量和光束中所包含光子的数目。每个光子的能量决定于光的频率,光子的数目则表征了光的强度。光电子的出现和光电子的初动能只决定于每个人射光子的能量,而出现光电子的多少则决定于人射光子的数目,即入射光的强度。

(3) 光电效应的爱因斯坦方程

$$h\nu = \frac{1}{2} mu^2 + A.$$

它是将能量守恒定律应用于光子论所得到的必然结果,金属中的自由电子吸收了光子的能量 $h\nu$,一部分用于克服金属表面的逸出功 A ,另一部分转变为光电子的初动能。这里没有考虑自由电子在逸出金属表面的过程中,与晶格粒子或其他自由电子碰撞而引起的能量传递。所以,式中 $mu^2/2$ 是光电子初动能的最大值。

(4) 如果将爱因斯坦方程

$$\frac{1}{2}mu^2 = h\nu - A$$

与光电效应的实验规律

$$\frac{1}{2}mu^2 = eK\nu - eV_0$$

相比较,可以得到

$$K = \frac{h}{e}, V_0 = \frac{A}{e}.$$

这些结论都与实验相符合。同时,从爱因斯坦方程中还给出了金属红限的表达式

$$\nu_0 = \frac{V_0}{K} = \frac{A}{h}.$$

这表示,金属的红限等于该金属的逸出功除以普朗克常量。

三、康普顿效应 (§ 15-3)

1. 康普顿效应及其观测

(1) 短波射线(如 X 射线、 γ 射线)经物质散射后,在散射线中除有与入射线同波长的成分外,还有比入射线波长更长的射线产生出来。这就是康普顿效应。波动论对这个效应同样无法解释,而再次陷入困难的境地。

(2) 康普顿效应的核心之点就是在散射波中存在波长变长的部分。但从波动论看,入射波的散射是物质中的带电粒子在入射波的作用下发生受迫振动,而向四周发出的辐射。我们知道,稳定的受迫振动与驱动力同频率,所以散射波一定与入射波同频率,不可能发生波长变长的现象。

2. 光子论对康普顿效应的解释

(1) 从光子论看,入射光是能量为 $h\nu$ 的光子流,进入物质内的光子将与物质粒子发生弹性碰撞,碰撞过程遵从能量守恒定律和动量守恒定律。光子与点阵离子和自由电子的弹性碰撞,将分别得到波长不变和波长变长的散射波成分,从而圆满地解释了康普顿效应。

(2) 认为碰撞前自由电子是静止的,其总能量等于静能 m_0c^2 ,碰撞后其总能量变为 mc^2 ;碰撞前光子的动量为 $h\nu_0/c$,碰撞后变为 $h\nu/c$ 。这些能量和动量的表示都是从相对论关系中得到的。由于运用了这些关系,康普顿效应才得到圆满解释,所以说,康普顿效应是一种相对论效应。

(3) 在 § 12-9 我们曾经讨论过光压,就是光照射到物体上时,会产生对物体的压力。并且也曾指出,在微观世界里,光压表现为光子与其他微观粒子碰撞时的撞击力,这种撞击力是由于光子动量的改变所产生的。既然光子的动量由

于碰撞而改变了,根据式(15-18),光子的波长自然要发生变化,这就是康普顿效应。所以,康普顿效应与前面所讨论的光压实际上是同一种物理现象。

3. 光的波粒二象性

(1) 光的干涉、衍射和偏振等现象,使人们确认光具有波动性;而黑体辐射、光电效应和康普顿效应以及其他一些现象,又使人们相信光具有粒子性。可见,波动性和粒子性同样都是光的本性的表露,不应以一种性质去否定另一种性质的存在。

(2) 这种两重性之间的联系表现在能量与频率的关系

$$\epsilon = h\nu,$$

以及动量与波长的关系

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

(3) 粒子和波,都是人们在经典观念中对物质世界的一种认识。光既是粒子,也是波,即光的波、粒两重性,这在人们的经典观念中是不容易接受的。于是人们想到用统计的观点把这两者统一起来:光是由具有一定能量、动量和质量的微观粒子组成的,在它们运动的过程中,在空间某处发现它们的概率却遵从波动的规律。关于这一点,下面我们还将进一步讨论。

四、氢原子光谱和玻尔的量子论(§15-4)

1. 原子的核型结构模型及其与经典理论的矛盾

(1) α 粒子是氦原子核,是由放射性物质发射出来的带正电的微观粒子, α 粒子的散射实验表示了 α 粒子与原子的相互作用,可以为原子的结构提供有用的信息:

a) 绝大多数 α 粒子几乎按原方向出射,偏转角只有 $2^\circ \sim 3^\circ$ 。这表示原子内部是空旷的, α 粒子从这个空间穿越,几乎不受到原子中电荷的作用;

b) 个别 α 粒子发生了大角度散射,甚至被反弹的现象表明,原子中心存在一个很小的坚实体,它集中了原子的几乎全部质量,并且带有正电荷,这个坚实体就是原子核。同时可以推断,既然原子核带正电,那么原子中等量的负电荷一定分布在原子核周围的空旷空间里。

(2) 根据 α 粒子散射实验,可以得到原子的核型结构模型假设;反之,根据原子的核型结构模型假设,又可以从理论上计算出散射 α 粒子数随散射角的分布规律,并且由计算所得的规律与实验观测的结果的一致性,进一步证实了原子的核型模型假设的正确性。

(3) 原子的核型结构模型与经典概念是不相容的,表现在下面两点:

a) 按照经典理论,电子绕原子核旋转必定要辐射电磁波,并且所发射的电

磁波是连续谱。实际上,通常情况下的原子并不辐射电磁波,只有从外界吸收了能量之后,才可能发射电磁波,并且发射的电磁波频谱是分立谱,不是连续谱;

b) 随着系统自身能量的不断减少,电子绕核运动的轨道半径将随之减小,最后电子必定落在原子核上,可见,按照经典理论,原子的核型结构不是稳定结构。实际上,正常情况下的原子是十分稳定的。

所以,原子的核型结构模型的建立,是向旧观念的又一次挑战,是人类认识上的又一次飞跃。

(4) 核外电子沿一定轨道绕核运行的概念,是玻尔建立起来的。但是随着认识的不断深入,人们发现,核外电子的运动状态不能用轨道来表示,而只能用波函数来描述,这种波函数代表了电子在核外空间某处出现的概率。所以,人们常用另一个概念来形象地表示核外电子的分布,这就是“电子云”。“云层”浓密的地方,表示电子在该处出现的概率大;“云层”稀疏的地方,表示电子在该处出现的概率小。无论轨道,还是电子云,都是人们对核外电子状态的形象描述。

2. 氢原子光谱的规律性

(1) 组合原理是氢原子光谱规律性的反映,这个原理可以表示为:把对应于任意两个整数的光谱项组合起来,组成它们的差,就得到氢原子光谱中一条谱线的波数。学习时应注意以下两点。

a) 组合原理不仅是氢原子光谱规律性的反映,其他原子光谱也具有类似的规律,只是对于不同的原子,光谱项的具体形式不同而已;

b) 组合原理揭示了原子能量变化的不连续性。光谱线的波数遵从组合原理,说明原子只能发出某些特定频率的光子。进而推断,原子发光时能量变化不是任意的,只能变化到某些特定的能量状态。

(2) 由组合原理可以得到光谱项的物理意义:因为任意一条谱线波数中包含了两个光谱项,它们分别与原子放出光子前、后的两个状态的能量相对应,所以光谱项实际上代表了原子所处状态的能量。

3. 玻尔的量子论

(1) 玻尔理论包含关于原子的核型结构模型的以下三个基本假设:

a) 原子存在一系列不连续的稳定状态,即定态,处于这些定态中的电子虽作相应的轨道运动,但不辐射能量;

b) 作定态轨道运动的电子的角动量 L 的数值只能等于 $\hbar (= h/2\pi)$ 的整数倍,这称为角动量量子化条件;

c) 当原子中的电子从某一轨道跳跃到另一轨道时,就对应于原子从某一定态跃迁到另一定态,这时才辐射或吸收一相应的光子,光子的能量由下式决定:

$$h\nu = E_A - E_B.$$

式中 E_A 和 E_B 分别是初态和末态的能量, $E_A < E_B$ 表示吸收光子, $E_A > E_B$ 表示辐

射光子。

(2) 学习这部分内容时,应紧紧抓住上述三个基本假设。

a) 从第一个假设出发,考虑到原子核对电子的库仑力提供了向心力,电子沿特定轨道围绕原子核作圆周运动,就对应于原子的一个稳定状态。当电子沿另一特定轨道运动时,就对应于原子的另一个稳定状态。电子就是处于这样一系列特定的轨道上运动,对应于原子的一系列不连续的稳定状态。原子处于这些稳定状态中的任意一个状态中,电子虽然在某个确定的轨道上作圆周运动,但不辐射能量。

b) 考虑到第二个基本假设,既然电子的角动量是量子化的,那么电子的轨道半径、运动速度和原子的总能量等都必定也是量子化的。其中下面两个量子化公式显得更为重要些:

电子轨道半径的量子化公式

$$r_n = \frac{\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{\pi m_e e^2} = a_0 n^2 = 5.29 \times 10^{-11} n^2 \text{ m};$$

氢原子能量的量子化公式

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{E_1}{n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}.$$

这种量子化的能量被称为能级,其中 E_1 是氢原子的基态能量。

c) 有了能级的概念后,根据第三个基本假设,就得到了氢原子的各个线系的光谱。

(3) 玻尔的量子论揭示了原子等微观客体的两个带有普遍意义的规律,它们是:

a) 原子等微观客体所处状态及其能量的量子化概念;

b) 原子等微观客体在能量为 E_A 和 E_B 的两个定态之间跃迁时发射或吸收辐射的频率为

$$\nu = \frac{|E_A - E_B|}{h}.$$

这就是辐射的频率法则。

五、微观粒子的波动性(§ 15-5)

1. 德布罗意波及其实验观测

(1) 德布罗意根据光子具有波粒二象性提出:

a) 兼有波和粒子两方面性质,是光子和一切实物粒子的共同本性;

b) 一个能量为 E 、动量为 p 的粒子,也可以用频率 ν 和波长 λ 描述它,这两者之间的关系为

$$E = h\nu, p = \frac{h}{\lambda}.$$

(2) 根据德布罗意关系,与实物粒子相对应的波,称为德布罗意波,那么德布罗意波究竟是一种什么波呢?

德布罗意波不同于机械波和电磁波,它并不表示某种振动的传播,或某种形式能量的传播,而是代表了粒子在空间存在的概率的分布,这种概率分布遵从波动的规律,所以德布罗意波又称为概率波。可见,微观粒子的运动应该使用统计方法来描述。

(3) 戴维孙-革末实验证明了电子具有波动性,以后的各种实验分别证明了中子、质子、 α 粒子、原子和分子等也都具有波动性。

2. 不确定关系

(1) 如果粒子所处坐标的不确定范围为 Δx ,那么粒子此时的动量也必定存在不确定量 Δp_x ,并且它们之间存在下面的关系:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

这就是海森伯不确定关系。

(2) 不确定关系存在的根本原因,是微观粒子具有波粒二象性;不确定关系的存在是微观粒子的运动遵从统计规律性的必然结果。

对于微观粒子具有粒子性,理解起来不会有困难,困难却在于如何理解粒子也具有波动性。关于微观粒子的波动性可以这样来理解:

a) 在粒子的运动过程中,我们只能给出在空间一定范围内发现它们的概率,而不能确定哪一个粒子一定在什么地方;

b) 粒子在空间的分布概率遵从波动的规律,这就是粒子波动性的统计解释。所以,粒子的运动应该用统计方法来描述。

既然粒子在空间的分布概率遵从波动的规律,那么不确定关系的存在就是必然的,正如教材中对单缝衍射所分析的那样。现在让我们定性地说明这个问题。

根据德布罗意假说,一个以一定速率作匀速运动的微观粒子,等效于波长为 λ 的单色平面波,而单色平面波对应的动量是确定的,并可表示为

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

但它却充满了整个空间。若要用波来代表一个粒子,那么这个波必须是分布范围尽量小的波列,最好小至如同它所代表的粒子的大小,以便在空间有一个确定的位置。但是,根据傅里叶分析,波列的分布范围越小,它所包含的单色平面波成分就越宽广。又由德布罗意关系可知,波长范围越宽广,所对应的动量数值范围也就越分散,也就是说动量越不确定。如果允许粒子所处位置的坐标范围不

必限制得太小,我们就可以用一个分布范围较大的波列去代表它,那么这个较大分布范围的波列所包含的波长成分相对少些,所对应的动量数值范围也就相对集中些,这就表示动量的准确程度相对高些。这样我们就定性地说明了准确的位置和准确的动量是互相矛盾的,同时准确限定是不可能的。

(3) 既然不确定关系存在的根源在于微观粒子具有波粒二象性,那么这种不确定性必定具有普遍意义,即不仅存在于坐标和动量之间,也应存在于能量和时间之间,以及其他动力学变量之间。

(4) 在讨论不确定关系时,一般总涉及“测量”、“测定”这样一些词,甚至在较早的时候,把“不确定关系”叫作“测不准关系”,这往往会给初学的读者造成一种错误的印象,即认为不确定关系的存在是由于测量引起的,或者是由于测量仪器的精度不够引起的,随着测量仪器精度的提高,原来测不准的关系会不断得到改善。

我们说,不确定关系的存在不是测量的问题,不是由于测量仪器不完善或实验技术不高明所引起,而是原理性的问题。不确定关系是量子力学的一个基本关系,它的存在是由微观粒子的本质所决定的,并且可以从量子力学的基本假设中推导出来。

(5) 不确定关系是量子论中的一个重要基本关系,它向我们表示了在把经典物理学概念用于描述微观体系时所必须考虑的限度,这个限度的量值就是普朗克常量 h 。正是由于这个限度的存在,核外电子轨道的概念失去了意义[请参阅教材(下卷)例题 15-8]。但是从宏观意义上说,普朗克常量是一个很小的量 ($h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$),不确定的范围实际上小得完全可以忽略不计。

[例题分析]

例题 15-1 一个动能为 20.0 eV 的电子与处于基态的氢原子相碰撞,使氢原子激发。当氢原子回到基态时,辐射出波长为 121.6 nm 的光子,求碰撞后电子的速度。

解 具有动能为 $E_0 = 20.0 \text{ eV}$ 的电子与氢原子相碰撞,将动能的一部分交给了氢原子,而这部分能量以电磁辐射的形式被光子带走后,氢原子又回到了原来的状态。光子所带走的能量为 $\epsilon_\gamma = hc/\lambda$ 。根据能量守恒定律,碰撞后电子的动能应为

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = E_0 - \epsilon_\gamma = E_0 - \frac{hc}{\lambda}.$$

所以碰撞后电子的速度为

$$v = \left[\frac{2}{m_e} \left(E_0 - \frac{hc}{\lambda} \right) \right]^{1/2} = \left[\frac{2 \times 15.68 \times 10^{-19}}{9.109 \times 10^{-31}} \right]^{1/2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 1.86 \times 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

例题 15-2 利用不确定关系估算简谐振子的最低能量。

解 根据简谐振动的规律,可以把简谐振子的能量表示为其动能与势能之和,即

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} k x^2, \quad (1)$$

式中 μ 是振子的质量。将 $v^2 = \frac{p^2}{\mu}$ 和 $k = \mu \omega^2$ 代入上式,得

$$E = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\mu} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2. \quad (2)$$

我们假设简谐振子的位置的范围为从 0 到 x , 其动量的范围为 $0 \sim p$, 根据不确定关系,应有

$$xp \geq \frac{\hbar}{2},$$

由上式解出动量 p 并取其最小值,代入式(2),得

$$E = \frac{\hbar}{8\mu x^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 = \frac{\hbar}{8\mu \xi} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \xi,$$

其中 $\xi = x^2$ 。令

$$\frac{dE}{d\xi} = 0,$$

可从中求得简谐振子的能量极小值,得

$$E_{\min} = \frac{1}{2} \hbar \omega,$$

这就是简谐振子的最低能量。到下一章我们将利用量子力学的方法得到简谐振子的能量的一般表示式

$$E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

当 $n = 0$ 时,表示简谐振子处于基态,能量为最低,正是上面所得到的结果。

[习题解答]

15-1 在恒星演化过程中,当能源耗尽时,星体将在万有引力作用下发生坍缩,而成为密度极高的星体。同时,由于先前的核燃烧,这种星体的温度仍然很高,因而发出白光,故得名为白矮星。天狼星的一个伴星,是人们发现的第一颗白矮星,如果测得其最大单色辐出度所对应的波长为 $0.352 \mu\text{m}$,试根据维恩位移律估计它的表面温度。

解 根据维恩位移律

$$\lambda_m T = b,$$

可以计算这颗白矮星的表面温度,为

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{0.352 \times 10^{-6}} \text{ K} = 8.23 \times 10^3 \text{ K}.$$

15-2 三个大小相同并可看作为黑体的球体,测得其最大单色辐出度所对应的波长分别为 $0.300 \mu\text{m}$, $0.400 \mu\text{m}$ 和 $0.500 \mu\text{m}$,试求它们的温度以及它们在单位时间内向空间辐射的能量之比。

解 根据维恩位移律可以求得它们的温度,分别为

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{m1}} = 9.66 \times 10^3 \text{ K};$$

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_{m2}} = 7.25 \times 10^3 \text{ K};$$

$$T_3 = \frac{b}{\lambda_{m3}} = 5.80 \times 10^3 \text{ K}.$$

根据斯特藩-玻尔兹曼定律

$$M_0(T) = \sigma T^4$$

和上面已经得到的温度,就可以求出它们的辐出度 M_0 。辐出度是表示该黑体在单位时间内从其表面单位面积上辐射出的能量,因为三个球体大小相同,它们在单位时间内向空间辐射的能量之比,就等于它们的辐出度之比,即

$$E_1 : E_2 : E_3 = M_{01} : M_{02} : M_{03} = T_1^4 : T_2^4 : T_3^4 = 8.71 : 2.76 : 1.13.$$

15-3 试由普朗克公式在短波近似情况下导出维恩公式,在长波近似情况下导出瑞利-金斯公式。

解 黑体的单色辐出度可以用普朗克公式表示,即

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \quad (1)$$

在短波近似情况下,有

$$\lambda \ll \frac{hc}{kT},$$

所以,

$$e^{hc/\lambda kT} \gg 1.$$

这样就可以在普朗克公式中略去 1,而成为下面的形式

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda kT}. \quad (2)$$

令 $c_1 = 2\pi hc^2$, $c_2 = hc/k$,并代入上式,得

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-c_2/\lambda T}.$$

这正是维恩公式。

在长波近似情况下,有

$$\lambda \gg \frac{hc}{kT},$$

所以

$$e^{hc/\lambda kT} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT}.$$

于是,普朗克公式成为下面的形式:

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left(\frac{\lambda kT}{hc} \right) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}.$$

这正是瑞利-金斯公式。

15-5 试求波长为下列数值的光子的能量、动量和质量:

- (1) 波长为 $1.2 \times 10^3 \text{ nm}$ 的红外线;
- (2) 波长为 $6.2 \times 10^2 \text{ nm}$ 的可见光;
- (3) 波长为 $0.34 \times 10^2 \text{ nm}$ 的紫外线;
- (4) 波长为 $1.6 \times 10^{-2} \text{ nm}$ 的 X 射线;
- (5) 波长为 $1.1 \times 10^{-3} \text{ nm}$ 的 γ 射线。

解

(1) 对于波长为 $1.2 \times 10^3 \text{ nm}$ 的红外线, $\lambda = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}$;

能量为

$$\epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 1.7 \times 10^{-19} \text{ J};$$

动量为

$$p = \frac{\epsilon}{c} = 5.5 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1};$$

质量为

$$m = \frac{p}{c} = 1.8 \times 10^{-36} \text{ kg}.$$

(2) 对于波长为 $6.2 \times 10^2 \text{ nm}$ 的可见光, $\lambda = 6.2 \times 10^{-7} \text{ m}$;

能量为

$$\epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 3.2 \times 10^{-19} \text{ J};$$

动量为

$$p = \frac{\epsilon}{c} = 1.1 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1};$$

质量为

$$m = \frac{p}{c} = 3.6 \times 10^{-36} \text{ kg}.$$

(3) 对于波长为 $0.34 \times 10^2 \text{ nm}$ 的紫外线, $\lambda = 0.34 \times 10^{-7} \text{ m}$;

能量为

$$\epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 5.8 \times 10^{-18} \text{ J};$$

动量为

$$p = \frac{\epsilon}{c} = 1.9 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1};$$

质量为

$$m = \frac{p}{c} = 1.5 \times 10^{-34} \text{ kg}.$$

(4) 对于波长为 $1.6 \times 10^{-2} \text{ nm}$ 的 X 射线, $\lambda = 1.6 \times 10^{-11} \text{ m}$;

能量为

$$\epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 1.2 \times 10^{-14} \text{ J};$$

动量为

$$p = \frac{\epsilon}{c} = 4.1 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1};$$

质量为

$$m = \frac{p}{c} = 1.4 \times 10^{-31} \text{ kg}.$$

(5) 对于波长为 $1.1 \times 10^{-3} \text{ nm}$ 的 γ 射线, $\lambda = 1.1 \times 10^{-12} \text{ m}$;

能量为

$$\epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 1.8 \times 10^{-13} \text{ J};$$

动量为

$$p = \frac{\epsilon}{c} = 6.0 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1};$$

质量为

$$m = \frac{p}{c} = 2.0 \times 10^{-30} \text{ kg}.$$

15-6 已知金属钨的逸出功为 4.38 eV , 若用波长为 429 nm 的紫光照射其表面, 问能否产生光电子? 若在钨的表面涂敷一层铯, 其逸出功变为 2.61 eV , 结果又将如何? 若能产生光电子, 求光电子的最大初动能。

解 入射光子的能量为

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 2.998 \times 10^8}{4.29 \times 10^{-7}} \text{ J} = 4.63 \times 10^{-19} \text{ J};$$

金属钨的逸出功为

$$A = 4.38 \times 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} = 7.01 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

因为 $h\nu < A$, 所以不能产生光电子。

当在钨表面涂敷铯, 逸出功变为

$$A' = 2.61 \times 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} = 4.18 \times 10^{-19} \text{ J},$$

这时 $h\nu > A'$, 所以能够产生光电子。根据光电效应的爱因斯坦方程

$$h\nu = \frac{1}{2} mu^2 + A,$$

光电子的最大初动能为

$$\frac{1}{2} mu^2 = h\nu - A' = 4.5 \times 10^{-20} \text{ J}.$$

15-7 金属钾的红限为 $4.62 \times 10^{14} \text{ Hz}$, 若用波长为 436 nm 的光照射, 求光电子的最大初速度。

解 根据红限的定义,可以求得金属钾的逸出功

$$A = h\nu_0 = 6.626 \times 10^{-34} \times 4.62 \times 10^{14} \text{ J} = 3.06 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

光电子的最大初动能为

$$\frac{1}{2}mu^2 = h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A = (4.56 - 3.06) \times 10^{-19} \text{ J} = 1.50 \times 10^{-19} \text{ J},$$

光电子的最大初速度为

$$u = \sqrt{\frac{2 \times 1.50 \times 10^{-19}}{m}} = 5.74 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

15-8 金属钠的红限为 $4.39 \times 10^{14} \text{ Hz}$, 求:

(1) 金属钠的逸出功;

(2) 用波长为 500 nm 的光照射时的遏止电势差。

解

(1) 金属钠的逸出功为

$$A = h\nu_0 = 6.626 \times 10^{-34} \times 4.39 \times 10^{14} = 2.91 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

(2) 因为遏止电势差表征了光电子的最大初动能, 故有

$$eU_a = \frac{1}{2}mu^2,$$

将此关系代入光电效应的爱因斯坦方程, 得

$$h\nu = eU_a + A.$$

于是有

$$U_a = \frac{h\nu - A}{e} = \frac{\frac{hc}{\lambda} - A}{e} = 0.666 \text{ V}.$$

所以, 遏止电势差为 -0.666 V 。

15-10 在康普顿效应中, 入射 X 射线的波长是 $5.00 \times 10^{-2} \text{ nm}$, 求在散射角 $\varphi = 45^\circ$ 、 90° 和 180° 的方向上散射线的波长。

解 根据波长改变公式

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi),$$

散射线的波长可以表示为

$$\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi) + \lambda_0 = 2.426 (1 - \cos \varphi) \times 10^{-12} \text{ m} + 5.00 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

对于 $\varphi = 45^\circ$:

$$\lambda = (0.712 \times 10^{-12} + 5.00 \times 10^{-11}) \text{ m} = 5.07 \times 10^{-2} \text{ nm};$$

对于 $\varphi = 90^\circ$:

$$\lambda = (2.426 \times 10^{-12} + 5.00 \times 10^{-11}) \text{ m} = 5.24 \times 10^{-2} \text{ nm};$$

对于 $\varphi = 180^\circ$:

$$\lambda = (4.852 \times 10^{-12} + 5.00 \times 10^{-11}) \text{ m} = 5.49 \times 10^{-2} \text{ nm}.$$

15-11 波长为 $1.60 \times 10^{-10} \text{ m}$ 的 X 射线被某散射体所散射, 求在散射角为 60° 的方向上散射 X 射线的波长和引起这种散射的反冲电子所获得的动能。

解 在散射角为 60° 的方向上散射 X 射线的波长为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi) + \lambda_0 = 2.426 (1 - \cos \varphi) \times 10^{-12} \text{ m} + 1.60 \times 10^{-10} \text{ m} \\ &= 1.213 \times 10^{-12} \text{ m} + 1.60 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.61 \times 10^{-10} \text{ m}.\end{aligned}$$

反冲电子所获得的动能等于 X 光子损失的能量,即

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = h\nu_0 - h\nu = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)} = 9.34 \times 10^{-18} \text{ J} = 58.3 \text{ eV}.$$

15-12 波长为 $4.2 \times 10^{-3} \text{ nm}$ 的入射光子与散射物质中的自由电子发生碰撞,碰撞后电子的速度达到了 $1.5 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。求散射光子的波长和散射角。

解 先求波长的改变量 $\Delta\lambda$,再求散射光子的波长,最后求散射角。

求波长的改变量 $\Delta\lambda$:

反冲电子的质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 1.16 m_0;$$

反冲电子获得的动能 ΔE_k 为

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = (1.16 - 1) m_0 c^2 = 1.27 \times 10^{-14} \text{ J}.$$

反冲电子获得的动能就等于光子损失的能量,而光子损失的能量与波长的改变量 $\Delta\lambda$ 有如下关系:

$$E_k = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)},$$

由此可以求得波长的改变量 $\Delta\lambda$,得

$$\Delta\lambda = 1.54 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

由波长改变量即可求得散射光子的波长,为

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = (4.2 \times 10^{-12} + 1.54 \times 10^{-12}) \text{ m} = 5.7 \times 10^{-3} \text{ nm}.$$

由波长改变量可求得散射角

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi),$$

即

$$1.54 \times 10^{-12} \text{ m} = 2.43 \times 10^{-12} (1 - \cos \varphi) \text{ m},$$

从中求得

$$(1 - \cos \varphi) = 0.6337,$$

$$\varphi = 68.5^\circ.$$

15-16 计算氢原子光谱的莱曼系谱线和巴耳末系谱线的波长范围。

解

(1) 巴耳末系谱线的波长范围:

巴耳末系可以表示为

$$\bar{\nu} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, \dots$$

当 $n = 3$ 时,对应于长波限的波数:

$$\tilde{\nu}_L = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 0.1523 \times 10^7 \text{ m}^{-1},$$

$$\lambda_L = \frac{1}{\tilde{\nu}_L} = 656.5 \text{ nm};$$

当 $n = \infty$ 时, 对应于短波限的波数:

$$\tilde{\nu}_s = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = 0.2742 \times 10^7 \text{ m}^{-1},$$

$$\lambda_s = \frac{1}{\tilde{\nu}_s} = 364.7 \text{ nm}.$$

(2) 莱曼系谱线的波长范围:

莱曼系可以表示为

$$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), n = 2, 3, \dots$$

当 $n = 2$ 时, 对应于长波限的波数:

$$\tilde{\nu}_L = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 0.8226 \times 10^7 \text{ m}^{-1},$$

$$\lambda_L = \frac{1}{\tilde{\nu}_L} = 121.6 \text{ nm};$$

当 $n = \infty$ 时, 对应于短波限的波数:

$$\tilde{\nu}_s = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = 1.0968 \times 10^7 \text{ m}^{-1},$$

$$\lambda_s = \frac{1}{\tilde{\nu}_s} = 91.2 \text{ nm}.$$

15-17 在氢原子的紫外光谱中有一条波长为 121.57 nm 的谱线, 问这条谱线属于哪个线系? 它是原子在哪两个能级之间跃迁产生的?

解 波长为 121.57 nm 的谱线属于莱曼系, 是从能级 $n = 2$ 到能级 $n = 1$ 的跃迁产生的。

15-18 依照玻尔理论, 求出处于基态的氢原子的下列各量: 量子数、轨道半径、角动量和动量、电子所受的力、电子的角速度、速率、加速度、动能、势能以及总能量。

解

量子数:

$$n = 1;$$

轨道半径:

$$r_1 = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 5.28 \times 10^{-11} \text{ m};$$

角动量:

$$L = n \frac{h}{2\pi} = \hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1};$$

动量:

$$p = \frac{L}{r_1} = 1.99 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1};$$

速率:

$$v = \frac{p}{m_e} = 2.18 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

角速度:

$$\omega = \frac{v}{r_1} = 4.13 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1};$$

受力:

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 8.25 \times 10^{-8} \text{ N};$$

加速度:

$$a_n = \frac{v^2}{r_1} = 9.00 \times 10^{22} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2};$$

动能:

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J};$$

势能:

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = -2E_k = -4.36 \times 10^{-18} \text{ J};$$

总能量:

$$E = E_k + E_p = -2.18 \times 10^{-18} \text{ J}.$$

15-19 计算 $n=8$ 的氢原子的直径和电子的运动速率。

解 将 $n=8$ 代入氢原子半径的表达式,得

$$r_n = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = n^2 r_1 = 3.38 \times 10^{-9} \text{ m},$$

原子的直径为

$$d_n = 2r_n = 6.76 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

动量为

$$p_n = m_e v_n = n \frac{h}{2\pi r_n},$$

将氢原子半径的表达式代入上式,得

$$m_e v_n = \frac{m_e e^2}{2n\epsilon_0 h},$$

所以

$$v_n = \frac{e^2}{2n\epsilon_0 h} = 2.73 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

15-20 若氢原子处于激发态的平均时间为 $1.0 \times 10^{-8} \text{ s}$,问氢原子中电子在 $n=2$ 的轨道上运行多少圈才跃迁到基态并辐射光子?

解 由以下两式

$$p_n = m_e v_n = n \frac{h}{2\pi r_n},$$

$$r_n = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2},$$

可以求得电子的运动速率

$$v_n = \frac{e^2}{2n\epsilon_0 h}$$

当原子处于 $n=2$ 时, 电子的运动速率为

$$v_n = \frac{e^2}{2n\epsilon_0 h} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 h} = 1.09 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

电子在此轨道上运行一周所用的时间为

$$\Delta t = \frac{2\pi r_2}{v_2} = \frac{2\pi \times 2^2 r_1}{v_2} = 1.22 \times 10^{-15} \text{ s}$$

电子在 $n=2$ 激发态运行的平均周数为

$$\frac{\tau}{\Delta t} = 8.2 \times 10^6$$

15-21 求处于以下两种状态的氢原子的电离能(以 eV 为单位):

- (1) 基态;
- (2) $n=6$ 的激发态。

解

(1) 基态的电离能, 就是将电子从基态($n=1$)激发到完全自由态($n=\infty$)所需要的能量, 可如下求得

$$\Delta E = E_\infty - E_1 = 0 - \left(-\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \right) = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 1^2} = 2.17 \times 10^{-18} \text{ J} = 13.6 \text{ eV}$$

(2) $n=6$ 的激发态的电离能

$$\Delta E = E_\infty - E_6 = 0 - \left(-\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \right) = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 6^2} = 6.02 \times 10^{-20} \text{ J} = 0.378 \text{ eV}$$

15-22 一个具有 5.6 eV 动能的中子, 与一个处于基态的静止氢原子相碰撞, 问这种碰撞是弹性碰撞, 还是非弹性碰撞?

解 当具有一定动能的中子与处于基态的静止氢原子相碰撞时, 如果中子的动能的大小正好等于氢原子从基态跃迁到某一激发态所需要的能量, 碰撞后该中子的动能就全部被氢原子吸收, 而使氢原子从基态跃迁到激发态, 中子和氢原子的动能都等于零。这样的碰撞是完全非弹性的, 否则碰撞就是弹性的。

氢原子从基态跃迁到最低的激发态($n=2$)所需要的能量是

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 1^2} - \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 2^2} = 12.8 \text{ eV}$$

因为中子的动能 $5.6 \text{ eV} < 12.8 \text{ eV}$, 所以, 碰撞不足以使氢原子从基态跃迁到激发态, 碰撞是完全弹性的。

15-23 求在温度为 3.0 K 的液氮中冷冻着的中子的德布罗意波长。

解 将冷冻中子系统看成理想气体系统, 该系统处于平衡态时, 中子的平均动能为

$$\epsilon_k = \frac{3}{2} kT = 6.2 \times 10^{-23} \text{ J}$$

中子的动量为

$$p = \sqrt{2m_0 \epsilon_k} = 4.6 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

于是,可求得中子的波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = 1.5 \times 10^{-9} \text{ m} = 1.5 \text{ nm}.$$

15-24 分别计算动能为 0.10 MeV 和 1.0 GeV 的电子的德布罗意波长。

解 设电子的静质量为 m_0 , 根据相对论关系

$$\epsilon_k = mc^2 - m_0 c^2$$

和

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

可以解得

$$u = \frac{c \sqrt{\epsilon_k^2 + 2\epsilon_k m_0 c^2}}{\epsilon_k + m_0 c^2}$$

和

$$m = \frac{\epsilon_k + m_0 c^2}{c^2}.$$

于是可以求得电子的波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu} = \frac{ch}{\sqrt{\epsilon_k^2 + 2\epsilon_k m_0 c^2}}. \quad (1)$$

对于动能为 $\epsilon_k = 0.1 \text{ MeV} = 1.60 \times 10^{-14} \text{ J}$ 的电子, 将动能和其他有关量代入式(1), 可求得德布罗意波长, 为

$$\lambda = 3.7 \times 10^{-12} \text{ m} = 3.7 \times 10^{-3} \text{ nm}.$$

对于动能为 $\epsilon_k = 1.0 \text{ GeV} = 1.60 \times 10^{-10} \text{ J}$ 的电子, 由于 $\epsilon_k \gg m_0 c^2$, 式(1)可以简化为

$$\lambda = \frac{ch}{\epsilon_k}. \quad (2)$$

所以, 其德布罗意波长为

$$\lambda = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.2 \times 10^{-6} \text{ nm}.$$

15-25 如果电子和光子的波长都是 0.20 nm, 那么它们的动量和能量各为多大?

解

(1) 动量: 由公式

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

可以看到, 无论什么粒子, 只要波长相等, 其动量的大小就相同。所以电子和光子的动量都为

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3.3 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

(2) 能量:

对于光子, 与波长 λ 相对应的能量是其总能量, 因为它没有静能。

$$\epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 9.9 \times 10^{-16} \text{ J};$$

对于电子, 与波长 λ 相对应的能量是其动能。

$$\epsilon_k = \frac{p^2}{2m_0} = 6.0 \times 10^{-18} \text{ J} = 37 \text{ eV}.$$

15-26 电子运动速率为 $300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 其测量准确度为 0.01% , 若要确定这个电子的位置, 求位置的最小不确定量。

解 根据

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar,$$

电子位置的最小不确定量为

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{m \Delta v} = 2.42 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

15-27 若电子和质量为 10.0 g 的子弹都以 $300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率运动, 并且速率的测量准确度都为 0.01% , 试比较它们的位置的最小不确定量。

解 上面已经求得了电子位置的最小不确定量为 $2.42 \times 10^{-2} \text{ m}$;
子弹位置的最小不确定量为

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{m \Delta v} = 2.21 \times 10^{-30} \text{ m}.$$

两者相比可见, 由于子弹的质量比电子大得多, 所以子弹的位置完全可以准确测定。

第十六章 量子力学基础

[基本要求]

1. 确切理解微观粒子的波动性、波函数的统计意义和在这种意义下波函数应该具有的性质,熟记常用力学量的算符表示,掌握定态薛定谔方程的形式,以及力学量平均值的计算方法;

2. 熟练掌握一维无限深方势阱问题的计算方法和相应结论,理解隧道效应及其应用例证,掌握处理一维谐振子问题的基本思路、定态薛定谔方程和能量本征值的表达式;

3. 了解量子力学对氢原子问题处理的基本方法、知道方位角波函数、极角波函数和径向波函数所满足的方程式和波函数的基本形式,掌握描述氢原子量子态的三个量子数(n, l 和 m)的涵义和能级公式,掌握核外电子概率的径向分布函数和角度分布函数形式及意义。

[概念阐释]

一、波函数及其统计诠释 (§ 16-1)

1. 波函数表示粒子的运动状态

(1) 波函数这个概念我们并不陌生,在讨论机械波时就已经使用了。例如,单色平面简谐波波函数

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx),$$

表示在 t 时刻、在空间 x 处的弹性介质质点的振动状态。简言之,就是“波函数表示介质质点的运动状态”。

(2) 我们可以将上述概念用于微观粒子,就是波函数 $\psi(r, t)$ 表示微观粒子的运动状态。不过在微观世界里,粒子的运动状态称为量子态,而波函数所反映的微观粒子波动性,就是德布罗意波。

2. 波函数所反映的波动性

(1) 上述单色平面简谐波波函数表示物理量位移的波动;波函数

$$E(r, t) = E_0 \cos(k \cdot r - \omega t)$$

和

$$B(r, t) = B_0 \cos(k \cdot r - \omega t),$$

分别表示物理量电场强度和磁场强度的波动。

读者一定会问,描述微观粒子的波函数 $\psi(r, t)$ 是否也表示某物理量的波动? 回答是:描述微观粒子的波函数 $\psi(r, t)$ 并不表示某物理量的波动,这是描述微观粒子的波函数 $\psi(r, t)$ 与上述其它波函数最重要的区别之一。

(2) 表示微观粒子状态的波函数 $\psi(r, t)$ 并不是指某个实在物理量在空间的波动,而是指用波函数的模的平方 $|\psi(r, t)|^2$ 表示在空间某处粒子被发现的概率密度,这种概率在空间的分布,遵从波动的规律,故把由波函数 $\psi(r, t)$ 所表示的波动称为概率波。

例如,在电子衍射实验中,接收屏上将出现衍射图样: $|\psi(r, t)|^2$ 大的地方,表示到达这里的电子数量多,波的强度大,对应于亮条纹; $|\psi(r, t)|^2$ 小的地方,表示到达这里的电子数量少,波的强度小,对应于暗条纹。

既然 $|\psi(r, t)|^2$ 与概率波的强度相对应, $\psi(r, t)$ 就与概率波的“振幅”相对应,故把波函数 $\psi(r, t)$ 称为概率幅。

(3) 描述微观粒子的波函数本身是没有直接物理意义的,具有直接物理意义的是波函数的模的平方,它代表了粒子出现的概率密度。如果某微观粒子的概率波的波函数是 $\psi(r, t) = \psi(x, y, z, t)$, 那么在 t 时刻、在空间 (x, y, z) 附近的体积元 $dx dy dz$ 内粒子出现的概率正比于

$$|\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz;$$

在 t 时刻、在空间 (x, y, z) 附近单位体积内粒子出现的概率,称为概率密度,表示为

$$\rho(x, y, z, t) = \psi^*(x, y, z, t) \psi(x, y, z, t) = |\psi(x, y, z, t)|^2.$$

3. 波函数的性质

(1) 波函数既然与粒子在空间出现的概率相联系,所以它必定是单值的、连续的和有限的。

(2) 波函数满足归一化条件:

$$\int_V \psi^*(x, y, z, t) \psi(x, y, z, t) d\tau = 1.$$

求归一化波函数可以用下面的方法:

如果所给波函数为 ψ , 并且有

$$\int_V \psi^* \psi d\tau = C^2,$$

那么归一化波函数的形式应为 ψ/C 。

(3) 波函数允许包含一个任意的常数因子:波函数 $\psi(r, t)$ 和 $A\psi(r, t)$ (A 是常数)描述同一个量子态,或者说代表同一个概率波。

(4) 满足态叠加原理,即如果波函数 $\psi_1(r, t), \psi_2(r, t), \dots$ 都是描述系统的

可能的量子态,那么它们的线性叠加也是这个系统的一个可能的量子态。

(5) 以后我们将会看到,波函数必定是复数,这也就是上面所说的波函数本身是没有直接物理意义的原因。

对波函数的这种统计诠释,在物理学上曾引起过争论,直到今天这种争论也还没有停息。以玻尔和海森伯为首的哥本哈根学派所持的就是上述观点。

德布罗意本人和爱因斯坦、狄拉克等是反对上述观点的。他们认为,表现粒子波动性的不是纯粹的概率波,而是一种实在的波,波引导着粒子运动,也就是说,波动性和粒子性同样都是物理实在,共同构成了物理实体。他们不相信概率解释是对自然界所能做出的最好描述。由于对玻恩关于波函数的统计诠释的长时间的争论,使玻恩直至 1954 年才获得这项诺贝尔物理学奖。

但是尽管物理上的解释是如此的困难,而数学上的描述却是极其简单的,即用满足薛定谔方程的波函数来处理微观粒子的行为就够了。

二、薛定谔方程 (§ 16-2)

1. 含时薛定谔方程

(1) 含时薛定谔方程可以表示为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t).$$

(2) 关于这个方程式,应注意以下几点。

a) 薛定谔方程是量子力学中的基本方程式,是描述微观粒子的波函数普遍遵从的基本规律。通过求解薛定谔方程得到波函数和相关物理量,是量子力学的基本思想。

b) 薛定谔方程是量子力学中的一个基本假设,不能直接证明或推导,它的正确性应由实验来确认。

c) 既然薛定谔方程是量子力学中的基本方程式,由方程式的形式可以看出,这个方程式的解(即波函数)必定是复数,这也注定了波函数本身是不会有直接物理意义的。

d) 由于薛定谔方程是线性方程,这就保证了描述粒子的量子态的波函数满足态叠加原理。

e) 含时薛定谔方程是支配在外场中静质量不等于零的粒子的非相对论性运动的波动方程。至于说薛定谔方程是“非相对论性”的,这是因为在含时薛定谔方程中包含了粒子动能与动量的关系式

$$E_k = \frac{p^2}{2\mu},$$

这个关系只适用于粒子的运动速度远小于光速的非相对论情况。

2. 定态薛定谔方程

(1) 定态薛定谔方程可以表示为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (1)$$

一维形式是

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right] \psi(x) = E\psi(x). \quad (2)$$

或

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (3)$$

其中

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x),$$

是哈密顿算符。在定态薛定谔方程(1)、(2)或(3)中,等号左边是哈密顿算符作用于波函数,等号右边是实常量 E 乘以波函数, E 是能量值,不是算符。

(2) 定态薛定谔方程适用于粒子所处势场只是坐标的函数,而与时间无关的情况。求解这个方程所得到的波函数是定态波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 或 $\psi(x)$,由定态波函数所描述的粒子的各种状态,称为定态,与上一章在玻尔关于氢原子的量子理论中的定态具有相同的意义。

(3) 除了上面所说的波函数的一般性质以外,定态波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 还具有下面的两条主要性质:

- a) 由它描述的粒子所处量子态(定态)的能量不随时间变化;
- b) 粒子分布的概率密度不随时间变化,这可由下式清楚地看到:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r})e^{iEt/\hbar}\psi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar} = \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}).$$

3. 力学量的算符表示

(1) 用算符来表示力学量,是在经典物理学中不曾遇到的,这是量子力学原理的又一基本假设。至于某力学量的算符是什么形式,这要通过量子力学的理论结果与实验事实的比较来加以检验,从而决定是否被确认。

(2) 对于力学量表示为算符,还应注意两点:

- a) 在量子力学中,每一个力学量都与一个算符相对应;
- b) 某个算符作用于波函数,就是把一个波函数或一个量子态,变换成另一个波函数或另一个量子态。

(3) 读者可以记住一些常用的力学量的算符形式,这些算符是教材中的式(16-26) ~ 式(16-32),它们有些在列薛定谔方程时用到,有些在求相应力学量的平均值时用到。

4. 本征函数、本征值和平均值

(1) 本征值方程、本征函数和本征值:

a) 若将某个力学量的算符 \hat{A} 作用于波函数, 正好等于一个常量 A 乘以波函数, 即

$$\hat{A}\psi = A\psi.$$

这类方程, 就称为力学量 \hat{A} 的本征值方程, 简称本征方程。例如, 定态薛定谔方程

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

就是能量的本征方程。

b) 满足本征值方程的常量 A , 称为力学量 \hat{A} 的本征值。例如, 不是所有的能量值在要求的物理条件下都能满足定态薛定谔方程这一本征方程, 能满足定态薛定谔方程的能量值 E 就是哈密顿算符 \hat{H} 的本征值。

c) 满足本征方程的波函数, 称为力学量 \hat{A} 的与本征值 A 对应的本征函数 (或称本征态)。例如, 满足定态薛定谔方程这个本征方程的波函数 $\psi(\mathbf{r})$, 就称为哈密顿算符 \hat{H} 的本征函数。

(2) 在微观世界里, 要得出粒子在某势场中的运动状态, 就要求解薛定谔方程, 定态问题只需求解定态薛定谔方程就行了。所以, 在处理具体问题时, 只要知道粒子所处势场的具体形式和波函数所满足的边界条件, 就可以从求解本征方程的过程中, 得到本征函数和能量本征值的具体形式。这是量子力学的基本方法。

(3) 力学量 \hat{A} 的平均值可以表示为

$$\langle A \rangle = \bar{A} = \int \psi^*(\mathbf{r}) \hat{A} \psi(\mathbf{r}) d\tau.$$

这就是说, 要求力学量 \hat{A} 的平均值, 应先将力学量算符 \hat{A} 作用于波函数 $\psi(\mathbf{r})$, 然后将所得结果与波函数的复共轭 $\psi^*(\mathbf{r})$ 相乘, 最后对体积积分。

如果粒子所处状态 $\psi(\mathbf{r})$ 是某力学量的本征态, 那么在这个量子态该力学量具有确定值, 此确定值就是该本征态所对应的本征值。例如, 如果 $\psi_1(\mathbf{r})$ 是能量本征值 E_1 的本征函数, 根据上面所说, 力学量 E 的平均值为

$$\bar{E} = \int_V \psi_1^* \hat{H} \psi_1 d\tau = \int_V \psi_1^* E_1 \psi_1 d\tau = E_1 \int_V \psi_1^* \psi_1 d\tau = E_1.$$

可见, 算符的本征函数所描述的态, 就是算符所表示的力学量具有确定值的态, 并且该确定值就是这些本征函数所对应的本征值。

如果粒子所处的状态不是该力学量的本征态, 那么该力学量不具有确定值, 而具有一系列可能值, 这些可能值具有确定的概率分布, 由概率分布就可以计算其平均值。

5. 概率守恒和概率流密度矢量

(1) 概率守恒的微分形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_e,$$

与电流连续性方程的微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

完全相同,所以读者可以结合电流连续性方程去理解概率守恒的物理意义。

(2) 由概率守恒的表达式可以得到,当粒子在空间某处的概率减小时,在别处的概率必然增加,总概率保持不变,同时必然伴随着有概率的流动,即存在概率流。

(3) 概率守恒的结论是由薛定谔方程导出的,前面已经说过,薛定谔方程是粒子运动的非相对论性波动方程,而在非相对论情况下,实物粒子没有产生和湮灭现象,在随时间演化过程中粒子数应该保持不变,所以概率守恒的成立是必然的。

三、一维势阱和势垒问题 (§ 16-3)

1. 一维无限深方势阱

(1) 研究一维无限深势阱的意义可以从以下两点理解:

a) 量子力学的基本概念和原理在一维无限深势阱问题中以简明的形式直接表现出来,并且所用数学也十分简单。所以一维无限深势阱问题是初学读者理解和掌握量子力学基本概念、基本原理和基本方法的极好典型实例。

b) 一维无限深势阱是金属中自由电子所处势场的简化模型,是解释金属物理性质的基础。

(2) 求解一维无限深势阱问题的步骤和结果:

a) 根据势能形式与时间无关,确定一维无限深势阱是定态问题;

b) 写出哈密顿算符,列出薛定谔方程,得到

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0; \quad (1)$$

其中

$$k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}; \quad (2)$$

c) 解方程,得到

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha),$$

其中 k 、 A 和 α 都是常量(后两者是积分常数),应根据波函数的性质和边界条件加以确定。

根据 $\psi(0) = 0$, 确定 $\alpha = 0$ 或 $m\pi$, 为简化起见,取 $\alpha = 0$;

根据 $\psi(a) = 0$, 确定 $k = n\pi/a$, $n = 1, 2, 3, \dots$

根据归一化条件,确定 $A = \sqrt{2/a}$;

d) 由于必须满足边界条件,波函数的形式也受到了限制,以角标 n 表示这种限制,于是波函数写为

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-iE_n t/\hbar},$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots; 0 \leq x \leq a).$$

该波函数必定具有正交归一性;

e) 将 k 值代入式(2),可以求得能级公式

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2\mu a^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

由边界条件所确定的 k 被限定为某些特定值,致使能量只能取分立数值,而不能取任意数值,即能量的量子化。可见,能量量子化不是人为引入的,而是考虑了波函数所必须遵守的物理条件之后自然得出来的。

(3) 与经典物理结论的比较:

a) 关于零点能量:由能级公式可以得到处于一维无限深势阱的粒子的基态能量为

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu a^2},$$

这表明,量子系统的零点能量并不等于零。既然粒子处于基态时仍然具有一定的能量,就必定存在零点运动。这与经典物理学关于当系统的温度达到绝对零度时,一切运动都将停止,能量变为零的结论不一致。

零点能不等于零,从根本上说,是不确定关系这一量子力学基本原理所导致的必然结果。粒子被束缚在线度为 a 的范围之内,即坐标的不确定量为 $\Delta x = a$ 。根据不确定关系,动量的不确定量的最小值应为

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2a}.$$

这表示,粒子仍然存在运动,有运动就有能量,无限深势阱并不能把粒子束缚在总能量为零的状态之中。

b) 粒子在一维无限深势阱中的概率分布:从教材的图 16-2 中可以看出,在不同的能级上粒子出现的概率密度是不同的。

在基态($n=1$),粒子出现的概率在阱区中部为最大,而越接近阱壁概率越小,阱壁上概率为零;

在激发态($n>1$),粒子在阱区内出现的概率是起伏变化的,随着量子数 n 的增大,起伏变得越来越频繁。可以推断,当量子数 n 很大时,粒子在阱区内各处的概率趋于均匀。

这些结果都与经典物理学的结论不一致,经典物理学的结论是,粒子在阱区内各处出现的概率是相等的,与量子数很大时的情况相近。

2. 势垒穿透和隧道效应

(1) 粒子能够穿透比其动能高的势垒的现象,称为隧道效应。隧道效应是量子力学中特有的现象,并为大量实验所证实,但与经典概念不兼容。

(2) 实验表明,在隧道效应中粒子穿透势垒的概率与势垒的厚度有关(厚度越大穿透概率越小),与粒子的能量有关(能量越大穿透概率越大)。

(3) 关于扫描隧穿显微镜中的电子隧道效应,教材中作了明确叙述,这里仅就隧道二极管中的电子的隧道效应作简单介绍。在这种器件中,由于 p-n 结两边重掺杂,使 p-n 结出现类似于教材图 16-3 中所示的势垒。在正向电压不太高的情况下,流过这种 p-n 结的电流都是由于隧道效应而形成的,致使其伏安特性曲线表现出如图 16-1 所示的形状,其中在 $V_1 \sim V_2$ 段,就是所谓的负阻区,是隧道二极管用做低噪声放大器时的工作区间。

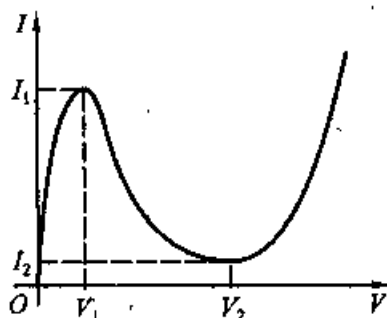


图 16-1

四、一维谐振子问题(§ 16-4)

1. 一维谐振子的定态薛定谔方程

(1) 一维谐振子常用于处理诸如原子、分子的振动、黑体辐射、晶格振动以及量子场论中的场量子化等多种物理问题。一般说来,在稳定平衡态附近作振动的任何粒子系统,都可以作为一维谐振子处理。所以,一维谐振子是一个重要的物理模型。

但是,与一维无限深势阱相比,一维谐振子在具体处理上涉及了较为复杂的数学问题,所以只要求读者根据教材的叙述对处理过程作定性了解。

(2) 一维谐振子的势能可以表示为

$$U(x) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2,$$

它与时间无关,是定态问题。哈密顿算符可以写为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2.$$

所以,一维谐振子的定态薛定谔方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 \right] \psi(x) = E \psi(x). \quad (1)$$

2. 一维谐振子的本征函数和能量本征值

(1) 求解一维谐振子的定态薛定谔方程,可以得到一维谐振子的本征函数和能量的本征值。它们分别是

$$\psi(x, t) = N_n(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2 / 2} H_n(\alpha x) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (2)$$

和

$$E = E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

上式表示,一维谐振子的能量只能取一系列分立值,并且相邻能级是等间距的,等于 $\hbar \omega$ 。

(2) 注意与经典观念不兼容的两个问题:

- a) 零点能量不为零;
- b) 不存在经典禁区。

五、氢原子 (§ 16-5)

本节包含了较多的数学方法问题。对此,首先我们的课程并不要求读者掌握这些数学方法,即使涉及了一些数学表述,也只要求读者从物理涵义上定性地理解它们。希望读者理解和掌握以下内容。

1. 有心力场中的薛定谔方程

(1) 电子处于由原子核所提供的有心力场中的势能为

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

它与时间无关,可以用定态薛定谔方程求解。哈密顿算符应表示为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + U(r).$$

(2) 定态薛定谔方程可以表示为

$$\hat{H}\psi = E\psi,$$

或

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} [E - U(r)] \psi = 0.$$

(3) 利用分离变量和球坐标形式,将波函数表示为方位角波函数 $\Phi(\varphi)$ 、极角波函数 $\Theta(\theta)$ 和径向波函数 $R(r)$ 三者的乘积,即

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi).$$

方位角波函数 $\Phi(\varphi)$ 所满足的方程是教材中的式(16-78),解的形式为

$$\Phi(\varphi) = A e^{im\varphi},$$

为保证波函数的单值性,要求 m 满足

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

极角波函数 $\Theta(\theta)$ 所满足的方程是教材中的式(16-77), 解的形式为

$$\Theta(\theta) \propto P_l^{|m|}(\cos \theta).$$

为保证极角波函数 $\Theta(\theta)$ 的有限性, 要求 λ 满足

$$\lambda = l(l+1), l = 0, 1, 2, \dots$$

并且 $|m| \leq l$, 即

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

将波函数的角度部分, 即方位角波函数和极角波函数合在一起就是球谐函数, 即

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

径向波函数 $R(r)$ 所满足的方程是教材中的式(16-76), 此方程式的解作为波函数, 还必须满足有限性和束缚态条件的限定, 于是就得到径向波函数

$$R_{nl}(r) = \frac{u_{nl}(r)}{r} = N_{nl} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l F\left(l+1-n, 2l+2, \frac{2r}{na}\right),$$

其中

$$n = 1, 2, 3, \dots; l = 0, 1, \dots, (n-1).$$

综上所述, 在求解氢原子波函数遵从的定态薛定谔方程的过程中, 引入了一些常量, 为使定态薛定谔方程的解满足波函数的单值性、有限性和束缚态等物理要求和限定, 这些常量不能取任意值, 而只能取某些特定值, 这就出现了一些物理量的量子化。所以, 在量子力学中, 量子化不是“条件”, 而是微观世界普遍现象和规律。

2. 角动量的本征值和相应的量子数

(1) 角量子数: 由于球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 是角动量平方的本征函数, 所以角动量的本征值为

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, l = 0, 1, \dots, (n-1).$$

l 就是角量子数, 表示电子相对于原子核的角动量的大小。

(2) 磁量子数: 由于球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 也是算符 \hat{L}_z^2 的本征函数, 所以, 算符 \hat{L}_z 的本征值为

$$L_z = m\hbar, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

m 就是磁量子数, 表示电子轨道角动量的 z 分量的大小。

3. 氢原子的能级

在使波函数满足有限性和束缚态条件限定的同时, 也得到了能量的如下表达式

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2}, n=1,2,3,\dots$$

这表明,氢原子的能量只能取一系列分立值,而不能取任意值。上式就是氢原子的能级公式,与由玻尔量子论所得到的结果[式(15-42)]完全相同。

4. 描述氢原子状态的量子数和能级的简并度

(1) 总结以上所述,氢原子的定态解应表示为

$$\psi(r, \theta, \varphi, t) = \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) e^{-iE_n t/\hbar} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-iE_n t/\hbar},$$

其中

$$\text{主量子数 } n=1,2,3,\dots$$

$$\text{角量子数 } l=0,1,2,\dots,n-1;$$

$$\text{磁量子数 } m=0,\pm 1,\pm 2,\dots,\pm l.$$

本征函数 ψ_{nlm} 表示,在量子数分别为 n, l 和 m 时,氢原子所处的量子态。

(2) 所谓能级的简并度,是指有多少个量子态对应于同一个能级的能量。由能级公式可以看到,本征能量 E_n 只决定于主量子数 n ,而与角量子数 l 和磁量子数 m 无关。对于任一主量子数 n ,能量本征值为 E_n ,对应的量子态有 n^2 个。所以说,能级 E_n 的简并度为 n^2 。

5. 类氢离子

所谓类氢离子,就是由电荷数 Z 大于 1 的原子核与一个核外电子所构成的原子体系,如 He^+ 、 Li^{++} 和 Be^{+++} 等。对于这样的原子体系,只要对电荷作一下调整,即用

$$q = \sqrt{Z}e$$

替代 e ,上面处理氢原子的方法都可以用于处理类氢离子。

六、氢原子中电子的概率分布 (§ 16-6)

处于定态 ψ_{nlm} ,核外电子在空间 (r, θ, φ) 处、在体元 $d\tau$ 内的概率为

$$\begin{aligned} \psi_{nlm}^* \psi_{nlm} d\tau &= |R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= [|R_{nl}(r)|^2 r^2 dr] [|Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega] \\ &= [w_{nl}(r) dr] [w_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega]. \end{aligned} \quad (1)$$

可见,这个概率等于两个中括号内的量的乘积,这两个中括号内的量分别表示电子概率的径向分布和角度分布。

1. 电子概率的径向分布

(1) 上式第一个中括号

$$w_{nl}(r) dr = |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr$$

表示在半径为 r 、厚度为 dr 的球壳内发现电子的概率。其中

$$w_{nl}(r) = |R_{nl}(r)|^2 r^2 = R_{nl}^2(r) r^2, \quad (2)$$

是电子出现在 r 处的概率密度, 就是电子概率的径向分布函数。

(2) 径向概率分布曲线的峰的个数(也称节点数)等于 $n - l$ 。对于

$$n - l = 1$$

的量子态, 电子分布的最概然半径与玻尔理论中电子的轨道半径相一致。由此可以看到量子力学与玻尔理论的差别, 在玻尔理论中, 电子只出现在球形轨道上, 而在量子力学中, 原子内相当于球形轨道处电子出现的概率最大, 其它地方也有发现电子的概率。

2. 电子概率的角度分布

(1) 式(1)第二个中括号

$$w_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

表示在以力心为顶点、在 $\theta \sim \theta + d\theta$ 和 $\varphi \sim \varphi + d\varphi$ 之间的立体角 $d\Omega$ 内发现电子的概率。其中

$$w_{lm}(\theta, \varphi) = |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2, \quad (3)$$

是电子出现在 (θ, φ) 处的概率密度, 就是电子概率的角度分布函数。

(2) 电子概率的角度分布函数 $w_{lm}(\theta, \varphi)$ 实际上与 φ 无关, 具有以 z 轴为旋转轴的旋转对称性。

[例题分析]

例题 16-1 已知一维无限深势阱的定态波函数为

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a},$$

试计算位置的平均值 \bar{x} 、动量的平均值 \bar{p} 和动能的平均值 \bar{E}_k 。

解 根据求力学量平均值的方法, 首先应将力学量表示为算符, 然后按下式求平均值:

$$\bar{A} = \int \psi^*(r) \hat{A} \psi(r) d\tau.$$

位置的平均值:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_0^a \psi^* x \psi dx = \frac{2}{a} \int_0^a x \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{1}{a} \int_0^a x \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a} \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=a} - \frac{1}{a} \frac{a}{2n\pi} \left[x \sin \frac{2n\pi x}{a} \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a \sin \frac{2n\pi x}{a} dx \right] = \frac{a}{2}; \end{aligned}$$

动量的平均值:

$$\bar{p} = \int_0^a \psi^* \hat{p} \psi dx = \int_0^a \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi dx = -\frac{i\hbar}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \Big|_{x=0}^{x=a} = 0;$$

为计算动能的平均值,先计算动量平方的平均值,这是因为动能与动量之间存在下面的关系:

$$E_k = \frac{1}{2\mu} p^2,$$

其中 μ 是粒子的质量。动量平方的平均值为

$$\begin{aligned} \overline{p^2} &= \int_0^a \psi^* \hat{p}^2 \psi dx = \int_0^a \psi^* \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi dx = \hbar^2 \frac{2}{a} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx \\ &= \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^3} \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a} \right) dx = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^2} - \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^2} \frac{a}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{a} \Big|_{x=0}^{x=a} \\ &= \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{a^2}. \end{aligned}$$

由此可以求得动能的平均值,为

$$\bar{E}_k = \frac{\overline{p^2}}{2\mu} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2\mu a^2}.$$

例题 16-2 已知一维谐振子的势能可以表示为 $\frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$, 那么

(1) 试证明波函数

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} (2\alpha^2 x^2 - 1)$$

是一维谐振子的定态波函数;

(2) 求此波函数所对应的量子数和能级。

解

(1) 要证明 $\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} (2\alpha^2 x^2 - 1)$ 是一维谐振子的定态波函数,就要验证此波函数是否满足一维谐振子的定态薛定谔方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 \right] \psi(x) = E \psi(x),$$

其中能量 E 必须是一维谐振子的本征能量。为此应先求出上述波函数的二阶导数,代入上式,求出能量 E ,并观察其形式是否与一维谐振子的本征能量形式相同,若相同,上述波函数就是一维谐振子的定态波函数。

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} (5\alpha^2 x - 2\alpha^4 x^3);$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} (5\alpha^2 x - 2\alpha^4 x^3)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} (2\alpha^6 x^4 - 11\alpha^4 x^2 + 5\alpha^2) \\
 &= \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} (2\alpha^2 x^2 - 1)(\alpha^4 x^2 - 5\alpha^2) \\
 &= \psi(x)(\alpha^4 x^2 - 5\alpha^2).
 \end{aligned}$$

将上式代入一维谐振子的定态薛定谔方程中,得

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 \psi(x) = E \psi(x),$$

即

$$(\alpha^4 x^2 - 5\alpha^2) \psi(x) - \alpha^4 x^2 \psi(x) + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \psi(x) = 0.$$

由上式求得

$$E = \frac{5}{2} \hbar \omega = \left(2 + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega.$$

可见 E 确实是一维谐振子的本征能量,所以题目所给波函数是一维谐振子的定态波函数。

(2) 一维谐振子的能级公式为

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega.$$

由上面所求得的本征能量表达式,可以得到

$$E = \frac{5}{2} \hbar \omega = \left(2 + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega,$$

以上两式项比较,显然 $n=2$ 。所以,题目所给波函数

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} (2\alpha^2 x^2 - 1),$$

对应于量子数 $n=2$ 的能级。

例题 16-3 我们已经知道,当氢原子的量子数满足 $n-l-1=0$ 时,量子态的电子概率的径向分布具有球对称性,试证明其最概然半径 r_n 与玻尔半径 a 之间存在 $r_n = n^2 a$ 的关系。已知当 $n-l-1=0$ 时,合流超几何多项式 $F=1$ 。

解 在量子数满足 $n-l-1=0$ 时,氢原子的径向波函数可以表示为

$$R_{nl}(r) = N_{nl} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na} \right)^l,$$

电子概率的径向分布函数为

$$w_{nl}(r) = R_{nl}^2(r) r^2 = N_{nl}^2 e^{-2r/na} \left(\frac{2r}{na} \right)^{2l} r^2 = N_{nl}^2 e^{-2r/na} \left(\frac{2}{na} \right)^{2n-2} r^{2n}.$$

最概然半径 r_n 应由下式决定:

$$\left. \frac{dw_n(r)}{dr} \right|_{r=r_n} = 0,$$

即

$$\frac{d}{dr} \left[N_n^2 e^{-2r/na} \left(\frac{2}{na} \right)^{2n-2} r^{2n} \right]_{r=r_n} = 0.$$

由上式解得

$$-\frac{2}{na} e^{-2r_n/na} r_n^{2n} + e^{-2r_n/na} 2nr_n^{2n-1} = 0,$$

化简后得

$$r_n = n^2 a, n = 1, 2, 3, \dots$$

这就是教材中公式(16-102)所表示的结果。

可以将上面所得的结果推广到类氢离子, 只要用

$$a' = \frac{a}{Z}$$

代替式中的 a , 即可得到

$$r_n = n^2 \frac{a}{Z}.$$

[习题解答]

16-3 如果粒子的波函数为 $\psi(x, y, z)$, 试求出在 $x \sim x+dx, y \sim y+dy, z \sim z+dz$ 范围内找到粒子的概率的表达式。

解 在题意所述范围内找到粒子的概率为

$$|\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz.$$

16-4 如果粒子的波函数为 $\psi(r, \theta, \varphi)$, 试求:

- (1) 在 $r \sim r+dr$ 的球壳内找到粒子的概率;
- (2) 在 (θ, φ) 方向上、在 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ 立体角内找到粒子的概率。

解

- (1) 在 r 到 $r+dr$ 的球壳内找到粒子的概率

$$\left[\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 d\varphi \right) \sin \theta d\theta \right] r^2 dr.$$

- (2) 在 (θ, φ) 方向上、在 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ 立体角内找到粒子的概率为

$$\int_0^\infty (|\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi) dr = \left[\int_0^\infty |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 dr \right] d\Omega.$$

16-5 试写出下面两种情况下粒子的定态薛定谔方程:

- (1) 自由粒子;
- (2) 在有心力场中运动的粒子。

解

(1) 自由粒子的动能为 $\frac{p^2}{2m}$, 写成算符为

$$-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

因为在这种情况下, 粒子的动能就是粒子的总能量 E , 所以定态薛定谔方程为

$$\hat{H}\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z),$$

即

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z),$$

或

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x, y, z) = 0.$$

(2) 当粒子在有心力场中运动时, 粒子的能量应为

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(r) = \frac{p^2}{2m} + \frac{A}{r},$$

式中 A 是与有心力场有关的常量, 对于斥力场, $A > 0$, 对于引力场, $A < 0$. 哈密顿量应写为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{A}{r}.$$

将上式代入定态哈密顿方程的一般形式

$$\hat{H}\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z)$$

中, 得

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{A}{r} \right) \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z),$$

整理得

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{A}{r} \right) \psi(x, y, z) = 0.$$

16-6 如果可以将氢原子看作无限深势阱, 电子就被幽禁在这样的势阱中。现已知氢原子的线度为 10^{-10} m , 试求电子处于基态和第一激发态的能量。

解 根据无限深势阱的能量表达式(16-49), 可以将电子的能级写为

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e a^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

将有关数据代入上式, 得

$$E_n = 37.6 n^2 \text{ eV}.$$

基态 $n = 1$

$$E_1 = 37.6 \text{ eV};$$

第一激发态 $n = 2$

$$E_2 = 150 \text{ eV}.$$

16-7 如果可以将氦核看作无限深势阱, 质子和中子就被幽禁在这样的势阱中。现已知氦核的线度为 10^{-14} m , 试求质子和中子处于基态的能量。解 将质子和中子的质量 ($m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $m_n = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$) 以及有关数据

代入无限深势阱的能量表达式(16-49),可以得到:

质子基态的能量为

$$E_1 = 2.05 \text{ MeV},$$

中子基态的能量为

$$E'_1 = 2.04 \text{ MeV}.$$

16-8 在宽度为 a 的一维无限深势阱中,当粒子分别处于状态 ψ_1 和 ψ_2 时,发现粒子的概率最大的位置在何处?

解 处于无限深势阱中粒子的本征波函数可以表示为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, n = 1, 2, 3, \dots$$

当粒子处于状态

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

时,发现粒子的概率密度为

$$|\psi_1(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a}.$$

对上式求极值

$$\frac{d}{dx} |\psi_1(x)|^2 = \frac{d}{dx} \left[\frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \right] = 0,$$

即

$$\sin \frac{2\pi x}{a} = 0, \quad (1)$$

由此解得

$$x = m \frac{a}{2}, \quad (2)$$

在势阱范围内,并使式(1)得到满足的 m 值只能是 0、1、2。因为当 m 为 0 和 2 时, $x=0$ 和 a , 波函数及其概率密度都等于零,对应于概率密度极小值。所以能满足概率密度极大值的只能是 $m=1$, 此时 $x=a/2$ 。

当粒子处于状态

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

时,发现粒子的概率密度为

$$|\psi_2(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a}.$$

对上式求极值

$$\frac{d}{dx} |\psi_2(x)|^2 = \frac{d}{dx} \left[\frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} \right] = 0,$$

即

$$\sin \frac{4\pi x}{a} = 0,$$

故得

$$x = m \frac{a}{4}.$$

在势阱范围内,符合概率密度极大值条件的 m 是 1 和 3,即

$$x = \frac{a}{4} \text{ 和 } x = \frac{3a}{4}.$$

16-10 求一维线性谐振子在第一激发态时概率最大的位置。

解 一维线性谐振子波函数的一般形式为

$$\psi_n(\xi) = A_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi),$$

式中 A_n 是常量,可用归一化条件确定,在此与我们的题目无关。变量 ξ 由下式表示:

$$\xi = \alpha x = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} x,$$

μ 是谐振子的质量。

在第一激发态, $n=1$, 波函数为

$$\psi_1(\xi) = 2A_1 \xi e^{-\xi^2/2}.$$

对概率密度取极值

$$\frac{d}{d\xi} |\psi_1(\xi)|^2 = \frac{d}{d\xi} |2A_1 \xi e^{-\xi^2/2}|^2 = 0.$$

得到符合极大值条件的解为

$$\xi = \pm 1,$$

即

$$x = \pm \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}.$$

16-11 试求处于基态的氢原子的平均半径,并与玻尔半径作比较。已知氢原子基态波函数为

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}.$$

解 在基态波函数中, a 就是玻尔半径 a_0 。半径 r 的平均值可以表示为

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty |\psi_{100}|^2 r^3 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \int_0^\infty \frac{4}{a^3} r^3 e^{-2r/a} dr \\ &= \frac{4}{a^3} \frac{6a^4}{16} = \frac{3}{2} a = \frac{3}{2} a_0. \end{aligned}$$

这表示,基态氢原子的平均半径 \bar{r} 等于玻尔半径的 $3/2$ 倍,这是由于电子概率的径向分布的极大值正好处于玻尔半径 a_0 处,并且在峰值两侧分布情况是不对称的,如教材中图 16-8 左上角第一幅图所表示的那样。

16-12 试证明处于基态的氢原子的平均势能等于其基态能量的 2 倍。

解 处于基态的氢原子的势能可以表示为

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

求其平均值

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty |\psi_{100}|^2 \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = - \int_0^\infty \left(\frac{e^2 r}{\pi\epsilon_0 a^3} \right) e^{-2r/a} dr \\ &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a_0} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m_e e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = -\frac{m_e e^4}{\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} = -2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} = 2E_1.\end{aligned}$$

其中

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2}$$

是氢原子基态能量。所以,基态的氢原子的平均势能等于其基态能量的 2 倍。

第十七章 电子的自旋和原子的壳层结构

[基本要求]

1. 能够用量子力学的概念论述核外电子存在轨道磁矩,并能用强磁场与轨道磁矩的相互作用解释正常塞曼效应;
2. 根据施特恩-格拉赫实验正确理解电子自旋的存在,以及电子自旋量子数和自旋磁量子数的取值;并能用电子自旋正确解释碱金属原子光谱的精细结构,用自旋-轨道相互作用正确解释反常塞曼效应;
3. 能用 LS 耦合计算不超过两个价电子(非同科电子)的电子组态的原子态,并会确定基态;
4. 能解释 X 射线连续谱和线状谱的成因和规律;能解释激光发生的原理,结合激光的特点概述激光的主要应用。

[概念阐释]

一、原子的轨道磁矩和正常塞曼效应(§ 17-1)

1. 原子的轨道磁矩

(1) 处于定态 ψ_{nlm} 的氢原子,核外电子尽管在运动,但其分布必定满足概率守恒。由上一章的概率守恒的表达式[教材中公式(16-37)或(16-38)]可以得到,当电子在空间某处的概率减小时,在别处的概率必然增加,总概率保持不变,同时必然伴随着概率流。核外电子的概率流必定对应于电流,而环形电流必定对应于磁矩,这种磁矩就是原子中电子的轨道磁矩。

(2) 由子电子概率的角度分布函数 $w_{lm}(\theta, \varphi)$ 与 φ 无关,具有以 z 轴为旋转轴的旋转对称性,所以核外电子的概率流(从而也是电流)也具有以 z 轴为旋转轴的旋转对称性。这就是教材中图 17-1 所表示的图像。

(3) 教材中利用量子力学的概念,得到了氢原子中电子的轨道磁矩沿 z 轴的分量

$$\mu_{lx} = -\frac{e\hbar m}{2m_e} = -m\mu_B, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l.$$

这表明,氢原子中电子的轨道磁矩在 z 轴方向的分量 μ_{lx} 只能取一系列分立值。轨道磁矩在 z 轴方向分量的可能取值的数目,表示了轨道角动量在磁场中的可

能取向的数目。上式说明了轨道角动量在磁场中只有 $2l+1$ 个可能的取向,这就是电子轨道角动量的空间量子化的性质。

上式中的负号以及教材中式(17-2)和式(17-7)中的负号,都是由于电子带负电的缘故。

2. 外磁场对轨道磁矩的作用和正常塞曼效应

(1) 原子在强磁场作用下,所发出的每一条光谱线都将分裂为三条,这就是正常塞曼效应。因为光谱线的分裂是能级分裂造成的,所以正常塞曼效应的出现,表明原子在强磁场作用下能级发生了分裂,用量子力学的语言,就是能级的简并得到了部分或全部解除。

(2) “简并解除”是怎样一回事呢? 对于碱金属原子,能量的本征值 E_n 既与主量子数 n 有关,也与角量子数 l 有关,而与磁量子数 m 无关,这就是说,在一定的 n 和一定的 l 之下,对应各种可能 m 值的量子态的能量都相同,在一定的 l 之下, m 有 $2l+1$ 个可能的取值,所以能级 E_n 所包含的量子态数是 $2l+1$,或者说能级 E_n 的简并度为 $2l+1$ 。

当施加了强磁场的作用,碱金属原子的本征值能量变为

$$E_{nm} = E_n + E_m = E_n + \frac{eB\hbar}{2m_e} m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

上式表明,对应不同 m 值的量子态的能量不再相同,这就是能级简并的解除。可见,能级简并的解除必定对应于能级的分裂。

在上式中, E_m 表示外磁场对原子中电子的轨道磁矩的磁相互作用,角标 m 代表“磁”,不要与磁量子数 m 相混淆。

(3) 外磁场对原子的作用,就是外磁场对原子磁矩的作用,而原子磁矩包括核外电子的磁矩和原子核的磁矩,其中原子核的磁矩与核外电子的磁矩相比可以忽略。核外电子的磁矩等于它的轨道磁矩与它的自旋磁矩的合成,合成之后的磁矩称为原子的有效磁矩或原子磁矩。关于原子磁矩,我们将在下节讨论。

(4) 在外磁场作用下,从 $l=1$ 能级到 $l=0$ 能级的跃迁有三种可能性,将发出三条光谱线,如教材中图 17-2 所示;但是从 $l=2$ 能级到 $l=1$ 能级的跃迁有十五种可能性,由于受到选择定则的限制,跃迁只有九种可能性,如教材中图 17-3 所示。这九种可能的跃迁方式只有三种能量差值,所以也只有三条光谱线。这其中的关键,就是跃迁必须遵从选择定则。

关于选择定则,最初是从对光谱线的观测和分析研究中总结出来的,后来得到了量子力学的证明。关于跃迁的选择定则,下面还将涉及到。

(5) 以教材中图 17-2 所表示的钠黄光的谱线为例,对能级间距的数量级作一估计。在无外磁场作用时,从 2P 能级到 2S 能级的跃迁,辐射出波长约为 589.0 nm 的黄光,对应光子的能量为

$$h\nu \approx \frac{2.998 \times 10^8 \cdot 6.626 \times 10^{-34}}{589.0 \times 10^{-9} \cdot 1.602 \times 10^{-19}} \text{eV} \approx 2.1 \text{ eV}.$$

这也就是 2P 能级与 2S 能级之间的距离。

在磁感应强度的大小为 1 T 的强磁场作用下,光谱线分裂为三条,相邻谱线的能量差为

$$\Delta E = E_{n/m} - E_{n/(m-1)} = \frac{eB\hbar}{2m_e} = \mu_B B \approx 9.2 \times 10^{-24} \text{ J} = 5.8 \times 10^{-5} \text{ eV}.$$

可见,由于正常塞曼效应引起谱线能量差,与谱线自身的能量相比相差 4 个数量级。这就意味着,人为产生的强磁场对于原子内部结构所能发挥的作用来说,仍然是微乎其微的。

二、电子的自旋 (§ 17-2)

1. 施特恩 - 格拉赫实验

(1) 实验中使用的磁场为什么是不均匀磁场?

带有磁矩为 μ 的粒子若处于磁感应强度为 B 的匀强磁场中,将只受到力矩的作用。在这个力矩的作用下,粒子将绕自身的轴线转动,使磁矩沿磁场方向取向,而不会发生整体的位移。

如果磁场是不均匀的,如教材中图 17-4 所示的情形,粒子除了受到力矩的作用外,还受到力的作用,这个力的方向沿磁场梯度的方向,力的大小可以表示为

$$f = \mu_z \frac{dB}{dz}.$$

所以粒子将沿力的方向(即磁场梯度的方向)发生位移,从而使银原子射线束沿力的方向发生偏转, μ_z 值不同的粒子偏转的距离也不同。

(2) 受磁场作用的原子磁矩为什么不是核外电子的轨道磁矩?

用氢原子射线所作的实验是最能说明问题的,因为氢原子处于基态, $l=0$, 电子的轨道磁矩为零。即使是用钠原子射线或银原子射线做实验,原子射线源的温度在一千摄氏度上下,这样的温度是远不能将原子加热到激发态的,要加热到激发态,必须达到上万度。所以,在施特恩 - 格拉赫实验中,射线束中的原子都是处于基态的, $l=0$, 电子的轨道角动量为零,轨道磁矩也为零。所以,实验中受磁场作用的只能是电子轨道磁矩之外的什么磁矩。

(3) 从施特恩 - 格拉赫实验的结果中可以得到哪些重要结论?

a) 施特恩 - 格拉赫实验表明了原子在磁场中的取向是量子化的。原子在磁场中所受的力可以表示为

$$f = \mu_z \frac{dB}{dz} = (\mu \cos \alpha) \frac{dB}{dz},$$

式中 α 是磁矩与磁场方向之间的夹角。如果原子在磁场中的取向可以是任意的,那么 α 就可以连续变化,照相板上将得到一片连续的黑斑(原子的沉积痕迹)。而事实上照相板上所得到的是上、下两条黑斑,表示只有两个 μ_z 值,也就是只有两个 α 值。所以,原子在磁场中只有两个可能的取向,这两个取向分别是 $\alpha = 0^\circ$ 和 $\alpha = 180^\circ$ 。

b) 施特恩-格拉赫实验证明了,对原子磁矩有贡献的,除了核外电子的轨道磁矩之外,还必定有另一个来源,这就是电子的自旋磁矩。所以,施特恩-格拉赫实验证实了电子自旋磁矩的存在。

c) 无论是用银原子射线,还是用钠原子射线、氢原子射线做实验,原子都只有一个价电子,实验结果都是由这一个电子的自旋磁矩引起的。根据上述第一条,电子的自旋磁矩在磁场中只有两个可能的取向,也就是电子的自旋角动量在磁场中只有两个可能的取向,于是可以得到电子的自旋量子数为 $s = 1/2$, 自旋磁量子数为 $m_s = +1/2$ 和 $-1/2$ 。这也正是乌伦贝克和高斯密特关于电子自旋假设的实验依据。

2. 电子自旋和自旋磁矩

(1) 电子自旋的特点:

a) 电子自旋角动量是电子固有的或内禀的角动量,这个角动量的大小是固定不变的,等于 $\hbar/2$;

b) 与电子轨道角动量的空间量子化的性质一样,电子自旋角动量也具有空间量子化的性质,所不同的是,电子自旋角动量在磁场中只有两个可能的取向,即要么沿着磁场的方向,要么逆着磁场的方向。所以,自旋角动量在外磁场方向上的分量只有两个可能值,即 $+\hbar/2$ 或 $-\hbar/2$;

c) 与电子轨道角动量对应着轨道磁矩一样,电子自旋角动量也对应着一个磁矩,这就是自旋磁矩,所不同的是,电子自旋的朗德因子 g_s 约为绕核运动的朗德因子 g_l 的两倍。

(2) 根据施特恩-格拉赫实验的结果和与轨道角动量相似的性质,得到了电子自旋量子数为

$$s = \frac{1}{2},$$

以及自旋磁量子数为

$$m_s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}.$$

(3) 自旋的概念完全不能用经典的物理语言加以描述,电子自旋的存在也表明了电子不是一个经典观念中的带电粒子。自旋完全是一种相对论量子效应。

(4) 自旋是一切微观粒子的一种基本属性。

3. 碱金属原子光谱的精细结构

(1) 所有的碱金属原子的每条光谱线不是简单的一条线,而是二条或三条线,这就是碱金属原子光谱线的精细结构。

(2) 电子自旋概念的建立,使碱金属原子光谱的精细结构得到了圆满解释,所以,碱金属原子光谱的精细结构也可以看作是电子自旋存在的另一个实验依据。

4. 自旋-轨道相互作用

(1) 在碱金属原子中,自旋-轨道相互作用是如何产生的?

在以价电子为静止的坐标系中,带有有效电荷 Z^*e 的原子实以速度 $-v$ 绕价电子作圆周运动,所形成的环状电流必定产生磁场,价电子的自旋磁矩 μ_s 必将受到这个磁场的作用。这种作用就是自旋-轨道相互作用,或称自旋-轨道耦合。

(2) 自旋-轨道相互作用能是怎样表示的?

根据教材中的推算,得到自旋-轨道相互作用能为

$$E_{ls} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^*e^2}{2m_e c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}.$$

对于这个表示式应注意以下几点。

a) 式中的 \mathbf{S} 和 \mathbf{L} 分别是价电子的自旋角动量和轨道角动量。有的读者可能会产生这样的问题,即价电子的自旋磁矩受到由原子实产生的磁场的作用,而在这个相互作用能表达式中竟成了价电子自身的自旋角动量与自身的轨道角动量之间的作用,真有点不可思议。实际上这个问题是不难理解的,价电子相对于原子实的运动与原子实相对于价电子的运动是同一件事,只是在不同的参考系观察而已,况且在 E_{ls} 的表达式中包含了描述原子实的量(有效电荷 Z^*e)。

b) 要计算 E_{ls} 的平均值,必须对式中各项求平均值。在 E_{ls} 的表达式中除了 $(1/r^3)$ 和 $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L})$ 两个因子外,其余都是常量,平均值就是它们自身。 $(1/r^3)$ 和 $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L})$ 的平均值要用量子力学方法进行计算。

教材中式(17-32)就是用量子力学方法求得 $(1/r^3)$ 的平均值的。

根据量子力学的概念,如果粒子所处状态是某力学量的本征态,那么在这个量子态,该力学量具有确定值,此确定值就是该本征态所对应的本征值,也就是此力学量的平均值。所以计算力学量 $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L})$ 的平均值,就是求它的本征值,教材中式(17-30)就是这样做的。

将上述两个因子的平均值代入 E_{ls} 的表达式,最后得到教材中的公式(17-33),即

$$E_{ls} = \frac{(\alpha Z^*)^4 m_e c^2}{2n^3} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{l(2l+1)(l+1)} \right],$$

这就是 E_{ls} 的平均值 \bar{E}_{ls} 的表达式。

c) 在 \bar{E}_{ls} 的表达式中还包含了原子实的有效电荷数 Z^* , 粗略看起来好像应有 $Z^* = 1$ 。对于氢原子, $Z^* = Z = 1$ 是严格成立的, 但是对于碱金属原子, 由于存在下面的原因, 使它们不同于氢原子, 有效电荷数 Z^* 不严格等于 1, 有些碱金属原子甚至远偏离于 1。这些原因之一是价电子引起原子实的极化, 使价电子受到一种附加的引力作用; 另一个原因是在原子实内也有价电子存在的概率, 用经典概念来表述, 就是价电子的轨道穿入原子实, 或简单地称为轨道贯穿。当价电子处于穿入原子实那部分轨道时, 对它起作用的有效电荷 Z^* 就明显大于 1。

(3) 自旋-轨道相互作用是怎样引起光谱线的精细结构的?

显然, 在没有自旋-轨道相互作用时, 光谱线的精细结构是不存在的, 对确定的 n 和 l 是一个确定能级, 能量为 E_{nl} 。

自旋-轨道相互作用的存在, 在 $l \neq 0$ 的能级上附加了能量 E_{ls} , 由于 j 有两个可能值, 即 $j = l \pm 1/2$, 能级将分裂为双层结构, 其中较大 j 值的能级高于较小 j 值的能级。这就导致了光谱线的精细结构。

5. 单电子体系的原子磁矩

(1) 单电子体系(氢原子和碱金属原子)的特殊性就在于, 一个价电子所处的状态就是整个原子所处的状态, 原子的总磁矩就是价电子的总磁矩。所以单电子体系是最简单的原子体系。

(2) 对于单电子体系的原子磁矩 μ_l , 教材中利用矢量图(即图 17-6)作了清楚的阐述, 这里要注意两个问题:

a) 由于电子带负电, 电子的自旋磁矩与自旋角动量方向相反, 轨道磁矩与轨道角动量方向相反, 但是总磁矩 μ 却不在总角动量 J 的反向延长线上, 原因是 $g_l \neq g_s$;

b) μ_l 与 μ_s 合成得到总磁矩 μ , 由于 μ 是绕 J 作拉莫尔进动(也称旋进)的, 所以 μ 沿垂直于 J 的延长线的分量的时间平均值为零, 对外起作用的磁矩就是 μ 沿总角动量 J 的反向延长线的分矢量 μ_z , 称为原子的有效磁矩, 就是原子磁矩。

6. 反常塞曼效应

(1) 在弱磁场作用下原子光谱发生分裂的现象, 称为反常塞曼效应。原子磁矩在外磁场作用下, 将产生附加能量

$$\Delta E = m_j g \mu_B B, m_j = j, j-1, \dots, -j.$$

原来简并的一个能级, 在弱磁场作用下分裂为 $2j+1$ 个能级。这就是光谱线分

裂的原因。

(2) 反常塞曼效应中光谱线的分裂是由于原子磁矩与外加磁场作用的结果,所以只要原子磁矩不为零,就存在发生这种效应的可能性。因为原子磁矩可以表示为

$$\mu_J = -g \frac{e}{2m_e} J,$$

可见只要总角动量 J 不为零,原子磁矩都不会等于零。也就是说,只要是总角量子数 $j \neq 0$ 的能级,都将会在弱磁场作用下发生分裂,而观测到反常塞曼效应。

三、LS 耦合和 jj 耦合 (§ 17-3)

1. 原子的电子组态

(1) 可以把原子分为原子实和价电子两部分,其中原子实是一个完整的结构,其总角动量和总磁矩都等于零,所以在论及原子态时不必考虑原子实,只要考虑价电子就够了。这就是说,价电子的状态决定了原子态。于是,原子态必定可以用价电子状态的组合来表示,这种用来表示原子态的价电子状态的组合,就称为电子组态。这里应注意以下问题。

a) 不同的电子组态可以形成不同的原子态;同一种电子组态,一般也可以形成多种原子态;

b) 不同的电子组态具有不同的能量,有时能量的差异会很大;

c) 同一种电子组态所形成的不同的原子态,能量也是不同的,这是由于原子中价电子的相互作用引起的。

(2) 价电子的相互作用有两种极端情况:

a) LS 耦合,即 $G_1(s_1, s_2), G_2(l_1, l_2) \gg G_3(l_1, s_1), G_4(l_2, s_2)$ 的情况;

b) jj 耦合,即 $G_3(l_1, s_1), G_4(l_2, s_2) \gg G_1(s_1, s_2), G_2(l_1, l_2)$ 的情况。

2. LS 耦合

(1) LS 耦合的方法

a) 两个价电子自旋角动量的合成

自旋总角动量是两个自旋角动量的矢量之和,数值上可以表示为

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar, s = s_1 + s_2, s_1 - s_2.$$

因为 $s_1 = s_2 = 1/2$, 所以 s 只能取 1 和 0 两个数值。

b) 两个价电子轨道角动量的合成

轨道总角动量是两个轨道角动量的矢量之和,数值上可以表示为

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar, l = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|.$$

l 的取值是从 $(l_1 + l_2)$ 到 $|l_1 - l_2|$ 邻近值相差 1 的一系列数值。如果 $l_1 > l_2$, l

就有 $2l_2 + 1$ 个数值可取;如果 $l_2 > l_1$, l 就有 $2l_1 + 1$ 个数值可取。

c) 原子总角动量的合成

原子的总角动量等于轨道总角动量与自旋总角动量的矢量之和,其数值可表示为

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar, j = l + s, l + s - 1, \dots, |l - s|.$$

如果 $l > s$, 对于确定的 l 和 s , j 共有 $2s + 1$ 个值;如果 $s > l$, 对于确定的 l 和 s , j 共有 $2l + 1$ 个值。

(2) LS 耦合的适用范围

实验表明,几乎所有的原子基态能级和氢原子的低激发态能级,基本上都符合 LS 耦合的规律,或者可以认为,都是在 LS 耦合下形成的。但是对某些较高激发态能级,LS 耦合不完全适合。

3. jj 耦合

(1) jj 耦合的方法

a) 第一个价电子的总角动量的合成

第一个电子的总角动量是它的自旋角动量与其轨道角动量的矢量之和,其数值可表示为

$$J_1 = \sqrt{j_1(j_1+1)}\hbar, j_1 = l_1 + s_1, l_1 - s_1.$$

b) 第二个价电子的总角动量的合成

用同样的方法可以求得第二个电子总角动量

$$J_2 = \sqrt{j_2(j_2+1)}\hbar, j_2 = l_2 + s_2, l_2 - s_2.$$

c) 原子总角动量的合成

原子的总角动量等于第一个电子的总角动量和第二个电子的总角动量的矢量之和,数值为

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar, j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|.$$

若 $j_1 > j_2$, 则 j 有 $2j_2 + 1$ 个值;若 $j_2 > j_1$, 则 j 有 $2j_1 + 1$ 个值。

(2) jj 耦合的适用范围

纯 jj 耦合是很少见的,一般只出现在某些重原子的高激发态能级中。

(3) 与 LS 耦合的比较

a) 在两种耦合中,价电子之间的相互作用类型不同,形成的能级间隔也有明显差异;

b) 两种耦合的适用范围不同,从上面已经指出的适用范围看,LS 耦合的适用范围比 jj 耦合广泛得多;

c) 同一个电子组态在两种耦合中形成的原子态的数目相同,并且代表原子态的量子数 j 的值也相同;

d) jj 耦合形成的原子态没有特别符号,标记的方法是 $(j_1, j_2)_j$,而 LS 耦合形成的原子态都由特别的符号来标记:用大写字母 S, P, D, F 等分别表示原子态的角量子数 $l=0, 1, 2, 3$ 等,在这些大写字母的左上角标以与 $2s+1$ 相应的数字代表能级的多重结构,而在这些大写字母的右下角标以与量子数 j 相应的数字。例如,满壳层的原子的基态表示为 1S_0 ,钠原子的第一激发态表示为 $^2P_{1/2}$ 和 $^2P_{3/2}$ 等。

4. 选择定则

(1) 选择定则是表示原子在发射或吸收光子时发生跃迁的状态之间必须满足的关系。这些定则最初是从对光谱的观测和分析中得出的,量子力学建立之后才得到了理论上的解释。

(2) 跃迁的普遍法则是,光子和发射光子的原子作为一个整体的宇称是守恒的。由于光子的角动量为 $1\hbar$,发射或吸收光子后原子状态的宇称必定改变其偶奇性,即原来状态的宇称是偶性的,跃迁后状态变为奇性,原来状态的宇称是奇性的,跃迁后状态变为偶性。于是,我们可以将这条普遍的选择定则表述为:跃迁只能发生在不同宇称的状态之间。

除了上述普遍法则之外,跃迁与价电子之间的相互作用也有一定关系。

四、原子的壳层结构(§ 17-4)

1. 元素性质的周期性

(1) 将元素按相对原子质量的大小次序排列起来,它们的物理和化学性质会显示出周期性的变化。

(2) 元素的光谱性质也显示周期性的变化,周期表上同一竖列的诸元素都有相仿的光谱结构。

(3) 元素的电离能明显地表现出周期性变化,如教材中的图 17-8 所示,并且幻数的存在,预示着元素性质周期性的更深层次的实质。

2. 原子中电子的壳层结构

(1) 用量子数 (n, l, m, s, m_s) 描述原子中电子所处的状态,而其中自旋量子数是固定值 $(1/2)$,所以一般只用四个量子数 (n, l, m, m_s) 表示原子中电子所处的状态。

(2) 电子在状态上的分布所遵从的规律是泡利不相容原理和能量最低原理:

根据泡利不相容原理,由一组量子数 (n, l, m, m_s) 所表示的状态,最多只能容纳一个电子;

根据能量最低原理,随着核外电子的增加,电子总是首先占据能量最低的状态。

态,以保证处于基态的原子的能量是最低的。

(3) 原子的壳层和支壳层

主量子数 n 相同的各状态属于同一个壳层,对应于 $n=1,2,3,4,5,\cdots$ 的壳层,分别称之为 K,L,M,N,O, \cdots 壳层;

在一个壳层中,按照角量子数 l 的不同又可以划分为 n 个支壳层,对应于 $l=0,1,2,3,4,5,\cdots$ 的各支壳层,分别用 s,p,d,f,g,h, \cdots 表示。

3. 原子的基态

(1) 对于正好填满支壳层的原子,自旋角动量、轨道角动量和总角动量都必定等于零,这种原子的基态为 1S_0 。

(2) 对于尚未填满支壳层的原子,其原子态只决定于未填满支壳层上的电子组态。在由同一电子组态所形成的不同原子态中,能量的高低可以用洪德法则加以判断。

(3) 在由电子组态得到原子态时必须知道价电子之间的相互作用性质,即属于 LS 耦合,还是 jj 耦合。正如我们在前面所说的,几乎所有的原子基态能级和氢原子的低激发态能级,都是在 LS 耦合下形成的。

五、X 射线 (§ 17-5)

1. X 射线的发射和发射谱

高速电子轰击靶物质,就会产生 X 射线;产生 X 射线的器件称为 X 射线管。X 射线谱是由两部分构成的,即连续谱和线状谱(也称标识谱)。

(1) 连续谱是由高速电子受到靶的制动而产生的轫致辐射,具有以下特点:

- a) 存在一个与加速电压成反比的短波极限;
- b) 短波极限与靶材料的性质无关。

(2) 标识谱是由于高速电子的轰击而使靶原子内层出现空位、外层电子向该空位的跃迁所产生的辐射,具有以下特点:

- a) 各种元素的标识谱有相似的结构;
- b) 按原子序数的次序比较各元素的标识谱,波长依次变化,不表现周期性;
- c) 谱线的结构与靶元素的化学状态基本无关;
- d) 轰击靶物质的电子的能量必须相当高。

2. 俄歇电子和同步辐射

(1) 当外层电子向内层空位跃迁时,不发射 X 射线,而是将能量传递给同层的其他电子或更外层的某个电子,这个电子获得能量而脱离原子核的束缚,这个脱离原子核束缚的电子就称为俄歇电子。

因为俄歇电子的能量决定于原子内层的能级结构,所以俄歇电子携带了反映原子内层能级结构状况的多方面讯息,如结合能、状态量子数等。俄歇电子能

谱仪已经发展为一种实用的分析仪器,其中离子-感生俄歇电子能谱仪在等离子体物理研究中有许多应用。

(2) 同步辐射

任何带电粒子作加速运动都要辐射电磁波。在圆周运动中,带电粒子所产生的辐射能量与粒子质量的四次方成反比,所以总是使用小质量的带电粒子(如电子)在同步加速器中作圆周运动,来获得这种辐射,故称同步辐射。

由于同步辐射具有一系列优异特性,所以它作为一种新型光源备受关注,并得到迅速发展。

六、激光 (§ 17-6)

1. 激光原理

(1) 激光是受激辐射,因为只有在受激辐射的情况下,才能获得相干性好、强度高、振动方向相同和传播方向一致的单色激光光束。

(2) 要发生光放大过程,就必须使受激辐射占优势,而要使受激辐射占优势,必须实现粒子数反转。粒子数反转状态是违背平衡态下玻尔兹曼分布规律的,是一种非平衡态。从教材中的公式(17-58)可以得到

$$T = -\frac{\Delta E}{k \ln(N_2/N_1)} < 0,$$

这就是说,这种非平衡态,相当于“负温度”下的平衡态,所以粒子数反转状态也称作负温度状态。

(3) 要实现粒子数反转,要有两个条件,一是工作物质必须具有亚稳能级,二是外界必须向工作物质提供能量。

为实现抽运过程,目前提供能量的主要方法有:

a) 利用光辐射将工作物质的原子抽运到高能态,这称为光激励;

b) 利用放电过程形成电子或离子与工作物质的原子发生非弹性碰撞,以传递能量,这种方法称为电激励;

c) 向工作物质中注入高能电子或粒子,让它们与工作物质的原子发生非弹性碰撞,把后者激发到高能态,这称为粒子激励;

d) 利用工作物质自身化学反应所产生的能量把原子激发到高能态,这种方法称为化学激励。

(4) 共振腔有两个作用:

a) 粒子数反转为使受激辐射占优势提供了必要条件,而要实现受激辐射占优势,还必须在工作物质中形成足够强的辐射场,才能提高受激辐射的概率。处于粒子数反转的工作物质中有一部分原子要发生自发辐射,光子向各个方向发射,沿其他方向发射的光子都一去不复返,而沿腔的轴线方向发射的光子受到反

射镜的往返反射,在工作物质中穿越,不断地引发受激辐射,从而使受激辐射的强度越来越强。这是光学共振腔的第一个作用。

b) 使我们所选定频率的激光光波在共振腔内形成稳定的驻波,在部分反射镜 M_2 处实现多光束相长干涉,从而输出激光。这就要求共振腔的长度满足教材中公式(17-61)所表示的共振条件。这是光学共振腔的第二个作用。

2. 激光的应用*

教材中已经结合激光的特点对激光的应用作了简要概述,这里对这些应用略加说明和解释。

(1) 激光在计量学中的应用

a) 长度基准的确定:在第 17 届国际计量大会上规定了用真空中的光速重新定义“米”时,也决定了用精确测量的激光频率通过基本常量 c 导出波长,从而复现长度单位“米”。

b) 测长和测距:利用光的干涉可以精确测定长度和对装置进行定位,但是有效量程受到光的单色性的限制,也就是说,最大量程 L_{\max} 不可能超过光波的波列长度 l_0 (参阅 § 14-6),即

$$L_{\max} < l_0 = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

例如,用氦黄光测量,已知 $\lambda = 587.6 \text{ nm}$, $\Delta\lambda = 0.0045 \text{ nm}$,根据上式算得最大量程为 $L_{\max} = 7.7 \times 10^{-2} \text{ m}$ 。如果用氦-氖激光器发出的红光测量,已知 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $\Delta\lambda = 2.0 \times 10^{-9} \text{ nm}$,由上式算得最大量程为 $L_{\max} = 2.0 \times 10^5 \text{ m}$ 。可见,利用激光,测量范围大大扩展了。

大距离的测量可以用激光脉冲从发射到接收到反射波的时间求得,由于激光的亮度高、脉冲宽度窄,测量精度可以很高。如果利用激光的相位测距法进行测量,精度会更高。

c) 测速:将激光束照射在运动物体上,测量反射波的多普勒频移,可精确测定物体的运动速度。

(2) 激光在工业和工程上的应用

a) 激光束的能量很高,又非常集中,可熔化金属和其他固体材料,因此可以用激光束对工件或材料进行加工,包括切割、焊接、打孔、雕刻和表面淬火处理等。

b) 激光无损检测:利用激光束的干涉可以方便、快捷地对工件表面和内部的缺陷进行检测,而无须损坏工件。

* 其中部分资料引自蔡枢、吴铭磊 编《大学物理(当代物理前沿专题部分)》, (高等教育出版社, 1996.6.)。

c) 激光准直导向:激光的亮度高、方向性好,是理想的天然准直线和导向指示线,它不会由于重力作用而弯曲,并可以通过光电系统作自动准直校正,准直精度高,手续简便。现已在飞机和船舶制造、大型设备安装、建筑和隧道工程中广泛使用。

(3) 激光在信息处理中的应用

计算机的光盘驱动器和光盘是大家都十分熟悉的,光盘驱动器用微细的激光束在光盘介质上存取信息,可以达到极高的记录密度。利用光纤通信传递的电话和电视信号,实际上已经进入了千家万户。

激光出现之后才得以发展的全息照相,近十多年来得到了广泛应用。

(4) 激光在核技术中的应用

a) 同位素分离技术在科学研究、国民经济建设和军事上都有重要价值。根据同位素光谱的同位素位移,利用激光将其中某种同位素原子激发或电离,然后再用物理的或化学的方法将这种同位素从混合物中分离出来。这种方法不仅分离系数高、浓缩度高、周期短、方法普适,并且能耗低。

b) 受控热核反应的惯性约束就是利用高功率激光束作用于由氘-氚制成的靶丸,使氘、氚发生核聚变,同时释放出巨额核能量。关于激光惯性约束产生受控核聚变的有关内容,将在本书 § 19-5 中涉及。

(5) 激光在医学上的应用

利用高强度激光束产生的热效应和生物效应可以治疗多种疾病,并且已经形成了一个新的医学分支——激光医学。

当激光束照射到生物组织时,可在极短时间内使之烧灼,所以激光束不但可以将组织切开,还会把组织中的血管烧结封闭起来,起到止血作用。同时,由于激光“刀”与手术部位不接触,因而是自身消毒的手术,所以特别适于处理感染性病变组织。

利用激光束把生物组织细胞的水分蒸发和组织蛋白凝固,可以治疗视网膜脱落、皮肤黏膜血管病变和消化道出血病变等。

根据激光的生物效应,用低功率激光束照射,可以消炎、消肿、镇痛和促进伤口愈合;还可利用激光束代替银针进行针灸。

(6) 激光武器

战术激光武器用于伤害人眼和武器系统中的光电传感部分,制导炸弹、炮弹,以及打击战术导弹;目前尚处于试验阶段的战略激光武器则用于拦截和摧毁洲际弹道导弹、卫星和天基武器站等。

(7) 激光在科学研究中的应用

a) 在物理学中的应用:激光由于能量集中,当它与物质发生相互作用时,会产生许多新的光学现象,研究这些现象的性质和应用,形成了光学的一个新的分

支——非线性光学。非线性光学研究渗透到原子分子物理、凝聚态物理和光学材料,不仅开拓了光学的研究领域,也促进了物理学的这些分支学科的发展。

将激光引入光谱学,使光谱学发生了一次深刻的变革,形成了一门新的学科——激光光谱学。在线性激光光谱学方面,由于激光的高强度和单色性,使激光吸收光谱术、激光荧光光谱术、激光拉曼光谱测量以及激光光声光谱术都获得了突破性发展;在非线形激光光谱学方面,由于窄带可调谐激光器的出现,开辟了无多普勒增宽的高分辨率激光光谱学新领域,创建了无多普勒增宽的饱和光谱学和双光子光谱学。

b) 在化学中的应用:除了用激光对化学样品进行定性、定量的光谱分析之外,还可以利用激光进行选择性的激发以诱发各种光化学过程,如光致聚合、光致化学键断裂、光致离解以及光致同分异构化等。这在化学转换、药品制造和提纯等方面已经显示出广阔的应用前景。

激光在化学中应用的另一个重要方面,是激光监测和控制定向化学反应。将激光引入化学反应区,选用适当的特征波长记录荧光光谱,或者由激光波长的快速扫描记录吸收光谱,可获得化学试剂、中间产物、终端产物以及正向和逆向反应速率比的实时信息,以便使化学反应向着我们希望的方向进行。

c) 在生命科学中的应用:激光辐射可以影响生命过程,激光光谱分析可以对生命过程的变异进行监测,所以,在生物科学研究中激光越来越成为重要的研究手段。

[例题分析]

例题 17-1 求下述各原子态的朗德因子:

- (1) 除原子态 1S_0 以外的所有 S 态;
- (2) 除原子态 1S_0 以外的所有单重态。

解 求朗德因子,必须根据朗德因子的定义式:

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}.$$

(1) 对于所有的 S 态,都有

$$l = 0,$$

根据 LS 耦合,应有

$$j = s,$$

将以上两个关系代入朗德因子的定义式,得

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} = 1 + \frac{2s(s+1)}{2s(s+1)} = 2.$$

(2) 对于所有的单重态, 都有

$$s = 0,$$

根据 LS 耦合, 应有

$$j = l,$$

将以上两个关系代入朗德因子的定义式, 得

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} = 1 + \frac{l(l+1) - l(l+1)}{2l(l+1)} = 1.$$

在上面所讨论的两种情况中, 对于原子态 1S_0 来说, $l = 0, s = 0$, 所以 $j = 0$, 按照朗德因子的定义式, 出现分母为零的情形, 这时朗德因子不能从上面的朗德因子的定义式计算, 而应由实验来确定。

例题 17-2 已知铝原子的基态为 $^2P_{1/2}$, 试求:

(1) 原子磁矩为多大?

(2) 在磁感应强度为 $B = 3.0 \times 10^{-2} \text{ T}$ 的磁场中能分裂为几层? 相邻能级间距为多大?

解

(1) 根据原子所处状态, 可以得到 $l = 1, s = 1/2, j = 1/2$, 由此可以求得

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} = \frac{2}{3}.$$

因为 $j = 1/2$, 所以原子的总角动量为

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar,$$

根据公式(17-41), 铝的原子磁矩为

$$\mu_j = -g \frac{e}{2m_e} J = -\frac{\sqrt{3}}{3} \mu_B.$$

(2) 由于 $j = 1/2$, m_j 只有两个可能的取值, 即 $1/2$ 和 $-1/2$ 。原子磁矩与磁场相互作用的附加能量的一般表达式为

$$\Delta E = -\boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{B} = g \frac{e}{2m_e} \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} = g \frac{e}{2m_e} B J \cos \theta = m_j g \frac{e \hbar}{2m_e} B = m_j g \mu_B B,$$

式中 $J \cos \theta$ 是总角动量在磁场方向上的分量, 并可表示为

$$J \cos \theta = m_j \hbar, m_j = j, j-1, \dots, -j.$$

在我们的问题中, $m_j = \pm 1/2$, 所以能级分为两层, 分别为

$$\Delta E_1 = +\frac{1}{3} \mu_B B, (m_j = +1/2);$$

$$\Delta E_2 = -\frac{1}{3} \mu_B B, (m_j = -1/2).$$

能级间距为

$$\Delta E_1 - \Delta E_2 = \frac{2}{3} \mu_B B = \frac{2}{3} \times 9.27 \times 10^{-24} \times 3.0 \times 10^{-2} \text{ J} = 1.9 \times 10^{-25} \text{ J}.$$

[习题解答]

17-1 如何从式(17-1)直接看出,氢原子中电子的绕核运动所提供的电流密度矢量只存在 φ 分量,而其余两个分量都等于零? 又如何从式(17-2)直接看出,电流密度矢量的 φ 分量,是以 z 轴为旋转对称轴的?

解 在波函数 ψ_{nlm} 中只有 $\Phi(\varphi)$ 是复量,代入式(17-1)计算电流密度矢量的 φ 分量 j_φ 时不为零,其余两部分都是实函数,其复共轭与原复函数相同,代入式(17-1)中相同的两项相减必定为零,所以 j_r 和 j_θ 为零。

正如式(17-2)

$$j_\varphi = -\frac{e\hbar m}{m_e r \sin \theta} |\psi_{nlm}|^2$$

所表示的那样,实际上在上式中是不包含 φ 的,也就是说, j_φ 与 φ 无关。在保持其他量不变的情况下,若绕 z 轴旋转任意角度, j_φ 都不会有差异,所以 j_φ 必定是以 z 轴为旋转对称轴的。

17-2 试推导在正常塞曼效应中光谱线分裂后相邻谱线之间的波长差 $\Delta\lambda$ 与磁场的磁感应强度 B 的关系。

解 处于外磁场中的原子,会附加轨道磁矩与外磁场的相互作用能,它可表示为

$$E_m = -\boldsymbol{\mu}_l \cdot \mathbf{B} = -\mu_{lx} B = \frac{eB\hbar}{2m_e} m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

可见,由此引起的相邻能级差为

$$\Delta E_m = \pm \frac{eB\hbar}{2m_e} = \pm \frac{eBh}{4\pi m_e};$$

相邻谱线的频率差为

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E_m}{h} = \pm \frac{eB}{4\pi m_e};$$

相应的波长差为

$$\Delta\lambda = -\frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu = \mp \frac{e\lambda^2 B}{4\pi c m_e}.$$

17-3 在磁感应强度 $B = 10 \text{ T}$ 的磁场中观测某碱金属原子的正常塞曼效应时,测得分裂后的相邻谱线的波长差 $\Delta\lambda = 4.0 \times 10^{-2} \text{ nm}$,试求该光谱线在分裂前的波长。

解 根据上题的结果

$$\Delta\lambda = \pm \frac{e\lambda^2 B}{4\pi c m_e},$$

可以得到分裂前该谱线的波长,为

$$\lambda^2 = \frac{4\pi c m_e \Delta\lambda}{eB} = 8.6 \times 10^{-14} \text{ m}^2,$$

所以,

$$\lambda = 2.9 \times 10^2 \text{ nm}.$$

17-4 在磁感应强度为 5.00 T 的磁场中观测正常塞曼效应,发现波长为 $2.54 \times 10^2 \text{ nm}$ 的谱线分裂后的相邻谱线的波长差为 $1.50 \times 10^{-2} \text{ nm}$,试求电子的比荷。

解 根据上题的波长差公式

$$\Delta\lambda = \pm \frac{e\lambda^2 B}{4\pi cm_e},$$

从中解出比荷 e/m_e 的表达式,并将 $\lambda = 254 \text{ nm}$ 、 $\Delta\lambda = 1.50 \times 10^{-2} \text{ nm}$ 和 $B = 5.00 \text{ T}$ 代入,得

$$\frac{e}{m_e} = \frac{4\pi c \Delta\lambda}{\lambda^2 B} = 1.75 \times 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

17-6 试计算氢原子 3D 态光谱精细结构所对应的能级间距(以 eV 为单位)。

解 精细结构是由于自旋-轨道相互作用引起的,根据式(17-36),氢原子的 3D 态分裂的能级间距为

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= \frac{(\alpha Z)^4 m_e c^2}{2n^3 l(l+1)} = \frac{(5.33 \times 10^{-5})^2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (3.00 \times 10^8)^2 \times 6.24 \times 10^{18}}{2 \times 3^3 \times 6} \text{ eV} \\ &= 4.4 \times 10^{-6} \text{ eV}. \end{aligned}$$

在上面的计算中用到了 $1 \text{ J} = 6.24 \times 10^{18} \text{ eV}$ 。

17-7 计算单电子原子体系的 S、P 和 D 态的朗德因子。

解

(1) S 态: $l=0, s=1/2$, 所以 $j=1/2$, 将这些值代入 g 的表达式, 得

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} = 1 + \frac{3/2}{3/2} = 2.$$

(2) P 态: $l=1, s=1/2$, 所以 $j=1/2, 3/2$.

对于 $j=1/2$

$$g = \frac{2}{3};$$

对于 $j=3/2$

$$g = \frac{4}{3}.$$

(3) D 态: $l=2, s=1/2$, 所以 $j=3/2, 5/2$.

对于 $j=3/2$

$$g = \frac{4}{5};$$

对于 $j=5/2$

$$g = \frac{6}{5}.$$

17-8 在磁感应强度为 B 的弱磁场中观测钠原子光谱的反常塞曼效应。

(1) 钠原子磁矩与磁场相互作用的附加能量的一般表达式;

(2) 利用上面得到的表达式,分别计算能级 $^2P_{1/2}$ 和 $^2P_{3/2}$ 分裂后的能级间距与磁场的关系。

解

(1) 磁矩与磁场相互作用的附加能量的一般表达式:

$$\Delta E = -\boldsymbol{\mu}_J \cdot \mathbf{B} = g \frac{e}{2m_e} \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} = g \frac{e}{2m_e} B J \cos \theta = m_J g \frac{e\hbar}{2m_e} B = m_J g \mu_B B, \quad (1)$$

式中 $J \cos \theta$ 是总角动量在磁场方向上的分量,并可表示为

$$J \cos \theta = m_J \hbar, m_J = j, j-1, \dots, -j. \quad (2)$$

(2) 对于 $^2P_{1/2}$: 由于

$$l=1, s=1/2, j=1/2,$$

所以,

$$m_J = \pm 1/2.$$

可见,能级分为两层,并可以算得 $g=2/3$ 。将 m_J 和 g 值代入式(1),得

$$\Delta E_1 = +\frac{1}{3} \mu_B B, (m_J = +1/2),$$

$$\Delta E_2 = -\frac{1}{3} \mu_B B, (m_J = -1/2).$$

所以分裂后的能级间距与磁场的关系为

$$\Delta E_1 - \Delta E_2 = \frac{2}{3} \mu_B B.$$

对于 $^2P_{3/2}$: 由于

$$l=1, s=1/2, j=3/2,$$

所以,

$$m_J = \pm 1/2, \pm 3/2.$$

可见,能级分为四层,并可以算得 $g=4/3$ 。将 m_J 和 g 值代入式(1),得

$$\Delta E_1 = +2\mu_B B, (m_J = +3/2),$$

$$\Delta E_2 = +\frac{2}{3} \mu_B B, (m_J = +1/2),$$

$$\Delta E_3 = -\frac{2}{3} \mu_B B, (m_J = -1/2),$$

$$\Delta E_4 = -2\mu_B B, (m_J = -3/2).$$

所以分裂后相邻的能级间距与磁场的关系为

$$\Delta E_1 - \Delta E_2 = \Delta E_2 - \Delta E_3 = \Delta E_3 - \Delta E_4 = \frac{4}{3} \mu_B B.$$

17-10 通过 LS 耦合,分别求出下列电子组态所形成的原子态:

(1) 两个电子的组态为 $1s2s$;

(2) 两个电子的组态为 $1s2p$;

(3) 两个电子的组态为 $2p3p$ 。

解

(1) $1s2s$

根据电子组态可以得到

$$l_1=0, l_2=0; s_1=1/2; s_2=1/2.$$

在根据 LS 耦合角动量的合成法则,可以得到

$$l=0, \quad s=0,1.$$

对于 $s=0$

$$l=0, \quad j=0,$$

所以,形成的原子态为 1S_0 ;

对于 $s=1$

$$l=0, \quad j=1,$$

所以,形成的原子态为 3S_1 ;

(2) $1s2p$

根据电子组态可以得到

$$l_1=0, l_2=1; s_1=1/2; s_2=1/2.$$

再根据 LS 耦合角动量的合成法则,可以得到

$$l=1, \quad s=0,1.$$

对于 $s=0$

$$l=1, \quad j=1,$$

所以,形成的原子态为 1P_1 ;

对于 $s=1$

$$l=1, \quad j=2,1,0,$$

所以,形成的原子态为 $^3P_{2,1,0}$ 。

(3) $2p3p$

根据电子组态可以得到

$$l_1=1, l_2=1; \quad s_1=1/2; \quad s_2=1/2.$$

再根据 LS 耦合角动量的合成法则,可以得到

$$l=2,1,0, \quad s=0,1.$$

对于 $s=0$

$$l=0, \quad j=0$$

形成的原子态为 1S_0 ;

$$l=1, \quad j=1$$

形成的原子态为 1P_1 ;

$$l=2, \quad j=2$$

形成的原子态为 1D_2 。

对于 $s=1$

$$l=0, \quad j=1$$

形成的原子态为 3S_1 ;

$$l=1, \quad j=2,1,0,$$

形成的原子态为 $^3P_{2,1,0}$;

$$l=2, \quad j=3,2,1,$$

形成的原子态为 $^3D_{3,2,1}$ 。

17-11 碳原子的一种激发态的电子组态是 $1s^2 2s^2 3p^1 3d^1$, 求通过 LS 耦合所形成的原

子态。

解 根据题意, $l_1 = 1, l_2 = 2, s_1 = 1/2, s_2 = 1/2$ 。利用式(17-47)可以求得

$$s = 0, 1.$$

利用式(17-48)可以求得

$$l = 1, 2, 3.$$

当 $s = 0$ 时,

对于 $l = 1$, 得到 $j = 1$, 这是单一态 1P_1 ;

对于 $l = 2$, 得到 $j = 2$, 这是单一态 1D_2 ;

对于 $l = 3$, 得到 $j = 3$, 这是单一态 1F_3 。

当 $s = 1$ 时,

对于 $l = 1$, 得到 $j = 0, 1, 2$, 这是三重态 $^3P_{0,1,2}$;

对于 $l = 2$, 得到 $j = 1, 2, 3$, 这是三重态 $^3D_{1,2,3}$;

对于 $l = 3$, 得到 $j = 2, 3, 4$, 这是三重态 $^3F_{2,3,4}$ 。

17-12 铝原子的未充满壳层的电子组态是 $3p^1$, 求通过 LS 耦合所形成的原子态, 并根据洪德定则确定它们的基态。

解 电子组态 $3p^1$, 其中 $l = 1, s = 1/2$, 所以可得到

$$j = 1/2, 3/2.$$

于是原子态为 $^2P_{1/2}$ 和 $^2P_{3/2}$ 。根据洪德定则, 在电子数少于 $(2l+1) = 3$ 的情况下, j 小者能量低。所以原子态 $^2P_{1/2}$ 是基态。

17-13 试根据莫塞莱定律计算钼靶的标识 X 射线的 K_α 的频率和相应光子的能量, 已知钼的原子序数为 42。

解 根据莫塞莱定律, 可以求得标识 X 射线的 K_α 的频率, 为

$$\nu_{K_\alpha} = R(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R(Z-1)^2}{4} = 1.012 \times 10^{17} \text{ Hz}.$$

光子的能量为

$$\epsilon = h\nu_{K_\alpha} = 4.184 \times 10^4 \text{ eV} = 6.704 \times 10^{-15} \text{ J}.$$

17-14 铝($Z=13$)靶被高速电子轰击所产生的 X 射线连续谱的短波限为 0.50 nm , 试判断在连续谱的范围内是否也能观测到 K 线系的标识谱线。

解 K 线系的标识谱线最低频率是

$$\nu_{K_\alpha} = R(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R(Z-1)^2}{4} = 2.961 \times 10^{16} \text{ Hz},$$

相应的波长为

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{c}{\nu_{K_\alpha}} = \frac{2.998 \times 10^8}{2.961 \times 10^{16}} \text{ m} = 1.013 \times 10^{-8} \text{ m} = 10.13 \text{ nm}.$$

所以, 在连续谱范围内可以观测到 K 线系的标识谱线。

17-16 某种 He-Ne 激光器所产生的波长为 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的激光, 测得其波长范围为 $\Delta\lambda = 1.00 \times 10^{-8} \text{ nm}$, 试求该激光器产生的激光波列长度。

解 根据式(14-61), 波列长度 l_0 可以表示为

$$l_0 = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

将有关数据代入上式,可得

$$l_0 = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{(632.8 \times 10^{-9})^2}{1.00 \times 10^{-8} \times 10^{-9}} \text{m} = 4.00 \times 10^4 \text{m}.$$