A. D. Iskenderov, G. Ya. Yagubov, Optimal control of nonlinear quantum mechanical systems, *Avtomat. i Telemekh.*, 1989, Issue 12, 27–38

LOCAL DATA PROCESSING ALGORITHMS IN LINEAR SYSTEMS

BARABANOV A. T., SKOROKHOD B. A.

For ascertaining the state of a linear system on input measurements over a finite interval the analysis of the potential of linear observers shows that the observer gain depends on time. Singularities such as a pole occur in the initial or final point of the interval. Two types of observers are analyzed as are the properties of observers with high-rate processing of measurements in the vicinity of the initial measurement time.

УДК 517.977:62-505

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

ИСКЕНДЕРОВ А. Д., ЯГУБОВ Г. Я.

(Баку)

Для задачи оптимального управления потенциалом квантовомеханической системы, описываемой нелинейным уравнением Шредингера, изучены вопросы корректности постановки, установлены необходимые условия оптимальности и указан вычислительный алгоритм ее решения.

1. Введение и постановка задачи

Вопросы оптимального управления квантовыми объектами в настоящее время сравнительно мало изучены. Это в первую очередь относится к нелинейным квантовомеханическим системам. Для этих систем почти не изучены вопросы корректности постановки математических задач с негладкими коэффициентами уравнения состояния. Теория экстремальных задач в данном случае опирается на свойство корректности краевых задач для уравнения состояния. Кроме того, задача оптимального управления квантовомеханическими системами потенциалом поля, т. е. коэффициентом уравнения Шредингера имеет ряд характерных, пока нераскрытых особенностей, о которых ниже пойдет речь. Целью данной статьи является ликвидация до некоторой степени пробела, имеющегося в этой области. Отметим, что вариационные методы в квантовой механике уже давно успешно применяются для определения потенциала взаимодействия (см. [1—3]). Однако все эти работы опираются на результаты классического вариационного исчисления и в них не использованы достижения теории управления, а также теории обратных и некорректных задач.

Пусть $\Omega_t=(0, l)\times(0, t)$, $\Omega=\Omega_T$, l, $T>0$ — заданные числа, $x\in(0, l)$, $t\in(0, T)$, $C^k([0, T], B)$ — банахово пространство, состоящее из всех определенных и $k\geqslant0$ раз непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ функций со значениями в банаховом пространстве B. Норма элемента $u=u(t)$ в этом пространстве определяется равенством

$$\|u\|_{C^k([0,T],B)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{m=0}^{k}\left\|\frac{d^m u(t)}{dt^m}\right\|_B .$$

Ниже приведем некоторые функциональные пространства, определенные в [4]:

$W_2^1(0, l)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u_1, u_2)_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left(u_1(x) u_2(x) + \frac{du_1(x)}{dx} \frac{du_2(x)}{dx} \right) dx;$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, l)$ — подпространство пространства $W_2^1(0, l)$, плотным множеством в котором является множество всех гладких и финитных на $[0, l]$ функций;

$\overset{\circ}{W}{}_2^2(0, l)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u_1, u_2)_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left(u_1(x) u_2(x) + \frac{du_1(x)}{dx} \frac{du_2(x)}{dx} + \right.$$
$$\left. + \frac{d^2u_1(x)}{dx^2} \frac{d^2u_2(x)}{dx^2} \right) dx;$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^2(0, l) = W_2^2(0, l) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, l);$$

$W_2^{1,0}(0, l)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u_1, u_2)_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left(u_1(x,t) u_2(x,t) + \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} \right) dx\, dt;$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ — подпространство пространства $W_2^{1,0}(\Omega)$, плотным множеством в котором является множество гладких функций, равных нулю вблизи боковой поверхности Ω;

$W_2^{0,1}(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u_1, u_2)_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(u_1(x,t) u_2(x,t) + \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} \right) dx\, dt;$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Omega) \cap W_2^{0,1}(\Omega);$$

$W_2^{2,1}(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u_1, u_2)_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(u_1(x,t) u_2(x,t) + \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} \right);$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega) = W_2^{2,1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Omega).$$

Во всех этих функциональных пространствах норма определяется соответствующим скалярным произведением. Символ $\overset{\circ}{\forall}$ будет означать, что данное свойство имеет место почти для всех значений переменной величины.

Рассмотрим квантовомеханическую систему, состояние которой описывается следующей краевой задачей для уравнения Шредингера:

(1) $\quad i\Psi_t + a_0 \Psi_{xx} - v(x)\Psi + a_1 |\Psi|^2 \Psi = f(x,t),$

(2) $\Psi(x,0)=\varphi_0(x),\ x\in(0,l),\ \Psi(0,t)=\Psi(l,t)=0,\ t\in(0,T).$

Здесь $\Psi=\Psi(x,t)$ — волновая функция, $\Psi_t=\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}$, $\Psi_{xx}=\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$, $i=\sqrt{-1}$, $a_0>0$, a_1 — заданные числа, $f\in\mathring{W}_2^{0,1}(\Omega)$, $\varphi_0\in\mathring{W}_2^1(0,l)$ — заданные функции, а $v(x)$ — функция управления, которая принадлежит области допустимых управлений: $V\equiv\{v: v=v(x),\ v\in L_2(0,l),\ |v(x)|\leqslant b,\ \forall x\in(0,l)\}$, $b>0$ — заданное число. Пусть на множестве V при условиях (1), (2) требуется минимизировать функционал

$$(3)\qquad J_0(v)=\int_0^l|\Psi(x,T)-\varphi_1(x)|^2\,dx,$$

где $\varphi_1\in\mathring{W}_2^2(0,l)$ — заданная функция. Здесь под решением задачи (1), (2) при заданном $v\in V$ (эту задачу назовем редуцированной задачей) будем подразумевать функцию $\Psi\in C^0([0,T],\ \mathring{W}_2^1(0,l))$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(4)\qquad \int_{\Omega_t}(-i\Psi\bar\Phi_t-a_0\Psi_x\bar\Phi_x-v(x)\Psi\bar\Phi+a_1|\Psi|^2\Psi\bar\Phi)\,dx\,d\tau=$$
$$=\int_{\Omega_t}f(x,\tau)\bar\Phi(x,\tau)\,dx\,d\tau+i\int_0^l\varphi_0(x)\bar\Phi(x,0)\,dx-i\int_0^l\Psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\,dx$$

для любой $\Phi=\Phi(x,t)\in\mathring{W}_2^{1,1}(\Omega)$ и любого $t\in[0,T]$, где $\bar\Phi(x,t)$ является комплексным сопряжением функции $\Phi(x,t)$.

Распространение световых пучков в нелинейной среде [5] и другие явления описываются уравнением (1). В настоящее время задачи оптимального управления системой, описываемой уравнением (1), наиболее мало изучены. В [6—8] и др. близкая к (1)—(3) задача рассмотрена для линейного уравнения Шредингера. Поэтому ниже предполагается, что $a_1\neq0$. Доказательства теорем и лемм приводятся в приложении. Положительные постоянные, не зависящие от t, φ_0, φ_1 и f, обозначим через M_j, $j=1,2,\ldots$

2. Корректность задачи оптимального управления

Краевая задача для нелинейного уравнения Шредингера ранее была предметом исследования в различных работах (см. [9—13] и др.). Однако результаты этих работ малоудобны для применения к задачам оптимального управления, так как в них коэффициенты уравнения предполагаются постоянными или же непрерывными функциями. В задачах оптимального управления это предположение, вообще говоря, не выполняется. Поэтому возникает необходимость изучать корректность краевой задачи (1), (2) с коэффициентом из множества V.

Теорема 1. Редуцированная задача имеет единственное решение и для него верна оценка

$$(5)\qquad \|\Psi\|^2_{\mathring{W}_2^1(0,l)}\leqslant M_1(\|\varphi_0\|^2_{\mathring{W}_2^1(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}).$$

Если же $\varphi_0\in\mathring{W}_2^2(0,l)$, тогда $\Psi\in C^0([0,T],\ \mathring{W}_2^2(0,l))\cap C^1([0,T],$

$L_2(0,l))$ и

(6) $$\|\Psi_t\|^2_{L_2(0,l)}+\|\Psi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)}\leqslant M_2(\|\varphi_0\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}).$$

Теорема 2. При $\varphi_0\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)$ задача оптимального управления (1)—(3) имеет хотя бы одно решение.

3. Необходимые условия оптимальности

Пусть

(7) $$H(x,v,\Psi,\bar\eta)=\mathrm{Re}\int_0^T(\Psi\bar\eta)\,dtv(x),$$

где $\Psi=\Psi(x,t)=\Psi(x,t;v)$ является решением задачи (1), (2) при соответствующем $v\in V$, а $\eta=\eta(x,t)$ — решением из пространства $C^0([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l))\cap C^1([0,T],L_2(0,l))$ следующей сопряженной задачи:

(8) $$i\eta_t+a_0\eta_{xx}-v(x)\eta+a_1(2|\Psi|^2\eta+\Psi^2\bar\eta)=0,$$

(9) $$\eta(x,T)=-2i(\Psi(x,T)-\varphi_1(x)),\ x\in(0,l),$$
$$\eta(0,t)=\eta(l,t)=0,\ t\in(0,T).$$

Поступая так же, как при доказательстве теоремы 1, для решения (8), (9) устанавливаем справедливость оценки

(10) $$\|\eta_t\|^2_{L_2(0,l)}+\|\eta\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)}\leqslant M_3\|\Psi(x,T)-\varphi_1(x)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)}.$$

Пусть $\Delta v\in L_\infty(0,l)$ — приращение на элементе $v\in V$, такое, что $v+\Delta v\in V$. Функция $\Delta\Psi=\Delta\Psi(x,t)\equiv\Psi(x,t;v+\Delta v)-\Psi(x,t;v)$ удовлетворяет условиям краевой задачи

(11) $$\begin{aligned}&i\Delta\Psi_t+a_0\Delta\Psi_{xx}+(v(x)+\Delta v(x))\Delta\Psi+\\&+a_1(\Psi(x,t;v+\Delta v)+\Psi(x,t;v))\bar\Psi(x,t;v+\Delta v)\Delta\Psi+\\&+a_1\Psi^2(x,t;v)\Delta\bar\Psi=\Delta v\Psi(x,t;v),\end{aligned}$$

(12) $$\Delta\Psi(x,0)=0,\quad \Delta\Psi(0,t)=\Delta\Psi(l,t)=0.$$

Лемма 1. Для решения (11), (12) верна оценка

(13) $$\|\Delta\Psi\|^2_{L_2(0,l)}\leqslant M_4\|\Delta v\Psi\|^2_{L_2(\Omega)},$$

(14) $$\|\Delta\Psi_t\|^2_{L_2(0,l)}+\|\Delta\Psi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)}\leqslant M_5\|\Delta v\Psi\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}.$$

Приращение функционала (3) представимо в виде

(15) $$\begin{aligned}&\Delta J_0(v)=J_0(v+\Delta v)-J_0(v)=\\&=2\,\mathrm{Re}\int_0^l(\Psi(x,T)-\varphi_1(x))\Delta\bar\Psi(x,T)\,dx+\|\Delta\Psi(x,T)\|^2_{L_2(0,l)}.\end{aligned}$$

Теорема 3. Функционал $J_0(v)$ дифференцируем по Фреше, для его градиента справедливо выражение

(16) $$J_0'(v)=-\frac{\partial H}{\partial v}=-\mathrm{Re}\int_0^T(\Psi\bar\eta)\,dt,$$

и градиент удовлетворяет условию Липшица:

$$\|J_0'(v+\Delta v)-J_0'(v)\|_{L_2(0,\,l)}\leqslant M_6\|\Delta v\|_{L_2(0,\,l)}. \tag{17}$$

Прямым следствием теоремы 3 является следующее необходимое условие в виде вариационного неравенства:

$$\int\limits_0^l\left(\mathrm{Re}\int\limits_0^T(\Psi^*(x,t)\bar{\eta}^*(x,t))\right)dt(v(x)-v^*(x))\,dx\leqslant 0 \tag{18}$$

для любого $v\in V$, где $\Psi^*(x,t)=\Psi(x,t;v^*)$, $\eta^*(x,t)=\eta(x,t;v^*)$ — соответственно решения задач (1), (2) и (8), (9) при $v^*\in V$, $v^*=v^*(x)$ — оптимальное управление.

Теорема 4 (принцип максимума). Для оптимальности управления $v^*\in V$ в задаче (1)—(3) необходимо выполнение условия

$$\begin{aligned} &H(x,v^*(x),\Psi^*(x,t),\bar{\eta}^*(x,t))=\\ &=\max_{v\in[-b,b]}H(x,v,\Psi^*(x,t),\bar{\eta}^*(x,t))\qquad \mathring{\forall}x\in(0,l). \end{aligned} \tag{19}$$

4. Алгоритмы решения

Анализ модельных примеров показывает, что решение задачи (1)—(3), вообще говоря, неединственно и неустойчиво. Поэтому ее следует регуляризовать. С этой целью вместо функционала (3) рассмотрим функционал вида

$$J_\alpha(v)=J_0(v)+\alpha\Omega(v), \tag{20}$$

где $\alpha\geqslant 0$ — заданное число, $\Omega(v)$ — стабилизатор [14]. Применение метода проекции градиента к решению задачи (1), (2), (20) сводится к построению последовательности [15]:

$$v_{k+1}=\begin{cases} v_k-\beta_kJ_\alpha'(v_k), & \text{если}\quad -b\leqslant v_k-\beta_kJ_\alpha'(v_k)\leqslant b,\\ -b, & \text{если}\quad v_k-\beta_kJ_\alpha'(v_k)<-b,\\ b, & \text{если}\quad v_k-\beta_kJ_\alpha'(v_k)>b,\end{cases}$$

$k=0,1,2,\ldots$, где $J_\alpha'(v)=J_0'(v)+\alpha\Omega'(v)$, $\Omega'(v)$ — градиент стабилизатора $\Omega(v)$, $J_0'(v)$ — градиент функционала (3), который определяется формулой (16). Выбор параметра β_k проводится с помощью одного из описанных [15, с. 73] способов. При перечисленных выше условиях $\{v_k\}$ сходится к v^*. Оптимальное управление на основе известной процедуры метода последовательных приближений находится с помощью принципа максимума (19). В обоих случаях на каждом шаг итерационного процесса решаются две краевые задачи, которые могут быть решены, например, методами Галеркина или Фурье. Они используются для доказательства теоремы 1 и ниже описаны.

5. Заключение

В системе (1)—(3) v зависит только от x. Пусть теперь $V_1=\{v:v=v(x,t),\ v\in W_2^{0,1}(\Omega),\ |v(x,t)|\leqslant b_0,\ |v_t(x,t)|\leqslant b_1,\ \mathring{\forall}(x,t)\in\Omega\}$ и вместо $v(x)$ в уравнении (1) стоит $v(x,t)$. Рассмотрим задачу минимизации функционала (3) на V_1 при условиях (1), (2). Все результаты, полученные в предыдущих разделах, кроме принципа максимума, имеют место и для этой задачи. В этом случае необходимое условие оптимальности устанавливается в виде вариационного неравенства. Во всех случаях вместо функционала $J_0(v)$ можно брать функционал

$$J_0(v)=\gamma_1\int\limits_\Omega |\Psi(x,t)-\varphi_1(x,t)|^2\,dx\,dt+$$

$$+\gamma_2\int\limits_0^T|\Psi(0,t)-\varphi_2(t)|^2\,dt+\gamma_3\int\limits_0^T|\Psi(l,t)-\varphi_3(t)|^2\,dt$$

со вторым краевым условием вместо (2), где γ_1, γ_2, $\gamma_3\geqslant 0$ — заданные числа, $\varphi_1(x,t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ — заданные функции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Доказательство основано на методах Галеркина и Фурье. Пусть $u_k=u_k(x)$, $k=1,2,\ldots$ – фундаментальная система из $\mathring{W}_2^1(0,l)$ и $(u_k,u_j)_{L_2(0,l)}=(u_k,u_j)=\delta_k^j$, $\|u_k\|_{\mathring{W}_1^2(0,\,l)}\leqslant d_k<+\infty$.

Решение краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$\text{(П.1)}\qquad \Psi^N(x,t)=\sum_{k=1}^N c_k^N(t)\,u_k(x),$$

где коэффициенты $c_k^N(t)=(\Psi^N,u_k)$ определяются из системы

$$\text{(П.2)}\qquad (i\Psi^N,u_k)_t=(a_0\Psi_x^N,u_{kx})+(v(x)\Psi^N,u_k)-(a_1|\Psi^N|^2\Psi^N,u_k)+f_k(t),$$

$$\text{(П.3)}\qquad c_k^N(0)=(\Psi^N(x,0),u_k)=(\varphi_0,u_k),\quad k=1,2,\ldots,N.$$

Здесь $f_k(t)=(f(x,t),u_k)_{L_2(0,l)}$. Система (П.2), (П.3) представляет собой задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой правая часть уравнений является многочленом относительно $c_k^N(t)$ с постоянными коэффициентами. Известно, что эта задача имеет хотя бы одно локальное решение [16] и для существования решения в целом достаточно установить равномерную ограниченность возможных решений уравнения (П.2) на отрезке $[0,T]$. Для установления такой ограниченности доказывается

Лемма 2. Справедлива оценка

$$\text{П.4)}\qquad \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Psi^N\|^2_{\mathring{W}_2^1(0,\,l)}\leqslant M_7\left(\|\varphi_0\|^2_{\mathring{W}_2^1(0,\,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right),$$

где M_7 – не зависящая от N,φ_0 и f положительная постоянная.

Используя утверждение этой леммы, из оценки

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{k=1}^N|c_k^N(t)|^2=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Psi^N\|^2_{L_2(0,\,L)}\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Psi^N\|^2_{\mathring{W}_2^1(0,l)}$$

получим желаемую ограниченность для $c_k^N(t)$. С другой стороны, функции $c_k^N(t)$ равностепенно непрерывны по t на $[0,T]$, так как $|c_k^N(t+\Delta t)-c_k^N(t)|=|(\Psi^N(x,\,t+\Delta t)-\Psi^N(x,\,t),\,u_k)|\leqslant M_8d_k\Delta t$, $k=1,2,\ldots$, где M_8 – положительная постоянная, не зависящая от N и k. Следовательно, $\{c_k^N(t)\}$ компактно и имеет предельный элемент $c_k(t)$, к которому сходится последовательность $\{c_k^{N_m}(t)\}$ для каждого $k=1,2,\ldots$ Пусть

$$\Psi(x,t)=\sum_{k=1}^\infty c_k(t)\,u_k(x).$$

Используя соотношение

$$(\Psi^{N_m}-\Psi,z)=\sum_{k=1}^{s}(z,u_k)(\Psi^{N_m}-\Psi,u_k)+\left(\Psi^{N_m}-\Psi,\sum_{k=s+1}^{\infty}(z,u_k)u_k\right)$$

для любой функции $z=z(x)\in L_2(0,l)$, легко показать, что последовательность $\{\Psi^{N_m}\}$ сходится слабо к функции Ψ в $L_2(0,l)$ равномерно относительно t из $[0,T]$. В силу утверждения леммы 2 из $\{\Psi^N\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится к Ψ слабо в $L_2(0,l)$ вместе со своей производной по x для каждого $t\in[0,T]$. Без ограничения будем считать, что вся последовательность $\{\Psi^N\}$ сходится к Ψ таким образом и для функции Ψ сохраняется утверждение леммы 2. Очевидно, что $\Psi(x,t)$ принадлежит пространству $C^0([0,T],\mathring{W}_2^1(0,l))$. Далее докажем, что предельная функция $\Psi(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (4). Для доказательства этого сначала установим следующее предельное соотношение:

$$\text{(П.5)}\qquad \int_0^t\int_0^l|\Psi^N|^2\Psi^N\overline{\Phi}^{N'}\,dx\,d\tau\to\int_0^t\int_0^l|\Psi|^2\Psi\overline{\Phi}^{N'}\,dx\,d\tau$$

при $N\to\infty$ любой функции $\Phi^{N'}=\sum_{k=1}^{N'}\Phi_k(t)u_k(x)$, $N'\leqslant N$, где $\Phi_k(t)$ – какие-либо непрерывные функции переменной t, имеющие ограниченные на $[0,\ T]$ обобщенные производные $d\Phi_k/dt$. В силу того, что $\Psi^N\in C^0([0,\ T],\ \mathring{W}_2^1(0,\ l))$, и в силу неравенства (см. также [4, с. 88])

$$\|\Psi^N(x,t)\|_{L_6(0,\,l)}\leqslant\sqrt[3]{2}\,\|\Psi^N(x,t)\|^{2/3}_{L_2(0,\,l)}\,\|\Psi^N_x(x,t)\|^{1/3}_{L_2(0,\,l)}$$

имеем

$$\|\Psi^N\|^2_{L_6(\Omega_t)}\leqslant M_9\|\Psi^N\|^2_{C^0([0,\,T],\,\mathring{W}_2^1(0,\,l))}\qquad\forall t\in[0,\,T],$$

где M_9 не зависит от N и t. Благодаря утверждению леммы 2 и слабой сходимости Ψ^N к Ψ в $L_2(0,l)$, равномерной по t, и в силу неравенства (см. также [4, с. 529])

$$\|z\|_{L_2(0,\,l)}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}|(z,\ u_k)|^2\right)^{1/2}+\varepsilon\|z\|_{\mathring{W}_2^1(0,\,l)}$$

для любой $z=z(x)\in\mathring{W}_2^1(0,l)$ следует, что функции $\Psi^N(x,t)$ сходятся в норме $L_2(\Omega)$. Действительно, если вместо z напишем разность $\Psi^N-\Psi^{N'}$, то получим справедливость этого утверждения. Из сходимости же Ψ^N к Ψ в норме $L_2(\Omega)$ следует сходимость почти всюду в Ω. Из нее и равномерной ограниченности нормы Ψ^N в $L_6(\Omega_t)$ для любого $t\in[0,T]$ и в силу [4, с. 530–531] следует, что $|\Psi^N|^2\Psi^N$ сходится слабо к $|\Psi|^2\Psi$ в $L_2(\Omega_t)$ для $\forall t\in[0,T]$. Отсюда следует соотношение (П.5). Если напишем интегральное тождество (4) для $\Psi^N(x,t)$ с пробными функциями $\Phi^{N'}(x,t)$, то, учитывая предельное соотношение (П.5) и слабую сходимость Ψ^N к Ψ в $C^0([0,T],\mathring{W}_2^1(0,l))$, а также плотность функций $\Phi^{N'}(x,t)$ в $\mathring{W}_2^{1,1}(\Omega)$, при переходе к пределу в этом интегральном тождестве получим, что предельная функция $\Psi(x,t)$ удовлетворяет тождеству (4). Следовательно, краевая задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение. Единственность следует из результатов работы [17]. Справедливость оценки (5) следует из утверждения леммы 2.

Теперь докажем вторую часть теоремы. С этой целью воспользуемся схемой метода Фурье. Решение задачи (1), (2) представим в виде

$$\text{(П.6)}\qquad \Psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k(t)u_k(x),$$

где $u_k=u_k(x)$ – собственные функции, соответствующие собственным значениям $\lambda=\lambda_k$ системы

$$\text{(П.7)}\qquad -a_0X_{xx}=\lambda X,\quad X(0)=X(l)=0,$$

а функции $\theta_k=\theta_k(t)$ удовлетворяют счетной системе нелинейных интегральных уравнений вида

$$\theta_k(t)=\varphi_0 e^{-i\lambda_k t}-i\int_0^t\int_0^l g(x,t,\Psi)u_k(x)\,dx e^{-i\lambda_k(t-\tau)}d\tau, \tag{П.8}$$

где

$$\varphi_{0k}=(\varphi_0,u_k)_{L_2(0,l)},\qquad k=1,2,\ldots,\qquad g(x,t,\Psi)=v(x)\Psi+f(x,t)-a_1|\Psi|^2\Psi.$$

Используя (П.6), (П.8), в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)$ рассмотрим скалярное произведение $\{\Psi,\Psi\}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|\theta_k(t)|^2$. Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|\theta_k(t)|^2\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|\varphi_{0k}|^2+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\left|-i\lambda_k\int_0^t\int_l^l g(x,\tau,\Psi)u_k(x)\,dx e^{-i\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right|^2.$$

В правой части этого неравенства учтем выражение функции $g(x,t,\Psi)$. Тогда после несложных преобразований получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|\theta_k(t)|^2\leqslant M_{10}\left(\|\varphi_0\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right)+ \tag{П.9}$$

$$+M_{11}\left(\int_0^t\|\Psi_t\|^2_{L_2(0,l)}d\tau+\int_0^t\|\Psi_{xx}\|^2_{L_2(0,l)}d\tau\right)$$

для любого $t\in[0,T]$. Далее оценим Ψ_t в норме $L_2(0,l)$. В силу (П.8) из (П.6) находим

$$\Psi_t=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-i\lambda_k\varphi_{0k}e^{-i\lambda_k t}-i\int_0^l g(x,t,\Psi)u_k(x)\,dx-\right.$$

$$\left.-\lambda_k\int_0^t\int_0^l g(x,\tau,\Psi)u_k(x)\,dx e^{-i\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right)u_k(x).$$

Учитывая вид функции $g(x,t,\Psi)$ в этом равенстве и оценивая правую часть в норме $L_2(0,l)$, после несложных преобразований получим оценку

$$\|\Psi_t\|^2_{L_2(0,l)}\leqslant M_{12}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right)+ \tag{П.10}$$

$$+M_{13}\left(\int_0^t\|\Psi_t\|^2_{L_2(0,l)}d\tau+\int_0^t\|\Psi_{xx}\|^2_{L_2(0,l)}d\tau\right)$$

для любого $t\in[0,T]$. Используя соотношение $\{\Psi,\Psi\}=\int\limits_0^l|a_0\Psi_{xx}|^2\,dx=a_0\int\limits_0^l|\Psi_{xx}|^2\,dx$ и лемму Гронуолла, из оценок (П.9), (П.10) и (5) следует утверждение второй части теоремы. Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Умножим k-е уравнение из (П.2) на $c_k^N(t)$, сложим все уравнения от 1 до N и проинтегрируем от нуля до t. Тогда получим

$$\int_0^t\int_0^l (i\Psi_t{}^N\overline{\Psi}{}^N-a_0\Psi_x{}^N\overline{\Psi}_x{}^N-v(x)\Psi^N\overline{\Psi}{}^N+a_1|\Psi^N|^2\Psi^N\overline{\Psi}{}^N)\,dx\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^l f(x,\tau)\Psi^N dx\,d\tau.$$

Беря удвоенную мнимую часть этого соотношения и применяя неравенства Коши – Буняковского и Гроноулла, установим справедливость оценки

$$\text{(П.11)}\qquad \|\Psi^N\|^2_{L_2(0,l)}\leqslant M_{14}(\|\varphi_0\|^2_{L_2(0,l)}+\|f\|^2_{L_2(\Omega)})$$

для любого $t\in[0,T]$. Далее умножим k-е уравнение из (П.2) на $dc_k{}^N/dt$, просуммируем от 1 до N и проинтегрируем от нуля до t. В результате находим

$$\int_0^t\int_0^l\Big(i|\Psi_t{}^N|^2-a_0\Psi_x{}^N\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\Psi}_x{}^N)-v(x)\Psi^N\overline{\Psi}_t{}^N+$$

$$+a_1|\Psi^N|^2\Psi^N\overline{\Psi}_t{}^N\Big)\,dx\,d\tau=\int_0^t\int_0^l f(x,\tau)\overline{\Psi}_t{}^N dx\,d\tau.$$

Применяя интегрирования по частям в правой части этого равенства и беря удвоенную вещественную часть его, после несложных преобразований получим

$$\text{(П.12)}\qquad a_0\|\Psi_x^N(x,t)\|^2_{L_2(0,l)}\leqslant\frac{|a_1|}{2}\|\Psi^N(x,t)\|^4_{L_4(0,l)}+$$

$$+\frac{|a_1|}{2}\|\Psi^N(x,0)\|^4_{L_4(0,l)}+a_0\|\Psi_x^N(x,0)\|^2_{L_2(0,l)}+$$

$$+(1+b)(\|\Psi^N(x,t)\|^2_{L_2(0,l)}+\|\Psi^N(x,0)\|^2_{L_2(0,l)})+$$

$$+\|\Psi^N\|^2_{L_2(\Omega_t)}+M_{15}\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\qquad\forall t\in[0,T].$$

Далее, в силу неравенства (см. также [4, с. 88])

$$\|\Psi^N(x,t)\|_{L_4(0,l)}\leqslant\sqrt[4]{2}\|\Psi^N\|^{3/4}_{L_2(0,l)}\|\Psi_x^N\|^{1/4}_{L_2(0,l)}$$

и ε-неравенства Коши из (П.11), (П.12) следует справедливость оценки

$$\text{(П.13)}\qquad \|\Psi_x^N(x,t)\|^2_{L_2(0,l)}\leqslant M_{16}(\|\varphi_0\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)})\quad\forall t\in[0,T].$$

Суммируя (П.11), (П.13), получим утверждение леммы 2.

Доказательство теоремы 2. Функционал $J_0(v)$ снизу ограничен. Поэтому для него существует минимизирующая последовательность $\{v_m\}\in V$, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty}J_0(v_m)=$ $=\inf\limits_{v\in V}J_0(v)=J_{0*}$. Положим $\Psi_m=\Psi(x,t,v_m)$. В силу теоремы 1 задача (1), (2) при $v=v_m$ имеет единственное решение из $C^0([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2{}^2(0,l))\cap C^1([0,T],L_2(0,l))$ и

$$\text{(П.14)}\qquad \left\|\frac{\partial\Psi_m}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\|\Psi_m\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)}\leqslant M_{17}\quad\forall t\in[0,T],$$

где M_{17} не зависит от m. При принятых предположениях Ψ_m является почти всюду решением задачи (1), (2) и верна оценка

$$\|\Psi_m\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \leqslant M_{18},$$

где M_{18} не зависит от m. Из равномерной ограниченности $\{\Psi_m\}$ по норме $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ следует, что из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{\Psi_{m_k}\}$ (которую снова обозначим через $\{\Psi_m\}$), слабо сходящуюся к некоторому элементу Ψ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$. Согласно теоремам вложения [18, с. 9], пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$. Тогда $\Psi_m \to \Psi$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $m\to\infty$. Поскольку V – ограниченное множество в $L_\infty(0,l)$, из последовательности $\{v_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$ (которую для простоты изложения снова обозначим через $\{v_m\}$), (*)-слабо сходящуюся (т. е. слабо сходящуюся в сопряженном пространстве, точнее (см. [19, с. 177]), к некоторому элементу v из $L_\infty(0, l)$). Кроме того, V – замкнутое выпуклое множество в $L_\infty(0, l)$. Следовательно, $v\in V$. Используя сходимость последовательностей $\{v_m\}$, $\{\Psi_m\}$, получим справедливость соотношений

$$\int\limits_\Omega v_m\Psi_m\overline{\Phi}dx\,dt \to \int\limits_\Omega v\Psi\overline{\Phi}dx\,dt,$$

$$\int\limits_\Omega |\Psi_m|^2\Psi_m\overline{\Phi}dx\,dt \to \int\limits_\Omega |\Psi|^2\Psi\overline{\Phi}dx\,dt$$

при $m\to\infty$. Отсюда и в силу того, что $\{\Psi_m\}$ слабо сходится в $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, получим, что предельная функция Ψ, принадлежащая пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, является почти всюду решением задачи (1), (2), соответствующим управлению $v\in V$. Следовательно, $\Psi=\Psi(x, t; v)$. Удовлетворение начальному условию следует из того, что пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ непрерывно вложено в $C^0([0,T], L_2(0,l))$. Таким образом, $\Psi_m(x,t)\to\Psi(x,t)$ слабо в $L_2(0,l)$ при $m\to\infty$ для $\forall t\in[0,T]$. Наконец, используя это предельное соотношение и слабую полунепрерывность снизу нормы в $L_2(0,l)$, из вида функционала $J^0(v)$ имеем

$$J_{0*}<J_0(v)\leqslant \lim_{m\to\infty} J_0(v_m)=\inf_{w\in V} J_0(w)=J_{0*}.$$

Отсюда $v\in V$ есть решение задачи (1)–(3). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Используя начальные условия краевых задач (8), (9) и (11), (12), имеем

$$2\,\mathrm{Re}\int\limits_0^l (\Psi(x,T)-\varphi_1(x))\Delta\overline{\Psi}(x,T)\,dx=$$

$$(\text{П.15})\qquad =\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\left(i\frac{\partial\eta}{\partial t}\Delta\overline{\Psi}+i\frac{\partial\Delta\overline{\Psi}}{\partial t}\eta\right)dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\left(i\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial t}\Delta\Psi+i\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial t}\overline{\eta}\right)dx\,dt.$$

Далее из уравнений (8), (11) и их комплексных сопряжений получим справедливость соотношения

$$(\text{П.16})\qquad 2\,\mathrm{Re}\int\limits_0^l (\Psi(x,T)-\varphi_1(x))\Delta\overline{\Psi}(x,T)\,dx=-\mathrm{Re}\int\limits_0^T \Psi\overline{\eta}dt\,\Delta v+Q,$$

где

$$(\text{П}.17)\qquad Q=-\int\limits_{\Omega}[\operatorname{Re}(\Delta v\Delta\Psi\overline{\eta})+\operatorname{Re}(2a_1|\Delta\Psi|^2\Psi\overline{\eta})+\operatorname{Re}(a_1\overline{\Psi}(\Delta\Psi)^2\overline{\eta})+$$
$$+\operatorname{Re}(a_1|\Delta\Psi|^2\Delta\Psi\overline{\eta})]\,dx\,dt.$$

Используя равенство (П.16), приращение функционала $J_0(v)$ можно представить следующим образом:

$$(\text{П}.18)\qquad \Delta J_0(v)=-{}^1/_2\int\limits_{\Omega}\Delta v(\overline{\Psi}\eta+\Psi\overline{\eta})\,dx\,dt+\|\Delta\Psi(x,T)\|^2_{L_2(0,l)}+Q.$$

В силу оценки (6), (10), (13) и из вида Q получим, что $|Q|=o(\|\Delta v\|_{L_2(0,\,l)})$, а приращение функционала будет

$$\Delta J_0(v)=-{}^1/_2\int\limits_{\Omega}\Delta v(\overline{\Psi}\eta+\Psi\overline{\eta})\,dx\,dt+o(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}).$$

Отсюда в силу выражения функции H имеем

$$(\text{П}.19)\qquad J_0'(v)=-\operatorname{Re}\int\limits_0^T(\Psi\overline{\eta})\,dt=-\partial H/\partial v.$$

Используя эту формулу для градиента, а также оценки (6), (10) (13), установим, что $J_0'(v)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. имеет место (17). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Допустим, что на оптимальном управлении $v^*(x)$ условие (19) не выполняется. Тогда существуют допустимое управление $\tilde{v}(x)\in V$, область $\omega\subset(0,l)$ и число $\beta>0$, такие, что

$$(\text{П}.20)\qquad H(\tilde{v}(x))-H(v^*(x))\geqslant\beta>0\quad \mathring{\forall}x\in\omega,\quad \operatorname{mes}\omega\neq0,$$

где $H(v)=H(x,v,\Psi,\overline{\eta})$. Пусть $w=\tilde{v}(x)$ при $x\in\omega$, $w=v^*(x)$ при $x\in(0,l)\setminus\omega$. Из (П.20) с учетом того, что при условиях теоремы 3 $J_0'(v)=-\partial H/\partial v$, имеем

$$(\text{П}.21)\qquad J_0'(v^*+\theta_1(w-v^*))(w-v^*)\leqslant-\beta<0\quad \mathring{\forall}x\in\omega,\quad \theta_1\in(0,1).$$

Кроме того, $J_0(w)-J_0(v^*)=(J_0'(v^*+\theta_2(w-v^*)),\ w-v^*)_{L_2(\omega)}$, где $\theta_2\in(0,1)$. Используя (П.21), получим

$$(\text{П}.22)\qquad J_0(w)-J_0(v^*)\leqslant-\beta\operatorname{mes}\omega+(J_0'(v^*+\theta_2(w-v^*))-$$
$$-J_0'(v^*+\theta_1(w-v^*)),\ w-v^*)_{L_2(\omega)}.$$

Из формулы для $J_0'(v)$ ясно, что

$$(\text{П}.23)\qquad J_0'(v+\Delta v)-J_0'(v)=-\operatorname{Re}\int\limits_0^T[\Delta\Psi\overline{\eta}(x,t;v+\Delta v)+\Delta\overline{\eta}\Psi]\,dt,$$

где $\Delta\Psi=\Delta\Psi(x,t)$ является решением задачи (11), (12) и удовлетворяет оценкам (13), (14), а $\Delta\eta=\Delta\eta(x,t)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$(\text{П}.24)\qquad \|\Delta\eta_t\|^2_{L_2(0,\,l)}+\|\Delta\eta\|^2_{\mathring{W}_2^2(0,\,l)}\leqslant M_{19}(\|\Delta v\Psi\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\Delta v\eta\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}).$$

Используя (5), (10), (14) и (П.24), из соотношения (П.23) получим

$$(\text{П}.25)\qquad |J_0'(v+\Delta v)-J_0'(v)|\leqslant M_{20}(\|\Delta v\Psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\Delta v\eta\|_{W_2^{0,1}(\Omega)})$$

для $\mathring{\forall}x\in(0,l)$. На основе этой оценки (П.22) примет вид

$$J_0(w)-J_0(v^*)\leqslant-\left[\beta-M_{21}\left\{\left(\int\limits_{\omega}\|\Delta v\Psi\|^2_{W_2^1(0,\,T)}dx\right)^{1/2}+\left(\int\limits_{\omega}\|\Delta v\eta\|^2_{W_2^1(0,\,T)}dx\right)^{1/2}\right\}\right]\operatorname{mes}\omega,$$

где через Δv обозначено $w-v^*$. При достаточно малых $\operatorname{mes} \omega$ выражение, стоящее в квадратных скобках правой части полученного неравенства, в силу абсолютной непрерывности интегралов, входящих в правую часть, будет положительным и поэтому будет выполняться неравенство $J_0(w)-J_0(v^*)<0$, что противоречит предположению об оптимальности $v^*(x)$. Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелявистическая теория. М.: Физматгиз, 1963.
2. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.* Классическая теория поля (Новые проблемы). М.– Л.: Гостехиздат, 1951.
3. *Джавадов А. В., Искендеров А. Д.* Исследование устойчивого состояния ядра с потенциалом Гартенхауза // Уч. записки АГУ им. С. М. Кирова. Сер. физ.-мат. 1965. № 2. С. 77–84.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
5. *Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И.* Принципы адаптивной оптики, М.: Наука, 1985.
6. *Бутковский А. Г., Самойленко Ю. И.* Управление квантовомеханическими процессами. М.: Наука, 1984.
7. *Ягубов Г. Я.* Задача оптимального управления для уравнения типа Шредингера // Численные методы и математическое обеспечение ЭВМ. Тематический сборник научных трудов. Баку, 1984. С. 116–125.
8. *Динь Ньо Хао.* Оптимальное управление квантовыми объектами // АиТ. 1986. № 2. С. 14–20.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
10. *Якубов С. Я.* О квазилинейных дифференциальных уравнениях в абстрактных пространствах // Докл. АН АзССР. 1966. Т. 22. № 8. С. 8–12.
11. *Pecher H., V. Wahl W.* Time dependent nonlinear Schrodinger equations // Manuscripta Math. 1979. V. 27. P. 125–157.
12. *Владимиров М. В.* Разрешимость смешанных задач для нелинейного уравнения Шредингера // Мат. сб. 1986. Т. 130 (172). № 4 (8). С. 520–536.
13. *Насибов Ш. М.* Об одном нелинейном уравнении типа Шредингера // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 4. С. 660–670.
14. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
15. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
16. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
17. *Pozzi G. A.* Problemi di Cauchy e problemi ai limiti per equazione di evoluzione del tipo Schrodinger lineari e non lineari – II // Ann. Math. Pura Appl. 1969. V. 81.
18. *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary value problems and applications. V. 2. Berlin, 1972.
19. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
11.III.1988

OPTIMAL CONTROL OF NONLINEAR QUANTUM MECHANICAL SYSTEMS

ISKENDEROV A. D., YAGUBOV G. Ya.

For optimal control of the potential in a quantum mechanical system described by the nonlinear Schrödinger equation the soundness of the problem statement is analyzed, necessary optimality conditions are established, and a computing solution algorithm is specified.