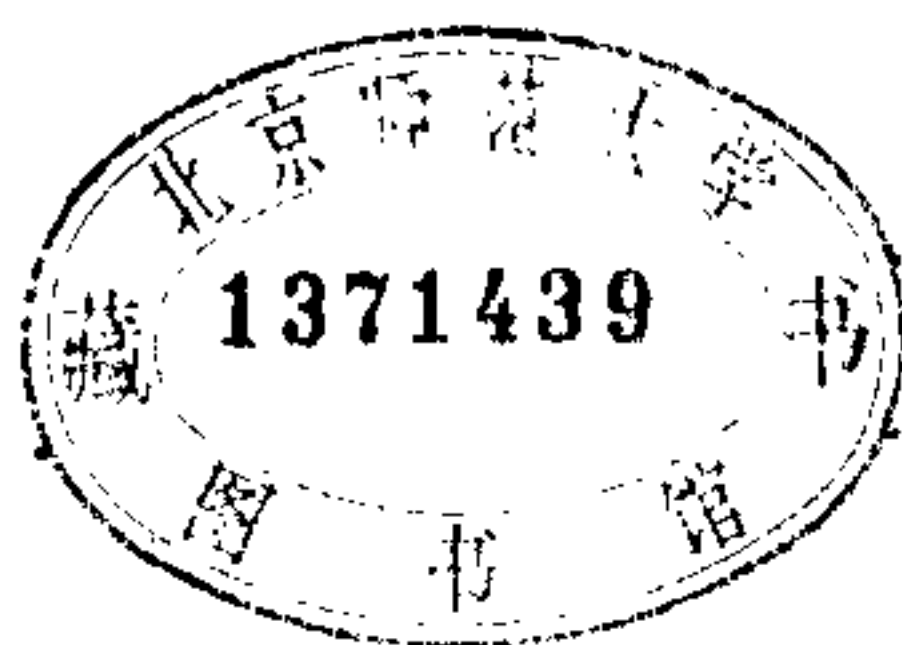


普通物理学习指导书

(第三册)

北京钢铁学院基础物理教研室 编

下104121



冶金工业出版社

普通物理学习指导书

(第三册)

北京钢铁学院基础物理教研室 编

•

冶金工业出版社出版

(北京北河沿大街高碑店北巷39号)

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

•

787×1092 1/16 印张 7 3/4 字数 183 千字

1986年7月第一版 1986年7月第一次印刷

印数00,001~17,000册

统一书号: 15062·4447 定价1.50元

教学说明

本书是《普通物理学习指导书》的第三册，对应于程守洙、江之永编《普通物理学》（1982年修订本）的第三册。

第五篇 波动光学

本篇内容按教学大纲要求，共约16学时。有关波动的基本原理部分，已在第一册第二篇“机械振动和机械波”中讲述，本篇仅是这些原理在光学现象中的进一步应用。所以，在内容上不必苛求系统性，而可选择一些典型的应用实例进行分析，使学生理解和掌握对光学现象的分析处理方法。

现对各章作如下说明：

第十七章（光的干涉）：干涉是波动的基本特性，也是波动光学的重点和基础。本章主要研究光波从波源出发，经过不同的光程到达探测器时波动的迭加。学习本章时，除了掌握已经学习过的波动的普遍的相干条件之外，特别要理解光的相干性，即每一个光波列只与自己发生干涉，一般不会出现两个不同波列之间的干涉，这样才能掌握获得相干光的特殊方法。本章仅讨论双缝干涉和薄膜等厚干涉两种类型的光的干涉现象。教材17-4中“等倾干涉条纹”（小字部分）可以不讲，§17-6中“迈克尔逊干涉仪”仅需一般了解，以求扩大知识面，而“相干长度”可以不讲。

第十八章（光的衍射）：本章是重点内容。应着重讲清单缝衍射的处理方法，并在此基础上，应用多缝干涉的概念，初步了解光栅衍射图样的特点。对衍射图样的光强分布不作定量讨论。教材18-2中“单缝衍射图样亮度分布的推算”（小字）可以不讲，教材18-5仅需一般了解。

第十九章（光的偏振）：本章是一般了解的内容，着重讲清偏振光的产生和检验，以及偏振与相干性的物理关系。§19-5和§19-6可以不讲，有关晶体的光学性质和尼科耳棱镜的内容可以不讲。

第六篇 近代物理学基础

本篇内容仅占22学时，建议采用专题讲座的形式进行教学。本篇重点是第二十章至第二十二章中的基本概念。主讲教师对内容应作些选择。根据经验，与其泛泛地讲很多，不如努力讲好其中一部分。

若能使学生对近代物理所引起的物理概念上的巨大变革不产生某种神秘感，而是感到比经典概念更合理，更真实，更易于理解自然现象，那讲授就比较成功了。

第二十章（狭义相对论基础）：在运动学中应着重讲清相对论在时间观念上的变革。应用洛伦兹变换说明狭义相对论的时空特性，如长度收缩和时间膨胀。在动力学中，着重讲清相对论在质量观念上的变革，即说明 $E=mc^2$ 的物理意义。有关基本公式的推导部分，应着重讲清基本思想。

第二十一章（光的量子性）：着重介绍普朗克量子假说的物理意义，引导学生用光的量子性去思考黑体辐射、光电效应、康普顿效应等重要光学现象。

第二十二章（原子的量子理论）：初步介绍量子力学的基本概念及其实验基础，即物质

的波粒二象性，波函数的统计解释，测不准关系和薛定格方程，用以解释氦原子的结构。有 * 号的 § 22-8 和 § 22-9 可以不讲。这部分内容的合理选择还需要进一步摸索，以使学生能更好地理解量子力学带来的物理观念上的根本性变革。

第二十三章（固体的能带结构）：本章介绍固体能带的概念，着重理解固体的导电性质。

第二十四章（原子核和基本粒子简介）：这部分内容可供学生课外阅读或课外讲座之用。

目 录

教学说明.....	Ⅰ
-----------	---

第五篇 波动光学

第十七章 光的干涉.....	1
第十八章 光的衍射.....	20
第十九章 光的偏振.....	38

第六篇 近代物理学基础

第二十章 狭义相对论基础.....	51
第二十一章 光的量子性.....	68
第二十二章 原子的量子理论.....	83
第二十三章 固体的能带结构.....	103
第二十四章 原子核和基本粒子简介.....	109
自我检查题答案.....	118

第五篇 波动光学

关于光的性质的研究，通常有以下几种方法：

(1) 几何光学的研究方法 当光的波长比用来研究它的仪器（如透镜）尺度小得多，光子的能量比仪器的能量灵敏度小得多，在这种条件下，作为一级近似，可用几何光学的方法加以研究。这是中学物理学的内容之一，其中包括几何光学的基本定律，以及透镜的光学性质。

(2) 波动光学的研究方法 当光的波长与仪器（如光栅）尺度可以比拟，但光子的能量比仪器的能量灵敏度仍然小得多，在这种条件下，可以近似地用波动光学的方法加以研究。这种方法建立在麦克斯韦电磁辐射理论基础之上，认为光是一种电磁波。在波长 $\lambda \rightarrow 0$ 的极限条件下，波动光学同几何光学一致。但波动光学仍然是一种近似的研究方法，它只能部分地阐明光的性质。波动光学是本篇要阐明的内容，主要讨论在传播过程中出现的干涉、衍射和偏振等波动现象，并阐明光的波动性质、规律及其应用。学习这部分内容时，应复习第一册第二篇“机械振动与机械波”的内容。

(3) 量子光学的研究方法 当光的波长比仪器（如光电管）的尺度小得多，从而可以近似地忽略光的波动特性，但光子的能量同仪器的能量灵敏度可以比拟，从而可以感受到光能量的不连续性，在这种条件下，光的性质可以近似地用光子图象简单地加以阐明。这部分内容将在第六篇第二十一章“光的量子性”中阐明，它属于量子光学的内容。至于综合光的粒子与波动两种图象的量子场论的内容，超出了普通物理的范围。

第十七章 光的干涉

一、基本要求

- (1) 了解光的相干条件以及获得相干光的方法；
- (2) 掌握双缝干涉和薄膜等厚干涉的基本规律及其应用；
- (3) 了解迈克耳逊干涉仪的原理和应用。

二、基本概念和规律

1. 相干光的概念

波动光学是立足于光是电磁波这一认识之上的。光的相干条件同一切波的干涉条件一样，应是两束光波同频率、同振动方向以及在相遇点上有恒定的位相差。鉴于物质光辐射的量子特性，例如对一般热光源来说，原子在一次发光过程中，只能发出一段有限长的连续波列，它并不是单色（即单一频率）的无限长的连续波，并且，不同原子发出的或者同一原子在不同时刻发出的两列波，其频率、振动方向以及位相一般都是随机出现的，所以由原子发光的机理可知，在宏观的测量过程中，任意两个不同光源发出的波列都是不满足相干条件的，都不是相干光。所以结论只能是：每个波列只能与自己相干，即为了获得相

干光，必须用光学装置把光束中每一个波列分成两个或多个分波列，并分别包含在两个（或多个）分光束之中。当各分光束在空间经历不同的路径后再相遇时，各分波列在相遇点的位相差因仅决定于波程差而恒定不变，显然满足相干条件，从而获得稳定的干涉图样。在这个意义上，我们把两个分束称为相干光（注意：两分光束的光程差，必须小于波列长度，才可保证各对分光波列重新相遇。若光程差大于波列长度，同一波列的分波列不能重新相遇，相遇的只是属于不同波列的分波列，则无干涉效应）。把每一个波列劈开的方法，通常有分波阵面方法（如光栅）和分振幅方法（如不同介质分界面上的反射与透射）两种。

2. 确定干涉条纹空间位置的普遍公式

（1）两束相干光在空间各点的叠加，就是该点处两个光振动的叠加。如

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

合振动应为

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \phi)$$

其中合振动振幅为：

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)$$

其物理意义是：光波的强度应与振幅平方成正比，即两光束叠加后的 A^2 ，应等于两光束单独存在时的强度的代数和，再加上一个附加项 $2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)$ ，这个附加项决定干涉效应，称为干涉项。它反映了把二束光的强度简单相加与实际发生的光强之间的差别。若干涉项为正，称为相长干涉，若干涉项为负，称为相消干涉，这完全取决于两束光在空间各点振动的位相差 $(\phi_2 - \phi_1)$ 。

若 $\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi = \pm 2k\pi$ ，则 $A = A_1 + A_2$

满足此条件的空间各点的轨迹，构成空间的干涉明条纹。

若 $\Delta\phi = \pm(2k+1)\pi$ ，则 $A = |A_1 - A_2|$

则构成干涉暗条纹。其中 $k=0, 1, 2, \dots$ ，为正整数，称为干涉条纹的级次。

（2）位相差

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (\phi_{20} - \phi_{10}) + \frac{2\pi}{\lambda}(n_1r_1 - n_2r_2)$$

一般取决于波源 S_1 、 S_2 的光振动的初位相差 $(\phi_{20} - \phi_{10})$ ，以及光程差 $\delta = n_1r_1 - n_2r_2$ 。通常二束相干光的光源是在同一波阵面内选取的，故波源 S_1 、 S_2 就有相同的初位相，恒满足条件 $\phi_{20} - \phi_{10} = 0$ 。这样，二束相干光在空间各点的位相差仅决定于光程差： $\Delta\phi =$

$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1r_1 - n_2r_2)$ ，其中 λ 为光在真空中的波长， n 为介质的折射率。空间点 P 的

位置可由 (r_1, r_2) 决定。这样，干涉明条纹的空间位置由下式决定：

$$\delta = n_1r_1 - n_2r_2 = \pm k\lambda$$

干涉暗条纹的空间位置

$$\delta = n_1r_1 - n_2r_2 = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

其中 $k=0, 1, 2\cdots$ 。这就是确定干涉条纹空间位置的一般公式。

3. 杨氏双缝干涉

观察杨氏双缝干涉效应的仪器，应有以下几部分装置：双缝（分波阵面法），用它来获得两束相干光；屏幕，用来观察干涉条纹的空间位置；以及光源。平行光以 θ 角斜入射照亮双缝，如图17-2所示。

在同一波阵面上选取二个相干波源 S_1 和 S_2 （注意，不是双缝 S_1 和 S_2' ），则屏幕上任一点 P 的光程差（空气折射率 $n=1$ ）

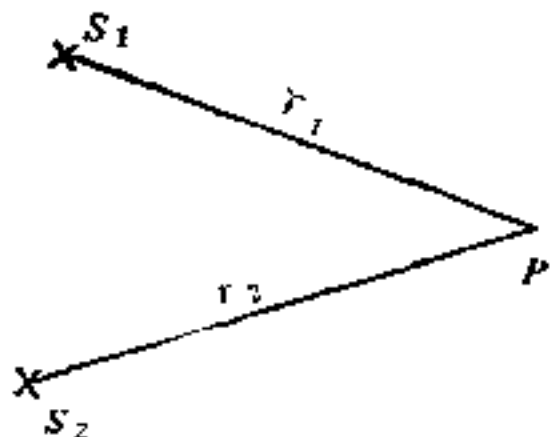


图 17-1

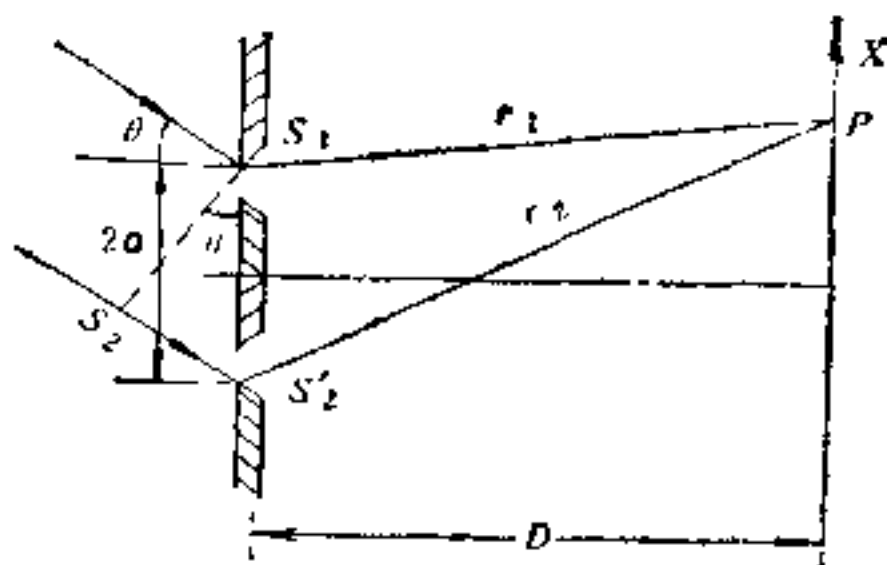


图 17-2

$$\delta = (r_2 + 2a \sin \theta) - r_1 = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{明纹位置} \\ \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} & \text{暗纹位置} \end{cases}$$

P 点在屏幕上的位置可由坐标 x 表示，则

$$r_2 - r_1 = \frac{2a}{D} x$$

$$\delta = 2a \sin \theta + \frac{2a}{D} x$$

k 级明纹位置

$$x_k = \frac{D}{2a} (\pm k\lambda - 2a \sin \theta)$$

k 级暗纹位置

$$x_k = \frac{D}{2a} \left[\pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} - 2a \sin \theta \right]$$

注意：两条相邻干涉条纹（明条纹或暗条纹）之间的距离为：

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D}{2a} \lambda$$

可见， Δx 与入射角 θ 和干涉级次 k 无关，即相邻各级干涉条纹的间距是相同的。

当平行光正入射时， $\theta=0$ ，则

$$x_k = \begin{cases} \pm \frac{D}{2a} k\lambda & k \text{级明纹} \\ \pm \frac{D}{2a} (2k+1) \frac{\lambda}{2} & k \text{级暗纹} \end{cases}$$

4. 薄膜干涉

薄膜干涉的观察：光源 S 以入射角 i 照亮薄膜上表面一点，透射光经薄膜下表面反射后透射出上表面，它与在薄膜上表面反射的光平行而且相干。经透镜会聚于焦平面上，用屏幕观察干涉条纹的空间位置。这是用薄膜上表面（分振幅法）获得反射与透射两束相干光的，如图17-3所示。

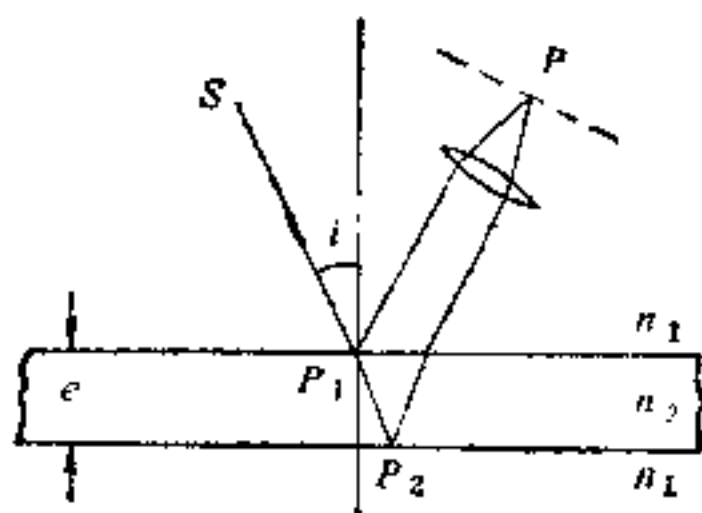


图 17-3

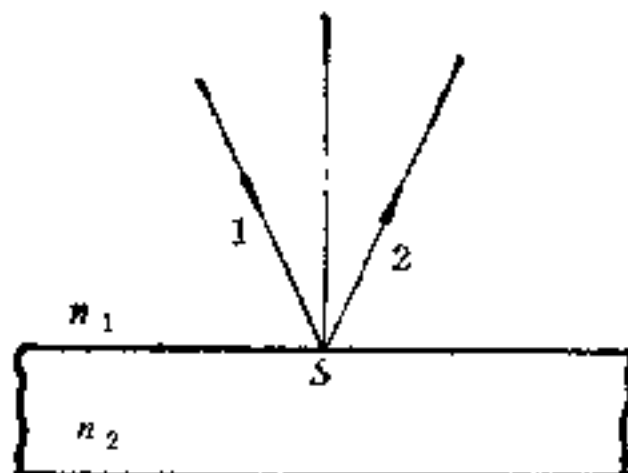


图 17-4

这两束相干光的光程差为

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}$$

薄膜干涉中的难点是，当光从光疏介质射向光密介质发生反射时，在反射点处，光振动发生 π 位相突变。即在 $n_1 < n_2$ 时，光振动旋转矢量在 S 点突然反向。而光在不同介质的分界面透射时，以及光从光密介质射向光疏介质而发生反射时，不发生这种 π 位相突变。注意：光波的干涉效应决定于位相差，并不是决定于光程差。因此 π 位相突变，必将影响空间各点的干涉效应。为计算方便，可把 π 位相突变，等效为半个波长的附加光程。而假设增加 $\lambda/2$ 光程，或减少 $\lambda/2$ 光程，效果是相同的，即有相同的 π 突变。若规定前者，即反射光存在 π 位相突变相当于增加 $\lambda/2$ 的附加光程，通常把 π 位相突变叫做半波损失现象。于是，在薄膜干涉中，两束相干光的光程差为

$$\text{当 } n_1 < n_2 \quad \delta = r_2 - \left(r_1 + \frac{\lambda}{2} \right) = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{当 } n_1 > n_2 \quad \delta = \left(r_2 + \frac{\lambda}{2} \right) - r_1 = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

由于 k 级暗纹规定为 $\delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ 的人为性（也可规定为 $\delta = \pm(2k-1)\frac{\lambda}{2}$ ），以及

半波损失中规定的人为性（即可规定附加光程 $\frac{\lambda}{2}$ 或 $-\frac{\lambda}{2}$ ），一般不能把干涉条纹的 k 值

与条纹的序数（即第几条条纹的顺序编号）等同起来。

薄膜干涉条纹的位置，取决于照射光的入射角 i 与薄膜厚度 e 。如确定其中一个量不变，而改变另一个量，则相应出现两种特殊情况——等厚干涉（ i 不变）与等倾干涉（ e 不变）。本章仅研究等厚干涉的情况，即平行单色光以一定的入射角 i 照亮薄膜，则凡膜厚 e 相等的地方，出现同一条干涉条纹，膜厚不同处，对应不同的干涉条纹。

正入射时， $i=0$ ，则光程差

$$\delta = 2n_2 e \pm \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & \text{明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases}$$

即厚度

$$e = \begin{cases} \frac{1}{4n_2}(2k+1)\lambda & \text{明纹} \\ \frac{2}{4n_2}k'\lambda, \quad k' = k \text{ 或 } k+1, & \text{暗纹} \end{cases}$$

明暗干涉条纹分别对应着光强的极大值与极小值，中间并没有截然分明的界线。光强在极大值与极小值之间是连续变化的。因此，实验中往往以明纹或暗纹的中心线对应明暗条纹的位置。

5. 劈尖干涉与牛顿环是等厚干涉的典型例子

劈尖干涉：干涉条纹空间位置，决定于

$$\delta = 2n_2 e \pm \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & \text{明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases}$$

$$e(x) = x \cdot \tan \theta \approx x \sin \theta$$

相邻明（或暗）条纹间距为

$$\Delta x \approx l = \frac{\lambda}{2n_2 \sin \theta}$$

对上述结果应注意：（1）劈尖的 θ 角很小，一般应在 1° 以内，这样入射光近似地同时垂直劈尖的上下表面。劈尖的间隙厚度通常仅有微米数量级大小。（2）光

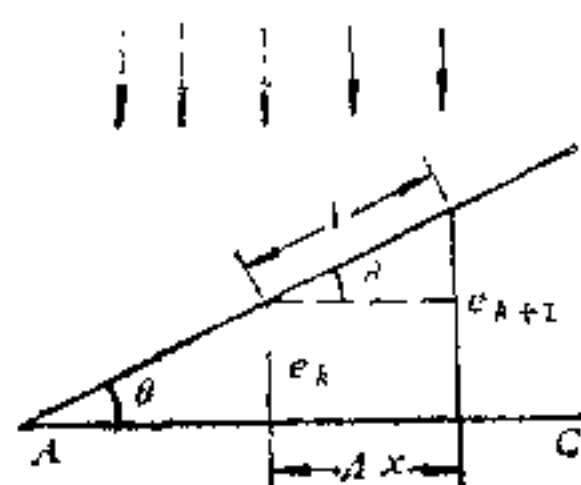


图 17-5

波在劈尖的上表面分为两束相干光，透射光在下表面反射后，与上表面反射光叠加，干涉条纹发生在劈尖的上表面附近。一般来说，在构成空气劈尖两块玻璃板中，入射光在上玻璃板的上表面和下玻璃板的下表面也会被反射和透射，但因玻璃板引起的光程差过大，它们并不能参与干涉现象。（3）在劈尖的交棱 A 处，厚度 $e=0$ ，光程差 $\delta = \frac{\lambda}{2}$ ，从干涉级次来说，因 $k=0$ ，它是 0 级暗纹的位置，但从干涉条纹的序数来说，它也是第一条暗纹的中心线，习惯上叫它是第一暗条纹。

牛顿环：牛顿环的明、暗环半径为（对反射光）：

$$r_k = \begin{cases} \sqrt{\frac{(2k-1)}{2} \frac{R\lambda}{n_2}} & \text{明环} \\ \sqrt{\frac{kR\lambda}{n_2}} & \text{暗环} \end{cases}$$

$$k=0,1,2,\dots$$

注意：（1）牛顿环是等厚干涉条纹，是以接触点为中心的一组同心圆，（2）若牛顿环中的间隙为空气薄层，则接触点（ $k=0$ ）应是暗斑点（即薄膜厚度为零），叫第一暗环。若在实验中发现是明斑点，这是由于透镜与玻璃板之间没有接触或有灰尘与污物造成的。（3）玻璃板与透镜之间形成的空气劈尖，其夹角 θ 是随明暗环半径 r 的增大而增大的，而牛顿环的干涉条纹是随之变密的。

（注：光是电磁波，干涉是波动的本性。任意二个波的空间叠加，必定发生能量的重新分布，产生相应的干涉条纹。从这个意义上讲，任意二个波列之间，无例外地发生“干涉”。

波没有固有意义上的不相干，而只有观察意义上的不相干。人们用探测器去探测在给定位置的波的强度，这种探测是需要时间的，通常由于测量过程的时间远比单个波列的传播时间长，因此实际上探测到的是许多成对波列叠加后强度的时间平均值。各对波列之间不可能有固定位相差，所以不可能形成稳定的干涉条纹，测量过程就把干涉图样“平均掉”了。

激光的出现，改善了观测条件。当激光的波列足够长，而探测器又足够灵敏，探测器对干涉条纹的测量时间（或响应时间）比单个激光波列传播的时间要短，则任意二个波列之间的干涉条纹可以观测到，即可以观测到不同波列叠加后的暂态干涉。近代激光实验中也的确观测到了这一现象。这时就无需坚持“两个不同波列之间不发生干涉”的论断。）

三、解题示范（略）

四、习题与解答

17-1 在杨氏双缝实验中，当作如下调节时，屏幕上的干涉条纹将如何变化？（要说明理由）

（1）使两缝之间的距离逐渐减小；

（2）保持双缝的间距不变，使双缝与屏幕的距离逐渐减小；

（3）如图所示，把双缝中的一条狭缝遮住，并在两缝的垂直平分线上放置一块平面反射镜。

答：

由 k 级明纹位置

$$x_k = \pm \frac{D}{2a} k \lambda$$

和相邻明条纹之间的距离

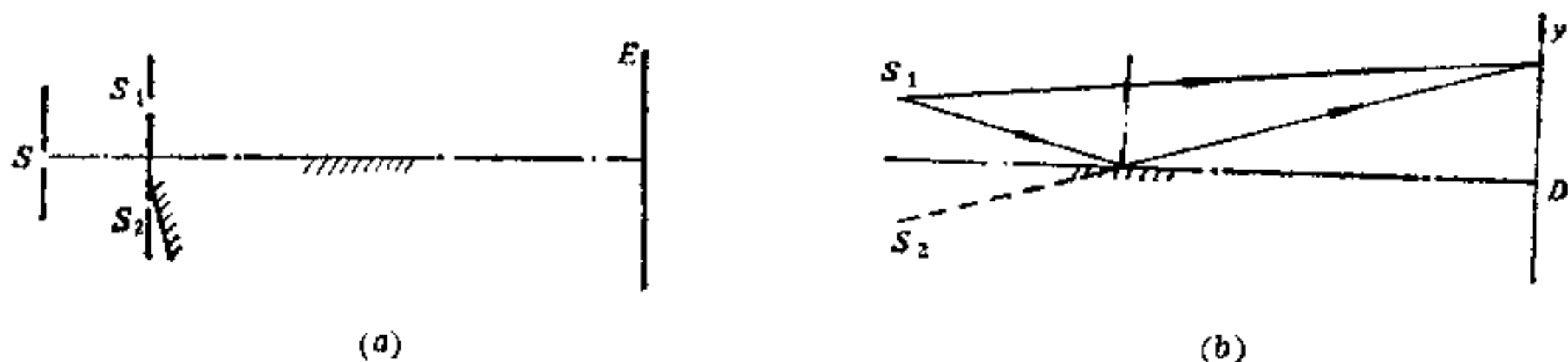
$$\Delta x = \frac{D}{2a} \lambda$$

（1）当两缝之间距离 a 减小时，则 $|x_k|$ 增大，各级条纹向外侧移动，条纹间距 Δx 增

大。

(2) 当缝与幕的间距 D 减小时, 则各级条纹向中心移动, $|x_k|$ 减小, 而条纹间距 Δx 也减小。

(3) 由于镜面反射时存在半波损失, 光束到达屏上各点时有附加光程差 $\lambda/2$, 所以, 屏上原有干涉条纹都由明变暗, 由暗变明, 但条纹间距不变。



题 17-1 图

17-2 如图所示, 设光线 a 、 b 从同相相同的 A 、 B 点传至 P , 试讨论:

(1) 在图中的三种情形下, 光线 a 、 b 在相遇处 P 是否存在光程差? 为什么?

(2) 若 a 、 b 为相干光, 那么在相遇处的干涉情况怎样?

答:

(1) a : 不存在光程差。由于 A 、 B 是同位相的两点, 透镜也不会带来附加光程差, 所以, A 、 B 到 P 点的光程相同, 不存在光程差。

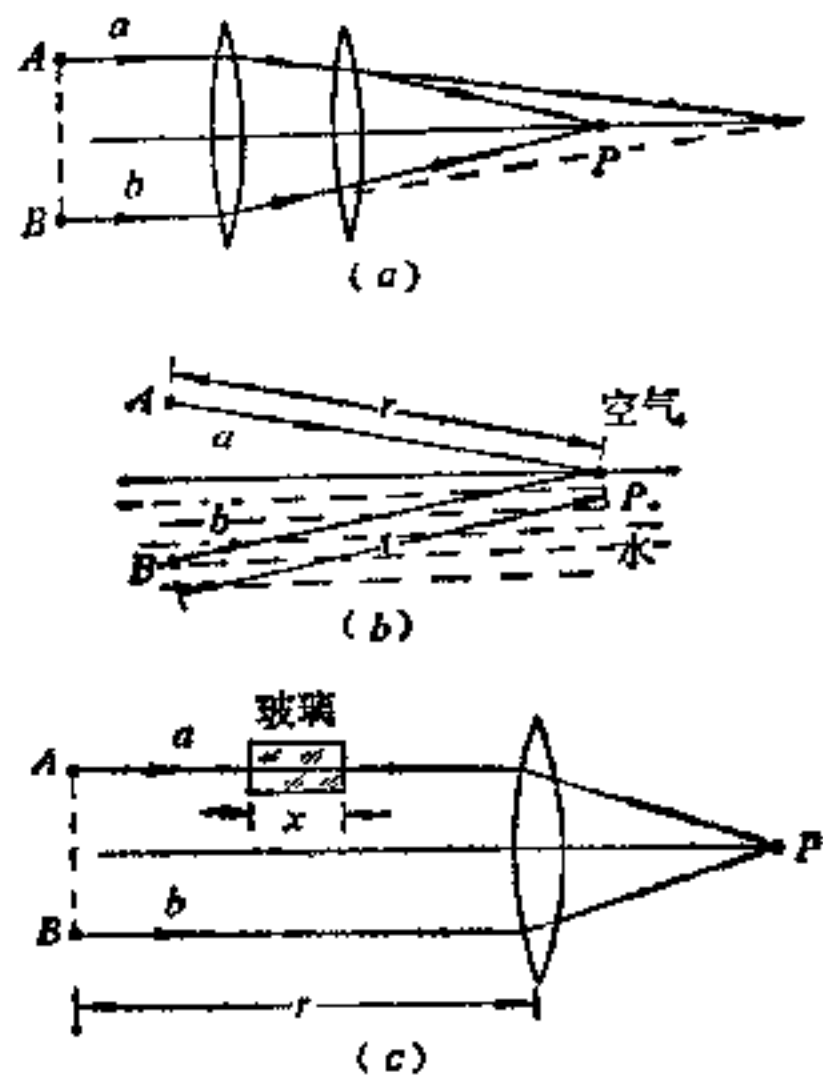
b : 存在光程差。光程是空间距离乘以折射率。 AP 与 BP 虽然距离相同, 但介质的折射率不同, 故形成光程差 $\delta = (n_k - 1)r$ 。

c : 存在光程差。因为光通过玻璃和通过同样距离的空气, 光程是不同的, 光程差为 $\delta = (n - 1)x$ 。

(2) a : 在 P 点, $\delta = \pm k\lambda = 0$, 是零级亮纹。

b : 在 P 点, $\delta = (n_k - 1)r$, 干涉情况决定于 P 点位置, 即 r 的大小。

c : 在 P 点, $\delta = (n - 1)x$, 干涉情况决定于玻璃折射率 n 和玻璃宽度 x 。



题 17-2 图

17-3 由汞弧灯发出的光, 通过一绿色滤光片后, 照射到相距为 0.60mm 的双缝上, 在距双缝 2.5m 远处的屏幕上出现干涉条纹。现测得相邻两明条纹中心的距离为 2.27mm , 求入射光的波长。

解:

由条纹间距
$$\Delta x = \frac{D}{2a} \lambda$$

则
$$\lambda = \frac{2a}{D} \Delta x = \frac{0.60 \times 10^{-3} \times 2.27}{2.5} \times 10^7 = 5448 \text{ \AA}$$

17-4 在双缝装置中, 用一很薄的云母片 ($n=1.58$) 覆盖其中的一条狭缝, 这时屏幕上的第七级明条纹恰好移到屏幕中央原零级明条纹的位置。如果入射光的波长为 5500 \AA , 则这云母片的厚度应为多少?

解:

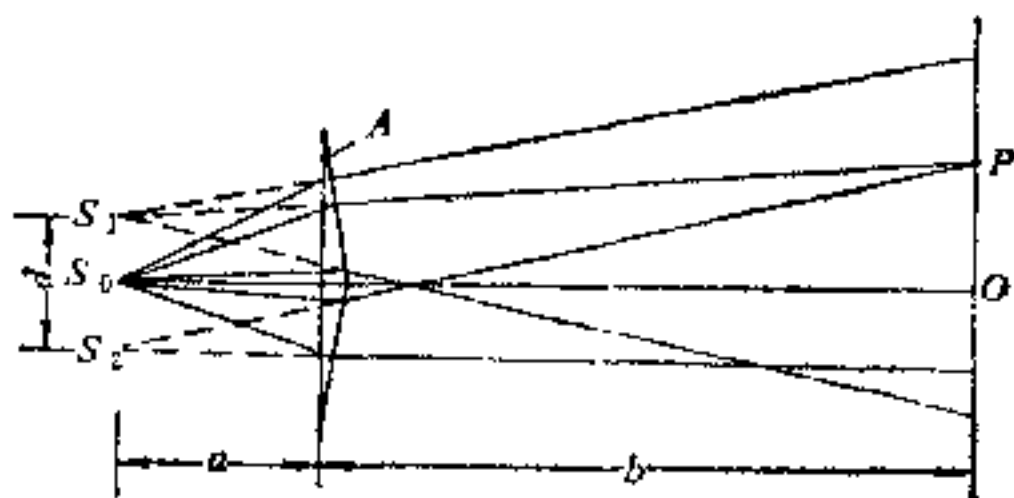
因云母片引起两光束的光程差的变化为 $(n-1)x$, 明条纹移动 7 级, 表明光程差的变化为 7λ ,

$$\therefore (n-1)x = 7\lambda$$

$$x = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 5500}{1.58-1} \times 10^{-7} = 6.64 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

17-5 一菲涅耳双棱镜干涉仪, 如图所示, 棱镜之顶角 A 非常小, 由狭缝光源 S_0 发出的光, 通过双棱镜后分成两束相干光, 可把这两束相干光看作分别由虚光源 S_1 和 S_2 直接发出。 S_1 和 S_2 的间距为 $d=2aA(n-1)$, 其中 a 表示狭缝到双棱镜的距离, n 表示棱镜材料的折射率, 若 $n=1.5$, $A=6'$, $a=20\text{cm}$, 试求:

(1) 两虚光源之间的距离;



题 17-5 图

(2) 用波长 5000 \AA 的绿光照射狭缝 S_0 , 在距棱镜 $b=2\text{m}$ 的屏幕上干涉条纹的间距;

解:

(1) S_1 、 S_2 的间距

$$\begin{aligned} d &= 2aA(n-1) \\ &= 2 \times 20 \times \frac{\pi \times 6}{180 \times 60} (1.5-1) \\ &= 0.035\text{cm} = 0.35 \text{ mm} \end{aligned}$$

(2) 条纹间距

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{D\lambda}{d} = \frac{(a+b)\lambda}{d} = \frac{(20+200) \times 5.00 \times 10^{-5}}{0.035} \\ &= 0.31\text{cm} = 3.1 \text{ mm} \end{aligned}$$

17-6 (1) 在白光的照射下, 我们通常可看到呈彩色花纹的肥皂膜和肥皂泡, 并且当发现有黑色斑纹出现时, 就预示着泡膜即将破裂, 试解释这一现象。

(2) 在单色光照射下观察牛顿环的装置中, 如果在垂直于平板的方向上移动平凸透镜, 那么, 当透镜离开或接近平板时, 牛顿环将发生什么变化? 为什么?

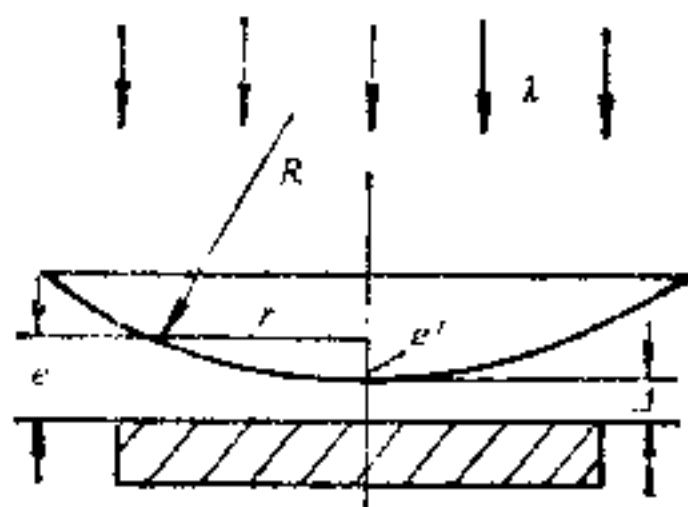
答:

(1) 在白光照射下, 肥皂泡上的干涉是薄膜干涉; 其光程差为

$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$, 不同波长的光, 其颜色不同, 干涉加强处也不同, 故呈现出彩色花纹。当泡膜即将破裂时, 泡膜的厚度 $e \rightarrow 0$, 因此, $\delta \rightarrow \lambda/2$, 而任何波长的光都有 $k=0$ 的干涉暗纹, 因此肥皂膜此时呈黑色。故肥皂膜出现黑色斑纹预示泡膜将破裂。

(2) 形成牛顿环处的空气层厚度为 e , 则

$$2e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & \text{明环} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗环} \end{cases}$$



题 17-6 图

设 Δ 为透镜顶点与玻璃板的间距, 则由题17-6图可知,

$$e = e' + \Delta$$

由教材 (17-9) 式,

$$e' = \frac{r^2}{2R}$$

故

$$e = \frac{r^2}{2R} + \Delta$$

将 e 代入明暗环公式, 则

$$r_k = \begin{cases} \sqrt{\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda - 2\Delta\right]R} & \text{明环} \\ \sqrt{(k\lambda - 2\Delta)R} & \text{暗环} \end{cases}$$

可见, 当透镜离开玻璃板时, Δ 增大, 即光程差增大, 则 k 级明环的半径 r_k 减小, 即牛顿环向中心收缩。反之, 当透镜移近玻璃时, 牛顿环就离开中心向外扩张。

17-7 一平面单色光波垂直照射在厚度均匀的薄油膜上, 油膜覆盖在玻璃板上, 油的折射率为1.30, 玻璃的折射率为1.50, 若单色光的波长可由光源连续可调, 可观察到5000 Å 与7000 Å 这两个波长的单色光在反射中消失, 试求油膜层的厚度。

解:

某一波长的光在反射中消失, 表明该波长的光在反射时为干涉暗条纹。故光程差为

$$\delta = 2n_2e = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

(油膜两面上都有半波损失, 故不引起附加光程差)。根据题意, 则有

$$\text{对 } \lambda_1: \quad 2n_2e = (2k_1 + 1)\lambda_1/2$$

$$\text{对 } \lambda_2: \quad 2n_2e = (2k_2 + 1)\lambda_2/2$$

因 e 一定时, λ 小则 k 值大, 故有 $k_1 > k_2$ 。又因 λ_1 与 λ_2 之间没有其它波长的光在反射中消失, 故 λ_1 、 λ_2 的干涉级次只可能相差一级, 故

$$k_2 = k_1 - 1$$

$$\therefore \quad (2k_1 + 1)\lambda_1 = (2k_1 - 1)\lambda_2$$

$$\frac{2k_1 + 1}{2k_1 - 1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{7000}{5000} = \frac{7}{5}$$

$$\text{解得} \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 2$$

$$e = \frac{(2k_1 + 1)}{2n_2} \frac{\lambda_1}{2} = \frac{(2 \times 3 + 1)}{2 \times 1.30} \times \frac{5000}{2} = 6731 \text{ \AA} = 6.731 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

17-8 白光垂直照射到空气中一厚度为 3800 \AA 的肥皂膜上, 设肥皂膜的折射率为 1.33 , 试问该膜的正面呈现什么颜色? 背面呈现什么颜色?

答:

呈现颜色的光, 必定在反射或透射中是相长干涉。由明纹条件, 在反射光中, 有

$$2ne - \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{2ne}{k + \frac{1}{2}} = \frac{4 \times 1.33 \times 3800}{2k + 1} = \frac{20216}{2k + 1}$$

已知白光的波长范围为 $4000 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 7600 \text{ \AA}$, 则

$$\frac{20216}{7600} \leq 2k + 1 \leq \frac{20216}{4000}, \text{ 即 } 2.66 \leq 2k + 1 \leq 5.05$$

因此只有 $k = 1, 2$ 能满足以上条件

代入上式,

$$\lambda_1 = \frac{20216}{2 \times 1 + 1} = \frac{20216}{3} = 6738.7 \text{ \AA} \text{ (红光)}$$

$$\lambda_2 = \frac{20216}{2 \times 2 + 1} = \frac{20216}{5} = 4043.2 \text{ \AA} \text{ (紫光)}$$

故肥皂膜正面呈紫红色。

在反射光中, 暗纹条件为

$$2ne - \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2ne}{k + 1} = \frac{10108}{k + 1}$$

同理, 可见光波长 $4000 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 7600 \text{ \AA}$, 故

$$\frac{10108}{7600} \leq k + 1 \leq \frac{10108}{4000}$$



即

$$1.33 \leq k+1 \leq 2.53$$

所以只有 $k=1$ 满足条件,

$$\therefore \lambda = \frac{10108}{1+1} = 5054 \text{ \AA} \text{ (绿色)}$$

即反射光中 $\lambda = 5054 \text{ \AA}$ 的绿光是相消干涉, 但在透射光中是相长干涉, 故肥皂膜背面呈绿色。

17-9 (1) 有一层折射率为 1.33 的薄油膜, 当我们的观察方向与膜面的法线方向成 30° 角时, 可看到由油膜反射的光呈波长为 5000 \AA 的绿色光, 试问油膜的最薄厚度为多少?

(2) 如果从膜面的法线方向观察, 则反射光的颜色如何?

解:

(1) 由明纹条件

$$\delta = 2e\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

$$\therefore e = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)5000}{2\sqrt{1.33^2 - 0.5^2}} = \left(k + \frac{1}{2}\right)2028.5 \text{ \AA}$$

当 $k=0$ 时, 膜厚 e 最小,

$$e_{\min} = 1014.3 \text{ \AA}$$

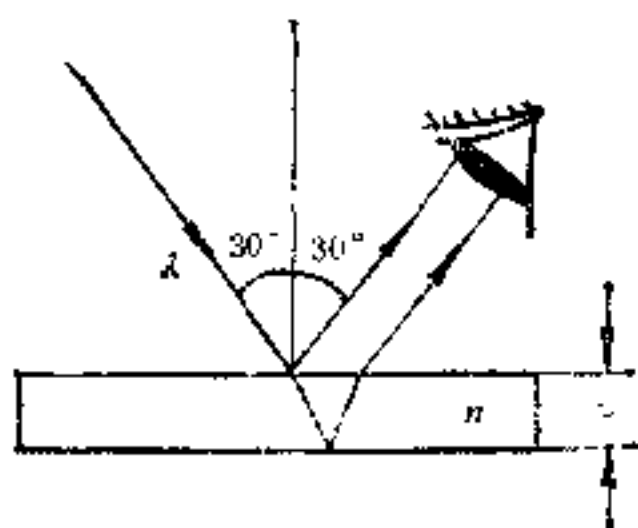
(2) 若沿膜面法线方向观察, 则 $i=0$, 明纹的条件为

$$2ne = \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

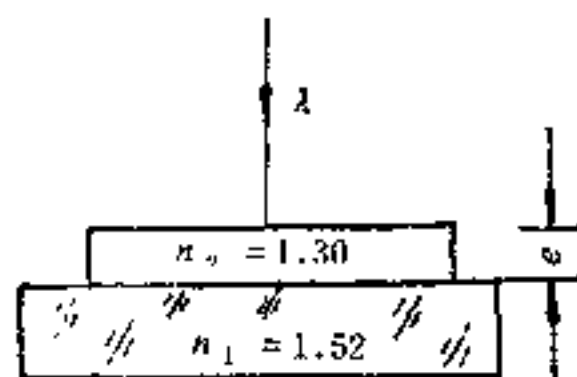
$$\lambda = \frac{2ne}{k + \frac{1}{2}} = \frac{2 \times 1.33 \times 1014.3 \times 2}{2k+1}$$

$$= \frac{5396}{2k+1}$$

在可见光范围内, 应取 $k=0$, 故 $\lambda = 5396 \text{ \AA}$, 观察到的反射光呈黄绿色。



题 17-9 图



题 17-10 图

17-10 在棱镜 ($n_1=1.52$) 表面涂一层增透膜 ($n_2=1.30$), 为使此增透膜适用于 5500 \AA 波长的光, 膜的厚度应取何值?

解:

增透膜是使反射光干涉相消。由图可知, 增透膜两面皆有半波损失, 故不存在附加光程差, 则

$$2ne = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$e = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}$$

$$= \frac{(2k+1) \times 5500}{4 \times 1.30} = (2k+1) \times 1058$$

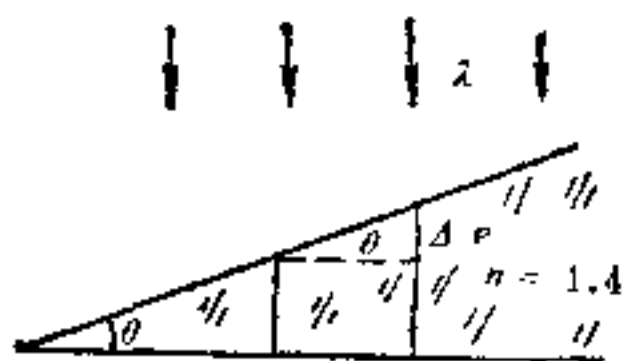
$k=0$ 时, 增透膜最薄的厚度为

$$e_{\min} = 1058 \text{ \AA}$$

17-11 有一劈尖, 折射率 $n=1.4$, 尖角 $\theta=10^{-4} \text{ rad}$, 在某一单色光的垂直照射下, 可测得两相邻明条纹之间的距离为 0.25 cm , 试求:

(1) 此单色光在空气中的波长。

(2) 如果劈尖长为 3.5 cm , 那么总共可出现多少条明条纹。



题 17-11 图

解:

(1) 由明条纹条件

$$2ne - \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

亮纹宽度

$$l = \frac{\Delta e}{\sin \theta} = \frac{\lambda}{2n \cdot \sin \theta}$$

因尖角很小; 有

$$\sin \theta \approx \theta$$

\therefore

$$\lambda = 2n / \sin \theta$$

$$= 2 \times 1.4 \times 0.25 \times 10^{-4} = 0.7 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

$$= 7000 \text{ \AA}$$

(2) 因相邻明纹间距为 $l=0.25 \text{ cm}$, 劈长为 $L=3.5 \text{ cm}$, 而棱边处为暗纹, 故明条纹数为

$$N = \frac{L}{l} = \frac{3.5}{0.25} = 14 (\text{条})$$

17-12 一玻璃劈的末端的厚度为 0.005 cm , 折射率为 1.5 , 今用波长为 7000 \AA 的平行单色光, 以入射角为 30° 角的方向射到劈的上表面, 试求:

(1) 在玻璃劈的上表面所形成的干涉条纹数目。

(2) 若以尺寸完全相同的由两玻璃片形成的空气劈代替上述的玻璃劈, 则所产生的条纹数目又为多少。

解:

(1) 劈尖为玻璃介质时, 明纹条件为

$$2e_k \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

$$e_k = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

相邻条纹对应的厚度差

$$\begin{aligned} \Delta e = e_{k+1} - e_k &= \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{7000}{2\sqrt{1.5^2 - 0.5^2}} \\ &= 2475 \text{ \AA} \end{aligned}$$

$k=0$ 时,

$$e_0 = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 1237.5 \text{ \AA}$$

故条纹数目

$$N = \frac{e_{\max} - e_0}{\Delta e} + 1 = \frac{5 \times 10^3 - 1237.5}{2475} + 1 = 202 \text{ 条}$$

(2) 若用空气劈尖, 则明纹条件改为: $2e_k \sqrt{1^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$

$$e_k = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\sqrt{1^2 - n_1^2 \sin^2 i}}$$

$$\Delta e = \frac{\lambda}{2\sqrt{1^2 - n_1^2 \sin^2 i}} = \frac{7000}{2 \times \sqrt{1 - 1.5^2 \times 0.5^2}} = 5292 \text{ \AA}$$

第一条明纹对应的膜厚为 $k=1$,

$$e_1 = \frac{7000}{4\sqrt{1 - 1.5^2 \times 0.5^2}} = 2646 \text{ \AA}$$

故明纹数目

$$\begin{aligned} N' &= \frac{e_{\max} - e_1}{\Delta e} + 1 = \frac{5 \times 10^3 - 2646}{5292} + 1 = 93.98 + 1 \\ &= 95 \text{ 条} \end{aligned}$$

17-13 下图为一干涉膨胀仪的示意图, AB 与 $A'B'$ 二平面玻璃板之间放一热膨胀系数极小的熔石英环柱 CC' , 被测样品 D 置于该环柱内, 样品的上表面与 AB 板的下表面形成一楔形空气层, 若以波长为 λ 的单色光垂直入射于此空气层, 就产生等厚干涉条纹, 设在温度 $t_0^\circ\text{C}$ 时, 测得样品的长度为 L_0 , 温度升高到 $t^\circ\text{C}$ 时, 测得样品的长度为 L , 并且在这过程中, 数得通过视场的某一刻线的干涉条纹数目为 N , 设环柱 CC' 的长度变化可忽略不计, 求证: 被测样品材料的热膨胀系数 β 为

$$\beta = \frac{N\lambda}{2L_0(t-t_0)}$$

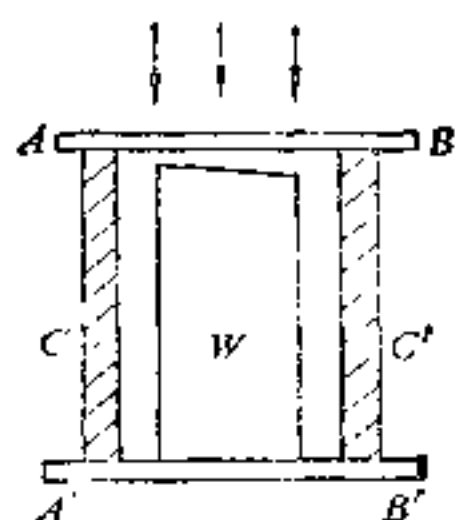


图 17-13 答

证明：

设视场中固定刻线处的空气厚度为 e ，由 k 级暗纹条件，

$$2ne_k + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

故

$$e_k = \frac{k\lambda}{2} \quad (n=1)$$

当温度升高时，样品膨胀，空气层厚度变小，光程差也随之减小。 k 级暗纹变成 $k-N$ 级暗纹，

$$e_{k-N} = \frac{(k-N)\lambda}{2}$$

空气层厚度变小，等于样品膨胀的伸长量

$$\therefore \Delta L = L - L_0 = e_k - e_{k-N} = \frac{N\lambda}{2}$$

由热膨胀系数的定义，可得

$$\beta = \frac{L - L_0}{L_0(t - t_0)} = \frac{N\lambda}{2L_0(t - t_0)}$$

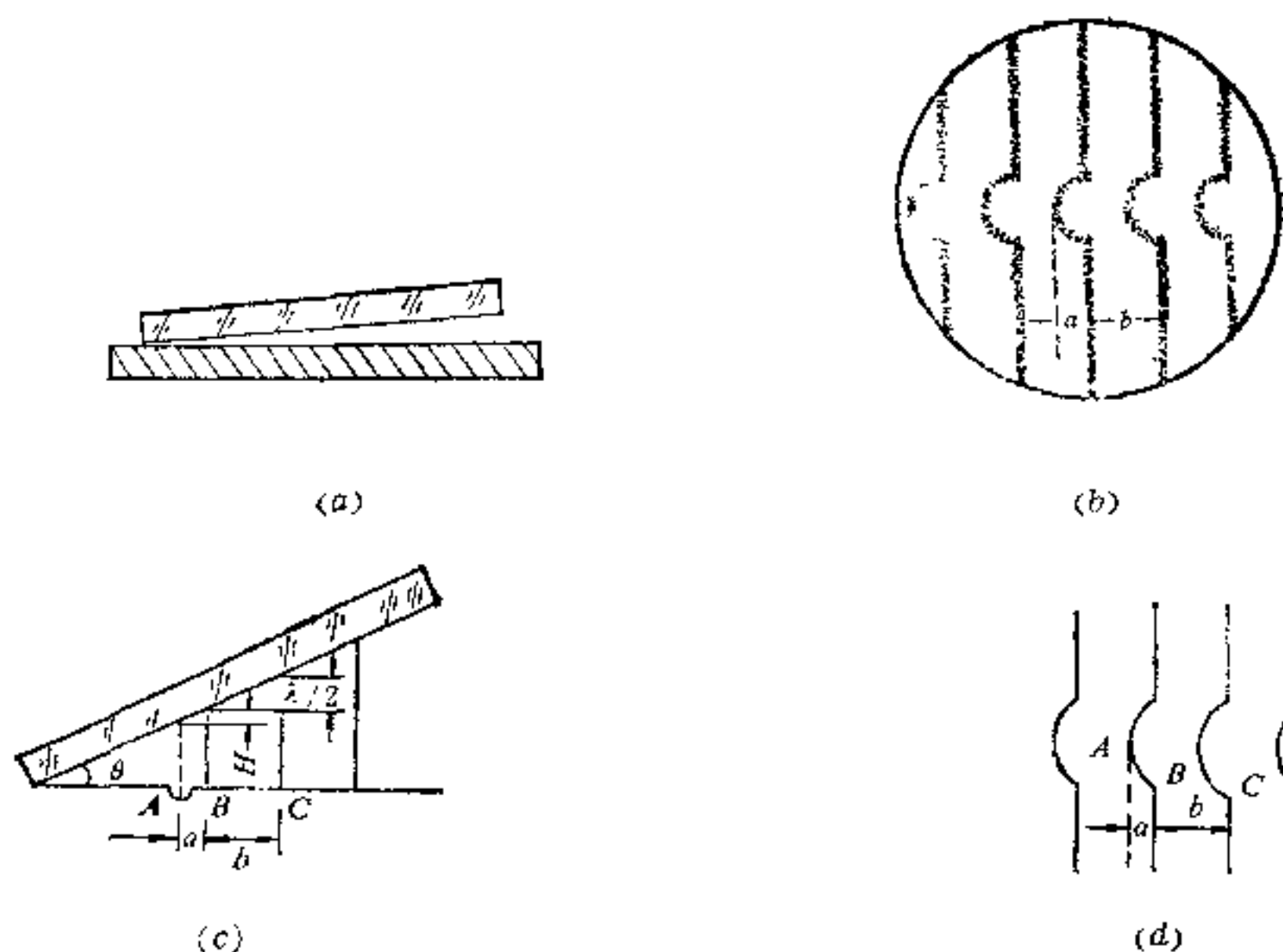
(另证：我们知道，在等厚干涉中，任何两条相邻的明条纹或暗条纹之间所对应的空气层厚度之差为 $\frac{\lambda}{2}$ ，既已知在升温过程中，通过视场中某刻线的干涉条纹为 N ，可知空气层

厚度变化为 $N \times \frac{\lambda}{2}$ ，代入热膨胀系数的定义式，也得相同的结果。)

17-14 利用空气劈尖的等厚干涉条纹，可以测量经精密加工后工件表面上极小纹路的深度，如图，在工件表面上放一平板玻璃，使其间形成空气劈尖，以单色光垂直照射玻璃表面，用显微镜观察干涉条纹。由于工件表面不平，观察到的条纹如图所示，试根据条纹弯曲的方向，说明工件表面上纹路是凹的还是凸的？并证明纹路深度或高度可用下式表示：

$$H = \frac{a}{b} \frac{\lambda}{2}$$

其中 a 、 b 由图所示。



题 17-14 图

说明：等厚干涉条纹反映了同一干涉条纹对应相同的薄膜空气层厚度。因此， A 、 B 二点处的空气厚度应该相同，即 $e_A = e_B$ 。由于干涉条纹是向空气劈尖的尖角方向弯曲的，若工件为理想平面，应有 $e_A < e_B$ 。见图(d)。又因 B 点处的干涉条纹无异常变化，可知 B 点处工件表面正常，无凹凸现象。这样就只可能是工件表面在 A 点处是凹的，其深度为 $H = e_B - e_A$ 。

证明：

由图(c)可知，相邻条纹的水平间距为 b ，相应的厚度差应为 $\lambda/2$ ，则

$$\tan \theta \approx \frac{\lambda/2}{b} = \frac{H}{a}$$

故纹路深度

$$H = \frac{a}{b} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

17-15 (1) 若用波长不同的光观察牛顿环， $\lambda_1 = 6000 \text{ \AA}$ ， $\lambda_2 = 4500 \text{ \AA}$ ，观察到用 λ_1 时的第 k 个暗环与用 λ_2 时的第 $k+1$ 个暗环重合，已知透镜的曲率半径是 190 cm 。求用 λ_1 时第 k 个暗环的半径。

(2) 又如在牛顿环中用波长为 5000 \AA 的第 5 个明环与用波长为 λ_2 时的第 6 个明环重合，求波长 λ_2 。

解：

(1) 首先要注意，第一个暗环对应 $k=0$ ，它位于透镜与平板玻璃接触点处。因此，第 k 个暗环对应着 $(k-1)$ 级。由题意：

$$\sqrt{(k-1)R\lambda_1} = \sqrt{kR\lambda_2}$$

\therefore

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{6000}{6000 - 4500} = 4$$

由暗环半径公式, 则第 k 个暗环的半径

$$r_{k-1} = \sqrt{(k-1)R\lambda_1} = \sqrt{3 \times 190 \times 6000 \times 10^{-9}} = 0.185 \text{ cm}$$

(2) 由明环半径公式

$$r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}$$

顺序数第5个明环, 就是 $k=5$ 级明环,

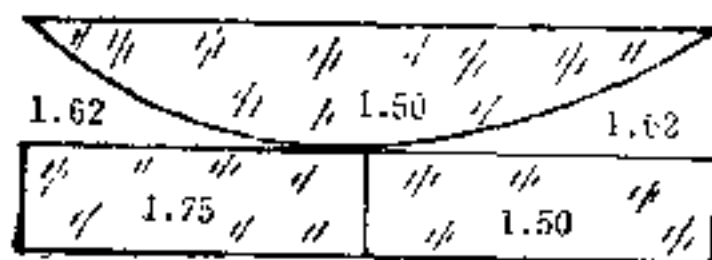
由题意

$$\sqrt{\frac{(2 \times 5 - 1)R\lambda_1}{2}} = \sqrt{\frac{(2 \times 6 - 1)R\lambda_2}{2}}$$

则

$$\lambda_2 = \frac{2 \times 5 - 1}{2 \times 6 - 1} \lambda_1 = \frac{9}{11} \times 5000 = 4090 \text{ Å}$$

17-16 在图示的装置中, 平面玻璃板是由两部分组成的 (冕牌玻璃 $n=1.50$ 和火石玻璃 $n=1.75$), 透镜是用冕牌玻璃制成, 而透镜与玻璃板之间的空间充满着二硫化碳 ($n=1.62$)。试问由此而成的牛顿环的花样如何? 为什么?



题 17-16 图

解:

在牛顿环的右半部, 因仅在二硫化碳 ($n=1.62$) 的上表面有半波损失, 产生附加光程差, 故

$$\delta = 2ne - \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{明环} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗环} \end{cases}$$

当 $e=0$, 即在顶点处, 应是 $k=0$ 级暗环。

在牛顿环的左半部, 二硫化碳的上下表面都有半波损失, 故不产生附加光程差,

$$\delta = 2ne = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{明环} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗环} \end{cases}$$

$e=0$ 即在顶点处, 应为 $k=0$ 级明环。这样, 牛顿环左右两半部分的明暗花样正好相反。

17-17 图中, 设平凸透镜的凸面是一标准样板, 其曲率半径 $R_1=102.3\text{cm}$, 而另一个凹面是一凹面镜的待测面, 半径为 R_2 , 如在牛顿环实验中, 入射的单色光的波长 $\lambda=5893\text{Å}$, 测得第4暗环的半径 $r_4=2.25\text{cm}$, 试求 R_2 为多少?

解:

已知牛顿环 k 级暗环条件为

$$2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

或

$$2e = k\lambda$$

由图可知,

$$\begin{aligned} r_k^2 &= R_1^2 - (R_1 - e_1)^2 \\ &= R_2^2 - (R_2 - e_2)^2 \end{aligned}$$

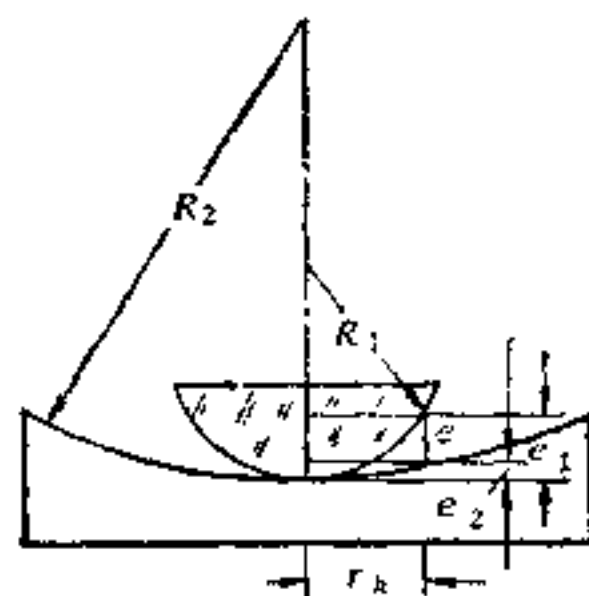
化简得 $r_k^2 = (2R_1 - e_1)e_1 = (2R_2 - e_2)e_2$

当 $e_1 \ll R_1, e_2 \ll R_2$

则 $e_1 = \frac{r_k^2}{2R_1}, e_2 = \frac{r_k^2}{2R_2}$

$$e = e_1 - e_2 = \frac{r_k^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$2e = r_k^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = k\lambda$$



题 17-17 图

第 4 个暗环, 即相应于 $k=3$ 级暗环,

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{k\lambda}{r_k^2} = \frac{1}{102.3} - \frac{3 \times 5893 \times 10^{-8}}{2.25^2}$$

\therefore

$$R_2 = 102.7 \text{ cm}$$

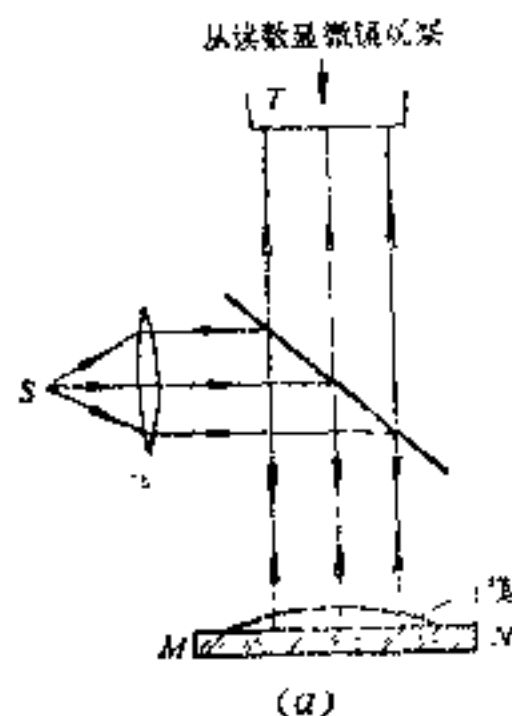
17-18 如图所示的实验装置中, 平面玻璃片 MN 上放有一油滴, 当油滴展开成圆形油膜时, 在波长 $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ 的单色光垂直入射下, 从反射光中观察油膜所形成的干涉条纹, 已知玻璃的折射率 $n_1 = 1.50$, 油膜的折射率 $n_2 = 1.20$, 问:

(1) 当油膜中心最高点与玻璃片上表面相距 $h = 12000 \text{ \AA}$ 时, 看到的条纹情况如何? 可看到几条明条纹? 明条纹所在处的油膜厚度为多少? 中心点的明暗程度如何?

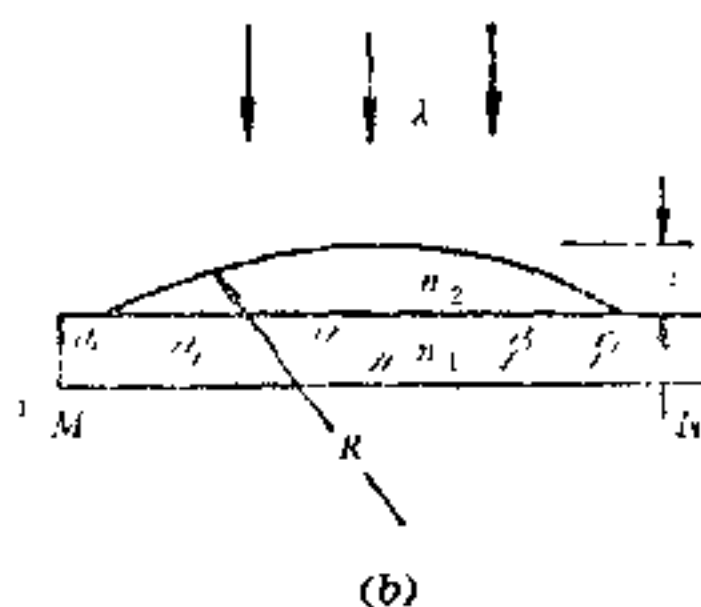
(2) 当油膜继续摊展时, 所看到的条纹情况将如何变化? 中心点的情况如何变化?

解:

(1) 因油膜两面上都有半波损失, 故无附加光程差,



(a)



(b)

题 17-18 图

$$\delta = 2n_2e = \begin{cases} k\lambda & \text{明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases}$$

讨论:

顶点处 $e = h$,

$$\delta = 2n_2 h = 2 \times 1.20 \times 12000$$

$$= 28800 \text{ \AA}$$

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{28800}{6000} = 4.8$$

结果并非整数或半整数，故不是明纹（或暗纹）位置，但在 $k=5$ 级明纹附近。

在边缘处， $e=0$ ，即 $k=0$ ，应为0级明条纹。

可看到的条纹数：因 $0 \leq k \leq 4.8$ ，故共有 $k=0, 1, 2, 3, 4$ 五条明条纹。

相应的油膜厚度： $e = \frac{k\lambda}{2n_2} = \frac{k \times 6000}{2.4} = k \times 2500 \text{ \AA}$ ，将 k 值代入，可得油膜相应的厚度分别为 $0, 2500 \text{ \AA}, 5000 \text{ \AA}, 7500 \text{ \AA}, 10000 \text{ \AA}$ 。

(2) 当油膜继续摊展时，油膜边缘保持明条纹，其中半径逐渐扩大。由于摊展时厚度减少，明条纹变稀，即油膜包含的明条纹数目减少。到最后时，油膜摊展为薄膜，整个油膜满足 $k=0$ 级亮纹条件。

17-19 (1) 迈克尔逊干涉仪可用来测量单色光的波长，当 M_2 移动距离 $\Delta d = 0.3220 \text{ mm}$ 时，测得某单色光的干涉条纹移过 $\Delta n = 1024$ 条，试求该单色光的波长。

(2) 在迈克尔逊干涉仪的 M_2 镜前，当插入一薄玻璃片时，可观察到有150条干涉条纹向一方移过，若玻璃片的折射率 $n = 1.632$ ，所用的单色光的波长 $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ，试求玻璃片的厚度。

解：

(1) M_2 移动 Δd ，则光程差改变 $\Delta \delta = 2\Delta d = \Delta n \cdot \lambda$ ，

则
$$\lambda = \frac{2\Delta d}{\Delta n} = \frac{2 \times 0.3220 \times 10^{-3}}{1024} = 6289 \text{ \AA}。$$

(2) 插入玻璃片后，光程差增加 $\Delta \delta = 2(n-1)e = N\lambda$ ，

$$\therefore e = \frac{N\lambda}{2(n-1)} = \frac{150 \times 5000 \times 10^{-10}}{(1.632-1) \times 2} = 5.934 \times 10^{-3} \text{ cm}。$$

五、自我检查题

1. 两相干波源是指_____相同、_____相同、_____的波源。
对光的干涉来说，可利用_____来实现光的干涉。

2. 光程差的定义是 $\Delta =$ _____，如两光源同相相同，则光程差 $\Delta_2 - \Delta_1 =$ _____处出现亮条纹，光程差 $\Delta_2 - \Delta_1 =$ _____处出现暗条纹。

3. 杨氏双缝干涉实验中，若在上缝 S_1 后插入一厚度为 d 、折射率为 n 的透明薄片，则中央明条纹将向_____方向移动；若所用波长 $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ ，中央明纹移动4个条纹，薄片厚度为 $1.1 \mu\text{m}$ ，则其折射率为3。

4. 在杨氏干涉实验中，若使人射波长变大，则干涉条纹变_____，若使屏幕与双缝间距离变小，则干涉条纹变_____。

5. 在洛埃镜干涉装置中，若光源 S 离 A 点距离为 D ， S 离平面镜的垂直距离为 a ，如图17-6所示，则镜与屏交界处 A 点应为_____条纹，两相邻明条纹之间的距离为_____。

6. 空气劈尖干涉的实验中，当劈尖夹角变小时，干涉条纹将变_____，并_____。

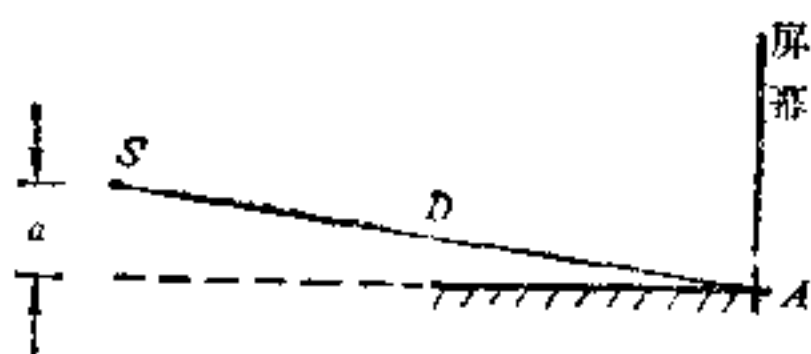


图 17-6

劈棱方向移动；若劈尖夹角不变，但向劈尖中充水，则干涉条纹将变____，并____劈棱方向移动。

7. 牛顿环干涉中心处为反射____条纹位置，这是因为____。牛顿环干涉实验中观察到靠近中心处的条纹间距____，离开中心远处的条纹间距____。

8. 厚度为 e 的平行膜把空间分为三部分，波长为 λ 的光垂直入射，如图17-7所示。若 $n_1 < n_2 < n_3$ ，则满足____ = $\pm K\lambda$ 时，反射光消失；若 $n_1 < n_2 > n_3$ ，则满足____ = $\pm K\lambda$ 时，反射光消失。

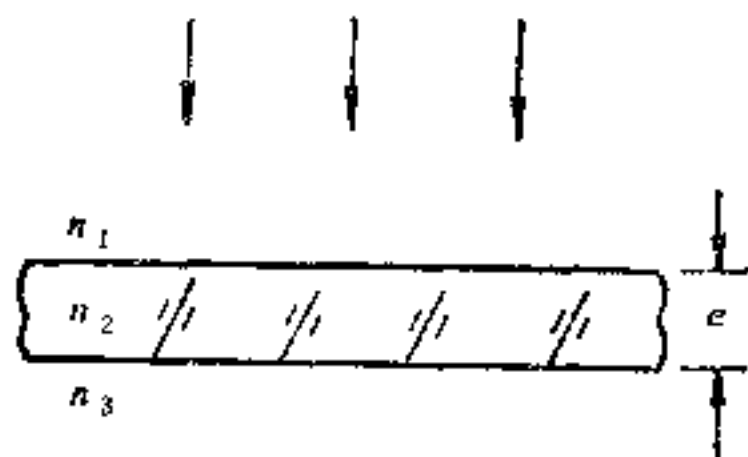


图 17-7



图 17-8

9. 若劈尖的上平面是标准平面，下平面是待检测平面，在劈尖上出现如图17-8所示的干涉条纹，则待测平面在条纹弯曲处是凹下。

10. 相干长度 δ_m 是指____，相干时间 Δt 是指____，两者之间的关系是 $\Delta t = \frac{\delta_m}{c}$ 。

第十八章 光的衍射

一、基本要求

- (1) 理解惠更斯-菲涅耳原理以及它对光的衍射现象的定性解释;
- (2) 掌握单缝衍射图样的特点, 并能应用半波带法获得单缝衍射公式, 以确定衍射图样中明(或暗)纹的位置;
- (3) 掌握光栅衍射图样的特点, 应用光栅衍射公式确定衍射图样中明纹的位置。

二、基本概念和规律

1. 衍射与干涉的区别

衍射与干涉, 在物理本质上并无区别。仅由于历史的原因, 以及处理相干光波叠加的方法不同, 才分为干涉和衍射。通常把有限数目的分立相干光源的光波叠加, 称为干涉。叠加后发生能量在空间的重新分布, 此时的能量(强度)分布图样, 叫干涉图样。而把连续分布的相干光源光波的叠加, 称为衍射, 这种叠加产生的能量(强度)分布图样, 叫衍射图样。因此在本章中, 把从不同狭缝射出的相干光波的叠加, 称为干涉, 把从一个宽缝射出的相干光波的叠加, 称为衍射。从多个宽缝射出的光波的叠加, 是干涉与衍射效应的结合, 也称作衍射。实际上, 干涉与衍射在物理本质上都是指相干光波叠加产生的能量(强度)的分布图样。

2. 惠更斯-菲涅耳原理

严格说来, 光是一种电磁波, 光在空间的振幅和强度分布, 应从麦克斯韦方程和已知边界条件的解中得到。但由于数学计算上的困难, 至今仅有少数的问题能给出准确的解。

作为一种计算方法, 当离缝(或屏)足够远、且离光前进方向足够近的空间范围内, 用惠更斯-菲涅耳原理计算出的光的衍射图样, 能较好地近似反映实验测定的结果。根据这个原理, 从同一波阵面上各点所发出的子波, 经过传播后在空间某点相遇时, 因叠加产生干涉效应。这个原理为衍射理论提供了一种较好的近似计算方法。具体的衍射问题, 应是一个无限多个子波源发出相干光波的叠加问题, 即是个积分问题。

本章采用半波带法作简化计算, 以避开复杂的积分运算。但其代价, 则是无法获得光强度与振幅分布的定量公式, 而只能得到衍射图样中明(或暗)纹的位置公式。

3. 单缝衍射公式

单缝衍射图样中明、暗纹的极值位置由下式确定:

$$\delta = a \sin \phi = \begin{cases} \pm 2k \frac{\lambda}{2} & \text{(极小值)} \\ \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} & \text{(极大值)} \end{cases}$$
$$k = 1, 2, \dots$$

(1) 上式中讨论的是比较简单的夫琅和费单缝衍射。其中入射光是单色平面波, 用单缝截取波阵面, 用屏幕 (或其它探测器) 观测衍射图样。会聚透镜是使波阵面上各子波源发出的衍射光中的一组平行光线会聚于焦平面上一点, 并在叠加后产生干涉效应。不同方向 (ϕ 不同) 的平行光线, 会聚于屏幕上不同的点 P 。夫琅和费衍射图样是各组平行衍射光波叠加的结果。

(2) 半波带法, 某一衍射方向 (用 ϕ 表示) 上一组平行光会聚于 P 点的干涉效应, 取决于各光线间的位相差

$$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda} n(r_2 - r_1)$$

其中 $(\phi_{20} - \phi_{10})$ 是入射光的初位相差。当单色平行光正入射照亮单缝时, 则单缝平面就是入射光的波阵面, 故各子波源有相同的初位相, 即 $\phi_{20} = \phi_{10}$, 所以

$$\Delta\phi = -\frac{2\pi}{\lambda} n(r_2 - r_1)$$

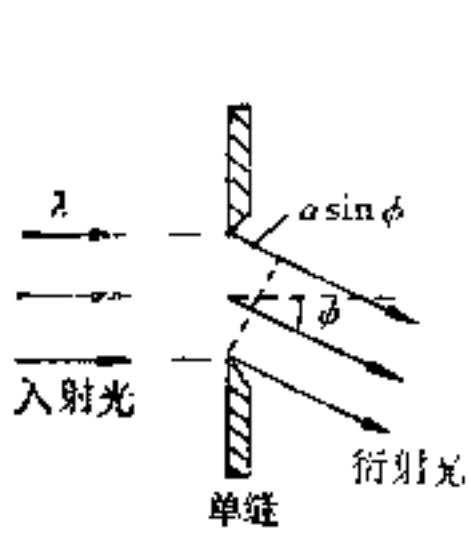


图 18-1

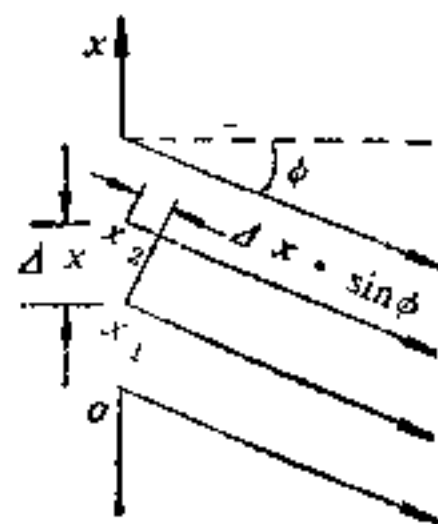


图 18-2

而光线通过透镜时, 并不产生附加光程差。因此 ϕ 方向一组平行光中任意二条相邻光线到达 P 点的位相差, 仅决定于由 ϕ 产生的光程差。如图 18-2 所示, x_1 和 x_2 两点光源沿 ϕ 方向衍射时的光程差为 $\delta = \Delta x \cdot \sin\phi$, 故位相差 (设 $n=1$)

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \cdot \sin\phi$$

为了简化计算, 把单缝所在波阵面划分成若干个半波带。划分方法是, 每个波带两端的光程差为 $\lambda/2$ (半个波长), 即每个波带宽 Δx 应由 $\Delta x \cdot \sin\phi = \lambda/2$ 决定, 宽为 $\Delta x = \lambda/(2 \cdot \sin\phi)$ 的波带就叫半波带。这样, 单缝波阵面上发出的 ϕ 方向一组平行衍射光的叠加, 变成若干个半波带发出的平行光的叠加。其好处是, 相邻两半波带上对应点的衍射光线的光程差为 $\lambda/2$, 位相差为 π , 叠加后, 对应光线一一对应相消。若一组平行光有偶数个半波带, 则由于相邻半波带的衍射光相互抵消, 在屏幕上会聚点处形成暗纹。若有奇数个半波带, 则还剩下一个半波带无法抵消, 因而形成明纹。其数学表示式为

$$a \sin\phi = \begin{cases} \pm 2k \left(\frac{\lambda}{2} \right) & \text{暗纹} \\ \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} & \text{明纹} \end{cases}$$

$$k=1, 2, 3, \dots$$

(3) 注意, 上述单缝衍射公式中, k 不能取零。因 $k=0$, 则 $\phi=0$, 该组平行光线都同相位, 应是明纹位置, 对应于屏幕的中心点, 称为中心极大或零级极大, 它与波长无关, 即各种波长的光, 其零级极大是重合的, 这时若用白光照明, 则零级极大是白的亮纹。除零级极大外, 其它级次的明纹位置依赖于波长, 即依赖于颜色。

注意, ϕ 方向一组平行光在会聚点产生的干涉效应, 取决于半波带数目

$$N = \frac{a}{\Delta x} \cdot \frac{a}{\lambda} 2 \sin \phi$$

即不同方向 ϕ 的平行光线, 可有不同的半波带数。除 N 为偶数与奇数外, 还存在 N 为非整数的情况, 对应处既非明纹, 也非暗纹。屏上各点的振幅和强度是连续变化的。对应于偶数个半波带片的点, 都是暗纹, 奇数个半波带片的点是明纹, 但不同明纹的亮度是不同的。半波带数 N 划分得越多, 相互抵消的半波带数越多, 则对亮度有贡献的、剩下的那一个半波带宽度 Δx 就越窄, 在屏上叠加后明纹的亮度也越小。所以, 明纹强度分布由中心向两侧随级次增大而急速递减。

(4) 中央明条纹的角度宽, 由两条 $k=1$ 的一级暗纹所限制。

$$a \sin \phi_1 = \pm \lambda$$

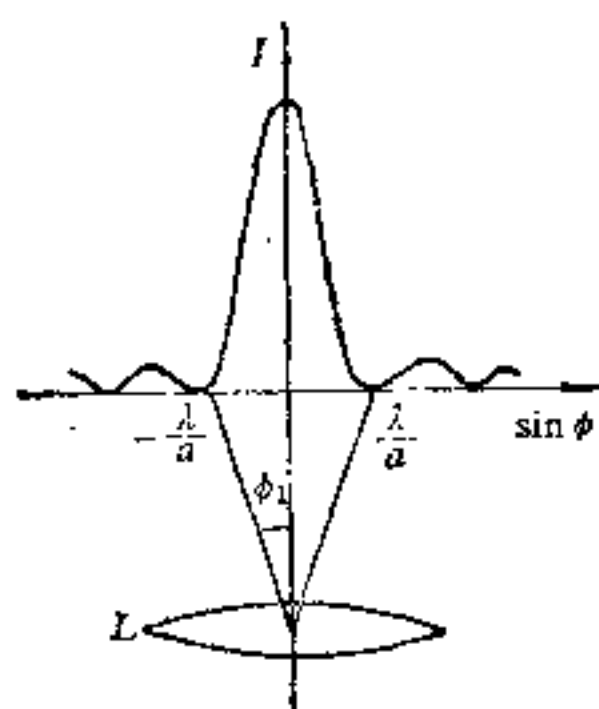


图 18-3

对应透镜中心的角宽度为 $2\phi_1$

由于 $\sin \phi_1 \approx \phi_1$

$$\therefore 2\phi_1 = 2 \frac{\lambda}{a}$$

如图18-3所示。由公式可见, 单缝越窄, a 越小, 则 2ϕ 越大, 衍射效应越明显。

对于圆孔衍射, 中央明纹呈圆形斑点, 叫爱里斑点, 其半角宽度应为

$$\phi_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

式中 D 为圆孔直径。同理可知, D 越小, ϕ_1 越大, 衍射效应越显著。计算表明, 爱里斑集中了光能量的84%。

(5) 最小分辨角, 在几何光学近似下, 透镜成象的规律是, 物光源上一点对应象上一点, 物象点点对应。因此, 不存在象面上能否分辨物面上任意二点的问题。

在波动光学近似下, 点光源通过透镜对应的却是一个衍射图样, 粗略地讲, 对应着一个爱里斑。物光源上邻近的二个物点, 对应着两个爱里斑, 这就产生了由于两个斑点的强度迭加而无法分辨的问题。即两个爱里斑点中央极大值位置相距足够远, 则叠加后依然可看出光强分布中存在一个明显的双峰(或两个突起部分), 这样, 就能分辨出光源上对应的邻近两点。为了能够恰好辨认出双峰, 可以应用基于经验的瑞利判据。它是一个经验法则, 是通过象上光强度分布能分辨物上两点的极限条件。若两个衍射图样进一步靠拢, 迭加后变成只有一个峰值的斑点, 这就无法辨认出该斑点应该对于物光源上一点还是两点了。

根据瑞利判据, 能加以分辨的物光源上两点相对于透镜中心的最小张角应为

$$\delta\phi = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

$\delta\phi$ 叫最小分辨角。它的倒数 $1/\delta\phi$ ，叫仪器的分辨率。由上式可知，增大孔径 D ，减小波长 λ ，可提高仪器的分辨率。

4. 衍射光栅

用光栅截取波阵面，用屏幕（或其它探测器）观测衍射图样，会聚透镜把截取波阵面各子波源发出的一组平行衍射光会聚于焦平面的一点，叠加后产生衍射图样。它是单缝衍射与多缝干涉的综合效应。

（1）单缝衍射效应表明：在每个单缝上，对于不同衍射方向 ϕ 的一组平行光，经透镜会聚后，对应于屏上不同的衍射点，而且具有不同的振幅（或强度）。尤其是对于满足条件

$$a \sin \phi = \pm 2k \left(\frac{\lambda}{2} \right)$$

的衍射光，对应于屏上衍射点的振幅为零。

（2）多缝干涉效应。透镜同样地把 N 条缝发出 ϕ 方向的衍射光会聚于焦平面上一点，即在屏上把 N 个衍射点再叠加，产生干涉效应。

若 N 个衍射点同位相，产生相长干涉，形成强度很大的明条纹，称为主极大。因 ϕ 方向引起的相邻缝发出光波的光程差为

$$\delta = (a + b) \sin \phi = \pm k \lambda$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

则决定了光栅衍射图样中主极大（明纹）的位置，故上式也叫光栅衍射公式，或光栅方程。由上式可知，主极大的位置，仅与光栅常数 $(a + b)$ 和波长 λ 有关，与缝宽 a 和缝数 N 无关。其中 $k = 0$ ，即 $\phi = 0$ 处的主极大，叫中心主极大或零级主极大，它与其它主极大有一个重要区别，即与波长 λ 无关。

缝数 N 对衍射图样的影响：若由 ϕ 方向引起相邻缝发出的光波衍射点的位相差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi k'}{N}$$

或光程差为

$$\delta = (a + b) \sin \theta = \frac{k'}{N} \lambda$$

则 N 个衍射点光振动的矢量合成必成闭合曲线，使合振幅为0，产生相消干涉，形成暗纹，如图18-5。注意： $k' = 0, N$ ，满足光栅公式，分别是 $k = 0, 1$ 级主极大。所以 $k' = 1, 2, 3, \dots, (N-1)$ ，应是暗纹。

由此可见，光栅刻缝数 N ，并不影响主极大明纹位置，但能在两相邻主极大之间产生 $(N-1)$ 个暗纹。 N 越大，暗纹数越多，使两明条纹之间的暗区越宽，能量集中在主极大所在处，形成又细又亮、明暗分明的衍射条纹，如图18-6所示。在实验上易于测定主极大位置，对不同波长的主极大位置，在空间上也易于分离，极大地提高了光栅的分辨本领。但在计算主极大位置时，无须知道刻缝数 N 。

若 ϕ 方向同时满足

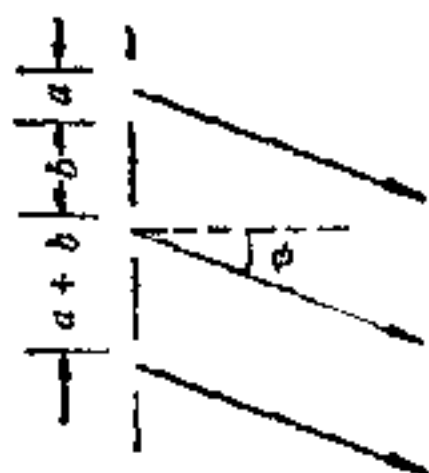


图 18-4

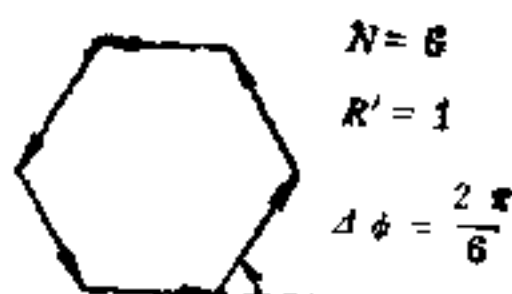


图 18-5

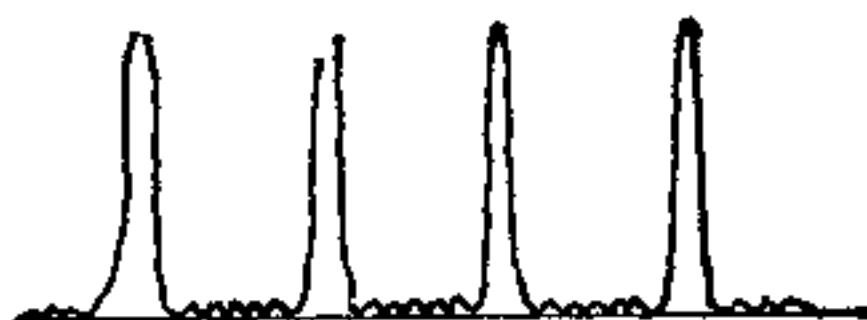


图 18-6

主极大条件 $(a+b)\sin\phi = \pm k_1\lambda$

单缝衍射暗纹条件 $a\sin\phi = \pm 2k_2\left(\frac{\lambda}{2}\right)$

那么, 既然在 ϕ 方向上每个单缝衍射图样对应的衍射点的振幅为0, 在此方向上 N 个衍射点又是同位相, 但 N 个0的叠加仍然为0, 故应为暗纹位置。这样, 在观察中由于单缝衍射效应而失去了 k_1 级主极大或明纹, 通常称此现象为 k_1 级主极大缺级。只有当考虑缺级时, 才需要考虑缝宽 a 。

5. 伦琴射线衍射、晶面反射加强的布喇格公式

$$2d \cdot \sin\phi = k\lambda$$

三、解题示范

在垂直入射于光栅的平行光中, 有 λ_1 和 λ_2 两种波长。已知 λ_1 的第三级光谱线(即第三级明条纹)与 λ_2 的第四级光谱线恰好重合在离中央明条纹为5mm处, 而 $\lambda_2 = 4861\text{\AA}$, 并发现 λ_1 的第五级光谱线缺级。透镜的焦距为0.5m。

- 试问: (1) $\lambda_1 = ?$ 光栅常数 $(a+b) = ?$
 (2) 光栅的最小缝宽 $a = ?$
 (3) 能观察到 λ_1 的多少条光谱线?

解:

(1) 光谱线的角位置由光栅方程确定:

$$(a+b)\sin\phi = k\lambda$$

由题意可知, 正入射平行光经光栅衍射后, 中央明条纹的角位置为 $\phi = 0$ (因 $k = 0$)。即在透镜的光轴上。故离中央明条纹 x 处的任一光谱线的角位置应为: $\sin\phi \approx \tan\phi = \frac{x}{f} =$

$\frac{5 \times 10^{-3}}{0.5} = 10^{-2}$, 在此位置上, 两条光谱线重合, 则

$$(a+b)\sin\phi = k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{k_2}{k_1}\lambda_2 = \frac{4}{3} \times 4861 = 6481 \text{ \AA}$$

$$(a+b) = \frac{k_2\lambda_2}{\sin\phi} = \frac{4 \times 4861 \times 10^{-10}}{10^{-2}} = 1.94 \times 10^{-4} \text{ m}$$

(2) 光栅衍射的暗纹位置由光栅缝宽 a 确定:

$$a\sin\phi = k'\lambda$$

当 k 级光谱线与 k' 级衍射暗纹处在同一位置 ϕ 时, 则后者使前者缺级。故有:

$$(a+b)\sin\phi = k\lambda$$

$$a\sin\phi = k'\lambda$$

两式相除,

$$a = \frac{k'}{k}(a+b)$$

最小缝宽应为 $k'=1$, 即 k 级光谱线因落在第一级衍射暗纹上而缺级,

$$\therefore a = \frac{1 \times 1.94 \times 10^{-4}}{5} = 0.388 \times 10^{-4} \text{ m}$$

(3) 能观察到的光谱线数目, 取决于以下两个因素: 一个因素是:

$$\sin\phi = \frac{k\lambda_1}{a+b} < 1, \text{ 即}$$

$$k < \frac{a+b}{\lambda_1} = \frac{1.94 \times 10^{-4}}{6.481 \times 10^{-7}} \approx 299$$

因此, 可能观察到的光谱线总数目应为: $2 \times 299 + 1 = 599$ 条。(实际上, 屏幕的宽度是有限的, 所以, 可观察的光谱线角位置 ϕ 远小于 $\frac{\pi}{2}$)

另一个因素是缺级。凡满足以下条件

$$k = \frac{a+b}{a}k' = 5k'$$

(5 的倍数) 的光谱线都缺级, 其中最大倍数为 $\frac{299}{5} \approx 59$, 故缺级的光谱线数目为: $2 \times 59 = 118$ 条。

所以, 综合这两个因素, 可能观察到的光谱线数目为

$$599 - 118 = 481 \text{ 条}$$

四、习题与解答

18-1 (1) 波的衍射现象的本质是什么?

(2) 在日常经验中, 为什么声波的衍射比光波的衍射显著?

(3) 杨氏双缝实验是干涉实验, 还是衍射实验?

答:

(1) 波的衍射现象的本质就是波的干涉现象。光波遇到障碍物后, 波阵面上无限多个子波源继续向前进方向发出相干波。当它们在空间各点叠加时, 由于干涉项的存在, 在空间产生干涉相长区与相消区, 构成稳定的衍射图样。

Handwritten notes on the right margin:
 $\sin\phi$
 $\sin\phi = 1/5$
 $\sin\phi = 1/5$

(2) 原因有二。第一, 我们可以制造两个相干的声源, 即可以保持两个声源的位相差的稳定不变。而通常的热光源是原子发光, 原则上我们无法使二个原子变为相干光源。所有原子都是独立光源。因此, 两波列在空间各点的位相差

$$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda}n(r_1 - r_2)$$

对两独立光源来说, $\phi_{20} - \phi_{10}$ 没有固定值, 它纯粹是随机的, 即通常热光源不是相干光源。

我们总可以用分波阵面法获得干涉图样。声源可以发射连续波。但是原子发光时, 原则上只能发射一系列有限长的波列, 通常每一个波列约几厘米到几十厘米左右长, 因此, 当光程差大于波列长度时, 分波已无法相遇, 不能产生干涉, 这就是通常难以观察到光的衍射效应的原因之一。

另一个原因, 就是仅当波长比障碍物的线度大或相近时, 才产生显著的衍射现象。

以单缝衍射为例。单缝的夫琅和费衍射图样的暗纹位置 $\sin\phi = k\frac{\lambda}{a}$, 明条纹中心位置 $\sin\phi = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{a}$, 都仅在 $\frac{\lambda}{a}$ 小于1又接近于1时, 各级条纹对应的 ϕ 角较大, 衍射图样清晰。若 $\frac{\lambda}{a} \ll 1$, 各级条纹向中心靠近, 使图样分辨不清, 只存在中央单一的明条纹, 变为几何光学中直线传播的结果, 衍射效应消失。可见, 当波长 λ 接近障碍物空间线度 a 时, 才有衍射效应, 同声波相比, 光波波长太短, 难以满足此条件, 故衍射效应不显著。

(3) 杨氏双缝实验可看成是两个狭缝在屏上的衍射图样的叠加所产生的干涉图样。即每个狭缝因衍射产生衍射图样中宽阔的中央明纹, 重要的是由两个中央明纹区域的叠加, 再产生双缝干涉图样。杨氏双缝实验, 应是干涉与衍射的综合效应, 缺一不可, 但表现形式主要是干涉条纹。

18-2 (1) 一人在他眼睛瞳孔的前方握着一个沿竖直方向的单狭缝, 通过该狭缝注视一遥远的光源, 光源的形状是一根很长的竖直热灯丝, 这人看到的衍射图样是非涅耳衍射还是夫琅和费衍射?

(2) 在单缝的夫琅和费衍射中, 增大波长与增大缝宽对衍射图样分别产生什么影响?

答:

(1) 是夫琅和费衍射。遥远光源照亮狭缝, 可看作是平行光正入射于狭缝上。人的眼睛起了会聚透镜的作用, 在视网膜这个“屏幕”上呈现出衍射图样。

(2) 用暗纹位置公式: $a\sin\phi = \pm 2k\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ 可以判断。假设观察某一级次的暗纹, 即 k 值一定 (波长 λ 也为定值), 则当缝宽 a 增大时, 该级暗纹的角位置 ϕ 应减小 (等式右侧为定值), 即衍射图样向中心收缩。当缝宽 a 增大到一定程度时, 即狭缝对人射光波没有明显的限制, 入射光通过狭缝时近乎于自由传播时, 则由上式可知, 此时中央亮纹与其它级次的亮纹都收缩成一条亮线。这时就观察不到衍射现象。而这条亮线正是光源经过透镜后所成的几何光学的象。因此, 当狭缝很宽时, 波动光学可近似为几何光学。

若缝宽一定,入射光的波长 λ 增大时,则由上式可知 ϕ 将增大,衍射图样将向外扩展,使中央亮纹展宽,故衍射现象明显。

18-3 在下面单缝衍射的示意图中,缝宽 a 处的波阵面恰好分成四个半波带,光线1与3是同周相的,光线2与4也是同周相的,为什么在 P 点的光强不是极大而是极小?

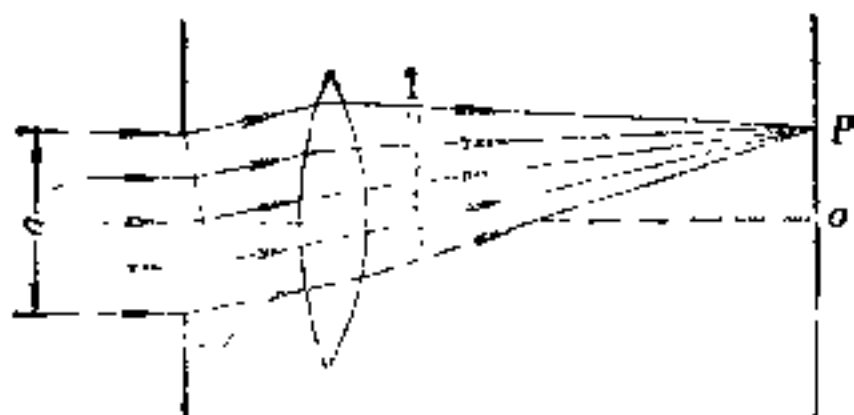


图 18-3 图

答:

四个波带中,虽然光线1与3是同周相,光线2与4也是同周相的,固然应是两两加强,但光线1与2以及3与4却是反周相的,应相互抵消,故在 P 点的光强不是极大,而是极小。

18-4 (1) 在单缝衍射中,为什么衍射角 ϕ 愈大(级数愈大)的那些明条纹的亮度就愈小?

(2) 当把全部装置放在水中时,单缝衍射的图样将发生怎样的变化?在此情况下,如

果用公式: $a \sin \phi = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$, ($k=1, 2, 3, \dots$) 来测定光的波长,问所测出的波长是光在空气中的波长,还是在水中的波长?

答:

(1) 衍射角 ϕ 越大,则划分的波带数目 $N = \frac{2a}{\lambda} \sin \phi$ 就越多。 N 为奇数时,应为明纹。但 N 越多,相互抵消的半波带数也越多,剩下一个波带的能量(对明纹有贡献)越小,故该明纹的亮度也愈小。

(2) 当全部装置放入水中,则增加了单缝上各点发出平行光线的光程,即光程增大了 n 倍(n 为水的折射率): $n a \sin \phi$ 。屏上明纹位置则为 $a \sin \phi = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2n}$, $n > 1$, 式中 $\frac{\lambda}{n} = \lambda'$, 故测出的 λ' 是在水中的波长。对 k 级明纹来说,因 $n > 1$,故 ϕ 必须减小,衍射图样向中心收缩,中央明纹区域变窄。

18-5 波长为 5000 \AA 的平行光线垂直地入射于一宽为 1 mm 的狭缝,若在缝的后面有一焦距为 100 cm 的薄透镜,使光线聚焦于一屏幕上,试问从衍射图形的中心点到下列各点的距离如何?

(1) 第一极小; (2) 第一级明纹的极大处; (3) 第三极小。

解:

由亮暗纹条件

$$a \sin \phi = \begin{cases} \pm 2k \frac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \\ \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} & \text{亮纹} \end{cases}$$

(1) 第一极小, 即 $k=1$ 的级暗纹, 应用暗纹公式:

$$a \sin \phi = \pm \lambda$$

$$\sin \phi \approx \phi = \pm \frac{\lambda}{a}$$

极小值离屏中心的空间距离为

$$x = f \cdot \phi = \pm \frac{\lambda}{a} \cdot f = \frac{\pm 5000 \times 10^{-8} \times 100}{0.1}$$

$$= \pm 0.05 \text{ cm} = \pm 0.5 \text{ mm}$$

(2) 第一级明纹的极大处, 即在亮纹条件中 $k=1$, 则

$$a \sin \phi = \pm (2+1) \frac{\lambda}{2} = \pm \frac{3\lambda}{2}$$

$$\sin \phi \approx \phi = \pm \frac{3\lambda}{2a}$$

至屏中心的空间距离为

$$x = f \cdot \phi = f \left(\pm \frac{3\lambda}{2a} \right) = 100 \times \left(\pm \frac{3 \times 5000 \times 10^{-8}}{2 \times 0.1} \right)$$

$$= \pm 0.075 \text{ cm} = \pm 0.75 \text{ mm}$$

(3) 第三极小, $k=3$, 由暗纹条件:

$$a \sin \phi = \pm 3 \times 2 \times \frac{\lambda}{2} = \pm 3\lambda$$

$$\sin \phi \approx \phi = \pm \frac{3\lambda}{a}$$

至屏中心距离为

$$x = f \cdot \phi = f \left(\pm \frac{3\lambda}{a} \right) = 100 \times \left(\pm \frac{3 \times 5000 \times 10^{-8}}{0.1} \right) = \pm 0.15 \text{ cm} = \pm 1.5 \text{ mm}$$

18-6 有一单缝, 宽 $a=0.10\text{mm}$, 在缝后放一焦距为 50cm 的会聚透镜, 用平行绿光 ($\lambda=5460\text{\AA}$) 垂直照射单缝, 求位于透镜焦面处的屏幕上的中央明条纹的宽度。如把此装置浸入水中, 中央明条纹角宽度如何变化?

解:

在空气中时, 中央明纹的角宽度为

$$2\phi \approx \frac{2\lambda}{a}$$

故线宽度为

$$\Delta x = f \cdot 2\phi = \frac{2\lambda}{a} \cdot f = \frac{2 \times 5460 \times 10^{-7}}{0.10} \times 500$$

$$= 5.46 \text{ mm}$$

若装置浸入水中, 则中央明纹的角宽度为

$$2\phi \approx \frac{2\lambda}{na}, \quad n = 1.33$$

即角宽度变为空气中角宽度的 $\frac{1}{1.33}$ 。相应的线宽度为

$$\begin{aligned} \Delta x' &= f \cdot 2\phi = f \cdot \frac{2\lambda}{na} = \frac{\Delta x}{n} = \frac{5.46}{1.33} \\ &= 4.11 \text{ mm} \end{aligned}$$

可见中央明纹变窄。

18-7 今有白光形成的单缝夫琅和费衍射图样, 若其中某一光波的第三级明条纹 (的极大点) 和红光 ($\lambda = 6000 \text{ \AA}$) 的第二级明条纹 (的极大点) 相重合, 求白光中所包含的这光波的波长, 分别按题18-7 (a) 图强度分布曲线所示的位置与题18-7 (b) 图强度分布曲线所示的位置作计算, 哪一个结果更合理些?

解:

按题意

$$a \sin \phi = \left(3 + \frac{1}{2}\right) \lambda_1 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \lambda_2$$

则

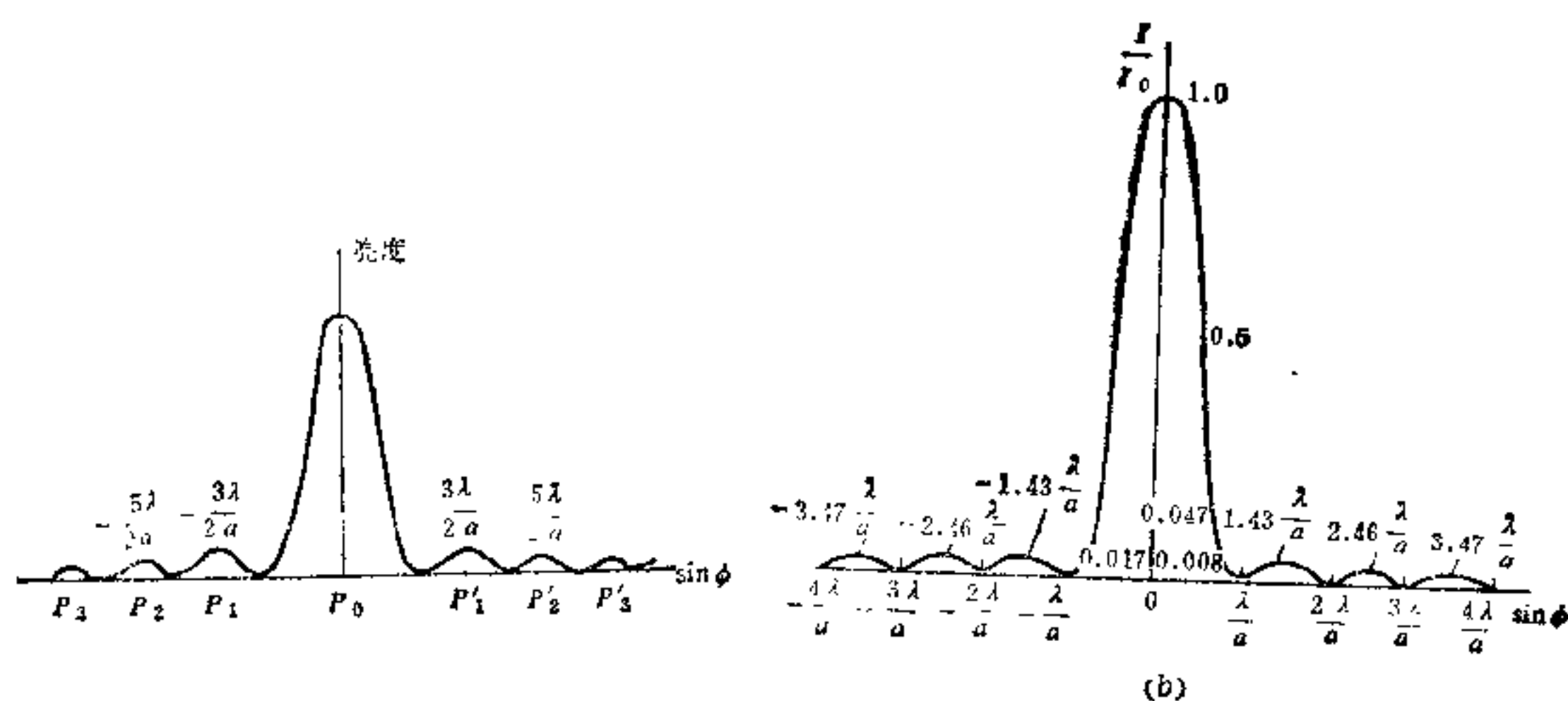
$$\lambda_1 = \frac{5}{7} \lambda_2 = \frac{5}{7} \times 6000 = 4286 \text{ \AA}$$

若按题18-7 (b) 图的相对亮度分布计算, 则

$$\sin \phi = 3.47 \times \frac{\lambda_1}{a} = 2.46 \times \frac{\lambda_2}{a}$$

\therefore

$$\lambda_1 = \frac{2.46}{3.47} \times 6000 = 4254 \text{ \AA}$$

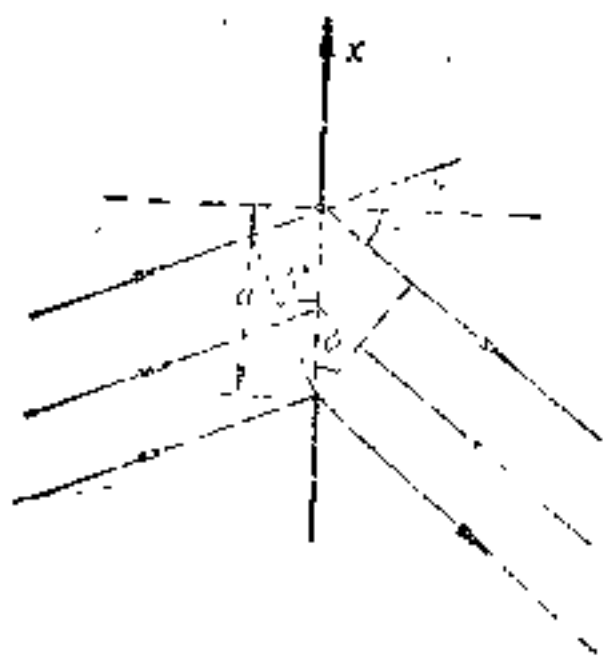


题 18-7 图

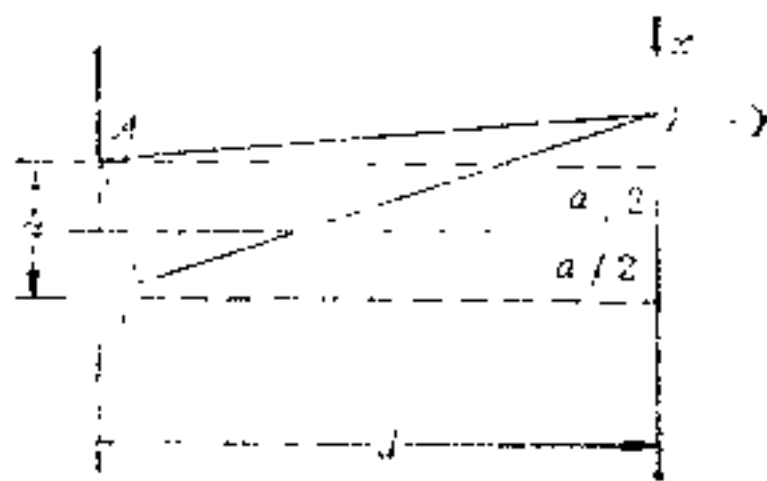
(a) 单缝衍射的强度分布; (b) 单缝衍射图样

后者更合理。因为我们观察到的衍射图样是亮度分布，而后者正是根据光强极大值的条件计算的，与实验观察相符。而用半波带法求出的极大值位置是近似正确的，除中央明纹外，与实际的极大值位置稍有偏离。

18-8 如图所示，设有一波长为 λ 的单色平面波沿着与缝平面的法线成 ψ 角的方向入射于宽度为 a 的单狭缝 AB 上，试求出决定各极小值（即各暗条位置）的衍射角 ϕ 的条件。



题 18-8 图



题 18-9 图

解：

由图可知，单缝上各点 x 的光程差变为

$$a \sin \psi \pm a \sin \phi = a (\sin \psi \pm \sin \phi)$$

用半波带法确定的极小值位置公式应改为

$$a (\sin \psi + \sin \phi) = \pm 2k \left(\frac{\lambda}{2} \right)$$

\therefore

$$\sin \phi = \pm \frac{k\lambda}{a} - \sin \psi$$

$$\phi = \sin^{-1} \left[\pm \frac{k\lambda}{a} - \sin \psi \right], \quad k=1, 2, 3, \dots$$

注意： ϕ 与 ψ 本身有正负之分，如图中 ϕ 与 ψ 反号，则为正

18-9 在宽度 $a=0.6\text{mm}$ 的狭缝后 $d=40\text{cm}$ 处，有一与狭缝平行的屏，见图示。如以平行单色光自左面垂直照射狭缝，在屏上形成衍射条纹，若在离 O 点为 $x=1.4\text{mm}$ 的 P 点，看到的是明条纹，试求：

(1) 该入射光的波长；(2) P 点条纹的级数；(3) 从 P 点看来对该光波而言，狭缝处的波阵面可作半波带的数目。

(提示：本题系菲涅耳衍射，试采用半波带法推算，对 P 点而言，如狭缝 AB 处的波阵面恰可分成奇数 $(2k+1)$ 个半波带，则 P 点将呈明纹，即要求 $PB - PA = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ 在可见光范围，推算能满足上式的 k 值和 λ 值。)

解：

(1) 按照题意， P 点为明纹，故波阵面 AB 必可划分为奇数个半波带，即

$$PB - PA = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

而单缝两端对P点的光程差为

$$\overline{PB} - \overline{PA} = \sqrt{d^2 + (x + \frac{a}{2})^2} - \sqrt{d^2 + (x - \frac{a}{2})^2}$$

由此可计算波长 λ :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2\left(\sqrt{d^2 + (x + \frac{a}{2})^2} - \sqrt{d^2 + (x - \frac{a}{2})^2}\right)}{2k+1} \\ &= \frac{2\left[\sqrt{40^2 + (1.4 + 0.3)^2 \times 10^{-2}} - \sqrt{40^2 + (1.4 - 0.3)^2 \times 10^{-2}}\right]}{2k+1} \\ &= \frac{42000}{2k+1} \text{ \AA}\end{aligned}$$

在白光范围内, $4000 \text{ \AA} < \lambda < 7600 \text{ \AA}$

$$\begin{aligned}\therefore \quad k &= 3, & \lambda_1 &= 6000 \text{ \AA} \\ k &= 4, & \lambda_2 &= 4670 \text{ \AA}\end{aligned}$$

(2) P点处的条纹级次:

$$\text{对 } \lambda_1 = 6000 \text{ \AA}, \quad k_1 = 3$$

$$\text{对 } \lambda_2 = 4670 \text{ \AA}, \quad k_2 = 4$$

(3) 半波带数目:

$$\text{对 } \lambda_1 = 6000 \text{ \AA}, \quad N_1 = 7$$

$$\text{对 } \lambda_2 = 4670 \text{ \AA}, \quad N_2 = 9$$

18-10 在圆孔的夫琅和费衍射中, 设圆孔半径为 0.10 mm , 透镜焦距为 50 cm , 所用单色光波长为 5000 \AA , 求在透镜焦平面处屏幕上呈现的爱里斑半径。如果圆孔半径改为 1.0 mm , 其他条件不变 (包括入射光能流密度保持不变), 爱里斑的半径变为多大? 又强度对比将如何?

解:

对于圆孔的夫琅和费衍射图样, 中央明纹的半角宽度应为

$$\theta = 0.610 \times \frac{\lambda}{R}$$

故爱里斑的半径

$$\begin{aligned}r &= f \cdot \theta = f \times 0.610 \times \frac{\lambda}{R} \\ &= 50 \times 0.610 \times \frac{5000 \times 10^{-8}}{0.01} = 0.153 \text{ cm}\end{aligned}$$

若圆孔半径增大 10 倍, 即 $R = 1.0 \text{ mm}$, 则爱里斑半径缩小为 $1/10$, 即 $r = 0.0153 \text{ cm}$ 。因爱里斑的面积缩小为 $\frac{1}{100}$, 入射光的能流密度不变, 通过圆斑的能量增大 100

倍 (光强是单位时间通过单位面积的光能量), 这样在爱里斑的光强就会增加 $\frac{100}{\frac{1}{100}} = 10^4$ 倍。

18-11 光栅衍射和单缝衍射有何区别? 为何光栅衍射的明纹特别明亮而暗区很宽?

答:

光栅衍射是 N 个单缝衍射图样叠加后的干涉图样。在这种干涉图样中, 主极大的角位置 ϕ 仅取决于光栅常数 $(a+b)$ 与波长 λ , 即

$$(a+b)\sin\phi = \pm k\lambda$$

这表明: 对应 ϕ 方向的屏上那一点, N 个衍射图样叠加时在该点位相相同, 产生相长干涉。合成振幅应是每一个单缝衍射图样在该点振幅的 N 倍, 光强为单缝衍射时的 N^2 倍。干涉效应使该点显得特别明亮。 N 越大, 越明亮。

N 个单缝衍射图样叠加时, 其暗纹位置由下式决定:

$$(a+b)\sin\phi = \pm \frac{k'}{N}\lambda$$

N 个光振动矢量相加后, 形成闭合的折线, 使合成振幅为 0, 这样, 在 $k'=0, N$, 即 $k = \frac{k'}{N} = 0, 1$ 任两个主极大之间, 就有 $(k'=1, 2, 3, \dots, N-1)$ 共 $(N-1)$ 个暗点(极小值)。 N 越大, 两主极大之间暗点越多, 形成宽阔的暗区。总之, N 越大, 能量分布越集中, 明暗对比越显著, 形成细而亮的明线。

18-12 衍射光栅公式: $(a+b)\sin\phi = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$, 当 $k=0, 1, 2, 3, \dots$ 等整数时, 两相邻的狭缝沿 ϕ 角所射出的光线能够互相加强。试问:

(1) 当满足上述的条件时, 任意两个狭缝沿 ϕ 角射出的光线能否互相加强?

(2) 在上式中, 当 $k=2$ 时, 第一条缝与第二条缝沿 ϕ 角射出的光线, 在屏上会聚(在第二级明纹处), 两者的光程差是多少? 对于第一条缝与第 n 条缝的光程差又如何?

答:

(1) 既然相邻狭缝沿 ϕ 角射出光线同位相, 当然任意两个狭缝沿 ϕ 角射出光线也同位相, 叠加后是相长干涉。

(2) $k=2$, 相邻狭缝沿 ϕ 角射出光线的光程差为 $k\lambda = 2\lambda$, 则第一与第 n 条狭缝的光程差为 $\Delta = (n-1)2\lambda$ 。

18-13 波长为 6000Å 的单色光垂直入射在一光栅上, 第二、第三级明条纹分别出现在 $\sin\phi = 0.20$ 与 $\sin\phi = 0.30$ 处, 第四级缺级, 试问: (1) 光栅上相邻两缝的间距是多少?

(2) 光栅上狭缝的宽度有多大? (3) 按上述选定的 a, b 值。在 $90^\circ < \phi < -90^\circ$ 范围内, 实际呈现的全部级数。

解:

(1) 由主极大(明纹)位置

$$(a+b)\sin\phi = \pm k\lambda$$

并根据题意, 有

$$(a+b)\sin\phi_2 = 2\lambda$$

$$(a+b)\sin\phi_3 = 3\lambda$$

故光栅常数

$$(a+b) = \frac{3\lambda - 2\lambda}{\sin\phi_3 - \sin\phi_2} = \frac{6000 \times 10^{-7}}{0.30 - 0.20} = 6.0 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

(2) 缝宽仅与单缝衍射有关。单缝衍射的暗纹位置由下式决定:

$$a \sin \phi = k' \lambda, \quad k' = 1, 2, \dots$$

若在方向 ϕ 上同时是 $k=4$ 的主极大明纹出现的位置, 则必然产生 4 级明纹的缺级:

$$(a+b) \sin \phi = 4\lambda$$

则有缝宽

$$a = \frac{k'}{4} (a+b) = \frac{6.0 \times 10^{-3}}{4} \times k' < (a+b)$$

式中 k' 可取 1, 2, 3。但 $k' \neq 2$, 否则第二级缺级。通常选最小的缝宽, 即 $k'=1$, 则有

$$a = 1.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$b = (6.0 - 1.5) \times 10^{-3} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

(3) 由主极大位置 $(a+b) \sin \phi = \pm k\lambda$ 可知, $|\sin \phi| < 1$, 故

$$|k| < \frac{a+b}{\lambda} = \frac{6.0 \times 10^{-3}}{6000 \times 10^{-7}} = 10$$

即 $|k| = 1, 2, 3, \dots, 8, 9$, 等级数。由于衍射效应, 若 ϕ 同时满足

$$a \sin \phi = k' \lambda$$

$$(a+b) \sin \phi = k\lambda$$

则一定形成 k 级主极大的缺级, 故

$$k = k' \cdot \frac{a+b}{a} = \frac{6.0 \times 10^{-3}}{1.5 \times 10^{-3}} \times k' = 4k'$$

则有 $k'=1$ 时 $k=4$ 和 $k'=2$ 时, $k=8$ 满足上式, 即 $k=4$ 和 $k=8$ 级主极大缺级。这样在屏上实际呈现的主极大级次依次为

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9。$$

18-14 利用一个每厘米有 4000 条缝的光栅, 可以产生多少完整的可见光谱 (可见光的波长: $4000 \text{ \AA} - 7000 \text{ \AA}$)?

答:

光栅常数

$$(a+b) = \frac{1}{4000} \text{ cm} = 2.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

k 级主极大位置:

$$(a+b) \sin \phi = \pm k\lambda$$

\therefore

$$|k| = \frac{a+b}{\lambda} \sin \phi \leq \frac{a+b}{\lambda}$$

所谓存在完整的可见光谱, 指同一级次的不同波长的主极大因处在不同位置 (ϕ 不同) 而展现为一个光谱带, 若同级次的光谱中包括了可见光中所有波长的谱线, 就说该级次的可见光谱是完整的。显然, 若某一级次的 $\lambda = 7000 \text{ \AA}$ 的光谱存在, 则其它波长的光谱也一定存在。

$$|k| \leq \frac{a+b}{\lambda} = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{7000 \times 10^{-7}} = 3.57$$

即可产生级次 $|k| = 1, 2, 3$ 六个完整的可见光谱。注意, $k=0$ 的 0 级主极大与波长无关, 它是一条白色的明线。

18-15 为了测定一个给定光栅的光栅常数, 用氦氖激光器的红光 (6328\AA) 垂直地照射光栅, 做夫琅和费衍射的实验, 已知第一级明条纹出现在 38° 的方向, 问这光栅的光栅常数是多少? 1cm 内有多少条缝? 第二级明条纹出现在什么角度?

又使用这光栅对某单色光同样做衍射实验, 发现第一级明条纹出现在 27° 的方向, 问这单色光的波长是多少? 对这单色光, 至多可看到第几级明条纹?

解:

$$(1) \text{ 由 } (a+b)\sin\phi = \pm k\lambda$$

$$\begin{aligned} \text{故光栅常数 } (a+b) &= \frac{k\lambda}{\sin\phi} = \frac{1 \times 6328}{\sin 38^\circ} = 10280 \text{ \AA} \\ &= 1.028 \times 10^{-3} \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\text{每厘米刻缝数 } N = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{1.028 \times 10^{-3}} = 9229 \text{ 条/厘米}$$

$$(2) \quad \sin\phi = \frac{k\lambda}{a+b} = \frac{2 \times 6328}{10280} > 1$$

无物理意义, 即不存在 $k=2$ 级的明纹。

$$\begin{aligned} (3) \quad \lambda_2 &= \frac{(a+b)\sin\phi}{k} = \frac{1.028 \times 10^{-3} \times \sin 27^\circ}{1} \times 10^9 \\ &= 4667 \text{ \AA} \end{aligned}$$

$$k < \frac{a+b}{\lambda} = \frac{1.028 \times 10^{-3}}{4667 \times 10^{-9}} = 2.2$$

即当 λ_2 照射光栅时, 最多只能看到 $k=2$ 级明纹。

18-16 试指出当衍射光栅常数为下述三种情况时, 哪些级数的主极大衍射条纹消失?

(1) 光栅常数为狭缝宽度的两倍, 即 $(a+b) = 2a$;

(2) 光栅常数为狭缝宽度的三倍, 即 $(a+b) = 3a$;

(3) 光栅常数为狭缝宽度的四倍, 即 $(a+b) = 4a$ 。

答:

k 级缺级的条件为

$$\begin{cases} (a+b)\sin\phi = k\lambda \\ a\sin\phi = k'\lambda \end{cases}$$

解得

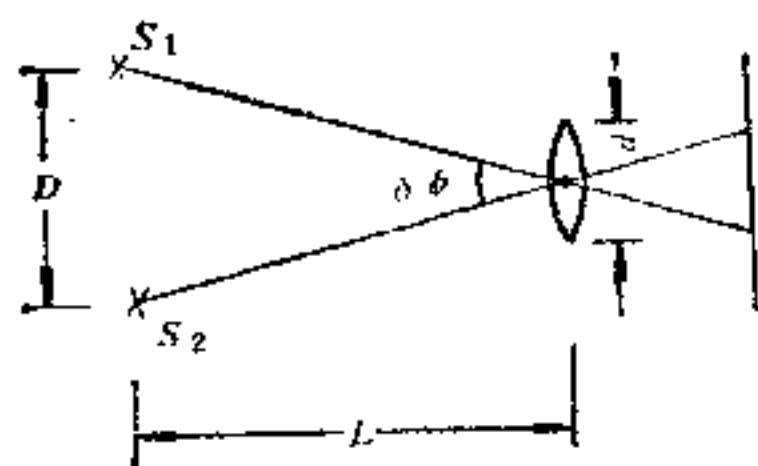
$$k = \frac{a+b}{a} \cdot k' \quad k' = 1, 2, 3, \dots$$

(1) 若 $(a+b) = 2a$, 则 $k = 2k'$, 故凡偶数级皆缺级,

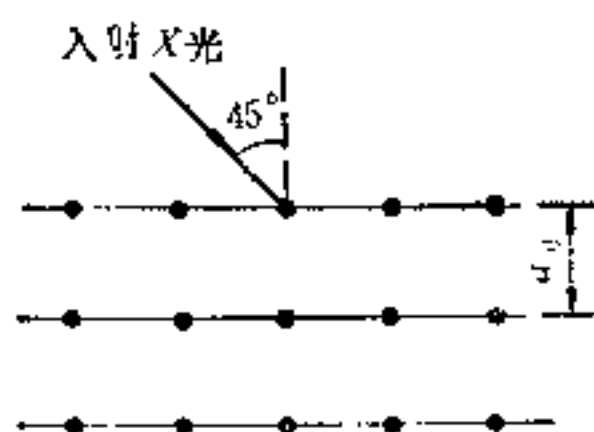
(2) 若 $(a+b) = 3a$, 则 $k = 3k'$, 故凡被 3 整除的整数级次皆缺级,

(3) 若 $(a+b) = 4a$, 则 $k = 4k'$, 故凡被 4 整除的整数级次皆缺级。

18-17 在迎面驶来的汽车上, 两盏前灯相距 120cm , 试问汽车离人多远的地方, 眼睛恰可分辨这两盏灯? 设夜间人眼瞳孔直径为 5.0mm , 入射光波长 $\lambda = 5500\text{\AA}$ (这里仅考



题 18-17 图



题 18-19 图

虑人眼圆形瞳孔的衍射效应)。

解:

由于人眼圆形瞳孔的衍射效应, 最小分辨角为

$$\delta\phi = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

两车灯对瞳孔中心的张角为 D/L , 若恰好能分辨, 则这个张角应等于眼睛的最小分辨角, 即有

$$1.22 \frac{\lambda}{d} = \frac{D}{L}$$

$$\therefore L = \frac{d \cdot D}{1.22 \lambda} = \frac{5.0 \times 10^{-2} \times 120 \times 10^{-2}}{1.22 \times 5500 \times 10^{-10}} = 8.94 \times 10^3 \text{ m}$$

18-18 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 $4.84 \times 10^{-6} \text{ rad}$, 它们都发出波长 $\lambda = 5.50 \times 10^{-5} \text{ cm}$ 的光。试问: 望远镜的口径至少要多大, 才能分辨出这两颗星?

解:

若能分辨, 则两颗星对望远镜的角距离应大于望远镜的最小分辨角, 即

$$4.84 \times 10^{-6} \geq \delta\phi = 1.22 \times \frac{\lambda}{D}$$

故望远镜的口径

$$D \geq \frac{1.22 \times \lambda}{4.84 \times 10^{-6}} = \frac{1.22 \times 5.50 \times 10^{-5}}{4.84 \times 10^{-6}} = 13.8 \text{ cm}$$

才能分辨这两颗星。

18-19 图中所示的入射 X 射线束不是单色的, 而是含有从 0.95 \AA 到 1.30 \AA 这一范围内的各种波长, 晶体的晶格常数 $a_0 = 2.75 \text{ \AA}$, 试问对图示的晶面能否产生强反射?

解:

由布拉格公式, 反射极大值的位置为

$$2a_0 \sin\phi = k\lambda, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

则

$$\begin{aligned} k\lambda &= 2 \times 2.75 \times \sin 45^\circ \\ &= 3.889 \text{ \AA} \end{aligned}$$

波长范围 $0.95 \text{ \AA} < \lambda < 1.30 \text{ \AA}$

$$\frac{3.889}{1.30} \leq k \leq \frac{3.889}{0.95}$$

即

$$2.99 \leq k \leq 4.09$$

可能存在 $k=3, 4$ 级的强反射。故对应波长为

$$k=3, \quad \lambda = \frac{3.889}{3} = 1.296 \text{ \AA}$$

$$k=4, \quad \lambda = \frac{3.889}{4} = 0.972 \text{ \AA}$$

18-20 用方解石分析 X 射线的谱, 已知方解石的晶格常数为 $3.029 \times 10^{-10} \text{ m}$, 今在 $43^\circ 20'$ 和 $40^\circ 42'$ 的掠射方向上观察到两条主极大谱线, 试求这两条谱线的波长。

解:

由布拉格公式

$$2a_0 \sin \phi = k\lambda, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

对主极大谱线, 则 $k=1$, 故

$$\lambda = 2a_0 \sin \phi$$

$$\therefore \lambda_1 = 2a_0 \sin \phi_1 = 2 \times 3.029 \times \sin 43^\circ 20' = 4.157 \text{ \AA}$$

$$\lambda_2 = 2a_0 \sin \phi_2 = 2 \times 3.029 \times \sin 40^\circ 42' = 3.950 \text{ \AA}$$

五、自我检查题

1. 在单缝衍射中, 若单缝两端 A, B 发出的单色平行光到空间某点 P 的光程差为 $a \sin \phi = \frac{3}{2}\lambda$, 则 A, B 间可分为 _____ 个半波带, P 点处为 _____ 条纹。若光程差为 2λ , 则 A, B 间可分为 _____ 个半波带, P 点处为 _____ 条纹。单缝衍射时中央明条纹的角宽度应为 _____。

2. 单缝衍射时, 设入射光为单色光。若单缝变宽, 则屏上条纹变 _____; 若波长变长, 则屏上条纹变 _____; 若波长不变, 但透镜焦距变小, 屏向前移 (仍在透镜焦平面上), 则屏上条纹变 _____; 若屏不移动, 屏与单缝之间充以水 (屏仍在透镜焦平面上), 则屏上条纹变 _____。

3. 白色光垂直入射在单缝上, 则中央应为 _____ 条纹, 这说明各种波长的光在中央 _____, 两侧对称地排列 _____ 条纹, 同一级光谱中, 红色明条纹在 _____, 紫色明条纹在 _____。

4. 单色点光源经圆孔衍射后, 在屏上出现 _____ 形状的明暗条纹。中央斑的角半径 $\theta \approx \sin \theta =$ _____, 根据瑞利判据, 最小分辨角 $\delta \phi =$ _____, 光学仪器的分辨率应为 _____。

5. 若人眼的瞳孔直径为 3 mm , 用对人眼最敏感的 $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ 的光照明, 在明视距离 (25 cm) 处能分辨的两点间最小距离为 _____, 并能分辨 _____ 远处相距为 10 cm 的两点。若用望远镜 (物镜的半径 $R = 1.5 \text{ m}$) 观察, 则能分辨 _____ 远处相距为 10 cm 的两点。

6. N 条狭缝的光栅衍射, 满足 $(a+b) \sin \phi =$ _____ 时, 出现明条纹, 叫极大条纹, 在这两个相邻条纹之间有 _____ 个极小。所以, 单色光照射光栅时, 屏上得到的是 _____ 背景下一条条 _____ 条纹。

7. 若光栅常数为 $a+b$, 缝宽为 a , 则同时满足 $(a+b) \sin \phi = k\lambda$ 及 _____ 时, 会形成缺级。如 $b=a$, 则光谱中缺 _____ 级, 如 $b=2a$ 时, 缺 _____ 级。

8. 如无缺级时, 在2cm上均匀刻有10000条线的光栅, 当照明光垂直入射时, 最多能见到 $k =$ 级完整的光谱 (可见光 $\lambda = 4000\text{Å} \sim 7600\text{Å}$)。

9. X射线在晶体上衍射时, 满足布喇格公式_____, 若在晶格常数 $d = 2.4\text{Å}$ 的晶体上反射, 在 $\phi = 30^\circ$ 方向上加强, 则X射线的波长应为_____。(X射线的波长范围为 $0.7\text{Å} \sim 2.5\text{Å}$)

10. 波长 $\lambda_1 = 7200\text{Å}$ 的红光垂直照明一光栅。已知第二级极大位于 30° 处, 则光栅常数 $a + b =$ _____; 若另一波长 λ_2 的第三级极大正好与 λ_1 的第二级极大重合, 则该单色光的波长 $\lambda_2 =$ _____。

第十九章 光的偏振

一、基本要求

- (1) 了解自然光与偏振光的概念。
- (2) 了解通过反射与折射、双折射、二向色性等光学现象产生偏振光的原理与方法。
- (3) 了解偏振光干涉现象的原理与应用。

二、基本概念和规律

1. 光的偏振

(1) 电场强度 E 的矢量性。光是一种电磁波，而电磁波是横波。以前两章中讲了与光的波动性相关联的光学现象——干涉与衍射，本章中要把光波的横波性质考虑进去，即描写光波的电场强度 E 是一个矢量，它在与传播方向垂直的平面内，并有特定的方向。光的偏振就是和描写光振动的电场强度 E 与传播方向垂直这一主要特征相联系的光学现象。

(2) 偏振光。空间各点电场强度 E 即是矢量，它在垂直于传播方向平面内（例如沿 z 方向传播的光， E 在 $x-y$ 平面内），应符合矢量运算法则：

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j}, \text{ 对频率为 } \omega \text{ 的单色光,}$$

$$\mathbf{E} = E_{x0} \cos(\omega t + \phi_{x0}) \mathbf{i} + E_{y0} \cos(\omega t + \phi_{y0}) \mathbf{j}$$

即可看成两个方向相互垂直同频率分振动的合成。在程书第一册教材§4-6 (P.176) “相互垂直振动合成”一节中已说明了，若两个垂直的谐振动能保持固定的位相差 $\Delta\phi = \phi_{y0} - \phi_{x0}$ ，则在 $x-y$ 平面内，合成矢量的末端的运动轨迹，由二个分振动的频率、振幅与位相差所决定。但作为矢量，在任一时刻， E 在空间有一定的方向。

若描述光波空间各点的合成振动 E 沿固定直线往返振动，叫线偏振光（有时叫平面偏振光，即光波有固定的振动平面——由 E 方向与传播方向组成的平面）。只要保证 $x-y$ 两分振动的位相差保持为 π 的整数倍（同位相或反位相）即可。

若 $x-y$ 两个分振动位相差保持 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，合成振动 E 矢量末端必沿一椭圆运动，叫椭圆偏振光，再附加上两分振动振幅相等（ $E_{x0} = E_{y0}$ ）， E 矢量末端就沿圆周运动，则叫做圆偏振光。因为在任一时刻，由于 E 的矢量性，使光振动在空间任何一点仍有一定的方向，保持偏振特性，故还是叫偏振光。

若顺着光传播方向， E 矢量末端顺时针旋转，叫右旋圆偏振光，逆时针旋转，叫做左旋圆偏振光。（注意：在不同光学书中，可以作相反的约定）

(3) 自然光。电磁波的本性是偏振性。每一个原子所发的光波列亦是偏振的。一个光源发的光，应是大量原子或分子分别发出的波列的电矢量 E 的叠加，每一时刻应有一个合矢量，按电磁波本性而言，也是偏振的。

那么为什么还要引入非偏振的自然光这个概念呢？问题在于每一个原子所发光的波

列, 只持续 $10^{-8} \sim 10^{-9}$ 秒, 每一个原子各次发光, 或不同原子的发光, 所具有的偏振方向及光振动位相都是不同定的, 无规则的, 随机的, 它们都是独立光源。因此, 合成振动的 E 矢量的偏振性, 只能持续很短时间。各次偏振之间又是完全独立的, 不相关的。若仪器对光的偏振性质的观测时间足够长, 即在此测量时间内, 光波的偏振方向迅速改变, 以相等的几率出现在 $x-y$ 平面内的一切可能方向上, 这样测量过程把所有的偏振效应都平均掉了。实验无法确定光的偏振性质, 我们称这种光叫自然光。

由此可见, “真正”的非偏振光是没有的, 仅对测量技术而言, 才有自然光的概念。若发明一种测量技术, 测量时间足够短, 则仪器可测得光的偏振效应, 此时, 对仪器而言, “自然光”就可转化为“偏振光”。

一般热光源发出的自然光, 对通常测量仪器而言, 应是非偏振光。仪器测得自然光在 $x-y$ 平面内每一个可能方向上, 具有相同的光振动强度, 实验无法测得自然光的偏振效应。

2. 偏振光的获得

利用仪器从自然光中, 或从已有的各种可能的偏振方向复杂的叠加的光波中, 可挑选出在确定方向偏振的光来。本章讲了三种挑选方法。

(1) 布儒斯特定律。它的实验规律是当自然光在两种各向同性介质分界面上反射, 且入射角 i_0 等于布儒斯特角:

$$\operatorname{tg} i_0 = \frac{n_2}{n_1}$$

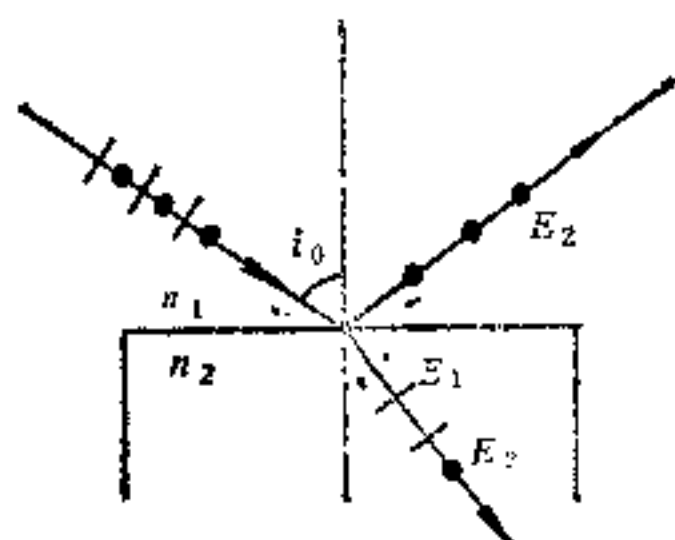


图 19-1

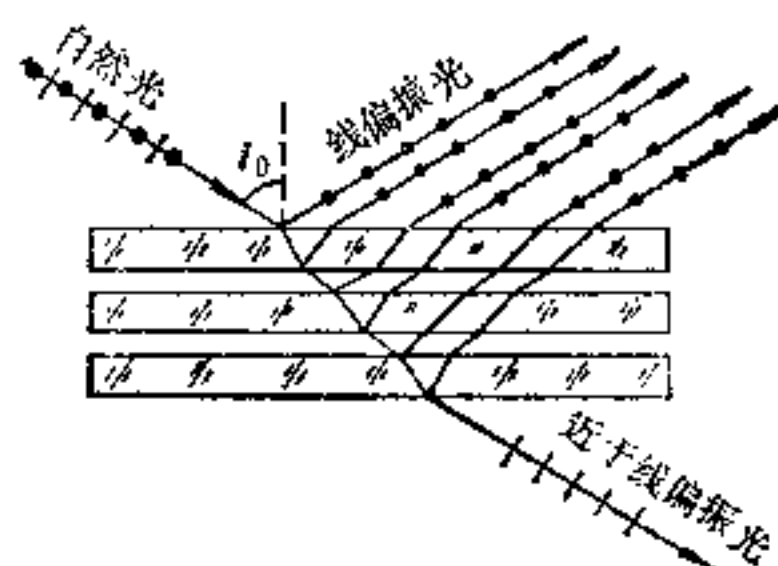


图 19-2

此时, 反射光为线偏振光, 振动方向垂直于入射平面, 折射光为部分偏振光。入射角 i_0 与折射角 r 之和等于 $\frac{\pi}{2}$, 即 $i_0 + r = \frac{\pi}{2}$ 。此实验规律叫做布儒斯特定律。物理解释为: 一束自然光入射于玻璃, 设折射光中电矢量为 E , 则光所到之处使玻璃内的电子产生强迫振荡, 电子振荡必辐射光。反射光全是由这种辐射光或叫电子散射光组成的。

折射光中的 E , 必在与光的前进方向垂直的平面内, 由它激发的电子振荡方向应与介质 2 中 E 相同。把 E 分解为互相垂直的两种振动成分如图 19-1 所示。由电子振荡辐射光的最大强度在与电子振荡方向垂直的平面内, 而在振动方向延长线上不辐射光。当反射光与折射光互相垂直: $i + r = \frac{\pi}{2}$, 只有垂直于光的入射平面的电子振动 E_2 才能对反射光有贡献。而

沿反射光方向振动的电子振动 E_1 ，对反射光无贡献。正是这种电子辐射角分布的不对称性，使反射光成为线偏振光，其偏振方向垂直于入射平面，折射光为部分偏振光。

对玻璃片的入射光与透过玻璃片的透射光恒为平行。因此，用一组平行玻璃片组成玻璃堆，当一束自然光以布儒斯特角 i_0 入射于第一块玻璃片时，透射光对第2, 3……块玻璃片的入射角都是布儒斯特角 i_0 ，这样对玻璃堆的反射光仍是偏振光，偏振方向垂直于入射平面，而经多次反射后的透射光成为近似偏振光。偏振方向在入射平面内，与反射光的偏振方向垂直。

(2) 双折射。双折射这种偏振效应来源于物质对不同方向线偏振光具有不同的折射率。在研究光在物质中传播速度这一问题时，应注意物质对偏振方向各向异性。利用这一效应，当一束自然光射入晶体内，二个不同方向的线偏振光因具有不同的折射率，产生两束折射光。一束叫寻常光（或简称o光），遵从折射定律。另一束叫非寻常光（或简称e光），它不遵从折射定律。实验发现这两束光都是线偏振光。

o光与e光的区别是相对于晶体而言的，离开了晶体就无法分辨，二者都是线偏振光，仅有不同偏振方向而已。可见，双折射是获得线偏振光的一种方法。

(3) 二向色性与马吕斯定律。二向色性效应来源于晶体对o光与e光的选择吸收。如电气石能强烈吸收o光，只允许e光通过。硫酸碘奎宁有机晶体，亦具有强烈的二向色性，把此晶体颗粒沉淀在聚氯乙烯薄膜上，将薄膜按一定方向拉伸后，晶体颗粒按拉伸方向整齐排列，再将这种薄膜夹在两块透明塑料片或玻璃片内，可制成微晶型人工偏振片。它因具有轻便，价格低廉与面积大等优点而被广泛应用。

强度为 I_0 的线偏振光，透过检偏器后透射光的强度为： $I = I_0 \cos^2 \alpha$ ，其中 α 为入射光偏振方向与偏振片偏振化方向之间的夹角，上述公式叫马吕斯定律。

3. 偏振光的干涉

两束光的干涉条件：振动方向相同，频率相同，且有固定位相差。

(1) 固定位相差。利用晶片的双折射效应。切割晶片，使其晶面平行于光轴方向，正入射于晶面线偏振光，在晶片内按主平面分解为o光与e光，对应的折射率为 n_o 与 n_e ，透过晶片后具有固定光程差 $\delta = (n_o - n_e)d$ ，（ d 为晶片厚度），对应的位相差 $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$ 若晶片厚度 d 正好使o光与e光在通过晶片后产生 $\frac{\pi}{2}$ 的位相差，或 $\frac{\lambda}{4}$ 的光程差，此晶片叫1/4波片。若晶片厚度 d 选择为o光与e光有 π 位相差或 $\frac{\lambda}{2}$ 光程差，此晶片叫半波片。

这样：1/4波片可使入射线偏振光变为椭圆偏振光（或圆偏振光），或使椭圆偏振光转换成线偏振光。

半波片，可使线偏振光转换成线偏振光，但出射相对入射的偏振方向会转过 $\frac{\pi}{2}$ 。半波片可将圆偏振光转换成圆偏振光，但入射与出射光可由右旋变为左旋，反之亦然。

(2) 起偏器。晶片不能把“自然光”转换为“偏振光”。为此需先用一个起偏器，使自然光变为线偏振光。再通过晶片形成有固定位相差的o光与e光。

(3) 透过晶片的o光与e光，因其偏振方向相互垂直，不能相干，故必须使o光与

e 光变为同方向的振动, 叠加后才能相干。透过晶片的光, 只需通过一个偏振片, 使 o 光与 e 光在其偏振化方向上皆有分量, 以满足偏振光的干涉条件, 形成干涉条纹。

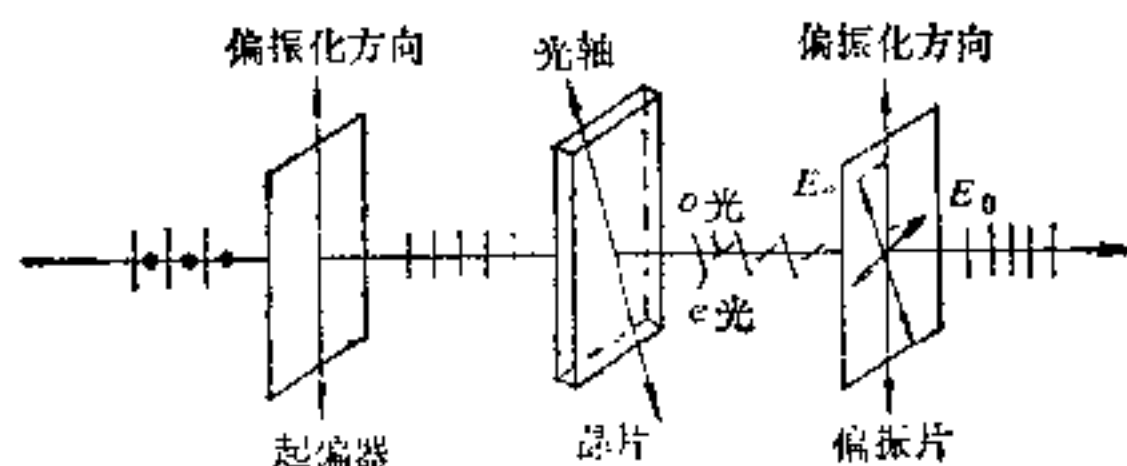


图 19-3

总之, 自然光通过二个偏振片及夹在中间的、折射率对偏振方向各向异性的物质后, 在空间就会产生偏振光的干涉, 该干涉条纹的空间位置, 决定于物质的厚度 d 及折射率 (n_o, n_e) 的空间分布。

三、解题示范 (略)

四、习题与解答

19-1 回答下列问题:

- (1) 自然光与线偏振光、部分偏振光有何区别?
- (2) 用哪些方法可以获得线偏振光和检验线偏振光?

答:

(1) 在实验观察时间内, 描述光波的 E 矢量若以相等的几率出现在与传播方向垂直的平面内的每一个可能方向上的, 叫自然光。

若出现在空间的固定方向上, 叫线偏振光。

若在某一个方向上出现的几率较大, 就叫部分偏振光。

(2) 获得线偏振光的方法, 书上讲了三种:

第一种: 在各向同性的两种介质的分界面上, 自然光以布儒斯特角 $i_0 = \text{tg}^{-1} \frac{n_2}{n_1}$ 入射时, 则反射光是线偏振光。

第二种: 自然光通过折射率各向异性的晶体时, 产生双折射现象, 两条折射光分别为线偏振光。

第三种: 自然光通过具有二向色性的晶体时, 因吸收性能不同, 会产生线偏振光。

检验线偏振光, 可用偏振片, 当观察通过偏振片的光的强度时, 绕传播方向旋转偏振片, 若发现有亮暗变化, 且最暗时没有光通过, 则是线偏振光。

19-2 回答下列问题:

(1) 何谓光轴、主截面和主平面? 用方解石晶体解释之。

(2) 何谓寻常光线和非常光线? 它们的振动方向与各自的主平面有何关系? 用方解石晶体为例, 指出在怎样情形下寻常光的主平面和非常光的主平面都在主截面内?

(3) 有人认为只有自然光通过双折射晶体, 才能获得 o 光和 e 光, 你的看法如何? 为什么?

(4) 有人说: “因为光具有偏振特性, 所以光波一定是横波”。他说得对吗? 为什么?

么?

答:

(1) 光轴是指晶体内存在的特定方向, 光沿此方向传播时, 折射率与偏振方向无关, 不存在双折射现象。晶体内存在的这个固有方向, 叫晶体的光轴。对方解石晶体, 光轴方向是与六面棱体中三个棱边成 102° 角的两个顶点间的对角线方向。

主截面是指光轴与晶面法线组成的平面。

主平面是指光轴与光线组成的平面。

(2) 把介质中实际存在的折射光, 看成是寻常光和非寻常光的组合。 o 光反映了折射光中各向同性部分, e 光反映了折射光中各向异性部分。 e 光振动方向在主平面内, o 光振动方向垂直于主平面。

当入射面与晶体(方解石)主截面一致时, 则 o 光与 e 光的主平面都在主截面内。

(3) 不是。不仅是双折射晶体, 很多物质在一定条件下, 当呈现出折射率对光的偏振方向存在各向异性时, 自然光通过后都可获得 o 光与 e 光。

在人为双折射现象中, 如非晶体物质玻璃、赛璐珞等, 在存在内应力产生机械变形和非晶体或液体(硝基苯)外加强大的电场时, 都呈现出折射率各向异性的特征。

此题需回答的另一层意思是: 只要线偏振光通过双折射晶体时, 其 E 的偏振方向在晶体主平面的垂直方向与平行方向都存在分量时, 同样可以获得 o 光与 e 光, 并不一定要自然光。

(4) 不对。光具有偏振特性, 指描写光振动的物理量——电场强度 E 具有矢量性, 在空间具有特殊指向。从此意义上讲, 如固体中声波, 存在着横波与纵波。即有三个偏振方向: 一个纵向偏振方向和两个横向偏振方向(描写声振动的物理量——位移也是一个矢量)。所以, 由光的偏振性而得出光波是横波的结论是不对的。在自由空间中, 光的横波性在理论上是麦克斯韦理论的结论, 在实验上因从未发现有纵波而得到证实。

19-3 太阳光射在水面上, 如何测定从水面上反射的光线的偏振程度? 它的偏振程度与什么有关, 在什么时候偏振程度最大?

答:

用测量反射光通过偏振片后的光强, 当绕反射光线转动偏振片时, 观察光强的亮暗变化。若无亮暗变化, 则反射光是自然光。有亮暗变化, 且有极大值与极小值, 但无消光位置, 则是部分偏振光。对比度越小, 偏振程度越大, 当对比度为零, 即只有一个方向(偏振化方向与光偏振方向垂直的方向)可全部阻止反射光透过偏振片, 则偏振度最大。此时, 太阳光必以布儒斯特角 $i_0 = \text{tg}^{-1} n_{\text{水}} = \text{tg}^{-1} 1.33 = 53^\circ$ 入射于水面, 使反射光成为线偏振光。

19-4 (1) 求出光在装满水的容器底部反射时的布儒斯特角, 已知容器是用折射率 $n = 1.50$ 的冕牌玻璃制成的。

(2) 怎样测定不透明媒质(例如珉琅)的折射率?

(3) 今测得釉质的起偏振角 $i_0 = 58^\circ$, 试求它的折射率为多少?

解

$$(1) \quad \text{tg } i_0 = \frac{1.50}{1.33} = 1.1273 \quad i_0 = 48.44^\circ$$

(2) 对不透明介质, 可用测定表面反射光为线偏振光时的布儒斯特角

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} i_0 &= \frac{n_2}{n_1} \\ n_2 &= n_1 \operatorname{tg} i_0\end{aligned}$$

可测得其折射率。

(3) 釉质的折射率

$$n_2 = n_1 \operatorname{tg} 58^\circ = 1 \times \operatorname{tg} 58^\circ = 1.60$$

19-5 如图所示, 偏振片 M 作为起偏振器, N 作为检偏振器, 使 M 和 N 的偏振化方向互相垂直。今以单色自然光垂直入射于 M , 并在 M 、 N 中间平行地插入另一偏振片 C , C 的偏振化方向与 M 、 N 均不相同。

(1) 求透过 N 后的透射光强度;

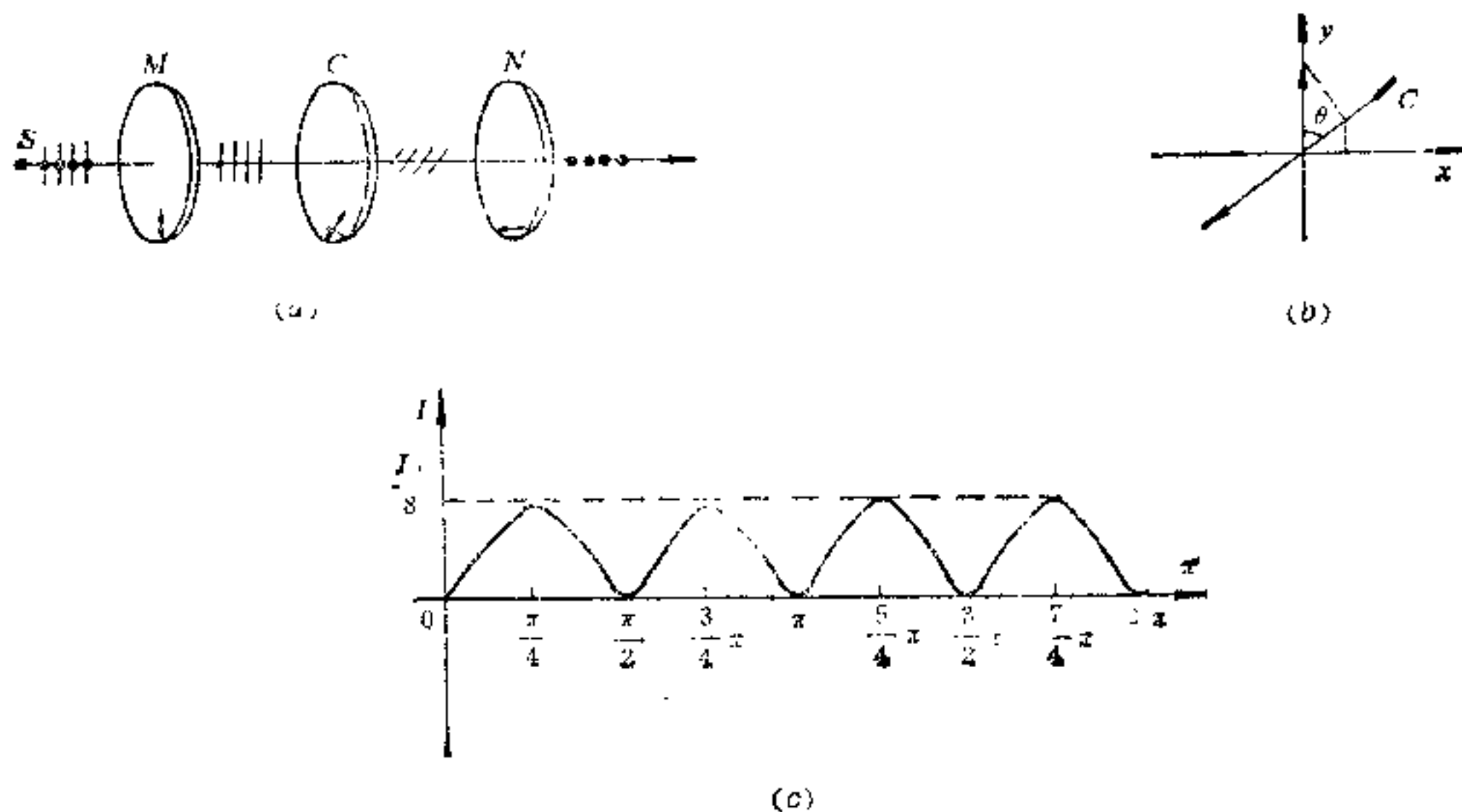
(2) 若偏振片 C 以入射光线为轴转动一周, 试定性画出透射光强随转角变化的函数曲线。设自然光强度为 I_0 , 并且不考虑偏振片对透射光的吸收。

解:

由马吕斯定律: $I = I_0 \cos^2 \alpha$ 可知, 若原光强为 I_0 , 则通过 M 后为 $\frac{I_0}{2}$, 通过 C 后为 $\frac{I_0}{2} \times \cos^2 \theta$, 故通过 N 后的透射光强为:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^2 = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\theta$$

透射光强随转角变化的函数关系, 如题 19-5(c) 图所示:



题 19-5 图

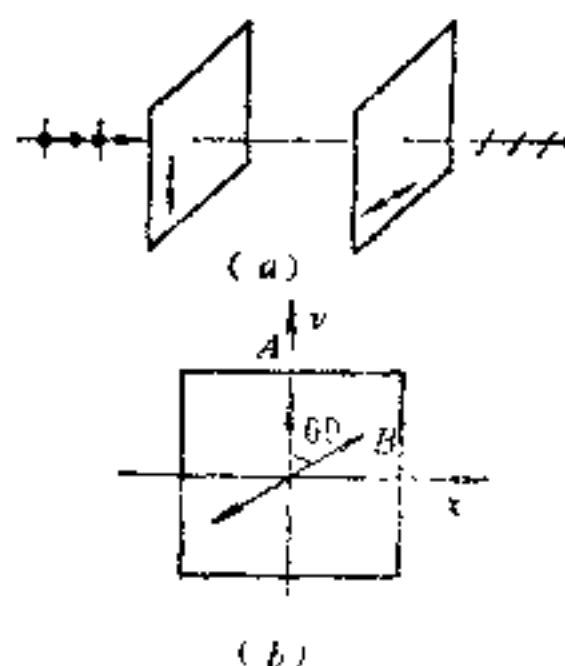
19-6 平行放置两偏振片, 使它们的偏振化方向成 60° 的夹角。

(1) 如果两偏振片对光振动平行于其偏振化方向的光线均无吸收, 则让自然光垂直入射后, 其透射光强与入射光强之比是多少?

(2) 如果两偏振片对光振动平行于其偏振化方向的光线分别吸收了 10% 的能量, 则

透射光强与入射光强之比是多少?

(3) 今在这两偏振片之间再平行地插入另一偏振片, 使它的偏振化方向与前两个偏振片均成 30° 角, 则透射光强与入射光强之比又是多少? 先按无吸收情况计算, 再按有吸收(均吸收10%)情况计算。



题 19-6 图

解:

(1) 透射光强

$$I = \left(\frac{1}{2} I_0 \right) \cos^2 60^\circ = \frac{I_0}{8}$$

透射光强与入射光强之比

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{8} = 0.125$$

(2) 若偏振片对平行于偏振化方向的光有10%的能量吸收, 则

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{8} (1 - 10\%)^2 = 0.101$$

(3) 若中间再插入偏振化方向与前二个均成 30° 角的偏振片, 则无吸收时:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} (\cos^2 30^\circ)^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 = \frac{9}{32} = 0.281$$

若有吸收时,

$$\frac{I}{I_0} = \frac{9}{32} (1 - 10\%)^3 = 0.205$$

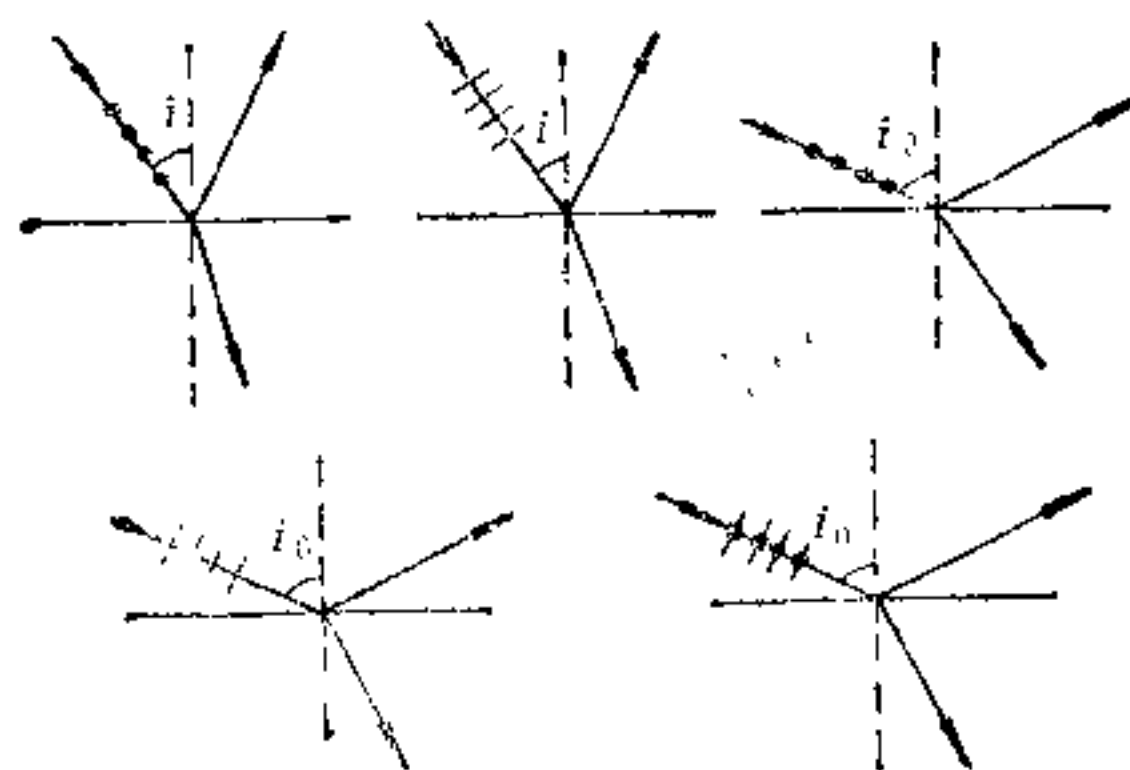
19-7 在题19-7图(a)所示的各种情况中, 以线偏振光或自然光入射于界面时, 问折射光和反射光各属于什么性质的光? 并在图中所示的折射光线和反射光线上用点和短线把其振动方向表示出来。图中 $i_0 = \arctg n$, $i \neq i_0$ 。

答:

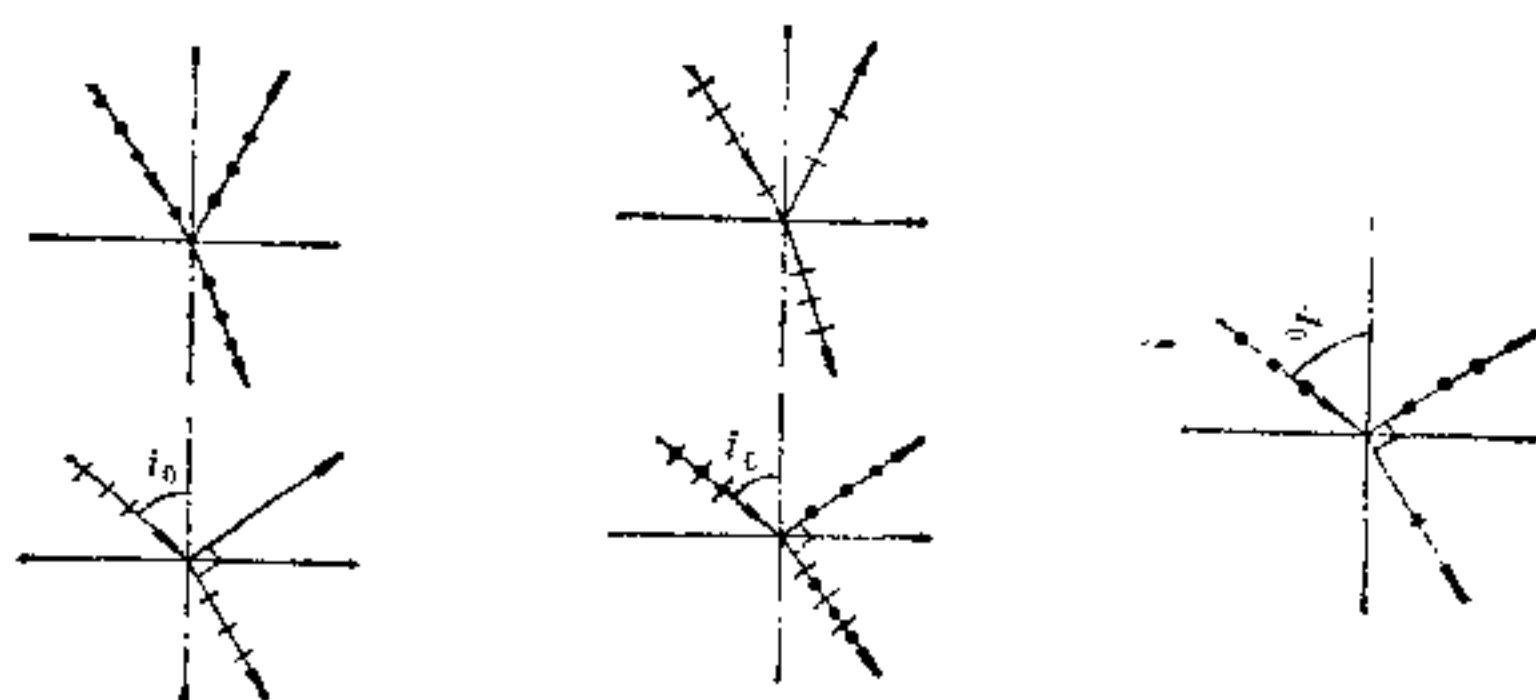
折射光和反射光的性质如题19-7图(b)所示:

19-8 如题19-8图(a)所示, 一束自然光入射在方解石晶体的表面上, 入射光线与光轴成一定角度; 问将有几条光线从方解石透射出来? 如果把方解石切割成等厚的A、B两块, 并平行地移开很短一段距离, 如图(b)所示, 此时光线通过这两块方解石后有多少条光线射出来? 如果把B块绕光线转过一个角度, 此时将有几条光线从B块射出来? 为什么?

答:



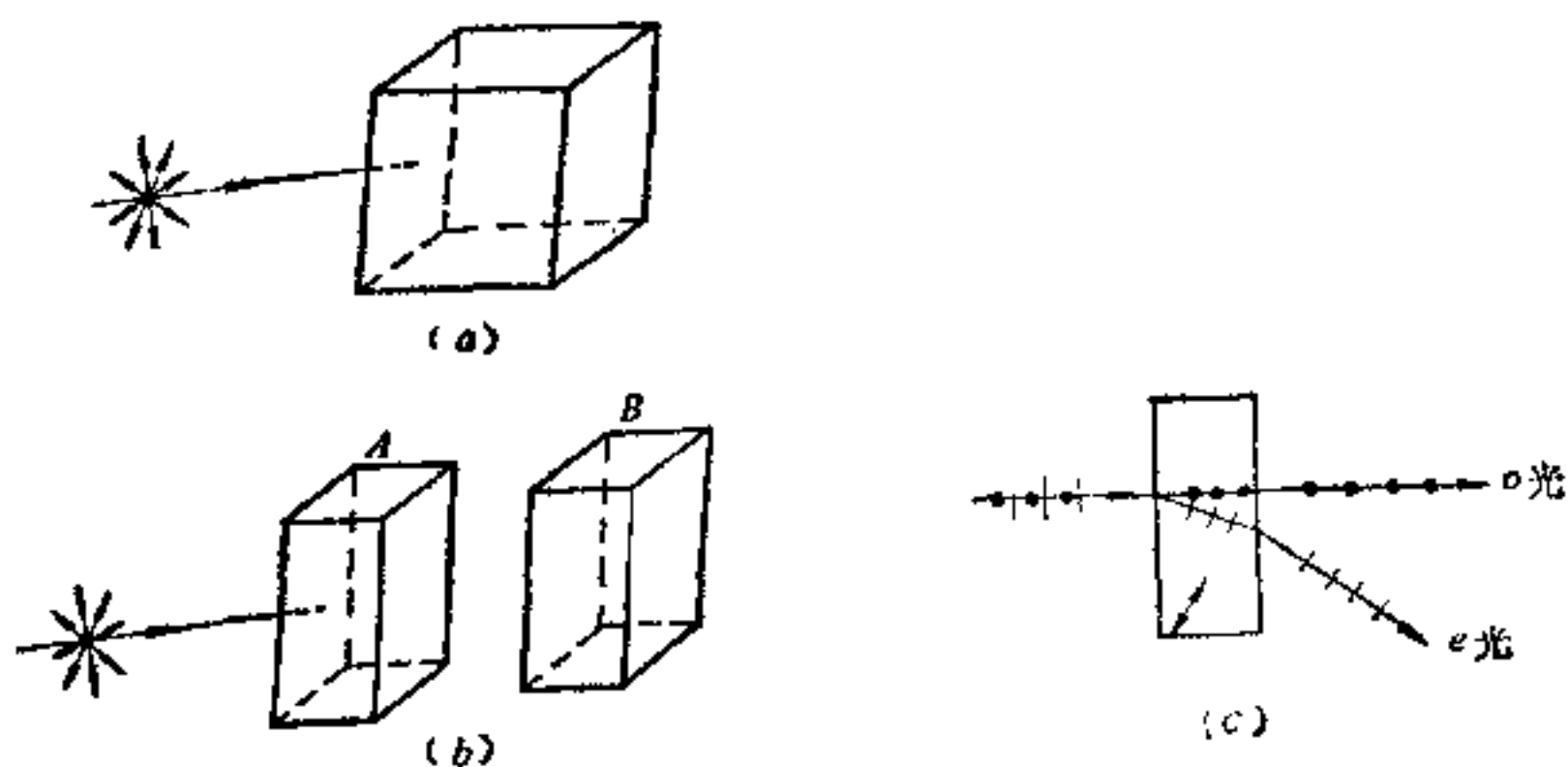
(a)



(b)

题 19-7 图

若入射光为自然光，入射光线与晶体光轴成一定角度 θ ，只要不是沿光轴方向($\theta \neq 0$)及与光轴方向垂直($\theta \neq \frac{\pi}{2}$)，透射光有两束光。其中一束符合折射定律，为寻常光，即 o 光，偏振方向垂直于主平面的线偏振光。另一束光不服从折射定律，为非常光，即 e 光，偏振化方向在主平面内的线偏振光。



题 19-8 图

当把方解石对截为两块后平移分开，则二块主截面相同。对第一块方解石中 o 光与 e 光。对第二块仍是 o 光与 e 光，所以透射光仍然是两束。

当其中一块绕光线转过一定角度时，则对第一块的 o 光（或 e 光）对第二块已不是 o 光（或 e 光），其振动电矢量需按第二块主截面重新分解为垂直分量的 o 光与平行分量的 e 光，故透射光为四束光。

19-9 用方解石割成一个正三角形棱镜，其光轴与棱镜的棱边平行，亦即与棱镜的正三角形横截面相垂直。如图所示，今有一束自然光入射于棱镜，为使棱镜内的 e 光折射线平行于棱镜的底边，该入射光的入射角 i 应为多少？并在图中画出 o 光的光路，已知 $n_o = 1.49$ （主折射率）， $n_e = 1.66$ 。

由此说明怎样用这种棱镜来测定方解石的 n_o 、 n_e （主折射率）？

解：

折射光中 e 光平行棱镜底边，则折射角 $\gamma_e = 30^\circ$ ，由费涅耳定理：

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma_e} = n_e$$

$$\sin i = n_e \cdot \sin \gamma_e = 1.66 \times \frac{1}{2} = 0.745$$

入射角应为

$$i = 48.16^\circ$$

对 o 光：

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma_o} = n_o$$

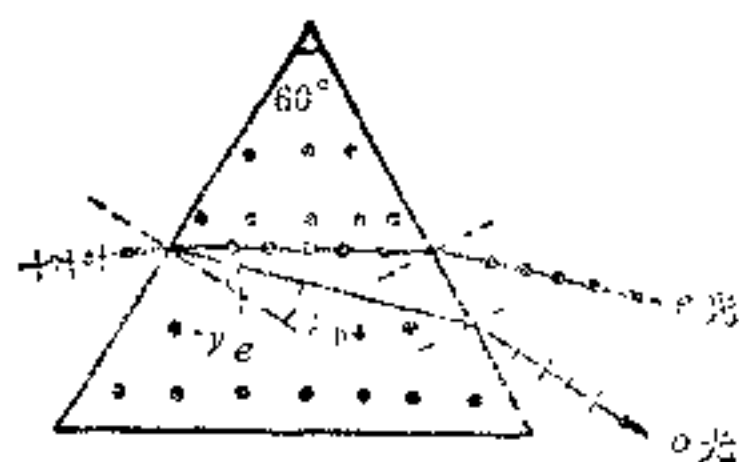
则

$$\sin \gamma_o = \frac{\sin i}{n_o} = \frac{\sin 48.16^\circ}{1.66} = \frac{0.745}{1.66} = 0.4488$$

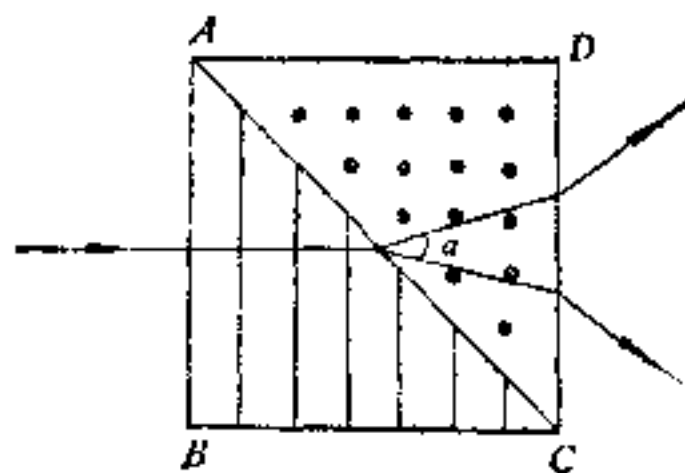
\therefore

$$\gamma_o = 26.67^\circ$$

调节入射角 i ，使折射角恒与底边平行，即固定折射角(i_e 或 i_o)为 30° ，测定 i 即可测得 n_e 和 n_o 。



题 19-9 图



题 19-10 图

19-10 图示为一渥拉斯顿（W. H. Wollaston）棱镜的截面，它是由二个锐角均为 45° 的直角方解石棱镜，粘合其斜面而构成的，并且棱镜 ABC 的光轴平行于 AB ，棱镜 ADC 的光轴垂直于图截面。

(1) 当自然光垂直于 AB 入射时，试说明为什么 o 光和 e 光在第二个棱镜中分开成 α 夹角，并在图中画出 o 光和 e 光的波面和振动方向。

(2) 当入射光是波长为 5890\AA 的钠光时，求 α 的值。已知方解石中的 $n_o = 1.658$ ， $n_e = 1.486$ 。

答:

(1) 自然光正入射于 AB 。对棱镜 ABC 而言, 垂直主平面的偏振部分, 即 $\rightarrow \cdot \leftarrow \cdot \rightarrow$ 是 o 光, 如对钠光, 折射率为 $n_o = 1.66$, 在主平面的偏振部分, 即 $\rightarrow | \leftarrow | \rightarrow$ 是 e 光, 折射率 $n_e = 1.49$ 。因入射光垂直光轴, o 光与 e 光并不分开。当入射到棱镜分界面 AC 时, 其入射角 $i = 45^\circ$, 对棱镜 ADC 而言, $\rightarrow | \leftarrow | \rightarrow$ 线偏振光因偏振方向在主平面内, 是 e 光, $n_e = 1.49$ 。 $\rightarrow \cdot \leftarrow \cdot \rightarrow$ 线偏振光因偏振方向垂直于主平面, 是 o 光, $n_o = 1.66$, 这样, 线偏振光 $\rightarrow \cdot \leftarrow \cdot \rightarrow$ 在 AC 分界面上由 o 光转变为 e 光, 折射率由 1.66 变化 1.49。即从光密介质射入光疏介质。由

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma_1} = \frac{n_e}{n_o}$$

$$\sin \gamma_1 = \frac{n_o}{n_e} \times \sin i = \frac{1.66}{1.49} \times \sin 45^\circ = 0.7878$$

故折射角

$$\gamma = 51.98^\circ > i$$

线偏振光 $\rightarrow | \leftarrow | \rightarrow$ 在 AC 分界面上, 是由 e 光转变为 o 光, 折射率由 $n_e = 1.49$ 转变为 $n_o = 1.66$, 即从光疏介质射入光密介质,

$$\frac{\sin i}{\sin r_2} = \frac{n_o}{n_e}$$

$$\sin r_2 = \frac{n_e}{n_o} \cdot \sin i = \frac{1.49}{1.66} \sin 45^\circ = 0.6347$$

\therefore

$$\gamma_2 = 39.40^\circ > i$$

两条线偏振光分别处在入射方向的两侧, 在空间分离为两束光, 经 DC 表面折射后, 在空间进一步分开。

(2) 对钠光 $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ 光, $n_o = 1.66$ $n_e = 1.49$, 在棱镜 ADC 中, 两束线偏振光的分离角

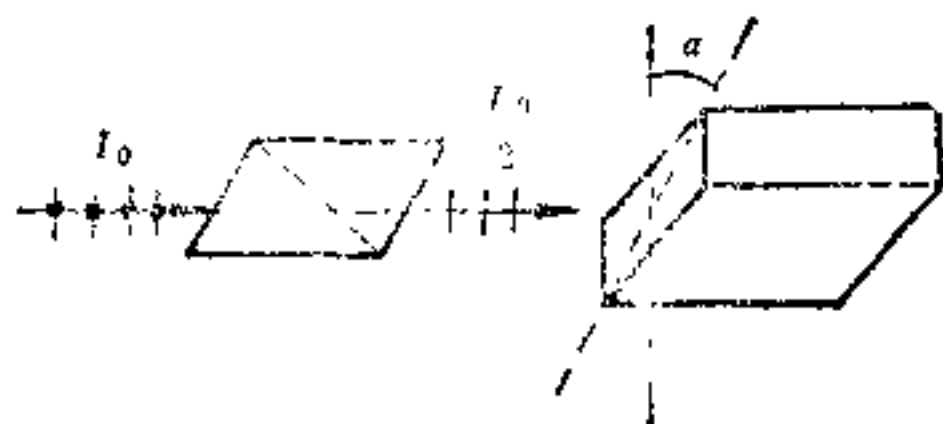
$$\alpha = \gamma_1 - \gamma_2 = 51.98^\circ - 39.40^\circ = 12.58^\circ$$

由上可知, 利用渥拉斯顿棱镜可从自然光中获得两束在空间分离的线偏振光。

19-11 两尼科耳棱镜的主截面间的夹角由 30° 转到 45° 。

(1) 当入射光是自然光时, 求转动前后透射光的强度之比。

(2) 当入射光是线偏振光时, 求转动前后透射光的强度之比。



题 19-11 图

解:

(1) 自然光通过第一个尼科耳棱镜时, 仅 e 光(偏振方向在主截面内)可通过, 其透射光强为 $\frac{I_0}{2}$ 。该线偏振光射入第二个尼科耳棱镜后, 相对于第二个尼科耳棱镜来说, 再分解为

o 光与 e 光。但只有其中的 e 光能通过。故透射光强

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha$$

$$\alpha_1 = 30^\circ, I_1 = I_0 \cos^2 30^\circ / 2$$

$$\alpha_2 = 45^\circ, I_2 = I_0 \cos^2 45^\circ / 2$$

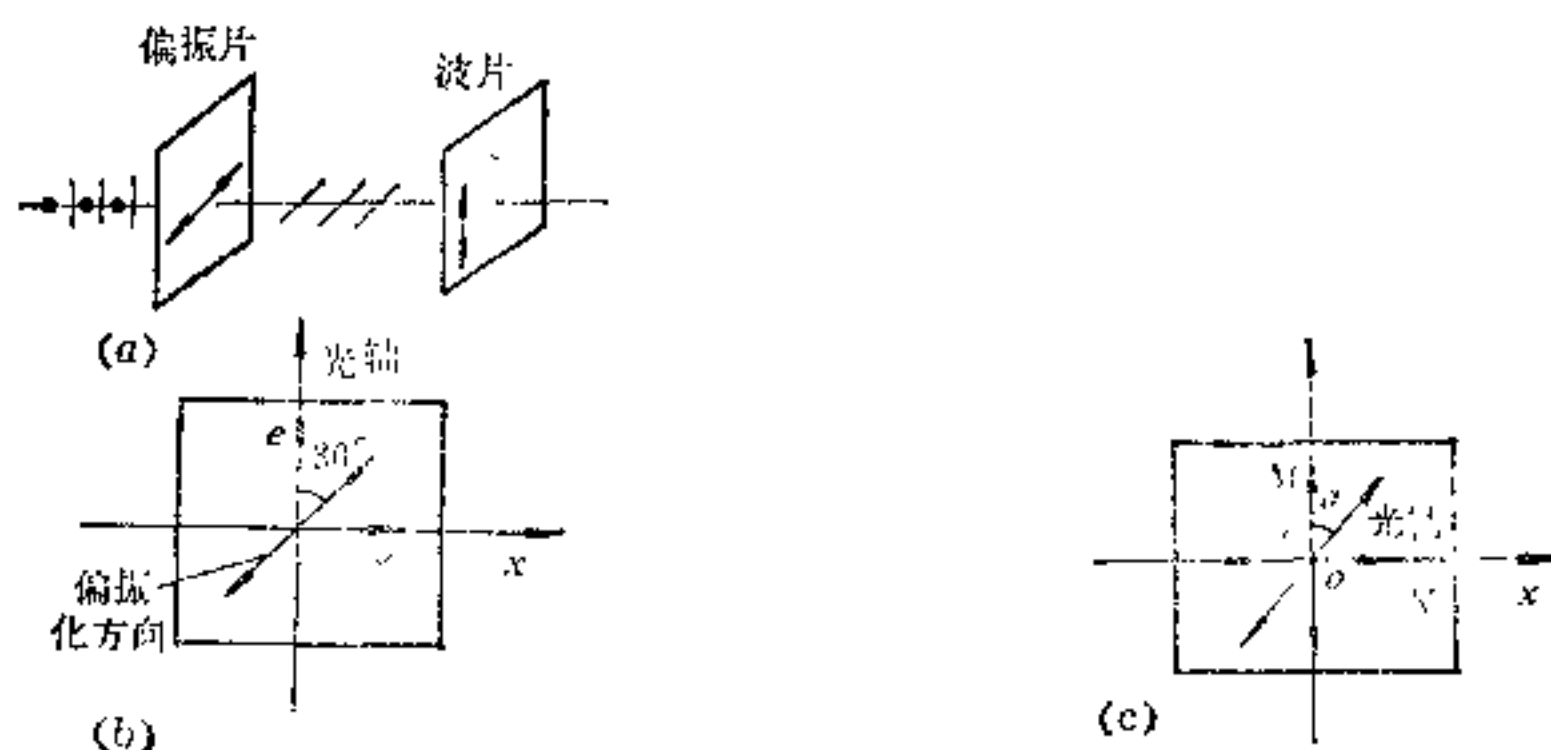
故透射光强度之比为

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cos^2 30^\circ}{\cos^2 45^\circ} = \frac{3}{2} = 1.5$$

(2) 入射光为线偏振光时, 透射光强度之比

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{3}{2} = 1.5, \text{ 不变。}$$

19-12 如果一个二分之一波片或四分之一波片的光轴与起偏振器的偏振化方向成 30° 角, 试问从二分之一波片还是从四分之一波片透射出来的光将是: (1) 线偏振光? (2) 圆偏振光? (3) 椭圆偏振光? 为何?



题 19-12 图

解:

通过偏振片后的线偏振光入射于晶片, 则 o 光的振幅 $E_o = E \cdot \sin 30^\circ = \frac{E}{2}$, e 光的振

幅 $E_e = E \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E$ 。振动方向互相垂直, 振幅不等。

(1) 对 $1/4$ 波晶片, 则透射光的位相差为 $\frac{\pi}{2}$, 为椭圆偏振光。

(2) 对 $1/2$ 波晶片, 则透射光的位相差为 π , 为线偏振光。

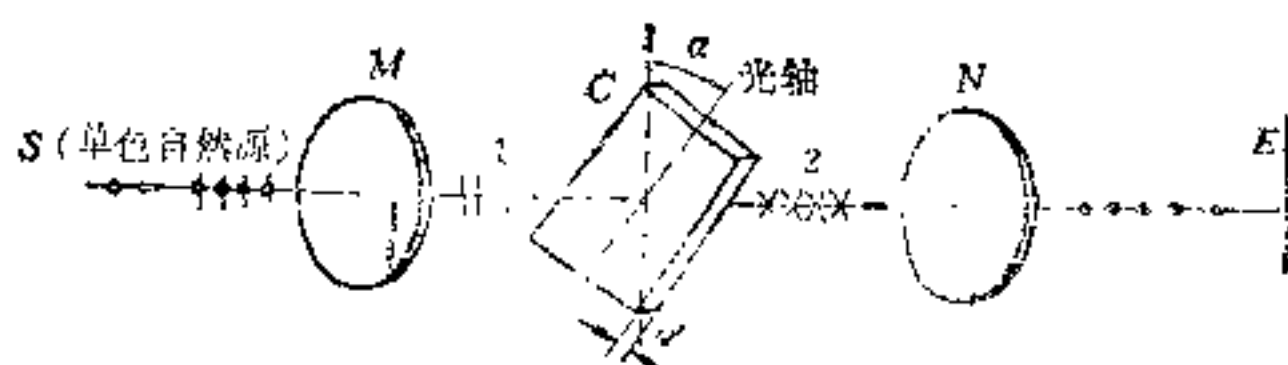
19-13 参看偏振光干涉的实验装置图, 题 19-13。在两正交的偏振片 M 、 N 之间插入一双折射晶片 C , 试问在下述两种情况下, 能否观察到干涉花样?

(1) 晶片的光轴方向与第一个偏振片的偏振化方向平行;

(2) 晶片的光轴方向与第一个偏振片的偏振化方向垂直。

解:

(1) $\alpha = 0$, 则对晶片而言, 透过 M 的线偏振光仅是 e 光, 并不分解为有固定位相差



题 19-13 图 线偏振光的干涉

的两束光。同时，此光无法通过 N ，因此，根本没有透射光，当然也就观察不到干涉花样。

(2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ，则对晶片仅有 o 光，它的振动方向仍与第二个偏振片 (N) 的偏振化方向垂直，故也观察不到干涉花样。

19-14 (1) 有人说，某光束可能是：自然光；线偏振光；部分偏振光。你如何通过实验来作出判断？

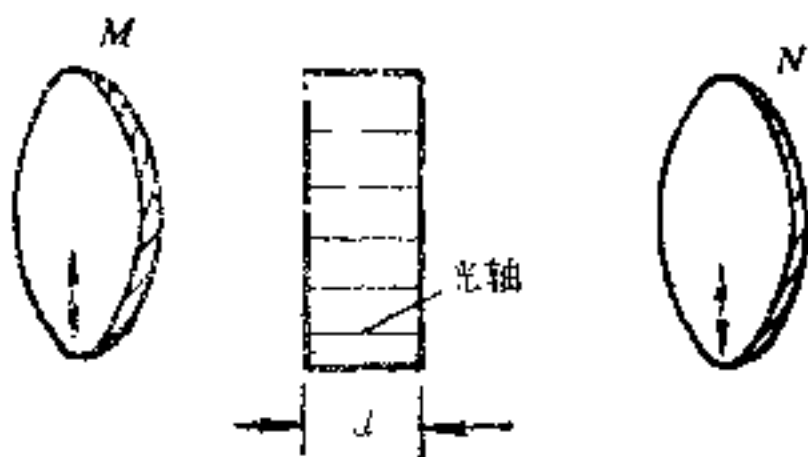
(2) 有人说，某光束可能是：自然光；圆偏振光；线偏振光，你又如何通过实验来作出判断？

答：

(1) 可用检偏器检验。当绕光线转动偏振片，若无光强变化，则为自然光；若有光强变化，且存在消光位置，则为线偏振光；若有光强变化，而无消光位置，则为部分偏振光。

(2) 用检偏器检验。当绕光线转动偏振片时，若光强有变化，且有消光位置的，则为线偏振光。若无光强变化，也无消光位置，则可能是自然光，也可能是圆偏振光。此时，在偏振片前放 $1/4$ 波片。此波片可把圆偏振光转变为线偏振光，但对自然光不起作用。此时再转动偏振片，若再无光强变化的，必是自然光，有光强变化，且有消光位置的，必是圆偏振光。

19-15 将厚度为 1mm 且垂直于光轴切出的石英晶片，放在两平行的偏振片之间，对某一波长的光波，经过晶片后振动面旋转了 20° 。问石英晶片的厚度变为多少时，该波长的光将完全不能通过？



题 19-15 图

答：

使光不能通过，线偏振光的振动面必须转过 $\frac{\pi}{2}$ ，由旋光性可知：

$$\phi = \alpha \cdot d$$

则旋光恒量

$$\alpha = \frac{\phi}{d} = \frac{20^\circ}{1\text{mm}} = 20^\circ/\text{mm}$$

故所需晶片厚度为

$$d = \frac{\phi}{\alpha} = \frac{90^\circ}{20^\circ/\text{mm}} = 4.5\text{ mm}$$

五、自我检查题

1. 自然光从折射率为 n_1 的介质入射到折射率为 n_2 的介质。当满足布儒斯特定律 $\text{tg } i_{01} = \frac{n_2}{n_1}$ 时, 则____射线为完全偏振光, ____射线为部分偏振光。若自然光由空气 ($n_1 = 1.0$) 入射到某种玻璃中, $i_{01} = 60^\circ$, 则该玻璃的折射率 $n_2 =$ _____。

2. 上题中, 若自然光由折射率为 n_2 的介质入射到折射率为 n_1 的介质, 由布儒斯特定律可得: $\text{tg } i_{02} =$ ____, 并且, i_{01} 与 i_{02} 之间有____的关系。由上题结果可知, $i_{02} =$ _____。

3. 光线射入方解石后, 折射光线分成两束, 其中一束光遵守折射定律, 我们叫它____光线 (____光), 另一束光不遵守折射定律, 我们叫它____光线 (____光)。若光线垂直入射, 我们旋转方解石, 则____光绕____光转动。这些现象叫____现象。

4. 用尼科耳棱镜可获得线偏振光, 是因为 o 光和 e 光在棱镜中有不同的____, 是利用光由方解石到加拿大胶层时____光产生____而获得偏振光。电气石的二向色性是利用电气石对 o 光和 e 光的____不同而获得偏振光的。

5. 检验自然光、线偏振光和部分偏振光时, 使被检验光入射到偏振片上, 然后旋转偏振片。若从偏振片射出的光线____, 则入射光为自然光, 若出射光线____, 则入射光为部分偏振光, 若出射光线____, 则入射光为完全偏振光。这三种情况下射出的光均为_____。

6. 今有电气石偏振片, 它完全吸收平行于长链方向振动的光, 但对垂直于长链方向振动的光吸收20%。当光强为 I_0 的自然光通过该起偏器后, 出射光强为____ I_0 , 通过检偏器后, 光强在____ I_0 与____之间变化。上述两片电气石, 若两长链之间夹角为 60° , 则通过检偏器后光强为____ I_0 。

7. 自然光通过偏振片后变为线偏振光。若使出射光线再通过 $\frac{1}{4}$ 波片, 波片光轴方向与偏振片偏振化方向成 45° 角, 则通过 $\frac{1}{4}$ 波片后的光是____偏振光, 若两者之间成 60° 角, 则通过 $\frac{1}{4}$ 波片后的光是____偏振光。

8. 要想区别自然光和圆偏振光, 可使它先通过 $\frac{1}{4}$ 波片, 再通过一检偏器, 若光强____, 则为自然光, 若光强____, 则为圆偏振光。

9. 厚度为 d 的 $\frac{1}{4}$ 波片的折射率, 有下述关系: $n_o - n_e =$ ____; 而 $\frac{1}{2}$ 波片的折射率, 有下述关系: $n_o - n_e =$ _____。

第六篇 近代物理学基础

近代物理学即需用相对论和量子论解释的物理学，由于它是在本世纪开始前后发现的一些新的物理现象，用经典物理学（包括牛顿力学、麦克斯韦电磁理论，经典统计力学等无法加以解释的情况下）发展起来的一种对自然界的新的理论认识。

这种理论，也是非常实用的，现代技术中的半导体器件与激光器件的制造，原子能的开发……，没有近代物理指导，是不可设想的。

近代物理是经典物理的推广，它使后者作为一种特殊情况包含其中。相对论把物理定律的应用引伸到高速运动领域，量子论则引伸到原子尺度的领域。光速 c 表征了相对论，普朗克常数 h 表征了量子论。两个普适常数 c 和 h 的发现，意味着两种普遍自然理论的出现。

第二十章 狭义相对论基础

一、基本要求：

- (1) 正确理解爱因斯坦狭义相对论的两个基本假设。
- (2) 正确理解洛伦兹变换公式中揭示的相对论的时空观。
- (3) 了解相对论力学中的质速公式与质能公式。

二、基本概念和规律

1. 爱因斯坦假设

爱因斯坦相对性原理的指导思想是：一切非加速的观测者在一切方面都应该处于同等地位，即使他们之间（以恒定速度）有相对运动也是如此。

这个原理可用两个假设表征：

假设 I：

物理定律对一切惯性系观测者来讲，都是一样的，动力学定律与电磁学定律都是如此。即所有的惯性系都是等价的。

假设 II：

一切惯性系观测者测得真空中的光速都是 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8$ 米/秒，与光源和观测者的运动无关。

【重要物理内容】

(1) 绝对空间与以太。由伽里略速度变换导致以下结论，即用经典观点考察若一个观测者测量光讯号速度是 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，由伽里略变换可知相对于他作

运动的任何别的观测者测量同一讯号时，必将得到与 c 值不同的速度。这样，必存在一个特殊的参照系，仅当观测者相对于该参照系静止时测得的光速才是 c 值。

在爱因斯坦以前人们普遍认为：在这个特殊参照系中，麦克斯韦方程组才是有效的，对该参照系静止的观测者所测得光速才与方程组预言的电磁波速度 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 相吻合。对应这种特殊参照系的空间，叫作绝对空间。相对于绝对空间的速度，叫做绝对速度。

光是一种电磁波，因此十九世纪物理学家认为：既然是波，就像机械波一样，没有介质是不可设想的。必有一种光在其中传播的介质存在，于是假设，这种介质叫作“以太”。它充满了整个绝对空间。光速 c ，是以太介质传播电磁扰动的速度。

绝对空间，即以“以太”为参照系的空间，绝对速度即相对以太的速度。

(2) 迈克尔逊-莫雷实验。由上可知，若伽里略变换正确，麦克斯韦方程组正确，必然导致物理定律，至少电磁学定律依赖于惯性系的选择。不同惯性系中由经验确定的物理定律具有不同的形式，并能根据这种差异，观测者可用实验确定自身的运动——相对于绝对空间的运动，即测出观测者的绝对速度，从而破坏了相对性原理。

若“以太”的确存在，仅在“以太”这个绝对空间中测得光讯号速度才是 c ，则由地球上观测者所测定光讯号速度，利用伽里略变换，就可确定地球穿过以太运动时所引起的一种“以太风”的速度，即地球的绝对速度。

为此，在1881年，迈克尔逊研制了以他命名的干涉仪，其灵敏度足以测出这个绝对速度，以后在1887年，迈克尔逊与莫雷对它作了改进，但实验结果：任何时刻所测到的光讯号速度都是 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，未探测到地球穿过以太的运动。

(3) 爱因斯坦假设 I，把相对性原理提高到了公理地位，从而对一切自然规律作出了一个严格限制。即任何（可以想像的）自然规律，必须与惯性系选择无关。决不可能为引入“绝对运动”提供任何根据。

这个假设 I 指出了全部物理现象都应具有这样的特征：运动总是显示为一个物体对另一个物体的相对运动，绝对运动是不可观测的。

这种否定性陈述，就像热力学定律中“永动机不可能制造”的否定性陈述一样，表征了自然界中的普遍规律。

(4) 爱因斯坦假设 II，肯定了麦克斯韦方程组的正确，由相对性原理必然导致光速不变原理。即光速应是惯性系变换的不变量。在一切惯性系中观测到同一光讯号速度 c 应与方程组所预言的理论值 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 相符，这样就解释了迈克尔逊-莫雷的实验结果，相对性原理取消了绝对空间的存在，同时亦取消了“以太”介质的存在。

光这种物质，可以通过真空传播。

光速不变原理与伽里略变换相矛盾，需把伽里略变换推广到高速运动领域内。

爱因斯坦假设 II 可以导出一条新发现的普遍的自然定律。

自然界中，任何物质的运动都存在着一个极限速率。

光信号的速率 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，不仅是一种特殊物质电磁波在真空中的传播速率，而且是自然界中一切物质运动的极限速率。

按相对性原理，这条自然定律应对所有惯性系成立，所以这个极限速率 c 是一个与惯性系选择无关的普适常数。实验证实了光速就是这样一个普适常数。

假设Ⅱ把物质极限速率的存在提高到了普遍规律地位，同样是对一切自然规律作出了严格限制：即任何（可以设想的）自然规律，决不可能为引进无限大速率的信号提供任何根据，它的否定性陈述是：物质超越真空中光速的运动是不可能的。

因此，光速 c 这个普适常数是相对论的标志，整个新的动力学就建立在爱因斯坦的两个公设上。

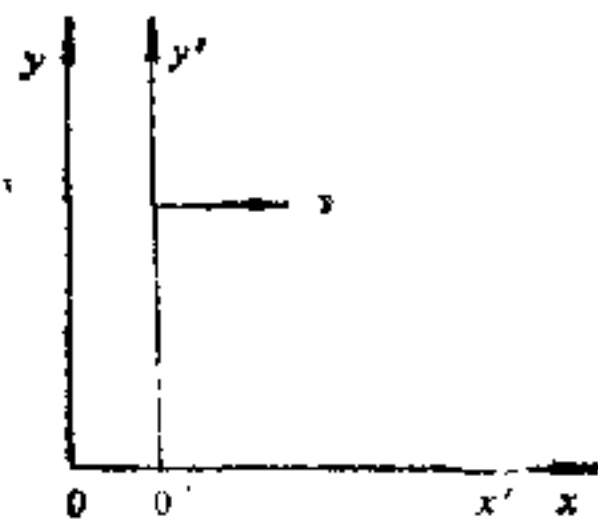


图 20-1

2. 洛伦兹变换

对两个观测者来讲，对同一物理事件的时空测量：

$$(x, y, z, t) \text{ 与 } (x', y', z', t')$$

二者之间服从洛伦兹变换：

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ y = y' & y = y' \\ z = z' & z = z' \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{cases} \quad \text{或}$$

其中： v 是 O' 相对于 O 沿它们的公共 Ox 轴的速度，若 O' 向正 x 方向运动， v 是正的，若 O' 向负 x 方向运动， v 是负的。

并需假定：两坐标原点 O 与 O' 重合时，取作 $t = t' = 0$

【重要物理内容】

(1) 事件与坐标。一个物理事件的发生，如雷电击中树；两个粒子碰撞，是客观存在，与观测者是否描述无关，对此物理事件发生的时间与空间描述则与观测者测量有关，用四个坐标以标明这个特定的事件，其中三个位置坐标 (xyz) 是用量尺所量度的事件发生地点在坐标系的坐标，时间坐标 t 则是事件发生时观测者时钟的读数。

不同观测者对同一物理事件的时空描述 (x, y, z, t) 是不同的。

(2) 可观测原理。爱因斯坦用“操作”定义，重新审查了伽里略变换。即任何一个与物理理论有关的概念，至少从原则上都应该有一个非常明确的测量程序，若这个程序建立不起来，在物理学中就不应该使用这个物理量。

任何物理量只有（至少在原则上）可测量时，才是有内容的，才在物理理论中有它的地位。爱因斯坦正是利用这一原理，在与假设Ⅰ，Ⅱ协调一致的条件下建立“同时性”操作定义过程中发现了同时性的相对性，从而找到了改造伽里略变换的突破口。

(3) 两个物理事件的时间间隔的确定。

若 O' 观测者测量了 A 和 B 两个事件之间时间间隔 $(t_B' - t_A')$ 与空间间隔 $(x_B' - x_A')$ 。则 O 观测者测得的两事件的时间间隔：

$$t_B - t_A = \frac{(t'_B - t'_A) + \frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

若观测者 O' 测定事件 A 和 B 是同时的即 $t'_B = t'_A$ 。则观测者 O 测得的时间间隔为:

$$t_B - t_A = \frac{\frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

即并不是同时的,反映了二个物理事件同时的相对性。两个发生在同一空间位置的物理事件,即 $x'_B = x'_A$,若 O' 观测者测定是同时的,($t'_B = t'_A$),则任何观者测定都是同时的($t_B = t_A$)。

观测者 O ,测定同一地点发生的两个事件 A 和 B 。($x_B = x_A$),可只用一个时钟就能测定 A, B 事件的时间间隔 $\Delta t = t_B - t_A$,可用单个时钟测得的时间间隔,叫作两事件之间的固有时间间隔,

而观测者 O' ,必断定这两事件发生不同地点,必须用两个不同的完全同步的时钟来测定 A 与 B 之间时间间隔 $t'_B - t'_A = \Delta t'$ 。由洛伦兹变换:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} > \Delta t$$

O' 所测得的两个事件之间时间间隔膨胀了。这叫做时间膨胀效应。

注意:相对论是实际的测量理论。要分清两个事件的“时间间隔”与“固有时间间隔”的差别。二者的差别与建立测量程序有关。

(4) 长度定义。若一个物体相对于观测者处于静止状态,它的长度可由测量该物体两端点之间坐标差确定。由于物体是静止的,这种测量可以在任何时刻进行。这样测得的长度,叫作物体的固有长度。

若一个运动物体,必须用同一时刻测得的物体两端点的空间坐标差值来定义该物体长度。

如:沿 $x-x'$ 方向放置的直尺,相对于 O' 静止,而 O' 以速度为 v 沿 $x-x'$ 方向相对于 O 运动。假定尺子两端点 A 与 B ,则:

$$x_B' - x_A' = \frac{(x_B - x_A) - v(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

差值 $x'_B - x'_A = L_0$ 。即是 O' 测得的尺子固有长度。

若 O 在同一时刻 $t_B = t_A$ 测得尺子两端点坐标差 $x_B - x_A$,即是 O 测得的尺子长度 L :

$$L = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} < L_0$$

O 测得的运动尺子长度缩短了。这叫作长度收缩效应。

注意弄清:“空间坐标间隔”和“长度”两个概念差别。由洛伦兹变换获得的时空特点,并没有什么神秘性,仅表明“相对论是一个实际测量的理论,而运动则要影响测量”这一经验事实,普遍常数 c 反映了在自然规律中时间坐标与空间坐标之间的密切联系。

3. 质速公式和质能公式

(1) 质速公式。牛顿定律与公设 I 中物质存在极限速率这一自然规律不相容而被迫

改造。改造的线索是否定物质固有的质量观念，使质量随速率而变化 $m(v)$ 。

爱因斯坦重新定义了一个物体的动量 $\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v}$ 。为使动量守恒定律与相对论协调一致，必须使一个运动物体的质量是速率的函数：

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

经此改造过的质量概念，所有观测者会发现，动量守恒定律仍然有效。式中 m_0 是静止质量，即当物体相对于观测者处于静止状态时所测得的质量。

相对论中动力学的基本规律应改造为：

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right]$$

(2) 质能公式。质量是物质总能量的量度 $m = \frac{E}{c^2}$ ，是相对论力学的基石，对物体做功，可以任意提高该物体的能量，但由假设 I，不能给物体任意高的速度。能量 $E = mc^2$ 具有惯性，即质能等价原理。而物体的动能应改造为 $E_k = (m - m_0)c^2$ 。

物质具有各种不同形式的能量，物质状态改变都伴随着各种不同形式的能量作相应的改变。而质量却决定于物质各种形式能量的总和，即总能量。

所以在动力学环境内，每一种物体作为整体运动时，可以用质量表征整个物体本身，并用质量变化反映物体整体的状态变化。这样质能等价原理把原来毫不相关的两个重要守恒定律，即能量守恒定律与质量守恒定律借助于相对论，统一为一个定律。

注意以下关系

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2$$

(其中 $E_0 = m_0c^2$ 叫作物体的静止能量，或物体内部运动的能量)。

三、解题示范

宇宙飞船A与B的静止长度分别为90 m和1200 m。两飞船相向飞行。

1. 若宇宙飞船A中宇航员，测出B头部越过A的长度需要 5×10^{-7} s，则两飞船的相对速度 $u = ?$ ，处在B头部的宇航员测出通过A头尾的时间间隔是多少？

2. 若B头部通过A头部时，B头部宇航员向其尾部发出一个光信号。则A、B宇航员分别测出光信号由B头部到达尾部的时间间隔是多少？

3. 若地面观察站测出A船的速度为 $0.8c$ ，则测得B船的速度为多少？

解：

1. 设参照系A、B，描述物理事件的时空坐标分别用 (x, t) 与 (x', t') ，
现考察二个物理事件：B头部越过A头部及B头部越过A尾部。在A参照系中用 $(x_1,$

$t_1)$, (x_2, t_2) 表示。则

$$x_2 - x_1 = -90 \text{ m} \quad \text{即为 } A \text{ 船固有长度 } l_0。$$

$$t_2 - t_1 = 5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

B 船相对于 A 船的速度:

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-90}{5 \times 10^{-7}} = -1.8 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -0.6c$$

在 B 参照系中, 测得的相对速度相同, 测得的时间间隔即是同一地点 (B 头部) 测定的固有时间间隔 ($t'_2 - t'_1$), 按时间膨胀效应:

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} = 5 \times 10^{-7} \sqrt{1 - (0.6)^2} = 4 \times 10^{-7} \text{ s}$$

或: B 测得 A 船长度, 按洛伦兹收缩效应:

$$|x'_2 - x'_1| = |x_2 - x_1| \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} = 90 \sqrt{1 - (0.6)^2} = 72 \text{ m}$$

B 测得时间间隔:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{u} = \frac{72}{1.8 \times 10^8} = 4 \times 10^{-7} \text{ s}$$

与上述计算结果相同。

2. 考察两个物理事件: B 头部发射信号及 B 尾部接收信号。光信号速度 c , 在任何参照系中都相同。

在 B 参照系中: 光信号经过的距离即为 B 的固有长度 $x'_2 - x'_1 = 200 \text{ m}$, 测出时间间隔

$$t_2 - t_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{c} = \frac{200}{3 \times 10^8} = 6.67 \times 10^{-7} \text{ s}$$

在 A 参照系中测出的时间间隔为:

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{u}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{\frac{2}{3} \times 10^{-6} + \frac{-0.6}{3 \times 10^8} \times 200}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} \\ &= 3.33 \times 10^{-7} \text{ s} \end{aligned}$$

3. 地面与 A 为两个参照系, 考察 B 船的速度。分别用 v 与 v' 表示。 A 相对于地面的速度 $u = 0.8c$, 由 (1) 可知:

$$v' = -0.6c$$

由速度变换公式:

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}} = \frac{-0.6c + 0.8c}{1 + \frac{0.8c \times (-0.6c)}{c^2}} = 0.385c = 1.15 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

四、习题与解答:

20-1 (1) 对某观察者来说发生在同一地点、同一时刻的二事件, 对其他一切观察者来说是否都是同时发生的?

(2) 有二事件, 在 S 惯性系发生于同一时刻、不同的地点, 它们在任何其他惯性系 S' 中是否也同时发生? 二事件的空间间隔是否相同? 试加以说明。

答:

(1) 对某观察者是同地同时发生的两事件, 对一切观察者都是同时发生的。

(2) 由洛伦兹变换:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

在 S 惯性系中, 同时而不同地点发生的事件, 即 $t_2 = t_1$, $x_2 \neq x_1$. 对 S' 惯性系的空间间隔。

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \neq x_2 - x_1$$

所以空间间隔不相同。

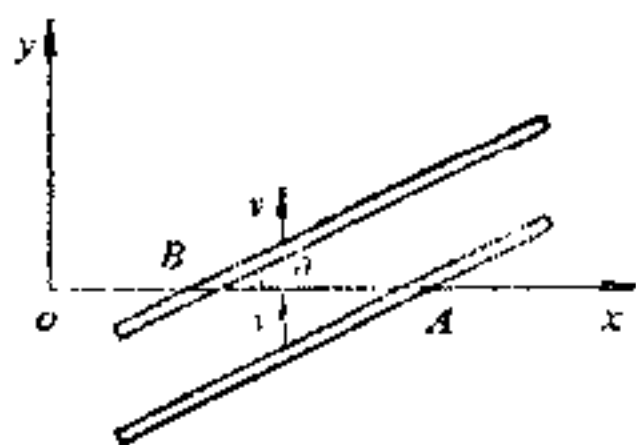
且
$$t'_2 - t'_1 = \frac{-\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \neq 0$$
 也不同时发生。

20-2 图中 A 和 B 是 x 轴 (静止的棒) 和一斜棒 (运动的棒) 在两个不同时刻的交点。斜棒与 x 轴成 θ 角, 并以速度 v 沿 y 轴正方向运动 (不转动)。

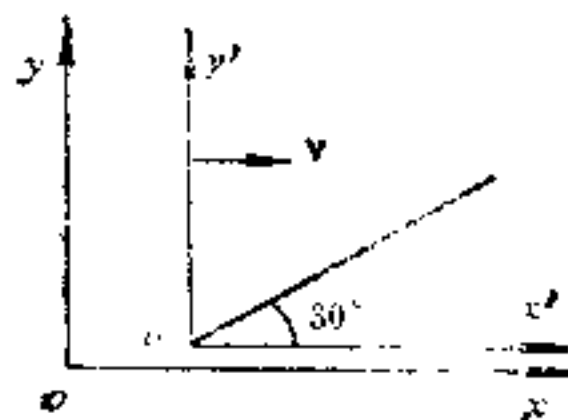
(1) 证明: 棒与 x 轴相交之点的速度为 $u = v \cot \theta$, 方向沿 x 轴负方向;

(2) 设 $\theta = 30^\circ$ 和 $v = \frac{2}{3}c$. 试证明: 这时 u 将超过光速 c , 并说明为什么并不与相对论相矛盾。

解:



题 20-2 图



题 20-3 图

(1) 在某一时刻, 斜棒的直线方程式 $y(t) = kx + b(t)$, 其中 $k = \tan \theta$, b 为棒在 y 轴上的截距, 随时间变化, 与 x 轴的交点位置 $y = 0$, 即 $x = -\frac{b}{k} = -b \cot \theta$, 已知 $\frac{dy}{dt} =$

v , 对棒与 y 轴交点 (即截距), $x = 0$, $y = b$, 有 $\frac{dy}{dt} = \frac{db}{dt} = v$, 与 x 轴交点的速度:

$$u = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{k} \frac{db}{dt} = -v \cot \theta \text{ 证毕。}$$

(2) $u = -v \cot \theta = -c \cot 30^\circ \times \frac{2}{3} = -1.15c$, 即 $|u| > c$

相对论仅要求物质（或能量）的传播速度不能超过光速。状态的传播速度并不受到限制。棒与 x 轴交点沿 x 方向的传播，仅是两者由相对位置决定的状态传播，这里并没有相应的物质（或能量）的传播。

20-3 一根米尺静止在 S' 系中，与 $o'x'$ 轴成 30° 角。如果在 S 系中测得该米尺与 ox 轴成 45° 角， S' 相对于 S 的速度 u 必须是多少？ S 系测得的米尺长度是多少？

解：

由洛伦兹变换，

$$\begin{cases} \Delta x' = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \Delta y' = \Delta y \end{cases}$$

S' 中的米尺静止， $\Delta x' = 1 \times \cos 30^\circ$

$$\Delta y' = 1 \times \sin 30^\circ$$

S 中按长度的定义，应同时测量米尺两端的空间间隔， $t_2 = t_1$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Delta x' = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cos 30^\circ$$

$$\Delta y = \Delta y' = \sin 30^\circ$$

由题意

$$\tan 45^\circ = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot \tan 30^\circ$$

(1) 由此算得

$$v = c \left[1 - \left(\frac{\tan 30^\circ}{\tan 45^\circ} \right)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} c = 0.816c$$

(2) S 系中米尺长度：

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] \cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \cos 30^\circ\right)^2} = 0.707 \text{ m} \end{aligned}$$

20-4 一立方体，沿其一棱的方向以速度 v 运动，试证其体积和密度各为：

$$V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \rho = \frac{\gamma^2 m_0}{V_0}$$

式中 m_0 和 V_0 各为其静质量和体积， $\beta = \frac{v}{c}$ ， $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

证明：

设立方体沿 x 棱运动，由洛伦兹变换：

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \beta^2} \\ \Delta y = \Delta y_0 \\ \Delta z = \Delta z_0 \end{cases}$$

$\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ 是立方体静止时边长, $V_0 = \Delta x_0 \cdot \Delta y_0 \cdot \Delta z_0$ 是立方体静止时体积, 则运动的体积:

$$V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

运动立方体的质量 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, 则运动立方体的密度为:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{V_0} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right]^2 = \gamma^2 \frac{m_0}{V_0}$$

20-5 如图一短跑选手, 在地球上以10s的时间跑完100m, 在飞行速度为0.98c的飞船中观察者看来, 这选手跑了多长时间和多长距离?

解:

设运动员在S系中沿ox轴正方向跑, S'中:

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{100 - 0.98c \times 10}{\sqrt{1 - (0.98)^2}} \\ &= -1.48 \times 10^{10} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ &= \frac{10 - \frac{0.98c}{c^2}(100)}{\sqrt{1 - (0.98)^2}} \\ &= 50.25 \text{ s} \end{aligned}$$

即在飞船中观测者, 测得运动员在50.25秒时间内沿x轴反向跑了 1.48×10^{10} 米距离。

20-6 远方的一颗星体, 以0.80c的速度离开我们, 我们接受到它辐射出来的闪光按5昼夜的周期变化, 求固定在这星体上的参照系测得的闪光周期。

解:

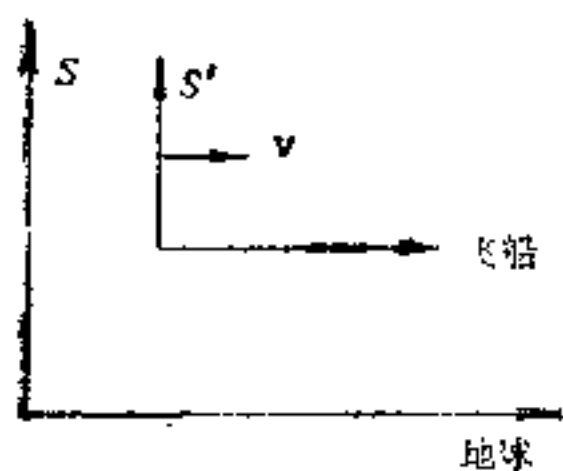
由时间膨胀效应

$$\Delta T = \frac{\Delta T'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

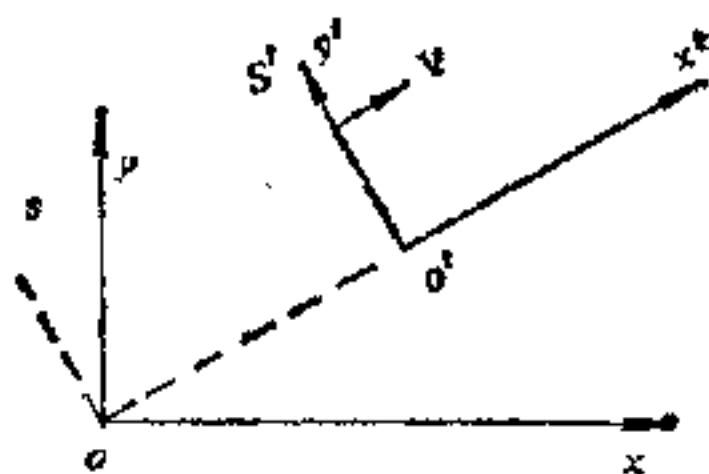
$$\therefore \Delta T' = \Delta T \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 5 \times \sqrt{1 - (0.80)^2} = 3 \text{ 昼夜}$$

20-7 设S'系相对于S系的速度u并不平行于x轴, 试导出位置矢量r (其分量为x、y、z) 与时间t从S系到S'系的变换公式, 并将结果写成矢量形式。(提示: 把r分解为平行于u的分量 $r_{//} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{u^2} \mathbf{u}$ 与垂直于u的分量 $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{//}$, 并利用洛伦兹坐标变换式。)

推导:



题 20-5 图



题 20-7 图

物理事件在 S 中发生的时空坐标为 (\mathbf{r}, t) ，并把 \mathbf{r} 分解为平行于 \mathbf{u} 分量 $\mathbf{r}_{//} = r \cos \theta$ 。

$$\left(\frac{\mathbf{u}}{u} \right) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{u^2} \cdot \mathbf{u}, \text{ 垂直 } \mathbf{u} \text{ 分量}$$

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{//}$$

则按洛伦兹变换:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{//} &= \frac{\mathbf{r}_{//} - \mathbf{u}t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{u^2} - t \right) \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{//}, \\ t' &= \frac{t - \frac{\mathbf{r}_{//} \cdot \mathbf{u}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

20-8 试证明电磁波方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

在洛伦兹变换下是不变式，但在伽利略变换下则不是不变式。

证明:

S' 中 $(x', y', z', t',)$

由洛伦兹变换:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}}, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{-v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \\ \frac{\partial t'}{\partial x} &= \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}}, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \\ \frac{\partial y'}{\partial y} &= \frac{\partial z'}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial x} = \dots = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{-v/c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \frac{\partial \phi}{\partial t'} \end{aligned}$$

再对 x 微商

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right]^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right) - \frac{2v}{c^2 - v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'}$$

同理

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t'} &= \frac{-v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{\partial \phi}{\partial t'} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} &= \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right]^2 \left(v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right) - \frac{2v}{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} \end{aligned}$$

代入波动方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2}$$

因此, 该方程在洛伦兹变换下是不变式, 但在伽里略变换

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= 1, \quad \frac{\partial x'}{\partial t'} = -v, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 \\ \frac{\partial x'}{\partial y} &= \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} = \dots = 0 \end{aligned}$$

利用此结果得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} - v \frac{\partial \phi}{\partial t'} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \end{aligned}$$

同理有 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}$

而且 $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -v \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial t'}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}$

代入波动方程得到

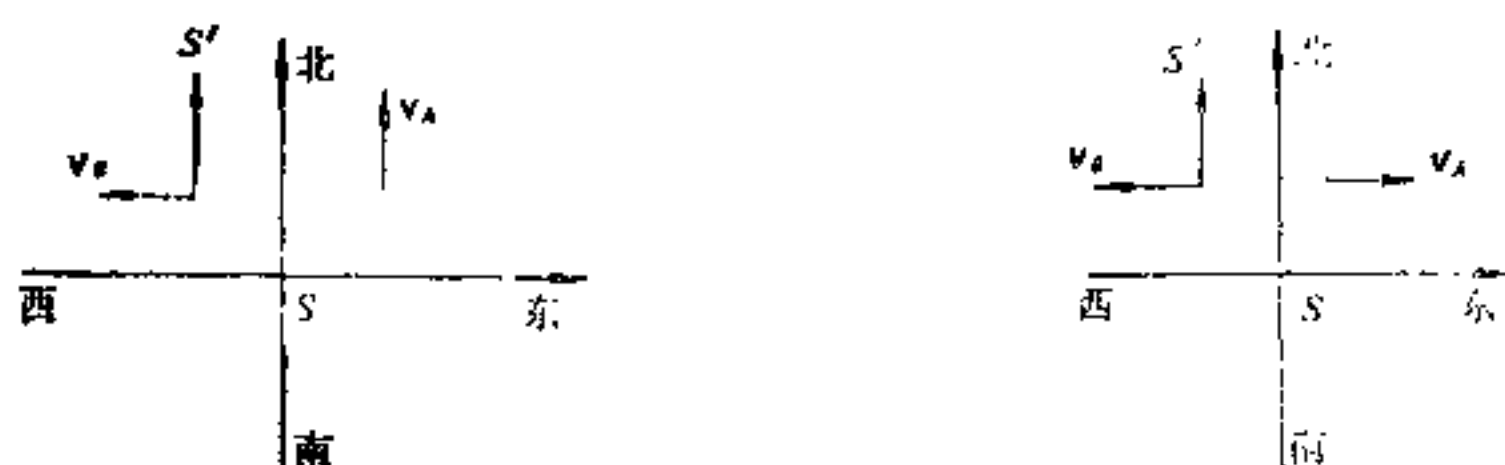
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} + \frac{1}{c^2} \left(2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} - v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} \right) = 0$$

可见在 S' 中此方程形式改变了, 表明波动方程并非是伽里略变换的不变式。

20-9 (1) 火箭 A 以 $0.8c$ 的速度相对于地球向正东飞行, 火箭 B 以 $0.6c$ 的速度相对于地球向正西飞行, 求由火箭 B 测得火箭 A 的速度大小和方向。

(2) 如果火箭 A 向正北飞行, 火箭 B 仍向正西飞行, 由火箭 B 测得火箭 A 的速度大小和方向又如何?

解:



题 20-10 图

(1) 由速度变换公式:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} = \frac{v_A - (-v_B)}{1 - \frac{(-v_B) \cdot v_A}{c^2}}$$

$$= \frac{0.8c + 0.6c}{1 + \frac{0.8 \times 0.6 c^2}{c^2}} = \frac{1.4}{1.48} c = 0.946c, \quad \text{向东飞行}$$

(2) 由速度变换公式:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} = \frac{v_{Ax} - (-v_B)}{1 - \frac{(-v_B) \cdot v_{Ax}}{c^2}}$$

$$= \frac{0 + v_B}{1 + \frac{v_B \cdot 0}{c^2}} = v_B = 0.6c$$

$$v'_y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} v_y}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_B}{c}\right)^2} v_A}{1 - \frac{(-v_B) \times 0}{c^2}}$$

$$= \sqrt{1 - (0.6)^2} \times 0.8c = 0.64c$$

$$v'_z = 0$$

则 B 测得 A 速度大小

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z} = \sqrt{(0.6c)^2 + (0.64c)^2} = 0.877c$$

$$\tan \theta = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{0.64c}{0.6c} = 1.0667$$

$$\theta = 46.85^\circ$$

即 B 中观测到 A 沿东偏北 46.85° 方向运动。

20-10 一粒子在介质中的运动速度能否大于光在介质中的传播速度?

申述你的理由。

答:

可以。光在介质中传播速度 $v = \frac{c}{n} < c$, 粒子速度超过介质中光速 $\frac{c}{n}$, 但并不超过真空中光速这个极限速率, 这与相对论并不矛盾。1933年发现的瓦维洛夫-切伦科夫辐射, 就是一种电子速度超过介质中光速 $\frac{c}{n}$ 的特殊辐射效应。

20-11 观测者甲，测得在同一地点发生的两事件的时间间隔为4s。观测者乙，测得其时间间隔为5s，问观测者乙测得这两事件发生的地点相距多少米？乙相对于甲的运动速度是多少？设另有观测者丙声称他测得的时间间隔为3s。你认为可能吗？

解：

甲观测者测得同一地点 $x_1 = x_2$ 发生的两事件，时间间隔 $t_2 - t_1 = 4\text{s}$ （固有时间）

乙观测者测得 $t'_2 - t'_1 = 5\text{s}$ ，但必在两地测得， $x'_1 \neq x'_2$ 。

按时间膨胀效应：

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

即

$$5 = \frac{4}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

所以乙相对甲的速度 $v = \pm c \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm 0.6c$

$$|x'_2 - x'_1| = \frac{|(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)|}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$= \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{-0.6c \times 4}{0.8} = 9 \times 10^8 \text{ m}$$

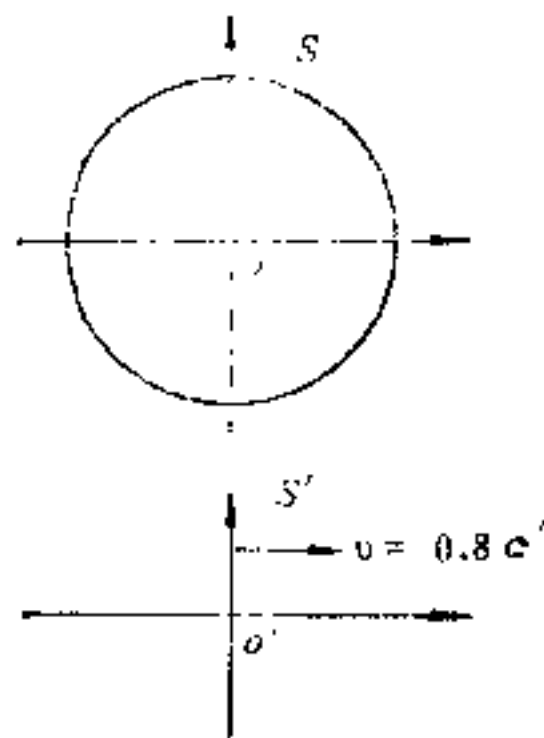
因为甲测定的是固有时间间隔 τ_0 ，按时间膨胀效应，在其它观测者测定的时间间隔：

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} > \tau_0 = 4\text{秒}$$

总比固有时间间隔 τ_0 大，所以丙声称他测得时间间隔为3秒是不可信的。

20-12 观测者O，测得在他的XOY平面上一个静止的圆的面积是 12cm^2 ，另一观测者O'，相对于O以 $0.8c$ 作匀速运动，O'观测这一图形，测得的面积是多少？

解：



题 20-12 图

按长度收缩效应: O 中沿 v 方向的直径 $2R$, 则 O' 中观测其长度:

$$2a' = 2R \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

在垂直 v 方向图形的长度不变 $2b' = 2R$,

由此可见, O' 中观测到该图形应是椭圆, 其面积

$$\begin{aligned} S' &= \pi a' b' = \pi R \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = S \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \\ &= 12 \sqrt{1 - 0.8^2} = 7.2 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

20-13 一个在实验室中以 $0.8c$ 的速度运动的粒子, 飞行 3m 后衰变, 按这实验室中的观测者的测量, 该粒子存在了多长时间? 由一个与该粒子一起运动的观测者来测量, 这粒子衰变前存在了多长时间?

解:

在实验室 S 中: $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

\therefore 粒子存在时间 $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{v}$

$$\Delta t = \frac{3.00}{0.8 \times 3.00 \times 10^8} = 1.25 \times 10^{-9} \text{ s}$$

S' 中测得的固有时间隔 $\Delta t'$, 按时间膨胀效应: $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, 则

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1.25 \times 10^{-9} \sqrt{1 - 0.8^2} = 7.5 \times 10^{-10} \text{ s}$$

20-14 (1) 把电子自速度 $0.9c$ 增加到 $0.99c$, 所需的能量是多少? 这时电子的质量增加了多少?

(2) 某加速器能把质子加速到 1GeV 的能量, 求这质子的速度。这时, 其质量为其静质量的几倍?

解:

$$\begin{aligned} (1) \quad \Delta E &= (m_2 - m_1)c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \right) \\ &= 9.11 \times 10^{-31} \times 9.00 \times 10^{16} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0.99^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 0.9^2}} \right) \\ &= 9.11 \times 10^{-31} \times 9.00 \times 10^{16} \times (7.0888 - 2.2942) \\ &= 3.93 \times 10^{-13} \text{ J} = 2.45 \text{ MeV} \end{aligned}$$

质量增加

$$\begin{aligned} \Delta m &= \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{3.93 \times 10^{-13}}{9 \times 10^{16}} \\ &= 4.37 \times 10^{-30} \text{ kg} \end{aligned}$$

(2) 把质子加速到 $E_K = 1\text{GeV}$ 的能量是指动能。

$$E_K = (m - m_0)c^2$$

∴ 相应质子质量

$$\begin{aligned} m &= \frac{E_K}{c^2} + m_0 = \frac{1 \times 10^9 \times 1.602 \times 10^{-19}}{9.00 \times 10^{16}} + 1.673 \times 10^{-27} \\ &= 3.453 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

对静止质量的倍数

$$\frac{m}{m_0} = \frac{3.453 \times 10^{-27}}{1.673 \times 10^{-27}} = 2.064 \text{ 倍}$$

由质速公式

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{质子速度 } v &= c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2.064^2}} c = 0.875c \\ &= 2.63 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

20-15 (1) 试证: 一粒子的相对论动量可写成

$$p = \frac{(2E_0K + K^2)^{1/2}}{c}$$

式中 $E_0 (=m_0c^2)$ 和 K 各为粒子的静能量和动能。

(2) 试证: 带电粒子在匀强磁场中, 与磁感应强度 B 垂直的平面上作圆周运动时的轨道半径为

$$R = \frac{(2E_0K + K^2)^{1/2}}{q c B}$$

式中 q 为粒子所带电量。

证明:

(1) 动能

$$\begin{aligned} K &= (m - m_0)c^2 \\ &= m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right] \\ &= E_0 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

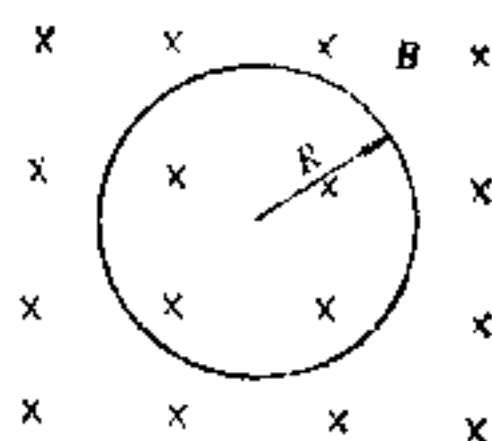
由此可得

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{K}{E_0} + 1$$

解出

$$v = \frac{c \sqrt{2K E_0 + K^2}}{E_0 + K}$$

代入动量公式



题 20-15 图

$$P = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0 \frac{c \sqrt{2K E_0 + K^2}}{E_0 + K} \cdot \frac{E_0 + K}{E_0}$$

$$= \frac{(2E_0 K + K^2)^{1/2}}{c}$$

(2) 由相对论力学 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)$ 磁场

力 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, 其大小 $F = qvB$, 方向指向圆心。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\frac{m_0}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right]^{3/2} \frac{\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}}{c^2} \cdot \mathbf{v}$$

因为在磁场中速度与加速度 \mathbf{a} 相垂直

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0, \quad \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| = \frac{v}{R} \quad \text{向心加速度}$$

代入

$$qvB = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot \frac{v}{R}$$

$$R = \frac{m_0 v}{qB} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{F}{qB} = \frac{(2E_0 K + K^2)^{1/2}}{qB}$$

五、自我检查题:

1. 狭义相对论的两条基本假设是 (1) _____ 原理, (2) _____ 原理, 它们和经典力学的 _____ 变换相矛盾, 因而引入了 _____ 变换。

2. 狭义相对论认为长度是相对的, 运动物体沿运动方向的长度要 _____, 物体的固有长度 L_0 是指 _____ 测得的长度。设有一尺固有长度为 L_0 , 当该尺沿运动方向放置时 (速度为 v), 则其长度变为 $L =$ _____。

半径为 R 的球相对于参照系 S 以速度 v 运动时, S 中观察者测出该物体形状为 _____, 其体积为 _____。

3. 米尺以如下速度运动时, 其长度变为:

v	0.1c	0.9c	0.95c	0.99c
$L(m)$				

4. 狭义相对论认为时间间隔是相对的, 固有时间 τ_0 是指 _____ 测得的时间, 一个时钟在一个与它作相对运动观察者来观察时, 它要变 _____, $\tau =$ _____。

5. 如 S' 系相对于 S 系以速度 u 沿共同 ox 方向作匀速运动, 一物体相对 S' 以速度 v_x 沿

ox' 方向运动, 则 S 系中测得它沿 ox 方向速度 $v_x =$ _____;

如果 $u = 0.6c$, $v'_x = 0.6c$, 按相对论算出 $v_x =$ _____, 按经典力学算出 $v_x =$ _____。

6. 一尺固定在 S' 系中, 它与 ox' 轴夹角 $\theta' = 45^\circ$, 如 S' 以速度 $u' = 0.8c$ 沿 ox 方向相对于 S 系运动, S 系中观察者见到该尺与 ox 轴夹角为 θ , 则 $\tan\theta =$ _____, θ _____ 45° , 如 u 大小不变而运动方向相反, 则 $\tan\theta =$ _____。

7. 静止于 S' 系中的均匀物体, 密度为 ρ_0 , S' 沿 ox 方向以速率 v 相对于 S 系运动, 则 S 系中测出其密度为 _____; 如 S' 沿 ox 相反方向以速率 v 运动, 则 S 系中测得密度为 _____; 如 S' 沿 oy 方向以速率 v 相对于 S 系运动, 则 S 系中测得密度为 _____。

8. 相对论中质量与能量有一定对应关系 $E =$ _____, 以速度 v 运动、静止质量为 m_0 的粒子的动能 $E_K =$ _____; 当 $v \ll c$ 时, $E_K =$ _____。物体速度 $v = 0.9c$ 时, $\frac{m}{m_0} =$ _____。

9. 10^3 kg 水由 0°C 烧到 100°C , 其质量增大 $\Delta m =$ _____, 一千克物质相应能量为 $E =$ _____, 如煤燃烧值为 $7200 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1}$, 则该能量相当于燃烧 _____ 煤所释放出的能量 ($1 \text{ cal} = 4.19 \text{ J}$)。

10. 电子在 $u = 10 \times 10^6 \text{ V}$ 电压的电场中加速, 则其质量 $m =$ _____ m_0 , 速度为 $v =$ _____ c (如按经典理论则其速度为 $v =$ _____ c)。

第二十一章 光的量子性

在经典物理学中，粒子与波是仅有的两种能量传递方式。两者之间的差别是显然的。

经典粒子具有位置、质量、电荷、动量和动能等属性。经典波具有波长、频率、传播速度、扰动振幅、动量与能量等属性。其中最明显的在于：我们能够确定粒子的位置，而波则是广延的，需占有相当大的一部分空间。

为了解释某些实验上观测到的现象，必须作出关于“物质具有波粒二象性”的论断。这一论断成为量子力学基础的出发点。

对电磁辐射，同样显示出波粒二象性。在某些情况下，它的行为象波，如从干涉与衍射实验中所知道的那样，而在另一些情况下，即在本章将要讲的热辐射，光电效应，康普顿散射等实验中，它的行为又需用“粒子”来解释。这部分内容属量子光学的范围。

一、基本要求

- (1) 了解热辐射的实验规律，理解普朗克能量量子假设的意义。
- (2) 了解光电效应康普顿效应的实验规律，由此了解光的量子性。

二、基本概念和规律

1. 光量子

光的量子解释的基本假设是：电磁辐射是由称为光子或光量子的类粒子的分立能量包所组成，每个光子具有能量 E ，它只与辐射频率 ν 有关，并由下式给出：

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

式中 $h=6.626 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$ ，称为普朗克常数。

每个光子对于各种相互作用总是或者全部参加，或者完全不参加。即它或是把其所有的能量全部放出，或是一点也不放出。光子以光速运动，按相对论，其静止质量必定为零，则能量完全是动能，一个光子只要存在，便以光速 c 运动，一旦它不以光速 c 运动，光子就不再存在。

对 $m_0=0$ 的相对论粒子的动量与能量关系应为

$$E = pc$$

则光子的动量

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

从量子的观点来看：一束电磁能量是由传播速度为 c 的许多光子所组成。若光束是单色光，则此光束的强度与单位时间通过与光前进方向垂直的单位面积的光子数成正比。即强度 I 为

$$I = (1 \text{ 个光子的能量}) \times \frac{\text{光子数}}{\text{面积} \times \text{时间}}$$

为计算方便, 常用换算: $1\text{eV}=1.602\times 10^{-19}\text{J}$, $1\text{\AA}=10^{-10}\text{m}$

则 $h=4.136\times 10^{-15}\text{eV}\cdot\text{s}$

$$hc=12.4\text{keV}\cdot\text{\AA}$$

在波长远小于仪器尺度, 光子能量比仪器的灵敏度大得多的条件下, 用简单的光子图象即量子光学对光加以描述, 有足够好的近似。

2. 热辐射

(1) 热辐射。物体中带电粒子的热运动而发射电磁波的现象, 称为热辐射。它和温度密切相关, 即物体单位时间内辐射能量按波长的分布与辐射体的温度密切相关。

为了描述物体热辐射规律, 需引入物理量: 辐射出射度 (简称辐出度, 又称发射本领) M , 单色辐出度 (又称单色发射本领) M_λ 、单色吸收比 $\alpha(\lambda, T)$, 单色反射比 $\rho(\lambda, T)$ 及绝对黑体理想模型。应了解其意义。

(2) 基尔霍夫定律。1860年基尔霍夫由热力学定律推导出, 处在平衡热辐射的任何物体, 其单色辐出度 $M_\lambda(T)$ 与单色吸收比 $\alpha(\lambda, T)$ 之比:

$$\frac{M_\lambda(T)}{\alpha(\lambda, T)} = M_{B\lambda}(T)$$

应是一个普适恒量, 即此恒量与物体性质无关, 且等于处在同一温度下绝对黑体 [$\alpha(\lambda, T)=1$] 的单色辐出度 $M_{B\lambda}(T)$ 。

上述基尔霍夫定律是一切物体热辐射普遍规律。绝对黑体的单色辐出度 $M_{B\lambda}(T)$ 是由与物体性质无关的普遍规律所决定的普适恒量。对黑体辐射的实验测量与理论探索成为本世纪前夕物理学方面的一个主要研究课题。

(3) 绝对黑体的实验定律。实验测定了处在平衡热辐射状态的绝对黑体单色辐出度 $M_{B\lambda}(T)$ 曲线 (见教材P.139图21-4), 由实验曲线, 得到以下关系:

(a) 斯忒藩-玻尔兹曼定律

$$M_B(T)=\sigma T^4$$

即黑体在单位时间内由单位面积所发射的总能量与温度的四次方成正比。实验测定:

$$\sigma=5.67\times 10^{-8}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$$

(b) 维恩位移定律:

$$T\lambda_m=b$$

即热辐射的峰值波长 λ_m , 随温度升高向短波方向移动。实验测定:

$$b=2.897\times 10^{-3}\text{m}\cdot\text{K}$$

以上实验结果与组成黑体的物质性质无关, 是处在平衡热辐射的物体的普遍规律。 σ 与 b 是普适常数。

(4) 普朗克能量子假设: 热辐射的实验规律与基尔霍夫定律协调一致, 从而与热力学理论协调一致。事实上, 先是维恩, 后是普朗克都用热力学理论推导出了实验结果相一致的热辐射普遍规律。但热力学理论是一个不涉及物质结构的唯象理论它并不能推导出黑体单色辐出度 $M_{B\lambda}(T)$ 的具体数学形式以及普适常数 σ 与 b 的具体数值。

热辐射的物理本质是物体中受到热激发的带电粒子与电磁辐射的相互作用问题, 这个问题已为经典电磁理论所阐明, 因此, 经典物理包括牛顿力学, 麦克斯韦电磁理论及统计力学应能给出热辐射的实验规律的理论解释。平衡热辐射中的普适常数 σ 与 b 亦是不独立

的，应能由存在于经典物理规律中的普适常数（如光速 c ，玻尔兹曼常数 k 等）推导出来。

为此作出努力的最典型的例子有两个：一个是瑞利-金斯公式

应用经典的能量均分定理，断言构成黑体的空腔中每一驻波的平均能量仅与温度有关，与频率无关：

$$\overline{\epsilon} = kT$$

获得黑体单色辐出度的理论公式

$$M_{B\lambda}(T) = c_1 \lambda^{-4} T, \quad c_1 \text{ 为常数}$$

此式仅在长波段与实验曲线接近，而在短波段（紫外区）与实验曲线完全不符。若按此公式计算必使所有能量辐射集中在可想像最短的波段上，有人把此叫作“金斯谬误”或“紫外灾变”。另一个是维恩公式

按照黑体辐射按波长的能量分布与麦克斯韦分子按速率的分布的类比建立起来的维恩公式：

$$M_{B\lambda}(T) = c_2 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_3}{\lambda T}}, \quad c_2, c_3 \text{ 为常数}$$

上式仅在短波段与实验曲线比较接近，在长波段则完全失效。

总之，基于经典物理的对处在平衡热辐射状态黑体的单色辐出度 $M_{B\lambda}(T)$ 所作的一切理论计算公式均与实验不符，从而暴露了在热辐射现象中经典物理的失效。

对热辐射实验规律的理论计算，不能建立在经典物理基础上。普朗克用他的能量子假设，推导出了与实验曲线 $M_{B\lambda}(T)$ 相一致的计算公式。

此假设的要点概括为：

第一构成黑体的原子可看成带电的线性谐振子。

第二在谐振子与电磁辐射相互作用过程中，能量的发射与吸收并非象经典物理所要求的那样应是连续的而是量子化的， $E = \epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, \dots$ （ ϵ 叫作能量子），振子发射或吸收的能量只能取某些分立的数值以使谐振子由一个状态跃迁到另一状态。

第三对频率为 ν 的谐振子，最小能量为

$$\epsilon = h\nu$$

式中 h 是普适恒量，称为普朗克常数，实验测得 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。

利用以上假说，获得普朗克计算公式：

$$M_{B\lambda}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$

与实验曲线完全相符。并由此可推导出斯忒藩-玻尔兹曼定律与维恩位移定律。计算了其中的普适常数

$$\sigma = 6.494 \frac{2\pi k^4}{h^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

$$b = \frac{hc}{4.965k} = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

与实验结果完全相符。

3. 作用量子的存在

(1) 普朗克常数 h 的量纲是能量 \times 时间, (或动量 \times 位移), 通常叫作“作用量”。 h 是完全独立的普适常数, 并不能从经典物理学的其它普适常数中推导出来。所以, h 的发现如同相对论中光速 c 的发现一样, 实际上是发现了一条新的普遍的自然规律: 在物质之间的相互作用过程中, 其作用量的变化不是连续的, 而是量子化的。存在着一个最小的单位 h , 叫作用量的量子。在相互作用过程中, 其作用量的变化, 只能以 h 的整数倍进行。作用量量子的存在, 这是对自然规律所作的一个严格的限制。其否定性的叙述是: 作用量能连续变化的自然过程是不存在的。

(2) 作用量是洛仑兹变换的不变量。因此, 作用量量子的存在这一自然规律与相对论是协调一致的。

(3) 作用量量子 h 的存在却与经典力学、麦克斯韦电磁理论不相容。但能帮助消除“紫外灾变”的困境: 普朗克常数 h 迫使 $E = h\nu$, 即辐射的能量子必须与辐射频率成正比。 h 作用量子的存在导致能量子的存在。能量必须精确的以整个量子被吸收或发射, 不容许只吸收或发射能量子的一部分。而低频率的能量子所包含的能量一定要小, 高频率的能量子所包含的能量一定大。由统计力学可知, 在长波段因辐射的能量子小, 加上状态数又少, 使热辐射的能量分布曲线趋于零。在短波段, 虽状态数增多, 但由于辐射的能量子增大, 使辐射能量子的几率在迅速减少, 使能量分布曲线趋于零, 从而避免了“紫外灾难”, 获得了与实验相符的普朗克能量分布曲线。

4. 爱因斯坦光子理论

为解释光电效应, 光不仅像普朗克指出过的那样, 在谐振子发射与吸收光时具有量子性, 而且在空间传播时也具有量子性。光能并非象经典理论中所认为的那样, 连续的分布在电磁场存在的空间, 而是集中在分立的各个光量子上。光的量子性是光的本性。并不是谐振子在发射与吸收时才具有的特性。爱因斯坦利用光量子的大胆假设与能量守恒定律, 导出了光电效应方程:

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$$

式中, $h\nu$ 为入射光子能量, A 为逸出功, $\frac{1}{2}mv^2$ 为光电子的初动能。它完满地解释了实验结果, 而用基于麦克斯韦电磁理论的光的波动说却无法正确解释光电效应。

在研究光的干涉、衍射现象时, 需用光的波动性解释, 光具有波的形象。在研究热辐射、光电效应现象时, 需用光的量子性解释, 光具有粒子的形象。为了解释全部实验事实, 我们只能说光具有波粒二象性。用能量 ϵ 与动量 P 描述其粒子性, 用频率 ν 与波长 λ 描述其波动性。

作用量量子 h 的存在, 决定了光的两种情况之间联系:

$$\epsilon = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

5. 康普顿效应

光的散射实验进一步证实了爱因斯坦的光子概念。光的波动说预言: 散射光是由于入射光迫使散射物质中带电粒子作强迫振动, 从而向四周辐射电磁波的结果。由此断言, 在所有方向上散射光的频率应与入射光频率相同。

表 21-1

光电效应实验结果	理论解释	
	经典波动理论	光子说
光电流几乎与光照同时开始, 观测到光电子的时刻, 对入射光照射到金属表面的时刻的延迟约为 10^{-9} 秒, 且与光强无关。	入射光迫使金属电子强迫振动, 电子有一个积累能量的过程。仅当能量超过逸出功 (即电子在金属中的束缚能) 时, 才能观测到光电子, 入射光强时, 积累能量所需时间短, 弱时所需时间长, 应与光强有关。	金属中电子通过吸收光子获得能量, 而吸收几乎是瞬时的, 且与光强无关。
对一定材料存在一个红限频率 ν_0 , 入射光频率低于此值, 不管光强多大, 都观测不到光电子发射。	不管入射光的频率如何, 只要电子在受迫振动中积累足够的能量, 金属材料总能发射光电子, 不存在红限频率问题。	光子的能量决定于光的频率, 电子所吸收光子的能量, 仅当超过逸出功时, 才能发射光电子。这存在一个红限频率 $\nu_0 = \frac{A}{h}$
由截止电压测定的光电子的初动能与入射光强度无关, 仅与频率有关。	光电子的初动能决定于电子积累的能量, 应正比于光强。与频率无关。	光电子的初动能应取决于吸收的光子能量, 此能量又决定于入射光频率, 而与光强无关。

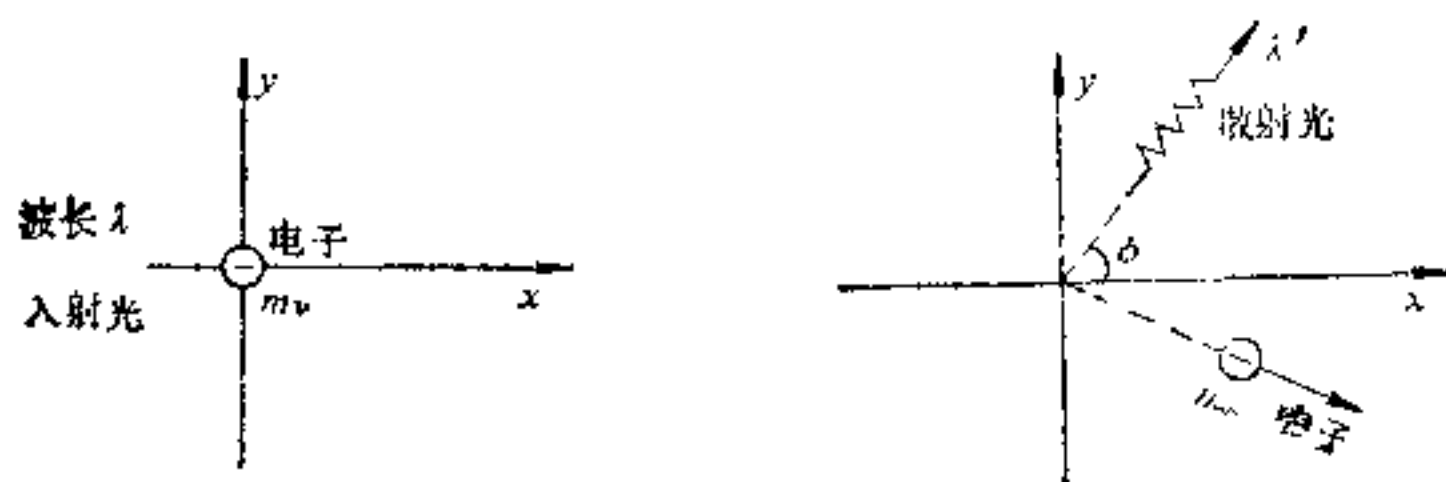


图 21-1

光的量子说预言: 把带电粒子对光的散射过程看成光子与自由带电粒子之间的完全弹性碰撞。应用能量和动量守恒定律, 散射光子对入射光子波长有一移动:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0c} \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

式中 h/m_0c 称为康普顿波长, 对电子其值 0.0243 \AA , 即波长移动与散射角 ϕ 有关, 而与入射光子的能量 (或频率) 无关。与散射物质无关。

康普顿用石墨对 X 射线 ($\lambda = 0.7 \text{ \AA}$) 散射实验证实了光的量子说。注意此 X 射线光子的能量 ($1.8 \times 10^4 \text{ eV}$) 比碳的外层电子的结合能大几个数量级, 所以可近似把电子作为自由电子处理。

三、解题示范:

试证明自由电子不能吸收光子。

证明:

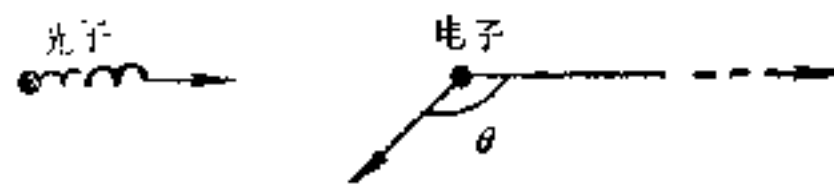


图 21-2

已知：自由电子的静止质量 m_0 能量 E ，动量 \mathbf{p} ，光子的频率 ν ，传播方向 \mathbf{k} （单位矢量）。 \mathbf{k} 与 \mathbf{p} 间夹角为 θ

由关系式：光子能量 $E = h\nu$ (1)

光子动量 $\mathbf{p} = \frac{h}{\lambda} \mathbf{k}$ (2)

其中波长 $\lambda = \frac{c}{\nu}$ (3)

用反证法：

若自由电子能吸收光子。吸收后的电子能量为 E' ，动量为 \mathbf{p}' 。则吸收过程应满足能量守恒定律和动量守恒定律。即

$E' = E + h\nu$ (4)

$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \frac{h}{\lambda} \mathbf{k}$ (5)

由相对论能量和动量关系式，对电子应有：

$E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$ (6)

$E'^2 = c^2 p'^2 + (m_0 c^2)^2$ (7)

把 (4) (5) 代入 (7) 式

$$\begin{aligned} (E + h\nu)^2 &= c^2 \left(\mathbf{p} + \frac{h}{\lambda} \mathbf{k} \right)^2 + (m_0 c^2)^2 \\ E^2 + 2Eh\nu + (h\nu)^2 &= c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2 + \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 c^2 + 2 \frac{hc^2}{\lambda} \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} \\ &= c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2 + (h\nu)^2 + 2ch\nu \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

化简：

$E = c \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = c p \cos \theta$

代入 (6) 式有：

$c^2 p^2 (\cos^2 \theta - 1) = -c^2 p^2 \sin^2 \theta = -(m_0 c^2)^2$

与静止能量 $m_0 c^2$ 恒为正值相矛盾。 $E = c \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}$ 不成立。即自由电子吸收光子的过程不能实现。

证明：如果自由电子吸收光子，取电子与光子的质心为参照系，碰撞应相对于质心运动（如图21-3所示），碰撞后合为一体（电子吸收光子）相对于质心静止。



图 21-3

由能量守恒：

$h\nu + (p^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2} = m_0 c^2$

由于各项均为正值，上式显然不能成立，数学讨论和证明一相同。自由电子不能吸收光子，而只能散射光子。金属中电子所以能吸收光子产生光电效应是由于电子是不自由的，被束缚在金属中。当它吸收光子时可把多余动量通过束缚力传递给金属，质量很大的金属能

吸收多余动量，以同时满足动量守恒与能量守恒条件（见21-13题后半）。

四、习题与解答

21-1 内壁黑色的空腔开有一小孔，这小孔可视为绝对黑体，因为它吸收了全部入射的能量。那么这小孔是否发射能量呢？回答有两种：有人认为不发射能量，并且说看上去小孔非常黑，就证明了这一点；也有人认为小孔发射的能量最大，因为绝对黑体的含义就在于此。请你作出自己的判断，并说明理由。

答：

小孔也发射能量。按基尔霍夫定律：

$$\frac{M_{\lambda}(T)}{\alpha(\lambda T)} = M_{\lambda,0}(T)$$

一个好的吸收体，一定也是一个好的发射体。黑体仅是不反射光能，而非不发射光能量，小孔非常黑仅是黑体辐射能量分布中的峰值波长 λ_m 处在可见光以外的波段，是眼睛灵敏度受到限制的结果，并非没有能量辐射。

有人认为小孔发射的能量最大亦是不确切的。绝对黑体的含义，仅指吸收比为1的辐射体，在同样温度下与非绝对黑体比较，可讲其辐射能量最大。而辐射能量的大小还决定于温度。单色辐射率还与波长有关，这里讲“最大”就缺乏明确的含义。

21-2 A 和 B 两个相同的物体，具有相同的温度， A 周围的温度低于 A ，而 B 周围的温度则高于 B 。试问 A 、 B 二物体在单位时间内辐射的能量是否相等？又问单位时间内吸收的能量是否相等？

答：

若 A 、 B 两物体处在热平衡状态，与周围用绝热壁分隔开，只能通过辐射交换能量，因两物体相同就有相同的吸收比，按基尔霍夫定律，在相同的温度下应有相同的辐射出射度，即单位时间内辐射的能量是相同的。

由于周围的温度不同，周围的辐射出射度不同。因而入射到 A 、 B 两物体的辐射能量亦不同。有相同吸收比的两物体单位时间所吸收的能量亦不同。

按热力学第二定律， A 物体吸收的能量必小于辐射的能量， B 物体吸收的能量必大于辐射的能量。

21-3 将星球看作绝对黑体，利用维恩位移定律测量 λ_m 便可求得 T ，这是测量星球表面温度的方法之一。设测得：太阳的 $\lambda_m = 0.55\mu\text{m}$ ，北极星的 $\lambda_m = 0.35\mu\text{m}$ ，天狼星的 $\lambda_m = 0.29\mu\text{m}$ 。试求这些星球的表面温度。

解：

由 $T\lambda_m = b$ ， $b = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

∴太阳表面温度：

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.55 \times 10^{-6}} = 5.27 \times 10^3 \text{ K}$$

北极星表面温度：

$$T = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.35 \times 10^{-6}} = 8.28 \times 10^3 \text{ K}$$

天狼星表面温度：

$$T = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.29 \times 10^{-6}} = 9.99 \times 10^3 \text{ K}$$

21-4 在加热黑体的过程中，其单色辐出度的最大值所对应的波长由 $0.69 \mu\text{m}$ 变化到 $0.50 \mu\text{m}$ ，其总辐出度增加了几倍？

解：

由于黑体加热过程中，单色辐出度的最大值对应的波长由 $0.69 \mu\text{m}$ 变化到 $0.50 \mu\text{m}$ ，相应的温度由 T_1 增加到 T_2

据维恩位移定则：

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{m1}}, \quad T_2 = \frac{b}{\lambda_{m2}}$$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = \frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}$$

据斯忒藩-玻尔兹曼定律：

$$M_B(T_1) = \sigma T_1^4, \quad M_B(T_2) = \sigma T_2^4$$

$$\frac{M_B(T_2)}{M_B(T_1)} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} \right)^4 = \left(\frac{0.69}{0.5} \right)^4 = 3.63 \text{ 倍}$$

21-5 用辐射高温计测得炉壁小孔的辐射出射度为 $22.8 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ ，试求炉内温度。

解：

由斯忒藩-玻尔兹曼定律：

$$T = \sqrt[4]{\frac{M_B(T)}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{22.8 \times 10^3}{5.67 \times 10^{-8}}} = 1.416 \times 10^3 \text{ K}$$

21-6 按照普朗克假设，频率为 ν 的振子的能量只能取分立的值 $E_n = nh\nu$ ，一群固有

频率为 ν 的振子的能量分布遵循玻尔兹曼分布定律，即有： $N_n \propto e^{-\frac{E_n}{kT}}$ ， $\sum N_n = N$ ，此处 N_n 是能量为 E_n 的振子数， N 是振子总数，试求温度为 T 时振子的平均能量。

解：

由玻尔兹曼分布：在平衡态温度 T 时，处在速度分量区间为 $v_x \rightarrow v_x + \Delta v_x$ ； $v_y \rightarrow v_y + \Delta v_y$ ； $v_z \rightarrow v_z + \Delta v_z$ 与坐标区间为 $x \rightarrow x + \Delta x$ ； $y \rightarrow y + \Delta y$ ； $z \rightarrow z + \Delta z$ 之间的振子数为：

$$\Delta N_n = N_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_n}{kT}} \Delta v_x \cdot \Delta v_y \cdot \Delta v_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

式中 $E_n = nh\nu$

由平均值的定义，振子的平均能量为：

$$\bar{E} = \frac{\sum E_n \Delta N_n}{\sum \Delta N_n} = \frac{\sum E_n N_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{E_n}{kT}} \Delta v_x \cdot \Delta v_y \cdot \Delta v_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}{\sum N_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{E_n}{kT}} \Delta v_x \cdot \Delta v_y \cdot \Delta v_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \cdot e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}$$

$$\text{令 } x = e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad \text{则} \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\therefore \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$$

$$\text{又令: } y = \frac{h\nu}{kT}$$

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \cdot e^{-ny}}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = h\nu \frac{\frac{d}{dy} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ny} \right)}{(1-x)^{-1}} \\ &= -h\nu \frac{\frac{d}{dy} (1 - e^{-y})^{-1}}{(1-x)^{-1}} = h\nu \frac{e^{-y} (1 - e^{-y})^{-2}}{(1-x)^{-1}} \\ &= h\nu \frac{e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \end{aligned}$$

21-7 黑体的温度 $T_1 = 6000\text{K}$, 问 $\lambda_1 = 0.35\mu\text{m}$ 和 $\lambda_2 = 0.70\mu\text{m}$ 的单色辐出度之比为多少? 当黑体温度上升到 $T_2 = 7000\text{K}$ 时, $\lambda_1 = 0.35\mu\text{m}$ 的单色辐出度增加了几倍?

解:

$$\text{由普朗克公式 } M_{B\lambda}(T) = 2\pi hc^2 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

$$(1) \quad \frac{M_{B\lambda_1}}{M_{B\lambda_2}} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{-5} \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_2 T_1}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 T_1}} - 1}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{0.70}{0.35} \right)^5 \frac{e^{\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{1.38 \times 10^{-23} \times 0.70 \times 10^{-6} \times 6000}} - 1}{e^{\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{1.38 \times 10^{-23} \times 0.35 \times 10^{-6} \times 6000}} - 1} \\ &= 1.00 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{M_{B\lambda_1}(T_2)}{M_{B\lambda_1}(T_1)} = \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_1 T_1}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 T_2}} - 1}$$

$$= \frac{\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{1.38 \times 10^{-23} \times 0.35 \times 10^{-5} \times 6000} - 1}{\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{1.38 \times 10^{-23} \times 0.35 \times 10^{-5} \times 7000} - 1}$$

$$= 2.67$$

21-8 在光电效应实验中, 有一学生测得某金属的遏止电势差的绝对值 $|U_a|$ 和入射光波长 λ 有下列对应关系:

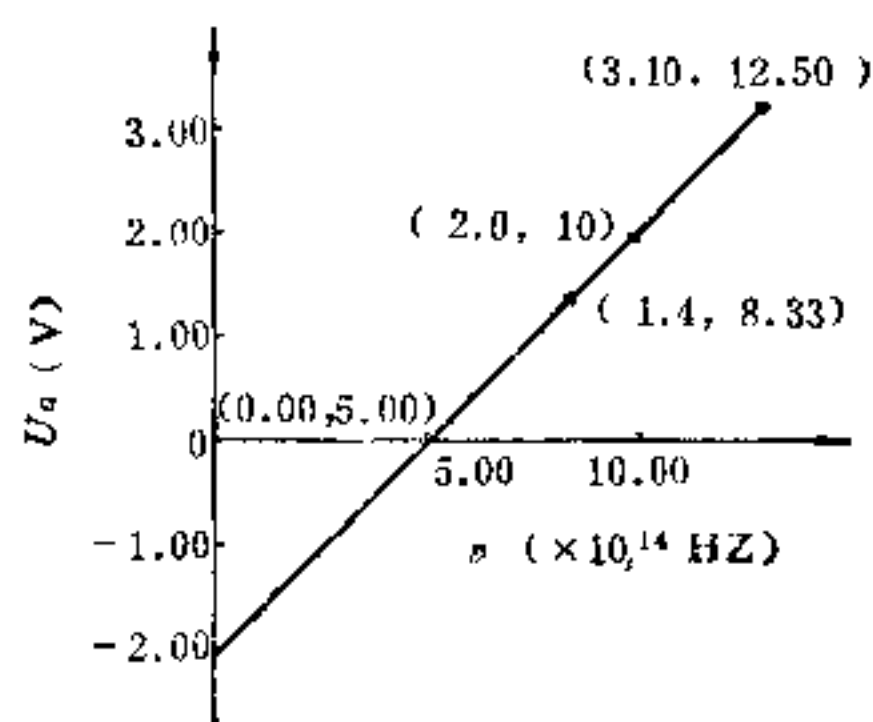
λ (m)	3.60×10^{-7}	3.00×10^{-7}	2.40×10^{-7}
$ U_a $ (V)	1.40	2.00	3.10

试用作图法求: (1) 普朗克恒量 h 与电子电量的比值 h/e ; (2) 该金属的逸出功; (3) 该金属光电效应的红限。

解:

由 $eU_a = h\nu - A$ 可得 $U_a = \frac{h\nu}{e} - \frac{A}{e}$, 将 λ 换成频率 ν 的值列表如下:

$\lambda (\times 10^{-7} \text{m})$	$\nu (\times 10^{14} \text{Hz})$	U_a (V)
3.60	8.33	1.40
3.00	10.00	2.00
2.40	12.50	3.10



题 21-8 图

作 $U_a - \nu$ 图。

(1) 图中直线的斜率等于 $\frac{h}{e}$

$$\therefore \frac{h}{e} = \frac{\Delta U_a}{\Delta \nu} = \frac{3.10 - 1.40}{(12.50 - 8.33) \times 10^{14}}$$

$$= 4.08 \times 10^{-15} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \text{C}^{-1}$$

(2) 由图可见直线的截距等于 $-\frac{A}{e} = -2.0$

$$\therefore A = 2.0e = 2.0 \times 1.60 \times 10^{-19} = 3.20 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.0 \text{ eV}$$

(3) 由图可见: $\nu_0 = 5.00 \times 10^{14} \text{ Hz}$

21-9 从铝中移出一个电子需要4.2eV的能量,今有波长为2000Å的光投射到铝表面,试问:(1)由此发射出来的光电子的最大动能是多少?(2)遏止电势差为多大?(3)铝的截止波长有多大?

解:

(1) 由爱因斯坦方程 $h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$ 得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{2000 \times 10^{-10}} - 4.2 \times 1.60 \times 10^{-19} \\ &= 3.23 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.02 \text{ eV} \end{aligned}$$

$$(2) eU_c = \frac{1}{2}mv^2, U_c = 2.02 \text{ V}$$

(3) 由 $h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = A$ 可得:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{hc}{A} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{4.2 \times 1.60 \times 10^{-19}} = 2.96 \times 10^{-7} \text{ m} \\ &= 2960 \text{ Å} \end{aligned}$$

21-10 在一定条件下,人眼视网膜能够对五个蓝绿光光子 ($\lambda = 5.0 \times 10^{-7} \text{ m}$) 产生光的感受,此时视网膜上接收的光能量为多少?如果每秒钟都能吸收五个这样的光子,则到达眼睛的功率为多少?

解:

$$(1) E = nh\nu = n \frac{hc}{\lambda} = 5 \times \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{5000 \times 10^{-10}} = 1.99 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$(2) P = \frac{E}{t} = 1.99 \times 10^{-18} \text{ W}$$

21-11 (1) 一标准米的长度定义为 ^{86}Kr 的橙黄色辐射光之波长的1650763.73倍。试问这种辐射的一个光子所具有的能量是多少?

(2) 若一个光子的能量等于一个电子的静能量,试问该光子的频率、波长和动量是多少?在电磁波谱中它是属于何种射线?

解:

$$(1) \text{氪}(^{86}\text{Kr}) \text{ 橙黄光的波长 } \lambda = \frac{1}{1650763.73} \text{ m}$$

\therefore 1个光子的能量为:

$$\begin{aligned} E = h\nu &= \frac{hc}{\lambda} = 6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8 \times 1650763.73 \\ &= 3.28 \times 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

(2) 由相对论理论,静止能量为 $m_0 c^2$

据题意 $m_0 c^2 = h\nu$

$$\nu = \frac{m_0 c^2}{h} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (3.00 \times 10^8)^2}{6.63 \times 10^{-34}} = 1.24 \times 10^{16} \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3.00 \times 10^8}{1.24 \times 10^{16}} = 2.4 \times 10^{-8} \text{ m} = 0.024 \text{ \AA}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{m_0 c^2}{c} = m_0 c = 9.11 \times 10^{-31} \times 3.00 \times 10^8 = 2.73 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

该光子在电磁波谱中属 γ 射线。

21-12 试求：(1) 红光 ($\lambda = 7 \times 10^{-7} \text{ m}$)；(2) X射线 ($\lambda = 0.25 \text{ \AA}$)；(3) γ 射线 ($\lambda = 1.24 \times 10^{-2} \text{ \AA}$) 的光子的能量、动量和质量。

解：

(1) 红光：

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{7.00 \times 10^{-7}} = 2.84 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$p = m_0 c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{7.00 \times 10^{-7}} = 9.47 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_0 = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{2.84 \times 10^{-19}}{(3.00 \times 10^8)^2} = 3.16 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

(2) X射线：

$$E = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{0.25 \times 10^{-10}} = 7.96 \times 10^{-15} \text{ J}$$

$$p = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.25 \times 10^{-10}} = 2.65 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_0 = \frac{7.96 \times 10^{-15}}{(3.00 \times 10^8)^2} = 8.84 \times 10^{-32} \text{ kg}$$

(3) γ 射线：同样计算可得：

$$E = 1.60 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$p = 5.33 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_0 = 1.78 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

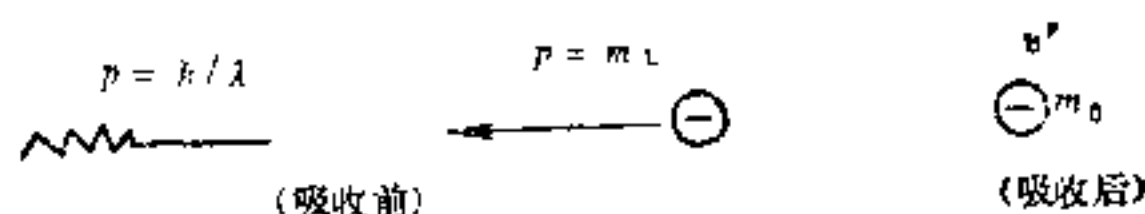
21-13 光电效应和康普顿效应，都包含电子与光子的相互作用。试问这两个过程有什么不同？

答：

参与康普顿效应的电子在光子能量较大时可看作是自由的。电子与光子相互作用满足动量和能量守恒定律。参与光电效应的电子是束缚的，对自由电子不能有光电效应。光电效应在电子与光子的相互作用过程中，动量不守恒，金属材料必取走了部分动量，但取走的能量因较小可忽略不计。

[证明对自由电子不能有光电效应]：

选择光子与电子的质心惯性系，由动量守恒定律，系统吸收前后的动量相等，都为零，即电子吸收光子后应静止不动。



题 21-13 图

按能量守恒定律: $h\nu + mc^2 = m'c^2$. 这意味着 $m' > m$, 违背相对论质速公式

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

故上式不可能成立, 这一过程——自由电子吸收光子的过程不可能发生, 不能有光电效应。光子与自由电子的相互作用, 只能产生康普顿散射。

21-14 波长 $\lambda_0 = 0.708 \text{ \AA}$ 的 X 射线在石蜡上受到康普顿散射, 求在 $\frac{\pi}{2}$ 和 π 方向上所散射的 X 射线波长各是多大?

解:

(1) 在 $\frac{\pi}{2}$ 方向上的散射:

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda_0 &= \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\phi}{2} = \frac{2 \times 6.63 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 3.00 \times 10^8} \sin^2 \frac{\pi}{4} \\ &= 0.243 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.0243 \text{ \AA} \\ \lambda &= 0.708 + 0.0243 = 0.732 \text{ \AA} \end{aligned}$$

(2) 在 π 方向上的散射:

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda_0 &= \frac{2 \times 6.63 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 3.00 \times 10^8} \sin^2 \frac{\pi}{2} \\ &= 0.485 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.0485 \text{ \AA} \\ \therefore \lambda &= 0.708 + 0.0485 = 0.757 \text{ \AA} \end{aligned}$$

21-15 已知 X 光光子的能量为 0.60 MeV , 在康普顿散射之后波长变化了 20% , 求反冲电子的能量。

解:

由 X 光光子能量可得散射前 X 光的波长为:

$$E_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lambda_0 &= \frac{hc}{E_0} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{0.60 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 2.07 \times 10^{-12} \text{ m} = 0.0207 \text{ \AA} \end{aligned}$$

\therefore 散射波波长变化了 20%

$$\begin{aligned} \therefore \lambda &= \lambda_0 + 0.2\lambda_0 = 1.2\lambda_0 = 1.2 \times 2.07 \times 10^{-12} \\ &= 2.48 \times 10^{-12} \text{ m} = 0.0248 \text{ \AA} \end{aligned}$$

反冲电子的能量为

$$E_e = E_0 - E = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) = hc \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \lambda} = hc \frac{0.2}{\lambda}$$

$$= 6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8 \times \frac{0.2}{2.48 \times 10^{-12}} \\ = 1.60 \times 10^{-14} \text{ J} = 0.10 \text{ MeV}$$

21-16 在康普顿散射中,入射光子的波长为 0.030 \AA ,反冲电子的速度为光速的60%,求散射光子的波长及散射角。

解:

1 个光子和电子碰撞后电子获得的能量:

$$\Delta E = mc^2 - m_0 c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.6c}{c} \right)^2}} - 1 \right) m_0 c^2 \\ = 0.25 m_0 c^2$$

由能量守恒光子损失的能量为 $0.25 m_0 c^2$

$$\therefore 0.25 m_0 c^2 = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\lambda = \frac{h \lambda_0}{h - 0.25 m_0 c \lambda_0} \\ = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 0.030 \times 10^{-10}}{6.63 \times 10^{-34} - 0.25 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 3.00 \times 10^8 \times 0.030 \times 10^{-10}} \\ = 4.34 \times 10^{-12} \text{ m} = 0.0434 \text{ \AA}$$

$$\therefore \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\phi}{2} = \frac{\Delta \lambda \cdot m_0 c}{2h} = \frac{(0.043 - 0.030) \times 10^{-10} \times 9.11 \times 10^{-31} \times 3.00 \times 10^8}{2 \times 6.63 \times 10^{-34}} \\ = 0.2679$$

$$\sin \frac{\phi}{2} = 0.5176 \quad \frac{\phi}{2} = 31.17^\circ$$

$$\therefore \phi = 62.3^\circ$$

五、自我检查题:

1. 绝对黑体表示_____的物体,阳光同样照射到煤炭和白颜料上,则同样面积在同样时间内煤炭比颜料_____的能量多,_____的能量少。把煤炭和白颜料加热到同样的温度,则单位时间内单位面积上煤炭辐射的热量比白颜料_____。

2. 随着黑体辐射温度升高,单位辐出度的峰值波长向_____方向移动,若峰值波长减为原长的一半,则温度变为原来温度(K)的_____倍。

3. 随着黑体辐射温度的升高,黑体总辐射出射度_____。若单色辐出度峰值波长减为原长的一半,则总辐射出射度变为原来的_____倍。

4. 普朗克量子假设的内容是_____。

5. 光的_____, _____及 _____现象反映了光的波动性, _____及 _____效应反映了光的量子性,由于光具有这双重性,我们说光具有_____二象性。

6. 频率为 ν 的光子能量 $\varepsilon =$ _____, 动量 $p =$ _____, 质量 $m =$ _____, 静止质量 $m_0 =$ _____。

7. 光电效应的实验规律是 (1) 光电流与入射光的_____成正比, (2) 光电子初动能与入射光_____, 与_____无关, (3) 要产生光电效应必须入射光的_____。

8. 某金属逸出功为 A , 则其红限波长 $\lambda_0 =$ _____, 光照射到金属表面入射波波长 $\lambda =$ _____ λ_0 才能产生光电效应, 这时光电子动能 $E_k =$ _____。

9. 康普顿效应是指 _____, 它的实质是 γ 光子与 _____, 在此过程中 _____ 与 _____ 守恒。

10. 康普顿效应中, 入射光子 $\lambda_0 = 0.05 \text{ \AA}$

当散射角 θ	60°	90°	180°
散射光子波长 λ (Å)			

$$\left(h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \quad m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad \frac{h}{m_0 c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m} \right)$$

11. 波长为 4000 \AA 的紫光, 强度为 $15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ 垂直入射到 $S = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 的金属面上, 1 分钟内打到金属上光子数为多少? 如这些光子一半被金属吸收, 一半被金属反射, 金属受到的冲量为多少?

12. 汞的红限为 $1.09 \times 10^{15} \text{ Hz}$, 今有 $\lambda = 2000 \text{ \AA}$ 的光照射, 求汞放出光电子的初速度及截止电压。

13. 波长为 3000 \AA 的光射到某金属上, 电子最大速度为 $5 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 求该金属的红限波长。

第二十二章 原子的量子理论

原子，意为“不可分割”的东西。原子论断言：物质存在着不能再细分的最小单位叫原子。而物体由原子组成。原子应是一切自然过程的不变实体。

这种观点，开始并不是从实验中得来的，而是古希腊哲学家们思辨的产物。以后，为了解释化学反应现象，有必要假设存在着原子。由原子组成分子，再聚集成物体。

原子的存在，作为普遍的自然规律，出现在化学科学之中。这样在任何原子学说中，首要的是给出原子的运动规律，以作为解释一切自然现象的基础。

在牛顿那里，把原子视作质点。牛顿的力学就是关于质点的力学，是他那个时代的原子物理学。在牛顿力学中，原子除了占据空间的属性以外，还有惯性和包括引力在内的一切力的普遍属性。鉴于这些属性，原子不仅有了位置变化的可能，而且指明了原子将作怎样的运动。牛顿定律形式是由原子的普遍属性决定的。

牛顿力学中第一条自然规律，就是原子假设。爱因斯坦用原子论对布朗运动作了理论解释，佩兰又通过实验证实了这种解释。这是在历史上第一次用物理方法证实了原子的存在。

但在十九、二十世纪之交的三项伟大发现： X 射线的发现，放射性的发现及电子的发现，使科学界大为震惊。原子作为构成世界基础的观念彻底破灭了。原子不是不可分的，原子是有内部结构的。向原子内部探索和“分裂原子”，成了当时科学领域中最激动人心的目标。

1911年，卢瑟福通过用 α 粒子轰击物质受到散射的实验，发现了原子内部带正电的原子核的存在。提出了电子绕原子核旋转象行星绕太阳旋转那样的新原子模型。

卢瑟福的原子模型，却与经典物理学不相容。最严重的是与已被普遍承认的麦克斯韦电磁理论相抵触。麦克斯韦理论断言：一个被加速的电荷，将以电磁辐射的形式放出能量。一个绕核迅速旋转的电子必存在加速度，这种加速度将导致电磁辐射引起连续的能量损失。这种辐射损失将使原子中电子在 10^{-6} 秒内失去其全部能量而落入原子核。传统的物理学定律不能解释由电子组成的原子稳定存在这一事实，说明传统的物理学定律必定有错，至少应用于原子中电子运动时是错误的。

本章所讨论的，就是玻尔以及他的后继者，用新的量子理论解释了自然界里由电子组成的原子稳定存在这一基本事实。

一、基本要求

(1) 理解玻尔关于原子模型的三个基本假设。能推导氢原子的能级公式。并能对氢光谱的实验规律作出解释。

(2) 了解量子力学基本知识：德布洛意波及其几率解释；测不准关系；薛定格方程及波函数的标准条件及归一化条件。了解量子力学对氢原子的处理结果。

(3) 了解激光的基本原理。

二、基本概念和规律

1. 玻尔假设：对于氢原子系统

(1) 电子绕核旋转时力学上可能的无穷多个轨道中，只有少数是允许存在的。这些是电子在其上运转时角动量为 $\frac{h}{2\pi}$ 的整数倍的那些轨道。

(2) 虽然在传统的电动力学中，加速运动的电子应当辐射。但当电子沿着允许的轨道运转时，不发射电磁辐射。

(3) 电子可以从一个轨道跃迁到另一个轨道，在这种情况下，两个运动状态之间能量差以光子形式辐射出来（或吸收光子）。其频率由量子规则 $\Delta E = h\nu$ 所决定。

〔重要物理内容〕

1) 原子是一个新的世界。经典的规律不能用于这个世界，不能支配原子内电子的运动。应把普朗克、爱因斯坦发现的光的量子学说引入到原子结构理论。电子的运动是受作用量子 h 支配的。原子世界是由“ h ”控制的世界，没有 h 作用量子，就没有原子。这是玻尔假设的核心。

2) 理论最重要的任务，就是能解释事实。玻尔量子假设的前两个，是为了说明原子的稳定性。第三个量子假设，是为了说明原子线光谱的存在。

3) 自然法则是对自然过程的一种普遍性限制，对一切可以设想的自然过程的一种选择。玻尔在前两个假设中，提出了“定态”的概念。电子在此状态中，不辐射能量，以确保卢瑟福原子结构的稳定性。这是一个由 h 控制的具有确定能量的状态。在一切可能的状态中挑选出角动量为 $\frac{h}{2\pi}$ 的整数倍的状态。（注意：作用量=角动量×角位移）这样由

“定态”概念引出量子化能级概念。玻尔在后一个假设中，提出了“量子跃迁”的概念。电子通过状态之间的跃迁吸收与发射光子，以解释原子线光谱的存在。这是一个由 h 控制与调节的过程，以决定光的发射（或吸收）的频率。

$$\Delta E = h\nu$$

不同的原子有不同的一组“定态”，对应不同的一组能级，将发射不同的线光谱。

通常把以上的玻尔假设称作两个“量子条件”。

4) 玻尔突破了旧理论的框框，但仍沿用旧理论的概念。（如把电子看成经典粒子，具有位置、速度、轨迹等经典概念）实质上玻尔理论是在经典理论基础上，加上了量子化条件的限制。这种理论并非微观体系的严密理论。而是“旧瓶装新酒”。在理论体系上是量子条件与已宣告无效的经典规律的大杂烩。

在这里真正需要的，并不是对旧理论加以限制，而是创立新理论。使其对所有系统——微观和宏观的——都能获得正确的结果。并在宏观领域内转化为旧理论。

所以玻尔这种经典理论加上量子条件限制的改革方案在理论体系上是有根本缺陷的，对实验现象的解释范围也是极其有限的。

2. 氢原子的能级公式

(1) 卢瑟福原子模型。由玻尔假设Ⅰ电子看作经典粒子以圆形轨道绕核旋转。按玻尔假设Ⅱ原子内部电子不辐射能量，保持能量守恒。应用牛顿定律：

$$F = k \frac{Ze^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ 。对氢原子 $Z=1$ 。电子总能量 = 动能 + 势能。可得出:

$$E = -\frac{ke^2}{2r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

按玻尔假设 I, 定态对应的电子轨道, 应是角动量 L 为 $\frac{\hbar}{2\pi}$ 整数倍的轨道

$$L = r \times mv = n \frac{\hbar}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

电子的角动量是量子化的。整数 n 称为主量子数。由此可以获得定态对应的能级:

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

能量最低的定态, 对应于 $n=1$ 的状态, 叫基态。对应基态的能量 $E_1 = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = -13.6(\text{eV})$, 对应基态的轨道半径: $r_1 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m e^2} = 0.53 \text{ \AA}$ 。

由此可知: 基态的存在, 保证了稳定的原子存在。没有作用量子 h , 就无法解释原子存在, 从而无法解释这个物质世界的存在。

$n \neq 1$ 的状态叫激发态。主量子数为 n 的能量值: $E_n = -\frac{E_1}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2}(\text{eV})$ 。相应的轨道半径: $r_n = n^2 r_1 = 0.53 \times n^2 \text{ \AA}$ 。相应的能级图如下:

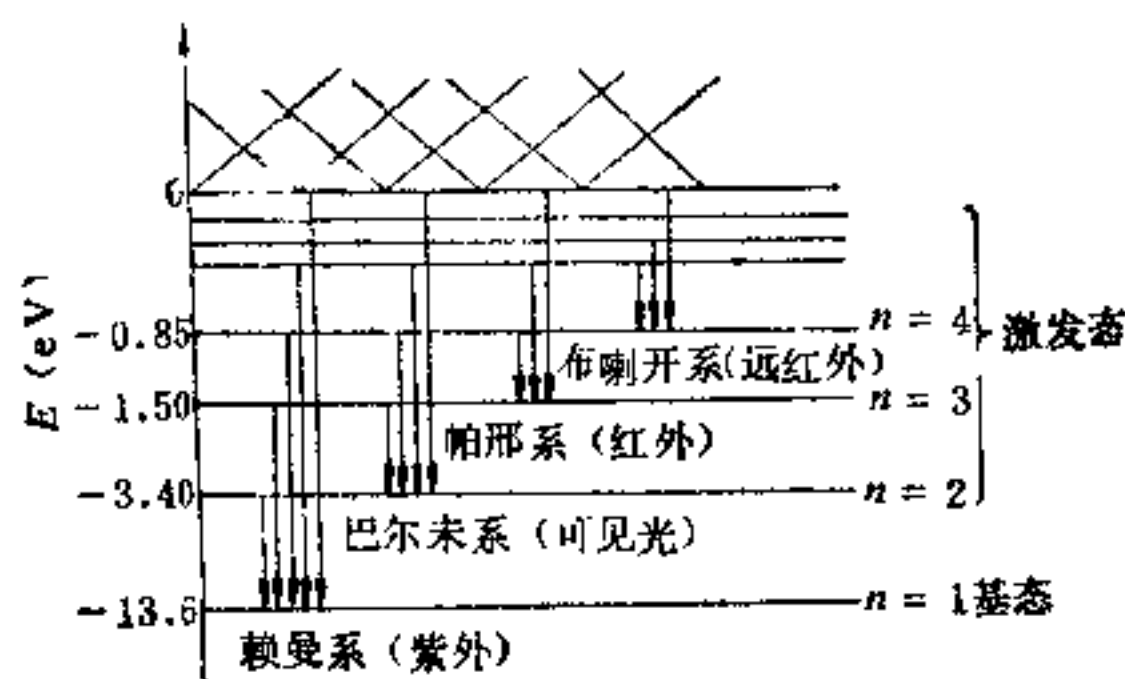


图 22-1

上述数值 0.53 \AA 与 13.6 eV 同实验测定的氢原子半径与电离能相符。

n 愈大, 能级愈密, 相邻能级差愈小, 原子能量趋于连续变化。玻尔理论与经典理论趋于一致。 n 趋于无限大, 电子成为自由电子, 经典物理适用。

(2) 对氢原子光谱的解释。光是探索原子内部信息的窗口。氢原子所有波长可用一个经验公式即里德伯公式表示出来:

$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, R 叫里德伯常数, 实验值 $R = 1.0967758 \times 10^{-7} \text{ \AA}^{-1}$ 。式中:

$k=1$, $n=2, 3, 4, \dots$ 时, 得到赖曼系 (紫外区)。

$k=2$, $n=3, 4, 5, \dots$ 时, 得到巴尔末系 (可见光区)。

$k=3$, $n=4, 5, 6, \dots$ 时, 得到帕邢系 (红外区)。

$k=4$, $n=5, 6, 7, \dots$ 时, 得到布喇开系 (远红外区) 等等。其它线系都位于远红外区。

由玻尔假设, 发射光谱的频率公式:

$$\nu_{kn} = \frac{E_n - E_k}{h}$$

3. 德布洛意波

(1) 波粒二象性。牛顿由它的原子 (即质点) 的普遍属性: 惯性与包括引力在内的一切力的普遍属性, 决定了质点运动的基本规律, 作为解释一切自然现象的基础。德布洛意从量子观点提出了波粒二象性不仅光有, 实物粒子也有, 是物质的普遍属性。并把这种波, 取名为物质波。并由自然界对称性出发, 猜测与物质实体相关联的波长与频率同光子遵从同一关系式:

$$P = \frac{h}{\lambda}, \quad E = h\nu$$

这就是著名的德布洛意关系。是物质粒子性与波动性相联系的普遍法则。这个理论, 不久为电子衍射实验所证实。

在这里, 光子与有静止质量物体的一个重要差别在于, 它们的波动性与粒子性联系的方式不同。对于光子, 具有关系 $c = \lambda\nu$, $E = cp$ 。由粒子性质 E , P 求波的性质 λ , ν 只需一个已知量即可。对于有静止质量物体, 不具有以上关系。计算 λ 与 ν 需用两个独立关系式:

$$\lambda = \frac{h}{P}, \quad \nu = \frac{E}{h}$$

(注意: 在量子力学理论体系中, 粒子是用无数个平面波叠加而成的波包来描述的。每一平面波都以相速度运动, 相速度可以超过光速, 单个的相速度是观测不到的。可观测的粒子速度, 是波包的群速度, 它总是小于光速。因此对有静止质量的物体, 测得速度一定是群速度, 对此等式 $v = \lambda\nu$ 不成立。)

物质波是作用量子 h 控制的粒子运动的普遍属性。由此决定的量子力学规律可以作为解释自然现象新的基础。

(2) 物质波的几率解释。当光被证实具有波动性时, 十九世纪物理学家立即问“波在什么介质中传播?”并发明了“以太”这种介质。企图机械地说明光的波动性。直到爱因斯坦才放弃了它。因此同样道理, 没有必要为德布洛意波引进一种介质, 但需要一种对波的解释。

为了使物质的波动图象与粒子图象协调一致, 波恩对物质波作了几率解释。对这种解释, 是否是对粒子普遍属性的最终解释, 至今还是有争议的。但根据这种解释, 却能说明实验结果。

对光子而言,以双缝实验干涉条件为例。按波动图象,屏幕上某一点的强度 I (单位时间通过单位面积的能量) 由下式给出

$$I = \varepsilon_0 c E^2 \quad E \text{ 为该点的电场强度}$$

按光子图象: $I = N h \nu$ N 为单位时间通过单位面积的光子数。

而单个光子打在屏幕的哪一点,是无法预测的。干涉图样的亮带与暗带是统计的结果。一个光子有很高几率到达亮带,而到达暗带的几率为零。因为屏上给定点的 N (光子通量),只是该点附近发现光子几率的一个量度。

$$I = \varepsilon_0 c E^2 = N h \nu \quad \text{则 } N \sim E^2$$

即电场强度的平方给出某一点发现光子的几率。

对电子而言,电子波同样,可用相应波函数表示。波函数模量的平方给出给定地点附近发现电子的几率。

波函数通常用 ψ 表示。对于光子,由 ψ 表示的德布洛意波就是电磁波。对于电子或其它物体, ψ 则表示非电磁波的德布洛意波。

在经典物理中,几率的概念来源于观测者对物质所处状态有关知识的欠缺。但在量子力学中,几率却来源于物质的普遍属性,并作为基础概念进入了物理学。

4. 测不准关系

站在测量的观点上看,普朗克常数 h 的存在,是通过对两个物理量(如能量与时间,动量与位置等乘积具有作用量量纲的两个共轭变量)测量的不确定量的乘积应具有一个最小值,去制约自然过程。

位置与动量的测不准关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

能量与时间的测不准关系

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

两个共轭变量中,一个量的精确度只能靠牺牲另一个量的精确度来获得。如欲精确测得一个物体的能量 ($\Delta E \rightarrow 0$),便只有使测量的时间为无限长 ($\Delta t \rightarrow \infty$) 才行,我们亦无法使粒子 x 方向的位置与在 x 方向的动量二者的不确定量同时变得任意小 ($\Delta x \rightarrow 0, \Delta p_x \rightarrow 0$)。

由测不准关系知道:若安排一个实验,以测量物体的粒子性质。那么在此实验中 Δx 和 Δt 当然必为零。因为粒子是指在一个特定时刻可以无限精确定位的。根据测不准原理,其动量与能量,从而表征其波动性的那些量 ($\lambda = \frac{h}{p}, \nu = \frac{E}{h}$) 将完全不知道。

这表明,用实验观测物质粒子性时,它的波动性就必定被抑制。同样,如果精确地测出了波动性,即 $\Delta \lambda$ 及 $\Delta \nu$, 从而 Δp 与 ΔE 为零,则粒子性将完全观测不到。

实验不可能同时观测到物质的波动性和粒子性,这就是玻尔所阐明的互补原理。物质的波动性与粒子性两个方面是互相补充的。为全面了解物质的性质,这两种图象都是必需的,但不可能同时被观测到。

5. 薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi。$$

其中 ψ 是波函数， $V(r, t)$ 是势能函数， $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 。

微观粒子某一时刻所处的状态，由波函数完全描述。确定了粒子的波函数，就获得了有关粒子的全部信息——即预言所有的处在此状态粒子有关可观测量的几率。因此波函数的变化规律，是粒子运动的根本规律。这个规律由薛定谔方程所描述。此方程的正确性，已为实验所证明。

对波函数所作的几率解释：要求波函数满足标准条件：单值、有限、连续。此外还应满足归一化条件 $\int_V \psi^* \psi d\tau = 1$ ，这样的波函数才有确切的物理意义。

对势场不随时间而改变 $V = V(x, y, z)$ 则有定态薛定格方程。如取 $\psi = \psi(x, y, z)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ ， $\psi(x, y, z)$ 为粒子定态波函数。则有 $\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0$ 是为定态薛定谔方程，

本书只讨论这种情况。

单电子的量子力学的基本任务，是计算电子的波函数。波函数给出了有关粒子最完备的描述。通常，第一步是计算满足薛定格方程的一般解。第二步是从一般解中，即粒子一切可设想的状态中再筛选出满足标准条件的那些解。这些解才有明确的物理意义。作为粒子状态的描写。

6. 量子力学对氢原子的处理

静止的核的氢原子中电子波函数，由定态势能为 $V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$ 的薛定谔方程确定

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

对应的满足标准条件的电子定态波函数：

$$\psi_{n,l,m_l,m_s} = R_{n,l}(r) \Theta_{l,m_l}(\theta) \cdot \phi_{m_l,m_s} \cdot \chi_{m_s}$$

定态波函数的具体数学形式可参阅量子力学教程，电子处在那一个定态，通常用四个量子数（ n 、 l 、 m_l 、 m_s ）标记。

（1）主量子数 n （ $n=1, 2, 3, \dots$ ）。决定定态的能量值。 $E_n = -\frac{me^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \cdot (2\hbar^2)} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2}(\text{eV})$ ， $n=1$ ，为最低能量的定态，叫基态。相应的能量 $E_1 = -13.6(\text{eV})$ ， $n>1$ 的定态叫激发态。主量子数的存在表明：原子中束缚电子的能量是量子化的，形成一组能级。基态能量的存在，确保了原子的稳定性。

（2）角（或付）量子数 l ， $l=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 。以决定定态的角动量， $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ 。一般用 s, p, d, f, \dots 等字母分别表示 $l=0, 1, 2, 3, \dots$ 等定态。角量子数 l 的存在表明了原子中束缚电子的动量矩大小是量子化的。 l 只标记动量矩大小，不能确定其方向。 $l=0$ 在经典物理中，只能理解为电子穿过原子核中心的振动，而这种图

象是不可设想的。所以 s 态的存在纯粹是一种量子力学效应。

(3) 磁量子数 m_l 。 $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ 。以决定电子动量矩在某一特定方向(例如磁场方向, 以 z 轴表示)上的分量,

$$L_z = m_l \hbar$$

磁量子数 m_l 的存在, 表明了原子中束缚电子的动量矩在空间取向是量子化的, 保证 z 轴上的投影为 \hbar 的整数倍。通常称之为空间量子化条件。

注意: 在经典物理中, 动量矩 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 。但在量子力学中, 由测不准关系决定, 人们无法同时精确测定粒子位置与动量。从而也无法精确测定动量矩 \mathbf{L} 。

由此可见: 在确定动量矩 \mathbf{L} 的大小 L 与 z 轴上分量 L_z 时, \mathbf{L} 仍不确定。即 \mathbf{L} 在 x 轴及 y 轴上投影是不确定的。

注意: L_z 的最大值为 $m_l = l$ 即 $L_z = l\hbar$ 。

所以, 总角动量表示为 $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ 而不是 $L = l\hbar$, 是必要的。因为若表示为 $L = l\hbar$, \mathbf{L} 在 z 方向投影等于 \mathbf{L} 的大小, 就不但确定了 \mathbf{L} 的大小, 而且确定了 \mathbf{L} 的方向。与测不准关系相矛盾。所以, $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ 表示式是纯粹量子力学效应。

而在经典物理中, 某一矢量在某一方向上最大投影小于而不是等于此矢量的大小是不可设想的。

自旋量子数 m_s 。 $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 。由此决定电子自旋动量矩在空间的取向。

$$S_z = m_s \hbar$$

m_s 自旋量子数的存在, 表明了自旋动量矩在空间取向的量子化。

以上四个量子数, 象一种编码一样就唯一确定了氢原子中电子的定态波函数。即确定了电子的状态。

三、略

四、习题与解答

22-1 由巴尔末经验公式求出里德伯恒量的实验值, 并把它与玻尔理论中求出的理论值作一比较。两者有几位有效数字是相符合的? 准确程度如何?

答:

里德伯常数:

实验值 $1.0967758 \times 10^{-7} \text{ \AA}^{-1}$

理论值 $1.0973731 \times 10^{-7} \text{ \AA}^{-1}$ (核静止)

$1.0967757 \times 10^{-7} \text{ \AA}^{-1}$ (质心静止)

忽略原子核的运动, 则两者有四位有效数字符合。准确度 $\approx 0.0005 \text{ \AA}^{-1}$ 。如考虑原子核也运动则完全一致。

22-2 试确定氢原子光谱中位于可见光区 ($3800 \text{ \AA} \sim 7800 \text{ \AA}$) 的那些波长。

解:

由巴尔末经验公式

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \text{ 则 } \lambda = \frac{4}{R} \cdot \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

式中 $\frac{4}{R} = 3645.7 \text{ \AA}$, $n = 3, 4, 5, \dots$ 。

$$\text{取 } n = 3 \quad \lambda_1 = 3645.7 \frac{9}{9-4} = 6562 \text{ \AA}$$

$$n = 4 \quad \lambda_2 = 3645.7 \frac{16}{16-4} = 4861 \text{ \AA}$$

$$n = 5 \quad \lambda_3 = 3645.7 \frac{25}{25-4} = 4340 \text{ \AA}$$

$$n = 6 \quad \lambda_4 = 3645.7 \frac{36}{36-4} = 4101 \text{ \AA}$$

$$n = 7 \quad \lambda_5 = 3645.7 \frac{49}{49-4} = 3970 \text{ \AA}$$

$$n = 8 \quad \lambda_6 = 3645.7 \frac{64}{64-4} = 3889 \text{ \AA}$$

$$n = 9 \quad \lambda_7 = 3645.7 \frac{81}{81-4} = 3835 \text{ \AA}$$

22-3 试计算氢的赖曼系的最短波长和最长波长 (以 \AA 表示)。

解:

氢原子光谱的经验公式

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \begin{cases} k = 1, 2, 3, \dots \\ n = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (k < n)$$

对 $k = 1$, $n \geq 2$ 的称为赖曼系。其波长最长的为 $k = 1$, $n = 2$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1}{1.096776 \left(1 - \frac{1}{2^2} \right)} = 1216 \text{ \AA}$$

其波长最短的 $k = 1$, $n = \infty$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R \left(1 - \frac{1}{\infty^2} \right)} = 911.8 \text{ \AA}$$

22-4 对处于第一激发态 ($n = 2$) 的氢原子, 如果用可见光照射, 能否使之电离?

解:

据氢原子能级公式

$$W_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{Rch}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

当 $n = 2$ 时, 与任意能级的能量差为

$$\Delta E = E_n - E_2 = 13.6 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ eV}$$

当 n 趋于无穷大时, r_n 亦趋于无穷大, 即相当于被电离。所以氢原子的电离能

$$E^* = -\frac{1}{4}Rch = -\frac{1}{4} \times 13.60 = -3.40 \text{ eV}$$

可见光中能量最大的光子

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{3.80 \times 10^{-7}} = 5.23 \times 10^{-19} \text{ J} = 3.27 \text{ eV} < E^*$$

所以处在 $n = 2$ 态的氢不能被电离。

22-5 在气体放电管中, 用能量为 12.2 eV 的电子去轰击处于基态的氢原子, 试确定此时氢所能发射的谱线的波长。

解:

氢原子所能吸收的最大能量就等于电子的能量 12.2 eV , 吸收后被激发到更高能态 E_n 。

$$E_n = \Delta E + E_1 = 12.2 + (-13.6) = -1.4 \text{ eV}$$

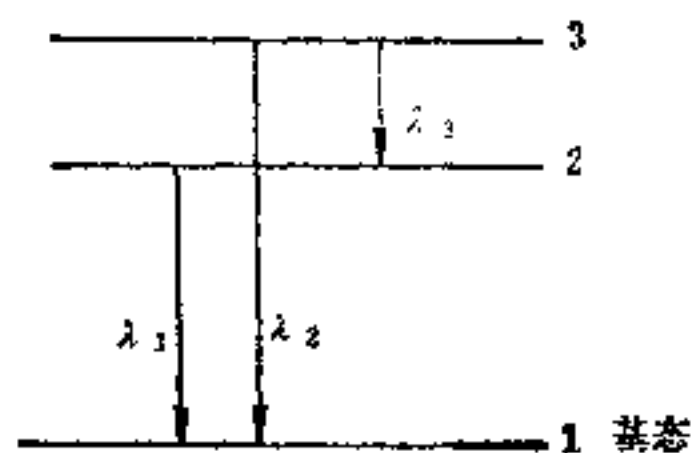
由式 $E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$, 可求得此能态相应的 $n = 3.12$. n 只能是整数, 能达到的最高能态 $n = 3$ 。由此态跃迁回基态时, 有三种不同波长 $3 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$ 和 $3 \rightarrow 1$ 。

由巴尔末推广后的公式 $\lambda = \frac{1}{R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)}$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1.097 \times 10^7 \left(1 - \frac{1}{2^2} \right)} = 1215 \text{ \AA}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{1.097 \times 10^7 \left(1 - \frac{1}{3^2} \right)} = 1026 \text{ \AA}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{1.097 \times 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = 6563 \text{ \AA}$$



题 22-5 图

22-6 用可见光照射能否使基态氢原子受到激发? 如果改用加热的方式, 至少需加热到多高温度才能使之激发? 要使氢原子电离, 至少要加热到多高温度? (提示: 温度 T 时原子平均动能 $E = \frac{3}{2}kT$, 并假定每个原子具有相同动能 $\frac{3}{2}kT$ 在碰撞中可交出其动能的一半)

解:

$$\begin{aligned} (1) \text{ 可见光 } E_{\max} = h\nu &= \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{3.800 \times 10^{-7}} \\ &= 5.23 \times 10^{-19} \text{ J} = 3.27 \text{ eV} \end{aligned}$$

氢原子基态能是 -13.6 eV , 第一激发态的能是 -3.4 eV

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -3.4 - (-13.6) = 10.2 \text{ eV}$$

因为 $E_{\max} < \Delta E$, 所以基态氢原子不能被激发!

(2) 若采用加热的方法, 温度为 T , 原子的平均动能 $E = \frac{3}{2}kT$ 。在碰撞中可交出

一半的动能。所以 $\Delta E = \frac{3}{4}kT = 16.32 \times 10^{-19} \text{ J}$

$$T = \frac{16.32 \times 10^{-19} \times 4}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 1.58 \times 10^5 \text{ K}$$

(3) 处于基态的氢原子电离能

$$E_{\infty} - E_1 = E_1 = 13.6 \text{ eV} = 2.17 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$\Delta E = \frac{3}{4}kT = 2.18 \times 10^{-18}$$

所以

$$T = \frac{4 \times 2.17 \times 10^{-18}}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 2.10 \times 10^5 \text{ K}$$

(由于原子速率按麦克斯韦速率分布, 故远低于此计算出的温度时已有较快的原子能使之碰撞激发或电离)

22-7 氢原子处于基态时, 根据玻尔理论, 电子的(1)量子数, (2)轨道半径, (3)角动量和线动量, (4)绕行频率、角速度和线速度, (5)所受的力和加速度, (6)动能、势能和总能量, 各是多少?

解:

$$(1) \quad n=1$$

$$(2) \quad r_1 = \frac{e_0 h^2}{\pi m e^2} = 0.53 \text{ \AA}$$

$$(3) \quad L_1 = r_1 \times m v_1 = \frac{h}{2\pi} = 1.06 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$P_1 = m v_1 = \frac{L_1}{r_1} = \frac{1.06 \times 10^{-34}}{0.53 \times 10^{-10}} = 1.99 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(4) \quad \omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{1.99 \times 10^{-24}}{9.11 \times 10^{-31} \times 0.53 \times 10^{-10}} = 4.13 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 6.58 \times 10^{15} \text{ rev} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_1 = \omega_1 r_1 = 2.18 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(5) \quad a = \frac{v_1^2}{r_1} = 8.96 \times 10^{12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$F = m a_1 = 8.16 \times 10^{-8} \text{ N}$$

$$(6) \quad E_1 = -\frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} = -13.6 \text{ eV}$$

$$E_{1P} = 2E_1 = -27.2 \text{ eV} \quad E_{1K} = E_1 - E_{1P} = 13.6 \text{ eV}$$

22-8 解释下列概念: 定态, 基态, 激发态, 量子条件, 发射(自发辐射、受激辐射), 吸收, 玻尔的基本假设中含有这些概念否?

解:

定态: 指不随时间变化的状态, 或不辐射能量的状态, 或能量能精确测定的状态。

基态：能量最低的定态。

激发态：除基态外所有的定态。

量子条件：在玻尔理论中，表现为由作用量子 h 对经典理论的限制与选择。有两个量子条件，一是原子定态只选择角动量为 $\frac{h}{2\pi}$ 的整数倍的状态。另一是电子在不同定态之间跃迁而吸收或发射光子，光子的频率 $\nu = \frac{\Delta E}{h}$ 所限制。

自发辐射：处于激发态的原子，可自发地随机的跃迁到较低能级的定态而发射光子，这过程叫自发辐射。

受激辐射：处于激发态 E_2 的原子，在受到外来频率为 $\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{h}$ 的光子的干扰的同时，辐射出和外来光子全同的光子而跃迁到能级较低的 E_1 定态。这过程叫受激辐射。

吸收：处于定态 E_1 的原子吸收外来光子 ν_{12} ，跃迁到高能级的定态 E_2 ， $E_2 = E_1 + h\nu_{12}$ ，这过程叫受激吸收，或简称吸收。

在玻尔的基本假设中，已含有定态，基态，受激态，量子条件，发射和吸收这些概念。

22-9 从 He^+ 和 Li^{++} 移去一个电子，求所需的能量。

解：

移去一个电子所需能量，即是该元素原子的电离能。对类氢原子 $E_{\text{电离}} = E_{\infty} - E_n = Z^2 E_1$ ， E_1 是氢原子基态能量的绝对值， $E_1 = 13.6 \text{ eV}$ ， Z 是有关原子的原子序数。对一次电离的氦 He^+ ， $Z = 2$ ， $E_{\text{电离}} = 4 \times 13.6 = 54.4 \text{ eV}$ ，对二次电离的锂 Li^{++} ， $Z = 3$ ， $E_{\text{电离}} = 9 \times 13.6 = 122.4 \text{ eV}$

22-10 质量为 $40 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 的子弹，以 $1000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度飞行，它的德布罗意波长是多少？为什么子弹不通过衍射效应显示其波动性？

解：

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{40 \times 10^{-3} \times 10^3} = 1.66 \times 10^{-35} \text{ m}, \text{ 根据衍射理论, 衍射角宽度 } \theta \sim \frac{\lambda}{a}, a$$

为缝宽，子弹的德布罗意波长同缝宽或障碍物的线度相比极小，衍射效应无法观测，波动性不显示出来，主要表现为粒子性。

22-11 为使电子的德布罗意波长为 1 \AA ，需要多大的加速电压？

解：

$$\because \text{电子的动量 } p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

$$\therefore \text{电子的能量 } E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2$$

$$\text{依题意: } eU = E = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2$$

$$\therefore U = \frac{1}{2me} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2$$

$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.60 \times 10^{-19} \times 10^{-20}}$$

$$= 1.51 \times 10^2 \text{ V}$$

22-12 具有能量15eV的光子,被氢原子中处于第一玻尔轨道的电子所吸收而形成一光电子,问此光电子远离质子时的速度为多大?它的德布罗意波长是多少?

解:

形成光电子的电子已被电离,则有

$$h\nu = E_{\text{电离}} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - E_{\text{电离}}$$

$$= 15 - 13.6 = 1.4 \text{ eV}$$

光电子的动能为1.4eV,所以光电子的速度 $v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.4 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}}}$

$$v = 7.01 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

德布罗意波长为:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 7.01 \times 10^5} = 10.4 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$= 10.4 \text{ \AA}$$

22-13 一束带电粒子经206V的电势差加速后,测得其德布罗意波长为0.02Å,已知这带电粒子所带电量与电子电量相等,求这粒子的质量。

解:

$$\therefore \quad eU = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2$$

$$\therefore \quad m = \frac{1}{2eU} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 = \frac{\left(\frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.02 \times 10^{-10}} \right)^2}{2 \times 1.60 \times 10^{-19} \times 206}$$

$$= 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

22-14 计算动能分别为1keV, 1MeV和1GeV的电子的德布罗意波长

解:

根据 $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

由相对论:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$mc^2 = E_k + m_0c^2$$

$$\therefore \quad m = \frac{E_k + m_0c^2}{c^2}$$

$$\text{由 } \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_k + m_0 c^2 \quad \therefore \quad v = \frac{c \sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}}{E_k + m_0 c^2}$$

将 m , v 代入:

$$\begin{aligned} \therefore \quad \lambda &= \frac{h}{m v} = \frac{h}{\frac{E_k + m_0 c^2}{c^2} \cdot \frac{c \sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}}{E_k + m_0 c^2}} \\ &= \frac{hc}{\sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}} \end{aligned}$$

当 $E_k \ll m_0 c^2$ 时, 即 $E_k^2 \ll 2E_k m_0 c^2$, 上式中分母中根号下第一项可略去。

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2E_k m_0 c^2}} = \frac{h}{\sqrt{2E_k m_0}}$$

当 $E_k \gg m_0 c^2$ 即 $E_k^2 \gg 2E_k m_0 c^2$, 则上式分母中根号下第二项可略去。

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_k^2}} = \frac{hc}{E_k}$$

\therefore 电子的静能 $m_0 c^2 = 9.11 \times 10^{-31} \times (3.00 \times 10^8)^2 = 8.2 \times 10^{-15} \text{ J} = 0.5 \text{ MeV}$

(1) $E_k = 1 \text{ keV} \ll m_0 c^2$, 则

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2E_k m_0}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 10^3 \times 1.60 \times 10^{-19} \times 9.11 \times 10^{-31}}} \\ &= 0.39 \text{ \AA} \end{aligned}$$

(2) $E_k = 1 \text{ MeV} \approx m_0 c^2$, 则

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{\sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{\sqrt{(10^6 \times 1.60 \times 10^{-19})^2 + 2 \times 10^6 \times 1.60 \times 10^{-19} \times 9.11 \times 10^{-31} \times (3.00 \times 10^8)^2}} \\ &= 8.73 \times 10^{-13} \text{ m} = 8.73 \times 10^{-3} \text{ \AA} \end{aligned}$$

(3) $E_k = 1 \text{ GeV} \gg m_0 c^2$, 则

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{E_k} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{10^9 \times 1.60 \times 10^{-19}} = 1.24 \times 10^{-15} \text{ m} \\ &= 1.24 \times 10^{-5} \text{ \AA} \end{aligned}$$

22-15 光子与电子的波长都是 2.0 \AA , 它们的动量和总能量都相等否?

解:

$$\therefore \quad P = mv = \frac{h}{\lambda} \text{ 波长相同, 动量相同}$$

$$\therefore \quad P = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2.0 \times 10^{-10}} = 3.31 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{光子的能量} = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{2.0 \times 10^{-10}} = 9.95 \times 10^{-16} \text{ J}$$

$$= 6.22 \times 10^3 \text{ eV}$$

电子的动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ (不考虑相对论效应)

$$= \frac{P^2}{2m_e}$$

$$= \frac{(3.31 \times 10^{-24})^2}{2 \times 9.11 \times 10^{-31}} = 0.601 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$= 37.6 \text{ eV}$$

电子的静能 $E_0 = m_e c^2$

$$= 9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2$$

$$= 81.99 \times 10^{-15} \text{ J} = 0.51 \text{ MeV}$$

电子的总能量 $E = E_k + E_0$

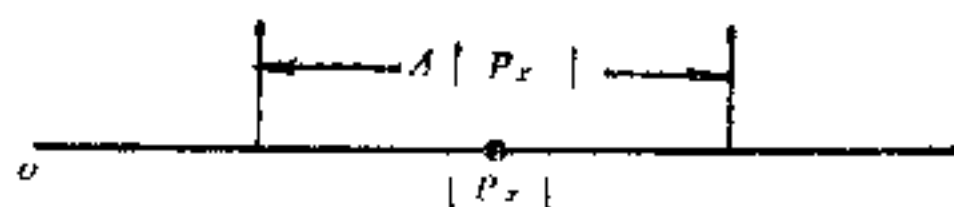
$$\approx 0.51 \text{ MeV}$$

∴ 光子和电子当相应的波长相同时, 动量相等, 总能不相等。

22-16 一个质量为 m 的粒子, 约束在长度为 L 的一维线段上, 试根据测不准关系估算这个粒子所能具有的最小能量的值。

由此, 试计算在直径 10^{-14} m 的核内质子和中子的最小动能。

解:



题 22-16 图

根据测不准关系只能估算动能的数量级。不考虑相对论效应。

由于粒子肯定在给定线段 L 的某个地方, 所以其位置的不确定量 Δx 不可能大于 L 。根据测不准关系 $\Delta x \Delta P_x \geq \frac{h}{4\pi}$ 。而最小能量值对应最小动量值 ($E_k = \frac{P_x^2}{2m}$)。取 Δx 最大值 L

即可算出 $\Delta P_x \geq \frac{h}{4\pi L}$ 的最小值, 若 P_x 的不确定量等于 $|P_x|$ 的不确定量 (即粒子定向) 且不确定量间隔对 $|P_x|$ 是对称的。

$$\text{则有: } |P_x| \geq \frac{1}{2} \Delta |P_x| \geq \frac{1}{2} \frac{h}{4\pi L} = \frac{h}{8\pi L}$$

所以 P_x 的最小值为 $\frac{h}{8\pi L}$

束缚动能最小值 $E_{k \min} = \frac{P_{x \min}^2}{2m} = \frac{h^2}{128\pi^2 m L^2}$ 。根据测不准关系, 束缚系统不可能有零能量,

在核内, 直径 $L = 10^{-14} \text{ m}$ 质子最小动能

$$\begin{aligned}
 E_{\text{min}} &= \frac{h^2}{128\pi^2 m L^2} \\
 &= \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{128 \times 3.14^2 \times 1.675 \times 10^{-27} \times (10^{-14})^2} \\
 &= 2.07 \times 10^{-15} \text{ J} = 0.013 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

22-17 如果一个电子处于原子某能态的时间为 10^{-8}s , 这个原子的这个能态的能量的最小不确定量是多少?

设电子从上述能态跃迁到基态, 对应的能量为 3.39eV , 试确定所辐射光子的波长及这波长的最小不确定量。

解:

由于能量和时间的测不准关系

$$\begin{aligned}
 \Delta E \cdot \Delta t &\geq \frac{h}{4\pi} \\
 \therefore \Delta E &\geq \frac{h}{4\pi \Delta t} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4 \times 3.14 \times 10^{-8}} \\
 &= 5.30 \times 10^{-27} \text{ J} \\
 &= 3.30 \times 10^{-8} \text{ eV}
 \end{aligned}$$

电子能态跃迁对应的波长:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{hc}{E_n - E_1} = \frac{hc}{\Delta E} \\
 &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{3.39 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 3.667 \times 10^{-7} \text{ m} = 3667 \text{ \AA}
 \end{aligned}$$

波长的最小不确定量

$$\begin{aligned}
 |\Delta \lambda| &= \left| -\frac{hc}{(E_n - E_1)^2} \Delta E_n \right| \\
 &= \left| -\lambda \frac{\Delta E_n}{E_n - E_1} \right| \\
 &= 3667 \times \frac{3.30 \times 10^{-8}}{3.39} \text{ \AA} \\
 &= 3.56 \times 10^{-5} \text{ \AA}
 \end{aligned}$$

22-18 实物粒子的德布罗意波与电磁波有什么不同? 解释描述实物粒子的波函数的物理意义。

解:

光子的德布罗意波就是电磁波, 实物粒子的德布罗意波与电磁波都是几率波, 不过电磁波明确是电磁场的电场强度与磁场强度在振动, 其空间某一点振动振幅平方表示光在该处强度。而实物粒子的德布罗意波并不知道什么在振动, 振动量并无明确的物理意义, 仅知某处该量振幅的平方同样代表粒子在该处出现的几率。即 $\psi^*_{(x,y,z)}, \psi_{(x,y,z)}, dx dy dz$ 表示粒子出现在 $x \rightarrow x+dx$ $y \rightarrow y+dy$ $z \rightarrow z+dz$ 体积元中的几率。即电磁波 E^2 有绝对意

又表示电磁波强度, 而 $|\psi|^2$ 只有相对意义。

22-19 求出能够占据一个 d 分壳层的最大电子数, 并写出这些电子的 m_l 和 m_s 值。

解:

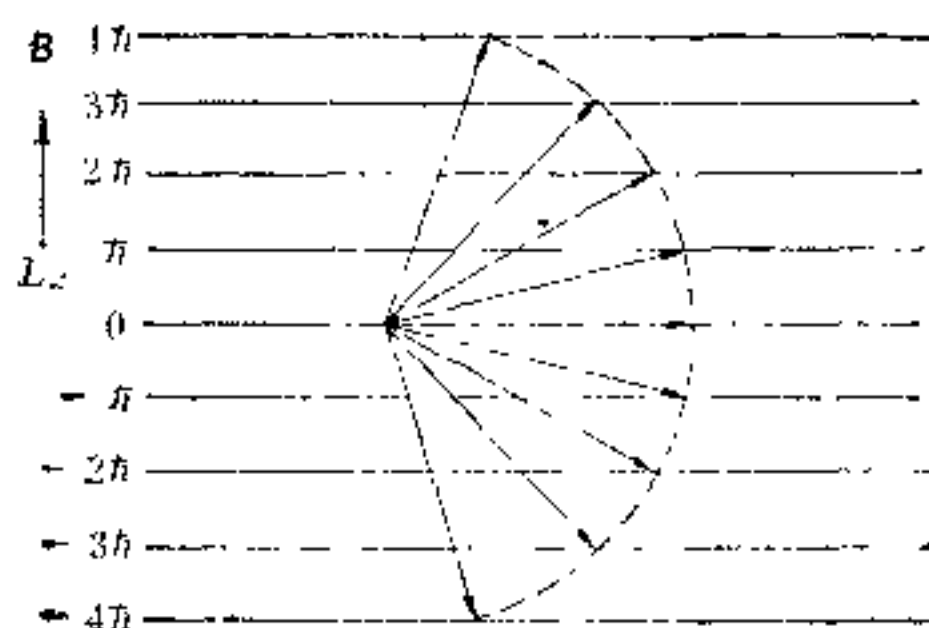
对于 d 分壳层 $l=2$, 一个分壳层的最大电子数: $2(2l+1)=2(2\times 2+1)=10$, 与之相应的10种 m_l 与 m_s 组合表示如下:

l	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
m_l	2	2	1	1	0	0	-1	-1	-2	-2
m_s	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2

22-20 试描绘: 原子中 $l=4$ 时, 电子动量矩 L 在磁场中空间量子化的示意图, 并写出 L 在磁场方向的分量 L_z 的各种可能的值。

解:

L_z 的可能值: $L_z = m_l \hbar$ m_l 取 l 和 $-l$ 之间所有可能值, 共 $(2l+1)=9$ 个即: $4\hbar$, $3\hbar$, $2\hbar$, $1\hbar$, 0 , $-1\hbar$, $-2\hbar$, $-3\hbar$, $-4\hbar$, L 在磁场中空间量子化的示意图如下:



题 22-20 图

$$l=4$$

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar, \quad \hbar = \sqrt{20} \hbar$$

22-21 试计算: 宽度为1Å的无限深势阱中, $n=1, 2, 3, 10, 100, 101$ 各能态电子的能量。

如果势阱宽度为1cm, 则又如何?

解:

一维无限深势阱能量公式

$$E_n = n^2 \left(\frac{h^2}{8ma^2} \right), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} n=1 \quad E_1 &= \frac{h^2}{8ma^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (10^{-10})^2} = 6.03 \times 10^{-18} \text{ J} \\ &= 37.7 \text{ eV} \end{aligned}$$

$$n=2 \quad E_2 = 2^2 E_1 = 4 \times 37.7 = 1.51 \times 10^2 \text{ eV}$$

$$n=3 \quad E_3 = 3^2 \cdot E_1 = 9 \times 37.7 = 339.3 \text{ eV} = 3.39 \times 10^2 \text{ eV}$$

$$\begin{aligned} n=10 & \quad E_{10} = 10^2 E_1 = 100 \times 37.7 = 3.77 \times 10^3 \text{ eV} \\ n=100 & \quad E_{100} = 100^2 E_1 = 10^4 \times 37.7 = 3.77 \times 10^5 \text{ eV} \\ n=101 & \quad E_{101} = 101^2 E_1 = 101^2 \times 37.7 = 3.85 \times 10^5 \text{ eV} \end{aligned}$$

如果势阱宽度为1cm

$$\begin{aligned} n=1 \quad E_1 &= \frac{h^2}{8ma^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (10^{-2})^2} = 0.603 \times 10^{-33} \text{ J} \\ &= 3.77 \times 10^{-15} \text{ eV} \end{aligned}$$

$$\therefore E_n = n^2 \cdot E_1 = n^2 (3.77 \times 10^{-15}) \text{ eV}$$

可见, 各能级差极小, 可视为能量连续变化。

22-22 在一维无限深方势阱中, 当粒子处于 ψ_1 和 ψ_2 时, 求发现粒子几率最大的位置。

解:

在一维无限深方势阱中, 粒子处在 $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ ($0 < x < a$) 状态中在 x 处测得粒子几率密度:

$$P = \psi_n^* \psi_n = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

求极值:

$$\frac{dP}{dx} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{2}{a} \cdot 2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \frac{n\pi}{a} \\ &= \frac{2n\pi}{a^2} \sin\frac{2n\pi}{a}x = 0 \end{aligned}$$

$$(1) \text{ 当 } n=1 \quad \frac{2\pi}{a}x = k\pi \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{几率极值位置 } x = \frac{ka}{2} \text{ 处}$$

而 $0 < x < a$ 只有 $k=1$ $x = \frac{a}{2}$ 为极值处。

$$\text{又 } \frac{d^2P}{dx^2} = \frac{4\pi^2}{a^3} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) = \frac{4\pi^2}{a^3} \cos\pi < 0$$

所以 $x = \frac{a}{2}$ 处几率有极大值。

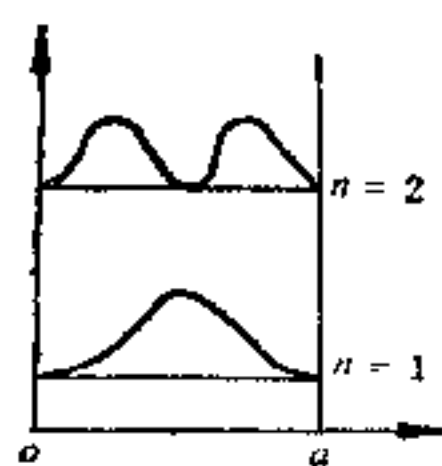
$$(2) \text{ 当 } n=2 \quad \frac{4\pi}{a}x = k\pi \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$x = \frac{ka}{4} \quad k=0, 1, 2, 3。$$

即 $x = \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3a}{4}$ 处几率有极值

又

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = -\frac{64\pi^2}{a^3} \cos\left(\frac{4\pi}{a}x\right)$$



题 22-22 图

$$= \begin{cases} < 0 & x = \frac{a}{4} \\ > 0 & x = \frac{a}{2} \\ < 0 & x = \frac{3}{4}a \end{cases}$$

故在 $x = \frac{a}{4}, \frac{3}{4}a$ 处几率有极大值。

22-23 当一电子束通过 $0.8 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$ 的匀强磁场时, 自旋取向与此磁场“顺向”和“反向”的两种电子的能量差是多少?

解:

一电子在磁场中势能

$$E_L = -\mu_s \cdot B$$

若定 B 为沿 z 方向, 则 $E_B = -\mu_{sz}B$

由于电子自旋磁矩

$$\mu_s = -\frac{e}{m} P_s$$

$$= -\frac{e}{m} (m_s \hbar)$$

$$\therefore E_L = -\left(-\frac{e\hbar}{m}\right) m_s B$$

$$\Delta E_n = B \frac{e\hbar}{m} \Delta m_s = 0.8 \times \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 9.11 \times 10^{-31}} \times \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 1.483 \times 10^{-23} \text{ J} = 9.26 \times 10^{-5} \text{ eV}$$

22-24 在激光工作物质中, 如果只用基态和某一激发态能否实现粒子数反转? 申述你的理由。

解:

不能。因为在平衡时, 原子系统的能级分布是遵循玻尔兹曼分布定律的, $N \propto e^{-\frac{e}{kT}}$ 。低能级粒子数远比高能级的多。而用任何方法使原子系统受激跃迁, 总同时存在二种过程, 即从低能态跃迁到高能态, 以及相反的过程, 且有相等的几率。再加上处在高能级的原子向低能级的自发跃迁, 所以高能态粒子数增多时, 跃迁回低能态的粒子必相应增多。无法在两个态中实现粒子数反转。

22-25 某 He-Ne 激光器所发 6328 \AA 的激光的谱线宽度 $\Delta\lambda < 10^{-7} \text{ \AA}$, 试计算其相干长

度。

解:

相干长度 $\delta = c\Delta t$

由测不准关系 $\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{h}{4\pi}$, $\Delta t \geq \frac{h}{4\pi\Delta E} = \frac{1}{4\pi\Delta\nu}$

又 $\because \nu = \frac{c}{\lambda}$, $\Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$

$$\begin{aligned}\therefore \delta = c\Delta t &= \left| \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} \right| \\ &= \frac{6328^2}{4 \times 3.14 \times 10^{-7}} = 3.19 \times 10^4 \text{ Å} = 3.19 \text{ km}\end{aligned}$$

22-26 试说明: 在外腔式He-Ne激光器中, 使用布儒斯特窗的装置后, 为何可获得线偏振的激光?

解:



题 22-26 图

激光在两反射镜组成的谐振腔内振荡, 中间经过两个布儒斯特窗, 每经过一次布儒斯特窗, 垂直入射面的偏振成分将有部分反射而逸出腔外, 而平行于入射面的偏振成分则全部透过布儒斯特窗而不发生反射, 经球面镜反射回来的光通过窗口时, 垂直入射面的偏振成分再次被反射, 因此, 这部分偏振光通过窗口就会有强烈的损耗, 而在入射面内的偏振光几乎无损耗地通过窗口。在反复振荡过程中, 只有平行入射面的偏振成分得到加强, 从而获得线偏振的激光。

五、自我检查题:

1. 已知氢光谱的里德伯恒量 $R = 1.096776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, 则巴尔末系第一条光谱线 H_α ($n=2$, $m=3$) 的波长 $\lambda =$ _____, 基态氢原子要吸收 $\lambda \leq$ _____ 的紫外线才能电离。

2. 玻尔氢原子理论三条基本假设是

- (1) _____。
- (2) _____。
- (3) _____。

玻尔理论实际上是经典理论加上_____条件, 它不是自洽的彻底的理论, 因此, 不能解决较复杂的原子结构问题。

3. 实物粒子的波粒二象性认为质量 m , 动量 P , 能量为 E 的微粒子的德布罗意波波长 $\lambda =$ _____ 频率 $\nu =$ _____

电子在电压 $U = 49\text{V}$ 的电场中加速, 德布罗意波波长 $\lambda =$ _____。

质量为 $m = 10^{-2}\text{kg}$, $v = 1000\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 子弹的德布罗意波长 $\lambda =$ _____, 质量为 $m = 10^3\text{kg}$, $v = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 汽车的德布罗意波长 $\lambda =$ _____。从上面例子我们看到对宏观物体, 它的波动性实际上可以忽略不计。

4. 微观粒子具有波粒二象性, 我们引入波函数 $\psi(x, y, z, t)$ 来描述微观粒子状态, 它的物理意义是粒子处于 dV 中几率为 _____, 对于 ψ 的要求是 _____, _____ 及满足归一化条件。

5. 测不准关系式 $\Delta x \cdot \Delta p_x$ _____; 它的物理意义是 _____。

限制在氢原子中的电子, 其位置的不确定值应小于原子半径 $\Delta x < 0.5 \times 10^{-10}\text{m}$, 则它的速度不确定值 $\Delta v_x \geq$ _____, 和经典理论算出氢原子处于基态电子速率 $v \sim 2 \times 10^6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 比较, 可知经典理论 _____ 适用于原子中电子运动, 而轨道的概念在此处亦 _____。

对于阴极射线 $\Delta x \approx 10^{-4}\text{m}$, $\Delta v \geq$ _____, 与在 19V 电场中加速的电子 $v =$ _____ 相比可知 _____ 用经典力学处理阴极射线中电子的运动。

6. $m = 10^{-2}\text{kg}$, $v_x = 1000\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 如 $\Delta v_x \approx 10^{-3}v_x = 1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 其位置不确定值 $\Delta x \geq$ _____; $m = 10^3\text{kg}$, $v = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的汽车 $\Delta v_x = 10^{-2}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 其位置不确定值 $\Delta x \geq$ _____; 由此可见, 经典力学可用以处理宏观物体的运动, 量子效应可忽略不计。

7. 对于主量子数为 $n = 3$, 可能存在的 l, m_l 有:

$l =$ _____, $m_l =$ _____;

$l =$ _____, $m_l =$ _____;

$l =$ _____, $m_l =$ _____;

$m_s =$ _____, 对应于 $n = 3$ 有 _____ 状态。

8. 原子中电子的不同状态由 n, l, m_l, m_s 决定, 第 n 壳层中最多能容纳电子数为 _____。原子中电子在各壳层中排列, 遵守 _____ 原理及 _____ 原理。

9. 激光器的发光是 _____ 辐射占优势, 要满足此条件, 必须实现激光器的工作物质处于 _____ 超过 _____, 叫作 _____。

10. 激光的特性是 (1) _____, (2) _____, (3) _____。

第二十三章 固体的能带结构

科学有两个生命。第一个是由观念、概念、定律与公式构造起来的理论体系。另一个是由第一生命转化为技术中的工具，仪器与机器。量子力学带来的微观世界的观念与概念，已经促成了许多不寻常的技术成就。前章中所讲的激光技术就是一例。本章中要讲的晶体能带理论又是一例。这个理论今天已经成为千千万万电子技术研究人员与工程师们的引航星，它使电子技术等近代科技产生一次革命。正如蒸汽机武装了几乎所有的工业部门，发生了第一次产业革命那样，现代包括用半导体和集成电路制作的那些体积小、效率高的电子技术装置，正在日益深入和广泛地武装着各个技术部门及工业领域，实现了又一次的技术革命。为人们掌握了量子规律，正在被利用来改变这个世界的面貌。

一、基本要求

(1) 掌握描述固体中电子态的能带理论。解释固体的导电机理。了解空穴导电的概念。

(2) 了解半导体中掺杂原子在控制导电性能中的作用。

(3) 了解 $p-n$ 结阻挡层形成机理，解释 $p-n$ 结伏安特性曲线。

二、基本概念和规律

1. 能带概念

晶体是由许多原子离子等微观质点有序排列的形态。任何一个独立原子，都有很多分立能级。这个原子的电子，能够占据这些能级。通常只占据尽可能低的能级〔见图23-1(a)〕。电子也有可能被激发到较高的能级上。通常只有能量最高的电子即价电子，会参与这些激发。当原子集聚时，先考虑两个原子组合。若它们无相互作用，则每个孤立原子的能级值相同。对体系而言，有相同的能级结构。但只是给定能量的能级数目加倍而已。〔见图23-1(b)〕。然而，由于有相互作用，该体系原先的一个能级分裂成二个能级。〔见图23-1(c)〕。类似的，如果把更多的原子结合在一起，每一个能级就会分裂成更多的能级。总之，每加上一个原子就多分裂出一个能级〔见图23-1(d)〕。

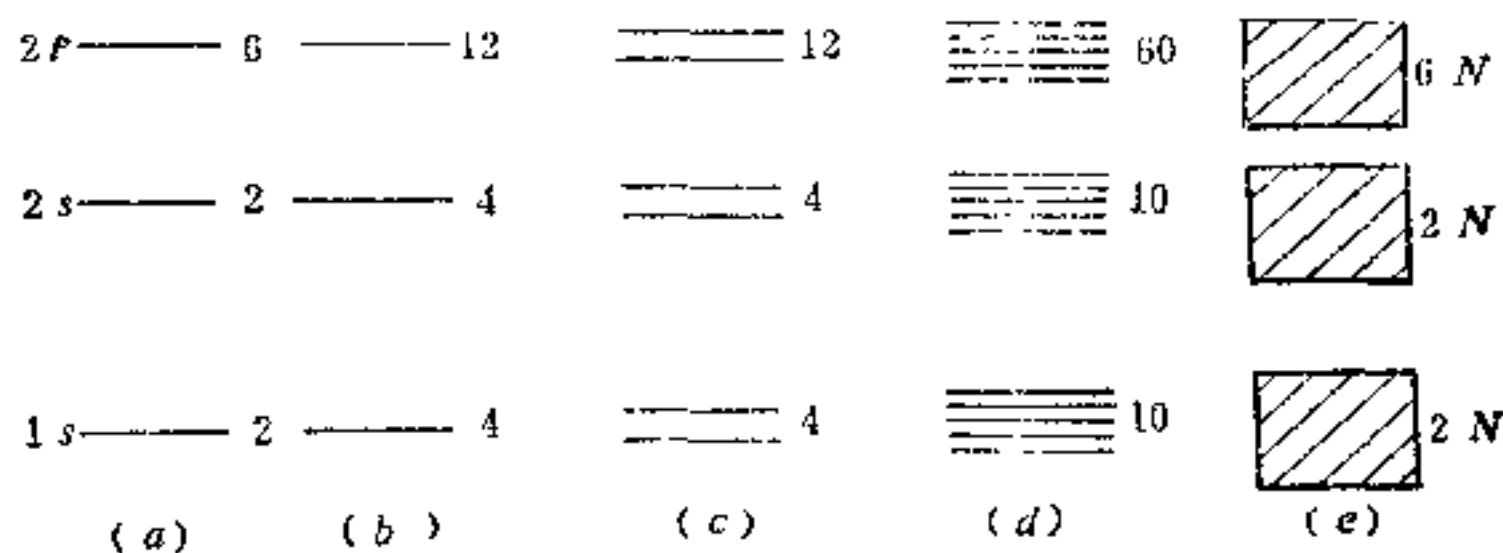


图 23-1

(a) 一个孤立原子；(b) 两个无相互作用的原子；(c) 两个有相互作用的原子；(d) 5个有相互作用的原子；(e) N 个有相互作用的原子

由于固体每立方厘米中原子数大约是 10^{24} 的数量级，所以原来孤立原子的每一个能级能分裂成大量的能级。由于这些能级值大致接近，所以大量有相互作用的原子聚集在一起，其净效应就是形成几乎连续的能带。各能带之间由没有电子态存在的能隙分隔开来〔见图23-1(e)〕。

2. 对晶体导电性能差异的解释

晶体中电子占据这些能带的方式服从泡利不相容原理和最小能量原理。电子尽可能填满能量较低的能带。被填的能量最高的能带容纳价电子，称之为价带。被电子填满的能带叫满带。没有电子占据的能带叫空带。在外场作用下，空带因没有导电的电子，满带因不能改变电子态，不能同电场交换能量，从而不能参与晶体的电子导电过程。只有未填满能带中的电子才能参与晶体的导电过程。并把它叫作导带。

对金属晶体，价带没有被价电子填满，良导体的价带只填有一半价电子〔见图23-2(a)〕。或者价带被电子填满；但与相邻空带相重叠〔见图23-2(b)〕。在这种情况下，很容易把价电子提升到较高能级上。所以这些电子很容易从电场取得能量而参与导电过程。

绝缘晶体与半导体都有一个填满的价带。我们把与价带邻近的空带叫作导带。因为把价带中的电子激发到该空带中可参与电子导电过程。导带与价带之间的能隙叫禁带，其能隙宽叫禁带宽度，用 E_g 表示。价带的最高能量用 E_v 表示，导带的最低能量用 E_c 表示。

绝缘体与半导体的差别是由禁带宽度的大小决定的。绝缘体的禁带较宽〔见图23-2(c)〕，在通常温度下，价电子难于从价带激发到导带中。而半导体禁带较窄，在常温下，电子很易由价带热激发到导带中形成电子空穴对，参与导电过程。价带中留下的一些没有

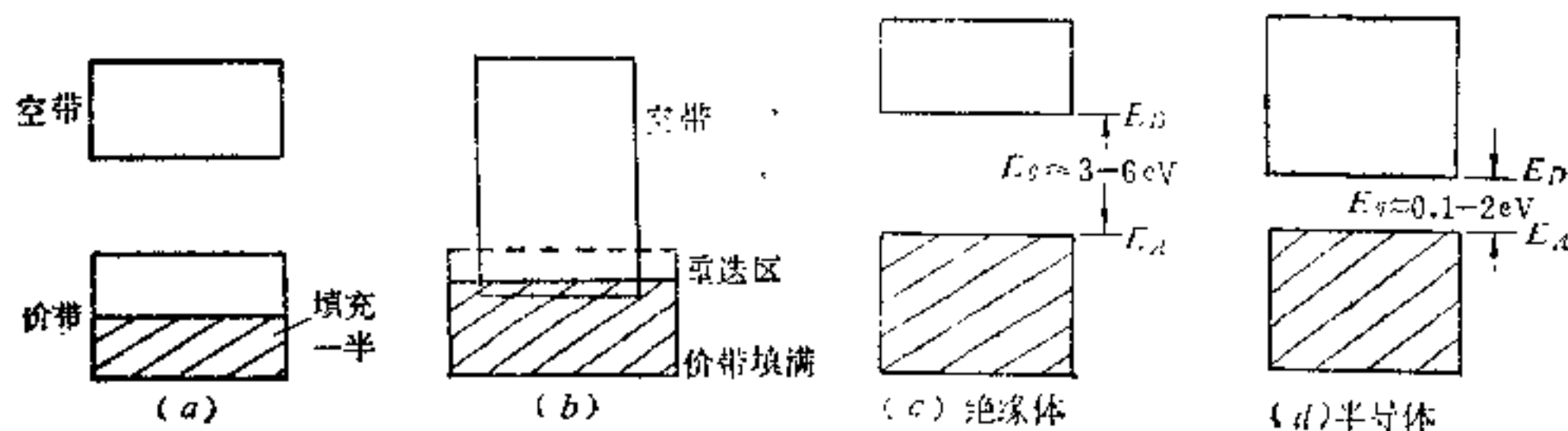


图 23-2

被电子占据的状态，叫作空穴。在外场中价带中的其它电子可进入这些空穴。电子占据空穴而留下新的空穴的过程相当于有一些带正电的载流子参与了导电过程。

由上可知，晶体中有大量的电子，从经典物理观点看，这些电子在外电场中，无例外地可与外场交换能量，参与导电过程，使所有晶体都是良导体。从量子力学观点看，电子的能量是量子化的，变化是不连续的，与外场交换能量是受量子规律控制的。参与晶体导电的只是少数电子，即未被填满的价带中电子及满带中的空穴。这就解开了晶体之所以有金属、绝缘体、半导体，其导电率有如此悬殊差别之谜。这是经典物理所无法理解的。

3. 掺杂半导体

对金属来讲，杂质原子混入晶格后会使它畸变。对价带中携带电流的电子波发生散射，导致导电率下降。

对半导体来讲，杂质原子中的电子在晶格中有自己的能级。这些能级中对影响导电性

最重要的是处在禁带之中的那些能级，叫作局部杂质能级。处在这些能级的电子是不能参与导电的，而束缚在杂质原子周围。但这些局部杂质能级与价带 E_v 或导带 E_c 的能量差，远小于禁带宽度。使电子在热激发下可以跃迁到导带中参与电子导电。价带电子亦可跃迁到局部杂质能级上，参与价带中空穴导电。前者称为施主杂质。可形成电子导电性能的N型半导体。后者叫受主杂质。可形成空穴导电性能的P型半导体。而没有杂质掺杂的纯半导体，是电子—空穴对参与导电性能的叫本征半导体。

杂质局部能级与 E_c 、 E_v 的能量差及杂质原子的浓度，控制了杂质半导体的导电性能。

三、解题示范略

四、习题与解答：

23-1 设有一块固体。你怎样判定它是晶体还是非晶体，试提出几种简易可行的方法。

答：

利用晶体与非晶体宏观性质与结构上的区别加以判断。如：

①击碎固体。若沿确定平面（即解理面）裂开的是晶体。裂开后的小晶体保持原有的几何外形。

②加热固体。若有确定熔点的是晶体。非晶体仅在一定温度范围内逐渐软化。

③利用固体作光折射实验。若转动固体，处在不同方位，有不同的折射率的是晶体。非晶体折射率是各向同性的（晶体的力学电学热学性质一般是各向异性的）。

23-2 试计算在KCl晶体中 K^+ 和 Cl^- 之间的距离 r_0 ，已知KCl晶体的密度为 $1.984 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ，KCl的分子量为74.55，并假定每个离子各占有边长为 r_0 的立方体积（KCl晶体的结构是与NaCl晶体相类似的立方体）。

解：

$$1 \text{ 原子质量单位} = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{KCl 晶体分子数密度 } n = \frac{1.984 \times 10^3}{74.55 \times 1.661 \times 10^{-27}} = 1.6 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

一个KCl分子所占据的体积为

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{1.6 \times 10^{28}} \text{ m}^3 = 6.25 \times 10^{-29} \text{ m}^3$$

一个分子由一个 K^+ 与一个 Cl^- 离子组成（KCl晶体是面心立方型），每个离子所占据的体积按题意是每边长 r_0 的立方体。一个分子占据空间体积

$$2r_0^3 = 6.25 \times 10^{-29} \text{ m}^3$$

$$r_0 = \left(\frac{6.25}{2} \times 10^{-29} \right)^{1/3} = (31.25)^{1/3} \times 10^{-10} \text{ m} = 3.15 \text{ \AA}$$

23-3 硅与金刚石的能带结构相似，只是禁带宽度不同。根据它们的禁带宽度，试求它们能吸收的辐射的最大波长各是多少（已知金刚石的禁带宽度 5.33 eV ，硅的禁带宽度 1.14 eV ）。

解：

$$\Delta E = E_g = h\nu$$

硅: $\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.14 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 1.09 \times 10^{-6} \text{ m} = 10900 \text{ \AA}$

金刚石: $\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{5.33 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 2.33 \times 10^{-7} \text{ m} = 2330 \text{ \AA}$

23-4 怎样从晶体的能带结构图来区分绝缘体、半导体和导体?

答:

导体同半导体、绝缘体的差别在于: 导体存在未填满电子的能带 (或价带未填满, 或价带虽填满, 但与相邻空带相接或部分重叠, 或价带未填满又与其它空带重叠)。半导体和绝缘体没有未填满的能带。

晶体的导电性来源于未填满能带的存在。满带 (因在外场作用下, 不改变电子状态) 与空带 (因在外场作用下, 并没有参与导电的粒子) 都不参与导电。

半导体与绝缘体的差别在于: 前者禁带宽, 易把价带中电子激发到空带中, 使其具有导电性能。后者禁带宽, 一般难以把满带中电子激发到空带中, 所以不导电, 或很少导电。

23-5 金属的电阻温度系数是正值, 而半导体的电阻温度系数是负值, 试说明其原因。

答:

电阻温度系数 $\alpha = \frac{d\rho}{dt}$ 。 ρ 是电阻率, t 是温度。通常, 升高温度, 金属晶格的热激发增强, 电子受到晶格散射 (或叫与声子碰撞) 的几率增加。导致电阻率增大。故金属电阻温度系数 $\alpha > 0$ 。

对半导体, 升高温度, 电子由价带向空带激发的几率增大 (几率 $p \sim e^{-\frac{E_g}{kT}}$), 从而增加了参与导电的电子-空穴对的数目, 导致电阻率的下降。故 $\alpha < 0$ 。

23-6 如果硅用铝、磷掺杂, 而锗用铟、锑掺杂, 试问: 各获得什么类型的半导体?

答:

半导体掺杂, 目的是在禁带中形成杂质局部能级。硅用磷掺杂。硅禁带宽 $E_g = 1.14 \text{ eV}$, 磷杂质局部能级 $\Delta E_D = 0.045 \text{ eV}$ 靠近空带, 杂质原子通过热激发, 可向空带提供参与导电的电子。故磷为施主型杂质。掺磷的硅是 N 型半导体。

硅用铝掺杂。铝杂质局部能级 $\Delta E_A = 0.057 \text{ eV}$ 靠近满带。通过热激发, 满带中电子可以激发到杂质原子上。向满带提供参与导电的空穴。故铝为受主型杂质。掺铝的硅是 P 型半导体。

锗用铟掺杂。锗 $E_g = 0.67 \text{ eV}$, 铟杂质局部能级 $\Delta E_I = 0.0112 \text{ eV}$ 靠近满带。通过热激发, 满带中电子可激发到杂质原子上。向满带提供参与导电的空穴。故铟为受主型杂质。掺铟的锗是 P 型半导体。

锑杂质局部能级 $\Delta E_D = 0.0097 \text{ eV}$, 靠近空带, 是施主型杂质。掺锑的锗是 N 型半导体。

23-7 本征半导体与杂质半导体, 在导电性上有怎样的区别?

答:

本征半导体通过热激发, 形成电子—空穴对, 有数量相同的两种载流子参与导电。而且形成电子—空穴对, 激发能量需大于禁带宽度 E_g , 故只能在较高温度下才具有导电性。电导率对温度敏感。

杂质半导体, 由杂质原子向空带(或满带)提供电子(或空穴), 所以参与导电的主要是一种载流子。而且杂质原子局部能级靠近空带(N型)或满带(P型), 故激发所需能量较小, 仅在 10^{-4} eV数量级。在一般温度下, 就具有导电性。电导率对杂质浓度敏感。

23-8 比较 $p-n$ 结中的接触电势差与金属之间的接触电势差, 并说明它们有何相似之处, 有何不同之处。

答:

$p-n$ 结中与金属之间的电势差, 其来源相同, 都来源于参与导电的载流子在两边密度不均匀所引起的扩散现象。其差别是: 对金属而言, 参与导电的只是电子。而在金属表

面的电子密度 $n \sim n_0 e^{-\frac{A}{kT}}$ 。 n_0 为金属内部的密度, A 为逸出功。所以两种金属接触电势差, 决定于两种金属内电子密度、逸出功的差别及温度。对 $p-n$ 结而言, 因 p 区参与导电的载流子只有空穴, n 区只有电子。各自要向对方区域扩散, 迫使电荷重新分布, 使 p 区带负电, n 区带正电, 形成接触电势差。同金属不一样的是参与扩散的是两种载流子, 其粒子密度是显著的不均匀。

23-9 $p-n$ 结中阻挡层是怎样形成的? 它对正向电压和反向电压各有什么作用?

答:

$p-n$ 结中阻挡层, 是两种过程平衡的结果。一种是: 扩散过程。

p 区的空穴向 n 区扩散, n 区的电子(通常称多数载流子)向 p 区扩散。形成扩散电流, 使 p 区带负电, n 区带正电。扩散的结果形成由 n 区指向 p 区的结电场。结电场的存在, 迫使扩散到 n 区的空穴(通常称少数载流子)返回 p 区, 扩散到 p 区的电子返回 n 区。形成与扩散电流反向的漂移电流。(这是第二种过程)当两种电流数值相同, 两种过程(扩散与漂移)处于动力学平衡状态时形成稳定的 $p-n$ 结阻挡层。

所谓阻挡层, 是指 $p-n$ 结的电场区, 用以抑制与抵消扩散过程的作用。

当加正向电压(正极接 p 区), 外加电场抵消阻挡层电场, 破坏动力学平衡, 多数载流子通过扩散易于通过阻挡层, 形成正向宏观电流。外电压增加, 电流亦随之增大。

当加反向电压(正极接 n 区), 外电场增强阻挡层电场, 使扩散到 n 区的空穴返回 p 区, 扩散到 p 区的电子返回 n 区, 由这种漂移过程形成反向宏观电流。因扩散到对方区域的(少数载流子)电子与空穴很少, 所以这个电流也极小, 且并不随反向电压增加, 发生显著变化。 $p-n$ 结具有整流性质。

23-10 n 型半导体Si中含有杂质磷(P)原子, 在计算施主能级时, 作为初步近似, 可看作一个电子围绕离子实 P^+ 运动, 组成一个类氢原子, 浸在无限大的Si电介质中, 已知Si的相对介电常数 $\epsilon_r = 11.5$, 求这半导体的施主能级 E_D 。

解:

类氢离子的电子能级公式:

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{-me^4}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2(2\hbar^2)} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{-1}{\epsilon_r^2} \cdot \frac{13.6}{n^2} (\text{eV}) \\ &= -\frac{13.6}{11.5^2} \cdot \frac{1}{n^2} \text{ eV} \\ &= -\frac{0.103}{n^2} \text{ eV} \end{aligned}$$

处在空带的电子, 可看作自由电子, 即 $E_\infty = 0$ 。所以类氢原子基态能级, $n=1$, $E_1 = -0.103\text{eV}$, 即 $\Delta E_D = -0.103\text{eV}$ 。

第二十四章 原子核和基本粒子简介

本章探讨原子核的性质及其结构,并涉及与核结构相关联的基本粒子问题。这是当前物理学的前沿阵地。

有关内容至今尚未有定论,这里提到的仅是当前公认为最可信部分。

本章在教科书上指定为学生自学与课外讲座内容,不占学时数。因此有关内容及其深度选择,应由讲课教师确定,这里仅供参考。

一、基本要求

- (1) 了解原子核的结构及其稳定性。
- (2) 了解不稳定核的放射性衰变规律及三种放射线: α 、 β 、 γ 射线的衰变过程。
- (3) 了解两种核模型:壳层结构与液滴模型。

二、基本概念和规律

1. 核子

一切原子核都是由两类粒子组成,即带正电荷的质子和中性的中子。这两类粒子通称为核子。

其主要性质如表24-1。

表 24-1

核 子	质 子	中 子
电 荷	$+1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$	0
静 质 质 量	$1.67265 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 938.280 MeV 1.007277 u	$1.67495 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 939.573 MeV 1.008665 u
自 旋	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
磁 矩	$+2.7928 \mu_p$	$-1.9132 \mu_p$

注 μ_p 为核磁子。 $\mu_p = \frac{eh}{2m_p} = 5.05 \times 10^{-27} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ 。磁矩正负号指磁矩矢量与自旋角动量矢量同向或反向。

核标记法:

每个原子核用三个数标记: ${}_Z^AX$ 。X是给定核的化学元素符号, Z是原子序数, 等于核内质子数。A等于总核子数的质量数。 $A = N + Z$, N等于核内中子数。

如: 钠原子核标记为 ${}_{11}^{23}\text{Na}$, 有11个质子, 23个核子有 $23 - 11 = 12$ 个中子。

2. 核的结合能、核力与介子

(1) 核的结合能。一个核的静止质量小于它的各组成核子的静质量之和, 这种质量

的减少，通常叫质量亏损。即把核子结合成核时的能量减少。核的结合能等于各组成核子的静能与核静能之差：

$$\Delta E = (Zm_p + Nm_n - M)c^2$$

每个核子的平均结合能 $\frac{\Delta E}{A}$ ，叫作比结合能，由它描写核的稳定性。比结合能愈大，核愈稳定。分子、原子、核子的结合能如表24-2。

表 24-2

	分子之间	原子之间	核子之间
比结合能（数量级）	10^{-10}eV	$10\sim 10^4\text{eV}$	10^6eV
与热运动粒子平均能量 kT 相当的温度	室温	几百万度	几百亿度

表 24-3

	静止质量 (MeV)	粒子平均寿命(s)	电荷数	自旋	奇异性
π^+	139.6	2.6×10^{-8}	+1	0	0
π^0	135.0	0.8×10^{-16}	0	0	0
π^-	139.6	2.6×10^{-8}	-1	0	0

可见，核有极大的稳定性，用化学方法，高压与高温，强电场与强磁场，对核都无影响，都不能分裂核。

（2）核力与介子。使核子结合在一起的力叫核力。核的稳定结构，靠核力维持，核力不仅需克服质子之间库仑斥力，还以巨大的结合能把核子紧箍在一起。

核力是核子间吸引力，显示为短程强引力。各核子之间小于1费米（即 10^{-15} 米），有极强的吸引力。大于几费米，核力迅速降为零。且与核子电荷无关。即质子之间，中子之间，质子与中子之间核力强度近似相同。

但核引力并不能把核内各核子融合成一体，在核子距离远小于1费米时，核子间力的性质由吸引变成排斥，通常叫存在排斥的核实。即存在不允许核子彼此相互渗透的斥力。核力是交换力，量子规律起支配作用。粒子之间作用力由场传递的。由量子论可知，场是由场量子组成的。而粒子间相互作用是通过交换场量子实现的。

带电粒子之间电磁力是通过交换“光子”来实现的。按汤川理论，核子间核力是通过交换“ π 介子”来实现的。 π 介子有三种，其性质如表24-3。

核力实际上是不同于以往发现的电磁相互作用，引力相互作用的新的相互作用力。叫作强相互作用。目前连同以后要讲的弱相互作用，自然界中共发现四种相互作用。

若考虑两个质子相距1费米，自然界存在的四种相互作用力的强度在数量级上的比例：

强力	电磁力	弱力	引力
0.2	7×10^{-3}	4×10^{-7}	6×10^{-29}

但核力的具体规律至今尚未弄清。目前正在“夸克理论”中探索。认为作用于夸克之间超
强颜色力才是强核力的本源。但有待实验的检验。

3. 放射能

(1) 放射性。某些物质能放出看不见的放射线, 使照相底板感光和引起其它效应。
能放出这种射线的物质叫放射性物质。放射现象起源于原子核。

放射线共有三种类型: α 射线 (粒子是氦核), β 射线 (粒子是电子并含有中微子), γ 射线 (是高能光子)。

(2) 核衰变。量子规律支配核放射过程。原子核的能量是量子化的, 具有自己的一
组能级。由于核力比电子在原子内受的力大几百万倍, 核内能级差远比原子内电子能级差
大。

原子核由激发态发射高能光子跃迁到基态, 或者经过一些较低能态而达到基态, 原子
核自发的发射其它粒子而达到低能组态, 统称为核衰变。

放射性是在核衰变的过程中发生的。在典型的放射性衰变过程中, 一个原来的核, 叫
母核。发射一个粒子而衰变为另一个核, 叫子核。相当于子核出世, 母核死亡。子核可以
是处于较低能态的同一个核, 如 γ 衰变的情况。也可以是全新的核, 如 α 、 β 衰变的情
况。

(3) 放射性衰变律。无论发射什么类型的粒子, 所有原子核衰变过程, 都由量子
规律控制的, 遵从相同的放射衰变律。若有 N_0 个不稳定母核, 经过 t 时间后, 剩余母核
数:

$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$ [产生的子核数 $N_f = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$ 或一个母核经 t 时间后衰变几率 $\frac{N_f}{N_0} =$
 $1 - e^{-\lambda t}$]。其中常数 λ 称为衰变常数, 对不同核结构及不同衰变过程有不同的值。

量子规律决定了它是一种统计规律。 N_t 仅是残存母核的期望数, 但当 $N_0 \rightarrow \infty$, 实际
残存数和期望数之差与 N_0 相比总可以小到忽略不计 (统计规律 + 极大数量 \rightarrow 确知)。

量度一个样品的衰变速率有以下三个量:

半衰期 $T_{1/2}$: 一个给定放射性样品在 $T_{1/2}$ 时间内母核被衰变一半。即

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

核的平均寿命: 按定义, 有 N_0 个母核, 在 $t \rightarrow t + dt$ 时间间隔内衰变的母核数 dN , 则
平均寿命:

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{\int_0^\infty t dN}{N_0} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t (N_0) (-\lambda) e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty t d(e^{-\lambda t}) \\ &= \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \end{aligned}$$

放射性强度 I ：定义为样品放射性衰变的速率值。

$$I = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N$$

单位为居里，1居里 = 3.700×10^{10} 次衰变/秒

(4) 三种放射线：

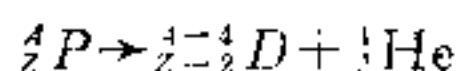
γ 衰变：处在激发态的核跃迁到较低能态过程中发射的高能光子，叫 γ 射线，光子频率由量子条件决定。

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}$$

γ 射线中光子能量范围 $10^4 \sim 10^6$ eV，衰变过程可用符号表示： $(Z^A)^* \rightarrow Z^A + \gamma$ ，其中 $(Z)^*$ 为激发态核， Z^A 为基态核。大多数 γ 衰变半衰变期 $T_{1/2} \sim 10^{-11}$ 秒，无法观测，有的激发态核 $T_{1/2}$ 较长，可观测。该激发核叫同质异能素核，该激发态叫同质异能态。

α 衰变：母核损失两个质子与两个中子，子核 D 和母核 P 是两种不同的化学元素。

应用电荷和核子数守恒原理， α 衰变过程用符号表示如下：



应用能量守恒原理，在母核静止惯性系中观测

$$M_P C^2 = (M_D + M_\alpha) C^2 + K_D + K_\alpha$$

K_D ， K_α 分别是子核与 α 粒子动能， M_P ， M_D ， M_α 分别是母核，子核， α 粒子静止质量。

$$Q = (M_P - M_D - M_\alpha) C^2 = K_D + K_\alpha$$

其中 Q 是衰变能，是反应中释放的总能量。

β 衰变：是通过粒子间的弱相互作用实现的，这是一种新的宇宙力。它同引力一样是粒子间普遍存在的相互作用。它是一种短程力，它比电力的强度弱，是通过交换三种场量子 W^\pm ， Z^0 (即中间玻色子) 实现的，弱力是宇宙的炼金术士，其主要作用是改变基本粒子，太阳的燃烧及化学元素的形成，是在弱力参与下才能发生的。它可把宇宙中主要的原始材料——构成的氢核的质子变成中子，才使氢燃烧 (核聚变) 后生成氦核。它又可把原子核内中子变回质子，以增加核电荷而形成的新化学元素。

关于弱作用规律在统一弱力与电力的“规范理论”中已得到阐明。

4. 核模型

目前还没有一种能解释所有观察到的核性质的基本理论。人们提出各种各样的模型，每一种只能成功的解释某些核性质。

(1) 液滴模型。根据原子核内核子密度大体上一定的实验事实。可把核看成不可压缩的液体。在一滴液体中，密度是常数，液滴大小与液滴中粒子数 (或分子数) 成正比，液滴汽化热 (即结合能) 与液滴的质量 (或构成液滴的粒子数) 成正比。原子核有与此相似的性质。

对于球形核，核物质密度：

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \text{常数，则有核半径 } R \sim A^{1/3}。$$

按此模型，一个核子受周围核子的核力都是相同的，核力结合能应与核子数成正比；

$$E_V = -C_V A$$

式中 E_V 叫体积能, C_V 为比例系数。

表面核子与体内核子相比只受约一半的力, 故表面结合能大小与表面积成正比地减少。相当于液体表面张力的表面能。

$$\text{表面积} \quad S = 4\pi R^2 \sim A^{2/3}$$

表面能 $E_S = C_S A^{2/3}$ (C_S 为比例系数)。

核子中, 质子之间库仑排斥势能使结合能减少。对电荷均匀分布在半径为 R 的球体内的电场能量为

$$E = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

今核内电荷 $Q = Ze$, 则总电场能量为 $\frac{3}{20} \frac{Z^2 e^2}{\pi\epsilon_0 R}$ 。每个质子固有电场能量为 $\frac{3}{20}$

$\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 R}$ 则库仑排斥势能应是总的电场能量中减去 Z 个质子的固有电场能量

$$\frac{3}{20} \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 R} (Z^2 - Z)$$

即 $E_C = C_C Z(Z-1) A^{-1/3}$ 。

核力的独特性质是饱和, 核内质子与中子数目越接近, 核愈稳定, 能量愈低, 中子数与质子数之差 $N-Z=0$ (A 为偶数的偶数核), $N-Z=1$ (A 为奇数的奇数核), 能量为极小。因此, 可设想有大体与 $(N-Z)^2$ 成正比的能量。

由实验可知: 此能量与 A 成反比减少。

$$E_C = C_C \frac{(N-Z)^2}{A}$$

总核结合能表达式, 应是上述四种能量之和

$$E = -C_V A + C_S A^{2/3} + C_C Z(Z-1) A^{-1/3} + C_C (N-Z)^2 A^{-1}$$

由粗略假设得到的这个结果, 对所有的核与实验值出乎意料的符合。

由核的液滴模型获得的上述公式叫外兹赛克公式。此模型仅考虑原子核的平均效应, 成功地解释了每个核子的平均结合能。但无法分别考虑各个核子的状态。

(2) 壳层模型。实验指出, 当原子核内 Z 或 N 数为

$$2, 8, 14, 20, 28, 50, 82, 126, \dots$$

原子核特别稳定, 这些数称为“幻数”。正如原子中的壳层结构, 对电子态填充亦有 2, 8, ……等一组数, 成为说明元素周期表的准则, 解释了稀有气体原子特别稳定的事实。为此, 对核亦用核壳层模型解释。

核力是短程力, 对其势函数知道甚少。与库仑函数大不相同。可假定核子的核内平均势函数系一个(三维)谐振子(或势阱)

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

由量子力学处理, 核子能级是

$$E = (H + \frac{3}{2})\hbar\omega, \text{ 其中 } H = 2(n-1) + l$$

式中 l 是轨道角动量量子数 $l=0, 1, 2, \dots$ ，轨道角动量大小 $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ ，能级量子数 $n=1, 2, 3, \dots$ ，与氢原子不同， l 不受 n 限制。

核子轨道角动量态用光谱学符号标记：

$$l=0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

字母符号 s, p, d, f, g, h, \dots 。

n 写在这些字母符号前面。

核子除轨道角动量外，还具有自旋角动量 s ，总角动量 $j = l + s$ 。 s 为 $\frac{1}{2}$ ，由量子力学耦合规则，对各个 l 值， j 有两种可能：

$$j = l + \frac{1}{2}; \quad j = l - \frac{1}{2}$$

由泡利不相容原理限制：没有两个核子能具有一组相同的量子数 (n, l, j) ，则核子能级分成以下几组：

表 24-4

谱振频率 (nl)	1s	1p	1d 2s	1f 2p	1g 2d 3s
j	$1s_{1/2}$	$1p_{3/2}, 1p_{1/2}$	$1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}$	$1f_{7/2}, 2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 2p_{1/2}$	$1g_{9/2}, 1g_{7/2}, \dots$
状态数	2	4 2	6 2 1	8 4 6 2	10
核子总数	2	8	28	50	

以上核子总数，相当于幻数，核结构壳层模型成功地解释了“幻数”的存在，解释了原子核的稳定性。

三、解题示范（略）

四、习题与解答

24-1 原子核的体积与质量数之间有何关系？这关系说明了什么问题？

答：

一切原子核都由两类粒子（简称为核子）组成，即带正电荷的质子和中性的中子。相应的质量：质子 $m_p = 1.6726478 \times 10^{-27} \text{ kg}$

$$\text{中子 } m_n = 1.6749543 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

每个核可由三个数所标志：一个等于核内质子数的整数，即原子序数 Z ，一个等于它的中子数的整数 N 和一个等于总核子数的质量数 $A = N + Z$ 。

核可用符号表示。对给定化学元素 X ，可表示 $^A_Z X$ ，如氧核 $^{16}_8 \text{O}$ 。

由实验获得以下规律：

球形核的体积 V 与核质量数 A 成正比。此结论表明，每个核子在核内占据相同的体积。导致一个非常重要的核构造结论：在一切原子核中，核物质的质量密度是一常数。

24-2 如果核半径按公式 $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{\frac{1}{3}}$ 确定 (式中的 A 为质量数), 试估计核物质密度以及在核物质的单位体积内的核子数。

解:

球形核近似中

$$\begin{aligned}\text{密度 } \rho &= \frac{M}{V} = \frac{Am_p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m_p}{\frac{4}{3}\pi (1.2 \times 10^{-15})^3} \\ &= \frac{1.6726 \times 10^{-27}}{\frac{4}{3} \times 3.14 \times (1.2 \times 10^{-15})^3} = 2.31 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}\end{aligned}$$

单位体积内核子数:

$$n = \frac{\rho}{m_p} = \frac{2.31 \times 10^{17}}{1.6726 \times 10^{-27}} = 1.38 \times 10^{14} \text{ 个}$$

24-3 已知 $^{232}_{90}\text{Tl}$ 的原子质量为 232.03821 u, 计算其原子核的平均结合能。

解:

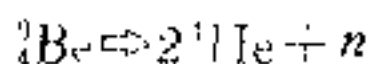
核结合能应等于各组成核子的静能和核静能之差

$$\begin{aligned}\Delta E(\text{结合能}) &= (Zm_p + Nm_n)c^2 - M_{\text{核}}c^2 \\ &= (90 \times 938.3 + 142 \times 939.6 - 232.03821 \times 931.5) \text{ MeV} \\ &= 1727 \text{ MeV}\end{aligned}$$

$$\text{平均结合能} = \frac{\Delta E}{A} = \frac{1727}{232} = 7.44 \text{ MeV}$$

24-4 ^9_4Be 核内每个核子的平均结合能为 6.4591 MeV, 而 ^4_2He 核内每个核子的平均结合能为 7.0720 MeV, 要把 ^9_4Be 分裂为两个 ^4_2He 核和一个中子, 须耗费多少能量?

解:



$$^9_4\text{Be} \text{ 结合能: } 9 \times 6.4591 = 58.1319 \text{ MeV}$$

$$^4_2\text{He} \text{ 结合能: } 4 \times 7.0720 = 28.288 \text{ MeV}$$

$$\text{则需耗费能量 } \Delta E = 58.1319 - 2 \times 28.288 = 1.56 \text{ MeV}$$

24-5 已知 $^{226}_{88}\text{Ra}$ 的半衰期为 1600 年, 求其衰变恒量。 10^{-2} mol 的 $^{226}_{88}\text{Ra}$ 在 1 秒内有多少个原子核发生衰变?

一放射源, 如果每秒有 3.7×10^{10} 个原子核衰变, 它的强度称为 1 居里 (curie), 上述 10^{-2} mol 的 $^{226}_{88}\text{Ra}$ 的放射性强度是多少居里?

解:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

$$\therefore \text{衰变恒量 } \lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{0.693}{1.6 \times 10^3 \times 365 \times 24 \times 3600} = 1.37 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

1 秒内衰变的母核

$$\Delta N = N_0(1 - e^{-\lambda t}) \approx \lambda N_0 t \quad (\text{因 } \lambda \text{ 很小})$$

其中

$$N_0 = 6.02 \times 10^{23} \times 10^{-2} = 6.02 \times 10^{21} \text{ 个}$$

$$\Delta N = 1.37 \times 10^{-11} \times 6.02 \times 10^{21} \times 1 = 8.25 \times 10^{10} \text{ 个}$$

一个样品的放射性强度被定义为衰变速率的值:

$$\text{放射性强度} = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N$$

其单位为居里。按定义: 1居里 = 3.700×10^{10} 次衰变/秒。 $10^{-4} \text{ mol } {}^{226}_{88}\text{Ra}$ 放射性强度

$$I = \frac{8.25 \times 10^{10}}{3.70 \times 10^{10}} = 2.23 \text{ 居里}$$

24-6 对放射性样品 ${}^{55}_{24}\text{Cr}$, 每隔5分测得其放射性强度 I 为19.2, 7.13, 2.65, 0.99和0.37毫居里, 试作出其 $\ln I \sim t$ 图线, 并从该图求得衰变恒量 λ 和半衰期 $T_{1/2}$ 的量值。

解:

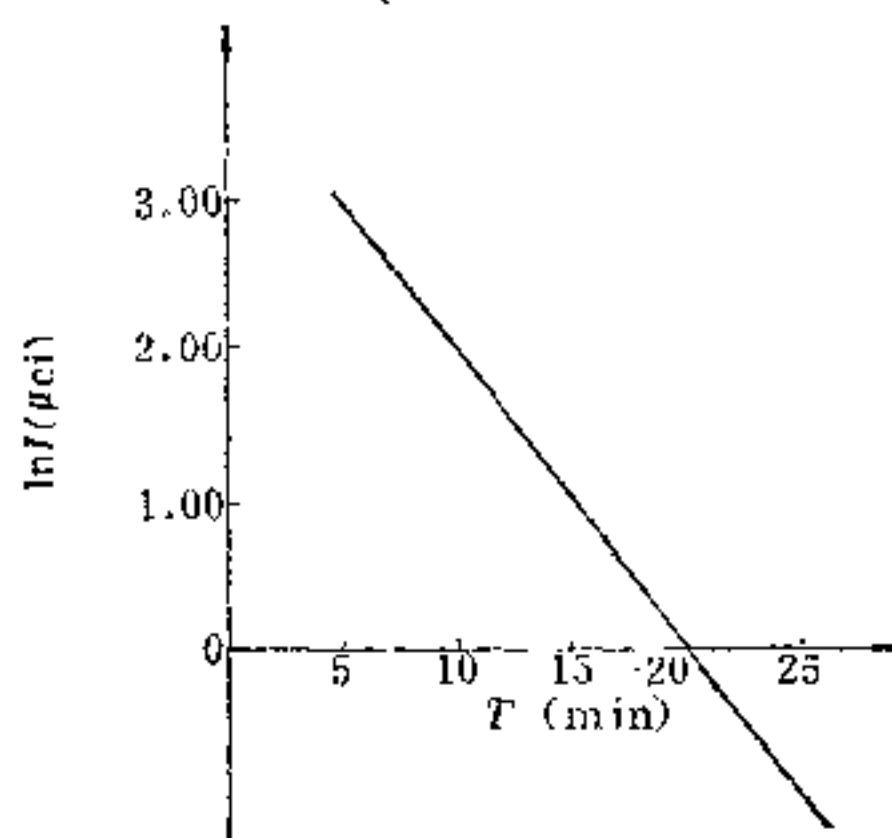
实验数据如表24-5。

表 24-5

t (min)	5	10	15	20	25
放射强度 (毫居里)	19.2	7.13	2.65	0.99	0.37
$\ln I$	2.95	1.96	0.97	-0.010	-0.99

由放射定律 $N = N_0 e^{-\lambda t}$ 或 $\ln N = -\lambda t + \ln N_0$

$$\ln I = -\lambda t + (\ln N_0 + \ln \lambda)$$



题 24-6 图

$$\text{斜率} = -\lambda = \frac{-0.99 - 2.95}{(25 - 5) \times 60} = -3.28 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

\therefore 衰变恒量 $\lambda = 3.28 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{3.28 \times 10^{-3}} = 2.11 \times 10^2 \text{ s}$$

24-7 试证示一个放射性核的平均寿命 $\tau = 1/\lambda$ 。

证明:

习惯上常用半衰期来表征放射性衰变的速率, 有时也用平均寿命 τ 来表示衰变的速率。

所谓平均寿命是指每个原子核在发生衰变前存在的时间的平均值。

设开始时有 N_0 个核，它们的寿命有短有长。短的可以为零，长的可以无限大。

取 $t \rightarrow t + dt$ 时间间隔内有 $(-dN)$ 个核的衰变，即这些核的实际寿命为 t 。按定义平均寿命

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t(-dN) = -\frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t dN = -\frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t(-N_0 \lambda e^{-\lambda t}) dt \\ &= \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

24-8 (1) 产生 e^+e^- 电子偶的最小能量是多少?

(2) 质子与反质子湮没时产生四个具有同样能量的 π^0 介子，试求每个 π^0 介子的动能。

解：

(1) 由电子偶产生的反应式 $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ 电子偶的产生过程遵从能量守恒定律即 $E_\gamma = 2E_e$

$$\therefore E_\gamma = 2m_e c^2 = 2(E_{ek} + m_{e0} c^2)$$

据题意，产生电子偶的最小能 ($E_k = 0$) 为

$$\begin{aligned}E_\gamma &= 2m_e c^2 = 2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (3.00 \times 10^8)^2 \\ &= 1.640 \times 10^{-13} \text{ J} = 1.025 \text{ MeV}\end{aligned}$$

(2) $\because P + \bar{P} \rightarrow 4\pi^0$ 由能量守恒 $2E_P = 4E_{\pi^0}$

$$\therefore E_{\pi^0} = \frac{1}{2} E_P = \frac{1}{2} \times 938.280 = 469.14 \text{ MeV}$$

所以 π^0 介子的动能

$$\begin{aligned}E_{K\pi^0} &= m_{\pi^0} c^2 - m_{\pi^0} c^2 = 469.14 - 134.965 \\ &= 334.18 \text{ MeV}\end{aligned}$$

(π^0 介子静止能量 134.965 MeV)

自我检查题答案

第十七章

1. 振动频率, 振动方向, 周相相同或有恒定周相差, 将同一光源的光分成两个光束, 在空间经不同路径而会合。2. $\sum_i n_i l_i$, $\pm k\lambda$, $\pm(k + \frac{1}{2})\lambda$ 。3. 上, 1.5。4. 疏, 密。5. 暗, $\frac{D\lambda}{2a}$ 。6. 疏, 背离, 密, 向着。7. 暗, 有半波损失, 窄, 宽。8. $2ne + \frac{\lambda}{2}$, $2ne$ 。9. 凹进。10. 两个分光束产生干涉效应的最大光程差, 与最大光程差对应的时间, $\frac{\delta_m}{c}$ 。

第十八章

1. 3, 明, 4, 暗, $\frac{2\lambda}{a}$ 。2. 密; 疏; 密; 密。3. 白色明, 均加强, 彩色条纹, 外, 内。4. 同心圆环, $1.22\frac{\lambda}{D}$, $1.22\frac{\lambda}{D}$, $\frac{1}{\delta\phi}$ 。5. $5.5 \times 10^{-3}\text{cm}$, 455cm , 455km 。6. $k\lambda$, 主, $N-1$, 黑暗, 细锐的明。7. $a\sin\phi = k'\lambda$, $2, 4, 6, \dots, 2n, 3, 6, 9, \dots, 3n$ 。8. $k=2$ 。9. $2d\sin\phi = k\lambda$, 2.4\AA , 1.2\AA , 0.8\AA 。10. 28800\AA , 4800\AA 。

第十九章

1. $\frac{n_2}{n_1}$, 反, 折, 1.73。2. $\frac{n_1}{n_2}$, $i_{01} + i_{02} = 90^\circ$, 30° 。3. 寻常(o), 非常(e), e, o, 双折射。4. 折射率, o, 全反射, 吸收。5. 强度不变, 强度变化但不完全消失, 强度在极大值与零之间变化, 线偏振光。6. 40%, 32%, 0, 8%。7. 圆, 椭圆。8. 不变; 在极大值与零之间变化。9. $\frac{1}{4}\frac{\lambda}{d}$, $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{d}$ 。

第二十章

1. 相对性, 光速不变, 伽里略, 洛仑兹。2. 缩短, 它在相对静止参照系中, $L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, 椭圆, $\frac{4}{3}\pi R^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 。3. 0.995, 0.436, 0.312, 0.141。4. 与它相对静止参照系中, 延迟, $\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 。5. $\frac{u+v'_x}{1+\frac{uv'_x}{c^2}}$, $0.882c$, $1.2c$ 。6. 1.67, $>$, 1.67 (不变)。7. $\frac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $\frac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $\frac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 。8. mc^2 , $m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1)$, $\frac{1}{2}mv^2$, 2.294。9. $4.65 \times 10^{-12}\text{kg}$, $9 \times 10^{16}\text{J}$, $2.99 \times 10^9\text{kg}$ 。10. 20.5, 0.9988c, 19.76c。

第二十一章

1. 任何温度下对所有波的辐射能完全吸收, 吸收, 反射, 多。2. 短波长, 2。3. 增加, 8。4. 略。5. 干涉, 衍射, 偏振, 光电, 康普顿, 波粒。6. $h\nu$, $\frac{h}{\lambda}k$ (k 为光传播方向单位矢量), $\frac{h\nu}{c^2}$, 0。7. 强度, 频率 ν 线性增加, 强度, 频率大于该金属红限频率 ν_0 。8. $\frac{A}{h}$, $<$, $h\frac{c}{\lambda} - A$ 。9. 散射线中有波长大于 λ 射线的散射, 自由电子的弹性碰撞能量, 动量。10. 0.0622, 0.0743, 0.0986。11. 7.24×10^{17} , $1.8 \times 10^{-9}\text{N}\cdot\text{s}$ 。12. $7.7 \times 10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 4.5V。13. 3622 \AA 。

第二十二章

1. 6565 \AA , 912 \AA 。2. (略)。3. $\frac{h}{p}$, $\frac{E}{h}$, 1.75 \AA , $6.63 \times 10^{-35}\text{m}$, $6.63 \times 10^{-35}\text{m}$ 。4. $|\psi(x, y, z, t)|^2$ dV , 单值, 连续, 有限。5. $> \frac{h}{2\pi}$, 不可能同时准确测定微粒子的坐标和动量, $2.32 \times 10^6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 不, 失效, $1.16\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $4.2 \times 10^6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 可。6. $1.06 \times 10^{-32}\text{m}$, $1.06 \times 10^{-35}\text{m}$ 。7. 2, $\pm 2, \pm 1, 0$; 1, $\pm 1, 0$; 0, 0; $\pm \frac{1}{2}$ 。18. 8. $2n^2$, 泡利不相容, 能量最小。9. 受激, 高能级上的粒子数, 低能级上的粒子数, 粒子数反转。10. 单色性好, 方向性好亮度高, 相干性好。