

课后答案网，用心为你服务！



[大学答案](#) --- [中学答案](#) --- [考研答案](#) --- [考试答案](#)

最全最多的课后习题参考答案，尽在课后答案网（www.khdaw.com）！

Khdaw团队一直秉承用心为大家服务的宗旨，以关注学生的学习生活为出发点，

旨在为广大学生朋友的自主学习提供一个分享和交流的平台。

爱校园（www.aixiaoyuan.com） 课后答案网（www.khdaw.com） 淘答案（www.taodaan.com）

第十八章 热力学与统计物理学概述

[基本要求]

1. 明确内能、功和热量的物理涵义,掌握热力学第一定律及其在理想气体的等体、等压、等温、绝热和多方过程中的应用;
2. 理解卡诺循环及其效率的表示,理解卡诺定理的物理涵义,掌握热力学第二定律的不同表述及其实质;
3. 明确熵的概念,掌握熵增加原理的涵义及其应用,掌握热力学第二定律的数学表述和热力学基本关系式;
4. 定性理解用绝热去磁法获得低温的道理,掌握热力学第三定律的两种表述,定性说明这两种表述的关系;
5. 掌握统计物理学中的一些基本概念,主要包括系统的微观态、宏观态、相空间、相格、相空间中某体积内粒子的可能量子态数的表示、分布和最概然分布、三种粒子系统的基本特征以及等概率假设等;
6. 掌握玻尔兹曼分布、玻色分布和费米分布的表示形式,以及它们对各自的典型系统的处理方法。

[概念阐释]

一、热力学第一定律(§18-1)

1. 热力学中的基本概念

(1) 热力学系统和热力学过程

热力学的研究对象是由大量粒子组成的客观客体,这种客体就称为热力学系统,简称系统。与热力学系统相互作用着的周围环境,称为系统的外界,简称为外界。由系统与外界的关系,可将热力学系统分为三类:

- a) 与外界没有任何相互作用的系统,称为孤立系统;
- b) 与外界没有物质交换,但有能量交换的系统,称为封闭系统;
- c) 与外界既有物质交换,也有能量交换的系统,称为开放系统。

热力学系统从一个状态向另一个状态的过渡,或者说系统状态随时间的变化,就称为热力学过程,简称过程。根据过程所经历的中间状态的性质,可以把热力学过程分为准静态过程和非静态过程。

在状态转变过程中所经历的所有中间状态都接近于平衡态,或者说在转变过程的每一瞬间系统都处于平衡态,这样的过程称为准静态过程,也称平衡过程。如果过程进行得无限缓慢,以致在每一个中间状态上都停留足够长时间,使其接近于平衡态,这样的过程就可以认为是准静态过程。但是,任何实际过程都是在有限时间内完成的,不可能无限缓慢地进行,所以,准静态过程只是一种理想情形。在许多情况下,我们可以近似地把实际过程看作为准静态过程。

准静态过程可以在 $p-V$ 图上表示为一条直线或曲线。

(2) 系统所具有的、由其热力学状态所决定的能量,称为系统的内能。关于系统的内能,学习时应注意以下几点:

a) 内能是反映系统状态特征的宏观物理量,既然是由状态决定的,则必定是状态参量的单值函数,所以是态函数;

b) 系统从一个确定的状态变化到另一个确定的状态,其内能的变化也是确定的,与状态之间的转变过程无关;

c) 系统从某一状态出发经一系列过程又回到原状态,系统的内能不变;

d) 要改变系统的内能,就必须改变系统所处的状态,可以而且只能通过如下途径,即或者对系统做功,或者对系统传热,或者既做功也传热,两者兼而有之。

(3) 功及其与内能的关系

a) 在热力学中,做功的定义仍然是力与沿力的方向的位移的乘积,但是功的范围扩展了,不仅包括机械功,还包括除了传热方式以外的一切改变系统内能的方式。既然功是广义的,那么构成功两个要素,力和位移也都应是广义的,即广义力和广义位移。广义功等于广义力与广义位移的乘积。

b) 功不是态函数,不仅决定于始、末状态,而且与过程有关。对于确定的始、末状态,转变过程所作的功,在 $p-V$ 图上就是过程曲线下方的面积。显然,对于不同的转变过程,曲线形状不同,曲线下方的面积也不一样。

c) 在有限的准静态过程中,外界对系统所作的功可以表示为

$$A = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

这个表示式一般只适用于准静态过程,而不能用于非静态过程。在我们得到这个公式的过程中用到了关系式

$$pS = F,$$

这表示,由系统内部压强引起的对活塞压力的大小,等于外界作用于活塞的力 F 的大小,从力学的角度说,就是处于力的平衡状态。在气体膨胀、活塞移动的整个过程中,这个关系始终得到保证,活塞将始终缓慢移动,这就说明过程是准静态的。

d) 作功是改变系统内能的两种途径之一:外界对系统作功,会使系统的内能增大;系统对外界作功会使系统的内能减小。

(4) 传热及其与内能的关系

a) 两个系统由于存在温度差而传递的能量,称为热量。关于这个概念,常会遇到不清楚或者错误的说法。如说“系统含有多少热量?”这种说法不对。因为对于一个处于一定状态的系统,既不吸热,也不放热,无热量可言。热量与作功一样,都是过程量,与系统状态的变化相联系,当系统的状态发生变化时,系统才可能获得或释放热量。

温度是状态量,任何物体处于一定状态,总具有确定的温度。温度只有高低之分,不存在有、无的差别,没有哪个物体没有温度。热量则是过程量,没有过程就没有热量可言。不仅高温物体可以获得或释放热量,低温物体也可以获得或释放热量。

b) 系统所获得的或释放的热量也不是态函数,因为它不仅决定于初、末两个状态,而且与经历的过程有关。

c) 传递热量和作功一样也是改变系统内能的一个途径。当把热量传递给系统,系统的内能将会增大;当系统释放出热量,系统的内能将会减小。

(5) 传热与作功

a) 在改变系统的内能或量度系统内能的变化方面,传热和作功具有等效性。焦耳的热功当量实验是这种等效性的直接证明。

b) 虽然传热和作功在改变系统的内能方面是等效的,但它们都不与内能相等同。内能是由状态决定的量,是态函数,而传热和作功不仅决定于始、末状态,而且与过程有关,即反映了过程的特征。

c) 但是作功和传热毕竟是改变系统内能的两种不同方式,作功是通过系统在广义力的作用下产生广义位移来改变系统内能的,而传热则是通过分子之间的相互作用来改变系统内能的。

2. 热力学第一定律

如果外界对系统作功 A ,同时系统从外界吸收热量 Q ,那么系统将从一个平衡态变化到另一个平衡态,系统的内能相应增大了 ΔU ,根据能量守恒定律,必定有下面的关系:

$$\Delta U = Q + A. \quad (1)$$

这就是热力学第一定律。关于这个定律,请读者注意以下几点。

(1) 注意方程式的形式和符号的规定:系统从外界获得热量, Q 为正值,向外界释放热量, Q 为负值;系统内能增大, ΔU 为正值,内能减小, ΔU 为负值;外界对系统作功, A 为正值,系统对外界作功, A 为负值。

(2) 如果系统经历一个无限小的过程,则热力学第一定律可以表示为

$$dU = \delta Q + \delta A. \quad (2)$$

式中 dU 是态函数 U 的全微分, 而 δQ 和 δA 都只表示无限小过程的无限小量, 不是态函数的微量差, 即不是全微分。这是因为 U 是态函数, 微小过程所引起的内能变化完全由始、末状态所决定, 一旦给定始、末状态, 内能差就被完全确定了, 可以用微量差, 即全微分 dU 表示; Q 和 A 却不同, 它们不仅与始、末状态有关, 还与过程有关, 所以当始、末状态确定之后, Q 和 A 的改变量仍然不能确定, 故不能用由始、末状态所决定的微量差来表示 Q 和 A 的真正的变化, 而用 δQ 和 δA 来表示这种变化, 以区别于态函数的全微分。

(3) 虽然 δQ 和 δA 都不是全微分, 但这两者之和却是全微分, 因为这两者之和等于 dU 。

(4) 使用以上的(1)、(2)两式时必须注意, 始、末两状态必须是平衡态, 而这两状态之间的过程可以是任意过程, 即可以是准静态过程, 也可以是非静态过程。

(5) 热力学第一定律的另一个表达式

$$dU = \delta Q - p dV, \quad (3)$$

却只能用于准静态过程。

3. 热容和焓

(1) 系统的定体热容, 表示在保持系统体积不变的过程中的热容, 而当系统体积不变时, 外界对系统不作功, $A = 0$, 于是 $\delta Q = dU$, 所以系统的定体热容可以表示为

$$C_v = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v.$$

(2) 系统的定压热容, 表示在保持系统压强不变的过程中的热容, 而当系统压强不变时, 外界对系统所作的功为

$$dA = -p dV,$$

于是

$$\delta Q = dU + p dV = d(U + pV) = dH,$$

所以系统的定压热容可以表示为

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p.$$

(3) 关于态函数焓

a) 从上面的讨论中我们已经得到焓的一个重要特性, 即在等压过程中系统从外界吸收的热量等于焓的增量;

b) 根据态函数焓的定义式

$$H = U + pV,$$

可以得到,理想气体的焓 H 与内能 U 一样也只是温度的函数,而与系统的体积和压强无关;

c) 许多变化和反应都是在地球上的恒定大气压下进行的,容易维持压强恒定,所以焓和定压热容在热化学、热力工程以及许多物态变化和化学反应中更具有实际意义。

二、理想气体的热力学过程 (§ 18-2)

教材中对理想气体系统的等体、等压、等温、绝热和多方过程进行了讨论,这里我们把这些过程的主要特征列成下表,以便于读者进行比较。

过程	方程式	吸收热量	对系统做功	内能变化	热容
等体	$V = \text{常量}$	$C_V(T_2 - T_1)$	0	$C_V(T_2 - T_1)$	C_V
等压	$p = \text{常量}$	$C_p(T_2 - T_1)$	$-p(V_2 - V_1)$ $-\nu R(T_2 - T_1)$	$C_V(T_2 - T_1)$	$C_p = C_V + \nu R$
等温	$pV = \text{常量}$	$\nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ $\nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	$-\nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ $-\nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	0	∞
绝热	$pV^\gamma = \text{常量}$ $TV^{\gamma-1} = \text{常量}$ $T^{-1}p^{\gamma-1} = \text{常量}$	0	$C_V(T_2 - T_1)$ $\frac{1}{\gamma-1}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$ $\frac{\nu R}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$	$C_V(T_2 - T_1)$	0
多方	$pV^m = \text{常量}$ $TV^{m-1} = \text{常量}$ $T^{-m}p^{m-1} = \text{常量}$	$C_m(T_2 - T_1)$	$\frac{1}{m-1}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$ $\frac{\nu R}{m-1}(T_2 - T_1)$	$C_V(T_2 - T_1)$	$C_V - \frac{\nu R}{m-1}$ $C_V \left(\frac{\gamma-m}{1-m} \right)$

应注意以下问题:

(1) 表中所列过程,都是准静态过程。因为只有在准静态过程中,每一瞬间系统都处于平衡态,也才可以使用理想气体物态方程来描述。

另外,在等体过程中外界对系统所作的功始终等于零,这是由于只有在准静态过程中外界对系统所作的功才可以表示为

$$A = - \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

(2) 表中的各种热容,都是指系统的热容。

(3) 多方过程实际上包括了相当大一类过程, 等体、等压、等温和绝热等过程只是多方过程的特例。推导多方过程的各种公式, 与推导绝热过程的相应公式完全类似, 只是将绝热指数 γ 换成多方指数 m 就行了。

三、卡诺循环 (§ 18-3)

1. 循环

(1) 所谓循环过程, 是指系统从某一状态出发, 经一系列过程后又回到原来的状态的过程, 简称循环。准静态的循环过程在 $p-V$ 图上可用闭合曲线表示出来。循环的重要特征是:

- a) 经历一个循环后, 系统的内能不变;
- b) 循环曲线所包围的面积, 量值上等于系统对外界所作的功。

(2) 沿顺时针方向进行的循环, 是正循环, 与热机的循环相对应; 沿逆时针方向进行的循环, 是逆循环, 与制冷机的循环相对应。

a) 在一个正循环中, 系统从高温热源吸热, 向低温热源放热, 同时将两者的差额转变为对外界所作的功;

b) 在一个逆循环中, 外界对系统做功, 系统从低温热源吸热, 同时将两者之和转变为向高温热源释放的热量。

(3) 效率是热机性能的一个重要标志, 定义为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

应注意的是, 式中 A 是在一个循环中系统对外界所作的净功, Q_1 是系统在一个循环中从外界吸收的热量, 其中包括向外界释放的热量 Q_2 。

2. 卡诺循环

(1) 构成卡诺循环的两条等温线和两条绝热线都是准静态过程, 所以卡诺循环是准静态循环过程, 或者说是一种理想热机的循环。遵循这种循环的热机, 称为卡诺热机。

(2) 卡诺热机的效率可以表示为

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

由上式可以得到:

a) 上式所表示的效率是卡诺热机的效率, 一切实际热机不可能做到只与两个恒温热源交换热量, 并且不可避免地存在能量损失, 如散热、漏气和摩擦等, 所以一切实际热机的效率不可能超过上式所表示的值;

b) 由于 $T_1 \neq \infty$, $T_2 \neq 0$, 所以任何热机的效率都不可能达到 100%, 这就预示了另一个新规律的存在: 从能量的角度看, 不可能把由高温热源吸收的热量全

部转变为对外作功,因为在完成一个循环时,不可避免地要把一部分热量释放给低温热源。

c) 从上式可以得到, T_1 越高, T_2 越低, 热机效率 η 就越高。这是提高热机效率的方向。

四、热力学第二定律 (§ 18-4)

1. 可逆过程和不可逆过程

根据教材中对可逆过程所下的定义,我们可以说,当一个过程发生后,如果在系统返回原状态的同时,外界也完全恢复原样,这样的过程才是可逆过程。在理解这一概念时,应注意以下几点。

(1) 可逆过程也可表述为,一个过程发生后,能够通过某种方法或某种途径,既使系统返回原状态,也使外界同时恢复原样,此过程就是可逆过程。

在此表述中所强调的是,在使系统返回原状态的同时,外界也必须恢复原样,即原过程对外界产生的一切影响也同时消除。所以,不能把可逆过程简单地理解为“可以返回到原状态的过程”。

(2) 可逆过程是无耗散效应的准静态过程,是一种理想模型,这个理想模型在热力学中具有重要的特殊意义。

(3) 自然界中一切与热现象有关的实际过程,具有共同的特征,这就是它们的不可逆性,并且所有不可逆过程都存在内在联系,而反映这种共同特征和这种内在联系的,就是热力学第二定律。

2. 热力学第二定律的两种表述

(1) 热力学第二定律的开尔文表述:不存在这样一种循环,只从单一热源吸收热量并全部转变为功。在这种表述中读者应注意“循环”二字,因为对于一般的过程,是可以只从单一热源吸收热量并全部转变为功的。例如,理想气体的等温膨胀过程,就是从单一热源吸收热量,并全部转变为功。

(2) 热力学第二定律的克劳修斯表述:热量不可能自动地从低温物体传向高温物体。在这种表述中读者应注意“自动”二字,因为制冷机就是将热量从低温物体传向高温物体的机械,不过不是自动地,而是通过外界对其工作物质作功来实现的。

3. 热力学第二定律的实质

(1) 热力学第二定律表明了,自然界中的一切与热现象有关的过程,都是互相联系的。教材中不仅说明了功转变为热的过程的不可逆性与热量从高温物体传向低温物体的过程的不可逆性之间的关系,即说明了热力学第二定律两种表述的等效性,而且解释了气体的自由膨胀过程的不可逆性与功转变为热的过程的不可逆性之间的联系。同样可以证明,自然界中的一切与热现象有关过程的

不可逆性与功转变为热的过程的不可逆性之间的联系,或与热量从高温物体传向低温物体的过程的不可逆性之间的联系。从而表明自然界中的一切与热现象有关的过程都是互相联系的。

(2) 热力学第二定律指出了功转变为热的过程的不可逆性(开尔文表述)和热量从高温物体传向低温物体的过程的不可逆性(克劳修斯表述),因而也就指出了自然界中的一切与热现象有关的过程的不可逆性。

(3) 让我们以气体的自由膨胀过程为例,说明其不可逆性。教材(下卷)中已经证明了气体的自由膨胀过程是不可逆过程,因为不可能存在使气体自动收缩的过程。

仍然用教材中的图 18-17 来讨论问题。我们首先来考察其中任意一个分子的运动情况。这个特定的分子在整个容器中作热运动,如果 A 部分的体积与 B 部分的体积相等,那么这个分子处于 A 部分或 B 部分的概率也是相等的,都等于 $1/2$ 。假如整个系统中只有这个分子,无疑,分子完全可以自动地返回 A 部分,也就是说,只包含一个气体分子的自由膨胀过程是可逆过程。

然后来考察包含两个分子的情形。分子 a 和分子 b 在整个容器中共有四种分布方式:a 处于 A 部分,b 处于 B 部分;a 处于 B 部分,b 处于 A 部分;a、b 都处于 A 部分;a、b 都处于 B 部分。a、b 两分子同时返回到 A 部分的概率为 $1/2^2 = 1/4$ 。所以只包含两个气体分子的自由膨胀过程,也是可逆过程。

现在来考察包含四个分子的情形。显然,如果按照分子处于 A 部分和 B 部分来分类,四个分子 a、b、c 和 d 的分布方式共有 16 种。由这 16 种分布方式看,这四个分子同时返回 A 部分的可能性是存在的,但概率却小多了,只有 $1/2^4 = 1/16$ 。所以四个分子的自由膨胀过程,虽然还不能认为是不可逆的,但出现四个分子同时返回 A 部分的可能性要比出现其他分布方式的可能性要小些。最容易出现的分布方式是四个分子均匀地分布在 A、B 两部分中,因为由下而的表格中可以看出,这种分布方式所包含的状态数目最多,等于 6。实际的气体系统所包含的分子数目都是很大的,1 mol 气体中的分子数达 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ 个。在分子数如此巨大的情况下,全部分子返回 A 部分的概率为 $1/2^{N_A} = 1/2^{6.02 \times 10^{23}}$ 。这个数值实在太小了,以至于不可能发生。所以大数分子的自由膨胀过程是不可逆的。

		分子的分布方式				总计
容器部分	A	0 abcd	a b c d	bcd acd abd abc	ab ac ad bc bd cd	
	B	abcd 0	bcd acd abd abc	a b c d	cd bd bc ad ac ab	
状态数		1 1	4	4	6	16

我们也可以从分子运动的角度分析功转变为热的过程的不可逆性。功转变为热的过程,实际上是在外力作用下所发生的宏观物体的运动转变为分子无规则热运动的过程。显然,宏观物体的规则运动转变为分子的无规则运动的过程,是可以进行的。但是相反的过程,即分子的无规则运动转变为宏观物体的规则运动的过程,概率是很小的,以至于不可能实现。

(4) 从以上的讨论可以得到这样的结论:一个不受外界影响的孤立系统,其内部发生的过程总是由概率小的状态向概率大的状态进行,即由包含微观状态数目少的宏观状态向包含微观状态数目多的宏观状态进行。

(5) 我们也应注意到,由于“过程的不可逆性”这个概念,只是对由大数分子构成的系统才有意义,对少量分子的集合体是没有意义的。因此,热力学第二定律必须用于处理由大数分子构成的系统的宏观现象和过程。

五、卡诺定理 (§ 18-5)

(1) 卡诺定理也可以简单地表述为:所有工作于两个确定温度之间的热机,以可逆机的效率为最高。这种简单的表述包含了教材中所叙述的卡诺定理的两条基本内容。

a) 既然是“所有工作于两个确定温度之间的热机”,那就必定包括了以任意物质为工作物质的热机;既然以可逆机的效率为最高,自然就与工作物质无关了。

b) 既然是“工作于两个确定温度之间”的可逆机,那就必定是在由两条等温线和两条绝热线所组成的循环中工作的可逆机,就必定是卡诺热机。

c) “以可逆机的效率为最高”,就是以卡诺热机的效率为最高,而卡诺热机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

所以其他一切热机的效率都不会超过此值。

(2) 卡诺定理指出了提高热机效率的方向: T_1 越高, T_2 越低, 热机效率就越高。

(3) 卡诺定理指出了可逆机的效率是与工作物质无关的, W. 汤姆孙(即开尔文)就是根据这一点,在卡诺定理的基础上提出了完全不依赖于物质属性的热力学温标。

(4) 根据卡诺定理可以得到一个重要的关系式:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p,$$

此式反映了系统的内能与体积的关系,如果知道了物态方程,就可以求得系统的

内能随体积的变化。上式适用于任何以两个参量描述的物质系统。关于这个关系式的证明,感兴趣的读者可参考一般的热学书。

六、熵增加原理 (§ 18-6)

1. 熵的概念

熵是一个很重要的概念,理解时应注意以下问题。

(1) 由克劳修斯等式可以得到,系统从温度为 T 的热源所吸收的热量 δQ 与温度 T 之比(称为热温比)沿可逆过程的积分值,只决定于始、末状态,而与所经历的可逆过程的路径无关,这个积分值就定义为态函数熵的变化,即

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}. \quad (1)$$

对于无限小的可逆过程,熵的变化可以表示为

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (2)$$

在可逆过程中,系统的温度等于热源的温度 T 。

(2) 熵与内能、焓一样都是态函数,都是由系统的状态惟一决定的,并且都是广延量。态函数的变化是与过程无关的,所以其改变量可以通过任意过程来计算。不过,应特别注意的是,计算熵变的过程必须是可逆过程,也就是在式(1)中从状态 A 到状态 B 的积分必须沿可逆过程进行,而计算内能和焓的改变量的过程却没有这样的限制。

(3) 关于“计算熵变必须沿可逆过程进行”这一点,仅仅是个计算的问题,绝不表示熵变与过程是否可逆有关,更不表示熵变只发生在可逆过程之中。用热温比沿可逆过程的积分计算得到的熵变值,是与过程无关的,无论系统的最后状态是经过可逆过程还是经过不可逆过程到达的。

(4) 由熵的定义式[即式(1)]可以看到,我们只能得到熵在始、末两个状态的差值,也就是说,系统在某个状态的熵,并非是其绝对值,而是包含了一个任意常量。这一点与力学中系统的势能很相似。只要选定某个状态的熵为零,其他状态的熵就完全确定了,这个被选定熵为零的状态,称为参考态。以后我们会知道,当趋于绝对零度时,系统的熵也趋于零。

(5) 态函数只有对于平衡态才有意义,熵作为一个态函数当然也不例外。但是我们可以利用 § 9-6 中关于局域平衡假设把熵的概念推广到非平衡态。在不可逆过程中,虽然系统整体是处于非平衡态,不能用统一的确定参量来描述,但可以将系统划分成很多很小的区域,每一个这样的小区域却都处于平衡态,可以用确定的参量来描述,熵有确定的值。整个系统的熵就等于所有这样的小区域的熵之和,这就是非平衡态熵的概念。不过我们课程中所涉及的熵,都是

平衡态的熵。

2. 熵增加原理和热力学基本关系式

(1) 热力学第二定律在数学上可以表示为

$$\Delta S \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}, \quad (3)$$

或无限小过程可以表示为

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (4)$$

在以上两式中,应注意:

- a) 大于号对应于不可逆过程,等号对应于可逆过程;
- b) δQ 表示在无限小过程中系统从温度为 T 的热源吸收的热量;
- c) 对于不可逆过程,系统的温度不等于热源的温度 T ;对于可逆过程,系统的温度与热源的温度相等。

(2) 为理解和掌握熵增加原理,读者应注意以下问题。

- a) 如果系统进行的是绝热过程,那么它与外界没有热交换, $\delta Q = 0$, 于是由 (3)、(4) 两式分别得到

$$\Delta S \geq 0, dS \geq 0, \quad (5)$$

这表示:热力学系统经绝热过程,从一个平衡态到达另一个平衡态,熵永远不会减小;如果过程是可逆的,熵保持不变;如果过程是不可逆的,熵总是增加的。这便是熵增加原理。

- b) 熵增加原理也可以简要地表述为:孤立系统的熵永不减小。
- c) 根据熵增加原理,不可逆绝热过程总是向着熵增加的方向进行的,而可逆绝热过程则总是沿着等熵线进行的。
- d) 熵增加原理成立的条件是系统发生绝热过程,或孤立系统发生的过程。离开了这个前提条件,即系统经过非绝热的任何可逆或不可逆过程,其熵可以是增加的,可以是减小的,也可以是不变的。

e) 利用熵增加原理可以判断孤立系统发生某过程的可能性,计算系统的熵变,如果熵增加,说明该过程能够进行,如果熵减小,说明该过程不能发生。若系统不是孤立的,在某过程中与外界有热量交换,这时我们可以将系统和与之发生热交换的外界一起作为孤立系统,满足绝热条件,总系统是向熵增加的方向变化的。根据总系统的变化方向就可以分析和确定系统的演化趋势。

f) 上面我们将熵的概念由平衡态推广到了非平衡态,在这种情况下,熵增加原理就不能仅仅理解为系统末态的熵比初态的熵增加了,而应该理解为,在绝热过程的每一步,系统的熵始终在不断增加,到达新的平衡态时熵达到极大值,过程停止。

g) 从熵增加原理可以反过来帮助我们理解熵的涵义。前面我们详细地讨论了气体自由膨胀过程的不可逆性,这是一个不受外界影响的孤立系统,由包含微观状态数目少的宏观状态向包含微观状态数目多的宏观状态进行的过程,显然这是熵增加的过程。这就意味着,包含微观状态数目多的宏观状态与大的熵值相对应,包含微观状态数目少的宏观状态与小的熵值相对应。或者说,混乱程度高(即有序程度低)的宏观状态与大的熵值相对应,混乱程度低(即有序程度高)的宏观状态与小的熵值相对应。所以,可以说熵是系统混乱程度的量度。

(3) 将热力学第二定律的数学表达式[即式(4)]代入热力学第一定律,可以得到

$$TdS \geq dU - \delta A,$$

这就是热力学基本关系式。

a) 式中大于号与不可逆过程相对应,此时 T 表示热源的温度,等号与可逆过程相对应,此时 T 既是热源的温度,也是系统的温度。

b) 上式有时也称为克劳修斯不等式,也可作为热力学第二定律的另一种表述。

c) 对于可逆过程并且只存在膨胀功的情况下,热力学基本关系式可以写为

$$TdS = dU + p dV.$$

这个关系在热力学中会经常用到。

另外,读者还应注意物理量熵的以下几个性质:

- (1) 熵是态函数,由状态参量所决定;
- (2) 某状态的熵总带有一个与参考态有关的常量,由熵的定义式所求得的某状态的熵,实际上是该状态熵与参考态熵的差值;
- (3) 熵是广延量,系统的熵等于系统所包含的物质的熵的总和。

七、自由能和自由焓 (§ 18-7)

1. 自由能和最大功原理

(1) 从自由能的定义式

$$F = U - TS$$

可以看到,自由能 F 是内能 U 的一部分,在等温过程中,如果系统对外作功,最多也只能消耗内能中的自由能这部分。所以,自由能也称为资用能或可用能。

(2) 根据最大功原理,即

$$-\delta A \leq -dF,$$

只有在可逆的等温过程中,系统对外所作的功为最大,它等于系统自由能的减少。若将上式两边同乘以 -1 ,变为

$$\delta A \geq dF,$$

这表示,若要在等温条件下使系统的自由能增加相同的值,则外界必须对系统做功,并且只有在可逆过程中外界对系统所作的功才是最小的。

(3) 系统平衡的自由能判据

$$dF \leq 0$$

表示,在保持系统的温度和体积不变的条件下,对于各种可能的变动,不可逆过程只能沿自由能减小的方向进行,当达到平衡态时,系统的自由能为最小;而在可逆过程中,过程所经历的每一个状态都是平衡态,系统的自由能保持最低,并始终不变。

2. 自由焓和化学势

(1) 根据公式

$$-\delta A' \leq -dG,$$

可以得到,在等温、等压过程中,系统对外界所作的非膨胀功不会超过系统自由焓的减小,如果过程是可逆的,外界从系统获得的非膨胀功达到最大值,即等于系统自由焓的减小。若将上式两边同乘以 -1 ,变为

$$\delta A' \geq dG,$$

这表示,若要在等温、等压条件下使系统的自由焓增加相同的值,则外界对系统所作的非膨胀功以可逆过程为最小。

(2) 系统平衡的自由焓判据

$$dG \leq 0$$

表示,在等温、等压条件下,对于各种可能的变动,不可逆过程只能沿自由焓减小的方向进行,当达到平衡态时,系统的自由焓为最小;而在可逆过程中,过程所经历的每一个状态都是平衡态,系统的自由焓保持最低,并始终不变。

由于许多热力学过程(如化学反应、相变等)都是在大气压下进行的,所以这个判据有特殊的重要意义。

(3) 只包含一种化学组分的系统称为单元系,如果这样的物质系统是不均匀的,则称为单元复相系。这种系统中的每一个相,都可以转变为另一个相,所以对每一个相来说,都可以看作是一个与外界既有能量交换又有物质交换的开放系。当整个系统达到平衡时,各相之间必定处于相平衡和化学平衡,各相的化学势必定相等。

八、热力学第三定律 (§ 18-8)

1. 获得超低温的有效方法

(1) 绝热去磁法是目前获得超低温的有效的基本的方法。芬兰赫尔辛基大学的科学家们利用这种方法,已经获得了 800 pK 的超低温。

(2) 绝热去磁法的基本原理是由教材中的公式(18-75)来体现的,教材中

没有给出这个公式的证明,这是因为证明中用到了热力学中的一个关系式,这个关系式是

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p. \quad (1)$$

这个关系式是热力学中被称为麦克斯韦关系中的一个。为便于教师参考,我们就从这个麦克斯韦关系出发,来证明公式(18-75)。

先看一下式(1)的左边。根据教材中给出的代换关系,即式(18-70)

$$-\mu_0 \mathcal{H} \Rightarrow p, m \Rightarrow V,$$

应有

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{H}}\right)_s. \quad (2)$$

再看一下式(1)的右边。下面的关系显然成立

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p, \quad (3)$$

根据教材中式(18-72),应有

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_x = \frac{T}{C_x}, \quad (4)$$

由上述代换关系(18-70)和顺磁质系统的物态方程(18-74),可以得到

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_x = -\frac{CV\mathcal{H}}{T^2}, \quad (5)$$

将式(4)和式(5)代入式(3),得

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = -\frac{CV}{T}\mathcal{H}. \quad (6)$$

将式(2)和式(6)代入式(1),就得到公式(18-75),即

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{H}}\right)_s = \frac{\mu_0 CV}{C_x T}\mathcal{H}.$$

以上证明,仅供教师参考,学生可以直接从公式(18-75)中理解绝热去磁法的基本道理。

2. 热力学第三定律

(1) 热力学第三定律的两种表述

a) 能斯特定理:凝聚系统的熵在等温过程中的改变,随着绝对零度的趋近面趋于零,即

$$\lim_{T \rightarrow 0} (\Delta S)_T = 0;$$

b) 绝对零度不能到达原理:不可能通过有限次的手续使一个物体的温度降到绝对零度。

教材(下卷)中分别用了两幅图(图 18-19 和图 18-20)清晰地说明了热力

学第三定律的两种表述的等效性。

(2) 从教材(下卷)中图 18-19 所画曲线的情形可以看到,一个凝聚系统的包含不同参量的 $S-T$ 曲线都必定相交于坐标原点,即绝对零度处。实际上能斯特定理具有更加广泛的意义,它表明,无论是同一物质系统的不同状态,还是不同的物质系统,当温度趋于绝对零度时,其熵都趋于相同的值。

(3) 上述结论也正是普朗克于 1911 年提出绝对熵概念的依据。普朗克指出,当温度 $T \rightarrow 0$ 时,物质系统的熵 $S \rightarrow 0$ 。若用 C_V 表示系统的定体热容,则系统的绝对熵可以表示为

$$S(T, V) = \int_0^T \frac{C_V}{T} dT.$$

由于熵值 $S(T, V)$ 是有限的,故要求

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_V = 0.$$

尽管这个要求与经典结论相矛盾,但却与量子统计的结论相符合。这表明,热力学第三定律与量子力学规律相一致,是低温下实际物质系统量子性质的宏观表现。

(4) 不能由热力学第三定律的结论可由热力学第二定律推出就误认为,热力学第三定律已经包含在热力学第二定律之中。热力学第三定律是在 $T \rightarrow 0$ 的大量实验事实基础上总结出来的,它是适用于 $T \rightarrow 0$ 的极限情况下的热力学规律,特别是,热力学第三定律与量子力学规律相一致,是低温下物质系统量子性质的宏观表现,这就更能说明它是独立于热力学第二定律之外的另一条热力学定律。

九、统计物理学的基本概念 (§ 18-9)

1. 粒子运动状态的描述

(1) 对粒子运动状态的三种描述方法

a) 如果粒子遵从经典力学的运动规律,由这样的粒子组成的系统就是经典系统,可以用经典理论来描述;

b) 如果粒子遵从量子力学的运动规律,由这样的粒子组成的系统就是量子系统,应由量子力学的规律来描述;

c) 尽管从原则上说,对于微观粒子的运动应该采用量子力学的方法来描述,但是在统计物理学所处理的一些问题中,采用介于以上两种描述方法之间的半经典的描述方法,会使所处理的问题比较简便。因而半经典描述方法是统计物理学中使用的基本方法。

所谓半经典描述,就是一方面近似地用广义坐标和广义动量来描述微观粒子的运动状态,同时又对这种描述加上了量子力学的限制。

(2) 粒子运动状态的半经典描述

a) 如果粒子具有 r 个运动自由度, 那么任一时刻的运动状态可由 r 个广义坐标 $q_i (i=1, 2, \dots, r)$ 和 r 个广义动量 $p_i (i=1, 2, \dots, r)$ 在该时刻的值来确定, 由广义坐标和广义动量所构成的 $2r$ 维空间, 称为相空间。

b) 粒子在任一时刻的状态, 在相空间中就是一个点, 即相点; 粒子状态随时间的变化, 在相空间中就描绘了一条曲线, 这条曲线就是相轨。

以上两条都是经典力学中的概念, 下面要加上量子力学的限制。

c) 根据不确定关系, 某个方向的坐标的不确定量与该方向的动量的不确定量的乘积满足

$$\Delta q \Delta p \approx h,$$

所以, 上述粒子的运动状态(量子态)在相空间中不是一个点, 而是一个体积为 h^r 的体积元, 这个体积元称为相格。

d) 在相空间中, 体积为 $\Delta \tau$ 的体元内所包含的可能量子态数为 $\Delta \tau / h^r$ 。

2. 系统微观运动状态的描述

(1) 我们所讨论的系统仅限于由全同的和近独立的粒子组成的系统。

a) 所谓全同粒子, 就是组成系统的粒子是具有完全相同属性的同类粒子;

b) 所谓近独立粒子, 就是指系统中的粒子之间相互作用很弱, 相互作用的平均能量远小于单个粒子的平均能量, 因而系统的能量可以表示为单个粒子的能量之和。近独立粒子之间的相互作用很弱, 但不是完全没有相互作用, 否则粒子各自独立地运动, 系统就无从达到热力学平衡状态了。

(2) 系统在某时刻的微观运动状态, 就称为系统的微观态, 就是组成系统的 N 个粒子在该时刻的运动状态。

(3) 而要确定组成系统的 N 个粒子的运动状态, 可以分两步进行:

a) 第一步是得出每个能级 ϵ_i 上的粒子数 a_i , 即确定系统中的 N 个粒子分布在各个能级上的可能方式, 其中任一种分布方式可用符号 $\{a_i\}$ 来表示;

b) 第二步是对应于每种分布 $\{a_i\}$, 确定每个能级上的 a_i 个粒子对其 ω_i 个量子态的占据方式。

相应于一种分布 $\{a_i\}$, 系统的微观态数一般是很多的, 并且对于由不同性质粒子组成的不同系统, 每个能级上的 a_i 个粒子对其 ω_i 个量子态的占据方式是有很大差异的, 所以, 此微观态数也有显著差异, 有必要对不同的系统分别加以讨论。

3. 三种系统及其微观态数

(1) 玻尔兹曼系统

a) 这种系统是由可以分辨的、全同近独立的、且处于一个量子态上的粒子

数不受限制的粒子所组成的。

b) 要确定玻尔兹曼系统的微观态,在分布给定之后,还必须确定处于各个能级 ϵ_i 上的是哪 a_i 个粒子,以及每个能级 ϵ_i 的 ω_i 个简并量子态分别是由哪个或哪些粒子占据的。

c) 与分布 $\{a_i\}$ 相对应的微观态数可以表示为

$$\Omega_{\text{BM}} = \frac{N!}{\prod_i a_i!} \prod_i \omega_i^{a_i}.$$

(2) 玻色系统

a) 这种系统是由不可分辨的、全同近独立的、且处于一个量子态上的粒子数不受限制的玻色子所组成的。

b) 确定玻色系统的微观态,归结为确定每个量子态上的粒子数,即在分布给定之后,还必须确定每个能级 ϵ_i 上的 a_i 个粒子对 ω_i 个简并量子态的各种可能的占据方式。

c) 与分布 $\{a_i\}$ 相对应的微观态数可以表示为

$$\Omega_{\text{B}} = \prod_i \frac{(\omega_i + a_i - 1)!}{a_i! (\omega_i - 1)!}.$$

(3) 费米系统

a) 这种系统是由不可分辨的、全同近独立的、且受一个量子态最多只能由一个粒子占据限制的费米子所组成的。

b) 确定费米系统的微观态,归结为确定被粒子占据的量子态,即在分布给定之后,还必须确定每个能级 ϵ_i 上的 ω_i 个简并量子态中有 a_i 个量子态被占据的所有可能方式。

c) 与分布 $\{a_i\}$ 相对应的微观态数可以表示为

$$\Omega_{\text{F}} = \prod_i \frac{\omega_i!}{a_i! (\omega_i - a_i)!}.$$

(4) 以上三种系统的微观态数表达式是分别与各自系统的一定分布 $\{a_i\}$ 相对应的,而分布 $\{a_i\}$ 又是与各自系统的一定宏观态相对应的。那么系统所处的宏观态与各自系统在一定分布 $\{a_i\}$ 下的微观态数之间有什么关系呢?

不难想象,假如系统任何一个微观态出现的概率都相同,那么包含微观态数最多的那种分布 $\{a_i\}$,出现的概率必定是最大的,而出现概率最大的分布 $\{a_i\}$,必定是与系统所处的宏观态相对应的。这样,下面的问题就是分别对三种系统求出微观态数最多的那种分布 $\{a_i\}$,即最概然分布。

4. 等概率假设

(1) 系统的宏观态就是宏观物理量具有确定值的热力学平衡态。相应于同

一个宏观态,系统可以有大量的、各种不同的微观运动状态,其中的每一种就是系统的一个微观态。当系统处于一定宏观态时,其微观态仍然是不确定的,而且是在不断地变化着的,这些微观态各以一定的概率出现,成为统计方法中的偶然事件或随机事件。

(2) 统计物理学认为,在一定宏观条件下,系统整体的行为和特性是大量微观粒子运动的集体表现,宏观物理量是相应的微观物理量的统计平均值。所以,尽管系统的某一微观态的出现完全是偶然事件,而整个系统的行为和特性却是确定不变的。

所以,为了确定系统的宏观特性,只要知道各个微观态出现的概率,就可以用统计方法求出微观量的统计平均值。这样看来,确定各微观态出现的概率就成了统计物理学中带根本性的问题。

(3) 处于平衡态的孤立系统,其各个可能的微观态出现的概率是相等的。这就是等概率假设,是统计物理学中基本的也是惟一的假设,是平衡态统计物理学理论的基础和出发点。

这个简单的假设,看起来又是十分合理的。上面说过,相应于同一个宏观态,系统可以有大量的各种不同的微观态,而这大量的微观态都满足相同的宏观条件,因此,我们没有理由认为其中任何一个微观态会比其他微观态出现的概率更大些。

(4) 既然各个可能的微观态出现的概率都相等,那么包含微观态数最多的那种分布出现的概率必定是最大的,而出现概率最大的分布,必定与系统所处的宏观态相对应。

十、玻尔兹曼统计 (§ 18-10)

1. 玻尔兹曼系统的最概然分布——玻尔兹曼分布

(1) 既然与系统所处的宏观态相对应的分布是包含微观态数最多的那种分布,该分布出现的概率为最大,称为最概然分布,那么统计物理学的任务就是要求出最概然分布。

(2) 最概然分布必定是使 Ω_{BM} 为极大值的分布,根据这一思想,利用适当的数学方法,最后得到的最概然分布——玻尔兹曼分布为

$$a_i = \frac{N\omega_i e^{-\varepsilon_i/kT}}{\sum_i \omega_i e^{-\varepsilon_i/kT}} \quad (1)$$

此式是教材(下卷)中公式(18-99)和(18-100)的结合,它给出了在最概然分布下处于能级 ε_i 上的粒子数。

2. 麦克斯韦速度分布律

由上而的玻尔兹曼分布[即式(1)]经如下步骤,可以得到麦克斯韦速度分布

函数:

(1) 在气体系统中,粒子的能量表现为它的平动动能,所以

$$\epsilon_i = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2); \quad (2)$$

(2) 根据教材中公式(18-101),在半经典情况下,能级的简并度 ω_i 表现为相空间中体积元 $\Delta\mu_i$ 内所包含的相格的数目,故有

$$\omega_i = \frac{\Delta\mu_i}{h^3} = \frac{\Delta\mu_i}{h^3},$$

当气体系统的体积为 V 时,在动量范围 $p_x \sim p_x + dp_x, p_y \sim p_y + dp_y, p_z \sim p_z + dp_z$, 粒子可能的量子态数应为

$$\omega_i = \frac{\Delta\mu_i}{h^3} = \frac{V dp_x dp_y dp_z}{h^3}; \quad (3)$$

与教材中的式(18-86)一致。

(3) 有了上面的关系我们可以对式(1)中的分母进行计算:

$$\sum_i \omega_i e^{-\epsilon_i/kT} = \frac{V}{h^3} \int_0^\infty dp_x \int_0^\infty dp_y \int_0^\infty e^{-(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2mkT} dp_z = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2}; \quad (4)$$

(4) 将式(2)、(3)和(4)代入式(1),并把处于能级 ϵ_i 上的粒子数 a_i 改写为平动动量在 $p_x \sim p_x + dp_x, p_y \sim p_y + dp_y, p_z \sim p_z + dp_z$ 范围内的分子数 dN , 于是就得到

$$dN = N \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2mkT}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} dp_x dp_y dp_z. \quad (5)$$

(5) 将动量与速度的关系代入上式,就得到速度处于 $v_x \sim v_x + dv_x, v_y \sim v_y + dv_y, v_z \sim v_z + dv_z$ 范围内的分子数,为

$$dN = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z. \quad (6)$$

用系统的体积 V 除以上式,就得到在单位体积内,速度处于 $v_x \sim v_x + dv_x, v_y \sim v_y + dv_y, v_z \sim v_z + dv_z$ 范围内的分子数为

$$dn = n f dv_x dv_y dv_z = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z,$$

其中

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}, \quad (7)$$

就是麦克斯韦速度分布函数。引入速度空间的球坐标,立即可以由麦克斯韦速度分布函数得到麦克斯韦速率分布函数,正如教材中所表示的那样。

3. 在重力场中粒子按高度的分布

教材中采用了一种十分简便的方法推得了在重力场中粒子按高度的分布公式(18-114)。推导过程中应注意几个问题:

(1) 粒子总数 N 作为宏观约束条件,在推导过程中是非常重要的。首先让我们看教材中的式(18-113)是如何得到的。根据公式(18-101),应有

$$N = \sum_i a_i = \sum_i \frac{\Delta \mu_i}{h^3} e^{-\alpha - \beta \epsilon_i},$$

对所有能级的粒子求和自然就是粒子总数。将求和号改为积分号,上式变为

$$N = \int \frac{d\mu}{h^3} e^{-\alpha - \beta \epsilon} \quad (8)$$

式中 $d\mu$ 为相空间中宏观上无限小的相体积元,并表示为

$$d\mu = dx dy dz dp_x dp_y dp_z,$$

将上式代入式(8),得

$$N = \int \frac{1}{h^3} e^{-\alpha - \beta \epsilon} dx dy dz dp_x dp_y dp_z. \quad (9)$$

这就是教材中的式(18-113)。

(2) 公式

$$n = \iiint \frac{1}{h^3} e^{-\alpha - \beta \epsilon} dp_x dp_y dp_z \quad (10)$$

是如何得到的? 这是整个推导过程的关键步骤,必须十分清楚。

有的读者会认为,将式(9)对体积积分,就得到

$$N = \int \frac{1}{h^3} e^{-\alpha - \beta \epsilon} dx dy dz dp_x dp_y dp_z = \iiint \frac{V}{h^3} e^{-\alpha - \beta \epsilon} dp_x dp_y dp_z,$$

再两边同除以体积 V ,就得到了式(10)。这种做法是错误的。实际上,上式是不成立的,因为被积函数 $e^{-\beta \epsilon}$ 中包含了高度 z 因子,所以对 x 、 y 和 z 的积分不能得到体积 V 。

得到公式(10)的正确做法,应该由教材中式(18-112)和式(18-113)两式联立推得。将式(18-113)写得更详细一些,应为

$$N = \iiint \left[\iiint \frac{1}{h^3} e^{-\alpha - \beta \epsilon} dp_x dp_y dp_z \right] dx dy dz,$$

将式(18-112)代入上式,就得到了下面的恒等式:

$$\iiint [n] dx dy dz = \iiint \left[\iiint \frac{1}{h^3} e^{-\alpha - \beta \epsilon} dp_x dp_y dp_z \right] dx dy dz.$$

这个恒等式要成立,等号两边的被积函数必须相等,也就是等号两边的中括号部分必须相等,于是就得到了上面的式(10)。

(3) 最后结果中的 n_0 以及 ρ_0 、 p_0 ,分别是指高度为零处的粒子数密度、质量

密度和压强,应分别在等温条件下由实验测定。

4. 固体的热容和爱因斯坦理论

(1) 固体热容的杜隆-珀蒂定律表示,固体都具有相同的而且恒定的热容,其值 $C_V = 3Nk$ 。实验表明,在室温和高温下,大多数固体的热容都接近杜隆-珀蒂定律的值。但同时也发现,固体的热容随着温度的降低而减小,这与杜隆-珀蒂定律不一致。

(2) 爱因斯坦将量子理论与玻尔兹曼统计相结合,用于对固体热容的分析,成功地但只是定性地解释了固体热容随温度的降低而减小的实验事实。我们把这个理论的思想和问题归结为以下几点。

a) 爱因斯坦理论把固体中的原子的热运动看成是具有相同角频率 ω 的 $3N$ 个振子的振动,振子的能量利用了我们在 § 16-4 中已经熟悉的量子力学的结果,为

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), n = 0, 1, 2, \dots$$

b) 这 $3N$ 个振子遵从玻尔兹曼分布,并得到系统内能的如下表达式:

$$U = \frac{3N\hbar\omega}{2} + \frac{3N\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1},$$

这个关系是利用了玻尔兹曼分布和超出我们课程要求的热力学方法得到的,学习时可以作为已知关系来接受。

c) 爱因斯坦理论成功地解释了固体热容随温度的降低而减小的事实,但定量上是不对的。这是因为他采用的模型过于简化: $3N$ 个振子都以相同的频率振动;在低温下, $3N$ 个振子又同时被“冻结”。

十一、玻色统计和费米统计 (§ 18-11)

1. 玻色系统和费米系统的最概然分布

(1) 利用与推导玻尔兹曼分布相同的方法可以得出玻色系统和费米系统的粒子最概然分布,这两种系统的粒子最概然分布表示为

$$a_i = \frac{\omega_i}{e^{\alpha + \beta\epsilon_i} \mp 1},$$

式中减号对应玻色系统的粒子最概然分布,加号对应费米系统的粒子最概然分布。上式给出了,在孤立的玻色系统和费米系统中,处于平衡态时分布于能级 ϵ_i 上的粒子数。

(2) 最概然分布表达式中的 α 和 β 也是由宏观约束条件[即教材中的式(18-90)]确定的,然而确定的步骤涉及了超出我们课程要求的热力学方法,故不作要求,只承认所得结果就够了。所得结果是

$$\beta = \frac{1}{kT}, \alpha = -\frac{\mu}{kT}.$$

2. 光子气体

在学习这部分内容时,应熟练掌握以下几点。

(1) 由玻色分布[教材中式(18-132)]

$$a_i = \frac{\omega_i}{e^{\beta \epsilon_i} - 1},$$

按照教材中给出的步骤,得到在体积为 V 、角频率在 $\omega \sim \omega + d\omega$ 范围内辐射场的能量表达式[教材中式(18-133)]:

$$U(\omega, T)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}.$$

(2) 由式(18-133),按照教材中给出的步骤,得到黑体的单色辐出度表达式[教材中式(18-137)]:

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \left(\frac{1}{e^{\hbar c / \lambda kT} - 1} \right).$$

(3) 由辐射场的能量表达式[教材中式(18-133)],在高频近似和低频近似条件下分别得到维恩公式[教材中式(15-8)]和瑞利-金斯公式[教材中式(15-9)]。让我们分别加以推导。

a) 在高频条件下,可以由教材中的式(18-133)得到式(18-138)。用辐射场体积 V 除式(18-138)等号两边,并将角频率化为频率,得

$$\rho_\nu(T) d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} e^{-\hbar \nu / kT} d\nu,$$

利用关系式 $\nu = c / \lambda$ 和 $d\nu = -c d\lambda / \lambda^2$,将频率化为波长,上式可化为

$$\rho_\nu(T) d\nu = -\frac{8\pi c h}{\lambda^5} e^{-\hbar c / \lambda kT} d\lambda.$$

根据关系式 $\rho_\nu d\nu = -\rho_\lambda d\lambda$,由上式可得

$$\rho_\lambda(T) d\lambda = -\rho_\nu(T) d\nu = \frac{8\pi c h}{\lambda^5} e^{-\hbar c / \lambda kT} d\lambda,$$

所以

$$\rho_\lambda(T) = \frac{8\pi c h}{\lambda^5} e^{-\hbar c / \lambda kT}.$$

于是就得到

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{c}{4} \rho_\lambda(T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} e^{-\hbar c / \lambda kT}, \quad (1)$$

令

$$c_1 = 2\pi c^2 h, c_2 = \hbar c / k,$$

将上式代入式(1),得

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-c_2/\lambda T}. \quad (2)$$

这正是维恩公式在 § 15-1 中的形式[即教材中式(15-8)]。

b) 在低频条件下,可以由教材中的式(18-133)得到式(18-139)。用辐射场体积 V 除式(18-139)等号两边,并将角频率化为频率,得

$$\rho_\nu(T) d\nu = \frac{8\pi k T \nu^2}{c^3} d\nu,$$

利用关系式 $\nu = c/\lambda$ 和 $d\nu = -c d\lambda/\lambda^2$, 将频率化为波长,上式可化为

$$\rho_\nu(T) d\nu = -\frac{8\pi k T}{\lambda^4} d\lambda.$$

根据关系式 $\rho_\nu d\nu = -\rho_\lambda d\lambda$, 由上式可得

$$\rho_\lambda(T) d\lambda = -\rho_\nu(T) d\nu = \frac{8\pi k T}{\lambda^4} d\lambda,$$

所以

$$\rho_\lambda(T) = \frac{8\pi k T}{\lambda^4}.$$

于是就得到

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{c}{4} \rho_\lambda(T) = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4}. \quad (3)$$

这正是瑞利-金斯公式在 § 15-1 中的形式[即教材中式(15-9)]。

3. 玻色-爱因斯坦凝聚

(1) 有的读者会提出这样的问题:教材中式(18-145)的积分是从 $\epsilon = 0$ 积到 $\epsilon = \infty$, 其中包含了 $\epsilon = 0$ 的项,为什么教材中却说“在把式(18-142)的求和号改为积分时,无意中将 $\epsilon = 0$ 的项丢弃了”?

教材中式(18-142)的求和是表示对所有能级的粒子数求和,而此式并没有给出每个能级上到底有多少个粒子,当然也包括没有给出 $\epsilon = 0$ 的能级上有多少个粒子。

将求和改为积分后,情况就不同了。在 $\epsilon = 0$ 时,式(18-145)中被积函数的分子和分母都等于零,根据高等数学中的洛必达法则,该函数的值是等于零的。这就是说,式(18-145)已经明确地告诉我们,在把式(18-142)的求和改为积分后,也把在 $\epsilon = 0$ 能级的粒子数变为零。

实际情况是,在温度足够高时,处于 $\epsilon = 0$ 的能级的粒子数与总粒子数相比是个小数,可以忽略。而在低温时,粒子将尽可能占据最低能态,由于一个量子态的所能容纳的玻色子不受限制,当达到绝对零度时,玻色粒子将全部处于 $\epsilon = 0$ 的最低能级。

所以我们说,在把式(18-142)的求和改为积分时,无形中将处于 $\epsilon=0$ 能级的可观量的粒子丢弃了。当然,必须将这部分粒子添上去,正如教材中式(18-146)所表示的那样。

(2) 关于化学势 μ 的取值:教材中已经证明

$$\mu \leq 0,$$

并定义,当系统的温度降至 T_c 时, μ 达到零。有的读者会问:为什么在系统的温度处于 $T < T_c$ 时也可以取 μ 值为零?

凝聚温度 T_c 一般是很低的,例如,对于 ^4He ,若把 λ 相变看作是玻色-爱因斯坦凝聚,则 $T_\lambda = 2.17 \text{ K}$,而理论分析得到 $T_c = 3.13 \text{ K}$ 。所以,在 $T_c > T > 0$ 的狭小温度范围内,可以认为 μ 等于 T_c 时的值。

(3) 反映玻色-爱因斯坦凝聚的重要关系式[教材中式(18-147)]是如何得到的?

将式(18-145)简化,得

$$n = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\epsilon/kT_c} - 1} = \frac{2\pi}{h^3} (2mkT_c)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1}, \quad (1)$$

其中

$$x = \epsilon/kT_c, \quad \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} = 2.612 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

另外

$$n_{\epsilon>0} = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = \frac{2\pi}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{y^{1/2} dy}{e^y - 1}, \quad (2)$$

其中

$$y = \epsilon/kT, \quad \int_0^\infty \frac{y^{1/2} dy}{e^y - 1} = 2.612 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

比较式(1)和(2),可以得到

$$\frac{n_{\epsilon>0}}{n} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2},$$

所以

$$n_{\epsilon>0} = n \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (3)$$

根据第(1)点的分析,系统的总粒子数密度应该表示为

$$n = n_0 + n_{\epsilon>0} = n_0 + n \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2},$$

由上式可以解得,在系统的温度 $T < T_c$ 时,零能级粒子数密度 n_0 随温度的变化应为

$$n_0(T) = n \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]. \quad (4)$$

上式就是教材中的式(18-147)。由上式可以看到,在 $T < T_c$ 的范围内,随着温度的不断降低,零能级上的粒子数将不断增加,即粒子不断向零能级聚集,当温度达到绝对零度时,玻色粒子将全部处于零能级上,这就是玻色-爱因斯坦凝聚。

4. 金属中的自由电子气体

(1) 自由电子气体是金属中自由电子的简化模型,对此我们并不陌生,若用经典的玻尔兹曼统计处理,还可以解释金属的很多性质,如维德曼-弗兰兹定律等。

但是,根据经典的玻尔兹曼统计和由此得出的能量均分定理,每个自由电子对金属热容的贡献都是 $3k/2$,并且不随温度变化。金属中自由电子数与原子数相当,对金属热容应该有可观的贡献。而实验上却发现,除在极低温度的情况外,金属中自由电子的热容基本上可以忽略。这一与实验相悖的结论,引起了人们的关注。

(2) 在理解自由电子的热容的问题上,应注意掌握以下几点。

a) 式(18-150)向我们表明,在 $T \rightarrow 0$ 时,电子都分布在从能量最低的能级 $\epsilon = 0$ 到费米能级 $\epsilon = \epsilon_F(0)$ 之间的各个量子态上,而在能量大于费米能级的各个量子态,电子的平均数为零。

b) 理论计算得到,金属中自由电子的定体热容可表示为

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{Nk\pi^2}{2} \frac{kT}{\epsilon_F(0)},$$

其中 $\epsilon_F(0)$ 的数值是相当大的,例如,铜的费米能级 $\epsilon_F(0) = 1.1 \times 10^{-18} \text{ J}$ 。所以,在常温下,比值

$$\frac{kT}{\epsilon_F(0)} \approx \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 300}{1.1 \times 10^{-18}} = \frac{4.14 \times 10^{-21}}{1.1 \times 10^{-18}} = 3.8 \times 10^{-3}.$$

可见,在常温下,自由电子对热容的贡献在千分之几至百分之几的数量级。

c) 对上述结果的定性解释是:随着温度的升高,处于低能态的电子,要跃迁到能量大于 $\epsilon_F(0)$ 的较高能态上去,由于 $\epsilon_F(0) \gg kT$,它必须吸收很大的能量,依靠热激发难以实现。而那些处于 $\epsilon_F(0)$ 附近能态的电子受到热激发获得 kT 量级的能量,就可能发生这种跃迁。所以,只有在 $\epsilon_F(0)$ 附近、数量级为 kT 的能量范围内的能态的占据情况发生了变化,而其余绝大多数能态的占据情况并未改变。对热容有贡献的也就是这些处于 $\epsilon_F(0)$ 附近能态的极少数电子,而不是全部自由电子。

5. 晶格振动——声子以及元激发的概念

(1) 元激发的概念是量子统计方法应用的新发展,目前已经用于固体物理的多方面的研究之中,成为凝聚态物理学的重要组成部分,是固体理论的核心内容。关于元激发的概念,读者应了解以下几点。

a) 适用于处理具有强烈相互作用而又受到低能激发的多体系统中的热力学问题。

b) 利用元激发的概念可以处理凝聚态物理学中多方面的问题,例如,晶体结构中的原子之间具有强烈的相互作用,在低温下都处于自身的平衡位置附近作微振动,适合用元激发来处理。这样的原子系统相当于具有一定能量和动量的近独立的准粒子组成的理想气体系统,可用统计物理学方法方便地加以处理。这是用元激发的概念处理有关问题的基本思路。

c) 元激发的概念不能用于高能激发的情形,因为这时系统中的准粒子不再是近独立的,而是具有强烈相互作用的,准粒子不再有效;

元激发概念目前还无法应用于非周期体系、低维体系和细小体系,有待进一步探讨和研究。

(2) 声子就是上述元激发概念中的一种准粒子,是元激发概念在晶格振动问题上的应用实例。读者可以按照以下思路去理解这部分内容。

a) 构成晶体的 N 个原子之间具有强烈相互作用,在低温下都处于各自的平衡位置附近作三维的微振动,正符合用元激发来处理问题的条件。

b) 整个晶体共有 $3N$ 个自由度,可以引入 $3N$ 个坐标。系统的动能就是原子在各自的平衡位置附近作微振动的动能的总和;系统的势能就是原子之间的相互作用势能总和。系统的总能量就是这两部分能量的叠加,并可以用这 $3N$ 个坐标表示出来。

c) 在系统总能量的表达式中存在坐标交叉项的情况下,无法得到由单一坐标表示的简谐振子的振动方程,只有将交叉项变换成坐标的平方和的形式,才能得到这样的振动方程。所以必须对坐标进行线性变换,得到简正坐标。在简正坐标中,晶体中的原子在各自的平衡位置附近的微振动可以看做是 $3N$ 个近独立的谐振子的振动,称为简正振动,或称简正模。其中 $3N$ 个特征角频率 $\omega_i (i = 1, 2, \dots, 3N)$ 称为简正角频率。

d) 利用元激发的概念引入准粒子——声子。根据量子力学的结果,谐振子的能量为

$$\epsilon_i = \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_i, n_i = 0, 1, 2, \dots$$

具有某一角频率 ω_i 并处于量子数为 n_i 的激发态的简正模,相当于 n_i 个能量为 $\hbar \omega_i$ 的声子;不同简正模,具有不同的角频率,从而具有不同的能量和动量,对应

于不同量子态的声子,而处于某量子态的声子数,决定于该量子态所对应的能级;如果简正模由某一能级降低一个能级,量子数减小 1,相当于系统中减少了或消失了一个声子,相反,如果简正模由某一能级升高一个能级,量子数增加 1,相当于系统中增加了或产生了一个声子。

e) 固体中的格波波场可以看成由上述大量声子组成的理想气体系统,由于声子的自旋为零,属于玻色子,所以理想声子气体系统遵从玻色统计。然后利用玻色统计求得声子系统的内能,并由内能得到固体的热容,正如教材(下卷)中所叙述的那样。

[例题分析]

例题 18-1 理想气体系统的多方过程遵从方程式

$$pV^m = \text{恒量},$$

其中 m 是常量,称为多方指数。试推导上式,并求多方指数的表示式。

解 假设理想气体系统沿多方过程发生微小的变化,则有

$$\delta Q = C_m dT,$$

$$dU = C_V dT,$$

$$\delta A = -p dV.$$

将以上三式代入热力学第一定律

$$dU = \delta Q - p dV,$$

得到

$$(C_m - C_V) dT = p dV. \quad (1)$$

对理想气体物态方程微分,得

$$p dV + V dp = \nu R dT. \quad (2)$$

由以上两式消去 dT ,整理后得

$$(C_m - C_V - \nu R) p dV + (C_m - C_V) V dp = 0,$$

将关系式 $C_p = C_V + \nu R$ 代入上式,并用 pV 除之,上式可化为

$$(C_m - C_p) \frac{dV}{V} + (C_m - C_V) \frac{dp}{p} = 0,$$

或

$$\left(\frac{C_m - C_p}{C_m - C_V} \right) \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (3)$$

若令

$$m = \frac{C_m - C_p}{C_m - C_V}, \quad (4)$$

对式(3)积分,可得

$$pV^m = \text{恒量}, \quad (5)$$

上式就是多方过程方程式,多方指数 m 由式(4)所表示。

例题 18-2 某气体的物态方程可以表示为

$$p(V-b) = \nu RT,$$

而内能为 $U = C_V T + U_0$, 其中 C_V 、 U_0 以及上式中的 b 都是常量。试求该气体系统在绝热过程中由初态 (p_1, V_1) 到末态 (p_2, V_2) 外界所作的功。

解 在绝热过程中,外界对系统所作的功都表现为系统内能的增加,所以

$$A = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = C_V (T_2 - T_1), \quad (1)$$

由物态方程得

$$T_1 = \frac{p_1(V_1 - b)}{\nu R} \text{ 和 } T_2 = \frac{p_2(V_2 - b)}{\nu R} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1),得

$$A = \frac{C_V}{\nu R} [p_2(V_2 - b) - p_1(V_1 - b)].$$

例题 18-3 试求:

(1) 在温度为 T 时,平衡辐射场中光子气体的平均光子数密度;

(2) 在温度为 1 000 K 的平衡辐射中和温度为 2.7 K 的宇宙背景辐射中光子的数密度。

解

(1) 在 § 18-11 中我们把空腔内的辐射场看作光子气体系统,光子是玻色子,达到平衡时遵从玻色分布。根据式(18-132),光子气体的分布为

$$a_i = \frac{\omega_i}{e^{\beta \epsilon_i} - 1}.$$

考虑到左、右圆偏振两种状态,在体积为 V 的空腔内、角频率在 $\omega \sim \omega + d\omega$ 范围内光子的量子态数为

$$\omega_i = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega,$$

在体积为 V 的空腔内、角频率在 $\omega \sim \omega + d\omega$ 范围内的光子数,为

$$dN = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1},$$

所以,在温度为 T 时光子气体的平均光子数密度为

$$\bar{n} = \frac{dN}{V} = \int_0^\infty \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{k^3 T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\xi^2}{e^\xi - 1} d\xi.$$

其中积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi^2}{e^{\xi}-1} d\xi = 2.404,$$

所以

$$\bar{n} = \frac{2.404 k^3 T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} = 2.02 \times 10^7 T^3 \text{ m}^{-3}.$$

(2) 利用上面的结果,将温度值代入,就可以求得不同温度的辐射场的光子数密度。

在温度为 1 000 K 的平衡辐射中光子的数密度为

$$\bar{n}_{1\,000} = 2.02 \times 10^7 \times (1\,000)^3 \text{ m}^{-3} = 2.02 \times 10^{16} \text{ m}^{-3};$$

在温度为 2.7 K 的宇宙背景辐射中光子的数密度为

$$\bar{n}_{2.7} = 2.02 \times 10^7 \times (2.7)^3 = 3.98 \times 10^8 \text{ m}^{-3}.$$

[习题解答]

18-5 将 20 g 的氦气分别按照下述过程从 17 °C 升至 27 °C,试分别求出在这些过程中气体系统内能的变化、吸收的热量和外界对系统作的功:

- (1) 保持体积不变;
- (2) 保持压强不变;
- (3) 不与外界交换热量。

设氦气可看作理想气体,且 $C_V = 3\nu R/2$ 。

解

- (1) 保持体积不变:

外界对系统不作功

$$A = 0,$$

系统内能的变化为

$$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{3}{2} R \nu \Delta T = 6.23 \times 10^2 \text{ J},$$

吸收的热量为

$$Q_V = \Delta U = 6.23 \times 10^2 \text{ J}.$$

这表示,在系统体积不变的情况下,外界对系统不作功,系统从外界获得的热量全部用于内能的增加。

- (2) 保持压强不变:

吸收的热量

$$Q_p = C_p \Delta T = (C_V + \nu R) \Delta T = 1.04 \times 10^3 \text{ J},$$

系统内能的变化

$$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{3}{2} R \nu \Delta T = 6.23 \times 10^2 \text{ J},$$

外界对系统做功

$$A = \Delta U - Q_p = -4.16 \times 10^2 \text{ J}.$$

这表示,在系统保持压强不变的情况下,系统从外界获得的热量,一部分用于增加系统的内能,另一部分用于系统对外界做功。

(3) 不与外界交换热量,即绝热过程:

吸收的热量

$$Q = 0,$$

系统内能的变化

$$\Delta U = C_v \Delta T = \frac{3}{2} R \nu \Delta T = 6.23 \times 10^2 \text{ J},$$

外界对系统做功

$$A = \Delta U = 6.23 \times 10^2 \text{ J}.$$

这表示,在绝热条件下,系统与外界无热量交换,外界对系统所作的功全部用于内能的增加。

18-6 把标准状态下的 14 g 氮气压缩至原来体积的一半,试分别求出在下列过程中气体内能的变化、传递的热量和外界对系统作的功:

(1) 等温过程;

(2) 绝热过程;

(3) 等压过程。

设氮气可看作为理想气体,且 $C_v = 5\nu R/2$ 。

解

(1) 等温压缩过程:

外界对系统所作的功

$$A = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = - \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = 7.9 \times 10^2 \text{ J};$$

在等温过程中系统内能不变 $\Delta U = 0$;

传递的热量:根据热力学第一定律,有

$$Q = -A = -7.9 \times 10^2 \text{ J}.$$

这表示,在等温过程中,系统内能不变,外界对系统所作的功全部以热量的形式释放到外界。

(2) 绝热压缩过程:

$$Q = 0;$$

$$\Delta U = C_v \Delta T = C_v (T_2 - T_1) = C_v T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right),$$

根据绝热方程

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1},$$

其中

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4,$$

所以

$$\Delta U = C_v T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = 9.1 \times 10^2 \text{ J};$$

外界对系统所作的功

$$A = \Delta U = 9.1 \times 10^2 \text{ J}.$$

这表示,在绝热压缩过程中,外界对系统所作的功,全部用于系统内能的增加。

(3) 等压过程:

根据物态方程,在初态和末态分别有

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1,$$

$$pV_2 = \frac{m}{M}RT_2,$$

两式相除,得

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ 或 } \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_1},$$

所以

$$T_2 - T_1 = T_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right).$$

内能的增加为

$$\Delta U = C_v (T_2 - T_1) = C_v T_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = -1.42 \times 10^3 \text{ J};$$

系统获得的热量为

$$Q = C_p (T_2 - T_1) = C_p T_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = -1.99 \times 10^3 \text{ J};$$

外界对系统所作的功为

$$A = \Delta U - Q = (-1.42 + 1.99) \times 10^3 \text{ J} = 0.57 \times 10^3 \text{ J}.$$

这表示,在等压过程中,系统向外界释放热量,此热量来自于外界对系统所作的功和自身内能的减小。

18-7 在标准状态下的 16 g 氧气经过一绝热过程对外界做功 80 J。求末态的压强、体积和温度。设氧气为理想气体,且 $C_v = 5\nu R/2$, $\gamma = C_p/C_v = 1.4$ 。

解 系统对外界做功 80 J,即

$$A = -80 \text{ J},$$

在绝热过程中系统与外界无热量交换,所以

$$Q = 0,$$

根据热力学第一定律

$$\Delta U = A = -80 \text{ J},$$

这表示,在绝热过程中系统降低自身的内能而对外界做功。

系统初态的温度为 $T_1 = 273 \text{ K}$,系统内能的变化可以表示为

$$\Delta U = C_v(T_2 - T_1),$$

由此可求得末态的温度

$$T_2 = \frac{\Delta U}{C_v} + T_1 = \left[\frac{-80}{\frac{5}{2} \times \frac{16}{32} \times 8.31} + 273 \right] \text{K} = 265 \text{K} \approx 2.7 \times 10^2 \text{K}.$$

绝热方程可以写为

$$p_1^{\gamma-1} T_1^{-\gamma} = p_2^{\gamma-1} T_2^{-\gamma},$$

所以,可以求得末态的压强,为

$$p_2 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/\gamma-1} = 1 \times \left(\frac{265}{273} \right)^{1.4/0.4} \text{atm} = (0.901 \times 101\,325) \text{Pa} = 0.92 \times 10^5 \text{Pa}.$$

末态的体积为

$$V_2 = \frac{\frac{m}{M} RT_2}{p_2} = 1.2 \times 10^{-2} \text{m}^3.$$

18-8 8.0 g 氧气原先的温度为 27 °C, 体积为 0.41 dm³, 若经过绝热膨胀, 体积增至 4.1 dm³. 试计算气体在该绝热膨胀过程中对外界所作的功. 设氧气为理想气体, 且 $C_v = 5\nu R/2$.

解 在绝热过程中 $Q=0$, 所以

$$A = \Delta U. \quad (1)$$

内能的变化可以表示为

$$\Delta U = C_v(T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \frac{5}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \frac{5}{2} RT_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (2)$$

在绝热过程中有

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \quad (3)$$

将式(3)代入式(2), 得

$$\Delta U = \frac{m}{M} \frac{5}{2} RT_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \frac{m}{M} \frac{5}{2} RT_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = -9.4 \times 10^2 \text{J},$$

所以

$$A = -9.4 \times 10^2 \text{J}.$$

这表示, 在绝热膨胀过程中, 系统对外界作功是以降低自身的内能为代价的。

18-10 一制冷机在 $t_1 = 11\text{ }^\circ\text{C}$ 和 $t_2 = -10\text{ }^\circ\text{C}$ 之间工作, 若其循环可看作可逆卡诺循环的逆循环, 问每消耗 1 000 J 的功可由冷库中取走多少热量?

解 可逆卡诺循环的逆循环制冷系数可以表示为

$$\epsilon = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

将有关数据代入上式, 可以求得

$$\epsilon = \frac{263}{284 - 263} = 12.5.$$

每消耗 1 000 J 的功可从冷库中取走的热量为

$$Q_2 = \varepsilon A = 1.25 \times 10^4 \text{ J} \approx 1.3 \times 10^4 \text{ J}.$$

18-11 一理想气体系统作卡诺循环,当热源温度为 100°C ,冷却器温度为 0°C 时,作净功 800 J 。今若维持冷却器温度不变,提高热源温度,使净功增至 1600 J ,问热源的温度为多高?效率增大多少?设这两个循环都工作在相同的两条绝热曲线之间。

解 卡诺循环的效率可以表示为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

由上式可解得

$$Q_1 = \frac{AT_1}{T_1 - T_2} \text{ 和 } Q_2 = \frac{AT_2}{T_1 - T_2}.$$

若将 T_1 变为 T'_1 ,并使 T_2 保持不变,从以上关系可以看到,这时 Q_2 变成了 Q'_2 ,显然 Q'_2 可以表示为

$$Q'_2 = \frac{A'T_2}{T'_1 - T_2}.$$

现在需要知道的是 Q_2 与 Q'_2 之间存在什么关系?根据题意,循环都工作在相同的两条绝热曲线之间,并保持 T_2 不变。从教材中的图 18-13 可以看到,只要在相同的两条绝热曲线之间,并保持 T_2 不变, V_3 和 V_4 都不会改变,再根据式(18-40), Q_2 必定保持不变。所以

$$Q_2 = Q'_2,$$

即

$$\frac{AT_2}{T_1 - T_2} = \frac{A'T_2}{T'_1 - T_2},$$

由上式可以解得

$$T'_1 = \frac{A'(T_1 - T_2)}{A} + T_2 = 473 \text{ K}.$$

原先的效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{273}{373} = 26.8\%.$$

提高热源温度之后的效率为

$$\eta' = 1 - \frac{T_2}{T'_1} = 42.3\%,$$

效率增大量为

$$\Delta\eta = \eta' - \eta = 15.5\%.$$

18-12 有一以理想气体为工作物质的热机,其循环如图 18-1 所示。试证明其效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\frac{p_1}{p_2} - 1}.$$

解 CA 为等体过程,系统吸收热量 Q_1 ,

$$Q_1 = C_V(T_A - T_C),$$

并且

$$\frac{T_A}{T_C} = \frac{p_1}{p_2};$$

BC 为等压过程, 系统释放热量 Q_2

$$Q_2 = C_p (T_B - T_C),$$

并且

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{V_1}{V_2};$$

AB 为绝热过程, 系统与外界无热量交换。

所以该热机的效率为

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_p (T_B - T_C)}{C_v (T_A - T_C)} \\ &= 1 - \gamma \frac{\frac{T_B}{T_C} - 1}{\frac{T_A}{T_C} - 1} = 1 - \gamma \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\frac{p_1}{p_2} - 1}. \end{aligned}$$

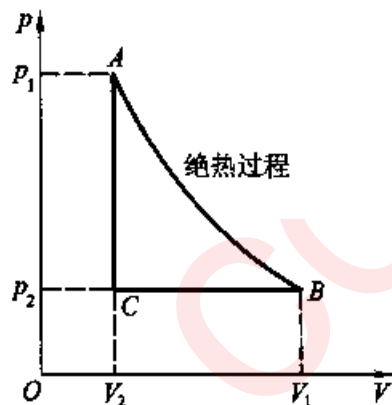


图 18-1

证毕。

18-13 证明一条绝热线与一条等温线不能有两个交点。

解 用反证法证明。

如果一条绝热线与一条等温线有两个交点, 如图 18-2 中的 A 和 B, 那么一定可以利用这两个交点之间的封闭区域作循环而连续对外界做功。在此循环中只有一个热源, 即从单一热源吸热而对外界做功。每经过一个循环, 系统的内能不变, 根据热力学第一定律, 有

$$Q = -A,$$

这表示, 每经过一个循环, 系统都会把从外界吸引的热量全部用于对外做功。这是违背热力学第二定律的, 因而不可能实现的。所以, 一条绝热线与一条等温线不能有两个交点。

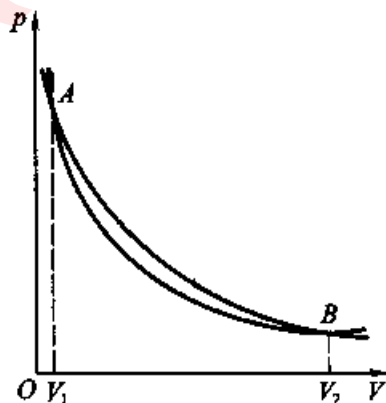


图 18-2

18-15 把盛有 1 mol 气体的容器等分为一百个小格, 如果分子处于任意一个小格内的概率都相等, 试计算所有分子都进入同一个小格的概率。

解

如果系统中只有 1 个分子, 这个分子处在某个特定小格的概率为 $\left(\frac{1}{100}\right)^1$,

如果系统中只有 2 个分子, 这 2 个分子同时处在某个特定小格的概率为 $\left(\frac{1}{100}\right)^2$,

.....

现在系统中有 N_0 个分子, 这 N_0 个分子同时处于某个特定小格的概率为

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{N_0} = \left(\frac{1}{100}\right)^{6.023 \times 10^{23}} = 10^{-1.204 \times 10^{24}}.$$

18-17 1.20 kg 的水在标准状态下凝结为冰, 求熵变, 并对结果作简要讨论。已知冰的

熔解热为 $3.35 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ 。

解 这是等温等压过程,并且水和冰在此条件下可以平衡共存,所以是可逆过程。水凝结为冰的熵变为

$$\Delta S_{\text{水}} = - \int \frac{\delta Q}{T} = - \frac{1}{T} \int \delta Q = - \frac{m\lambda}{T} = -1.47 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

上式中负号来自凝结过程水要向环境释放热量。上面的计算结果表示,凝结过程水的熵是降低的。

在水的凝结过程中,环境则是吸收热量的,熵是增加的,增加量为

$$\Delta S_{\text{环境}} = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int \delta Q = \frac{m\lambda}{T} = 1.47 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

水和环境总体的熵为

$$\Delta S = \Delta S_{\text{水}} + \Delta S_{\text{环境}} = 0,$$

所以,水和环境总体的熵是不变的。

18-18 10.6 mol 理想气体在等温过程中,体积膨胀到原来的两倍,求熵变。

解 将等温膨胀过程视为可逆过程,这就是说系统按照可逆等温过程体积膨胀为原来的2倍,即从 V 变到 $2V$ 。于是熵变为

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{dU + pdV}{T} = \int \frac{C_V dT + pdV}{T} = \int \frac{C_V dT}{T} + \int \frac{pdV}{T},$$

因为是等温过程, $dT=0$, 所以

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_V^{2V} \frac{pdV}{T} = \int_V^{2V} \frac{mR dV}{M V} = \frac{mR}{M} \ln 2 = 10.6 \times 8.31 \times \ln 2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \\ &= 61.1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}. \end{aligned}$$

18-19 在等压条件下将质量都是 1.0 kg、温度分别是 17°C 和 77°C 的水相混合,求熵的变化。已知水的定压比热 $c = 4.20 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。

解 混合后水的温度为

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 320 \text{ K}.$$

根据教材(下卷)244页例题 18-6 的结果,熵变为

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \frac{T^2}{T_1 T_2} = mc \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} = 37.1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

原先温度高的那部分水在混合过程中熵减小,原先温度低的那部分水在混合过程中熵增大,而总体的熵是增大的。

18-25 什么是 μ 空间? 什么是相格? 对于具有三个平动自由度的粒子,其 μ 空间中的相格的体积有多大?

解 按照经典力学规律,具有 r 个自由度的粒子在任一时刻的力学状态可以用粒子的 r 个广义坐标 q_1, q_2, \dots, q_r 和 r 个广义动量 p_1, p_2, \dots, p_r 在该时刻的数值来确定。以这 $2r$ 个变量作直角坐标所构成的一个 $2r$ 维空间,称为相空间,或 μ 空间;粒子在任意时刻的运动状态 $(q_1, q_2, \dots, q_r; p_1, p_2, \dots, p_r)$ 就是 μ 空间中的一个点,称为粒子运动状态的代表点;当粒子的运动状态在随时间变化时,对应于代表点在 μ 空间中移动,描绘出的轨迹称为相轨。

根据量子力学的规律,微观粒子具有波粒二重性,不可能同时具有确定的坐标和确定的

动量,坐标的不确定量 Δq 和动量的不确定量 Δp 满足不确定关系

$$\Delta q \Delta p \approx h.$$

在量子力学中,粒子的运动状态称为量子态,量子态用波函数来描述。

在半经典描述中,既认为粒子近似地沿经典力学轨道运动,用广义坐标 q 和广义动量 p 来描述,同时又对这种描述加上量子力学的限制,即坐标的不确定量 Δq 和动量的不确定量 Δp 满足上式。对于具有一个自由度的微观粒子, μ 空间是以 q 和 p 为直角坐标的二维平面。在这个二维平面上,粒子运动状态的代表点不再是一个点,而是面积为 h 的面元。这就是说,在二维 μ 空间中,一个面积为 h 的面积元代表粒子的一个可能的运动状态。对于具有 r 个自由度的微观粒子, μ 空间是一个 $2r$ 维空间,粒子运动状态的代表点变成了一个体积为 h^r 的体积元。这就是说,在 $2r$ 维 μ 空间中,一个体积为 h^r 的体积元代表粒子的一个可能的运动状态。这种体积为 h^r 的体积元就是相格, μ 空间的一个体积为 h^r 的相格对应于微观粒子的一个可能的量子态。

显然,对于具有三个平动自由度的粒子,其 μ 空间是一个 6 维空间,在这个空间中的相格的体积为 h^3 。

18-26 求具有三个平动自由度的粒子,在体积 V 内、动量的大小在 $p \sim p + dp$ 范围内可能的量子态数。

解 一个量子态对应体积为 h^3 的一个相格,所以在 $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ 内的量子态数为

$$\frac{dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{h^3}$$

在体积 V 内,动量在 $dp_x dp_y dp_z$ 范围内的量子态数为

$$\frac{V dp_x dp_y dp_z}{h^3};$$

在体积 V 内,动量的大小在 $p \sim p + dp$ 、动量的方向在 θ 到 $\theta + d\theta$, $\varphi \sim \varphi + d\varphi$ 范围内的量子态数为

$$d\Omega = \frac{V p^2 \sin \theta dp d\theta d\varphi}{h^3};$$

在体积 V 内,动量的大小在 $p \sim p + dp$ 内的量子态数为

$$\Omega = \int d\Omega = \frac{V p^2}{h^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi V p^2}{h^3} dp.$$

18-27 求具有三个平动自由度的粒子,在体积 V 内、能量在 $\epsilon \sim \epsilon + d\epsilon$ 范围内可能的量子态数。

解 粒子的能量与动量的关系为

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m},$$

由此可以得到

$$p^2 = 2m\epsilon,$$

$$dp = 2^{-1/2} m^{1/2} \epsilon^{-1/2} d\epsilon,$$

将以上三式代入上题(18-26) Ω 的表达式中,就可以得到在体积 V 内、能量在 $\epsilon \sim \epsilon + d\epsilon$ 范围内可能的量子态数为

$$\Omega = \frac{4\pi V p^2}{h^3} dp = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon.$$

18-32 试根据麦克斯韦速率分布律, 导出在玻尔兹曼系统中粒子按平动动能的分布律。

解 麦克斯韦速率分布律由速率分布函数表示为

$$\frac{dN}{N} = f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv. \quad (1)$$

分子的平动动能可表示为

$$\epsilon = \frac{1}{2} mv^2,$$

解得

$$v^2 = \frac{2\epsilon}{m}, \quad (2)$$

两边微分, 得

$$2v dv = \frac{2}{m} d\epsilon,$$

所以

$$dv = \frac{d\epsilon}{mv} = (2m\epsilon)^{-1/2} d\epsilon. \quad (3)$$

将式(2)和式(3)代入式(1), 得

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-\epsilon/kT} \epsilon^{1/2} d\epsilon,$$

于是, 就得到粒子按平动动能的分布函数

$$f(\epsilon) = \frac{dN}{Nd\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-\epsilon/kT} \epsilon^{1/2}.$$

18-33 根据上题得出的粒子按平动动能的分布律, 求:

- (1) 粒子的最概然平动动能;
- (2) 粒子的平均平动动能。

解

- (1) 粒子的最概然平动动能 ϵ_p

由

$$\left. \frac{df}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_p} = 0,$$

即

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \left[\frac{1}{2} \epsilon^{-1/2} e^{-\epsilon/kT} + \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/kT} \left(-\frac{1}{kT} \right) \right]_{\epsilon=\epsilon_p} = 0,$$

简化为

$$\left[\frac{1}{2} \epsilon^{-1/2} - \frac{1}{kT} \epsilon^{1/2} \right]_{\epsilon=\epsilon_p} = 0,$$

由此解得

$$\epsilon_p = \frac{1}{2} kT.$$

(2) 粒子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}$

$$\bar{\epsilon} = \int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \epsilon^{3/2} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon,$$

利用积分公式

$$\int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}},$$

得

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2}} = \frac{3}{2} kT.$$

18-34 求空气分子密度为海平面的一半处的高度。假设重力加速度和温度上下均匀。

解 设海平面空气分子密度为 n_0 , 在高度为 h 处, 空气分子密度 n 为 n_0 的一半, 即

$$n = \frac{1}{2} n_0.$$

所以

$$n = \frac{1}{2} n_0 = n_0 e^{-mgh/kT},$$

由此得到

$$\ln 2 = \frac{mgh}{kT},$$

所以

$$h = \frac{kT}{mg} \ln 2 = 0.693 \frac{RT}{Mg}.$$

如果取空气的摩尔质量为 $M = 28 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, 温度为 $T = 273 \text{ K}$, 代入上式, 得

$$h = 5.73 \times 10^3 \text{ m}.$$

18-35 假设在地球引力场中只存在一种气体, 其分子质量为 m , 试证明分子数密度分布可以表示为

$$n = n_0 e^{G \frac{m_{\oplus} m}{kT} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right)},$$

式中 n_0 是离地球中心的距离为 r_0 (大于地球的半径) 处的分子数密度, G 为万有引力常量, m_{\oplus} 为地球的质量。

解 气体分子与地球的引力势能可以表示为

$$\epsilon_p = -G \frac{m_{\oplus} m}{r},$$

显然, 在上式中, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon_p \rightarrow 0$, 设此处的分子数密度为 n' 。根据在保守场中粒子按势能的分布公式(18-114), 在 r 处的分子数密度为

$$n = n' e^{-\epsilon_p/kT} = n' e^{G \frac{m_{\oplus} m}{rkT}}, \quad (1)$$

在 $r = r_0$ 处, $n = n_0$, 根据上式, n_0 可以表示为

$$n_0 = n' e^{G \frac{m \oplus m}{r_0 k T}},$$

由上式解得

$$n' = n_0 e^{-G \frac{m \oplus m}{r_0 k T}}. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1), 得

$$n = n_0 e^{G \frac{m \oplus m}{k T} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} = n_0 e^{G \frac{m \oplus m}{k T} \left(\frac{r_0 - r}{r_0 r} \right)}.$$

证毕。

18-36 将由式(18-154)所表示的维恩公式, 变换为由式(14-8)所表示的形式。

解 普朗克公式可以写为

$$U(\omega, T) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega / k T} - 1}, \quad (1)$$

辐射场能量密度按频率的分布为

$$\rho_\nu(T) d\nu = \frac{U(\nu, T)}{V} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\hbar \nu / k T} - 1} = -\frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\hbar c / \lambda k T} - 1} \quad (2)$$

其中用到了关系式:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, d\nu = -\frac{c d\lambda}{\lambda^2}.$$

因为波长与频率成反比, 所以

$$\rho_\lambda(T) d\lambda = -\rho_\nu(T) d\nu, \quad (3)$$

将式(3)代入式(2), 得

$$\rho_\lambda(T) d\lambda = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\hbar c / \lambda k T} - 1},$$

或

$$\rho_\lambda(T) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\hbar c / \lambda k T} - 1}. \quad (4)$$

辐射场能量密度按波长的分布 $\rho_\lambda(T)$ 与其单色辐出度 $M_\lambda(T)$ 存在下面的关系:

$$M_\lambda(T) = \frac{c}{4} \rho_\lambda(T), \quad (5)$$

考虑到绝对黑体, 符号 $M_\lambda(T)$ 应写为 $M_{\lambda 0}(T)$, 故有

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\hbar c / \lambda k T} - 1} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2 / \lambda T} - 1}, \quad (6)$$

其中

$$c_1 = 2\pi h c^2, c_2 = \frac{\hbar c}{k}.$$

在高温下, 下面的式子近似成立:

$$\frac{c_2}{\lambda T} \gg 1, e^{c_2 / \lambda T} - 1 \approx e^{c_2 / \lambda T},$$

于是式(6)成为下面的形式:

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-c_2/\lambda T}.$$

这正是式(14-8)。

18-37 将由式(18-155)所表示的瑞利-金斯公式,变换为由式(14-9)所表示的形式。

解 根据上面得到的公式

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda T} - 1},$$

考虑到低温情况下的近似

$$e^{hc/\lambda T} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT}, \quad \frac{1}{e^{hc/\lambda T} - 1} \approx \frac{\lambda kT}{hc},$$

所以,可得到

$$M_{\lambda 0}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}.$$

这正是式(14-9)。

第十九章 原子核和粒子

[基本要求]

1. 了解原子核的一般性质和量子性质,包括原子核的电荷、质量、大小、形状及组成,还包括原子核的自旋、磁矩、宇称及统计性;了解原子核结构的壳层模型和集体模型的基本思想;

2. 理解核力的主要性质,以及目前对核力的认识;理解原子核结合能和质量亏损的涵义以及它们之间的关系,掌握重核裂变和轻核聚变释放结合能的基本道理和一般途径;

3. 掌握放射性衰变的指数衰变规律,理解衰变常量、半衰期和平均寿命的涵义以及它们之间的关系,掌握 α 衰变、 β 衰变和 γ 衰变的基本规律和主要特征;

4. 了解粒子物理研究的发展概况,了解描述粒子属性的物理量、场和粒子的关系,以及粒子之间相互作用及对粒子的分类;知道粒子物理的标准模型。

[概念阐释]

一、原子核的一般性质 (§ 19-1)

1. 原子核的组成

关于原子核的组成,应明确以下几点。

(1) 原子核是由质子和中子两种粒子组成的。

(2) 质子带有一元正元电荷 e ,质量为 $1.007\,277\,u$;中子是质量等于 $1.008\,665\,u$ 的中性粒子。它们统称为核子。

(3) 质子和中子是核子的两种状态,它们在质量上的微小差异是由其电性质的不同而引起的。在原子核内,中子是稳定粒子,而在原子核外,中子是不稳定的,一个自由中子的寿命是 $888.6\,s$,约为 $15\,min$,最后衰变为一个质子、一个电子和一个反中微子。即使在原子核内,在一定条件下,中子与质子之间也是可以互相转化的。

(4) 质子和中子都是由夸克组成的。

2. 原子核的质量数和电荷数

(1) 用原子质量单位量度原子核的质量,都接近整数,这个整数就是原子核

的质量数。原子核的质量数就是该原子核所包含的核子数。

(2) 原子核所包含的质子数就是该原子核的电荷数,也就是这种元素的原子序数。

(3) 几种特殊核素

a) 核素是具有相同质子数 Z 和相同中子数 N 的一类原子,也就是具有相同原子序数 Z 和质量数 A 的一类原子。

b) 同位素是质子数 Z 相同而中子数 N 不同的核素,它们在周期表上占据同一个位置。

c) 同中子异核素是具有相同中子数 N 、不同质子数 Z 的核素。

d) 同量异位素是具有相同质量数 A 的核素。

e) 同质异能素是具有相同质子数 Z 和相同中子数、但所处能量状态不同的核素,一般是指处于激发态和基态的核素。

3. 原子核的大小和形状

(1) 根据对原子核电矩的测定推断,认为原子核内电荷和物质的分布近似为球对称,不会有大的偏差。所以,可以用核半径表示原子核的大小。

(2) 原子核的电荷分布与质量数的关系,以及原子核的物质分布与质量数的关系,都满足相同的形式:

$$R = r_0 A^{1/3},$$

不过对于电荷分布 r_0 在 $1.20 \sim 1.32 \text{ fm}$, 对于质量分布 r_0 在 $1.4 \sim 1.5 \text{ fm}$ 。由此得到,原子核存在一个中子表层的结论。

二、原子核的量子性质 (§ 19-2)

1. 原子核的自旋和磁矩

(1) 原子核的自旋通常是指原子核的总角动量。中子和质子都是费米子,自旋都是 $\hbar/2$, 所以,对于偶偶核,自旋为零,对于奇偶核,自旋是 \hbar 的半奇数倍,对于奇奇核,自旋是 \hbar 的整数倍。

(2) 原子核有角动量,又有正电荷,因而也就具有磁矩。核磁矩及其大小分别由教材中的式(19-6)和式(19-7)所表示。关于原子核的磁矩,有以下几点需要指出。

a) 原子核的磁矩是由质子的磁矩和中子的磁矩共同提供的,其中质子的磁矩为 $\mu_p = 2.792\,847\,386(63)\mu_N$, 中子的磁矩为 $\mu_n = -1.913\,042\,75(45)\mu_N$ 。

b) 中子是电中性的,却具有磁矩,这表示其内部存在电结构。

c) 质子的磁矩不等于 μ_N , 中子的磁矩不等于零,所以把质子和中子的磁矩的实验值称为反常磁矩。有人认为,这种反常磁矩来源于与核力有关的带电 π 介子云。但目前对此尚无满意的解释。

d) 实验测得的原子核 g 因子有正有负, 所以核磁矩 μ_I 也有正有负, 数值在 $0 \sim 6$ 个核磁子之间。

2. 核磁共振

(1) 核磁矩在外磁场 B 的作用下, 能级发生分裂, 分裂后的能级间距为

$$\Delta E = g_I \mu_N B,$$

由于核磁子 μ_N 约等于玻尔磁子 μ_B 的 $1/1836$, 所以核磁共振发生在频率较低的射频波段。另外, 使用超导磁铁提高外磁场的磁感应强度, 从而增大能级间距 ΔE , 可使核磁共振谱仪具有很高的分辨率。

(2) 碳水化合物含有碳、氢和氧, 碳和氧元素中丰度大的 ^{12}C 和 ^{16}O 都是偶偶核, 核自旋为零, 对核磁共振无贡献, 虽然 ^{13}C 和 ^{17}O 的核自旋分别为 $1/2$ 和 $5/2$, 但在自然界的丰度很小, 核磁共振讯号很弱, 所以在碳水化合物中, 核磁共振讯号最强的就是 ^1H 。正是根据这一点, 核磁共振方法适用于对碳水化合物的测定。

3. 原子核的电四极矩

(1) 如果原子核内电荷是以球形分布的, 原子核的电偶极矩和电四极矩都等于零。

(2) 如果原子核内电荷是以旋转椭球形分布的, 原子核的电偶极矩等于零, 而电四极矩不等于零, 并可表示为

$$Q = \frac{2}{5} Z (c^2 - a^2).$$

电四极矩不为零的原子核, 其电四极矩值一般也都是很小的。

(3) 可以根据对原子核电四极矩的测量, 判断原子核的形状偏离球形的大小。

4. 原子核的字称和统计性

(1) 原子核的字称

a) 原子核的总宇称等于所有核子的内禀宇称与轨道宇称的乘积。因为核子的宇称为偶宇称, 所以核的宇称决定于它所包含的核子的轨道宇称。

b) 原子核内每个核子可以近似看作是在由其他核子提供的中心力场中独立运动, 所以它们的波函数中包含有关联勒让德函数 $P_l^m(\cos\theta)$, 这个函数的偶奇性决定于轨道角量子数 l 是偶数还是奇数, 即

$$\psi_i(-x, -y, -z, t) = (-1)^l \psi_i(x, y, z, t).$$

c) 原子核的波函数近似由各核子的波函数的乘积来描述, 即

$$\psi = \psi_1 \psi_2 \psi_3 \cdots,$$

所以原子核的宇称是各个核子轨道宇称的乘积, 决定于各核子的轨道角量子数

的总和 $\sum_i l_i$, 于是就有

$$P = (-1)^{\sum_i l_i}.$$

(2) 原子核的统计性

a) 全同性粒子系统中两个粒子互换是什么意思?

两个粒子互换, 是指这两个粒子的坐标和自旋互相交换, 对于全同性粒子, 粒子的性质是相同的, 自旋是相同的, 所以两个粒子互换就是它们的位置互相交换。

b) 两个粒子互换对系统波函数有何影响?

在全同性费米系统中, 任意两个粒子互换一次, 系统波函数要改变一次符号, 而在全同性玻色系统中, 任意两个粒子互换, 系统波函数的符号不变。

c) 原子核是费米子, 还是玻色子?

在全同性原子核系统中, 任意两个原子核互换, 相当于这两个原子核中的核子——对换, 由于核子是费米子, 一对核子互换, 系统波函数改变一次符号, 一对原子核中的核子全部对换完毕时, 系统波函数的符号一共改变了 $(-1)^A$ 次 (A 是原子核的质量数)。可见, A 为奇数的原子核是费米子, A 为偶数的原子核是玻色子。

三、核力 (§ 19-3)

1. 核力的性质

教材中对核力的性质归结为下面的五点:

- (1) 核力具有短程性和饱和性;
- (2) 核力是强相互作用, 比电磁力大两个数量级;
- (3) 核力与核子的带电状况无关;
- (4) 在两核子的距离小于 0.8 fm 时, 核力表现为强烈的斥力作用;
- (5) 核力的主要成分是有心力, 也混有非有心力成分。

这五点性质基本上概括了目前对核力的认识。

2. 核力的介子场理论

核力的介子场理论的要点包括以下几点。

(1) 核子之间的核力相互作用是通过介子场实现的, 介子场的场量子是介子, 或者说, 核子之间的核力相互作用是通过交换介子来实现的, 教材中图 19-4 所表示的费曼图就是这种相互作用的示意图;

(2) 上述情形与电荷之间的相互作用是通过电磁场实现的相类似, 电磁场的场量子是光子, 光子的静质量为零, 决定了电磁力是长程力; 而介子的静质量不为零, 这决定了核力是短程力;

(3) 表征质子和中子放出或吸收介子能力的耦合系数很大,这就决定了在近距离时核力远比电磁相互作用要强。

介子场理论在核力的长程范围是成功的,能够解释核力的某些性质是如何从自然界的更为根本的属性中产生出来的,但是在短程范围却遇到了严重困难。

3. 核力的夸克模型

根据核力的夸克模型,核子是由夸克构成的,夸克通过交换胶子而实现相互作用,这种相互作用称为色相互作用。核子之间的核力作用本质上是这种色相互作用的剩余效应。

四、原子核的结构模型概述 (§ 19-4)

1. 壳层模型

在理解原子核的壳层模型时应注意以下几点。

(1) 原子核像原子一样具有壳层结构,已为大量实验事实所证明,特别是自然界存在幻数核这一事实。

(2) 壳层模型认为每一个核子都处于其余 $A-1$ 个核子的联合作用所造成的球对称的平均中心势场中相对独立地运动。所以,用半径等于核半径的方势阱来代表这种短程核势,代入薛定谔方程,就可以从径向波动方程的解中得到相应于不同径向量子数和角量子数的一系列能级,这就是教材图 19-5 中虚线左侧的能级。但这样只能解释幻数 2、8 和 20,而不能得到幻数 28、50、82 和 126。

(3) 考虑了核子的自旋-轨道耦合作用之后,核子所处势场应该是在方势阱中加入核子的自旋-轨道耦合作用项。这就引起了能级的分裂,除了 $l=0$ 以外的所有能级都一分为二,并且与原子的能级相反, $j=l+1/2$ 的能级低于 $j=l-1/2$ 的能级。这就是教材图 19-5 中虚线右侧的能级分布。于是就得到了所有幻数。

(4) 原子核的壳层结构表示了核子的能量分布,并不表示核子的空间分布,核子的空间分布应该由描述核子量子态的波函数的模所决定的空间概率来表示。

2. 集体模型

集体模型也称综合模型,其基本思想是:

(1) 原子核内的核子在核力的作用下形成一个集体,并会发生集体运动,每个核子不是在静止的势场中运动,而是在变化的势场中运动。

(2) 原子核的集体运动包括振动和转动两种形式。对于球形核(质子和中子都构成完整壳层或接近于完整壳层的原子核),较低的能级主要是由形状振动引起的,而对于形变核(偏离完整壳层较远的原子核),较低的能级则主要是由转动引起的。

(3) 无论是振动还是转动,将其能量算符(即哈密顿算符)代入薛定谔方程求解,即可求得能量本征值,就得到了原子核的能谱规律。

五、原子核的稳定性和结合能 (§ 19-5)

1. 核素图和 β 稳定线

关于核素图和 β 稳定线应该掌握以下几点。

(1) 在以质子数 Z 为纵坐标、以中子数 N 为横坐标所构成的坐标系上,标出所有核素的位置就形成了核素图;在核素图上,将稳定核素所处的狭长带状区域的中心连成的一条光滑曲线,就是 β 稳定线。

(2) β 稳定线上侧的区域是缺中子核素区,此区域的核素具有 β^+ 放射性或放射质子的性质; β 稳定线下侧的区域是丰中子的核素区,此区域的核素具有 β^- 放射性或放射中子的性质。此两区域的核素经衰变转变为更靠近 β 稳定线的核素。

(3) 在 β 稳定线的起始段,曲线满足 $N = Z$,这表示,在稳定的轻核中,中子数与质子数相等;随着 Z 的增大, β 稳定线向 $N > Z$ 的方向偏离,这是由于随着 Z 的增大,库仑力比核力增加得更快,为保持核的稳定,必须用更多的中子提供更大的核力,来抵消库仑力的排斥作用。

(4) 理论预言,在 $Z = 114$ 附近,应该存在一个超重元素稳定岛;在不稳定海洋更遥远的地方,存在一个比岛大得多的“稳定洲”,那里有成千上万种稳定核素。

2. 原子核的结合能

原子核的质量略小于原子核所含核子的质量总和,这两者之间的差值就是该原子核的质量亏损。孤立的核子组成原子核时所释放出来的能量,就是该原子核的结合能。根据相对论质能关系,核的质量亏损与结合能 $B(Z, A)$ 之间的关系为

$$B(Z, A) = [Zm_p + (A - Z)m_n - m(Z, A)]c^2.$$

这里我们想向读者指出以下几个问题。

(1) 不少读者对于为什么核子结合成原子核时会释放能量感到困惑。我们可以举下面的例子来加以说明。取两块永磁体,并让它们的异性极相靠近,当把手松开时,两块永磁体会自动地吸在一起。在它们依靠磁场力而互相靠近并吸在一起的过程中,它们一定克服了桌面的摩擦力和空气的阻力而作功,周围的空气和桌面会发热。这岂不是也在释放能量吗?再想一下相反的过程,当把吸在一起的两块永磁体分离开来时,外界必须为克服它们之间的磁场力而作功,这部分功一定与先前结合在一起的过程中所释放出来的能量在数值上是相等的。这个例子可以帮助读者理解当核子结合成原子核时,必定要释放能量这一物理事

实。实际上,任何两个或多个相互吸引的分立体在组成一个束缚系统的过程中,都要释放结合能。如电子与原子核组成一个原子,几个原子组成一个分子等,只是在这些情况下释放的结合能比原子核的结合能小得多罢了。

(2) 质量亏损并不表示质量消失,也不能说质量转变为能量,而应该说物体的静能与动能之间的转换。

根据相对论关系,物体的总能量等于其动能 E_k 与其静能 $m_0 c^2$ 之和,即

$$mc^2 = E_k + m_0 c^2,$$

在一个孤立系统内无论发生何种变化,其总能量是守恒的,即变化前系统中所有物体的能量之和等于变化后系统中所有物体的能量之和,而系统或物体的静能与动能之间是可以相互转化的。物体的静能也是能量的一种形式,在一定条件下它可以转化为动能,并以热能、电磁能或化学能等其他能量形式释放出来。同样,相反的能量转变过程也可以发生。

当自由核子结合为原子核时,发生了质量亏损,这表示静能的一部分转换为动能,并以热能或光能的形式释放出来,这就是上面所说的结合能。当把原子核分裂为自由核子时,外界必须对核做功,做功的结果将使核子的静能增加,所以自由核子的质量之和大于原先原子核的质量。

(3) 原子核的核子平均结合能,也称为比结合能,定义为原子核的结合能与原子核内所包含的总核子数之比,即

$$\epsilon = \frac{B}{A}.$$

a) 核子平均结合能的大小反映了核内核子结合的牢固程度和原子核的稳定程度。由教材中图 19-11 可以看出,中等质量的核(质量数 A 在 40~120 之间)的核子平均结合能较大,表示这些原子核中核子的结合比较牢固,原子核比较稳定,而较轻的核和较重的核的核子平均结合能较小,稳定性较差。

b) 原子核的核子平均结合能与原子核的质量数的关系,向我们揭示了释放部分结合能的途径,这就是将核子平均结合能较小的原子核转变为核子平均结合能较大的原子核,具体地说,就是将轻核聚合为中等质量的核,或者将重核分裂为中等质量的核。

3. 结合能的释放和利用

(1) 重核裂变是将重核分裂为多个中等质量的核而释放出部分结合能的方法。

a) ${}_{92}^{238}\text{U}$ 需要用能量大于 1.1 MeV 的快中子轰击去引发裂变,而 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 只要用能量为 0.025 eV 的所谓热中子就能够引发裂变。

b) 要在短时间内释放出大量的核能,必须形成链式反应,使裂变过程自持地进行下去。

c) 要形成链式反应,使裂变过程自持地进行下去,核燃料的体积必须大于临界体积。据说直径为 4.8 cm 的纯 $^{235}_{92}\text{U}$ 小球的体积已经达到了临界体积。临界体积对应的质量称为临界质量,纯 $^{235}_{92}\text{U}$ 球的临界质量约为 1.0 kg。

d) 受控链式反应的装置就是核反应堆。在核反应堆内,人为地控制堆内的中子的数量,使链式反应强度维持在一定的平稳进行的水平上。

(2) 轻核聚变是将多个轻核聚合为中等质量的核而释放出部分结合能的方法。

a) 要使轻核(如氘核)相互接近从而发生聚变,外界必须为克服它们之间的库仑斥力而提供足够的能量,提供能量的合适方法就是加热。这种在高温下进行的轻核聚变称为热核反应。

b) 要从聚变反应中获得巨大能量,必须使聚变反应能够自持地进行下去。聚变反应得以自持,必须达到劳森判据的要求。

c) 实现受控热核反应的关键,是将温度高达 10^8 K 的聚变物质等离子体约束在一起足够长时间。最有希望的两种约束方案,是磁约束和激光惯性约束。

磁约束:带电粒子在磁场中作螺旋线运动,回旋半径与磁感应强度成反比。在很强的磁场中,每个带电粒子的活动空间都被约束在一根磁感应线附近的很小范围内。图 19-1 是环形磁场构成的磁约束装置的示意图。



图 19-1

激光惯性约束:将强激光束照射到直径约为几十到几百微米的氘氚靶丸上,靶丸表面的氘、氚核发生聚变并以高速向外喷射,由此产生的反冲力将靶丸内的氘、氚核迅速压缩至高密度,同时温度剧增,使聚变反应得以进行。

六、原子核衰变的基本规律(§ 19-6)

1. 放射性衰变

(1) 放射性衰变是不稳定核素的自发行为,不稳定核素在这种自发行为中,转变为另一种核素,并释放出粒子流。这种自发行为,就称为放射性衰变,简称衰变。

(2) 通常是按照衰变过程所释放的粒子流的种类或过程的特征,对衰变进行分类的。 α 衰变、 β 衰变和 γ 衰变,分别是指衰变过程释放出 α 粒子,正(或负)电子和光子,是本节所讨论的主要内容。

2. 放射性衰变的规律

(1) 在衰变过程中,母核数目在减少,遵从指数衰变规律

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

关于指数衰变规律,应注意以下几点。

a) 指数衰变规律也称衰变定律,是对大数原子核才成立的统计规律。

b) 衰变常量 λ 的大小表示母核随时间衰减的快慢,也表示一个原子核在单位时间内发生衰变的概率,对确定的放射性核素和确定的衰变方式, λ 是常量。所以,衰变常量 λ 是放射性核素的一个特征量。

c) 既然衰变常量 λ 是放射性核素的特征量,那么在同种放射性核素中每一个核的衰变概率都是相同的,并且各个核的衰变是彼此无关的。

(2) 放射性活度定义为单位时间内发生衰变的核的数目,用以表示放射性的强弱程度。放射性活度随时间的变化也遵从指数衰变规律

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

既然放射性活度遵从指数衰变规律,那么在衰变过程中,放射性核素发出的射线强度随时间的变化也遵从指数衰变规律。

(3) 半衰期和平均寿命也是放射性核素的特征量,它们与衰变常量之间有如下关系:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda},$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2} = 1.44 T.$$

每一种放射性核素都具有特定 λ 值、 T 值或 τ 值,我们可以根据其中的一个,来判断该核素是哪种放射性核素。

3. 放射系

(1) 放射系也称级联衰变链,表示放射性核素不断衰变,不断从一种核素转变为另一种核素,直到转变为稳定核素为止的整个过程。

(2) 已知的放射系有四个,即钍系、铀系、锕系和镎系,前三个是由天然放射性核素形成的,最后一个是由人工放射性核素形成的。

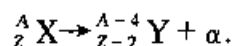
(3) 每个放射系都从一个半衰期最长的核素开始,经一系列衰变,到达一种稳定核素而结束。每一个放射系中所经历的核素的质量数满足特定规律,钍系满足 $A = 4n$,铀系满足 $A = 4n + 2$,锕系满足 $A = 4n + 3$,镎系满足 $A = 4n + 1$ 。

七、三类放射性衰变 (§ 19-7)

1. α 衰变和衰变能的概念

(1) α 衰变的基本特征

a) α 衰变可以一般地表示为



可见,子核的电荷数比母核减少 2,在元素周期表上的位置比母核向前移动两

位。所以上式所表示的规律,也称为 α 衰变的位移定则。

b) 在 α 衰变中, α 粒子的能谱总是分立谱。

(2) 原子核衰变时所释放出的能量就是衰变能,在 α 衰变中,衰变能等于 α 粒子的初动能和子核反冲动能之和,即

$$E_d = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_Y v_Y^2 = K_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_Y} \right) \approx K_\alpha \frac{A}{A-4}.$$

a) 因为衰变能等于母核与子核的相应能级之间的能量差,有确定值,所以,从上式可以得到 α 粒子的动能 K_α 只能取分立值的重要结论。

b) 测量 α 衰变所发射的 α 粒子的动能,是研究原子核能级结构的一种途径。

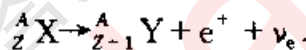
2. β 衰变和中微子假说

(1) β 衰变包括三种情况:

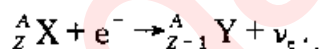
β^- 衰变



β^+ 衰变



电子俘获(EC)



从这三种情况看,在 β 衰变中,子核的质量数总是与母核的质量数相同,并且都伴随着电子中微子的产生:当子核的电荷数减少1时,产生电子中微子,当子核的电荷数增加1时,产生反电子中微子。

(2) 中微子假说的实验依据

a) 如果 β 衰变只是母核转变为子核并放出电子的过程,那么根据动量守恒定律,子核反冲的方向与电子的运动方向应处于同一直线上,而实验发现它们并不在同一条直线上。

b) 与 α 衰变相同, β 衰变过程也是在不同原子核能态之间的跃迁,衰变能必定是分立值,所以 β 电子的动能也应该是分立值。但实验确认,电子的动能可为从零到某一最大值 E_m 之间的任意值。

c) 如果 β 衰变只是母核转变为子核并放出电子的过程,那么由于 β 电子是费米子,自旋为 $1/2$,衰变前、后系统的自旋量子数是半整数的奇数倍还是偶数倍的情况必定要发生变化,也就是统计性必定要发生变化。但是实验却发现, β 衰变前、后原子核的自旋量子数是半整数的奇数倍还是偶数倍的情况不改变,也就是原子核是玻色子还是费米子的统计性不改变。

中微子的静质量几乎为零,不带电荷,是费米子,自旋量子数为 $1/2$ 。在 β 衰变中,在放出一个电子的同时,还释放出一个中微子,也就是,两个自旋量子数

都为 $1/2$ 的费米子同时离开母核,使上述矛盾得到了解决。

(3) 弱相互作用的 β 衰变理论的基本思想可以概括为以下几点:

a) β^- 衰变是原子核内的一个中子转变为质子的过程, β^+ 衰变和电子俘获是原子核内的质子转变为中子的过程,而质子和中子是核子的两个不同的状态;

b) 中子与质子之间的转变相当于量子态之间的跃迁,电子和中微子就是在这种跃迁过程中释放出来的,它们并不存在于原子核内;

c) 电子和中微子是与弱相互作用相联系的,正像 γ 光子是与电磁相互作用相联系的一样。

3. γ 衰变和穆斯堡尔效应

(1) γ 衰变也称 γ 跃迁,是原子核从高能态到低能态跃迁所发出的辐射。

a) 原子核从高能态到低能态跃迁所发出的 γ 光子,与原子从高能态到低能态跃迁所发出的 γ 光子无本质差异,仅表现为能量大小的不同。由于核子之间是以强大的核力相结合的,所以核能级间距比原子能级间距大得多,所发出的 γ 光子的能量也大得多。

b) 因为 γ 光子是与电磁相互作用相联系的,所以, γ 光子的辐射意味着原子核内电荷分布的变化或电流的变化。将电荷分布变化对 γ 跃迁的贡献,称为电多极跃迁;将电流的变化对 γ 跃迁的贡献,称为磁多极跃迁。读者只需了解 γ 跃迁包括这两类跃迁就够了。

(2) 内转换和同质异能素

a) 有时原子核从激发态到较低能态的跃迁并不放出光子,而是把能量直接交给核外电子,使电子脱离原子,这就是内转换。内转换电子的动能显然来自核能级跃迁所释放的能量 $E_i - E_x$,同时,核能级跃迁所释放的能量 $E_i - E_x$ 还必须支付内转换电子与原子的结合能 ϵ_i 才能使内转换电子脱离原子。所以就有下面的关系:

$$K_e + \epsilon_i = E_i - E_x,$$

这就是教材中的公式(19-54)。

b) 处于寿命较长的亚稳激发态的核素称为同质异能素。同质异能素与处于基态的核素相比,没有本质的差异,只是前者处于较高的能态。

(3) 处于激发态的原子核发射出的 γ 光子被另一个处于基态的同类核所吸收;而跃迁到激发态,这种现象称为穆斯堡尔效应。

a) 要发生或观测到穆斯堡尔效应的关键问题,就是尽可能地减小反冲能 E_R 。

b) 对于孤立核,无论是发射 γ 光子还是吸收 γ 光子,反冲是不可避免的,并且跃迁到激发态的同类核所需要吸收的 γ 光子的能量要比处于激发态的核在 γ 跃迁时发出的 γ 光子的能量大 $2E_R$,所以孤立原子核的穆斯堡尔效应是不可能

发生的。

c) 对于大数原子核来说,无论是所发射的 γ 光子的能量还是所吸收的 γ 光子的能量,都表现出一定的分布曲线,如教材中图 19-16 所示。无论是发射线还是吸收线,都有一定的宽度,常用自然线宽表示。自然线宽是指峰值的 $1/\sqrt{2}$ 处曲线的宽度,在图 19-2 中就是 a 、 b 两点间的距离($E_b - E_a$),在教材中用 Γ 表示。

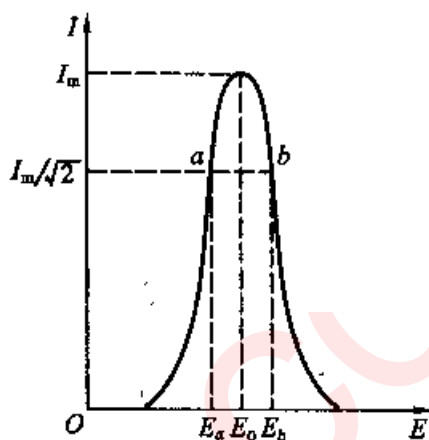


图 19-2

d) 如果原子核是束缚在晶体中的,那么无论是发射 γ 光子还是吸收 γ 光子,原子核发生的反冲很小,同时也不会引起晶格振动,即无声子过程,这时,穆斯堡尔效应可以显著地发生并被观测到。

4. 放射性同位素的应用

教材(下卷)第 306~308 页中对放射性同位素的应用作了较为全面而又简要的介绍,读者可以从中了解到,无论是在科学研究中,在国民经济中,还是在人们的日常生活中,放射性同位素都有十分重要和广泛的应用。

八、对粒子的探索和研究 (§ 19-8)

教材(下卷)中对粒子探索和研究过程的概况和一些重大事件进行了简要介绍,读者可以从中了解到粒子物理发展过程的一个侧面和粒子物理学中的一些前沿问题。

九、粒子及其相互作用 (§ 19-9)

1. 关于“基本”粒子

(1) 到 1956 年科恩(C. L. Cohen)和莱因斯(F. Reines)发现反中微子为止,人们已经认识的粒子有光子、电子、正电子、质子、反质子、中子、反中子、 μ 子、 π 介子、中微子和反中微子,并认为这些粒子是物质微观结构的最小单元。

(2) 此后,凡是与上述粒子可以相互作用和相互转化,并在当时实验认识水平上被认为同属于物质微观结构最小层次的粒子,都称为基本粒子。

(3) 到 20 世纪 60 年代,按照上述标准被列为“基本粒子”的粒子成倍增加,同时发现质子、中子和 π 介子等不是点粒子,而是半径在 0.8 fm 上下的实体,肯定存在内部结构。于是,统一规定不再使用“基本粒子”这个名称,而用粒子称呼之。

2. 粒子内在属性的描述

(1) 描述粒子内在属性的主要物理量有质量、寿命和宽度、电荷、自旋、重子数和同位旋等,教材中都作了简单介绍。一种粒子的内在属性的总和,是辨别粒子种类的依据。

(2) 除了上述这些描述粒子内在属性的物理量以外,还有许多表征粒子特性的物理量,这些物理量的取值反映了粒子参与相互作用的性质和行为,因为不同的粒子参与的相互作用的性质和行为是不同的。

3. 物质存在的基本形式

关于物质存在的基本形式的问题应注意以下各点。

(1) 粒子和场是物质存在的两种基本形式;在这两种基本形式中,场是更基本的,粒子只是场处于激发态的表现。

(2) 每种粒子都对应一种充满全空间的场,与各种不同粒子所对应的各种场互相重叠地充满全空间;场与粒子一样也具有质量、能量、动量和角动量,只是没有不可入性。

(3) 当一种场处于基态时,因为不会显现出直接的物理效应,所以不能观测到这种粒子的存在;当一种场处于激发态时,这种粒子就被观测到了,场的不同激发态表现为粒子的数目和运动状态的不同。

(4) 物理真空就是所有的场都处于基态的情况。所以,真空并不是空无一物,而是充满了各种场。

4. 粒子的相互作用

关于粒子的相互作用应掌握以下几点。

(1) 目前已经发现的粒子之间的相互作用有 3 种,即引力相互作用、电弱相互作用和强相互作用。

(2) 粒子之间的相互作用是通过交换媒介粒子实现的:引力相互作用的媒介粒子是引力子 g ;电弱相互作用的媒介粒子是光子 γ 、带正电的 W^+ 粒子、带负电的 W^- 粒子和不带电的 Z^0 粒子;强相互作用的媒介粒子则是介子和胶子。

(3) 相互作用力程的大小正比于媒介粒子质量的倒数。

(4) 粒子间的相互作用来自于场之间的相互作用,场之间的相互作用是粒子转化的原因。

5. 粒子的分类

按参与相互作用的性质,可以将自由状态存在的粒子分为以下 3 类:

(1) 规范玻色子:各种相互作用的媒介粒子都属于这一类,包括:

γ 、 W^+ 、 W^- 和 Z^0 ;胶子 G (8 种);引力子 g (1 种)。

共计 13 种规范玻色子。

(2) 轻子:不参与强相互作用的粒子都属于这一类,包括:

电子 e 、 μ 子和 τ 子, 以及它们的反粒子;

中微子 ν_e 、 ν_μ 和 ν_τ , 以及它们的反粒子。

共计 12 种轻子。

(3) 强子: 可以直接参与强相互作用的粒子都属于这一类, 已经发现的强子共 436 种, 分属于强子的以下类别:

强子	{	重子	{	核子: 包括质子和中子
		超子		
		介子		

6. 强子结构的夸克模型

教材中所列的六点已经全面而简要地说明了强子结构的夸克模型的基本思想, 为便于读者掌握, 这里我们想对有关的问题作一些说明和解释。

(1) 关于夸克的味和色

夸克的“味”和“色”是描述夸克状态的两个量子数, 不再具有它们原先字面的涵义。

组成强子的夸克包括 6 味, 即 u 、 d 、 c 、 s 、 b 和 t ; 每味夸克又分为 3 色, 即“红”、“蓝”和“绿”。共有 18 种, 连同它们的反粒子, 共有夸克 36 种。

某味某色夸克的反夸克, 用在符号上方加一小横表示, 例如, 上夸克 u 的反夸克表示为 \bar{u} , 下夸克 d 的反夸克表示为 \bar{d} , 顶夸克 t 的反夸克表示为 \bar{t} , 等等。

那么反夸克的色状态又是怎样的呢? 反夸克的色是对应夸克的色的互补色, 例如, 红夸克的反夸克是青(或称反红)色, 蓝夸克的反夸克是黄(或称反蓝色), 绿夸克的反夸克是品红(或称反绿)色。

(2) 关于胶子的色状态

夸克之间的相互作用是通过交换胶子来实现的, 夸克放出或吸收胶子时, 其所带色荷可以改变, 也可以不变。3 种色荷及其 3 种互补色色荷, 决定了胶子可以有 $3 \times 3 - 1 = 8$ 种复合色。所减掉的这 1 种, 根据群论的分析, 属于色单态, 不具有传递色相互作用的性质, 所以胶子不能有这种色。

(3) 关于强子的色状态

强子是无色的, 而组成强子的夸克却是带有色荷的。所以, 每个强子内部所有价夸克或价反夸克的色性质必须保证其总合为白色, 即整体对外来说相当于无色。

组成强子的几种夸克的色状态对强子整体的色性质的贡献, 与几种色光的混合相类似。对于色光的混合, 我们知道, 一种色光与其互补色光相加总为白色光, 三原色(红、蓝和绿)光相加也是白色光, 三原色的互补色(青、黄和品红)光相加还是白色光。

(4) 关于色相互作用的两种性质——色禁闭和渐近自由

a) 带色粒子之间的色相互作用并不随距离的增加而迅速减弱并从而使粒子最终互相独立而处于自由状态,只有由夸克和胶子组成的无色系统才可以自由地单独存在,带色的夸克和胶子只能存在于这个系统的内部。这就是色相互作用的禁闭性质。色相互作用的这种性质最先是根据实验事实提出的假设,至今尚未在理论上得到严格证明,尽管如此,仍被普遍接受。

b) 在高能物理过程中,被禁闭在强子内部的夸克和胶子又近乎是无相互作用的。色相互作用的这种性质,称为“渐近自由”。这种性质可以从理论上导出,它的许多推论已经得到实验的验证。

十、粒子物理的标准模型 (§ 19-10)

1. 三代费米子

这三代费米子都列在教材的表 19-3 中,由此表可见,每一代费米子都具有以下特点:

- (1) 每一代中的粒子的自旋都是 $1/2$;
- (2) 每一代的总电量都为零;
- (3) 每一代都包括 1 个中微子、1 个带电轻子和两味夸克,其中每味夸克都有三种色状态,共有 6 种夸克。所以每一代费米子都包含有 8 种粒子,加上它们的反粒子,共有 16 种粒子。

2. 基本相互作用

(1) 标准模型认为,微观物质的基本相互作用有 3 种,即色相互作用、电弱相互作用和引力相互作用。

(2) 3 种基本相互作用是通过规范玻色子作为媒介粒子实现的。

(3) 核子之间的强相互作用实际上是色相互作用的剩余效应,或者说是色相互作用的实验表现。

3. 规范玻色子

(1) 规范玻色子是 3 种基本相互作用的媒介粒子,共有 13 种,都列在教材的表 19-5 中。

(2) 实验上虽然还没有观测到自由状态下的胶子,但是它的存在已经有充分的实验验证。

(3) 目前还没有引力子 g 存在的直接实验证据。多年来,天体物理学家从多方面力图观测远方星体运动所发出的引力波,都没有取得肯定的结果。

(4) 希格斯(Higgs)粒子虽然不属于规范玻色子,但与规范玻色子有密切关系。按照电弱统一理论,电弱相互作用的对称性自发破缺,而分解为性质极不相同的电磁相互作用和弱相互作用。在实现电弱相互作用的对称性自发破缺后,自然界至少应有一种中性的希格斯粒子存在。理论上对这种粒子的所有相互作

用性质和运动行为都作了精确的描绘和预言。实验上寻找希格斯粒子也是当前粒子物理研究的中心课题之一。

[例题分析]

例题 19-1 计算原子核的核物质密度。

解 核物质分布的半径为

$$R = r_0 A^{1/3},$$

其中 $r_0 = 1.20 \times 10^{-15} \text{ m}$ 。原子核的质量为

$$m = A u.$$

所以核物质密度为

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A u}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{u}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{1.6605 \times 10^{-27}}{\frac{4}{3}\pi \times (1.20 \times 10^{-15})^3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ &= 2.29 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \end{aligned}$$

也可以用另一种方法求解。先让我们看一下质量数 A 与原子核的质量 m 的比值 A/m , 其中 A 若以 g 为单位就是原子核的摩尔质量, 即 1 摩尔原子核的质量, 所以

$$\frac{A}{m} = \frac{1 \text{ mol 原子核的质量}}{1 \text{ 个原子核的质量}} = 1 \text{ mol 原子核所包含核的数目} = N_A,$$

可见比值 A/m 就等于阿伏伽德罗常量 N_A 。所以

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3}{4\pi r_0^3 \frac{A}{m}} = \frac{3}{4\pi r_0^3 N_A} = 2.29 \times 10^{20} \text{ g} \cdot \text{m}^{-3} \\ &= 2.29 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \end{aligned}$$

例题 19-2 考古发现一古生物遗骸, 测量其 ^{14}C 的 β^- 放射性, 得到每公斤遗骸样品的放射性活度为 133.3 Bq , 为断定该遗骸生活的年代, 测量了现今仍然存活同类生物体的 ^{14}C 的 β^- 放射性活度, 得到每公斤样品为 208.3 Bq 。试求该古生物遗骸生活的年代距今多少年。

解 已知 ^{14}C 的半衰期为 5370 a 。半衰期 T 与衰变常量 λ 的关系为

$$\lambda = \frac{0.693}{T}.$$

根据题意, 该生物遗骸在刚死亡时, 其体内所包含的 ^{14}C 的放射性活度与现今活着的同类生物体的 ^{14}C 的放射性活度是相同的, 经过了时间 t , ^{14}C 的放射性活度减弱为 133.3 Bq 。根据衰变规律, 放射性活度是随时间按指数规律衰减的, 即

$$A = A_0 e^{-\lambda t},$$

由上式可以解出时间 t , 得到

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_0}{A} = \frac{T}{0.693} \ln \frac{208.3}{133.3} = \frac{5\,730}{0.693} \times 0.446\,4\,a = 3\,691\,a.$$

该生物遗骸死亡的时间是在距今 3691 年。

例题 19-3 在医学上有广泛应用的钴放射性同位素 $^{60}_{27}\text{Co}$ 的半衰期为 5.27 a。试求:

(1) $^{60}_{27}\text{Co}$ 的衰变常量;

(2) 要达到 $3.7 \times 10^7\text{ Bq}$ 的放射性活度所需钴同位素的质量。

解

(1) 将半衰期的单位化为 s:

$$T = 5.27 \times 365 \times 24 \times 3\,600\text{ s} = 1.66 \times 10^8\text{ s}.$$

根据衰变常量与半衰期的关系可以求得衰变常量, 为

$$\lambda = \frac{0.693}{T} = \frac{0.693}{1.66 \times 10^8\text{ s}^{-1}} = 4.17 \times 10^{-9}\text{ s}^{-1}.$$

(2) 先根据所需放射性活度求出母核的数目, 再由母核的数目算出核素的质量。

要达到 $A = 3.7 \times 10^7\text{ Bq}$ 的放射性活度, 所需母核的数目为

$$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{3.70 \times 10^7}{4.17 \times 10^{-9}} = 8.87 \times 10^{15} (\text{个}).$$

1 mol 钴核素的质量是 $60.0 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, 其中包含的核的数目等于阿伏伽德罗常量 $N_A = 6.022 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$ 。所以, 可以算得包含了 N 个核的钴的质量, 为

$$m = \frac{N}{N_A} \times 60.0 \times 10^{-3} = \frac{8.87 \times 10^{15}}{6.022 \times 10^{23}} \times 60.0 \times 10^{-3}\text{ kg} = 8.84 \times 10^{-10}\text{ kg}.$$

随着衰变过程的进行, 钴核素的质量将减少, 放射性活度也将按指数规律衰减。

[习题解答]

19-1 一个来自 ^{226}Ra 衰变的能量为 4.7 MeV 的 α 粒子, 与金核发生正碰, 求此 α 粒子最接近金核中心处的距离为多大?

解 在 α 粒子与金核 ($_{79}\text{Au}$) 发生正碰的情况下, 设在相距甚远时 α 粒子的动能为 E_k , 当两者相距 r 时, α 粒子的瞬时速度变为零。所以, α 粒子将自身的动能 E_k 全部用于克服它与金核之间的斥力而做功, 根据动能定理, 斥力对质点所作的功等于质点动能的增量, 故有

$$A = 0 - E_k = -E_k,$$

其中 A 为斥力对 α 粒子所作的功。同时, 根据势能的规律, 保守力 (在此是斥力) 所作的功等

于势能增量的负值,即

$$A = -(E_p - 0) = -E_p.$$

由以上两式,得

$$E_k = E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

所以

$$r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 E_k} = \frac{(2 \times 79) \times (1.602 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \times 4.7 \times 10^6 \times 1.602 \times 10^{-19}} \text{ m} = 4.8 \times 10^{-14} \text{ m}.$$

19-2 试计算核物质的密度。

解 解答见上面[例题分析]中的例题 19-1。

19-3 在 $^{13}_7\text{N}$ 、 $^{17}_8\text{O}$ 和 $^{64}_{30}\text{Zn}$ 中各有多少质子和中子?

解

$$^{13}_7\text{N}: Z=7, N=6; \quad ^{17}_8\text{O}: Z=8, N=9; \quad ^{64}_{30}\text{Zn}: Z=30, N=34.$$

19-6 如果原子核的自旋量子数为 j , 那么该原子核的核磁矩的大小如何表示? 此核处于磁感应强度为 B 的磁场中, 核磁矩与磁场的相互作用能为多大? 分裂后的能级间距为多大?

解 核磁矩的大小为

$$\mu_j = g_j \mu_N j.$$

核磁矩与外磁场的相互作用能为

$$E = -\mu_j \cdot B = -g_j \mu_N \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} = -g_j \mu_N B m_j, \quad m_j = j, (j-1), \dots, -(j-1), -j.$$

分裂后的能级间距为

$$\Delta E = g_j \mu_N B.$$

19-13 计算 $^{232}_{90}\text{Th}$ 原子核的核子平均结合能。已知 $^{232}_{90}\text{Th}$ 的原子质量为 232.038 21 u, 氢原子质量 m_H 和中子的质量 m_n 分别为 1.007 830 u 和 1.008 665 u。

解 $^{232}_{90}\text{Th}$ 核的质量亏损为

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_x,$$

其中

$$Z=90, A=232, m_x=232.038 \text{ u}, m_H=1.007 \text{ u}, m_n=1.008 \text{ u}.$$

将这些数据代入上式可算的质量亏损, 为

$$\Delta m = 1.896 \text{ u}.$$

核子的平均结合能为

$$\bar{\epsilon}_0 = \frac{\Delta mc^2}{A} = \frac{1.896 \text{ u} \times 931.501}{232} \text{ MeV} = 7.616 \text{ MeV}.$$

19-14 已知氢原子质量 m_H 和中子的质量 m_n 分别为 1.007 830 u 和 1.008 665 u, $^{12}_6\text{C}$ 的原子质量为 12.000 000 u, 计算 $^{12}_6\text{C}$ 核的核子平均结合能。

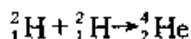
解 $^{12}_6\text{C}$ 核的质量亏损为

$$\begin{aligned} \Delta m &= Zm_H + (A - Z)m_n - m_x = 6 \times 1.007 \text{ u} + 6 \times 1.008 \text{ u} - 12.000 \text{ u} \\ &= 0.098 \text{ u}. \end{aligned}$$

核子的平均结合能为

$$\bar{\epsilon}_0 = \frac{\Delta mc^2}{A} = \frac{0.098\,97 \times 931.501}{12} \text{ MeV} = 7.683 \text{ MeV}.$$

19-16 计算在聚变反应



中所释放出来的能量,并分别用 J 和 MeV 为单位表示结果。已知氘原子的质量为 2.014 10 u, 氦原子的质量为 4.002 60 u。

解 已知氘原子和氦原子的质量分别为 2.014 10 u 和 4.002 60 u, 根据题意所要求的聚变反应, 可以得出氦核的质量亏损为

$$\Delta m = 2m_{\text{D}} - m_{\text{He}} = (2 \times 2.014\,10 - 4.002\,60)\text{u} = 2.56 \times 10^{-2} \text{ u}.$$

释放的能量为

$$\epsilon = \Delta mc^2 = 2.56 \times 10^{-2} \times 1.660\,54 \times 10^{-27} \times (2.997\,9 \times 10^8)^2 \text{ J} = 3.82 \times 10^{-12} \text{ J},$$

或者

$$\epsilon = 2.56 \times 10^{-2} \times 931.501 \text{ MeV} = 23.8 \text{ MeV}.$$

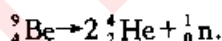
19-17 试计算 1 mol 的氘气(双原子分子)在上题的聚变反应中, 所释放出来的总能量是多少?

解 释放出来的总能量为

$$\begin{aligned} E &= N_A \epsilon = 6.022\,14 \times 10^{23} \times 23.8 \text{ MeV} = 1.43 \times 10^{25} \text{ MeV}. \\ &= 6.022\,14 \times 10^{23} \times 3.82 \times 10^{-12} \text{ J} = 2.30 \times 10^{12} \text{ J}. \end{aligned}$$

19-18 在 ${}^9_4\text{Be}$ 核和 ${}^4_2\text{He}$ 核内核子的平均结合能分别为 6.45 MeV 和 7.07 MeV, 要把 ${}^9_4\text{Be}$ 核分裂为两个 α 粒子和一个中子, 必须耗费多大能量?

解 反应过程可以写为



若将 ${}^9_4\text{Be}$ 核分散为 9 个核子, 外界需提供的能量为

$$\Delta E_1 = 9\bar{\epsilon}_0 = 58.05 \text{ MeV},$$

将其中 8 个核子结合成 2 个 ${}^4_2\text{He}$ 核所释放出来的能量为

$$\Delta E_2 = 8\bar{\epsilon}'_0 = 8 \times 7.07 \text{ MeV} = 56.56 \text{ MeV}.$$

所以, 要把 ${}^9_4\text{Be}$ 核分裂为两个 α 粒子和一个中子外界必须耗费的能量为

$$\Delta E = \Delta E_1 - \Delta E_2 = 1.49 \text{ MeV}.$$

19-20 已知放射性碘(${}^{131}\text{I}$)的半衰期为 8.0 d, 试求:

- (1) 衰变常量;
- (2) 1 mCi 的放射性活度需要碘同位素的质量。

解

(1) 衰变常量

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0.693}{8.0 \times 86\,400} \text{ s}^{-1} = 1.0 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

(2) 因为

$$1 \text{ mCi} = 3.7 \times 10^7 \text{ Bq},$$

所以,要达到 3.7×10^7 Bq 的放射性活度所需母核的数目为

$$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{3.7 \times 10^7}{1.0 \times 10^{-6}} = 3.7 \times 10^{13} \text{ 个}.$$

1 mol 碘同位素的质量为 0.131 kg, 其中包含的核的数目等于 $N_A = 6.022 \times 10^{23}$, 于是需要碘同位素的质量为

$$m = \frac{N}{N_A} \times 0.131 \text{ kg} = 8.1 \times 10^{-12} \text{ kg}.$$

19-21 已知镭的半衰期是 1 600 a, 求衰变常量和镭核的平均寿命。

解 镭的半衰期

$$T = (1\,600 \times 365.25 \times 24 \times 3\,600) \text{ s} = 5.049 \times 10^{10} \text{ s},$$

衰变常量为

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 1.373 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1},$$

平均寿命为

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 7.284 \times 10^{10} \text{ s}.$$

19-22 用计数器测量某放射性同位素的放射性活度, 某瞬间测得计数是 $4\,750 \text{ min}^{-1}$, 5 min 以后又测得计数是 $2\,700 \text{ min}^{-1}$ 。求这种放射性同位素的衰变常量、半衰期和核的平均寿命。

解 设 $t=0$ 时该放射性同位素的放射性活度 $A_0 = 4\,750 \text{ min}^{-1}$, 5 min 后测得的放射性活度为 $A = 2\,700 \text{ min}^{-1}$, 则有

$$A_0 = \lambda N_0,$$

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}.$$

于是得

$$\frac{A_0}{A} = e^{\lambda t},$$

取对数, 得

$$\ln \frac{A_0}{A} = \lambda t,$$

这种放射性同位素的衰变常量为

$$\lambda = \frac{\ln(A_0/A)}{t} = \frac{0.564\,9}{300.0} \text{ s}^{-1} = 1.883 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

半衰期为

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693\,15}{1.883 \times 10^{-3}} = 3.681 \times 10^2 \text{ s}.$$

平均寿命为

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 5.311 \times 10^2 \text{ s}.$$

19-24 $^{226}_{88}\text{Ra}$ 核经 α 衰变转变为 $^{222}_{86}\text{Rn}$, 并释放出两组能量分别是 4.793 MeV 和 4.612 MeV 的 α 粒子, 它们分别对应于从 $^{226}_{88}\text{Ra}$ 的同一个能级到 $^{222}_{86}\text{Rn}$ 的激发态和基态的跃迁

所发出的。同时,在 $^{226}_{88}\text{Ra}$ 的上述衰变中还观测到 γ 射线的发射,这是 $^{222}_{86}\text{Rn}$ 从激发态到基态的跃迁发出的。试求与两组 α 粒子相对应的 $^{226}_{88}\text{Ra}$ 的衰变能和 γ 光子的频率。

解 根据公式(19-39),与第一组 α 粒子相对应的衰变能为

$$E_{\alpha 1} = K_{\alpha 1} \frac{A}{A-4} = 4.793 \times \frac{226}{222} \text{ MeV} = 4.879 \text{ MeV};$$

与第二组 α 粒子相对应的衰变能为

$$E_{\alpha 2} = K_{\alpha 2} \frac{A}{A-4} = 4.612 \times \frac{226}{222} \text{ MeV} = 4.695 \text{ MeV}.$$

$^{222}_{86}\text{Rn}$ 的两能级差为

$$\Delta E = E_{\alpha 1} - E_{\alpha 2} = (4.879 - 4.695) \text{ MeV} = 0.184 \text{ MeV},$$

光子的能量与此两能级差相对应,所以光子的频率为

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{0.184 \times 10^6 \times 1.602 \times 10^{-19}}{6.626 \times 10^{-34}} \text{ Hz} = 4.45 \times 10^{19} \text{ Hz}.$$

19-31 电子和正电子湮灭时产生两个 γ 光子,求每个光子的能量、频率和波长。

解 湮灭过程可以表示为

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma,$$

并且有

$$2m_0 c^2 = 2h\nu.$$

所以光子的能量为

$$\epsilon = h\nu = m_0 c^2 = 9.109 \, 39 \times 10^{-31} \times (2.997 \, 92 \times 10^8)^2 \text{ J} = 8.187 \, 09 \times 10^{-14} \text{ J};$$

频率为

$$\nu = \frac{\epsilon}{h} = 1.235 \, 59 \times 10^{20} \text{ Hz};$$

波长为

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 2.426 \, 31 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

19-32 一个质子和一个 μ^- 子组成一个 μ 原子,求这个 μ 原子的玻尔半径。

解 由质子和电子组成的原子的玻尔半径为

$$r_1 = a_0 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2},$$

其中 m_e 是电子的质量。对于 μ 原子,上面的关系仍成立,只是将电子的质量 m_e 用 μ 子的质量 m_μ 代替即可。因为

$$m_\mu = 206.768 \, 3 m_e,$$

所以 μ 原子的玻尔半径为

$$r_\mu = \frac{a_0}{206.768 \, 3} = \frac{5.291 \, 773 \times 10^{-11}}{206.768 \, 3} \text{ m} = 2.559 \, 28 \times 10^{-13} \text{ m}.$$

19-38 三代费米子中每一代各包含哪些粒子?三代费米子共计包括多少种粒子?

解

第一代费米子: e, ν_e, u, d .

其中 e 有正、反2种粒子; ν_e 有正、反2种粒子; u 夸克有3种色,每色都有正、反2种粒

子,共 6 种粒子;d 夸克有 3 种色,每色都有正、反 2 种粒子,共 6 种粒子。所以第一代费米子总共有 16 种粒子。所以

$$\begin{array}{cccc} e & \nu_e & u & d \\ 2 & 2 & 6 & 6 \end{array}$$

第二代费米子: μ, ν_μ, c, s .

其中 μ 有正、反 2 种粒子; ν_μ 有正、反 2 种粒子;c 夸克有 3 种色,每色都有正、反 2 种粒子,共 6 种粒子;s 夸克有 3 种色,每色都有正、反 2 种粒子,共 6 种粒子。所以第二代费米子总共有 16 种粒子。所以

$$\begin{array}{cccc} \mu & \nu_\mu & c & s \\ 2 & 2 & 6 & 6 \end{array}$$

第三代费米子: τ, ν_τ, t, b .

其中 τ 有正、反 2 种粒子; ν_τ 有正、反 2 种粒子;t 夸克有 3 种色,每色都有正、反 2 种粒子,共 6 种粒子;b 夸克有 3 种色,每色都有正、反 2 种粒子,共 6 种粒子。所以第二代费米子总共有 16 种粒子。所以

$$\begin{array}{cccc} \tau & \nu_\tau & t & b \\ 2 & 2 & 6 & 6 \end{array}$$

可见,三代费米子共有 48 种粒子。

19-40 如果仍然借用“基本粒子”的涵义,试问在标准模型中可以被列为基本粒子的是哪些粒子?

解

三代费米子:共 48 种;

规范玻色子:共 13 种,其中

胶子 G 有 8 色,共 8 种;

w^+ 、 w^- 和 w^0 共 3 种;

光子 γ 1 种;

引力子 g 有 1 种;

Higgs 粒子 1 种。

所以在标准模型中能够被列为“基本粒子”的粒子共有 62 种。

第二十章 天体和宇宙

[基本要求]

1. 初步了解现在宇宙的概貌;了解太阳的内部结构、太阳大气层的概况和太阳活动对地球环境的影响;了解太阳系九大行星的基本状况,能分析地球上适合生命存在的条件;
2. 了解恒星演化的大致过程,理解赫-罗图在分析恒星演化过程的作用,知道恒星在赫-罗图上的位置所能提供的信息;
3. 理解恒星演化到最后的产物是白矮星、中子星或黑洞,掌握这些致密天体的共同特征和基本差异;
4. 掌握大爆炸宇宙学的观测、实验基础和理论基础,掌握大爆炸宇宙学的基本思想和对宇宙膨胀的规律的分析。

[参考资料]

一、黑洞理论研究的新进展

黑洞辐射(即霍金辐射)的理论,是英国物理学家斯蒂芬·霍金于 20 世纪 70 年代首次提出的。在引入这一理论时,霍金还认为,黑洞辐射不包含以前吸入物质的相关信息,而且随着黑洞的消失,这些相关信息也会相应消失。这就制造了物理学上的一个难题,因为这与物理学中认为物质信息不会完全消失的理论相矛盾。这称为“黑洞悖论”,也称“黑洞信息佯谬”。尽管霍金自己辩解说,黑洞中的量子运动是一种特殊状况,由于黑洞的引力场过于强大,量子力学的规律并不适用。但这总不能令人信服,因而受到了许多科学家的质疑。近 30 年来,这似乎成了一个悬案。

近来,事情的发展出现了转机。2004 年 7 月 21 日在都柏林举行的“第 17 届国际广义相对论和万有引力大会”上,霍金宣布了他对黑洞研究的最新成果。他说,他先前的关于黑洞的部分理论是错误的。他现在认为,黑洞不会将进入其中的物质的信息淹没,在经过相当漫长的时间后,它会把这些曾被它吸入的物质信息“撕碎”后向外界释放出来。用霍金自己的话说,就是:“它会向外辐射其吞噬的物质所有信息。不过,这些信息已经被黑洞撕碎、打破和重整了。”在霍金的新理论中,黑洞最终会释放出全部信息,他通过计算证明,黑洞内部最初的信息

量与最终的信息量相等,但未说明中间阶段黑洞的信息量有何变化。

霍金的新假说将使有关黑洞的理论研究进入新的阶段。

有些科学家认为,霍金的新理论或许能够解决黑洞信息佯谬。还有些科学家对于他能否彻底解决黑洞信息佯谬这个非常复杂的问题,表示怀疑。对于他的新理论也还有待于同行的检验。

中国科学家从1996年开始就用弦理论为黑洞物理的发展作出了很多贡献。根据这个理论,宇宙万物并不是由人们通常认为的点状粒子组成,而是由细小的、可振动的一维弦所组成。2005年3月,美国俄亥俄州立大学有人发表论文,运用弦理论构建了一个特殊黑洞模型,证明了其霍金辐射包含了黑洞的内部信息。不过他对天体物理学中最普遍的黑洞的信息佯谬,并没有给出解释。

我国学者中有人认为黑洞是封闭的天体。根据能量守恒和天体的运动速度不能大于光速,当其他天体进入“黑洞”后,它相对“黑洞”的势能转变为“黑洞”的运动动能,所以其他天体不可能无限地靠近黑洞,黑洞与其他天体之间最短距离是“临界半径”。这表明,一个黑洞天体一旦形成,其他物质既不能进入,也不能从中逃逸。像“黑洞”这样独立的宇宙似乎不只一个,它们都有自己的确切边界且互不相通,而人类只能观察到自己所在的宇宙。

印度有一位理论物理学家名叫阿布哈斯-米特拉,他对霍金的黑洞理论提出了质疑,他认为,宇宙黑洞根本不可能存在。早在4年前,他就发表了一篇质疑黑洞理论的论文,文中指出,霍金的黑洞理论存在着明显的缺陷,宇宙黑洞是不可能存在的,因为霍金所阐述的黑洞的形状和存在方式与爱因斯坦的广义相对论根本不相符合。对于米特拉的论文,有些人是赞同的,然而很多主流科学家不屑一顾,一直没有哪一位科学家与之辩论,即使米特拉点名邀请辩论也无济于事。

好在物理学是一门理论与实验密切结合的学科,任何理论都必定要受到实验、观测结果的检验。

二、对火星的探测

在教材§20-2中我们曾经描述过火星这颗“红色星球”的概况,无论大小、质量、大气层以及地貌和气候,都与地球有很大的差异,但是在太阳系中它毕竟是与地球最相似的一颗行星。多年来,地球人花费了巨大的财力、物力和各种高科技手段对火星进行探测,当前这种探测集中在探寻火星上水和生命的痕迹。

因为在地球上可以观测到,火星上的干涸河床、湖泊和湖泊里的沉积矿,以及各种各样的矿物质,这些矿物质可能只有在温泉环境中才能找到。所以人们猜测,在相当久远的年代以前,火星表面可能曾经是比较温暖、比较湿润、的确是地球环境比较相似的地方。

美国宇航局(NASA)发射的“勇气”号和“机遇”号火星探测器,于2004年1月先后在火星表面着陆。它们的主要任务是在火星表面寻找是否曾经存在过的水的证据。

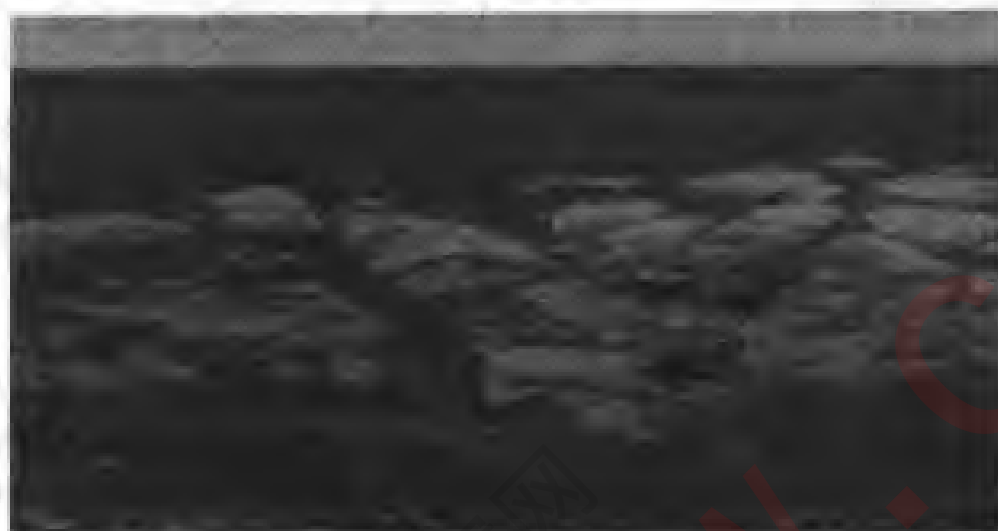


图 20-1 “机遇”号传回的火星表面近景

目前传回的数据和图片似乎表明,曾有液态水从火星探测器着陆区域的岩石上流过。

从照片发现岩石上嵌有小球,这些小球并不是集中在岩石的特定岩层中的,它们有可能是溶解于水中的矿物质沉积在被水浸泡着的多孔岩石中形成的。

还发现岩石上有很多奇怪的小孔。据推测,如果盐类晶体在盐水中的岩石内部成长,然后由于腐蚀或溶解而使这些盐类晶体消失,就会留下这样的小孔。

在岩层中还发现了大量的硫酸盐,这表明,岩石曾经浸泡在水中。经火星探测器携带的穆斯堡尔谱仪的分析,还发现在岩石中含有水合硫酸铁。在地球上,处于酸性湖泊或酸性温泉环境下有可能会形成这种矿物质。

在“机遇”号驶出着陆舱之前,它已经利用微型热辐射光谱仪分析了自己着陆区域的岩石成分,断定在这个区域可能有20%的面积蕴藏着赤铁矿。而赤铁矿通常是在有液态水的环境下才能生成。所以,找到它就能证明火星上曾经存在过液态水。

在一个陨石坑附近发现了一些岩石,经分析确定它们是水成岩,不但岩石有被水浸透过的迹象,而且它们的排列方式也带有明显的被流水冲刷而不是风蚀作用的痕迹。科学家们断定这些岩石是长期处在大约5 cm深的水流中,水流的速度约为 $10\sim 50\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。

火星探测器到达了一个可能曾经是盐水海洋的位置,那里有时会有浅水,有时又是干燥的。在地球上,这种环境同样会产生与火星上形状相同的岩石。科

学家们目前还不知道这个海洋有多大、有多深以及如何形成的。即使这样,这一发现也可谓是火星探测器取得的重大成就之一。

从以上这些发现,似乎可以断定火星地表曾经存在过水。通过对探测器搜集的岩石数据进行分析之后,2004年3月NASA宣布,找到了火星上有液态水流动过的确切证据。但是,根据“机遇”号现有的观测数据,目前还无法断定火星探测器着陆和被探测的区域的湿润环境到底持续过多长时间。问题的答案需要通过发射探测器登上火星采集样本,并将其带回地面研究后才能得出。

既然火星上有液态水流动过的确切证据,人们自然会想到另一些问题,是不是火星环境保留不住液态水?如果是这样的话,那么当初这些液态水是从何处和如何来到火星的?又是通过何种途径消失的?

另外,就是火星上是否存在或存在过生命的问题。从理论上讲,如果火星上有水存在,就应该有可能存在过生物。科学家们强调,发现火星上曾经有过适合生命栖居的环境,并不意味着火星上就一定存在过生命。他们认为,目前还不可能找到微生物的化石。

美国宇航局计划于2005年8月10日发射另一艘火星探测飞船——“火星勘测轨道飞行器”,飞行约7个月的时间,于2006年3月进入火星轨道。它携带了高分辨率的照相设备,可用来精确探测火星的地形、地貌,为以后登陆火星选择风险最小的地点;它携带了气候探测仪和浅表层探测雷达,用以测定火星大气中沙尘和水的循环,并进一步分析火星地表的矿物;它还携带了数据通信设备,可成为未来各种探测飞船与地球通信联系的中继站,用以构建“太空互联网”。

三、“信使”号水星探测器正在飞往水星

水星探测器“信使”号已于2004年8月3日凌晨发射升空,预计它将于2011年3月进入环水星轨道,并开始对水星进行科学探测。此后大约一年,燃料将耗尽,残骸可能会坠落到水星表面。

20世纪70年代,“水手10”号飞船曾成功地飞越水星,获得了大量关于水星的资料。其中最使人感到意外的是,发现水星上拥有分布于整个星球的磁场。在这一发现之前,在类地行星中,地球是惟一具有这种特征的行星。水星磁场的磁感应强度仅为地球的百分之一左右,但磁场位形却与地球相似,也是偶极场。“信使”号将对水星磁场进行长时间的详细观测,进而确定水星磁场的分布及其变化规律。

1991年,科学家们在水星两极的环形山内侧发现有不同寻常的亮点,这是该地区的某种物质对电磁波讯号具有很高反射率造成的。那么这是些什么物质呢?人们普遍认为,这种物质很可能是地表或地下的冰。但也有科学家推测,水星两极的沉积物可能是由其他材料构成的。“信使”号将为解开这个谜团作出

贡献。

人们认为,水星上保存着大约 46 亿年(地球的年龄)前类地行星形成环境的重要信息。可以预计,“信使”号对水星的探测将有可能揭开类地行星形成和演化的奥秘。

“水手 10”号飞船曾拍摄了水星 45% 的表面照片,照片上显示水星表面布满大大小小的陨石坑和环形山,与月球表面极为相似。照片还表明,陨石坑和环形山保持着水星早期遭陨石轰击的记录,这就是其周围仍有明显的辐射状条纹。这种辐射状条纹至今清晰可见,证明水星表面未经风化过,也就是说,水星上不曾有过大气。同时,也未观测到这些辐射状条纹曾被侵蚀过的痕迹,说明那里也未曾存在过水或其他液态物质。

陨石坑和环形山所展现的水星表面景象,显示出它和月球一样是在形成后不久就出现了地壳,后又受到陨石的剧烈撞击。由于这种撞击所产生的冲击波传播到水星内部,并在内部造成了复杂的凹凸起伏。观测还发现,水星表层物质的分布也不是均匀的,而是以分层方式分布的。科学家们希望能通过“信使”号的探测,确定水星表层发生的各种地质过程。

水星内核结构如何? 它的体积与月球相近,而其密度则比月球大得多,仅比地球略低些,在太阳系类地行星中位居第二。有人估计,它的中心可能存在一个与月球大小相近的铁镍组成的核心。“信使”号对水星内核结构的研究,也将有助于揭示它和地球磁场的奥秘。

水星拥有极为稀薄的大气层,水星大气层中已知存在氢、氦、氧、钠、钾和钙等 6 种元素,目前的认识,认为这些元素是通过各自不同的渠道和不同的方式进入水星大气层的。“信使”号将研究水星大气层的构成,并确定各种分子究竟通过何种方式进入或产生。

四、“惠更斯”号探测器在土卫六上着陆

美国宇航局、欧洲航天局和意大利航天局联合研制的“惠更斯”号土卫六探测器,于 1997 年 10 月由美国宇航局的“卡西尼”号飞船携带升空。经过七年多的飞行,行程 35 亿公里,于 2005 年 1 月 14 日成功地在土卫六上着陆,并开始发回数据和图片。

在距离土卫六表面约 19 公里的空中,“惠更斯”拍到了厚厚的一层白色云雾,但随着与土卫六表面距离的缩短,白色云雾逐渐稀薄直到消失。这种白色薄雾也许主要是甲烷气体。在距离土卫六表面 16 公里处拍摄的照片上,可以看到好像是海岸线或运河的地形。着陆后发回的照片显示,眼前是一大片液态物质,这与其他区域的凹凸、粗糙的表面相比,显得十分突出。这种液态物质可能就是液态甲烷,而“惠更斯”号探测器就停在离这个甲烷海的海岸线几米以外的地方。

科学家们曾推测,土卫六表面是由液态甲烷组成的湖泊、河流以及大大小小的冰块构成的,正如我们在教材 §20-2 中曾经叙述的那样,现在从接收到的数据和照片中似乎可以证明这一点。不过,由于土卫六的气温较低和大气压较高,应使甲烷以固态的形式存在。

土卫六上如此丰富的甲烷是从哪里来的呢?在人类生活的地球上,甲烷主要产生于细菌等生物体。在没有生命的土卫六上,甲烷必定有其他来源。科学家们断定,土卫六上的甲烷必定来自星体内部。在“惠更斯”着陆前 3 分钟内,分析仪器测定,在以氮气为主要成分的土卫六大气层中,氮气稳定的地方,甲烷的浓度在逐渐增大。

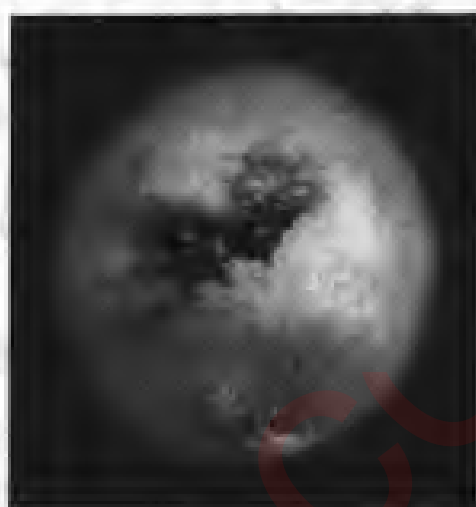


图 20-2 由“卡西尼-惠更斯”探测器发回的土卫六照片

对所获得的土卫六的照片、数据和资料进行了分析之后显示,从地貌演化的物理过程来看,土卫六这颗土星最大的卫星是一颗与地球有着诸多相似之处的星球。而从参与地貌演化的物质种类而言,土卫六与地球却存在着明显差异:土卫六上没有液态水,只有液态甲烷,甲烷在土卫六上的角色就如同地球上的水;没有硅酸盐岩石,只有固态的含水冰块;没有泥土质的土壤,只有由碳氢化合物颗粒沉淀和冰块形成的地表。

在土卫六上各种气象活动频繁发生,有降水、侵蚀和海蚀等“水”文活动的痕迹。在“惠更斯”号着陆地附近,发现有类似于地球上的岩石那样的白色石块,可能就是冰块,它们大多呈现鹅卵石的形状,这表示,它们受到过冲刷或侵蚀的作用。有迹象显示,在“惠更斯”号着陆前不久,那里发生过一次“降水”(甲烷雨)。

在土卫六上各种地质活动也相当活跃。围绕土卫六运行的“卡西尼”飞船探测到,土卫六表面存在纵横交错的沟渠,这些沟渠从高原延伸到低海拔地区,最终汇合形成湖泊,并且还发现湖泊中有类似地球上岛屿的地形。现在这些河流和湖泊都已经干涸。据猜测,这些沟渠可能是被蠕动的冰冲出来的,因为冰冻火山的火山口喷出的是冰,而不是熔岩。不过土卫六上存在冰火山的证据,目前尚不充分。

科学家们认为,土卫六上具有构成地球的所有元素,但所有的水都被冻结为固体,那里没有氧气,再加上 $-180\text{ }^{\circ}\text{C}$ 的低温,无法进行像在地球上导致生命演化的那样的化学反应。从“惠更斯”号发回的照片判断,土卫六上目前还没有生命,但是再经过 20 亿年很可能会诞生生命。科学家们说:“我们不期待在土卫六上发现生命,因为那里太冷了。但我们期待发现原始的‘冰激凌’,这种复杂的化

学物质可能是生命的先兆。”

科学家们还认为,土卫六是太阳系中惟一已知有云和稠密大气的卫星,它很像 40 亿年前的地球,对它的探测有助于揭开生命诞生之谜。

“惠更斯”号上的麦克风曾记录到了土卫六上的一种呼啸而过的巨大声响,科学家目前还没有对此得出结论。不过探测器上的仪器已经探测到,土卫六上有风吹过,其时速约为 24 公里。但是记录到的声响与探测到的风是不是同一件事,尚不得而知。

五、“深度撞击”号成功击中彗星

2005 年 1 月 12 日美国宇航局发射了“深度撞击”号彗星探测器。该探测器沿预定轨道运行了 4.31 亿公里,于 2005 年 7 月 2 日太平洋时间 23 时 07 分(北京时间 7 月 3 日 14 时 07 分)释放出了撞击器。这个撞击器是由铜合金材料制成的,体积约 3.14 m^3 ,质量近 400 kg。2005 年 7 月 3 日太平洋时间 22 时 52 分(北京时间 7 月 4 日 13 时 52 分)该撞击器成功地击中了坦普尔 1 号彗星。

负责此项目的科学家比喻说,撞击器与彗星相撞就好比“往飞速运动的针眼里穿线”,难度是可想而知的。坦普尔 1 号彗星以每秒 30 km 的高速运动,而在其轨道前方的“深度撞击”号探测器连同它所携带的撞击器的飞行速度约为每秒 20 km,可见撞击器与彗星相撞的相对速度约为 $10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$,相撞瞬间的爆发力约相当于 4.5 吨炸药的威力。探测器弹射出撞击器后必须立刻调整姿态迅速脱离原先的轨道,以免与彗星相撞或被撞击时飞溅的碎屑击中,它还要承担记录、拍摄并向地面传输科学数据的任务。

人们不禁要问:为什么竟要耗资 3.33 亿美元去撞击一块石头?我们已经探知,彗星是太阳系中最古老的原始天体,在太阳系中的行星形成之初它就已经存在于太阳系中了,并且由于彗星是在太阳系的外部边缘形成的,彗核内部至今仍然保存一些完好的自然物质,它们是太阳系形成时的最原始的物质,这些物质携带着太阳系诞生时的珍贵信息。撞击器击中彗星的彗核后,会在其表面轰出坑洞,就会使这些物质暴露出来。另外,在撞击时迸发出了大量的冰屑、尘埃以及各种自然物质,这些都被附近的“深度撞击”号彗星探测器所携带的探测仪器记录和拍摄。这些资料都会为探索太阳系在 46 亿年前形成、及其形成过程提供重要信息。

在撞击器撞击坦普尔 1 号彗星前后,“深度撞击”号彗星探测器共拍摄了约 4 500 幅照片,为科学分析提供了重要的依据。发回的照片中显示,撞击器以 25° 的倾角撞击彗核的表面后,使覆盖在彗核表面的碎屑以 $5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 速度向空中飞溅,并在彗星上空形成一团云雾。图 20-3 是撞击器击中坦普尔 1 号彗星时的照片。出乎意料的是,覆盖在彗核表面的碎屑竟然细小到如同滑石粉末一般,

并且在久远的年代里,在漫长的行程中,竟然没受到外界的扰动。分析表明,这些碎屑中含有水、二氧化碳和简单的有机物,其中水的含量远小于原先的估计。

由于彗星曾于史前时期撞击过地球,因此它当时所带来的一些物质可能导致地球生物在进化过程中的某种变化。

这种变化包括两种情形,一种情形是当彗星和其他小行星撞击地球时,为地球带来了水、冰和有机物,而在合适的条件下有机物可能演化为生命,所以研究彗星对于揭示地球和宇宙生命的起源具有重要意义。

另一种情形是像 6 500 万年前的一次“彗星撞击地球”,造成大量生命物种的灭绝,其中最为熟知的是恐龙的灭绝。这种情形今后还会发生吗? 1994 年发生的彗星与木星的碰撞,不能不引起人类对在地球上再次发生这种情形的担忧。这次“深度撞击”作为一次实验,提供了改变彗星运行轨道的方法。据说,中国科学家设想了另一种改变彗星运行轨道的方法,称为“黏着法”,即发射具有动力装置的飞行器,黏附在可能撞击地球的彗星上,利用飞行器的动力,改变彗星原先的运行轨道,避免与地球相撞。



图 20-3 “深度撞击”号探测器释放的撞击器“击中”坦普尔 1 号彗星

[习题解答]

20-1 证明:如果某星对地球绕太阳公转轨道的平均半径所张的角为 $1''$ 时,这颗星到地球的距离为 206 264.81 AU。

解 设地球绕太阳公转轨道的平均半径为 a , 所考察的星体 P 到地球的距离为 r , 如图 20-4 所示。如果把 a 和 r 看为直角三角形的两条直角边, 则 β 是一个很小的锐角, 显然有

$$r = \frac{a}{\sin \beta} \approx \frac{a}{\beta} \quad (1)$$

在上式中用到了在 β 很小时存在的关系

$$\sin \beta \approx \beta.$$

应该注意的是,在这个关系中 β 的单位应是弧度。

$$\begin{aligned} 1 \text{ 弧度} &= (57.295\,78)^\circ \\ &= (57.295\,78 \times 60 \times 60)'' \\ &= 206\,264.81'' \end{aligned} \quad (2)$$

由式(2)得

$$1'' = \left(\frac{1}{206\,264.81} \right) \text{弧度}, \quad (3)$$

将式(3)代入式(1),得

$$r = \frac{206\,264.81}{\beta} a, \quad (4)$$

式(4)中 β 的单位应是秒(")。根据天文单位(AU)的定义,地球绕太阳公转轨道的平均半径为 1 AU,即 $a = 1 \text{ AU}$,当 β 为 $1''$ 时,由式(4)可以求得,所考察的星体 P 到地球的距离 r 为

$$r = 206\,264.81 \text{ AU}.$$

20-2 有三颗恒星,它们对地球绕太阳公转轨道的平均半径所张的角分别为(1) 1.5° ; (2) $0.15'$; (3) $0.15''$,试计算它们到地球的距离各为多少光年? 各为多少天文单位? 各为多少公里?

解

(1) $1.5^\circ = 5\,400''$,由上题的式(4)和相关的单位变换关系可以求得

$$r = \frac{206\,264.81}{5\,400} \text{ AU} = 38 \text{ AU} = 6.0 \times 10^{-4} \text{ l.y.} = 5.7 \times 10^9 \text{ km};$$

(2) $0.15' = 9.0''$,由上题的式(4)和相关的单位变换关系可以求得

$$r = \frac{206\,264.81}{90} \text{ AU} = 23 \times 10^3 \text{ AU} = 0.36 \text{ l.y.} = 3.4 \times 10^{12} \text{ km};$$

(3) $0.15''$,由上题的式(4)和相关的单位变换关系可以求得

$$r = \frac{206\,264.81}{0.15} \text{ AU} = 1.4 \times 10^6 \text{ AU} = 22 \text{ l.y.} = 2.1 \times 10^{14} \text{ km}.$$

20-3 在距离某恒星 1.5 AU 处的能流密度为 $1.4 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$,已知该恒星的半径为 $1.5 \times 10^4 \text{ m}$,试计算这颗恒星的光度及其表面的有效温度。

解 已知在 1.5 AU 处测得的能流密度为 $I = 1.4 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$,该恒星的光度 L 为

$$L = 4\pi r^2 I = 4\pi \times (1.5 \times 1.496 \times 10^{11})^2 \times 1.4 \times 10^2 \text{ W} = 8.9 \times 10^{23} \text{ W},$$

恒星的光度 L 与其有效温度 T 的关系为

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

式中 R 是星体的半径。由上式可求得该恒星的有效温度

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4} = \left[\frac{7.0 \times 10^{24}}{(1.5 \times 10^4)^2 \times 5.67 \times 10^{-8}} \right]^{1/4} \text{ K} = (0.55 \times 10^{24})^{1/4} \text{ K} \\ &= 8.6 \times 10^5 \text{ K}. \end{aligned}$$

20-5 试计算太阳表面的重力加速度。

解 太阳表面的重力加速度 g 可以表示为

$$g = \frac{Gm_\odot}{R_\odot^2},$$

将数据代入可得

$$g = \frac{1.99 \times 10^{30} \times 6.67 \times 10^{-11}}{(6.96 \times 10^8)^2} = 274 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

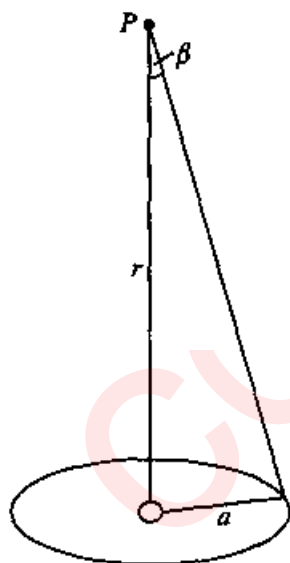


图 20-4

是地球表面重力加速度的 28 倍。

20-6 如果太阳的光度始终维持恒定直到它的寿命终结,并假设太阳只将它的 0.8% 的物质转换为辐射能,求太阳的寿命。已知太阳的质量和光度分别为 $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ 和 $3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ 。

解 根据题意,太阳将其质量 $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ 的 0.8% 转换为辐射能,该辐射能的量值为

$$E = mc^2 = 1.99 \times 10^{30} \times 0.008 \times (3.0 \times 10^8)^2 = 1.4 \times 10^{45} \text{ J}.$$

所谓太阳的光度,就是太阳每秒钟释放出的总能量,所以太阳的寿命为

$$\tau = \frac{E}{L} = \frac{1.4 \times 10^{45}}{3.9 \times 10^{26}} \text{ s} = 3.6 \times 10^{18} \text{ s} \approx 1.1 \times 10^{11} \text{ a}.$$

20-8 计算以下两个问题:

(1) 一颗位于 100 pc 处、绝对星等为 0 等的恒星,它的亮度的视星等为多大?

(2) 某恒星的绝对星等为 1、其视星等为 6,问它距离地球多远?

解

(1) 将已知数据代入公式

$$n = N - 5 + 5 \lg r,$$

可得

$$n = 0 - 5 + 10 = 5.$$

所以,这颗星的视星等为 5 等。

(2) 将已知数据代入公式

$$n = N - 5 + 5 \lg r,$$

可得

$$5 \lg r = 5 + n - N = 5 + 6 - 1 = 10,$$

即

$$\lg r = 2,$$

所以

$$r = 100 \text{ pc}.$$

20-9 现有甲、乙两颗绝对星等相同的恒星,处于离我们不同距离的地方,测得甲与乙的视星等之差为 10,求它们离开我们的距离之比,哪颗星离我们更远?

解 设甲星的视星等为 n_1 ,绝对星等为 N_1 ,距离为 r_1 ;乙星的视星等为 n_2 ,绝对星等为 N_2 ,距离为 r_2 。根据公式

$$n = N - 5 + 5 \lg r,$$

则有

$$n_1 - n_2 = 5 \lg \frac{r_1}{r_2},$$

即

$$10 = 5 \lg \frac{r_1}{r_2},$$

从中可以求得甲、乙两颗恒星离开我们的距离之比为

$$\frac{r_1}{r_2} = 100.$$

甲星离我们更远。

20-10 一颗恒星的星体由于某种原因而分裂为完全相同的两部分,每一部分都保持恒星原来的密度和温度,这两颗小恒星构成了一个双星系统。求:

- (1) 比较小恒星与分裂前恒星的亮度;
- (2) 比较双星系统与分裂前恒星的亮度。

解 设原恒星的体积、半径、视亮度和视星等分别为 V, R, I 和 n ; 分裂后的小恒星的体积、半径、视亮度和视星等分别为 V', R', I' 和 n' 。根据已知条件, 应有

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{R'}{R}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

由此可以求得

$$\frac{R'}{R} = 0.79, \left(\frac{R'}{R}\right)^2 = 0.63.$$

- (1) 因为恒星的视亮度与其表面积成正比, 所以

$$\frac{I'}{I} = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 = 0.63,$$

根据公式(20-4),

$$n' - n = -2.5 \lg \frac{I'}{I} = -2.5 \lg(0.63) = 0.50.$$

这表示小恒星比原恒星暗了 0.50 等(视星等越高, 亮度越低)。

- (2) 设双星系统视亮度为 I'' , 它应等于两个子星的亮度之和, 即

$$I'' = 2I'$$

代入公式(20-4), 得

$$\begin{aligned} n'' - n &= -2.5 \lg \frac{I''}{I} = -2.5 \lg \left(\frac{2I'}{I} \right) = -2.5 \lg \left(\frac{2I'}{I} \right) = -2.5 \lg(2 \times 0.63) \\ &= -2.5 \times 0.10 = -0.25, \end{aligned}$$

这表示双星系统比原恒星亮了 0.25 等。

20-13 天狼星的伴星天狼 B 是人们发现的第一颗白矮星, 用光学观测方法测得它的质量和半径分别为 $1.05 m_{\odot}$ 和 $7.4 \times 10^{-3} R_{\odot}$, 试计算该星的引力红移量 Z 和与之相等效的多普勒红移的退行速度 v 。

解 等效退行速度可以表示为

$$v = 0.636 \frac{m/m_{\odot}}{R/R_{\odot}} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 0.636 \frac{1.05}{7.4 \times 10^{-3}} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 90 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1},$$

于是该星的引力红移量为

$$Z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{90}{3.0 \times 10^8} = 3.0 \times 10^{-4}.$$

20-14 计算半径为 $1.2 \times 10^4 \text{ m}$ 、表面的有效温度分别为 10^3 K 、 10^5 K 和 10^7 K 的中子星的光度。

解 中子星的光度与星体半径、表面的有效温度的关系为

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_*^4 = 4\pi (1.2 \times 10^4) \times 5.67 \times 10^{-8} T_*^4 = 1.03 \times 10^2 T_*^4.$$

$$\text{当 } T_{*1} = 10^3 \text{ K 时, } L_1 = 1.0 \times 10^{14} \text{ W.}$$

$$\text{当 } T_{*2} = 10^5 \text{ K 时, } L_1 = 1.0 \times 10^{22} \text{ W.}$$

$$\text{当 } T_{*3} = 10^7 \text{ K 时, } L_1 = 1.0 \times 10^{30} \text{ W.}$$

20-15 史瓦西半径的物理意义是什么? 试计算质量分别为 $1.0 \times 10^3 m_\odot$ 和 $1.0 \times 10^5 m_\odot$ 的黑洞的史瓦西半径。

解

$$\text{当 } m_1 = 1.0 \times 10^3 m_\odot \text{ 时, } r_{s1} = 2.96 \left(\frac{m_1}{m_\odot} \right) \text{ km} = 2.96 \times 10^3 \text{ km} \approx 3.0 \times 10^3 \text{ km};$$

$$\text{当 } m_2 = 1.0 \times 10^5 m_\odot \text{ 时, } r_{s2} = 2.96 \left(\frac{m_2}{m_\odot} \right) \text{ km} = 2.96 \times 10^5 \text{ km} \approx 3.0 \times 10^5 \text{ km}.$$

20-16 为什么说式(20-28)实际上是能量方程? 它反映了怎样的能量关系?

解 式(20-28)为

$$\frac{d(\rho R^3)}{dR} = -\frac{3pR^2}{c^2},$$

等号两边同乘以 4π , 整理后写为

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \rho c^2 \right) = -4\pi R^2 p,$$

或者

$$-d \left(\frac{4\pi R^3}{3} \rho c^2 \right) = 4\pi R^2 p dR.$$

上式表示, 半径为 R 的宇宙在膨胀过程中, 由于作用于球面上的总压力 $4\pi R^2 p$ 使球面向外推移了 dR 所作的总功, 必定等于宇宙球内的总能量的减少。如果宇宙球的总质量为 m , 则总能量为 mc^2 , 而宇宙球单位体积的能量为 ρc^2 。所以宇宙的总能量为 $4\pi R^3 \rho c^2 / 3$ 。所以, 式(20-28)是能量方程。

