

专业课强化精讲课程

第12讲

第十四章 机械系统动力学

一、机械系统动力学分析原理

1) 作用在机械上的力

机械运转时，作用在机械上的力有：驱动力、工作阻力、重力和运动副中的约束反力。

忽略重力和约束反力，则作用在机械上的外力有：

1. 驱动力（力矩） 由原动机输出并驱使机械原动件运动的力
驱动力的机械特性（变化规律）：
 - （1） 常数（液压缸）
 - （2） 位置的函数（内燃机）
 - （3） 角速度的函数（电动机）
2. 工作阻力（力矩） 机械完成有用功时所需克服的工作负荷
工作阻力的机械特性：

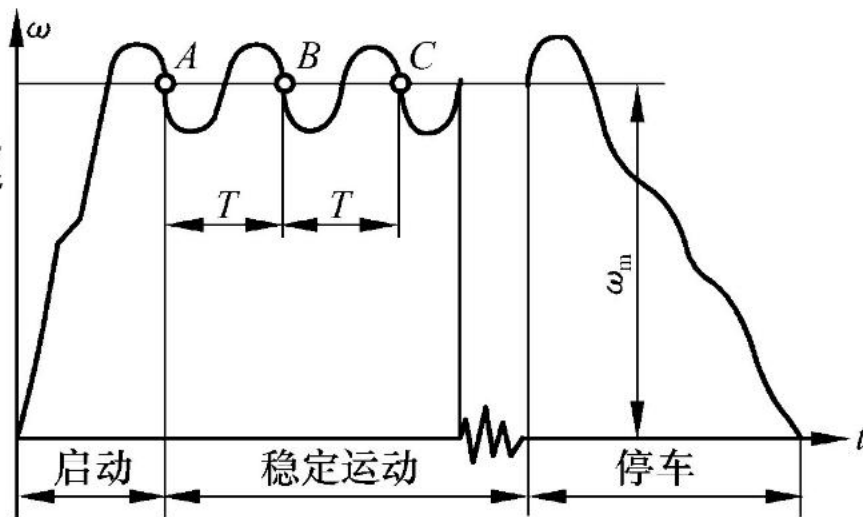
- (1) 常数（起重机、轧钢机、车床）
- (2) 位置的函数（往复式压缩机、曲柄压力机）
- (3) 速度的函数（鼓风机、离心泵）
- (4) 时间的函数（碎石机、球磨机）

本章假定驱动力和工作阻力都是已知的

2) 机械运动的三个阶段

- (1) 启动阶段
- (2) 稳定运动阶段（匀速
稳定或变速稳定）
- (3) 停车阶段

能量关系：



$$W_a - (W_r + W_f) = W_a - W_c = E_2 - E_1$$

$$= \sum \frac{1}{2} (m_i v_{si2}^2 + J_{si} \omega_{i2}^2) - \sum \frac{1}{2} (m_i v_{si1}^2 + J_{si} \omega_{i1}^2)$$

式中： W_a 、 W_r 、 W_f 分别为驱动力、工作阻力和有害阻力（摩擦力等）在该时间间隔内所做的功；后两者之和称为总功耗。

- | | |
|------------|---------------------------------------|
| (1) 启动阶段 | $W_a - W_c = E_2 - E_1 > 0$ |
| (2) 稳定运动阶段 | $W_a - W_c = E_2 - E_1 = 0$ |
| (3) 停车阶段 | $W_a - W_c = 0 - W_c = E_2 - E_1 < 0$ |

$E_2 - E_1$ 为动能增量

3) 机械的等效动力学模型

1. 机械等效动力学模型的建立

直接运用机械动能方程式研究机械系统动力学问题极其不便。

由于工程上使用的大都是单自由度系统，因此我们可以把整个机械系统的动力学问题转化成系统中某一运动构件的动力学问题，该运动构件称为等效构件，通常取原动件为等效构件。

转化条件：为使等效构件与系统中该构件的真实运动一致，需将作用于原机械系统的所有外力与外力矩、所有运动构件的质量与转动惯量都向等效构件转化。

(1) 作用在等效构件上的等效力（或等效力矩）（假想的）在任一瞬时的功率等于同一瞬时作用在原机械系统上的所有外力、外力矩的功率；

(2) 在任一瞬时，等效构件的等效质量（或等效转动惯量）所具有的动能等于原机械系统各运动构件的动能之和。

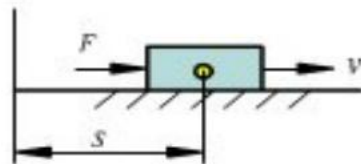
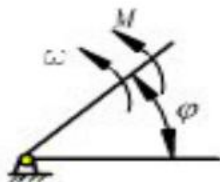
2. 等效力和等效力矩

等效力或等效力矩是一个假想的力或力矩，它假想地作用在等效构件上，以替代作用在原机械系统上所有的外力和外力矩，并使等效构件的运动与原机械系统中相应原构件的运动完全一致。

注意：等效力或等效力矩不是原机械系统所受外力和外力矩的合力和合力矩。

若等效构件作直线移动：

$$\left. \begin{aligned} F_v v &= \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n (\pm M_i \omega_i) \\ F_v &= \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v} + \sum_{i=1}^n (\pm M_i \frac{\omega_i}{v}) \end{aligned} \right\}$$



若等效构件作定轴转动：
$$M_v \omega = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n (\pm M_i \omega_i)$$

$$M_v = \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega} + \sum_{i=1}^n (\pm M_i \frac{\omega_i}{\omega})$$

从上式可以看出，等效力或等效力矩不仅与外力和外力矩有关，而且还和速比 v_i/v 、 ω_i/v 、 v_i/ω 、 ω_i/ω 有关。在含有连杆机构和凸轮机构等变速比传动系统中，这些速比仅与机构的位置有关。因此，等效力和等效力矩是机械系统位置的函数。在不含有变速比传动而仅含有定速比传动的系统中，这些速比为常数。不论在何种情况下，等效力和等效力矩与系统的真实速度无关。

3. 等效质量和等效转动惯量

等效构件的等效质量或等效转动惯量是假想的质量或转动惯量。

等效构件具有的动能应等于原机械系统各运动构件的动能之和。

若等效构件作直线移动： $\frac{1}{2} m_v v^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_{S_i}^2 + \frac{1}{2} J_{S_i} \omega_i^2 \right)$

$$m_v = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{S_i}}{v} \right)^2 + J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{v} \right)^2 \right]$$

若等效构件作定轴转动： $\frac{1}{2} J_v \omega^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_{S_i}^2 + \frac{1}{2} J_{S_i} \omega_i^2 \right)$

$$J_v = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{S_i}}{\omega} \right)^2 + J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right]$$

原机械系统中运动构件的质量和对质心的转动惯量一般均为常数，而速比 v_{S_i}/v 、 ω_i/v 、 v_{S_i}/ω 、 ω_i/ω 是机械系统位置的函数。所以，等效质量和等效转动惯量是机械系统位置的函数。当这些速比为常数时，等效质量和等效转动惯量也是常数。

二、机械系统的速度波动及其调节

周期性速度波动的调节—飞轮转动惯量的计算

调节周期性速度波动的目的和方法

目的：减小速度周期性波动的幅度

方法：增加构件的质量或转动惯量（通常是安装飞轮）

对于非周期性速度波动，安装飞轮不能达到调节目的，因为飞轮的作用只是“吸收”和“释放”能量，它既不能创造能量，也不能消耗能量。

对于非周期性的速度波动要用调速器进行调速

（1）周期性速度波动的调节

原理：当驱动功大于阻力功时，飞轮存储能量；反之，飞轮释放能量，从而降低机械速度波动。

(2) 机械运转的平均角速度和不均匀系数

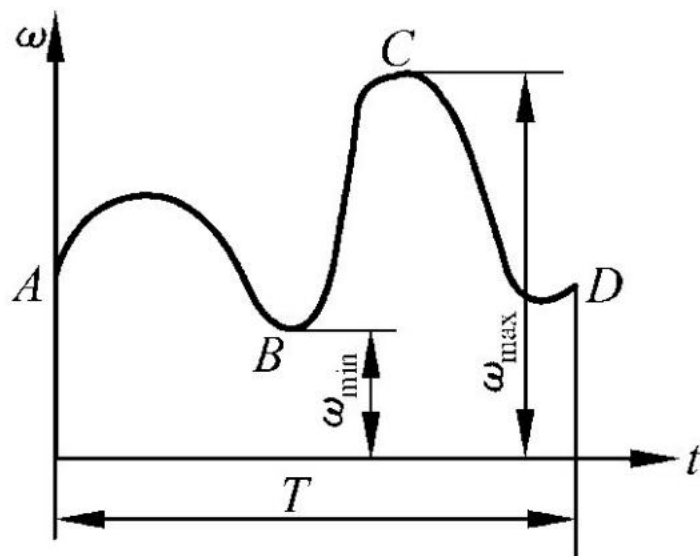
1) 机械运转的平均角速度

(1) 实际平均角速度

$$\omega_m = \frac{\varphi}{T} = \frac{\int_0^T \omega dt}{T}$$

(2) 算术平均角速度

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_{\max} + \omega_{\min})$$



2) 机械运转的不均匀系数 $\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m}$

如知: δ 和 ω_m 便可求的 $\omega_{\max} = \omega_m (1 + \frac{\delta}{2})$ $\omega_{\min} = \omega_m (1 - \frac{\delta}{2})$

(3) 飞轮转动惯量的计算

1) 计算飞轮转动惯量的原理

飞轮安装在主轴上, 主轴作为等效构件, 则有: $J_v = J_F + J_{v\Sigma}$

一般取 $J_v \approx J_F$, 需已知主轴的 ω_m 、 δ 和 M_{va} 及 M_{vc}

于是有:

$$\int_{\varphi_{\omega \min}}^{\varphi_{\omega \max}} M_v d\varphi = \int_{\varphi_{\omega \min}}^{\varphi_{\omega \max}} (M_{va} - M_{vc}) d\varphi \approx \frac{1}{2} J_F (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)$$

$$\int_{\varphi_{\omega \min}}^{\varphi_{\omega \max}} (M_{va} - M_{vc}) d\varphi = W_y \quad \text{称为最大盈亏功}$$

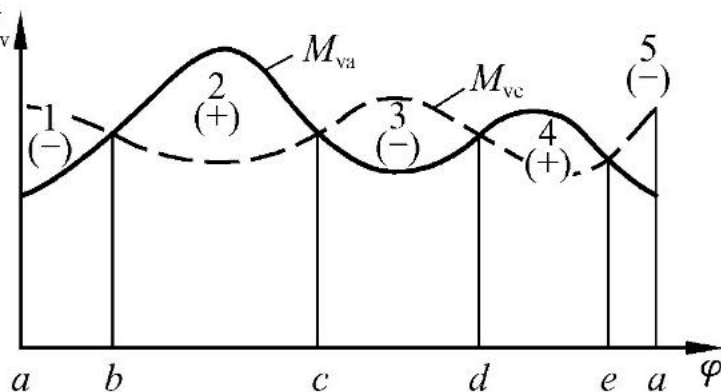
2) 已知等效驱动力矩 $M_{va} = M_{va}(\varphi)$

等效阻力矩 $M_{vc} = M_{vc}(\varphi)$

飞轮转动惯量 J_F 的求法

$$\int_{\varphi_{\omega \min}}^{\varphi_{\omega \max}} (M_{va} - M_{vc}) d\varphi$$

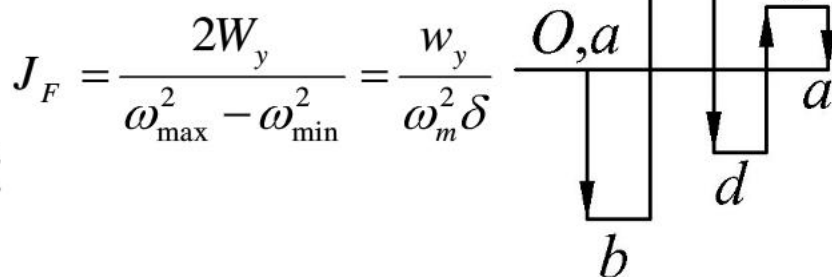
最大盈亏功



转换成求

$$\int_{\varphi_{E \min}}^{\varphi_{E \max}} (M_{va} - M_{vc}) d\varphi$$

能量指示图如右图



求得飞轮转动惯量

$$J_F = \frac{2W_y}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2} = \frac{w_y}{\omega_m^2 \delta}$$

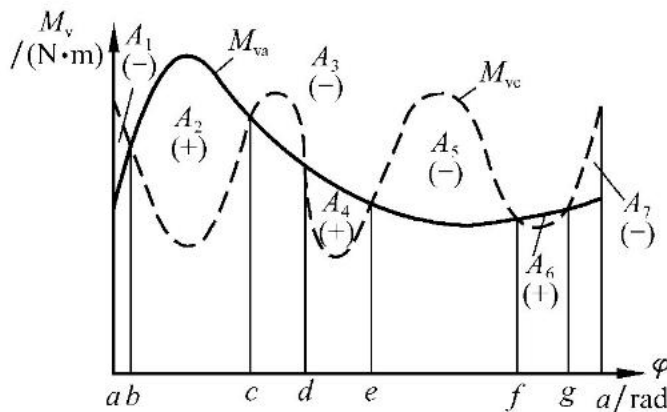
例14—4

$$A_1 = -50 \quad A_2 = +550$$

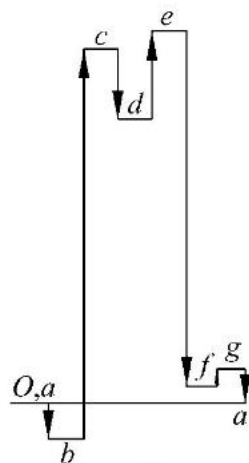
$$A_3 = -100 \quad A_4 = +125$$

$$A_5 = -500 \quad A_6 = +25$$

$$A_7 = -50$$



(a)



(b)

$$W_y = +550 - 100 + 125 = 575$$

$$J_F = \frac{W_y}{\omega_m^2 \delta} = \frac{575}{\left(\frac{2\pi}{60} \times 600\right)^2 \times \frac{1}{300}} = 43.6$$

先作能量指示图，如图

(b)，以o点为基点依次做各个面积所代表的功的向量。从图中可以看出b点最低，e点最高，则W_y即为面积A₂、A₃、A₃所表示的功的代数和。

二、刚性转子的静平衡

1.特点——若重心不在回转轴线上，则在静止状态下，无论其重心初始在何位置，最终都会落在轴线的铅垂线的下方这种不平衡现象在静止状态下就能表现出来，故称为静不平衡。

2. 静平衡条件

在转子上增加或除去一部分质量，使其质心与回转轴线重合，从而使转子的惯性力得以平衡。力学条件为：

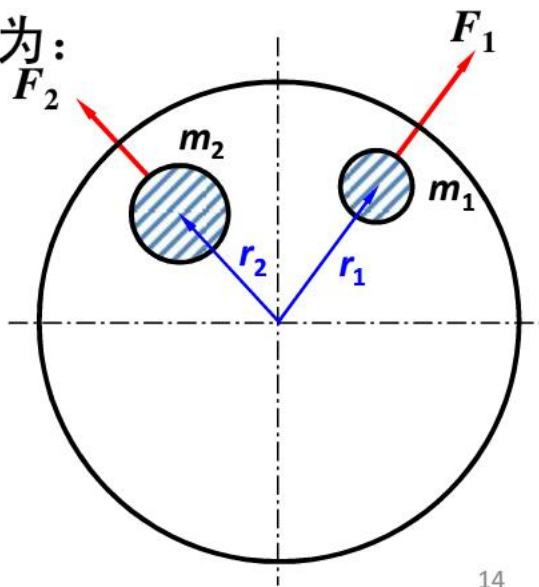
$$\sum \vec{F} = 0$$

3. 静平衡计算

如图为一盘状转子。已知 m_1 和 m_2 和 r_1 和 r_2

❖ 当转子以角速度 ω 回转时，各偏心质量所产生的离心惯性力为：

$$\vec{F}_i = m_i \omega^2 \vec{r}_i (i = 1, 2)$$



$$\vec{F}_i = m_i \omega^2 \vec{r}_i (i = 1, 2)$$

❖ 为平衡这些离心惯性力，在转子上加一平衡质量 m_b ，使 F_b 与 F_i 相平衡，即：

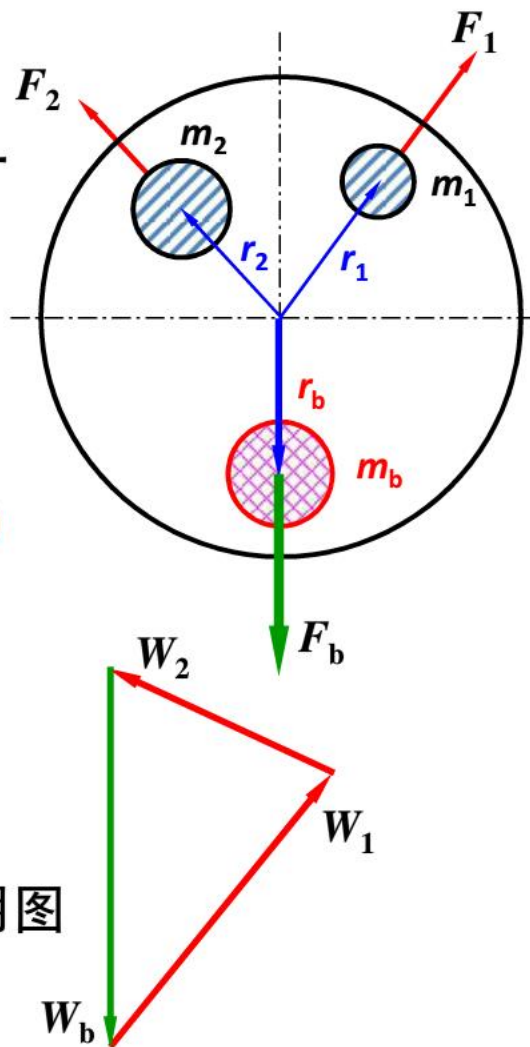
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_i + \vec{F}_b = 0$$

$$\xrightarrow{\text{设 } \vec{F}_b = m_b \omega^2 \vec{r}_b} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_b \vec{r}_b = 0$$

✓ 矢径 \vec{r}_i ✓ 质径积 $m_i \vec{r}_i = \vec{W}_i$

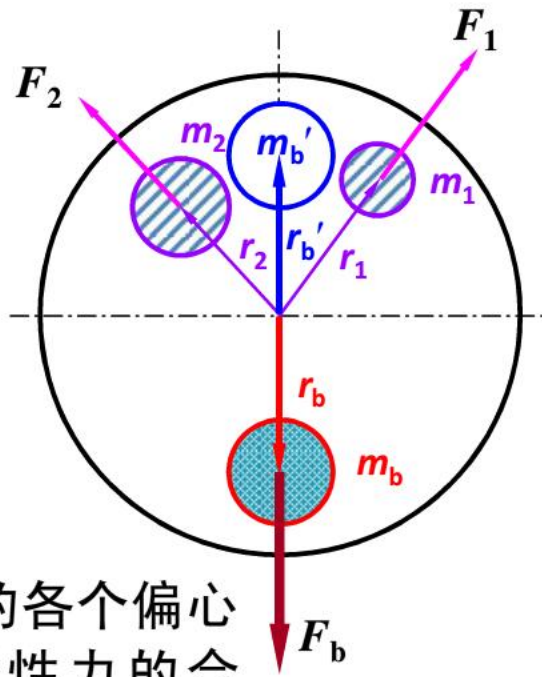
$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_b \vec{r}_b = \sum \vec{W}_i + \vec{W}_b = 0$$

平衡质径积 W_b 的大小和方位可根据上式用图解法求出。



➤ 求出 $m_b r_b$ 后，可以根据转子的结构选定 r_b ，即可定出平衡质量 m_b 。

➤ 也可在 r_b 的反方向 r_b' 处除去一部分质量 m_b' 来使转子得到平衡，只要保证 $m_b r_b = m_b' r_b'$ 即可。



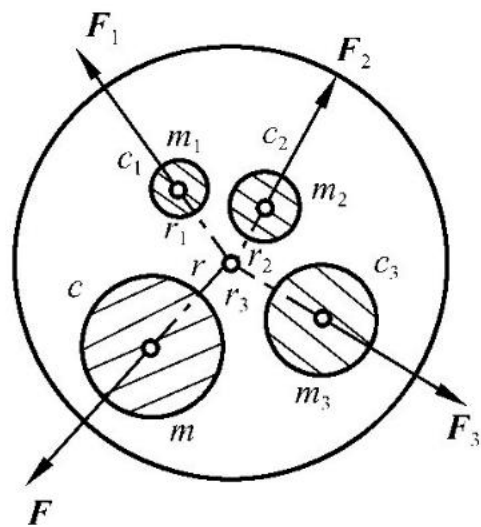
4. 结论

(1) 静平衡的条件——分布于转子上的各个偏心质量的离心惯性力的合力为零或质径积的向量和为零。

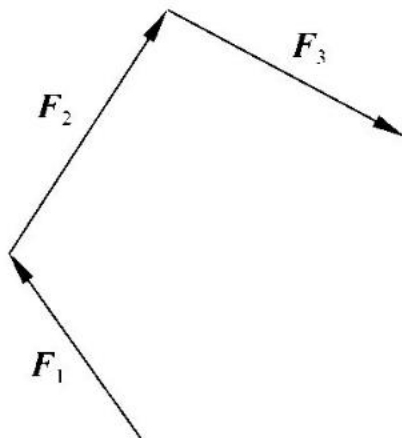
$$\sum \vec{F} = 0$$

(2) 对于静不平衡的转子，不论它有多少个平衡质量，都只需在同一平衡面内增加或除去一个平衡质量就可以获得平衡——单面平衡。

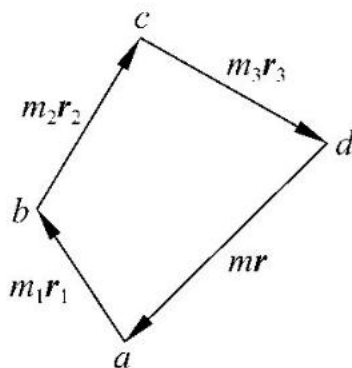
偏心质量所引起的惯性力为: $F = m r \omega^2$



(a)



(b)



(c)

$$m \omega^2 r + m_1 \omega^2 r_1 + m_2 \omega^2 r_2 + m_3 \omega^2 r_3 = 0$$

$$m r + m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 = 0$$

例题：图示盘状转子上有两个不平衡质量： $m_1=1.5\text{kg}$ ， $m_2=0.8\text{kg}$
 $r_1=140\text{mm}$ ， $r_2=180\text{mm}$ ，相位如图。现用去重法来平衡，求所需
 挖去的质量的大小和相位(设挖去质量处的半径 $r=140\text{mm}$)。

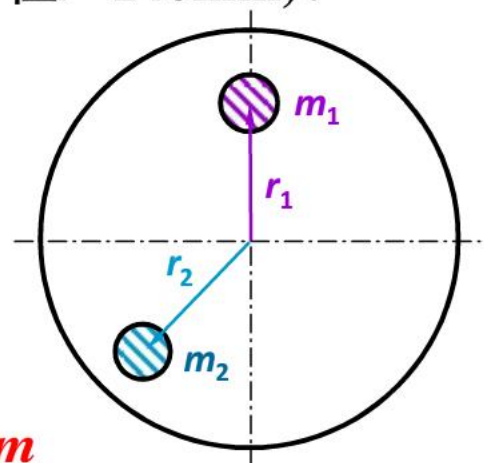
解：不平衡质径积 $m_1 r_1 = 210\text{kg} \cdot \text{mm}$

$$m_2 r_2 = 144\text{kg} \cdot \text{mm}$$

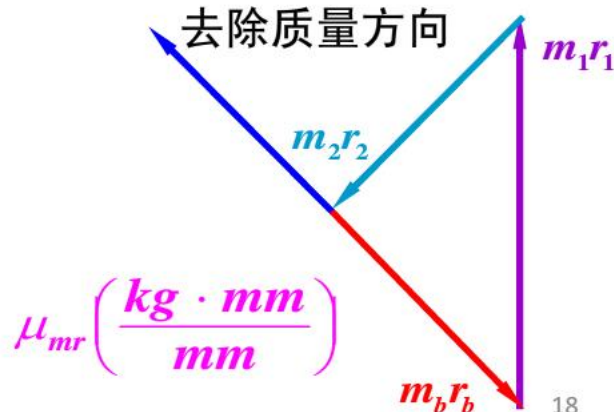
静平衡条件 $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_b \vec{r}_b = 0$

作图解得： $m_b r_b = 140\text{kg} \cdot \text{mm}$

应加平衡质量 $m_b = 140 / 140 = 1\text{kg} \cdot \text{mm}$



去除的质量应在矢量的反方向，
 140mm处去除1kg质量。



三、刚性转子的动平衡条件

当转子各偏心质量引起的惯性力的和力和惯性力偶的和力偶都均为零时,则转子就达到了动平衡。力学条件为:

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \end{cases}$$

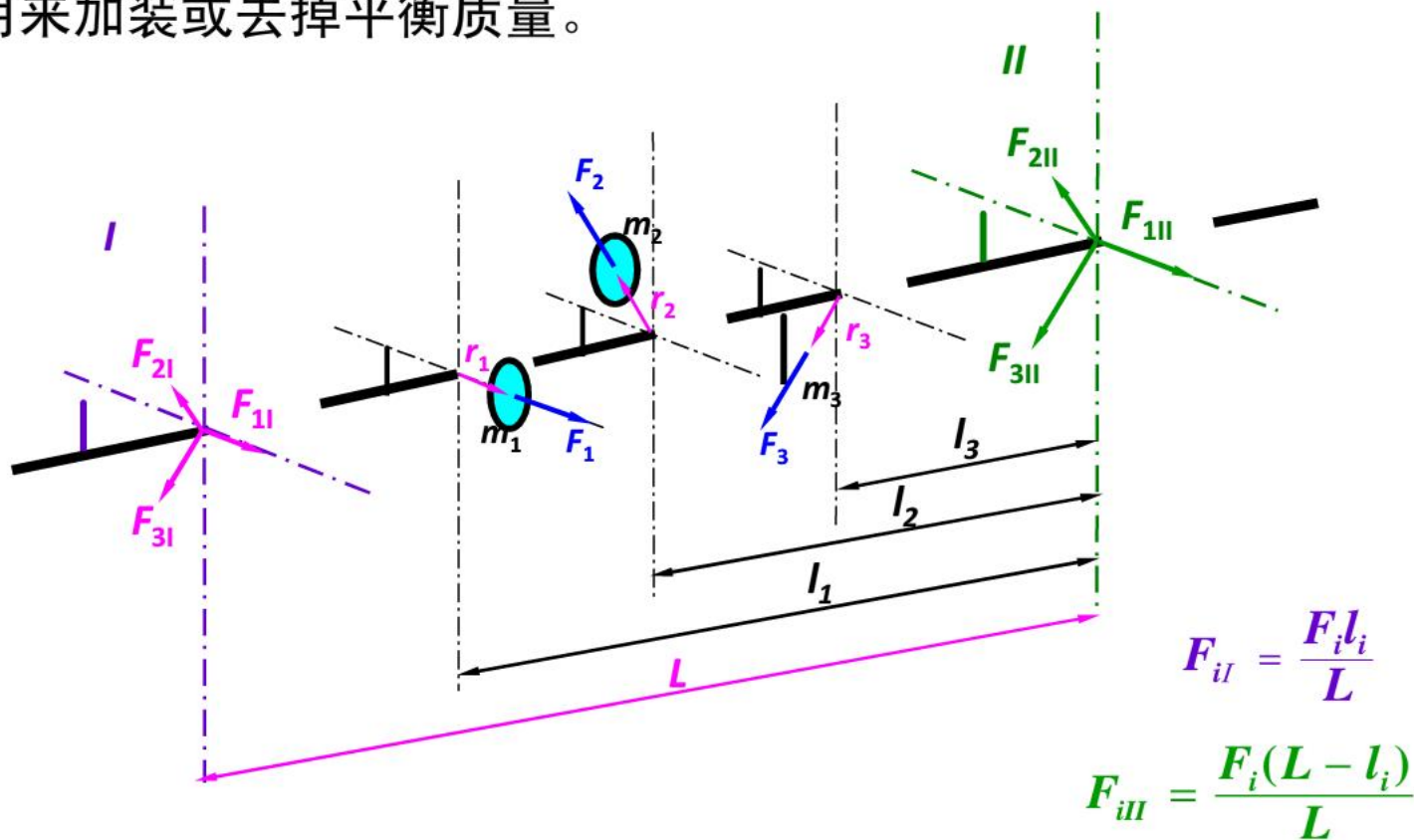
★ 动平衡与静平衡之间的关系:

- ✓ 静平衡的回转件不一定是动平衡的
- ✓ 动平衡的回转件一定是静平衡的

动平衡计算

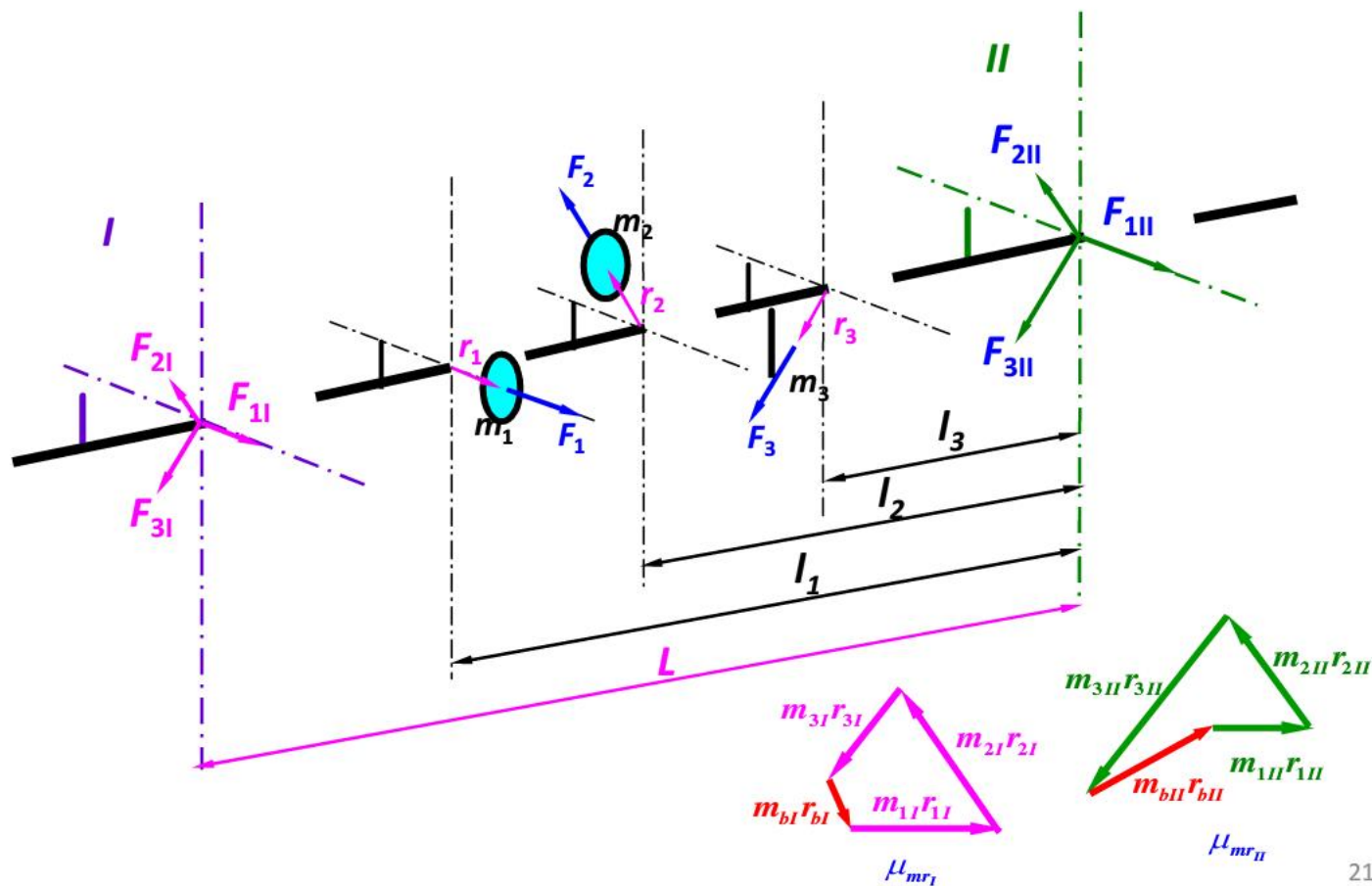
选择两个平衡基面, 并根据力的平行分解原理, 将各不平衡质量的质径积分别等效到两平衡基面上, 再分别按每个平衡基面建立质径积的平衡方程式, 最后用图解法或解析法求解出两平衡基面的平衡质量的大小及方位。由此可见, 动平衡计算是通过简化为两个平衡基面的静平衡问题来进行计算的。

- 首先在转子上选定两个回转平面 I 和 II 作为平衡基面，该平面用来加装或去掉平衡质量。



- 将三个不同回转面内的离心惯性力向平面 I 和 II 上分解。

- 分别按每个平衡基面建立质径积的平衡方程式，用图解法求解出两平衡基面的平衡质量的大小及方位。



必须: $\sum F_i = 0$ $\sum M_i = 0$

书上P320页 转子的不平衡质量 m_1, m_2

$F_1 = F_1' + F_1''$ 分布在平面 I 和 II 上

$$F_2 = F_2' + F_2''$$

$$F_1' l_1' = F_1'' l_1''$$

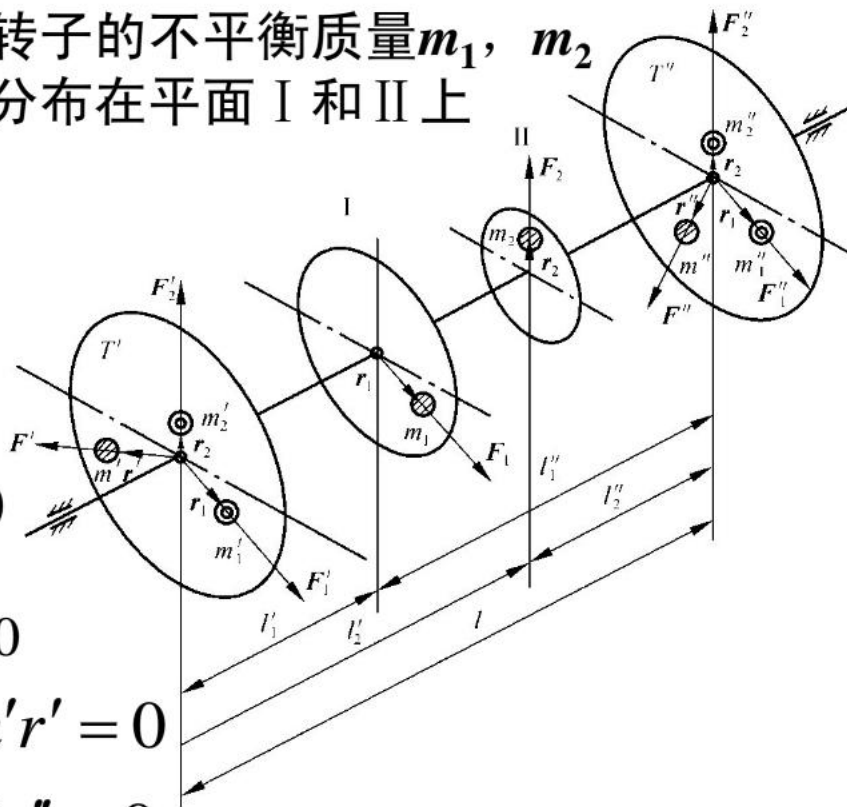
$$F_2' l_2' = F_2'' l_2''$$

$$F_1' + F_2' + F' = 0$$

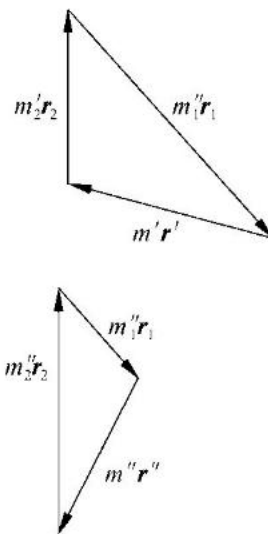
$$F_1'' + F_2'' + F'' = 0$$

$$m_1' r_1 + m_2' r_2 + m' r' = 0$$

$$m_1'' r_1 + m_2'' r_2 + m'' r'' = 0$$



(a)



(b)

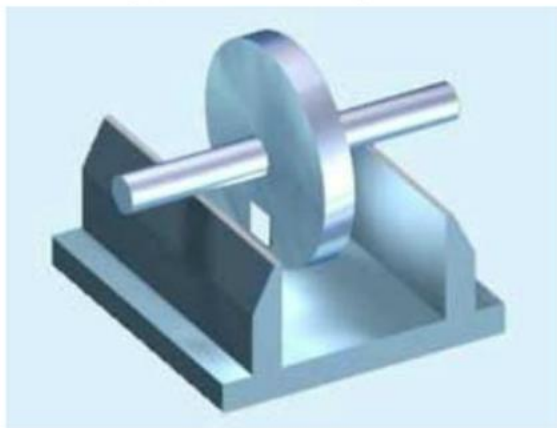
四、转子的平衡试验

试验原因及目的：转子经过设计理论上是完全平衡的，实际中还会出现不平衡现象。需要用试验的方法对其做进一步平衡。

(1) 静平衡实验

1. 试验对象——宽径比 $L/D \leq 0.2$ 的刚性转子

2. 试验设备——静平衡架



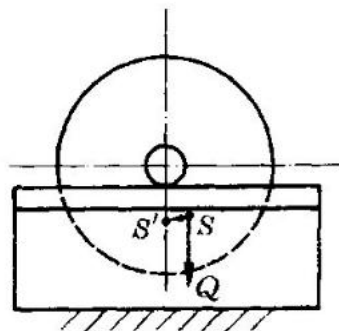
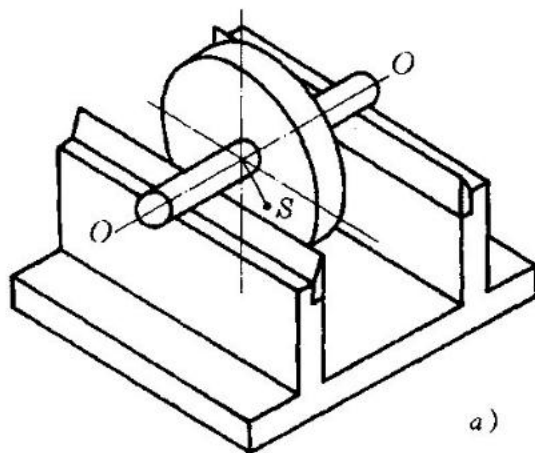
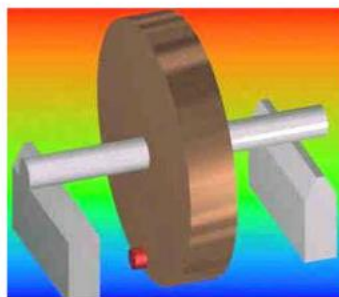
导轨式转子两端支承轴尺寸相同时采用



滚子式转子两端支承轴尺寸不同时采用

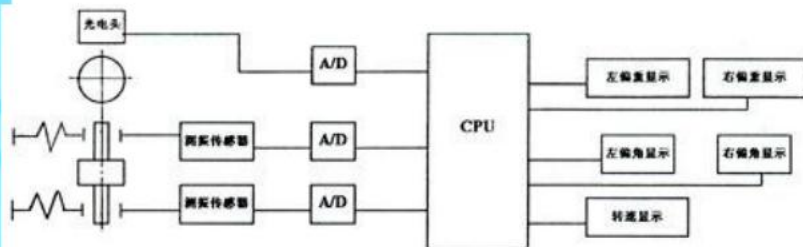
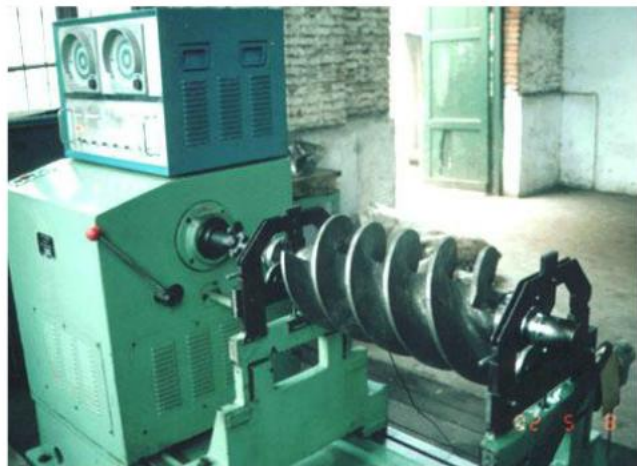
3. 试验方法

- 1) 应将两导轨调整为水平且互相平行;
- 2) 将转子放在导轨上, 让其轻轻地自由滚动;
- 3) 待转子停止滚动时, 其质心 S 必在轴心的正下方, 这时在轴心的正上方任意向径处加一平衡质量 (一般用橡皮泥);
- 4) 反复试验, 加减平衡质量, 直至转子能在任何位置保持静止为止;
- 5) 根据橡皮泥的质量和位置, 得到其质径积;
- 6) 根据转子的结构, 在合适的位置上增加或减少相应的平衡质量。



(2) 动平衡实验

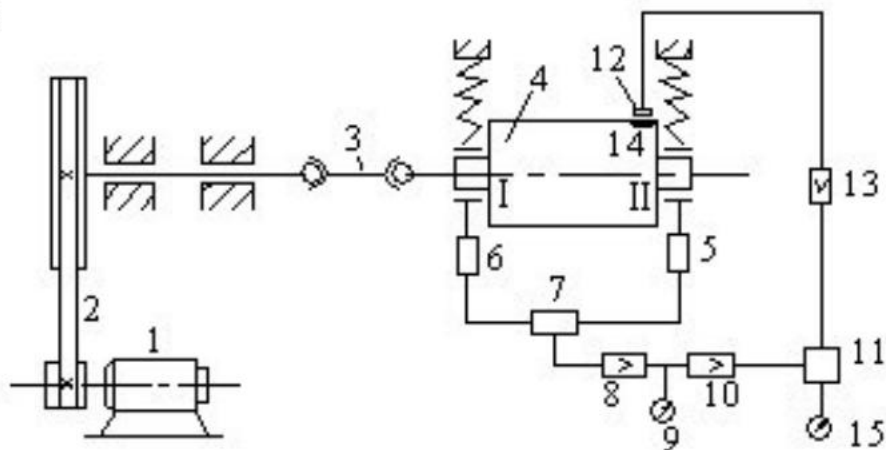
转子的动平衡实验需要在专用的动平衡机上进行。通过动平衡机来确定需加于两个平衡基面上的平衡质量的大小和方位。



工作原理方框图

如图所示为一种动平衡机的工作原理示意图。被试验转子4放在两弹性支承上，由电机1通过带传动2、双万向联轴节3来驱动。试验时，转子上的偏心质量所产生的惯性力使弹性支承产生振动，将此机械振动通过传感器5、6转变为电信号，解算电路7对信号进行处理以消除两平衡基面之间的相互影响，然后经过选频放大器8将信号

放大，由仪表9反映出不平衡质径积的大小。由光电头12和整形放大器10、13及鉴相器11在相位表15上读出相位，以确定偏心质量的方位。



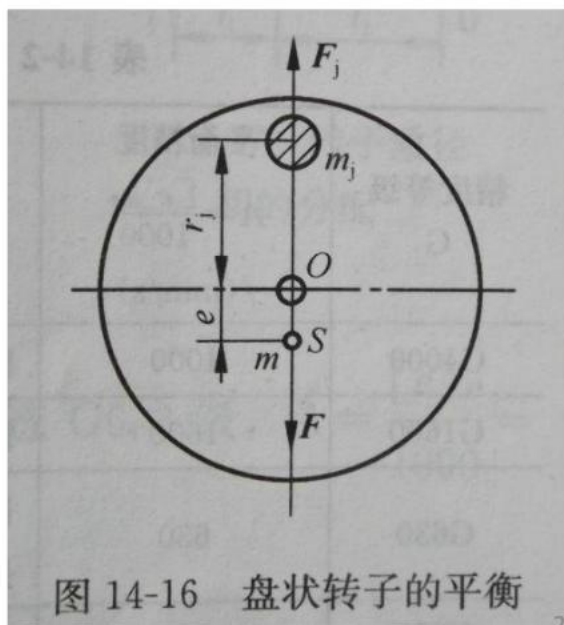
五、转子不平衡量的表示方法与许用不平衡量

1. 转子不平衡量的表示方法

经过平衡实验的转子,不可避免地还会有一些残存的不平衡。欲减小这种残存的不平衡量,就需要使用更精密的平衡实验装置,更先进的测试设备和更高的平衡技术,这就意味着要提高成本。因此,根据工作要求,对转子规定适当的许用不平衡量是很必要的。

(1)转子的许用不平衡量的表示方法:

1)质径积表示法,转子的许用不平衡质径积以 $[m_j r_j]$ 表示。质径积是与转子质量有关的一个相对量,常用于具体的转子。



2)偏心距表示法,转子的质心至回转轴线的许用偏心距以为 $[e]$ 表示。偏心距是一个与转子质量无关的绝对量,常用在衡量转子平衡的优劣或衡量平衡的检测精度的情况。

(2)转子的许用不平衡量两种表示法的关系:

$[e] = [m_j r_j] / m$ 。即 $[e]$ 可理解为转子单位质量的不平衡量。

2. 转子的许用不平衡量与平衡精度

一般用 $[m_j r_j]$ 来表示具体转子的不平衡量的大小,用 $[e]$ 来表示转子的平衡精度。

查表可以得出各类转子的平衡精度等级A及许用不平衡量的推荐值。

$A=[e]\omega/1000 \text{ mm/s}$, ω 为转子的角速度 (rad/s)

注意:

1) 对于静不平衡的转子, 其许用不平衡量由平衡精度可直接计算, 即:

$$[m_j r_j] = m[e] = 1000 A m / \omega;$$

2) 对于动不平衡的转子, 应把许用不平衡量 $[m_j r_j] = m[e]$ 分解到两个平面基面上。