（考研）《课件打印》

（积分卷第2页）题目：

求杆2的角速度 ω_2，角加速度 ε_2，

机械原理讲义及重点

3与4构件在B点重合点：B3、B4

$$v_{B_3} = v_{B_4} + v_{B_3B_4}$$

方向： $\perp AB$ 　 平行导杆 　 $\perp BC$

大小： ? 　 $l_{BC}\omega_4$ 　 ?

作如图 2.19 所示的速度图，可以解出 v_{B_3}。由于杆 2 与滑块 3 在 B 点铰接，所以 $v_{B_2} = v_{B_3}$。因此有：

$$\omega_2 = \frac{v_{B_2}}{l_{AB}}$$

方向为顺时针方向。

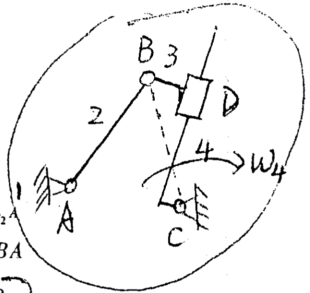
③ 求解 ε_2

滑块 3 上的 B_3 点与导杆 4 上的 B_4 点之间的加速度关系为：

$$a_{B_3} = a_{B_4} + a^k_{B_3B_4} + a^r_{B_3B_4} = a_{B_2} = a^n_{B_2A} + a^t_{B_2A}$$

方向： $B \to C$ 　 $v_{B_3B_4}$ 顺 ω_4 转 90° 　 平行导杆 　 $B \to A$ 　 $\perp BA$

大小： $\omega_4^2 l_{BC}$ 　 $2v_{B_3B_4}\omega_4$ 　 ? 　 $\omega_2^2 l_{AB}$ 　 ?



根据上式作图 2.20 所示的加速度多边形（极点为 p'），解出 $a^t_{B_2A}$（加速度图中 $n \to b'_3$）。

因此有：

$$\varepsilon_2 = \frac{a^t_{B_2A}}{l_{BA}}$$

方向为逆时针方向。

$a^n = \omega^2 l$
$a^t = \varepsilon \cdot l$

$a_{B_4} \to a^k \to$ //导杆

画图 $a^n_{B_2A} + a^t_{B_2A}$：(l_B) 法向、切向。

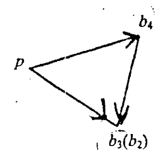


图 2.19 　速度多边形

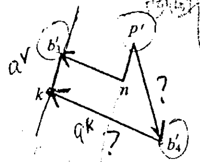


图 2.20 　加速度多边形

提示

本例说明，对于有活动导路的移动副的题目，要采用点的复合运动关系进行求解。使用这种方法时，重合点要选取适当。在本例中如果选取滑块 3 和杆 4 的重合点 C 作为重合点进行求解，则是不可解的。当需要的重合点不在构件上时，可以采用扩大构件的方法。

例 2.7 　图 2.21 所示为货车翻斗机构，已知各构件的尺寸和活塞 2 相对于汽缸 1 的相对移动速度 $v_{B_2B_1}$。试求图示位置时翻斗 EF 的角速度 ω_5。

分析：这道题目原动件为活塞 2，不是连架杆。为此我们可以采用变换原动件的方法，改变原动件后进行求解，这样机构的相对运动并没有改变。

解：

① 选取合适的长度比例尺 μ_L 作机构的运动简图，如图 2.21 所示。

② 求解 ω_5

假想构件 4 为原动件，其角速度为 ω_4，则有：

$$v'_E = v'_D + v'_{ED}$$

方向： $\perp EF$ 　 $\perp DG$ 　 $\perp ED$

大小： ? 　 $l_{DG}\omega'_4$ 　 ?

上式中各项加“撇号”表示改变原动件后的速度。

根据上述方程，选取适当的速度比例尺 μ_v 作速度多边形 Δpde（如图 2.22 所示）。再根据速度影像原理，求得 v'_{C_3}，解出 v'_{C_3}后，有如下方程：

v'_{C_3} 由 pde 的影像也可已知求知；

$$v'_{C_3} = v'_{C_2} = v'_{C_1} + v'_{C_2C_1}$$

方向： 已知 　 $\perp AC$ 　 $/\!/ AC$

大小： 已知 　 ? 　 ?

根据上述方程，在速度多边形做出 Δpc_1c_2，可以得到 $v'_{C_2C_1}$。解出 $v'_{C_2C_1}$后，由于

$$v_{B_2B_1} = v_{C_2C_1}$$

所以 $v'_{B_2B_1}$ 可知。

? = v_r

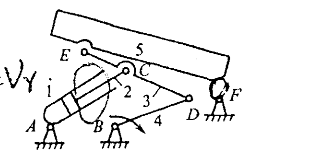


图 2.21 　翻斗机构

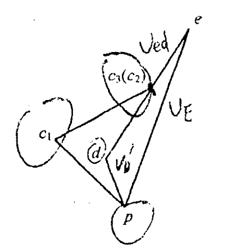


图 2.22 　运动简图

解出的 $v'_{B_2B_1}$ 尽管不是真实速度，但由于真实速度与假定速度之间的比值不变，可以求出以下系数：

$$K = \frac{v_{B_2B_1}}{v'_{B_2B_1}}$$

由此可以解出 E 点的真实速度为 $v_E = Kv'_E$。

由此可以解出翻斗 EF 的角速度 ω_5 为：

$$\omega_5 = \frac{v_E}{l_{EF}}$$

例 2.8 　图 2.23 所示的凸轮机构，轮 1 和轮 2 在 C 点接触。现已知各构件的尺寸，且轮 1 以角速度 ω_1 等速转动。试求：

① 构件 2 的角速度 ω_2；

② 构件 1 和构件 2 上 C 点的速度 v_{C_1}、v_{C_2}。

分析：本题为典型的高副机构运动分析。这里我们采用“高副低代”的方法，首先求出高副机构的替代机构，然后再对替代机构进行运动分析。

解：

① 选取合适的长度比例尺 μ_L 绘制替代机构的运动简图，如图 2.24 所示。

1

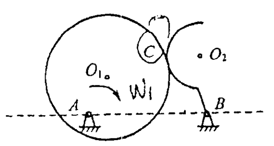


图 2.23　原始机构

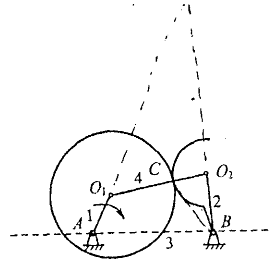


图 2.24　替代机构

② 求解 ω_2 和 v_{C_1}、v_{C_2}

构件 4 上 Q_2 点和 Q_1 点之间的速度关系为：

$$\boldsymbol{v}_{O_2} = \boldsymbol{v}_{O_1} + \boldsymbol{v}_{O_2O_1}$$

方向：　$\perp O_2B$　$\perp AO_1$　$\perp O_1O_2$

大小：　?　$l_{AO_1}\omega_1$　?

根据上式，选取适当的速度比例尺 μ_v 作速度多边形 Δpo_1o_2，如图 2.25 所示，由此可以解出 v_{O_2}。因此可以解出：

$$\omega_2 = \frac{v_{O_2}}{l_{BO_2}}$$

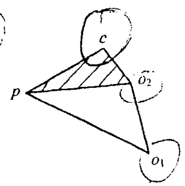


图 2.25　速度多边形

而

$$v_{C_1} = \omega_1 l_{AC_1}$$

O_2 上的 C 点：V_{C_2}

再根据速度影像原理，作 $\Delta po_2c \backsim \Delta BO_2C$，且字母次序相同，从而解出 v_{C_2}。

(郑文纬)
(问题)

例 2.9　图 2.26 所示的牛头刨床机构，现已知各构件的尺寸及原动件曲柄 1 的角速度 ω_1，试求图示位置滑枕的速度 v_{C_5}。

分析：经过对机构进行分析可以看出，本题所示的机构为Ⅲ级机构，因此属于复杂机构的运动分析问题，这里我们采用特殊点法进行求解。

解：

① 选取合适的长度比例尺 μ_L 绘制替代机构的运动简图，如图 2.26 所示。

② 求解 v_{C_5}

在构件 3 上选取一个特殊点 S，为 ED 延长线与过 B 点且为 BD 垂线的交点，如图 2.27 所示。

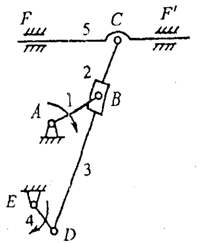


图 2.26　牛头刨床机构

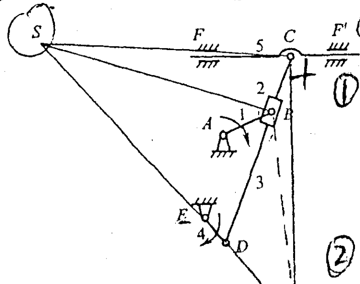


图 2.27　在原机构上选择的特殊点 S

(郑文纬) 课本 P36

① $V_{B_3} = V_{B_2} + V_{B_3B_2}$
$\perp B_3 B$　$\perp AB$　$// CE$
?　$\omega_1 l_{AB}$　?

② $V_E = V_{B_3} + V_{EB_3}$
$// FF'$　$P \to b_3$　$\perp EB$
?　$\mu_v \overline{pb_3}$　?

则：

$$v_{B_2} = \omega_1 l_{AB}$$

$$\boldsymbol{v}_{B} = \boldsymbol{v}_{B_2} + \boldsymbol{v}_{B_3B_2}$$　V_{B_3}

$$\boldsymbol{v}_{S_3} = \boldsymbol{v}_{B_3} + \boldsymbol{v}_{S_3B_3}$$

所以：

$$\boldsymbol{v}_{S_3} = \boldsymbol{v}_{B_2} + \boldsymbol{v}_{B_3B_2} + \boldsymbol{v}_{S_3B_3} = \boldsymbol{v}_{D_3} + \boldsymbol{v}_{S_3D_3}$$

方向：　$\perp AB$　$// CD$　$// CD$　$\perp ED$　$\perp ED$

大小：　已知　?　?　?　?

上式中虽然有四个未知数，但由于 $\boldsymbol{v}_{B_3B_2}$ 与 $\boldsymbol{v}_{S_3B_3}$ 方向相同，$\boldsymbol{v}_{D_3}$ 与 $\boldsymbol{v}_{S_3D_3}$ 方向相同，因此作速度多边形，可以解出构件 3 上特殊点 S 的速度 v_{S_3}。v_{S_3} 已知后，可以列出以下方程：

$$\boldsymbol{v}_{C_3} = \boldsymbol{v}_{S_3} + \boldsymbol{v}_{C_3S_3}$$

沿杆CD

在该方程中仅有两个未知数，因此可以解出 v_{C_3}。而

$$\boldsymbol{v}_{C_5} = \boldsymbol{v}_{C_3}$$

从而解出所求未知量。

提示

由于本题目仅要求进行速度分析，因此采用解析法、综合法、特殊点法等方法均可以进行求解。但是如果除了速度分析外还要求进行加速度分析，则只能采用特殊点法求解。?

例 2.10　图 2.28 所示机构，现已知 l_4 和 l_1 以及图示位置时 B 点至 C 点的距离 S，构件 2 的平均速度为 v_r。求构件 1 的角速度 ω_1 和构件 3 的角速度 ω_3。

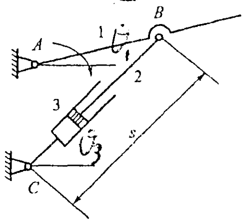


图 2.28　例 2.10 图

解：

取构件 1 图示位置与水平线间夹角为 θ_1，构件 3 图示位置与水平线间夹角为 θ_3。

在 ΔABC 中，根据余弦定理有：

$$s^2 = l_1^2 + l_4^2 - 2l_1l_4\cos(90° + \theta_1)$$

即

$$\sin\theta_1 = \frac{s^2 - l_1^2 - l_4^2}{2l_1l_4}$$

将上式对时间求微分得

$$\omega_1\cos\theta_1 = \frac{2sv_r}{2l_1l_4}$$

从而解出

$$\omega_1 = \frac{sv_r}{l_1l_4\cos\theta_1}$$

又由于

$$l_1^2 = l_4^2 + s^2 - 2sl_4\cos(90° - \theta_3)$$

即

$$\sin\theta_3 = \frac{s^2 + l_4^2 - l_1^2}{2sl_4}$$ ；← 求微分 (t)：$\omega_3\cos\theta_3 = \frac{1}{2l_4}\left[\frac{s(2sv_r) - (s^2+l_4^2-l_1^2)v_r}{s^2}\right] = \frac{v_r}{2l_4}\left[\frac{s^2+l_1^2-l_4^2}{s^2}\right]$

例：图3.28、曲柄滑块机构……曲柄长 $l_{AB}=100mm$……偏距 $e=20mm$。
曲柄的角速度 $\omega=100\ r/min$，对应于 $\varphi=45°$ 时的滑块速度为 $v=8m/s$，试用作图法和解析法求解连杆BC的长度。

分析：本题目已知曲柄的长度和偏距，因此求解的关键是确定对应于 $\varphi=45°$ 时铰链 C 点的位置。一旦 C 点的位置被确定，即可解得连杆 BC 的长度。

解：

(1) 作图法

$v_C = v_B + v_{CB}$
（大小 方向）（方向）

① 选择合适的长度比例尺，绘制出 $\varphi = 45°$ 时的曲柄线 AB，以距离 20mm 引偏距线。

$\frac{100 \times 2\pi \text{ rad}}{60\ s}$

② 由 $v_B = \omega l_{AB}$，计算得到曲柄端点 B 的线速度。?

③ 选择适当的速度比例尺。取速度多边形的极点 P，作线段 $pb \perp AB$，得到端点 b；过极点 p 绘制线段 pc 平行于滑块移动方向线，得到端点 c。

④ 连接 b、c 两端点，得到相对速度 v_{BC} 的方向线 bc，该方向线应与连杆 BC 相垂直，即 $bc \perp BC$，因此过曲柄端点 B 绘制线段 $BC \perp bc$，与偏距线交于 C 点，求得活动铰链 C 点位置，如图 3.29 所示。量取线段 BC 长度并乘以长度比例尺即可得到连杆 BC 的长度。

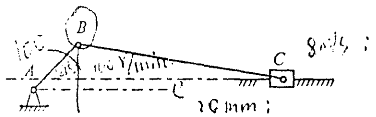


图 3.28 曲柄滑块机构

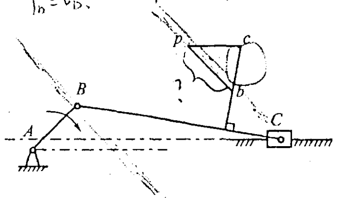


图 3.29 作图法

$v_C = 8m/s$

$v_B = 10.486 \times 0.1$

$= 1.05m/s$

(2) 解析法

取曲柄 AB 长度为 r，倾角为 φ；连杆 BC 的长度为 l，倾角为 ψ；AC 间距离为 s。则有：

$$\begin{cases} r\sin\varphi = l\sin\psi + e & \text{(a)} \\ s = r\cos\varphi + l\cos\psi & \text{(b)} \end{cases}$$

将(a)式对时间 t 微分，可得：

$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$；

$$r\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = l\cos\psi \frac{d\psi}{dt}$$?

即

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega r\cos\varphi}{l\cos\psi} \tag{c}$$

将(b)式对时间 t 微分，可得：

$\frac{ds}{dt} = v_C$；

$$\frac{ds}{dt} = v_C = -r\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} - l\sin\psi \frac{d\psi}{dt} \tag{d}$$

将(c)式代入(d)式，可得：

$$v_C = -r\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} - l\sin\psi \frac{d\psi}{dt} =$$

$$-r\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} - l\sin\psi \times \frac{\omega r\cos\varphi}{l\cos\psi} = -r\omega\sin\varphi - \omega r\cos\varphi \text{tg}\psi$$

因此有：

$$\text{tg}\psi = -\frac{v_C}{\omega r\cos\varphi} - \text{tg}\varphi \tag{e}$$

设顺时针方向为正，则根据已知条件可知 $v_C = 8m/s$，$r = 100mm$，$\varphi = +45°$，$\omega = -100r/min$（顺时针为正）。将上述参数代入(e)式，解得 $\text{tg}\psi = 0.1315$，即 $\psi = 7.49°$。代入(a)式，解得连杆 BC 的长度为 $l = 390mm$。?

例 3.9 一铰链四杆机构，已知 $\varphi_0 = \psi_0 = 0°$，原动件和从动件的 3 组对应位置为：$\varphi_1 = 45°$，$\psi_1 = 52°10'$；$\varphi_2 = 90°$，$\psi_2 = 82°10'$；$\varphi_3 = 135°$，$\psi_3 = 112°10'$，如图 3.30 所示。机架长度 $l_{AD} = 50mm$，试用解析法设计此机构。

分析：这是一个典型的通过机构已知的 3 组位置进行机构设计的例子。由于题目要求采用解析法求解，因此建立坐标系，根据机构一个任意时刻的位置列方程并代入已知的位置条件即可求解。

解：

① 建立直角坐标系，如图 3.31 所示。

$\frac{\varphi_{14}-\varphi_{13}}{2}$　$\frac{\psi_{14}-\psi_{13}}{2}$

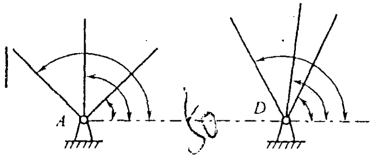


图 3.30 例 3.9 图

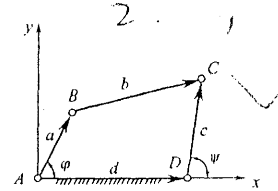


图 3.31 直角坐标系

② 在图 3.31 中，将 4 个构件视作向量，则有：

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}$$

将各个分量分别对 x 轴和 y 轴投影，并消去连杆倾角，可以得到：

$$b^2 = a^2 + d^2 + c^2 + 2ad\cos\varphi - 2ac\cos(\varphi - \psi) \tag{a}$$

这里令

$$R_1 = \frac{a^2 + d^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$R_2 = \frac{d}{c}$$

$$R_3 = \frac{d}{a}$$

则式(a)可以写为：

$$R_1 - R_2\cos\varphi + R_3\cos\psi = \cos(\varphi - \psi) \tag{b}$$

将给定的 3 组 φ 和 ψ 分别代入(b)式，并将 3 个方程联立求解，可以解得：

$$R_1 = 0.7838$$
$$R_2 = 1.2520$$
$$R_3 = 1.8575$$

因此可以解出待设计机构的各杆杆长为：

$$\begin{cases} a = 26.92mm \\ b = 56.86mm \\ c = 39.94mm \end{cases}$$

3

标准直齿圆柱齿轮，已知齿数比为 i=4，$Z_1=20$，安装中心距 $a'=255mm$，试求：

① 两轮的节圆半径 r_1'，r_2'，啮合角 α'；② 两轮分度圆半径，基圆半径；③ 小齿轮齿廓上最大曲率半径和最小压力角；④ 大齿轮齿廓上最小曲率半径和最大压力角。

分析：节圆半径、分度圆半径、基圆半径和啮合角等未知量可以根据齿轮标准安装条件进行求解；小齿轮齿廓上的最大曲率半径发生在齿顶圆上，最小压力角则要考虑小齿轮的基圆和齿根圆之间的大小关系。如果基圆大于齿根圆，根据渐开线性质在基圆内没有渐开线，则最小压力角在基圆上；如果基圆小于齿根圆，则最小压力角位于齿根圆上。

解：

① 根据已知条件：$Z_1=20$，$i=\dfrac{Z_2}{Z_1}=4$ 可以解出 $Z_2=80$。则标准安装中心距为：

$$a=\frac{1}{2}(Z_1+Z_2)m=\frac{1}{2}(20+80)\times 5=250\text{mm}$$

现已知安装中心距为 $a'=255$mm，大于标准安装中心距，因此为非标准安装。

根据公式　$a\cos\alpha=a'\cos\alpha'$ 可以解得此时啮合角的 α'。

再联立方程　$a'=r_1'+r_2'=255$，$i=\dfrac{r_2'}{r_1'}=4$，可以解得节圆半径 r_1'、r_2'。 $\left\{\begin{array}{l} r_2'=204 \\ r_1'=51 \end{array}\right.$

② 联立方程　$a=r_1+r_2=250$，$i=\dfrac{r_2}{r_1}=4$，可以解得分度圆半径 r_1、r_2。 $\left\{\begin{array}{l} r_2=200 \\ r_1=50 \end{array}\right.$

分度圆半径解出后，根据公式 $r_b=r\cos\alpha$，可以解出两轮的基圆半径。

③ 小齿轮的最大曲率半径发生在齿顶圆上，

齿顶圆半径为

$$r_a=r+h_a=r+h_a^*m=50+5=55\text{mm}$$

因此最大曲率半径为：

$$\rho_{\max}=\sqrt{r_a^2-r_b^2}=\sqrt{55^2-r_b^2}$$

基圆直径为

$$d_{b1}=d_1\cos\alpha=100\times\cos 20^\circ=93.97\text{mm},$$

齿根圆直径为

$$d_f=d-2h_f=100-2(h_a^*+c^*)m=87.5\text{mm}$$

基圆半径大于齿根圆半径，因此最小压力角在基圆上，其值为 $\alpha_{\min}=0$。

④ 对于大齿轮而言，

基圆直径为

$$d_{b2}=d_2\cos\alpha=400\times\cos 20^\circ=375.88\text{mm},$$

齿根圆直径为

$$d_{f2}=d_2-2h_f=400-2(h_a^*+c^*)m=387.5\text{mm}$$

齿根圆直径大于基圆直径，因此其最小曲率半径发生在齿根圆上，根据公式 $\rho=\sqrt{r_k^2-r_b^2}$ 可以解出；最大压力角在齿顶圆处，根据公式 $\cos\alpha=\dfrac{r_b}{r_k}$ 可以解出。

注意

这种题目比较容易出现的错误就是想当然地认为最小压力角和最小曲率半径出现在齿根圆上。在求解齿轮机构最小压力角和最小曲率半径时，一定要计算清楚齿根圆和基圆的几何尺寸。如果基圆比齿根圆小，则最小压力角和最小曲率半径出现在齿根圆上；如果基圆比齿根圆大，则最小压力角和最小曲率半径出现在基圆上。

d_1　r_1

h_{a1}

h_{f1}

h_1

d_{a1}，r_a

d_{f1}，r_f

d_{b1}，r_b

P_1

P_b

S. 厚：

e. 宽：

c.

a. ?

i_{12}

α_{a1} 齿顶圆压力角

$$\alpha_{a1}=\frac{r_1\cos\alpha}{r_{a1}}=\frac{\text{基圆半径}}{\text{齿顶圆半径}}$$

例 5.4　已知一对标准安装的外啮合标准直齿圆柱齿轮传动，$m=3$mm、$\alpha=20^\circ$、$i_{12}=2$，当两轮的齿顶圆分别通过对方的极限啮合点时，其重合度为 $\varepsilon=1.738$，试求两轮的节圆半径。

分析：根据已知条件可知，两齿轮为标准齿轮且为标准安装，因此节圆与分度圆重合、啮合角与压力角相等；两轮的齿顶圆分别通过对方的极限啮合点，因此理论啮合线与实际啮合线长度相等。现重合度大小已知，基节 $P_b=\pi m\cos\alpha$，根据重合度理论计算公式 $\varepsilon=\dfrac{\overline{B_1B_2}}{P_b}$ 可以解得实际啮合线的长度，再根据前述几何关系就可以解得两轮的齿顶圆半径。

?

解：

根据 $i_{12}=\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{r_{b_2}}{r_{b_1}}=2$，可知轮 2 的分度圆半径为轮 1 分度圆半径的 2 倍，即 $r_2=2r_1$。

根据公式 $P_b=\pi m\cos\alpha$，可以解出齿轮的基节长度。

当两轮的齿顶圆刚好通过对方的极限啮合点时，理论啮合线与实际啮合线长度相等，因此两齿轮的实际啮合线段长 $\overline{B_1B_2}=\overline{N_1N_2}$。根据公式 $\varepsilon=\dfrac{\overline{B_1B_2}}{P_b}=\dfrac{\overline{N_1N_2}}{P_b}=1.738$，可以解得啮合线段 $\overline{N_1N_2}$ 长度为 $\overline{N_1N_2}=\varepsilon P_b$。

因两齿轮为标准安装，因此节圆与分度圆重合。现任取一长度作为轮 1 的分度圆半径，按照 $r_2=2r_1$ 及 $r_{b_1}=r_1\cos\alpha$ 的几何关系，作出两齿轮的啮合状态图，如图 5.13 所示。

在图 5.13 中，因 $\Delta O_2N_2C\backsim\Delta O_1N_1C$，故 $\dfrac{\overline{N_2C}}{\overline{N_1C}}=\dfrac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1C}}=2$，又 $\overline{N_2C}+\overline{N_1C}=\overline{N_1N_2}$ 由此可以解出线段 $\overline{N_2C}$ 和线段 $\overline{N_1C}$ 的长度。

在直角 ΔO_2N_2C 中，$\angle O_2N_2C=\alpha$，因此 $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\overline{N_2C}}{\overline{O_2N_2}}$，可以解得线段 $\overline{O_2N_2}$ 长度。

在直角 $\Delta O_2N_2N_1$ 中，$\overline{O_2N_1}^2=\overline{O_2N_2}^2+\overline{N_2N_1}^2$，现线段 $\overline{O_2N_2}$ 长度和线段 $\overline{N_1N_2}$ 长度均为已知，故线段 $\overline{O_2N_1}$ 长度可解。

根据已知条件可知，两齿轮的齿顶圆刚好通过对方的极限啮合点，因此线段 $\overline{O_2N_1}$ 就是轮 2 的齿顶圆半径，即轮 2 的齿顶圆半径解得。

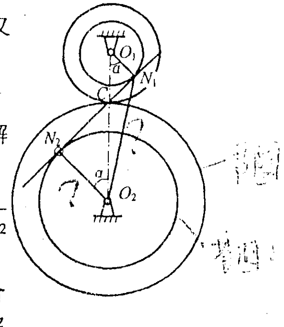


图 5.13　啮合状态图

同理，解出线段 $\overline{O_1N_2}$ 长度，即轮 1 的齿顶圆半径。

"外啮合 +"

例 5.5　现有一对齿轮机构的安装位置，当采用一对标准直齿圆柱齿轮，其 $m=$

$$\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\left[Z_1(\tan\alpha_{a1}-\tan\alpha')+Z_2(\tan\alpha_{a2}-\tan\alpha')\right]$$

4

m=10mm、$\alpha = 20°$、$h_a^* = 1$、$Z_1 = 40$、$Z_2 = 60$ 仅能刚好保证齿轮连续传动，若改用一对标准斜齿圆柱齿轮，其 $m_n = 10$mm、$\alpha_n = 20°$、$h_{an}^* = 1$、$Z_1 = 40$、$Z_2 = 60$，试确定保证无齿侧间隙时螺旋角 β 的大小。

分析：采用标准直齿圆柱齿轮时仅能刚好保证连续传动，说明此时机构的重合度 $\varepsilon = 1$。根据已知条件，可以解出两齿轮的齿顶圆半径，因此齿顶圆压力角可以解出。利用重合度计算公式 $\varepsilon = \frac{1}{2\pi}[Z_1(\mathrm{tg}\alpha_{a_1} - \mathrm{tg}\alpha) \pm Z_2(\mathrm{tg}\alpha_{a_2} - \mathrm{tg}\alpha')]$，可以求出此时的啮合角 α' 的大小，并进一步算出此时的安装中心距 α'，从而求得斜齿轮机构的螺旋角 β。

解：

两轮的基圆半径分别为：

$$r_{b_1} = r_1\cos\alpha = \frac{1}{2}mZ_1\cos\alpha = \frac{1}{2}\times 10\times 40\times \cos20° = 187.94\text{mm}$$

$$r_{b_2} = r_2\cos\alpha = \frac{1}{2}mZ_2\cos\alpha = \frac{1}{2}\times 10\times 60\times \cos20° = 281.90\text{mm}$$

两轮的齿顶圆半径分别为：

$$r_{a_1} = r_1 + h_a = \frac{1}{2}mZ_1 + h_a^*\times m = \frac{1}{2}\times 10\times 40 + 1\times 10 = 210\text{mm}$$

$$r_{a_2} = r_2 + h_a = \frac{1}{2}mZ_2 + h_a^*\times m = \frac{1}{2}\times 10\times 60 + 1\times 10 = 310\text{mm}$$

根据公式 $\cos\alpha = \frac{r_b}{r_k}$，解得两轮的齿顶圆啮合角分别为 $\alpha'_1 = 26.50°$、$\alpha'_2 = 24.58°$，

代入公式 $\varepsilon = \frac{1}{2\pi}[Z_1(\mathrm{tg}\alpha_{a_1} - \mathrm{tg}\alpha') + Z_2(\mathrm{tg}\alpha_{a_2} - \mathrm{tg}\alpha')] = 1$，可以解得此时的啮合角为：$\alpha' = 22.35°$

根据公式：$a\cos\alpha = a'\cos\alpha'$，可以解出实际安装中心距为 $a' = 508$mm

当改用标准斜齿圆柱齿轮后，为了无侧隙啮合，同样要两轮的分度圆与节圆重合。代入斜齿轮中心距计算公式，有：

$$a' = \frac{m_n(Z_1 + Z_2)}{2\cos\beta} = \frac{10\times(40+60)}{2\cos\beta} = 508，解得\ \beta = 10.18°$$

即当斜齿轮的螺旋角 $\beta = 10.18°$时可以保证斜齿轮无齿侧间隙啮合。

例 5.6 标准渐开线齿轮齿条传动，其参数为 $m = 5$mm、$\alpha = 20°$、$h_a^* = 1$、$c^* = 0.25$、$Z = 20$。如果齿轮的中心 O_2 在安装时偏离其正常位置 0.2mm(即齿轮的分度圆与齿条的节线不相切而偏离其正常位置 0.2mm)，试问：

① 齿轮的节圆半径 r' 和啮合角 α' 等于多少，为什么？

② 齿轮的渐开线齿廓由哪一点开始为工作齿廓？这一点的半径是多少？

③ 沿啮合线方向出现的法向间隙的大小。

分度圆直径：$d = Zmt$.

中心距：$a = mt(Z_1+Z_2)/2$.

$\frac{P\sin\beta}{\pi m_n}$

$r_{bi} = mZ\cos\alpha/2$

$r_{fi} = (mZ - 2h_a^* - 2c^*)m/2$

$\frac{5}{2}\times 18.5$

分析：齿轮与齿条啮合时，无论是否标准安装，啮合线的位置总是不变，啮合线 $\overline{N_1N_2}$ 与连心线 $\overline{O_1O_2}$ 的交点也不变。因此齿轮的节圆大小也保持不变，且恒与分度圆重合，啮合角 α' 恒等于其分度圆压力角。

解：

① 因节圆恒与分度圆重合，因此其节圆半径为 $r' = r = \frac{1}{2}mZ = \frac{1}{2}\times 5\times 20 = 50$mm，啮合角等于其分度圆压力角，即 $\alpha' = \alpha = 20°$。 $\frac{5}{2}\times 18.39 > \frac{5}{2}\times 18.5$

② 根据已知条件可以算出，该齿轮的基圆半径大于齿根圆半径，因此该齿廓的工作齿廓由基圆开始，其半径为基圆半径，即 $r_k = r_b = r\cos\alpha = 50\cos20° = 46.98$mm。

③ 由图 5.14 所示几何关系可知，沿啮合线方向的法向间隙为：Δn

$$c_n = 2xm\sin\alpha = 2\times 0.2\times \sin20° = 0.1368\text{mm}$$

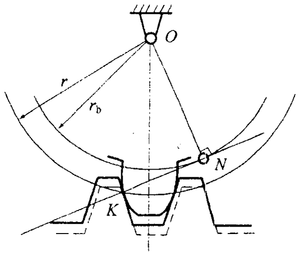


图 5.14 齿轮齿条啮合

例 5.7 用直线齿廓齿条刀具以范成法加工渐开线齿轮。现已知刀具的模数为 $m = 3$mm、$\alpha = 20°$、$h_a^* = 1$，齿轮轮坯中心距离刀具中线(分度线)距离为 21.7mm，刀具线速度为 $v = \pi$mm/s，轮坯角速度为 $\omega = \frac{\pi}{21}$rad/s，试求：

① 齿轮轮坯齿数；

② 变位系数 x；

③ 判断齿轮是否根切。

解：

① 齿轮齿数

齿轮分度圆线速度应等于刀具的移动速度，即：$\omega r = v = \pi$nm，因此

$$r = \frac{\pi}{\omega} = \pi/\frac{\pi}{21} = 21\text{mm}$$

解得齿轮轮坯齿数为：

$$Z = \frac{2r}{m} = \frac{2\times 21}{3} = 14$$

② 变位系数 x

齿轮轮坯中心距离刀具中线的距离 $L = r + xm = 21.7$，解得变位系数 $x = 0.233$。

③ 是否根切

当 $\alpha = 20°$、$h_a^* = 1$ 时，最小变位系数为：

$$x_{\min} = \frac{17 - Z}{17} = \frac{17 - 14}{17} = 0.176$$

现变位系数 x 大于最小变位系数 $x_{\min}$，因此不会发生根切。

5

[redacted]

[redacted]

例题：9.2

$M_1 = M_2 \frac{}{w_1}$

$M_1 = F_2 \frac{V_2}{W_1}$

轮的齿数及转动惯量分别为：$Z_1 = 32, J_1 = 0.1\text{kg}\cdot\text{m}^2$; $Z_2 = 56, J_2 = 0.2\text{kg}\cdot\text{m}^2$; $Z_3 = 32, J_3 = 0.1\text{kg}\cdot\text{m}^2$; $Z_4 = 56, J_4 = 0.25\text{kg}\cdot\text{m}^2$。要求在切断电动机电源后 2s 内，利用安装在轴 I 上的制动器将整个系统制动住，求所需要的制动力矩。

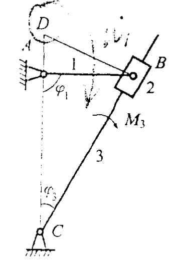


图 9.1　例 9.1 图

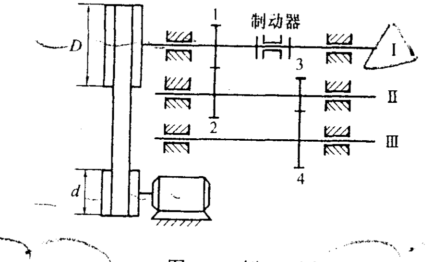


图 9.2　例 9.2 图

$FV = MW$

$JW^2 = mv^2$

分析：本题目要求解用轴 I 上的制动器将整个系统制动住所需要的制动力矩。因此可以将整个系统转化到轴 I 上，求出以 I 轴为等效构件时的等效转动惯量 J_{e1}，再乘以角加速度 ε 就是所需要的制动力矩。

$M = J\alpha$

解：

首先根据各轮的尺寸以及转动惯量，求出以 I 轴为等效构件时的等效转动惯量 J_{e1}。

$$J_{e1} = J_1 + J_D + J_d\left(\frac{\omega_0}{\omega_I}\right)^2 + (J_2 + J_3)\left(\frac{\omega_{II}}{\omega_I}\right)^2 + J_4\left(\frac{\omega_{III}}{\omega_I}\right)^2 =$$

$$J_1 + J_D + J_d\left(\frac{D}{d}\right)^2 + (J_2 + J_3)\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 + J_4\left(\frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}\right)^2 =$$

$$0.1 + 0.3 + 0.1\left(\frac{200}{100}\right)^2 + (0.2 + 0.1)\left(\frac{32}{56}\right)^2 + 0.25\left(\frac{32 \times 32}{56 \times 56}\right)^2 =$$

$$0.925\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$W = \frac{1}{2}JW^2 = \frac{1}{2}mv^2$

$= M\varphi$

$$n_I = n_0 \frac{d}{D} = 1500 \times \frac{100}{200} = 750\text{r/min}$$

$$\omega_I = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{\pi \times 750}{30} = 78.54\text{rad/s}$$

$M = J\varepsilon$

因此：

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_1}{t} = \frac{0 - 78.54}{2} = -39.27\text{rad/s}$$

$M = J\alpha$

由此可得所需的制动力矩为：

$$M_{er} = J\varepsilon = 0.925 \times 39.27 = 36.32\text{N}\cdot\text{m}$$

即在 2s 内制动所需要的制动力矩至少为 36.32N·m。

例 9.3　图 9.3 所示为某机械系统的等效力矩变化曲线。已知机械启动后转了 100π 后开始工作，等效驱动力矩为 $M_{ed} = 30\text{N}\cdot\text{m}$，等效阻力矩为 $M_{er} = 60\text{N}\cdot\text{m}$，等效转动惯量为 $J_e = 6\text{kg}\cdot\text{m}^2$，试求该机械系统运转的不均匀系数。

$J_1 = J_2\left(\frac{V_2}{W_1}\right)^2$

$\frac{1}{2}JW^2 = ME = \frac{1}{2}mv^2$

分析：根据图 9.3 所示的力矩变化曲线可以找到角速度最大和最小点，求出此两点的角速度就可以解出不均匀系数。

max　min

解：

该机械系统在启动后转过 100π 达到图 9.3 中的 a 点，a 点的角速度为最大值 ω_{max}。根据机械系统运动方程可知：

$$\int_0^{100\pi} M_d d\varphi = \frac{1}{2} J_e(\omega_{max}^2 - \omega_0^2)$$

$ME = \frac{1}{2}JW^2$

即：
$$\int_0^{100\pi} 30 d\varphi = \frac{1}{2} \times 6 \times (\omega_{max}^2 - 0)$$

解得：
$$\omega_{max} = 56.2\text{rad/s}$$

加上阻力矩后，角速度不断减小，在到达 b 点时达到最小值 ω_{min}。由此得：

$$\int_0^{101\pi} M_d d\varphi - \int_0^{\pi} M_r d\varphi = \frac{1}{2} J_e(\omega_{min}^2 - \omega_0^2)$$

即：
$$\int_0^{101\pi} 30 d\varphi - \int_0^{\pi} 60 d\varphi = \frac{1}{2} \times 6 \times (\omega_{min}^2 - 0)$$

解得：
$$\omega_{min} = 55.75\text{rad/s}$$

因此该机械系统运转的不均匀系数为：

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} = \frac{2(\omega_{max} - \omega_{min})}{\omega_{max} + \omega_{min}} = \frac{2(56.2 - 55.75)}{56.2 + 55.75} = 0.795$$

例 9.4　图 9.4 所示为某机械系统等效力矩变化曲线。已知等效驱动力矩 M_{ed} 为常数，电机转速为 1500r/min，机械各构件的等效转动惯量忽略不计。试求保证不均匀系数 $\delta \leqslant 0.05$ 时安装在电机主轴上的飞轮转动惯量 J_F。

6

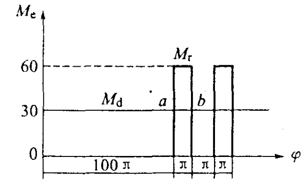


图 9.3　例 9.3 图

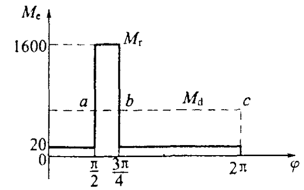


图 9.4　例 9.4 图

分析：本题目要求计算飞轮的转动惯量 J_F，因此需要解出最大剩余功 A_{max}。根据稳定运转阶段的驱动功与阻力功相等，可以首先解出等效驱动力矩 M_{ed}。然后根据等效力矩变化曲线分别计算 a、b、c 各点的能量变化量，从而解出最大剩余功 A_{max}。

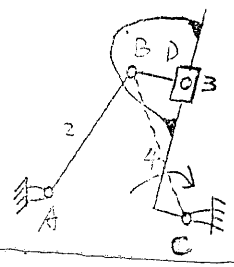
(看过程)　明白思路

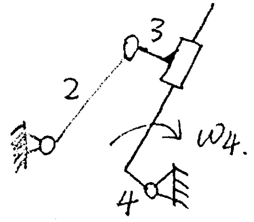
解：

根据机械稳定运转阶段内每一循环中驱动力所作的功等于阻力所作的功，可得：

$ME = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}JW^2$

例2.6. 图所示导杆机构，已知机构位置及各构件的长度，导杆4为原动件，以等角速度 ω_4 转动，求杆2的角速度 ω_2、角加速度 ε_2。



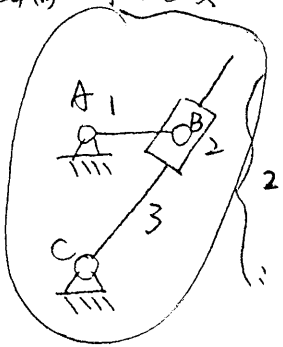


? 分析：如图中存在活动导路的移动副 ⇒ 应运用"点的复合运动"关系，在组成活动导路移动副的两构件上选取重合点，建立这两个重合点之间的运动方程求解。（由于题中活动导路为转动，存在哥氏加速度）。

解：① 选取比例尺 $\mu_L = ?$，作机构的运动简图。

② 求解 ω_2。

假想将导杆4加以扩大，使扩大部分包含 B_3 点。则滑块3上的 B_3 点与导杆4上的 B_4 点之间的速度关系为：



B处构件滑块！

2移动的同时，3转动；

$$a_3 + a_{34}^k + a_{34}^r = a_2^n + a_2^t;$$

B_2、B_3.

? 铰链四杆机构： 不十分清楚

① 机构为曲柄摇杆机构， $l_{min} + l_{max} \le l_x + l_y$，及最短杆相邻杆为机架

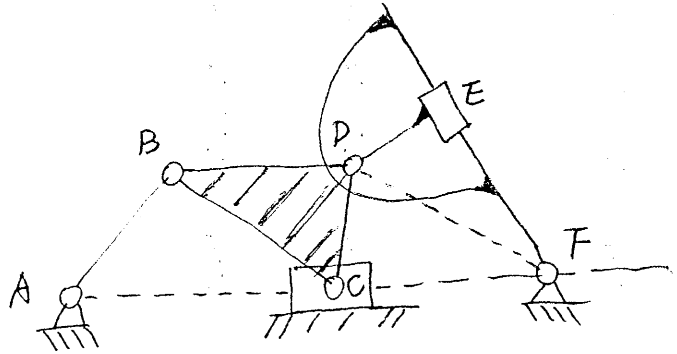
② 机构为双曲柄机构， $l_{min} + l_{max} \le l_x + l_y$，及最短杆为机架。

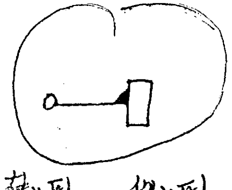
③ 机构为双摇杆机构，

第一种可能为：$l_{min} + l_{max} \le l_x + l_y$，且最短杆为连架杆。

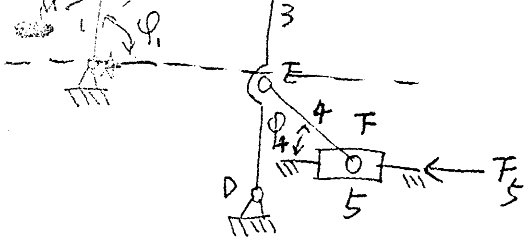
第二种可能为：$l_{min} + l_{max} > l_x + l_y$，不论各杆长为多少，均为双摇杆。

（? 最长杆 l_{AB} < 其余三杆之和 ；）



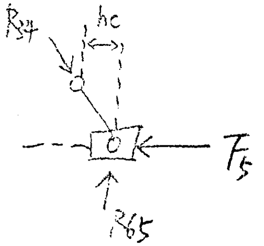


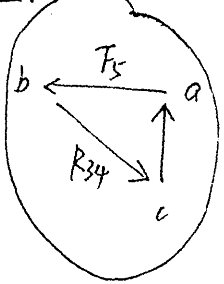
转动副、 移动副。



$l_{AB}=100mm$，$l_{BC}=l_{CD}=200mm$，$l_{DE}=0.5l_{CD}$，$\varphi_1=90°$，构件2垂直于构件1和构件3，$\varphi_4=45°$，及$F_5=1000N$。求机构在运动副A、B、C及D中的反力，以及由于作用在滑块上的载荷F_5而必须加在构件1上的平衡力偶矩M_b。然后用速度多边杠杆法校验M_b值。

解：①





① $F_5+R_{34}+R_{65}=0$.

1000N. ? ?

$G\to D$ $E\to F$ $\perp DG$.

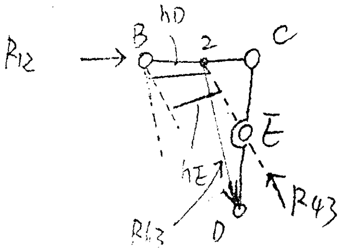
对机构作结构分析，构件4、5为Ⅱ级杆组，构件2、3也为Ⅱ级杆组。

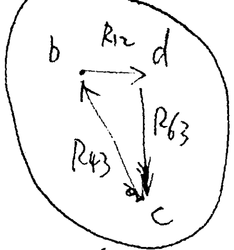
以4、5组为分离体，列①：

取$\mu_p=50N/mm$，画矢量多边形，$\begin{cases} R_{65}=\mu_p\overline{ca}=1000N. \\ R_{34}=\dfrac{F_5}{\cos45°}=1414N. \end{cases}$

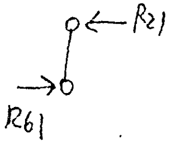
由$\sum M_E=0$，$F_5 l_{ED}-R_{65}h_G=0$，得：$h_G=100mm$.

② 构件2、3杆分离体：

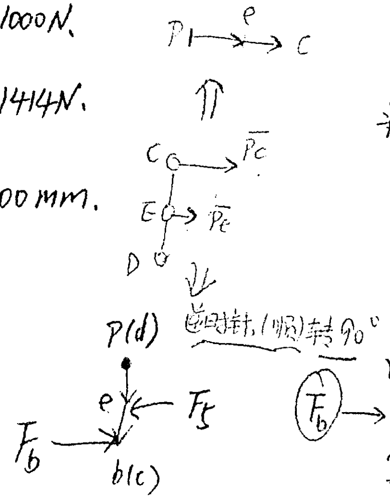




(a)



(b)



(c)

由图可知$M_E=0$ $F_5 l_{ED}-R_{65}h_G=0$. 可$h_G=100mm$

由图知，$\sum M_B=0$. $R_{63}h_D-R_{43}h_E=0$.（R_{43}和R_{34}为作用力与反作用力）

∴ $R_{63}=\dfrac{R_{43}h_E}{h_D}=1118N.$

∴ $\sum M_B=$ $R_{12}+R_{43}+R_{63}=0$

? 1414 ?

$B\to C$ $F\to E$ 与R_{12}，R_{43}交于一点.（三力杆平衡原理）三力作用线汇交于一点）

∴ 由图(a)得：$\mu_p=50N/mm$比例尺，矢量多边形

$R_{12}=\mu_p\overline{bd}=500N.$

$R_{32}=R_{12}=500N.$（R_{32}与R_{12}方向相反）

③ 取原动件构件1为分离体：

$R_A=-R_B$, $R_A=R_B=500N.$

由$\sum M_A=0$. $M_b=R_{21}l_{AB}=50N.m$，顺时针方向

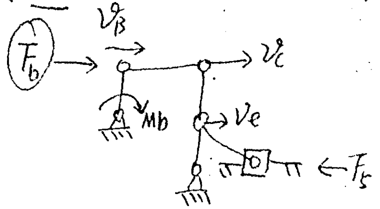
④ 用速度多边形杠杆法校验M_b值。

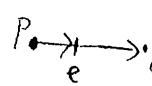
先取μ_v作转向速度多边形如图(c)，再将$F_b=R_{12}$平移至b(c)点，将F_5平移至e点。

$F_b\cdot\overline{pb}=F_5\overline{pe}$.

$F_b=\dfrac{F_5\overline{pe}}{\overline{pb}}=500N.$

所以，$M_b=500N\times l_{AB}=50Nm$，顺时针方向

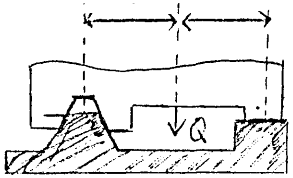




速度多边形

整个DC杆，全部点绕D点运动

…槽形滑板，已知 V形槽顶角 60°，摩擦因数为 f=0.1，求：



$\tan\varphi = f$；
{ f为摩擦因数，φ为摩擦角

① 当 $l = x$ 时，整个滑板当量摩擦因数 f_v 的大小；

② 当 $l = \frac{x}{2}$ 时，整个滑板当量摩擦因数 f_v 的大小。

分析：分别解出左侧 V 形表面与右侧水平面的摩擦力，再两侧的摩擦力相加再除以总重量，即可求得当量摩擦因数 f_v。

解：

左侧 V 形表面的当量摩擦因数 f'_v 为：

{ 水平槽面摩擦，斜槽面摩擦 ⇒ $f_v = \frac{f}{\sin\theta}$

$$f_v = \frac{f}{\sin\theta} = \frac{0.1}{\sin\frac{60^\circ}{2}} = 0.2$$

$\varphi_v = \arctan\frac{f}{\sin\theta}$；

① $l = x$ 时的当量摩擦因数 f_v

当 $l = x$ 时，左侧 V 形表面与右侧水平面的正压力均为 $\frac{Q}{2}$，因此其各自产生的摩擦力为：

$$F_L = \frac{Q}{2} f'_v = \frac{Q}{2} \times 0.2 = 0.1Q$$

$$F_R = \frac{Q}{2} f = \frac{Q}{2} \times 0.1 = 0.05Q$$

{ 斜平面 → 矩形螺纹；$\alpha \leq \varphi$.
斜槽面 → 三角形螺纹；$\alpha \leq \varphi_v$.
发生自锁条件!!!

因此总摩擦力为：

$$F = F_L + F_R = 0.1Q + 0.05Q = 0.15Q$$

对于整个滑板来说，有如下关系式：

$$F = f_v \times Q$$

因此整个滑板的当量摩擦因数为：

$$f_v = \frac{F}{Q} = \frac{0.15Q}{Q} = 0.15$$

② $l = \frac{x}{2}$ 时的当量摩擦因数 f_v

当 $l = \frac{x}{2}$ 时，$Q_L = \frac{2}{3}Q$，$Q_R = \frac{1}{3}Q$。根据上述同样方法可以解得：

$$f_v = \frac{F}{Q} = \frac{0.166Q}{Q} = 0.166$$

⇒ $\frac{总摩擦力}{总压力} = \frac{F}{Q}$

例 8.3 破碎机原理简图如图 8.8 所示。设要破碎的料块为球形，其重量可以忽略不计。料块与颚板之间的摩擦因数为 f。求料块被夹紧(不会向上滑脱)时颚板夹角 α 应为多大？

分析：求料块被夹紧时的颚板夹角 α，实际上就是要找出颚板能使球状块料发生自锁时的最大夹角 α。当推动力 R 在料块沿底板移动方向上的有效分力小于推动时产生的极限摩擦力时，料块将出现自锁。如图 8.9 所示。 R'

解：

把推动力 R 分解为垂直于底板的分力 R'' 与沿着底板的分力 R'。前者使料块对底板产

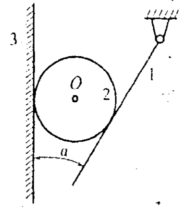


图 8.8 例 8.3 图

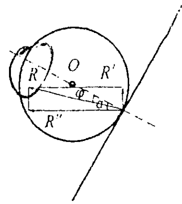


图 8.9 受力图

推动力R 的方向

生正压力，进而产生摩擦力；后者为推动料块沿底板向上移动的有效分力。

由图 8.9 所示的几何关系可知，有效推力为：

$$R' = R\sin(\alpha - \varphi)$$

由正压力 R'' 产生的极限摩擦力为：

$$F = R''f = R\cos(\alpha - \varphi)\text{tg}\varphi$$

在自锁时，有 $R' \leq F$，即 $R\sin(\alpha - \varphi) \leq R\cos(\alpha - \varphi)\text{tg}\varphi$

解得 $\text{tg}(\alpha - \varphi) \leq \text{tg}\varphi$

由此得自锁条件为：$\alpha \leq 2\varphi$。

9

提示

本题目还有其他多种解法，大家可以自己尝试一下。

例 8.4 图 8.10 所示为一四构件斜面机构，摩擦角为 φ。求 P 为主动力时的正行程不自锁而 Q 为主动力的反行程能够自锁的几何条件以及反行程的效率关系式。?

{ ?在主动力P作用下，各构件运动方式：
构件1向下移动，构件2向右移动，
构件3向上移动。

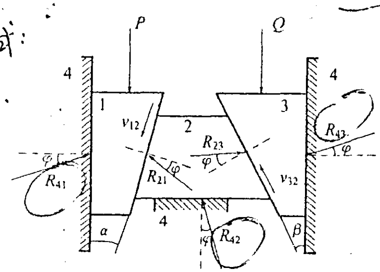


图 8.10 例 8.4 图

分析：本题目仅要求找出自锁条件，因此可以直接利用各个力的关系式，令阻力为负值来逐个求取自锁条件，无需导出机构的效率关系式来求解。

解：

{ 正行程不自锁：即 $\eta > 0$. → $\alpha < 90° - 2\varphi$ 或 β >
反行程自锁：即 $\eta' < 0$. → $\alpha < 2\varphi$ 或 $\beta > 90°$ -

① P 为主动力时的不自锁条件

设 P 为主动力时为正行程，根据各构件间的相对运动，作出反力 R_{41}、R_{42}、R_{43} 等对各自法线偏转摩擦角 φ 后的力的作用线，如图 8.10 所示。

滑块 1 的力平衡方程为：

由②⇒ $R_{12}=R_{32}\dfrac{\cos(\beta-2\varphi)}{\cos(\alpha+2\varphi)}$ ⑤

$$P + R_{41} + R_{21} = 0 \quad ①$$

由此解得：

$$R_{21} = P\frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha + 2\varphi)}$$

由上式可以看出，阻力 R_{21} 不可能为负值，因此 P 为主动力时滑块 1 不会自锁。

滑块 2 的力平衡方程为：

$$R_{12} + R_{42} + R_{32} = 0 \quad ②$$

由此解得：

$$R_{32} = R_{12}\frac{\cos(\alpha + 2\varphi)}{\cos(\beta - 2\varphi)}$$

由上式可以看出，当 $\alpha + 2\varphi > 90°$，即 $\alpha > 90° - 2\varphi$ 时，阻力 R_{32} 为负值，滑块 2 处于自锁状态。

滑块 3 的力平衡方程为：

$$R_{23} + R_{43} + Q = 0 \quad ③$$

由此解得：

$$Q = R_{23}\frac{\sin(\beta - 2\varphi)}{\cos\varphi}$$

由上式可以看出，当 $\beta < 2\varphi$ 时，阻力 Q 为负值，滑块 3 处于自锁状态。

因此，P 为主动力时的正行程机构不自锁的条件为：$\alpha < 90° - 2\varphi$ 和 $\beta > 2\varphi$。

② Q 为主动力的反行程的自锁条件

由于 Q 为主动力时为反行程，因此可以将前面正行程的力关系式中的摩擦角变号，直接得到反行程的力关系式。

对于滑块 1，有：

$$P = R_{21}\frac{\sin(\alpha - 2\varphi)}{\cos\varphi}$$

由上式可知，当 $\alpha < 2\varphi$ 时，阻力 P 为负值，机构将自锁。

对于滑块 2，有：

$$R_{12} = R_{32}\frac{\cos(\beta + 2\varphi)}{\cos(\alpha - 2\varphi)}$$

由上式可知，当 $\beta + 2\varphi > 90°$，即 $\beta > 90° - 2\varphi$ 时，阻力 R_{12} 为负值，机构处于自锁状态。

对于滑块 3，有：

$$R_{23} = Q\frac{\cos\varphi}{\sin(\beta + 2\varphi)}$$

可以看出，R_{23} 不可能为负值（$\beta + 2\varphi$ 不可能大于 2π），因此滑块 3 不会自锁。

综上所述，Q 为主动力时机构自锁的条件为：$\alpha < 2\varphi$ 或 $\beta > 90° - 2\varphi$。?

综合以上两步的分析，当 P 为主动力时的正行程不自锁的条件为：$\alpha < 90° - 2\varphi$ 和 $\beta > 2\varphi$；Q 为主动力的反行程能够自锁的条件为：$\alpha < 2\varphi$ 或 $\beta > 90° - 2\varphi$。由此可以得到最后结果为：

当 $\varphi < 22.5°$ 时，应满足 $\alpha < 2\varphi$ 或 $\beta > 90° - 2\varphi$；

当 $\varphi > 22.5°$ 时，应满足 $\alpha < 90° - 2\varphi$ 和 $\beta > 2\varphi$。

∴由①⑤⑥ ⇒ $P = Q\tan(\alpha+2\varphi)\cot(\beta-2\varphi)$

∴正行程效率为 $\eta = \dfrac{P_0}{P} = \dfrac{\tan\alpha\cdot\cot\beta}{\tan(\alpha+2\varphi)\cot(\beta-2\varphi)}$

P_0 表示 $\varphi = 0$ 时。

$P_0 = \tan(\alpha+2\times0)\cot(\beta-2\times0)$

$= \tan\alpha\cot\beta$

? 螺杆螺距为 6mm，且双头螺杆，不计凸缘处摩擦，

螺纹中径 $d_2 = 25$mm。

⇒ 螺旋副螺纹升角：

$\lambda = \arctan\dfrac{2l}{\pi d_2}$

$= \arctan\dfrac{2\times6}{\pi\times25}$

$= 8.687°$

③ 反行程的效率 ← 反行程时，因为方向反了，需把 φ 换成 $(-\varphi)$

反行程的效率为：

$$\eta' = \frac{P}{P_0} = \frac{\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}(\alpha - 2\varphi)}{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}(\beta + 2\varphi)}$$

∴ $Q = P/\tan(\alpha-2\varphi)\cot(\beta+2\varphi)$

∴ $\eta' = \dfrac{\tan(\alpha-2\varphi)\cot(\beta+2\varphi)}{\tan\alpha\cdot\cot\beta}$；

注意

从理论上讲，当效率为负值时表示机构处于自锁状态，为正值时机构不自锁。但是对于有多个几何角度（如本例中的 α 和 β）而言，效率关系式中将有多个几何角度的因子存在。这时，如果有双数个几何角度因子为负值，则效率关系式为正值，但此时绝非机构不自锁，而是处于双数个环节上同时自锁的状态。

因此，如果仅要求找出自锁条件，可以不必列出效率关系式。可以直接令力的关系式中的阻力为负值，解出自锁条件。

10

例 8.5 图 8.11 及图 8.12 所示机构，Q 为作用于构件 3 上的工作阻力。转动副 A、B 处的摩擦圆半径均为 r。试确定图示位置时作用于连杆 AB 上的作用力的真实方向（连杆本身质量及转动惯量忽略不计）。

R_{12} 与 R_{21} 作用力、反作用力。 ω_{21} —— 构件1 对构件2 ω_{23} —— 构件3 对构件2

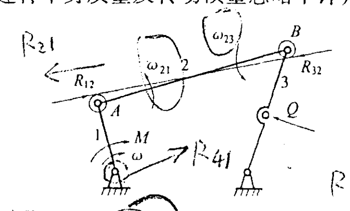


图 8.11 原始位置

R_{21}，R_{41} 两力作用于杆 1 上，摩擦圆切线，方向相一致

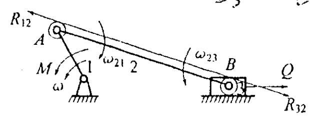


图 8.12 最终位置

螺杆：R_{12}，倒

解：

在两机构中，连杆 AB 均为二力杆。

图 8.11 所示机构，在不计摩擦时，根据构件 3 的受力情况分析可知 AB 杆受压，R_{12} 和 R_{32} 应共线且指向相同。ω_{21} 和 ω_{23} 如图中所示，因此 R_{12} 应对铰链 A 形成顺时针方向力矩，R_{32} 对铰链 B 同样形成顺时针方向力矩，且均与摩擦圆相切。故 R_{12} 和 R_{32} 为切于 A、B 两处摩擦圆的内公切线，如图所示。

图 8.12 所示机构，在不计摩擦时，根据构件 3 的受力情况分析可知 AB 杆受拉，R_{12} 和 R_{32} 应共线且指向相反。ω_{21} 和 ω_{23} 如图中所示，因此 R_{12} 应对铰链 A 形成逆时针方向力矩，R_{32} 对铰链 B 形成行程顺时针方向力矩，且均与摩擦圆相切。故 R_{12} 和 T_{32} 为切于 A、B 两处摩擦圆的外公切线，如图所示。

例 8.6 图 8.13 所示为一小型压力机，压力 $Q = 10$kN。选用梯形螺纹，已知螺纹中径 $d_0 = 23.5$mm，螺距 $s = 5$mm，为双头螺纹，牙型角为 $2\beta = 30°$。所有接触面的摩擦因数均为 $f = 0.14$。螺母凸缘尺寸为：$D_1 = 50$mm，$D_2 = 80$mm，手轮直径为 $D = 500$mm。试求加在手柄上的力 P 以及该机构的效率。

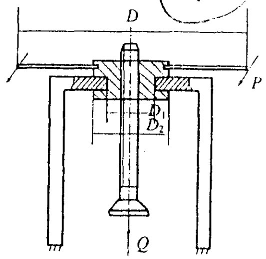
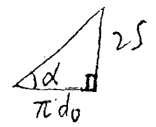


图 8.13

解：①计算力P:

将螺纹展开后、斜面升角为：$\alpha = \arctan\frac{2S}{\pi d_0}$



$= \arctan\frac{2\times 5}{\pi\times 23.5} = 7.71^\circ$.

当量摩擦角为：$\varphi_V = \arctan f_V = \arctan\frac{f}{\cos\beta}$

$= \arctan\frac{0.14}{\cos 15^\circ} = 8.25^\circ$.

令螺母中的摩擦力矩为M_1. 端面的摩擦力矩为M_2.

则力P的大小为：

$$P = \frac{M_1+M_2}{D} = \frac{1}{D}\left[Q\frac{d_0}{2}\tan(\alpha+\varphi_V) + \frac{1}{2}fQ\left(\frac{D_1}{2}+\frac{D_2}{2}\right)\right]$$

$$= 158.2N.$$

②. 计算效率：

$$P_0 = \frac{1}{D}\cdot Q\frac{d_0}{2}\tan\alpha = 31.8N.$$

故效率为：$\eta = \frac{P_0}{P} = 20\%$.

矩：$M_e = F_i\cos\alpha_i\frac{v_i}{v_e} \pm M_i\frac{w_i}{w_e}$.

量 $m_e = m_i\left(\frac{v_i}{v_e}\right)^2 \pm J_i\left(\frac{w_i}{v_e}\right)^2$

$F_e = F_i\cos\alpha_i\left(\frac{v_i}{v_e}\right) \pm M\left(\frac{w_i}{v}\right)$.

① $Fv = Mw$ = (能量)功率P

② $\frac{1}{2}Jw^2 = \frac{1}{2}mv^2$ = (能量)

③ $M = J\alpha$.

例9.1. 图9.1机构. 已知：$L_{AB} = 100mm$. $\varphi_1 = 90^\circ$. $\varphi_3 = 30^\circ$. 导杆3对轴C的转动惯量为$J_C = 0.006kg\cdot m^3$. 其他构件的质量忽略不计. 作用在导杆3上的阻力矩$M_3 = 100Nm$。求此机构转化到曲柄1上的等效阻力矩M_{er}. 转化到轴A上的等效转动惯量J_{e1}.

解：①: M_{er}.

当$\varphi_1 = 90^\circ$. $\varphi_3 = 30^\circ$时. 根图示位置可知：D点为速度瞬心P_{13}.

由此可得：$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB\tan\varphi_3}{AB\tan\varphi_3 + \frac{AB}{\tan\varphi_3}} = \frac{100\tan 30^\circ}{100\tan 30^\circ + \frac{100}{\tan 30^\circ}} = 0.25$.

? $CD = CA + AD$;

因此转化到构件1上的等效阻力矩M_{er}为：

$$M_{er} = M_3\frac{\omega_3}{\omega_1} = 100\times 0.25 = 25N.m.$$

②. J_{e1}.

转化到轴A上的等效转动惯量J_{e1}为：

$$J_{e1} = J_3\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 = 0.006\times(0.25)^2 = 0.000375\ kg\cdot m^2.$$

例9.2、图9.2为一简易机床的主传动系统、它由一级皮带传动和两级齿轮传动组成. 已知直流电动机的转速为$n_0 = 1500r/min$. 小皮带轮的直径为$d = 100mm$. 转动惯量为$J_d = 0.1kg\cdot m^2$. 大皮带轮的直径为$D = 200mm$. 转动惯量为$J_D = 0.3kg\cdot m^2$，各齿

11

图10.1 所示盘形回转件中，有四个偏心质量位于同一回转平面内，它们

的质量大小及其质心至回转轴的距离分别为：$m_1 = 50g$、$m_2 = 70g$、$m_3 = 80g$、$m_4 = 100g$；$r_1 = 100mm$、$r_2 = 200mm$、$r_3 = 150mm$、$r_4 = 100mm$；各偏心质量的方位如图所示。设平衡质量 m_b 的质心至回转轴的距离 $r_b = 150mm$，试求平衡质量的大小和分位角 α。？

解：

该回转体为静不平衡。

要取得静平衡，根据静平衡公式有：

$$\sum m_i r_i = 0$$

即：$m_1r_1 + m_2r_2 + m_3r_3 + m_4r_4 + m_br_b = 0$

以上关系式既可以用解析法进行求解，也可以通过向量图的方法进行求解，这里采用解析法。将上式分别向 X、Y 方向投影，有：

$$m_2r_2 - m_4r_4 - m_br_b\cos\alpha = 0$$

$$m_1r_1 - m_3r_3 - m_br_b\sin\alpha = 0$$

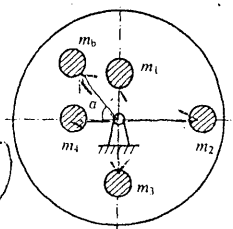


图 10.1　例 10.1 图

$$\begin{cases} m_br_b\cos\alpha = m_2r_2 - m_4r_4 \\ m_br_b\sin\alpha = m_3r_3 - m_1r_1 \end{cases}$$

以上两式联立，解得：$m_b = 53.33g$，$\alpha = 60.255°$

例 10.2　图 10.2(a)所示的盘形转子，已知其宽径比 $b/D < 0.2$，质量为 2500g。转盘存在着不平衡需要进行校正，但由于结构原因，校正平面只能选择 Ⅰ－Ⅰ 和 Ⅱ－Ⅱ 平面。现若分别在此两平面上加上平衡质量：$m_1 = 8g$、$r_1 = 500mm$；$m_2 = 6g$、$r_2 = 500mm$；$l_1 = 30mm$、$l_2 = 20mm$、$l_3 = 20mm$、$l = 80mm$ 后获得平衡。试问：

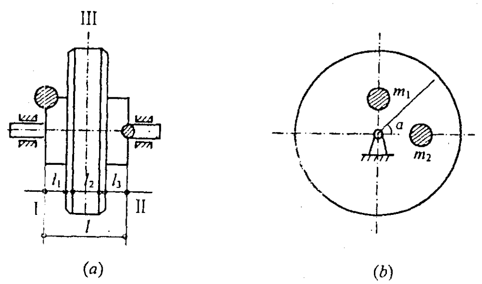


图 10.2　例 10.2 图

① 该转盘原来的不平衡量及其质心偏心矩；

② 经过如此平衡后能否满足动平衡要求。

质心偏心距

能否满足动平衡？

解：

① 解不平衡量及质心偏心矩

因该盘形转子宽径比 $b/D < 0.2$，故可按静不平衡来考虑，认为上面的不平衡质量是分布在通过质心的平面Ⅲ上的。由已知条件可知：

$$m_1r_1 = 8 \times 500 = 4000g \cdot mm$$

$$m_2r_2 = 6 \times 500 = 3000g \cdot mm$$

此两平衡合成后的质径积 mr 和相位角 α 为(见图 10.2(b))：

$$mr = \sqrt{4000^2 + 3000^2} = 5000g \cdot mm$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{m_1r_1}{m_2r_2} = 53.13°$$

质心偏心距为：

$$e = \frac{mr}{M} = \frac{5000}{2500} = 2mm$$

② 是否满足动平衡

经过上述平衡后，转盘上实际上存在 m_1r_1、m_2r_2、mr 三个质径积。将以上三个质径积分别对 X 轴和 Y 轴取矩，可得：

$$\sum M_X \neq 0, \sum M_Y \neq 0$$

X、Y轴取矩

因此不满足动平衡要求。

例 10.3　某水泵的凸轮由三个互相错开 120°的偏心轮所组成，每个偏心轮的质量为 4N，偏心距为 12.7mm。设在平衡平面 A 和 B 中各安装一个平衡重量 G_A 和 G_B 使之平衡，其回转半径为 10mm，其他尺寸如图 10.3 所示，求 G_A 和 G_B 的大小。？

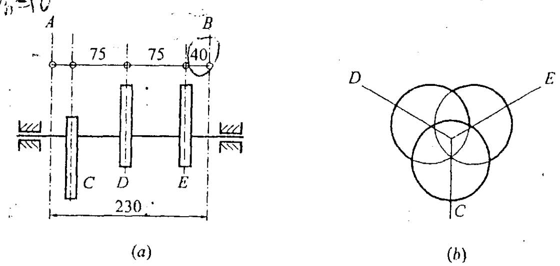


图 10.3　例 10.3 图

12

解：

三个偏心轮的不平衡重径积为：$G_Cr_C = G_Dr_D = G_Er_E = 4 \times 12.7 = 50.8N \cdot mm$

① 各个重径积在平衡面 A 中的分量

$$(G_Cr_C)_A = G_Cr_C\frac{75 + 75 + 40}{230} = 41.97N \cdot mm$$

$$(G_Dr_D)_A = G_Dr_D\frac{75 + 40}{230} = 25.4N \cdot mm$$

$$(G_Er_E)_A = G_Er_E\frac{40}{230} = 8.83N \cdot mm$$

② 各个重径积在平衡面 B 中的分量

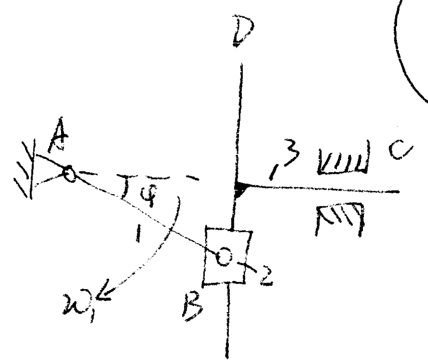
$$(G_Cr_C)_B = G_Cr_C\frac{230 - (75 + 75 + 40)}{230} = 8.83N \cdot mm$$

$$(G_Dr_D)_B = G_Dr_D\frac{230 - (75 + 40)}{230} = 25.4N \cdot mm$$

$$(G_Er_E)_B = G_Er_E\frac{230 - 40}{230} = 41.97N \cdot mm$$

③ 平衡面 A 中的平衡重量 G_A

在平衡面 A 中，添加平衡重量 G_A 使之平衡，即：？ 回转距离 转化关系

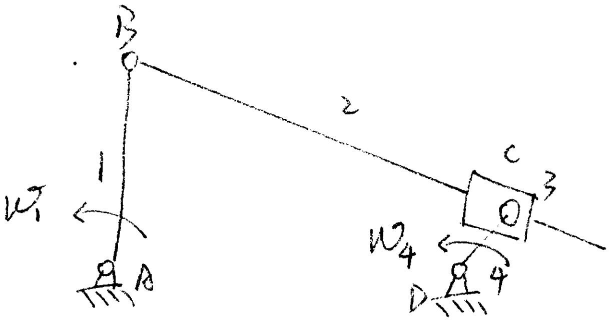


构件1匀速ω_1转动.

①构件3只作移动. 其上各点速度, 加速度均相同.

②B_2点, B_3点为构件重合点. 二者之间只存相对移动$v_{B_3B_2}$. 因滑块2不能转动($\omega_2=0$).

所以B_2与B_3之间没有哥氏加速度



平面连杆机构: (自由度 F=2):

$$v_{C_2} = v_{B_2} + v_{C_2B_2} = v_{C_3} + v_{C_2C_3}$$

	v_{B_2}	$v_{C_2B_2}$	v_{C_3}	$v_{C_2C_3}$
	$\omega_1 l_{AB}$	?	$\omega_4 l_{CD}$	?
	$\perp AB$	$\perp BC$	$\perp CD$	$\parallel BC$

$$a_{B_2} + a^n_{C_2B_2} + a^t_{C_2B_2} = a_{C_3} + a^k_{C_2C_3} + a^r_{C_2C_3}$$

a_{B_2}	$a^n_{C_2B_2}$	$a^t_{C_2B_2}$	a_{C_3}	$a^k_{C_2C_3}$	$a^r_{C_2C_3}$
[illegible]	$\omega_2^2 l_{BC}$	?	$\omega_4^2 l_{CD}$	$2\omega_4 v_{C_2C_3}$	?
A	$C\to B$	$\perp BC$	$C\to D$	$\perp BC$	$\parallel BC$

2006年 初试

九、

① 由B点相对运动可得:

R_{12}为与法线成φ角. 偏斜方向与1, 2相对运动速度方向相反.

(1. 向左运动, 2则相对向右运动).

∴ R_{12}偏左为φ角.

② 在构件2中. 平面不平行的三力.

R_{12}, R_{32} (Q平衡), 则三者必汇交于一点.

由R_{12}, Q得交点P.

因为2构件绕C点逆时针转 ω_2

∴ R_{32}应与ω_2方向相反.

③、构件1.

二力构件. (方向相反.)

因为R_{31}应与ω_1相反.

∴ R_{31}方向可得.

∴ R_{31}与R_{21}距离为L

∴ 驱动力矩 $M = R_{21}\cdot L$.