

## 图书在版编目(CIP)数据

地图投影/孙达,蒲英霞编著. —南京:南京大学出版社,2005.10

ISBN 7-305-04539-X

I. 地… II. ①孙… ②蒲… III. 地图投影  
IV. P282.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 103161 号

书 名 地图投影  
主 编 孙 达 蒲英霞  
出版发行 南京大学出版社  
社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093  
电 话 025-83596923 025-83592317 传真 025-83328362  
网 址 <http://press.nju.edu.cn>  
电子邮件 [nupress1@public1.ptt.js.cn](mailto:nupress1@public1.ptt.js.cn)(编辑部)  
[sales@press.nju.edu.cn](mailto:sales@press.nju.edu.cn)(销售部)  
印 刷 丹阳兴华印刷厂  
开 本 787×960 1/16 印张 15 字数 250 千  
版 次 2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷  
印 数 1-2000  
ISBN 7-305-04539-X/K·291  
定 价 21.00 元

---

\* 版权所有,侵权必究

\* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购  
图书销售部门联系调换

# 目 录

绪 论	1
第 1 章 地球体的有关参数和公式	8
1.1 地球体的形状和大小	8
1.2 地理坐标	10
1.3 椭球体和球体的几个重要半径	11
1.4 纬线弧长和经线弧长	14
1.5 地球椭球面上的梯形面积	15
第 2 章 地图投影的方法、变形和分类	17
2.1 地图投影的基本方法	17
2.2 地图投影的变形	19
2.3 球面坐标及其换算	29
2.4 地图投影的分类	33
第 3 章 方位投影	38
3.1 方位投影的种类和基本原理	38
3.2 等面积方位投影	40
3.3 等距离方位投影	43
3.4 透视方位投影的种类和一般公式	44
3.5 正射投影	47
3.6 球面投影(等角方位投影)	48
3.7 球心投影(日晷投影)	50
3.8 方位投影的分析和应用	52
第 4 章 圆柱投影	65
4.1 圆柱投影的种类和基本原理	65
4.2 等角圆柱投影(墨卡托投影)	67
4.3 等面积和等距离圆柱投影	72
4.4 斜轴与横轴圆柱投影	75
4.5 透视圆柱投影	79

4.6	圆柱投影的分析和应用 .....	82
第 5 章	圆锥投影 .....	87
5.1	圆锥投影的种类和基本原理 .....	87
5.2	等角圆锥投影 .....	89
5.3	等面积圆锥投影 .....	96
5.4	等距离圆锥投影 .....	99
5.5	斜轴与横轴圆锥投影 .....	101
5.6	圆锥投影的分析和应用 .....	103
第 6 章	多圆锥投影 .....	112
6.1	普通多圆锥投影 .....	112
6.2	改良多圆锥投影 .....	116
6.3	广义多圆锥投影 .....	119
第 7 章	伪圆锥投影和伪方位投影 .....	123
7.1	伪圆锥投影——彭纳投影 .....	123
7.2	伪方位投影 .....	126
第 8 章	伪圆柱投影 .....	132
8.1	伪圆柱投影的一般公式 .....	132
8.2	桑逊投影 .....	133
8.3	爱凯特正弦投影 .....	135
8.4	摩尔威德投影 .....	137
8.5	伪圆柱投影分瓣法 .....	140
8.6	任意伪圆柱投影 .....	142
第 9 章	高斯-克吕格投影与通用横墨卡托投影 .....	145
9.1	高斯-克吕格投影的原理和公式 .....	145
9.2	高斯-克吕格投影的分析和应用 .....	156
9.3	通用横墨卡托(UTM)投影 .....	159
第 10 章	几种派生的投影 .....	162
10.1	哈默(Hammer)等面积投影 .....	162
10.2	爱托夫(Aitoff)投影 .....	166
10.3	温克尔(Winkel)投影 .....	168
第 11 章	月球投影和空间地图投影 .....	173
11.1	月球的形状和大小 .....	173
11.2	用于月球的投影及变形分析 .....	174
11.3	空间斜墨卡托(SOM)投影 .....	176

11.4	卫星轨迹地图投影	189
第 12 章	地图投影的识别、选择以及不同投影的变换	199
12.1	地图投影的识别	199
12.2	地图投影的选择	203
12.3	地图投影变换	206
附录	地图投影中常用的数学公式	213
附表		
1.	由赤道至纬度为 $\varphi$ 的纬线间的子午线弧长 $S_m$ , 纬差 $30'$ 的子午线弧长 $\Delta S_m$ , 经差 $30'$ 的纬线弧长 $S_n$	220
2.	子午圈曲率半径 $M$ 、卯酉圈曲率半径 $N$ 、纬圈半径 $r$ 与符号 $U$ 的数值	222
3.	$1^\circ \times 1^\circ, 2^\circ \times 2^\circ$ 和 $5^\circ \times 5^\circ$ 球面梯形的面积	225
4.	《地图投影》中常用字符一览表	227
参考文献		229

# 前 言

地图投影是地图从生产到使用都不可缺少的数学基础,同时它又是地图学的重要组成部分。随着现代科学技术的发展,地图投影的研究领域也在不断地拓宽与加深,当前它在地理信息系统和遥感技术应用中已占有相当的比重。本书以简明易懂的方式,分类阐述各种常规地图投影的原理、公式及其分析应用等;并用适当的篇幅详细介绍两类三种空间地图投影的动态构成特点和公式推求;不同地图投影的坐标变换目前已有不少研究成果,书中也作了扼要的介绍。本书除作为高校地理信息系统专业的《地图投影》教材外,并可供综合性大学和高等师范院校地理系作《地图学》的教学参考书。其次可供地图生产部门的技术人员及成人教育的学员作自学读物或参考书。

本书的内容,绪论以下分为 12 章,书末有附录、附表。绪论讲述地图投影学的意义,同其他学科的关系和地图投影发展简史。第 1~2 章介绍地球体各元素的定义和参数、地图投影的原理和方法、变形理论、球面极坐标的换算以及地图投影的分类,是讲述具体投影的预备篇。第 3~9 章是本书的主要内容,系统地介绍各类常用地图投影约 40 余种。对于方位投影、圆柱投影和圆锥投影,都按等角、等面积和等距离投影性质,同时又按正轴、横轴和斜轴投影方式,分别阐述其原理、公式推求、变形分析及实际应用等问题。对于多圆锥投影等,也作了较为详细的讨论。为了明晰易懂,大多数投影公式是按球体推求的,但是对几种使用特多的投影,如墨卡托投影、等角圆锥投影等,在给出球体投影公式的同时也给出按椭球体推导的投影公式,而且可知这种转变非常简单。

由于高斯-克吕格投影的公式推求需要用较深一点的数学知识,因而未把它放在圆柱投影范围内,而是与通用横墨卡托(UTM)投影单独列为第 9 章,使读者有由浅入深的感觉。这两种投影在世界上大约有一百多个国家用它测绘编制地形图。前者是我国 1:50 万以上各种比例尺地形图的数学基础,因此作重点讨论。

第 10~11 章,是为拓宽知识面和增加新的投影概念而增写的。几种派生的地图投影是外国地图集上常用作世界地图的投影。月球地图投影和空间地图投影(Space Map Projection)是随着当代空间技术的发展而产生的

外星地图投影和动态地图投影。后者与传统的静态地图投影具有不同的概念,它是在惯性空间定义的,其点位 $(X,Y,Z)$ 随时间 $t$ 而变,从而构成四维 $(X,Y,Z,t)$ 的动态投影。最后,第12章是地图投影的识别、选择以及不同地图投影的坐标变换问题,这是对地图投影学以致用的总结性阐述。

此外,针对以往《地图投影》教材中一个字符表示多种含义的情况,如字符 $a$ 既表示椭球体长半径,又表示极大长度比;一个 $\alpha$ 表示多种含义等,在兼顾习惯用法的前提下,尽量遵循一个字符表示一种含义的原则,我们对全书出现的变量和常量做了规范处理,列于附表4中。

本书在编写中得到南京大学原地理系地图学教研室有关同事如陈丙咸教授等的鼓励。在撰写空间斜墨卡托(SOM)投影时,原南京地质学校黄国寿副教授(1923年~1999年)将其尚未发表的论文稿件借给我们参考。全书脱稿后承蒙吴忠性教授(1912年~1999年)全面审阅并提出宝贵意见。在出版前,根据审稿意见进行了多处修改,并增加了“地图投影变换”(本书12.3)一节。同时根据教学需要在各章之后,编排了相关的复习思考与计算题(主要是投影计算、制图等上机实践),这一部分由蒲英霞同志编写,同时她还做了本书出版前的很多准备工作。在南京大学城市与资源学系吴小根副系主任和地理信息系统教研室李满春教授、冯学智教授以及其他领导和老师的大力支持下,本书才得以顺利出版。另外,南京大学城市与资源学系2002级地理信息系统专业的丁正峰和李盾同学为书稿前期打印付出了辛勤劳动。对以上支持本书编写与出版的师友、学生表示衷心的感谢。

由于作者学术水平有限,书中错谬之处难免,敬希读者指正。

孙 达

2005.04 于南京

# 绪 论

## 一、地图投影学的意义和任务

现代地图具有三个基本性质:①由数学确定的结构;②以专门符号系统表示的空间信息;③以缩小概括的方式反映的地球(或其他星体)表面的客观实际。其中首要的一条是地图的数学结构,即地图的经纬网、地图配置和比例尺等。没有数学基础的地图,不能称做现代地图,因为它失去了地图的严密科学性和当代实用价值。从这种没有数学基础的地图上,是不可能获得正确的方位、距离、面积等数据以及各要素的空间关系和形状。

在测绘工作中,是把地球表面当作一个扁率很小的旋转椭球面来处理的。旋转椭球面上各点的相互位置,是由三角测量和天文测量求得并以经纬度表示。在测绘和编绘地图时,需要通过数学方法将椭球面(曲面)上各点表示到平面上而成为地图。假如测区面积很小,在半径小于 20 km 的范围内时,可以不考虑地球的曲率,直接把这样小的球面作为平面处理。这样测制的地图称为平面图。如果制图区域是超过上述面积的任一地区以至全球,则必须将地球表面作为椭球面(或球面)处理。但是无论椭球面还是球面,都是不可展曲面。如果把一个不可展的曲面强行压平,就好像把一个乒乓球切开压平一样,必然产生断裂和重叠。如此就不能获得完整而连续的地球表面的平面图形,当然也就不符合人们对地图的要求。

为了解决地图平面与地球曲面间的这对矛盾,经过不断地实践,人们终于寻求到地图投影这一科学方法。所谓地图投影,简单地讲就是在平面上建立与地球曲面上相对应的经纬网的数学法则。研究这些法则的专门学科,叫做地图投影学(Map Projections)。它的基本任务是:研究将地理坐标描写到平面上建立地图数学基础的各种可能的方法;讨论这些方法的理论、变形规律、实用价值以及不同投影坐标的互相换算等问题。

## 二、地图投影学与其他学科的关系

地图投影学同许多学科和应用技术有着密切的联系。

### 1. 与数学的关系

从地图投影的发展来看,它是伴随着数学的发展而前进的。最初的投

影主要是建立在初期数学——几何学的原理上,大多运用透视法建立经纬网。历史上许多地图投影的创立者和对地图投影理论作出重大贡献者,其本身往往是数学家,如拉格朗日(J. L. Lagrange)、高斯(C. F. Gauss)、底索(Tissot)等。随着数学的发展,特别是近代数学(变量数学)的出现,使地图投影学有了一次飞跃,广泛运用数学分析法建立更严密的投影理论和公式,并发展了许多新的较复杂的投影。所以,地图投影学也叫做“数学制图学”(在内容上还包括地图量算和某些地图制图数据的处理等问题),它体现了数学在地图制图领域中的广阔应用。当代电子计算机科学的发展,使投影从计算到展绘坐标网最先实现了自动化;最复杂的两种投影点的坐标换算,已成为非常简易的事情。过去的投影公式必须转化为对数(而且要常用对数)形式才能实行计算,在使用电子计算机(computer)或计算器(calculator)的今天,不管什么样的数学表达式一般都能计算,关于投影计算现已基本不用三表(对数表、三角函数表和制图用表),今天很多投影的坐标公式可以用标准双曲函数表示,则更有利于计算机计算。例如正轴等角切圆柱投影的  $x$  坐标公式,过去要用:  $x = R \ln \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) = \frac{R}{\text{Mod}} \lg \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$ , 今日可用:  $x = R \operatorname{arctanh}(\sin \varphi)$ , 则更便利。

## 2. 与测量学的关系

天文—大地测量为测制地图提供地球参考椭球体的大小、形状及有关参数,并建立大地原点;而大地测量学在大地原点的基础上所建立的各级三角点,则需要应用地图投影计算出它们的平面直角坐标。各级三角点又是测绘地形图的控制基础。

## 3. 与地图编制的关系

地图编制与地图投影同属于地图学的重要组成部分。地图投影为地图编制建立地图数学基础以确定地图结构;而地图编制的发展和地图品种的增加,又不断地对地图投影提出新的要求,促使改进和设计新的地图投影。地图编制的目的,在于生产出各种地图供多方面使用。用图者要从地图上读取所需的某些信息或数据,则需要根据地图坐标网和投影变形特点,才能得到正确的结果。

## 4. 与航海、航空、宇宙飞行的关系

最早用于航海图的地图投影是等角圆柱投影。由于等角投影无角度变形,在一点上各方向的长度比一致,所以也适用于航空图。在当代的宇宙飞行中,地图投影不仅可以用于绘制星际关系位置图,而且能为飞往其他星球的飞船着陆提供地图。例如宇宙飞船阿波罗 11 号(Apollo 11)登月的一套



地图,不仅有大比例尺的着陆图,而且有小比例尺的可见月面的月半球图。当宇宙飞船或人造卫星收回的其他星体的信息和地球的照片等,又可促使地图投影向新的方向发展。例如根据已获得的月球形状、大小及有关参数而拟定的整个月球和局部月球图的投影,利用卫星摄取的地面照片进行制图所用的空间地图投影(动态的投影)等。

### 三、地图投影发展的历史梗概

地图投影约产生于公元前 6 世纪至 5 世纪。最初的投影是用于绘制天体图,如希腊天文学家塞利斯(Thales 公元前 639 年~公元前 546 年)是最早用日晷投影(球心投影)绘制天体图的。在绘制地球表面地图时使用地图投影最早的是埃及天文学家及地理学家埃拉托色尼(Eratosthenes 约公元前 276 年~公元前 194 年)。在他完成第一次子午线弧长测量的基础上编绘“世界地图”时,他使用了经纬线互相垂直的近似于等距离圆柱投影的一种投影。在这一时期内,还有学者也发明了一些投影,如天文学家喜帕恰斯(Hipparchus 公元前 160 年~公元前 125 年)发明了球面投影、正射投影和简单圆锥投影等。

古希腊天文学家与地理学家托勒密(Claudius Ptolemaeus 公元 87 年~150 年)的名著《地理学指南》的第一卷,主要讲述地球形状、经纬度的测定和地图投影。其中除了说明过去已知的圆柱、球心和正射三种投影的制图方法外,还拟定了伪圆锥投影和改良简单圆锥投影。托勒密的贡献,对古罗马地图的发展有较大影响。

随着 16 世纪的地理大发现,扩大了地球的地理概念,地图学也得到了蓬勃的发展。由于航海的需要,西欧(Flanders 地方)地图学家墨卡托(Gerhardus Mercator 1512 年~1594 年)第一个用正轴等角圆柱投影绘制航海图。因此这一投影便以墨卡托的名字命名了。由于这一投影具有地面上的等角航线在投影面上被描写成为直线的优点(详见本书 4.2 节),故对航行非常方便。因此这一投影至今还在海图上使用。

17~18 世纪,随着近代数学的发展,地图投影具有一些新的特点。这一时期较大比例尺的地形图,已开始使用地图投影。如法国喀西尼(C. F. Cassini 1714 年~1784 年)在法国大城市间进行三角测量的基础上测制的 1:86 400 比例尺地形图,采用的是彭纳(Bonne 1727 年~1795 年)投影。另外,这一时期在投影的理论上有了深入的发展。例如数学家和地图学家兰勃特(J. H. Lambert 1728 年~1777 年)提出了等角投影的理论,并首先创立了等角圆锥投影、等面积方位投影和球体的等角横切圆柱投影;瑞士数

学家欧拉(Euler Leonhard 1707 年~1783 年)研究了等面积投影理论并拟定了新的等面积圆锥投影;法国数学家拉格朗日(J. L. Lagrange 1736 年~1831 年)研究了等角双圆投影的基本理论等。

19 世纪由于资本主义的军事扩张,需要提高地形图的精度,因而要求适合于大比例尺地形图的投影。德国数学家高斯(C. F. Gauss 1777 年~1855 年)拟定了一个曲面在另一个曲面上描写(包括椭球面在球面上的描写)的一般理论,同时提出在椭球面上实行等角横切圆柱投影的基本设想。他死后由克吕格(L. Krüger)继续研究并于 1919 年完成,即著名的高斯-克吕格投影(详见本书第 9 章)。

19 世纪末到 20 世纪中叶,俄国和前苏联的学者对地图投影的发展做出了卓越的贡献。俄国科学院院士契比雪夫(П. Л. Чебышев 1821 年~1894 年)提出了一个著名理论:“地表的一部分描写于地图上最适宜的投影,是投影边界线上比例尺保持为同一数值的投影。”这一理论对探求新投影指出了方向。这一时期对地图投影的理论和应用作出过贡献的还有维特科夫斯基(В. В. Вотковский 1856 年~1924 年)、金格尔(Н. Я. Цингер 1842 年~1918 年)、克拉索夫斯基(Ф. Н. Красовский 1879 年~1948 年)和卡拉依斯基(В. В. Каврайский 1884 年~1954 年)等人。他们对地图投影的理论、实践和教学等都作出了有益的贡献。特别是后三人的研究,取得了等距离、等角和等面积长度均方变形为最小的圆锥投影。前苏联建国后,测绘事业获得全面发展,在投影方面贡献较大的有乌尔马耶夫(Н. А. Урмаев)、索洛维也夫(М. Д. Соловьев)、金兹布尔格(Г. А. Гинзбург)和沃尔科夫(Н. А. Волков)等人。其中乌尔马耶夫的著作中,提出了根据已知变形分布推求新投影的方法和投影转换的理论;在索洛维也夫的领导下,前苏联中央测绘科学研究所算制的《制图用表》,在 20 世纪 40 年代至 60 年代末未使用电子计算机时,对投影计算起到了一定的辅助作用。

我国的地图发展很早,古代的地图虽有丰富的历史记载,但保存下来的实物很少。仅从 1974 年在湖南长沙马王堆汉墓出土的三幅绢帛地图中,我们也足以清楚地认识我国 2100 多年前(公元前 193 年)的地图风貌。在出土的三幅地图中,特别是“地形图”的山脉、河流、道路、聚落等要素的表示,已具有某些近代地图的特点,与现代地图比较,相对位置也还比较正确。比例尺约为 1:18 万(相当于每寸折 10 里)。但是图上没有使用地图投影的迹象。

西晋著名地图学家裴秀(224 年~271 年)的“制图六体”,是世界上最早的地图制图的重要理论之一。关于地图的数学基础,他只提到了分率(比例

尺),也未提到地图投影的问题。

南宋刘豫昌阜七年(1136年)四月刻在石碑上的《禹迹图》,是我国现存的最早的“计里画方”地图。图上刻写的文字记载“每方折地百里”。全图纵73列,横70行,共计5110个方格。虽然这种画方的古代地图具有现代地图方里网的形式,但没有根据说明它使用的是什么地图投影。

由于我国封建社会历史较长,而统治者和一般士大夫多重科举而轻视技艺,以致科学技术发展缓慢。西晋以后在地图学上没有突破性发展,直至明朝末年我国地图上才开始有经纬网。明末清初,西方传教士相继来到中国后才将西方的天文、地理、测绘等知识带进我国。

满清取代明朝的统治,待政治、经济逐步稳定后,康熙帝(爱新觉罗·玄烨 1654年~1722年)于1708年便开始大规模的全国经纬度测量和三角测量,在此基础上展开了全国性测图工作。在法国传教士杜德美(Petrus Tartoux 1668年~1720年)主持下,于1718年完成了《皇舆全图》。至同治年间(1862年~1874年),胡林翼根据此图改编成《大清一统舆图》。这些地图都有经纬网,纬线为平行直线,经线为交于中央经线上一点的倾斜直线,经纬网为斜梯形。这是一种三角形等面积的投影,现在已很少有人使用。

民国初年军阀割据时代,各省实测的1:5万地形图也未使用地图投影,只是按36 cm×46 cm的矩形图廓测图。这时勘测和编绘的1:10万、1:50万和1:100万几种比例尺地图,采用的是多面体投影。

国民党时代实测的1:5万地形图,是按经纬度统一分幅,采用兰勃特等角割圆锥投影(分带方法见本书5.6.4)。这时期编制的1:100万地图(多数为单色印刷),按国际统一分幅,使用改良多圆锥投影。市面上出版发行的地图和地图集,多采用一些早期的投影。如以亚尔勃斯(Albers)投影绘制中国全图和分省图,以彭纳投影绘制亚洲地图,以格灵顿(Grinten)投影绘制世界地图等。

我国在解放前专门研究地图投影的极少,只有少数几位学者如叶雪安教授(1905年~1966年)和方俊教授(1904年~1999年),对地图投影有较深的研究,曾在高校测量系和制图系讲授过地图投影。

在旧中国也未出版国内学者的地图投影书籍,仅有褚绍唐先生翻译由亚光舆地学社于1943年出版的一本科普性读物《地图投影法》(其原著为J. A. Steers: *An Introduction of the Study of Map Projection*),其内容是用几何法或透视法阐述构成小比例尺地图经纬网的若干常见投影。

新中国成立后,党和政府十分重视测绘事业的发展。20世纪50年代

建立了全国统一的坐标系和统一的高程系;决定 1:50 万及以上更大比例尺的系列地形图统一采用高斯-克吕格投影;新编第一代 1:100 万地图,仍使用改良多圆锥投影。同时兴办高等和中等测绘院校,培养新的测绘技术人才。老一代测绘科学家也焕发了青春,叶雪安教授 1953 年出版了《地图投影》一书(主要用于大地测量,龙门联合书局出版);1957 年~1958 年方俊教授出版了《地图投影学》巨著(计 50 多万字,分上下两册,由科学出版社出版)。这是我国学者在国内第一次出版的学术水平较高、内容丰富的地图投影著作。

20 世纪 60 年代初,吴忠性教授、胡毓钜教授和黄国寿副教授分别编著出版了适用于高等测绘院校和中等测绘专科学校的三种地图投影教材,对我国地图制图教育作出了有益的贡献。新中国培养出的中青年一代地图制图学者如李国藻、杨启和、龚剑文、方炳炎等,自 20 世纪 60 年代起已崭露才华,相继发表了许多篇水平较高的地图投影方面的学术论文。这一时期我国学者还设计了《中华人民共和国大地图集》的投影方案,20 世纪 70 年代末讨论选定我国新的 1:100 万地形图的投影,即以边纬线和中纬线变形绝对值相等的等角割圆锥投影取代过去的改良多圆锥投影。1983 年由吴忠性、胡毓钜主编由测绘出版社出版的《地图投影论文集》,是从 20 世纪 50 年代至 1979 年在国内有关学报上发表的地图投影方面的论文中,精选出具有代表性的优秀论文 26 篇汇集成册。以这批论文的水平同世界上科学先进的国家比较,我国地图投影理论研究的深度并不逊色于其他国家。

最后,谈一下近年来国际上地图投影的发展新趋向。

**外星地图投影(Extra-terrestrial Map Projection)** 过去凡提到地图和地图投影,往往只是针对地球而言。自从人类登上月球后,地图制图的领域已从地球扩展到外星。目前月球制图所需要的各种投影,也早已研究和选定了(见本书第 11 章)。随着宇航技术的发展,不久的将来又可能登上距地球较近的其他星体,到时还会增加更多星体的地图投影。

**空间地图投影(Space Map Projection)** 过去原有的静态的地图投影,已不适用于人造地球卫星在自己的轨道上运行中,通过扫描装置自动摄取自转着的地球表面影像进行连续制图的要求。1974 年美国地质测量局科尔沃科雷塞斯(A. P. Colvocoresses)提出空间斜墨卡托(SOM)投影,1977 年由琼金斯(J. L. Junkins)和斯奈德(J. P. Snyder)同时推求出 SOM 投影的公式,并证实它是一种最适合于陆地卫星扫描影像制图的投影。1980 年后,斯奈德又研制出卫星轨迹地图投影,它包括卫星轨迹圆柱投影和卫星轨迹圆锥投影。其特点是非常简化并能在地图上显示出卫星轨迹和摄影地区。

但由于变形较大,不能代替 SOM 投影用于大、中比例尺的卫星影像制图(见本书第 11 章)。

多焦投影 (Polyfocal Projection) 和变比例尺投影 (Varioscale Projection) 近年来计量地理学和某些新型专题地图的发展,要求利用地图投影的变形或扩大这种变形的方式,反映区域内某现象统计量的强度及其分布趋势,并在地图上让读者明显地看出这种差异。多焦投影是在同一种投影的地图上,运用不同的投影中心或视点位置,增大或缩小局部范围的比例尺,使制图现象的强度或密度与统计面的大小成比例以反映其分布差异。变比例尺投影也是运用投影变形,使地图上局部区域的比例尺急剧增大。例如编制城市旅游图,可使城市中心区比例尺比郊区增大 1 倍~2 倍,便于详细表示商业网点、交通状况、食住和游乐等服务设施等。这种投影要经过再度投影而实现,即一般地图→过渡球面→新地图。对地图投影的一贯要求是变形愈小愈好,但是为了某种专题地图的需要,也可以利用扩大投影变形的方法以达到某项专题制图的要求。这也可以说是对投影变形的另一种认识。

## 复习思考题

1. 地图投影研究的内容是什么?发展的新趋势有哪些?
2. 地图投影在地图学中的位置与作用如何?与其他学科之间存在何种关系?

# 第 1 章 地球体的有关参数和公式

地图投影是将地球面上的经纬网描写到平面上的数学方法。地图投影所依据的基准面(原面)是地球的数学面,因此在讨论地图投影之前,先将地球数学面的形状、大小及其有关参数和表达式作一简略的介绍。

## 1.1 地球体的形状和大小

地球的自然表面是一个极不规则的曲面,有高山、深谷、平原和海洋等。陆地上最高点珠穆朗玛峰高出平均海面 8 844.43 m;海水面下同样具有高低悬殊的复杂地形,海洋最深处在马里亚纳海沟为 -11 034 m;两点的高程差将近 20 000 m。这样复杂的曲面,是不可以作为测量和地图制图的基准面的。为了探求一个合理的基准面,经过人们不断地探索与实践,设想当海水面完全处于静止状态下并延伸到大陆内部,使它成为一个处处与铅垂线垂直的连续的闭合曲面,这个曲面叫做大地水准面(图 1-1),由它包围的形体叫做地球体。但是由于构成地层的物质分布不均和地表起伏的影响,引起重力(铅垂)方向的局部变化,所以地球体仍然是一个具有起伏的不规则曲面。经过进一步推算,可以认为地球体虽然比较复杂并有一定的起伏,但是对整个地球而言,其影响并不太大,而且它的形状很接近一个由扁率很小的椭圆绕其短轴旋转而构成的旋转椭球体,它的表面是一个纯数学面,可以用简单的数学公式表达。所以地图投影的拟定和计算,通常以这种旋转椭球面为依据。一般称它为地球椭球面或参考椭球面(图 1-2)。

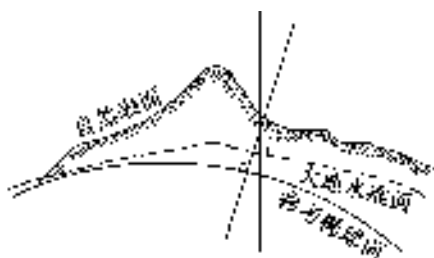


图 1-1 大地水准面

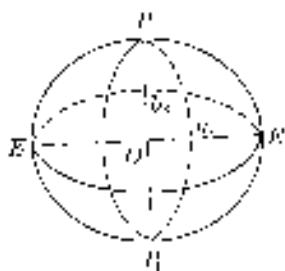


图 1-2 地球椭球面

地球椭球体的形状和大小,是由它的长半径(赤道半径) $a_e$ 和短半径(极轴半径) $b_e$ ,椭圆扁率 $f_e$ ,第一偏心率 $e_1$ 和第二偏心率 $e_2$ 决定。其中只要知道 $a_e$ 或 $b_e$ 和其余的任一个元素,便可以确定地球椭球体的大小。

上述地球椭球体的各元素 $f_e, e_1, e_2$ 与 $a_e, b_e$ 有如下的关系式:

$$\text{椭圆扁率} \quad f_e = \frac{a_e - b_e}{a_e}; \quad (1-2)$$

$$\text{第一偏心率} \quad e_1^2 = \frac{a_e^2 - b_e^2}{a_e^2}; \quad (1-3)$$

$$\text{第二偏心率} \quad e_2^2 = \frac{a_e^2 - b_e^2}{b_e^2}。 \quad (1-4)$$

由(1-3)式和(1-4)式,可以推导出第一偏心率与第二偏心率的关系式:

$$e_1^2 = \frac{e_2^2}{1 + e_2^2} \quad (1-5)$$

$$\text{和} \quad e_2^2 = \frac{e_1^2}{1 - e_1^2}。 \quad (1-6)$$

近一个半世纪以来,世界上著名的天文大地测量学家推算出了数十种地球椭球体。特别是近 20 多年间,人造卫星大地测量学和电子计算技术的发展,使地球体的推算更趋于准确。表 1-1 所列是世界上各国常用的椭球体的参数值。

表 1-1 世界上各国常用的椭球体的参数值

椭球体名称	年代	长半轴 $a_e$ (m)	短半轴 $b_e$ (m)	扁率 $f_e$
白塞尔(Bessel)	1841	6 377 397	6 356 079	1 : 299.15
克拉克(Clarke)I	1866	6 378 206	6 356 584	1 : 294.98
克拉克(Clarke)II	1880	6 378 249	6 356 515	1 : 293.47
海福特(Hayford)	1909	6 378 388	6 356 912	1 : 297.00
克拉索夫斯基(Красовский)	1940	6 378 245	6 356 863	1 : 298.30
国际大地测量学与地球物理学联合会(I. U. G. G.)	1975	6 378 140±5	6 356 755	1 : 298.257±0.0015
1980 年大地参考坐标系(GRS-1980)	1980	6 378 137	6 356 752.3	1 : 298.257
WGS84	1984	6 378 137		1 : 298.257 223 563

我国在测绘工作中,1953 年以前采用海福特地球椭球体;1953 年以后改用克拉索夫斯基椭球体;为了与全世界取得统一,我国从 1980 年起采用国际大地测量学与地球物理学联合会第 16 届大会上所推荐的 1975 年基本大地数据。

无论采用哪一个地球椭球体,都必须使椭球体的中心与地球的重心一致,使椭球体的赤道面与地球的赤道面一致,而且两者之间在高度上其差值的平方和为最小。这样,才能确定地面上各点的正确位置。

## 1.2 地理坐标

由前节我们已知,在地图测制中是把地球表面作为旋转椭球面(有时也当作正球面)处理。地球椭球面上各点的位置,是以地理坐标即经度和纬度来确定。经纬度是一种绝对的坐标系统,因为它们的起算线是规定的起始子午线和固定的赤道线。

如果把地球表面作为旋转椭球面,由图 1-3(a),以  $P, P_1$  表示地球北、南极,以  $O$  为球心,通过球心连接两极的直线  $PP_1$  为椭球旋转轴。通过  $PP_1$  的平面叫做子午面,它与椭球体表面相交所形成的截面  $PDP_1G$  是一个椭圆,叫做子午圈(经线圈);子午圈的短半径即地球椭球体的短半轴  $b_e$ 。过球心  $O$  垂直于旋转轴的平面,叫做赤道面,它与椭球面相交而成的截面  $EDE_1G$  为一大圆,叫做赤道;赤道半径即地球椭球体的长半轴  $a_e$ 。与赤道面平行的平面与椭球面相交的截面如  $abcd$  是小圆,叫做平行圈(纬线圈)。经线圈和纬线圈在地球面上是垂直相交的。

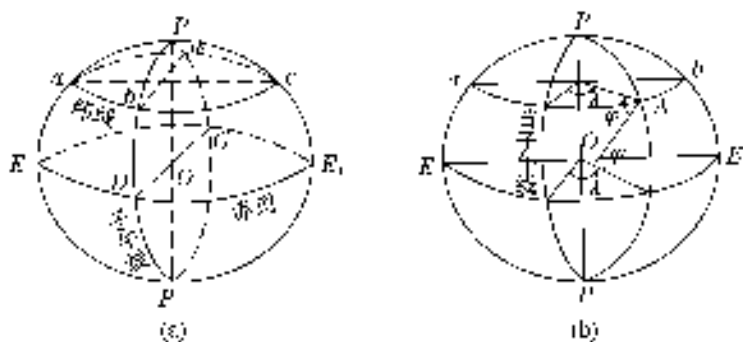


图 1-3 (a)经纬线 (b)经纬度

根据国际经度会议决定,从 1884 年起以通过英国格林尼治(Green-



wich)天文台<sup>①</sup>的子午线为  $0^\circ$ , 即作为首(起始或本初)子午线。地面上过任一点  $A$  的子午线平面与首子午线平面所构成的二面角的度数就是该点的地理经度, 通常用  $\lambda$ (或  $L$ )表示(图 1-3(b))。经度绕地球一周划分  $360^\circ$ , 首子午线以东  $0^\circ \sim 180^\circ$  为东经; 首子午线以西  $0^\circ \sim 180^\circ$  为西经。

地球椭球面上任一点  $A$  的法线(垂直于  $A$  点切平面的直线)与赤道面的交角(图 1-3(b))的度数即为该点的纬度, 通常用  $\varphi$ (或  $B$ )表示。纬度以赤道为  $0^\circ$ , 由赤道至南北极各为  $90^\circ$ , 在赤道以南称南纬, 在赤道以北称北纬。

由上可知, 在地球椭球体的两极之间, 保持经度为一常数的是半个椭圆的经线; 保持纬度为一常数的是纬线圈, 它是圆。根据它们互相垂直的关系, 便构成了地理坐标系。于是地面上任一点的位置, 就可以用经纬线交点的经度和纬度来定出。例如, 南京市某一广场的中心位置, 可以用东经  $118^\circ 47' 30''$ , 北纬  $32^\circ 03' 50''$  来确定。这个位置是准确的, 而且是唯一的。

## 1.3 椭球体和球体的几个重要半径

### 1.3.1 子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径

在前节已提到地球椭球面上一点  $A$  的法线的概念。通过地面任一点的法线可以有无数法截面, 它们与椭球面相交则形成无数法截弧, 其中有一对互相垂直的法截弧, 称为主法截弧。主法截弧都是椭圆, 其一是子午圈( $AE_1P_1EP$ ), 另一个是卯酉圈( $FAw$ )(图 1-4)。地球椭球面上的子午圈始终代表南北方向, 卯酉圈除两个极点外, 代表东西方向。

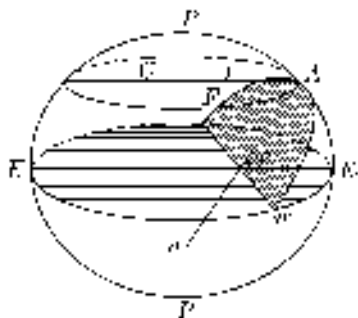


图 1-4 子午圈和卯酉圈

由于子午圈和卯酉圈都是椭圆, 它们的曲率半径不可能是常数, 而且具有极大和极小值。根据微分学中曲率半径公式和椭圆偏心率与长短半径的关系式, 可以推求出子午圈和卯酉圈曲率半径的公式。在此不作推导, 只写出它们的表达式:

<sup>①</sup> 格林尼治天文台已于 1948 年迁至英格兰南部沿海城堡 Herstmonceux, 原址现为英国海洋博物馆天文站。因首子午线的决定早已为国际公认, 故世界经度的起算点及名称, 都按原来的不变。

$$\text{子午圈曲率半径} \quad M = \frac{a_e(1-e_1^2)}{(1-e_1^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1-7)$$

$$\text{卯酉圈曲率半径} \quad N = \frac{a_e}{(1-e_1^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1-8)$$

式中:  $a_e$  是地球椭球体的长半径,  $e_1$  是第一偏心率。按克拉索夫斯基椭球体<sup>①</sup>, 则  $a_e = 6\,378\,245\text{ m}$ ,  $e_1^2 = 0.006\,934\,216$ 。

由(1-7)式和(1-8)式知,  $M, N$  之值随点的纬度不同而变。假设一点在赤道上, 即  $\varphi = 0$ , 则

$$M_0 = \frac{a_e(1-e_1^2)}{(1-e_1^2 \sin^2 0^\circ)^{\frac{3}{2}}} = a_e(1-e_1^2),$$

$$N_0 = \frac{a_e}{(1-e_1^2 \sin^2 0^\circ)^{\frac{1}{2}}} = a_e。$$

由此知,  $M_0$  小于椭球体的长半径  $a_e$ ; 而  $N_0$  等于  $a_e$ , 即卯酉圈与赤道重合。

设某点在南北极之一, 即  $\varphi = 90^\circ$ , 则

$$M_{90} = \frac{a_e(1-e_1^2)}{(1-e_1^2 \sin^2 90^\circ)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a_e(1-e_1^2)}{(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a_e}{\sqrt{1-e_1^2}},$$

$$N_{90} = \frac{a_e}{(1-e_1^2 \sin^2 90^\circ)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a_e}{\sqrt{1-e_1^2}}。$$

由此知, 当该点在极点时,  $M = N$ , 即卯酉圈成为一个子午圈, 但仍保持同原来的子午圈垂直的关系。根据这一点也可以说明, 在北极点上盖一座房子可以是四面向阳。因在此点上只有南北方向而无东西方向, 从北极点向周围看, 都是向南方。

### 1.3.2 纬圈半径

地球椭球面上纬圈是圆。由图 1-4 可以看出,  $\angle Can = \varphi$ , 而  $CA$  是  $A$  点的纬圈半径  $r$ ,  $An$  等于  $A$  点卯酉圈曲率半径  $N$ , 故

$$r = N \cos \varphi。$$

将(1-8)式代入上式, 则有纬圈半径:

$$r = \frac{a_e \cos \varphi}{(1-e_1^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1-9)$$

① 由于常用的一些制图用表中的  $M, N, r$  等值是按克拉索夫斯基椭球体计算的。

### 1.3.3 平均曲率半径

在地图投影的计算中,除经常要用  $M, N$  和  $r$  外,有时还要用到地球椭球体上某点的平均曲率半径  $\bar{R}$ 。经过推算知道,平均曲率半径等于子午圈曲率半径  $M$  和卯酉圈曲率半径  $N$  的几何平均数,即

$$\bar{R} = \sqrt{M \cdot N} = \frac{a_e \sqrt{1 - e_1^2}}{(1 - e_1^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (1-10)$$

从公式(1-7)至(1-10)四式来看, $M, N, r$  和  $\bar{R}$  都是纬度  $\varphi$  的函数,它们的值都是随着点的纬度不同而变的。在实际应用中,除按公式计算外,还可以由本书附表2按纬度  $\varphi$  为引数查取相应数值(表内未列入  $\bar{R}$  值)。这些数值在按椭球体进行投影的计算中是经常用到的。

### 1.3.4 具有某种条件的球体半径

在编制小比例尺的地图时,常把地球当作球体,这样问题就简单得多。球体不仅没有长短半径、扁率和偏心率,而且主曲率半径  $M$  和  $N$  都成为一个常量的球体半径  $R$ ;而纬圈半径则是  $r = R \cos \varphi$ 。

同时,地理纬度在球体与椭球体上也不同。由本书1.2及图1-5可知,椭球面上一点  $A$  的纬度是  $A$  点的法线与赤道半径的夹角;而球体一点  $A$  的纬度则是球体半径  $R$  以球心  $O$  为圆心,由赤道  $E_1$  沿经圈按逆时针方向转至  $A$  点所构成的圆心角  $AOE_1$  (图1-5(b))。有些书籍中以  $L, B$  表示地球椭球体的经度和纬度(主要用于地形图),用  $\lambda$  和  $\varphi$  表示球体的经度和纬度。在本书中不予区分,都用后者。

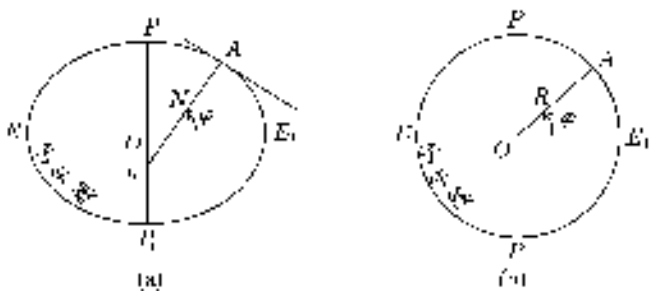


图1-5 椭球体纬度(a)和球体纬度(b)

当视地球为球体时,常采用具有某种条件的球体半径  $R$ 。现在根据 I. U. G. G. 1975 年地球椭球体的参数:  $a_e = 6\,378\,140\text{ m}$ ,  $b_e = 6\,356\,755\text{ m}$ ,

$e_1^2 = 0.006\,694\,475\,04$ , 推算出以下几种常用的球体半径以供选用。

(1) 利用椭球体的三半轴取平均数的球体半径, 称为三轴平均球体半径, 则有:

$$R_e = \frac{a_e + a_e + b_e}{3} = 6\,371\,012\text{ m}.$$

(2) 使球体的面积等于地球椭球体的面积, 称为等面积球, 其半径为:

$$R_a = a_e \left( 1 - \frac{1}{6} e_1^2 - \frac{17}{360} e_1^4 \right) = 6\,371\,010\text{ m}.$$

(3) 使球体的体积等于地球椭球体的体积, 称为等体积球, 其半径为:

$$R_v = \sqrt[3]{a_e^2 b_e} = 6\,371\,004\text{ m}.$$

那么多大比例尺的地图, 才可以把地球当作球体处理? 关于这个问题, 过去讨论得不多。现在我们可以根据地球椭球体的长半径  $a_e$  和短半径  $b_e$  与球体半径  $R$  (按等面积球  $R_a$ ) 的中误差  $E_m$  的大小来衡量并确定。

$$E_m = \sqrt{\frac{(a_e - R)^2 + (b_e - R)^2}{2}} = 11\,270.358\text{ m},$$

严格地讲, 只有把地球缩小 1 亿倍, 即绘制 1 : 10 000 万比例尺的世界地图时, 上述差值才小于绘图误差 (0.2 mm), 这时才可以将地球当作球体。按此差值, 半球地图比例尺小于 1 : 5 000 万, 各大洲地图比例尺小于 1 : 1 000 万, 也可以把地球作为球体。一般说 8 开本以下的地图集和普通书刊中的世界地图、半球地图和大陆地图等, 基本上都可以将地球当作球体处理。但是在斜轴或横轴投影的计算中, 需要进行球面坐标换算时 (见本书 2.3), 无论地图比例尺大小, 都需要将地球按球体处理。

## 1.4 纬线弧长和经线弧长

在地球椭球面上, 纬线是圆, 其半径为  $r$ 。若在任一条纬线上求两点间经差为  $\lambda$  的一段纬线弧长, 可由下式求得:

$$S_n = r\lambda = N \cos \varphi \lambda. \quad (1-11)$$

式中  $\varphi, \lambda$  以弧度为单位。

在地球椭球面上, 子午圈是椭圆, 其曲率半径  $M$  随点的纬度不同而异。子午线的微分弧长为:

$$dS_m = M d\varphi.$$

如果要求出一段经线弧长, 则需对上式积分。则有

$$S_m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi.$$

将(1-7)式代入上式并求  $\varphi_1$  至  $\varphi_2$  的一段经线弧长,可由下式推导其实用公式:

$$S_m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a_e(1-e_1^2)}{(1-e_1^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi. \quad (1-12)$$

由(1-12)式经过繁琐的推导过程最后得到的实用公式,仍然比较复杂,计算不很方便。在没有普遍使用电子计算机以前,一般预先按一定纬差计算相应的经线弧长值制成数表,以备查用。本书附表 1 列出了由赤道至纬度  $\varphi$  的子午线弧长,纬差  $30'$  的子午线弧长和经差  $30'$  的纬线弧长。需要时可以按纬度  $\varphi$  为索引数查取。

## 1.5 地球椭球面上的梯形面积

如图 1-6,设地球椭球面上有两条无限接近的经线,其经度为  $\lambda$  与  $\lambda + d\lambda$ ,和两条无限接近的纬线,其纬度为  $\varphi$  与  $\varphi + d\varphi$ ,由它相交构成一个微分梯形  $ABCD$ 。该微分梯形的边,即经线和纬线的微分弧长为

$$AD = BC = M d\varphi, AB \approx CD = r d\lambda = N \cos \varphi d\lambda.$$

于是微分梯形的面积为

$$dT = MN \cos \varphi d\lambda d\varphi. \quad (1-13)$$

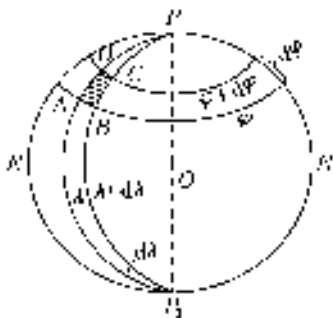


图 1-6 椭球面上的微分梯形

如果需要计算  $\lambda_1$  至  $\lambda_2$  两经线间和  $\varphi_1$  至  $\varphi_2$  两纬线间所限定的球面梯形面积,则需要由下式推求其实用计算式:

$$T = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} MN \cos \varphi d\varphi d\lambda = a_e(1-e_1^2) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1-e_1^2 \sin^2 \varphi)} d\lambda. \quad (1-14)$$

由(1-14)式经过繁琐的推导,所得到的实用计算公式仍然很复杂。所以过去通常按一定经差和纬差算制成球面梯形面积表,以备查用。本书附

表 3 所列,是按经纬差  $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ ,  $2^{\circ} \times 2^{\circ}$  和  $5^{\circ} \times 5^{\circ}$  算制的球面梯形面积,需要时可按纬度为索引数查取。

## 复习思考与计算题

1. 在测量和制图实践中,为什么采用一定大小的旋转椭球面来代替地球的自然表面?为什么有时需要用有条件球代替地球椭球?
2. 地球椭球的基本元素有哪些?它们各自的意义和作用如何?
3. 过地球椭球面上一点的子午圈和卯酉圈之间有何关系?这两种曲率半径随纬度的不同而发生何种规律变化?
4. 计算纬度为  $32^{\circ}30'29''\text{N}$  的纬圈上某一点的子午圈曲率半径( $M$ )、卯酉圈曲率半径( $N$ )和纬圈半径( $r$ )。
5. 计算从赤道至  $32^{\circ}30'29''\text{N}$  的经线弧长。
6. 计算在纬度为  $32^{\circ}30'29''\text{N}$  的纬圈从首子午线至  $119^{\circ}30'\text{E}$  的纬线弧长。
7. 计算椭球面上纬度自  $32^{\circ}\text{N}$  至  $35^{\circ}\text{N}$ ,经度自  $115^{\circ}\text{E}$  至  $120^{\circ}\text{E}$  之间的一球面梯形面积。

# 第2章 地图投影的方法、变形和分类

## 2.1 地图投影的基本方法

由第1章已知,地图投影所依据的是地球表面,因此把地球椭球面作为投影的原面;将地球表面的点、线、面描写即投影于其上的承受面,叫做投影面。地图投影的原理,是在原面与投影面之间建立点、线、面的一一对应关系。其中点是最基本的,因为点连续移动而成为线,线连续移动而成为面。由于地图通常是表示在平面上,因而投影面必须是平面或可展曲面。在可展曲面中可作为投影面的,只有圆柱面和圆锥面,因为这两种曲面沿着它们的一条母线切开,可以展成平面(如图2-1)。

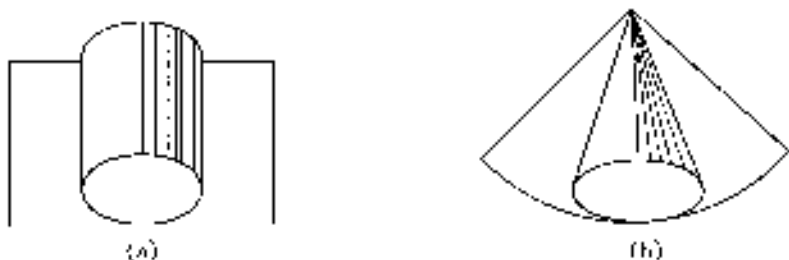


图2-1 (a)圆柱面及其展开状 (b)圆锥面及其展开状

地图投影的方法,可以归纳为两类基本的方法,即几何透视法和数学分析法。

### 2.1.1 几何透视法

这一方法是利用透视线关系,将地球面上的点描写到投影面上。如图2-2,设投影面 $F$ 垂直于地轴,视点 $O$ 在地轴或其延长线上。假设 $O$ 点是一光源,地球面上有一点 $A$ , $OA$ 是从 $O$ 点射向 $A$ 点的光线,并延长至 $A'$ 点,在地图投影中称它为视线。于是 $A'$ 便是 $A$ 点在投影面 $F$ 上的投影。图2-2是透视方位投影示意图,此外,尚有透视圆柱投影(图2-3)和透视圆锥投影(图2-4)。

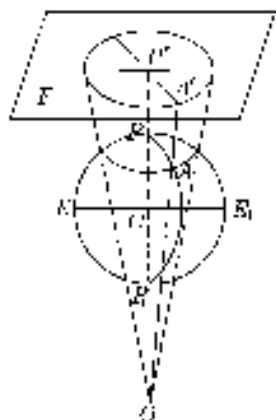


图 2-2 透视方位投影

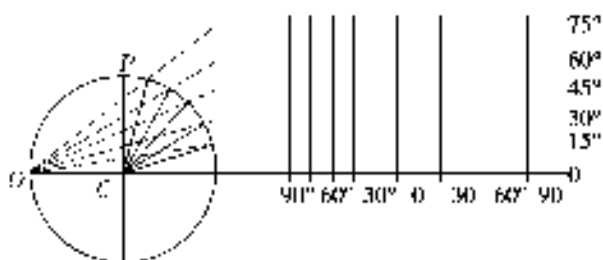


图 2-3 透视圆柱投影

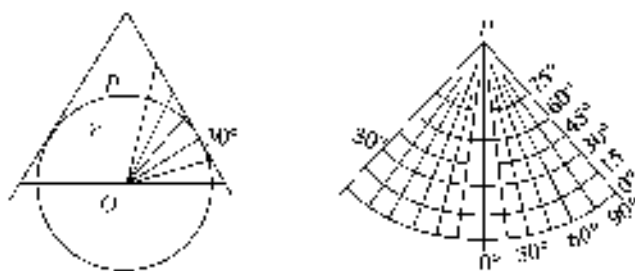


图 2-4 透视圆锥投影

当利用透视法实施地图投影时,通常是把地球当作球体。透视投影法一般只用来绘制小比例尺地图,如一般地图集或书刊中的地图,可以用圆规、直尺等简单绘图工具,以几何图解法绘出经纬网,而不需要经过复杂的



计算。所以说,几何透视法是比较简单也是比较原始的地图投影方法。随着科学的发展和地图精度要求的提高,特别是较大比例尺的分幅制图的需要,几何透视法的投影已不能满足要求了,因此必须寻求其他的方法。

### 2.1.2 数学分析法

此法是在原面与投影面之间,建立点与点的函数关系。由第1章可知,地球面上的点是用地理坐标经纬度来确定。平面上的点一般多用平面直角坐标  $x, y$  (或平面极坐标极径和极角) 确定。今假设地球面上有一个由地理坐标  $\lambda, \varphi$  确定的点,在平面上可以用直角坐标  $x, y$  完全确定的点和它相对应,则两面之间有如下的函数关系式:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(\lambda, \varphi) \\ y &= f_2(\lambda, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

式中  $f_1, f_2$  是单值而连续的函数。当地球面上的点连续移动时,平面上的对应点也同时连续移动,这就可以说原面上的点已经描写到投影面上了。(2-1)式是地图投影的基本公式,根据投影的性质和条件的不同,投影公式的具体形式是多种多样的。

## 2.2 地图投影的变形

使用了地图投影的地图,虽然可以将地球表面完整地表示在平面上,但是这种“完整”,是通过对投影范围内某一区域的均匀拉伸和对另一区域的均匀缩小而实现的。如图2-5,是沿经线方向均匀拉伸而消除裂缝的;图2-6是沿纬线方向均匀拉伸而消除裂缝的。

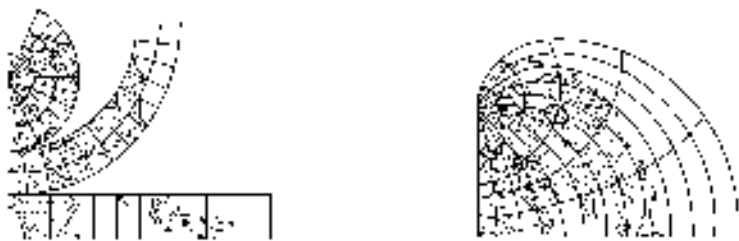


图2-5 沿经线均匀拉伸状况

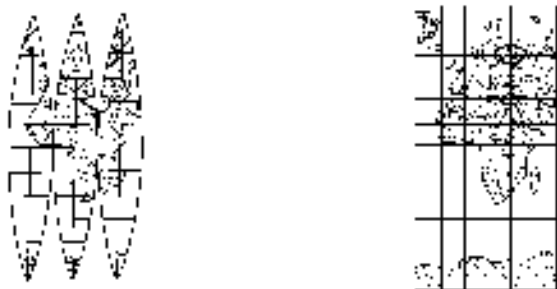


图 2-6 沿纬线均匀拉伸状况

有的投影在不同部位有的要拉伸,有的要缩小。例如割圆柱投影,所有纬线投影后都与所割的纬线(标准纬线)等长。即在割纬线以外的纬线都均匀拉伸,在割纬线之间的纬线都均匀缩短了(图 2-7)。只有通过有条件的均匀拉伸和缩小,才能实现由地球曲面描写到平面上,而能保持图形的完整性和连续性。

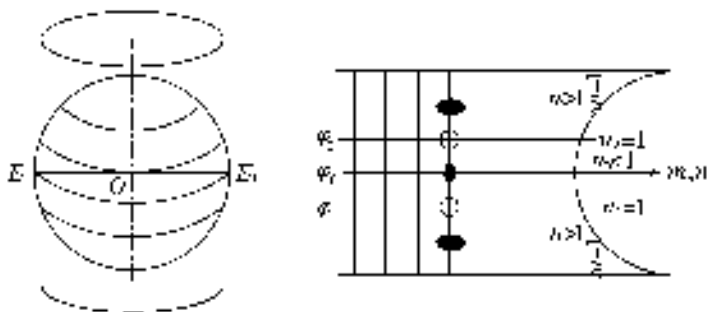


图 2-7 割圆柱投影变形示意

然而,由此又出现了一个新的问题,即经过投影制成的地图与地球面上相应的距离、面积和形状仍不能保持完全的相等和图形的完全相似。也就是说,通过地图投影并按比例尺缩小制成的地图,仍然存在长度、面积和形状(角度)的变化,这些变化在地图投影中称为变形或变异(distortion)。这是由于地球面是不可展的曲面,要把它完整地表示到平面上,必须有条件地进行局部拉伸和局部缩小,因而会产生变异。所以说,地图投影的变形是不可避免的,一种投影不存在这种变形就存在另一种或两种变形。但是人们掌握了地图投影的变形性质和规律之后,就可以对投影变形加以支配和控制,以满足使用地图的要求。因此在学习地图投影过程中,首先必须了解和掌握投影变形的问题。

下面介绍投影变形的几个重要定义和公式。

### 2.2.1 长度比、长度变形与主比例尺

地球面上—微分线段  $ds$ , 它投影在平面上为  $ds'$ 。  $ds'$  与  $ds$  之比, 称为长度比。以  $\mu$  表示, 则

$$\mu = \frac{ds'}{ds} \quad (2-2)$$

(2-2)式只代表一个比例, 而不能代表长度变形的值。在讨论长度变形时, 是用长度比与 1 之差来衡量长度相对变形。以  $v_\mu$  表示, 则

$$v_\mu = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{ds'}{ds} - 1 = \mu - 1 \quad (2-3)$$

$v_\mu$  代表长度相对变形, 简称长度变形。长度变形值有正有负, 正值表示投影后长度增加, 负值表示投影后长度缩短。

通常在地图上注出的比例尺, 叫做主比例尺, 如 1 : 150 万, 1 : 300 万等。这种比例尺只在计算投影展绘经纬网时使用, 而不能按这种比例尺研究地图投影的变形。根据长度比定义, 将地面上的微分线段投影到平面上, 是等大投影, 即 1 : 1 的投影。由于投影的长度变形, 不仅随不同的点位不同, 而且在同一点的不同方向线也不一样。因此地图上的比例尺不可能处处相等。只有在无变形点和无变形线上才能保持投影长度比为 1, 即与主比例尺一致。此外, 大于或小于主比例尺者, 则称为局部比例尺。

### 2.2.2 变形的几何解释(变形椭圆)

地球面上一个微分圆, 投影到平面上后, 一般为微分椭圆, 特殊情况下为一个圆。兹证明如下:

设  $OX, OY$  为通过圆心  $O$  的正交直径并作为坐标轴。为了讨论方便, 把此二直径视为通过  $O$  点的经线和纬线的微分线段。  $A$  为圆周上一点(图 2-8(a))。

设微分圆  $O$  及其一对直径和点  $A$  在平面上的投影分别为  $O', O'X', O'Y'$  和  $A'$ 。在一般情况下,  $O'X'$  和  $O'Y'$  不一定正交, 设其交角为  $\theta$ , 则  $O'X', O'Y'$  为斜坐标轴(图 2-8(b))。

今设  $m, n$  分别为  $O'X'$  和  $O'Y'$  方向的长度比(即经线和纬线方向的长度比), 则

$$x' = mx, \quad y' = ny,$$

或

$$x = \frac{x'}{m}, \quad y = \frac{y'}{n}。$$

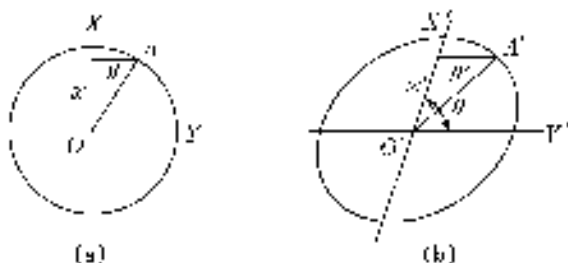


图 2-8 微分圆(a),其投影为微分椭圆(b)

以  $O$  为圆心,  $OA$  为半径的微分圆的方程式为

$$x^2 + y^2 = r^2。$$

令微分圆的半径为 1, 则  $x^2 + y^2 = 1$ , 将前面  $x, y$  的值代入微分圆方程式, 则得到投影后的表象方程式为

$$\left(\frac{x'}{m}\right)^2 + \left(\frac{y'}{n}\right)^2 = 1。 \quad (2-4)$$

此式是以椭圆中心为原点, 以经线和纬线为二共轭直径及其交角为  $\theta$  角的斜坐标椭圆方程式。由此可以证明, 地球面上一微分圆投影到平面上一般成为微分椭圆(特殊情况下仍为圆), 微分圆的任意两相互垂直的直径, 投影后为微分椭圆的二共轭直径。由于这一微分椭圆可以表现投影变形的性质和大小, 故称为变形椭圆。它的理论是法国数学家底索于 1881 年提出的, 所以又称为底索指线(Tissot's Indicatrix)。

变形椭圆不仅在性质不同的投影中表现为不同的形状和大小, 而且在同一性质的投影中在不同部位的各点上, 也表现为不同的形状和大小(图 2-9)。

### 2.2.3 极值长度比和主方向

现在利用变形椭圆的共轭半径与长短半径的关系, 来推求经纬线长度

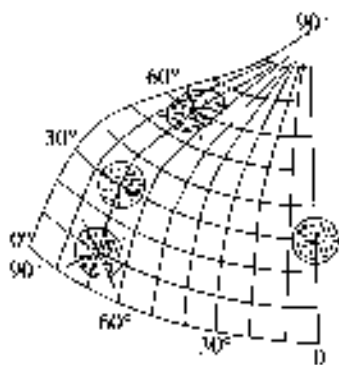


图 2-9 变形椭圆在同一投影不同位置上的表象

比与极值长度比的关系式。

由前述知,地球面上一微分圆的任意两相互垂直的直径,投影到平面上一般成为微分椭圆的两共轭直径。但其中有一对互相垂直的直径投影后仍为一对正交的直径,它们是微分椭圆的长半径与短半径。这一对长短半径就是  $O$  点的两个极值长度比的方向,现以  $a$  和  $b$  分别表示极大和极小长度比。

若以  $a, b$  作为直角坐标轴(图 2-10),则椭圆的方程式为

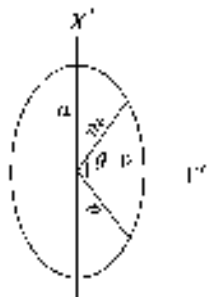


图 2-10 微分椭圆的长短半径

$$\left. \begin{aligned} \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} &= 1 \\ \text{或} \\ \frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

同时参考公式(2-4),由解析几何中阿波隆尼亚(Apollonii)定理<sup>①</sup>,可以求得经纬线长度比与极值长度比的关系式:

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 &= m^2 + n^2 \\ ab &= mn \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

将(2-6)式之第二式的2倍与第一式相加和相减,得

$$\left. \begin{aligned} a+b &= \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \sin \theta} \\ a-b &= \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

上式除表明经纬线长度比与极值长度比的关系外,还可以直接用以计算极大、极小长度比。

在地球面上某点的两相互垂直的微分线段,投影到平面上仍保持垂直且具有极大、极小长度比的二方向,称为主方向。在地球面上的经线和纬线是互相垂直的,当它投影到平面上仍保持垂直即  $\theta = 90^\circ$ ,则经纬线方向即为主方向。此时,(2-6)式之第二式和(2-7)式,则成为如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} ab &= mn \\ a+b &= m+n \\ a-b &= m-n \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

(2-8)式表明经纬线长度比与极值长度比一致。在大多数正轴投影中,经

① I. 椭圆两共轭半径的平方和为一常数,并等于长短半径的平方和。

II. 以椭圆共轭半径为边所构成的三角形面积为常数,并等于以椭圆长短半径为边所构成的三角形面积。

纬线为正交,其极值长度比与经纬线长度比一致。关于经线长度比  $m$  和纬线长度比  $n$  的形式,则随着各种投影的形式不同(如有的用平面直角坐标,有的用平面极坐标等)而不同,以后将分别讨论。

### 2.2.4 任意方向长度比

由前段已知,主方向的长度比即极值长度比  $a$  和  $b$ 。在讨论投影变形中,有时要推算任一方向长度比,现在推求其公式。

设地球面上有一点  $O$ ,过  $O$  点有两互相垂直的微分线段  $OX, OY$  为主方向。设另一微分线段  $OA$  等于微分圆的半径,它与  $OX$  轴构成  $\beta$  角(图 2-11(a)),这些线段和交角  $\beta$  投影到平面上后相应地成为  $O'A', O'X'$  和  $\beta'$ (图 2-11(b))。则长度比:

$$\mu = \frac{O'A'}{OA} = \frac{r'}{r}。$$

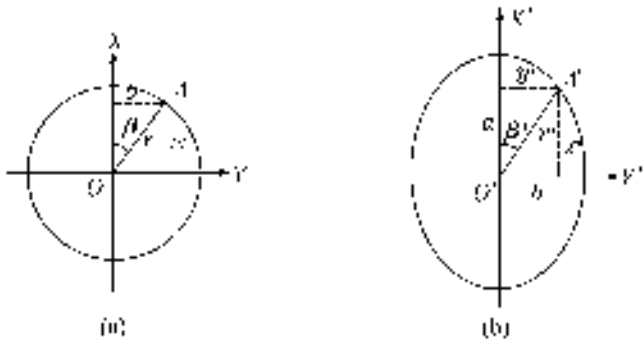


图 2-11 变形椭圆表示角度投影的变化

由图 2-11 知:

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ x' &= ax, \quad y' = by, \end{aligned} \tag{2-9}$$

而

$$x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta,$$

于是

$$x' = ar \cos \beta, \quad y' = br \sin \beta,$$

代入(2-9)式,得

$$r' = r \sqrt{a^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta}。$$

所以

$$\mu = \frac{r'}{r} = \sqrt{a^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta}。 \quad (2-10)$$

这就是求任一方向长度比的公式。只要知道  $a, b$  和方向角  $\beta$ , 便可求得一点上任一方向的长度比。

通过对长度比的有关讨论, 已认识到长度比是一个变量, 它不仅随点的位置而变, 而且在同一点上也随着方向角的变化而变。特别的, 当  $\beta=0^\circ$  和  $\beta=90^\circ$  时, (2-10) 式有以下变化:

(1) 当  $\beta=0^\circ$ , 则  $\mu=a$ , 代表极大长度比;

(2) 当  $\beta=90^\circ$ , 则  $\mu=b$ , 代表极小长度比。

由此又进一步证明, 极大、极小长度比的方向间相隔  $90^\circ$  的角, 即是互相垂直的二方向。

## 2.2.5 方向和角度变形

仍参照图 2-11, 设微分椭圆  $O'$  为地球面上一微分圆  $O$  的投影,  $r$  与  $OX$  的正向的方向角  $\beta$ , 其投影为  $r'$  与  $O'X'$  的交角  $\beta'$ 。由此则有

$$x' = ax, \quad y' = by,$$

而

$$x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta,$$

于是

$$\tan \beta' = \frac{y'}{x'} = \frac{by}{ax} = \frac{b}{a} \tan \beta。 \quad (2-11)$$

(2-11) 式表示的是地球面上一个方向与主方向所组成的角度与它投影后的角度之间的关系。

过地球面上一点可以引许多方向线, 每两条方向线可以构成一个角度, 它们投影到平面上后, 一般不与原来的角度相等。当我们研究角度变形时, 不能每个都进行研究, 而最重要的是研究一点上可能有的最大角度变形。

将 (2-11) 式两端用  $\tan \beta$  减和  $\tan \beta$  加, 得:

$$\tan \beta - \tan \beta' = \tan \beta - \frac{b}{a} \tan \beta = \tan \beta \left(1 - \frac{b}{a}\right),$$

$$\tan \beta + \tan \beta' = \tan \beta + \frac{b}{a} \tan \beta = \tan \beta \left(1 + \frac{b}{a}\right)。$$

利用三角公式

$$\tan \beta \mp \tan \beta' = \frac{\sin(\beta \mp \beta')}{\cos \beta \cos \beta'},$$

代入上两式则有:

$$\frac{\sin(\beta-\beta')}{\cos\beta\cos\beta'} = \tan\beta(1-\frac{b}{a}),$$

$$\frac{\sin(\beta+\beta')}{\cos\beta\cos\beta'} = \tan\beta(1+\frac{b}{a}),$$

两式相除,得:

$$\sin(\beta-\beta') = \frac{a-b}{a+b} \sin(\beta+\beta'). \quad (2-12)$$

由上式知,当  $\beta+\beta' = 90^\circ$  时,  $\beta-\beta'$  的差值最大。如果以  $\frac{\omega}{2}$  代表  $(\beta-\beta')$  的最大差值,则

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}. \quad (2-13)$$

因为  $\beta$  是一个方向与一个主方向所构成的角,今假设在相邻的象限内有一个与  $OA$  对称的方向,则此两方向的夹角与它的投影角之间的最大差值必然为  $\omega$  (图 2-12),于是称  $\omega$  为最大角度变形。

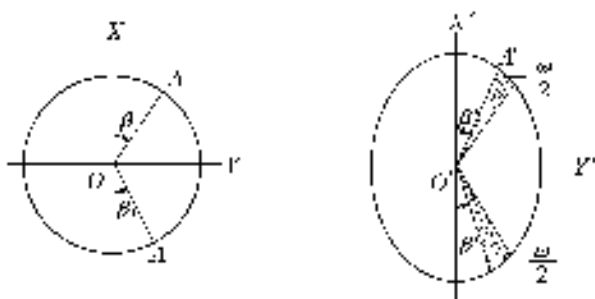


图 2-12 最大角度变形示意

根据  $\cos \frac{\omega}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\omega}{2}}$ , 将 (2-13) 式代入可求出:

$$\cos \frac{\omega}{2} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}. \quad (2-14)$$

由 (2-13) 式和 (2-14) 式可求出:

$$\tan \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}. \quad (2-15)$$

如果以  $\beta_0$  表示 (2-12) 式中最大方向角, 以  $\beta'_0$  表示  $\beta_0$  投影后的角值, 则

$$\beta_0 + \beta'_0 = 90^\circ, \quad \beta'_0 = 90^\circ - \beta_0, \quad \beta_0 = 90^\circ - \beta'_0.$$

根据 (2-11) 式, 有



$$\left. \begin{aligned} \tan\beta'_0 &= \frac{b}{a} \tan\beta_0 \\ \tan(90^\circ - \beta_0) &= \frac{b}{a} \tan\beta_0 \end{aligned} \right\}, \quad (2-16)$$

或

$$\cot\beta_0 = \frac{b}{a} \tan\beta_0。$$

以  $\tan\beta_0$  乘上式两端,则

$$\begin{aligned} \tan^2\beta_0 &= \frac{a}{b}, \\ \tan\beta_0 &= \pm\sqrt{\frac{a}{b}}。 \end{aligned} \quad (2-17)$$

因为

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 + \beta'_0 &= 90^\circ \\ \beta_0 - \beta'_0 &= \frac{\omega}{2} \end{aligned} \right\}, \quad (2-18)$$

(2-18)式中两式相加,则

$$\beta_0 = 45^\circ + \frac{\omega}{4}, \quad (2-19)$$

代入(2-17)式,得:

$$\tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}。 \quad (2-20)$$

(2-18)式中两式相减,则

$$\beta'_0 = 45^\circ - \frac{\omega}{4}。 \quad (2-21)$$

将(2-19)和(2-21)式代入(2-16)式,则有

$$\tan(45^\circ - \frac{\omega}{4}) = \frac{b}{a} \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4})。$$

将(2-20)式代入上式右端,则得:

$$\tan(45^\circ - \frac{\omega}{4}) = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}。 \quad (2-22)$$

公式(2-13), (2-15), (2-20)和(2-22)都是经常用的最大角度变形公式。有了这些公式,只要已知投影面上某点极值长度比  $a, b$  之值,便可很容易求得最大角度变形  $\omega$  之值。

例如,已知投影面上某点的主方向的长度比  $a=1.024, b=0.867$ ,求该点附近的最大角度变形。

利用公式(2-13),于是得:

$$\omega = 2\arcsin\left(\frac{a-b}{a+b}\right) = 9^{\circ}31'30''。$$

## 2.2.6 面积比与面积变形

地球面上无限小面积投影到平面上的大小与它原有面积大小之比,称为面积比。

现在可以利用以前讲过的地球面上一微分圆投影到平面上成为微分椭圆的有关元素,列出面积比的公式。设  $r$  为微分圆的半径,  $a, b$  为主方向的长度比,则变形椭圆的长半径为  $ar$ ,短半径为  $br$ 。根据面积比定义则有

$$P = \frac{\pi \cdot ar \cdot br}{\pi r^2} = ab。 \quad (2-23)$$

若经纬线投影后仍为正交,则经纬线方向为主方向。此时,  $a \cdot b = m \cdot n$ ,则

$$P = m \cdot n。 \quad (2-24)$$

若经纬线投影后不成正交,即  $\theta \neq 90^{\circ}$ ,可将(2-6)式的第二式代入(2-23)式,则有

$$P = a \cdot b = mn \sin \theta。 \quad (2-25)$$

由前面的公式可知,面积比也是随点的位置不同而变化的。通常以面积的相对变形(简称面积变形)来衡量面积变形的大小,用  $v_p$  表示则有:

$$v_p = P - 1, \quad (2-26)$$

利用此式可以计算投影面积变形的大小。

## 2.2.7 等变形线

由以上变形的讨论知道,投影面上各点的变形往往是不同的。但是在任一投影中将变形值相等的各点连接起来,则具有一定的规律和形状,诸如直线、圆和各种曲线等。这种连接变形值相等的各点的连线,就叫做等变形线。

等变形线是根据投影变形公式,计算出若干点的面积或角度相等的变形数值,用内插法绘入制图网内。它对分析和选择投影具有重要的参考价值。图 2-13 是斜轴等距离方位投影的等变形线,左半边的同心圆代表面积等变形线,右半边的同心圆代表角度等变形线(因对称于中央经线故各表示一半)。

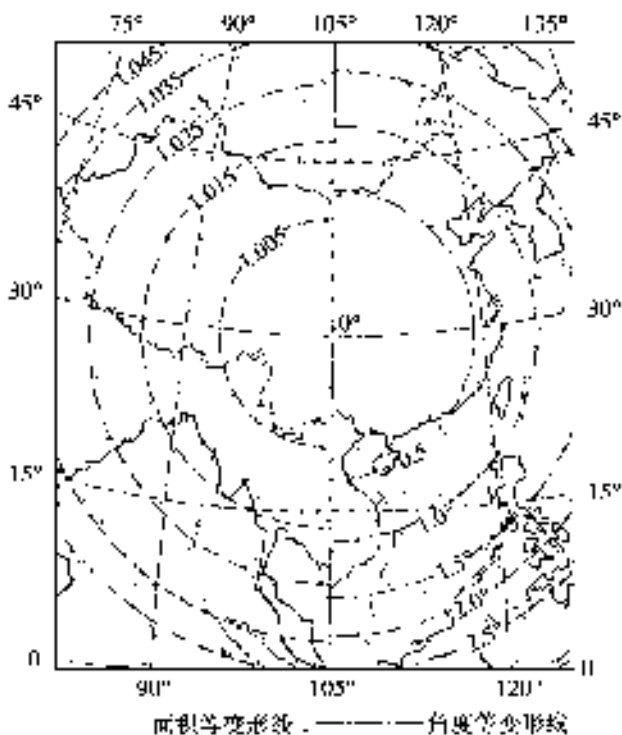


图 2-13 斜轴等距离方位投影等变形线示意图

## 2.3 球面坐标及其换算

### 2.3.1 球面坐标的意义和换算公式

在地图投影的研究和使用中,正轴投影以地理坐标  $\varphi, \lambda$  为参数,这样的投影经纬网形状比较简单,计算也方便。但是正轴投影在使用上受到地理位置的限制,例如正轴方位投影只适用于两极地区,正轴圆柱投影适用于赤道附近地区,正轴圆锥投影则适用于沿纬线延伸的中纬度地区。假若遇到制图区域的中心点是在两极以外的任一点以及制图区域是沿经线或任一方向延伸等情况,为了减少投影误差,常采用斜轴和横轴投影。但是斜轴或横轴投影的经纬网形状往往是较复杂的曲线,如果直接根据地理坐标推求投影的直角坐标公式将是很复杂的。为了简化投影公式的推导和计算工作,可以通过地理坐标与球面极坐标的换算,仍然利用正轴投影公式,则能实现

斜轴和横轴投影的计算以及经纬网的构成。

把地球作为球体时,地理坐标也是一种球面坐标,它是由通过南北地极的经圈和平行于赤道的纬圈来确定地面上任一点的位置。现在采用另一种确定地面点位的球面坐标,为了区别起见,称它为球面极坐标。球面极坐标系的建立,是根据制图区域的形状和地理位置以及投影的要求,选定一个新极点  $Q$  ( $\varphi_0, \lambda_0$ ), 亦即确定地球的一个直径  $QQ_1$ 。通过  $QQ_1$  的大圆叫做垂直圈,它相当于地理坐标的经圈;与垂直圈垂直的各圆(其中有一个大圆,其余为小圆)叫做等高圈,相当于地理坐标的纬圈。地球面上任一点  $A$  的位置,可以用过  $A$  点的垂直圈与过新极点  $Q$  的经线圈的夹角即方位角  $\alpha$ , 以及由  $A$  点至新极点  $Q$  的垂直圈弧长即天顶距  $Z$  来确定,如图 2-14。这样,地球面上任一点  $A$ , 它既可以用地理坐标  $\lambda, \varphi$  确定,又可以用球面极坐标  $\alpha, Z$  确定。但是  $\alpha, Z$  必须根据地理坐标  $\varphi, \lambda$  并按一定的公式才能求得。

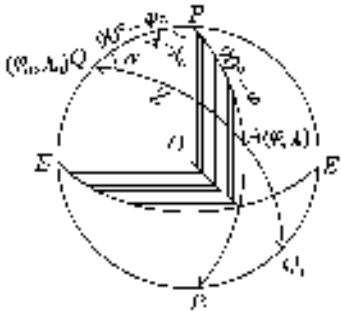


图 2-14 球面极坐标

由图 2-14 中的球面三角形  $PQA$ , 利用球面三角学的有关公式, 可以求得地理坐标与球面极坐标的关系式:

(1) 由边的余弦定理, 有

$$\begin{aligned}\cos Z &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \varphi_0) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \varphi_0) \cos(\lambda - \lambda_0) \\ &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0); \end{aligned} \tag{2-27}$$

(2) 由边正弦与邻角余弦之积的定理, 有

$$\begin{aligned}\sin Z \cos \alpha &= \cos(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \varphi_0) - \sin(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \varphi_0) \cos(\lambda - \lambda_0) \\ &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0); \end{aligned} \tag{2-28}$$

(3) 由正弦定理  $\frac{\sin Z}{\sin(\lambda - \lambda_0)} = \frac{\sin(90^\circ - \varphi)}{\sin \alpha}$  得

$$\sin Z \sin \alpha = \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0). \tag{2-29}$$

根据以上三个公式, 略加变化, 便可以由地理坐标  $\lambda, \varphi$  换算成为球面极坐标  $\alpha, Z$ 。

由以上简单介绍知道, 当需要计算斜轴或横轴投影应用球面极坐标时, 首先要解决两个问题: 一是根据制图区域的地理位置、形状特点和投影的要求, 确定新极点  $Q(\lambda_0, \varphi_0)$ ; 其次是将制图区域内各点的地理坐标  $\lambda, \varphi$  换算

成为球面极坐标  $\alpha, Z$ 。下面分别说明之。

### 2.3.2 确定新极点 $Q(\lambda_0, \varphi_0)$

新极点的地理坐标  $\lambda_0, \varphi_0$  需要根据不同投影的要求来确定,有以下三种情况。

(1) 用于斜方位投影时,以制图区域的中心点为新极点。可以利用地球仪或已出版的小比例尺地图,目测定出中心点,并量算出它的经纬度作为新极点的  $(\lambda_0, \varphi_0)$ 。也可以取制图区域边界上若干点的经纬度,求其算术平均值作为新极点的  $(\lambda_0, \varphi_0)$ 。当用于横方位投影时,新极点位于赤道上,即  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,这时只剩确定  $\lambda_0$  的问题。

(2) 用于斜轴或横轴圆柱投影时,以通过制图区域中部的大圆的极为新极点。仍可以借助地球仪求得新极点  $Q(\lambda_0, \varphi_0)$ 。方法是先用一根细绳按制图区域中部轴线在地球仪上绕成一个大圆,再用两根细绳在地球仪上垂直相交并使四端垂直于已成的大圆。这时四个垂足  $A, B, C, D$  在大圆上的间距都是  $90^\circ$ ,于是两根细绳的垂直交点  $Q$ ,即为新极点的位置(图 2-15)。然后由地球仪上量测出  $\lambda_0$ ,  $\varphi_0$ 。当这一大圆与任一经线重合时,则新极点位于赤道上  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,新轴与原地轴垂直,则投影为横圆柱投影。

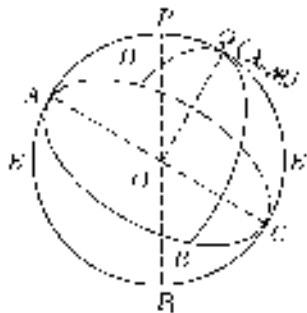


图 2-15 用四个垂足  
确定新极点

(3) 用于斜轴或横轴圆锥投影时,以通过制图区域小圆的极为新极点。这种情况也可以用地球仪目估近似地定出小圆的极点并推算出新极点的  $\lambda_0$  和  $\varphi_0$ 。当新极点位于赤道上即  $\varphi_0 = 0^\circ$  时,新轴与原地轴垂直,则投影为横圆锥投影(极少使用)。

以上(2),(3)两种情况,都可以利用球面三角公式求解新极点的  $\lambda_0$  和  $\varphi_0$ ,但解算颇烦,而且对于确定新极点  $\lambda_0, \varphi_0$  的精度要求并不很高,一般需要凑整为整数或半度,因此借助于地球仪和小比例尺地图用目测和简单量算,可以达到要求。

### 2.3.3 地理坐标换算球面极坐标

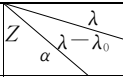
#### 1. 计算斜系(地平系)的 $Z, \alpha$

当计算斜轴投影,由地理坐标求球面极坐标时,应使用公式(2-27)和略加变化的公式(2-29),即:

$$\left. \begin{aligned} \cos Z &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0) \\ \sin \alpha &= \frac{\cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{\sin Z} \end{aligned} \right\}^{\circ} \quad (2-30)$$

假设计算用于中国全图(南海诸岛不作插图)的某一斜方位投影,确定中心点  $Q$  的  $\varphi_0=30^{\circ}\text{N}$ ,  $\lambda_0=105^{\circ}\text{E}$ , 经纬网密度  $\Delta\varphi=\Delta\lambda=5^{\circ}$ 。若使用十位的函数计算器<sup>①</sup>, 直接利用公式(2-30)可以非常迅速而精确地求得  $Z, \alpha$  值。计算的结果可按表 2-1 的格式记录备用。

表 2-1  $Z, \alpha$  记录格式一

$\varphi$		105°	110°	115°	120°	...
		0°	5°	10°	15°	...
0°	$Z$	30°00'00"	30°22'32"	31°28'30"	33°13'33"	...
	$\alpha$	180°00'00"	170°04'30"	160°34'29"	151°48'48"	
5°	$Z$	25°00'00"	25°26'29"	26°43'18"	28°43'41"	...
	$\alpha$	180°00'00"	168°20'23"	157°22'27"	147°33'34"	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
25°	$Z$	5°00'00"	6°40'54"	10°10'33"	14°11'56"	...
	$\alpha$	180°00'00"	137°14'37"	117°01'26"	107°00'00"	
30°	$Z$	0°00'00"	4°19'47"	8°39'27"	12°58'52"	...
	$\alpha$	.....	88°47'13"	87°29'43"	86°14'03"	
35°	$Z$	5°00'00"	6°32'19"	9°47'49"	13°35'06"	...
	$\alpha$	0°00'00"	38°49'33"	56°43'00"	64°30'10"	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
55°	$Z$	25°00'00"	25°15'18"	26°00'15"	27°12'15"	...
	$\alpha$	0°00'00"	6°43'44"	13°07'50"	18°56'56"	

注:中心点以南的  $\alpha$  值用  $180^{\circ}-\alpha$

2. 计算横系(赤道系)的  $Z, \alpha$

由地理坐标计算横轴投影所需要的球面极坐标  $Z, \alpha$ , 不能直接用前面的公式, 需要稍加变化。以公式(2-28)除公式(2-29)则有:

$$\tan \alpha = \frac{\cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{[\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)]}^{\circ} \quad (2-31)$$

因横轴投影的新极点  $Q$  在赤道上(图 2-16), 则  $\varphi_0=0^{\circ}$ , 以此代入公式(2-27)和(2-31)则有:

$$\left. \begin{aligned} \cos Z &= \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0) \\ \tan \alpha &= \cot \varphi \sin (\lambda - \lambda_0) \end{aligned} \right\}^{\circ} \quad (2-32)$$

① 当然用微型计算机更好, 可以自动控制制表或绘图, 如无微机用函数计算器也很方便。

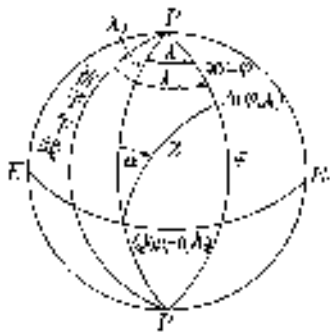


图 2-16 横系的球面极坐标

利用(2-32)式计算器计算球面极坐标则更为简捷。今假设计算用于东半球的某一横轴方位投影所需要的  $Z, \alpha$  值,新极点  $Q$  的  $\varphi_0 = 0^\circ, \lambda_0 = 70^\circ \text{ E}, \Delta\varphi = \Delta\lambda = 10^\circ$ 。计算的结果按表 2-2 的格式记录。因横轴方位投影东西对称于中央经线,南北对称于赤道,故使用时只需计算半球的右上(1/4)部分即可。

表 2-2  $Z, \alpha$  记录格式二

$\varphi$	$Z \backslash \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \end{matrix} \lambda - \lambda_0$	$70^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$	...	$160^\circ$
		$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	...	$90^\circ$
$0^\circ$	$Z$	$0^\circ 00' 00''$	$10^\circ 00' 00''$	$20^\circ 00' 00''$	...	$90^\circ 00' 00''$
	$\alpha$	.....	$90^\circ 00' 00''$	$90^\circ 00' 00''$	...	$90^\circ 00' 00''$
$10^\circ$	$Z$	$10^\circ 00' 00''$	$14^\circ 06' 22''$	$22^\circ 16' 07''$	...	$90^\circ 00' 00''$
	$\alpha$	$0^\circ 00' 00''$	$44^\circ 33' 41''$	$62^\circ 43' 37''$	...	$80^\circ 00' 00''$
$20^\circ$	$Z$	$20^\circ 00' 00''$	$22^\circ 16' 07''$	$27^\circ 56' 27''$	...	$90^\circ 00' 00''$
	$\alpha$	$0^\circ 00' 00''$	$25^\circ 30' 20''$	$43^\circ 13' 09''$	...	$70^\circ 00' 00''$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$90^\circ$	$Z$	$90^\circ 00' 00''$	$90^\circ 00' 00''$	$90^\circ 00' 00''$	...	$90^\circ 00' 00''$
	$\alpha$	$0^\circ 00' 00''$	$0^\circ 00' 00''$	$0^\circ 00' 00''$	...	$0^\circ 00' 00''$

2.4 地图投影的分类

地图投影的种类已很多,当前一般按两种标志进行分类:一是按投影的内在条件——投影的变形性质分类;一是按投影的外在条件——正轴投影经纬网的形状分类。至于其他的分类方法,如二次曲线划分法等,在此不作介绍。

## 2.4.1 按投影变形性质分类

### 1. 等角投影(conformal projection)

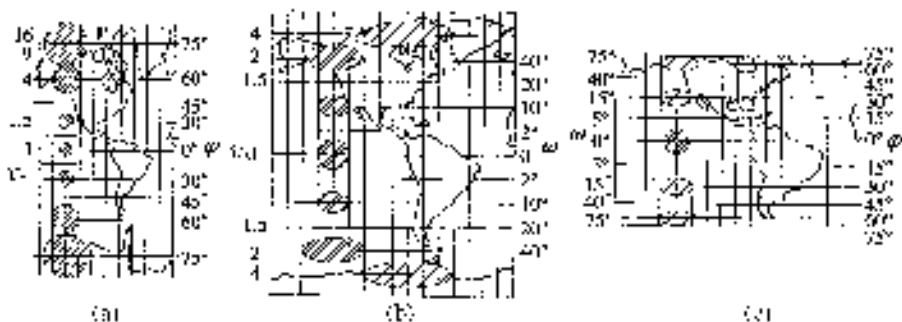
在投影面上任意两方向线的夹角同地球面相应的夹角相等,即  $\beta = \beta'$  或  $\omega = 0$ ;这类投影在一点上各方向线的长度比一致,因此变形椭圆是圆而非椭圆,故  $a = b$  或  $m = n$ ,但在不同点上长度比不一致,所以微分圆的大小不同,如图 2-17(a)。

在这类投影中,由于地球面上一微分面积的图形投影到平面上能保持图形的相似,故又称正形投影。

前面所指出的  $\omega = 0, m = n, a = b$  和  $\beta = \beta'$ , 是等角投影的条件,凡等角投影都要满足这些条件。

### 2. 等面积投影(equivalent projection)

投影面上的有限面积与地球面上相应的面积相等,即满足等面积条件  $v_p = P - 1 = 0$  或  $P = 1$ 。在等面积投影中,地球面上的微分圆投影到平面上后成为不同形状的椭圆,但其面积保持与地球面上的微分圆相等,见图 2-17(c)。



(a)等角投影 (b)等距离投影 (c)等面积投影

图 2-17 投影变形性质与变形椭圆

### 3. 任意投影(aphylactic projection)

既不等角又不等面积的投影,都属于任意投影。任意投影存在着角度、面积和长度的变形,变形椭圆的形状和大小随投影具体条件和点位不同而异。

在任意投影中,有一类投影称做等距离投影(equidistant projection),它的条件是,在正轴投影中经线长度比  $m = 1$ ,在斜轴或横轴投影中垂直圈长度比  $\mu_1 = 1$ 。在目前现有的投影中,等距离投影只存在于方位投影、圆柱



投影和圆锥投影中,它们的变形情况介于等角投影与等面积投影之间。图2-17(b)是 $m=1$ 的等距离圆柱投影,其变形椭圆在经线方向的直径都相等,但在不同点上其形状和面积都有变化。

在等距离投影与等角投影之间,还存在着许多角度变形较小的任意投影。同样在等距离投影与等面积投影之间,也存在着许多面积变形较小的任意投影。

地图投影按变形性质的分类,可以简明地用表2-3的形式予以说明。

表2-3 地图投影按变形性质分类



## 2.4.2 按正轴投影经纬网形状分类

### 1. 方位投影 (azimuthal projection)

纬线投影为同心圆,经线投影为同心圆的直径,两经线间的夹角与相应经差相等。在方位投影中,又分为透视方位投影与非透视方位投影。

### 2. 圆柱投影 (cylindrical projection)

纬线投影为平行直线,经线投影为与纬线垂直而且间隔相等的平行直线,两经线间的距离与相应经差成正比。

### 3. 圆锥投影 (conical projection)

纬线投影为同心圆弧,经线投影为同心圆的半径,两经线间的夹角与相应经差成正比。

### 4. 多圆锥投影 (polyconic projection)

纬线投影为同轴圆弧,其圆心位于投影成直线的中央经线上,其余经线投影为对称于中央经线的曲线。

### 5. 伪方位投影 (pseudo-azimuthal projection)

纬线投影为同心圆,经线投影为交于纬线共同中心并对称于中央直径

线的曲线。

## 6. 伪圆柱投影(pseudo-cylindrical projection)

纬线投影为平行直线,经线除中央经线投影为直线外,其余经线投影为对称于中央经线的曲线。

## 7. 伪圆锥投影(pseudo-conical projection)

纬线投影为同心圆弧,经线投影为对称于中央直经线的曲线。

以上所述各种投影的经纬网图形,分别见以后各章的相应投影。

5,6,7 三种投影,因不借助于辅助几何面实行投影,而是在相应投影的基础上加上某种条件而构成经纬网,故有时称它们为条件投影。

在上述投影中,由于投影面(辅助几何面)与地球表面的关系不同,又分为正轴、横轴和斜轴投影。由本章 2.3 知,正轴方位投影,投影平面与地轴垂直;正轴圆柱和正轴圆锥投影,圆柱轴或圆锥轴同地轴重合。横轴方位投影,是投影平面与地球赤道一直径垂直;横轴圆柱和横轴圆锥投影,是圆柱轴或圆锥轴同赤道一直径重合。斜轴方位投影,是投影平面与地轴和赤道直径以外的任一大圆直径垂直;斜轴圆柱和斜轴圆锥投影,是圆柱轴或圆锥轴同地轴和赤道直径以外的任一大圆直径重合。同时在以上各类投影中,由于投影面与地球的接触程度不同,又分为相切和相割的投影。三种投影面与地球面的关系位置如表 2-4 所示。

表 2-4 投影面与地球面的关系位置

位置 名称	正 轴	斜 轴	横 轴
方位投影			
圆柱投影			
圆锥投影			

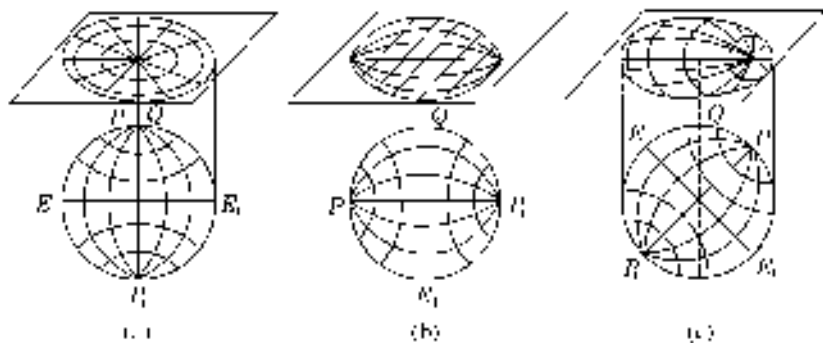
## 复习思考与计算题

1. 地图投影的实质是什么？写出投影方程的函数关系。
2. 长度比、长度变形、面积比、面积变形、角度变形的含义是什么？
3. 何谓主方向和变形椭圆，如何根据变形椭圆分析投影变形？
4. 何谓垂直圈和等高圈，球面极坐标与地理坐标之间存在何种关系？
5. 地图投影是如何分类的？
6. 已知新极点  $Q_0$  的地理坐标为  $\varphi_0 = 40^\circ\text{N}$ ,  $\lambda_0 = 115^\circ\text{E}$ 。求在北纬  $30^\circ$  至  $50^\circ$ ，东经  $105^\circ$  至  $125^\circ$  之间经纬差分别为  $10^\circ$  的各点的球面极坐标 ( $\alpha$  和  $Z$ )。

# 第 3 章 方位投影

## 3.1 方位投影的种类和基本原理

方位投影是假设一个平面与地球面相切或相割,根据某种条件(如等面积、透视等)将地球上的经纬网投影到该平面上而得到。根据投影中心点的位置不同,方位投影有正轴投影(图 3-1(a))、横轴投影(图 3-1(b))和斜轴投影(图 3-1(c))。根据投影的变形性质,方位投影有等角投影、等面积投影和任意投影(其中主要是等距离投影)。



(a)正轴 (b)横轴 (c)斜轴

图 3-1 投影中心不同的方位投影

根据本书 2.4 知,正轴方位投影的纬线投影为同心圆,经线投影为同心圆的直径,两经线间的夹角与相应经差相等。由此可以写出该投影的极坐标方程式:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= f(\varphi) \\ \delta &= \lambda \end{aligned} \right\}, \quad (3-1)$$

式中: $\rho$  为纬线投影半径, $f$  为纬度的函数, $\delta$  为两经线间的经差投影后的夹角。

正轴方位投影除用于两极地区外,对其余地区实用意义不大,故在其他地区通常使用非正轴方位投影。为此,现在推求非正轴情况的一般公式。如需要正轴投影时,只要改变一下参数便立刻得到正轴投影公式。

今假设投影面  $F$  与地球面的关系位置如图 3-2 所示,以  $Q$  为极点的等高圈和垂直圈代替纬圈和经圈。这时过  $A$  点等高圈的天顶距  $Z$  相当于  $90^\circ - \varphi$ ,过  $A$  点垂直圈的方位角  $\alpha$  相当于  $\lambda$ 。

由图 3-2,设  $A'$  为  $A$  点的投影,则极坐标方程式为:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= f(Z) \\ \delta &= \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

以通过  $Q$  点的经线的投影作为  $X$  坐标轴,过  $Q'$  点与经线投影相垂直的直线作为  $Y$  坐标轴,则其平面直角坐标公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

考虑到在使用中多采用非正轴方位投影,为计算方便通常视地球为正球体。球体半径  $R$  可根据具体要求,由本书 1.3 所介绍的几种半径中选用一种。

现在推求方位投影的变形公式。设  $\mu_1, \mu_2$  分别为垂直圈和等高圈的长度比,根据长度比的定义并参看图 3-3,因  $d\alpha = d\delta, r = R \sin Z$ ,则有:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{A'D'}{AD} = \frac{d\rho}{R dZ} \\ \mu_2 &= \frac{D'C'}{DC} = \frac{\rho d\delta}{r d\alpha} = \frac{\rho}{R \sin Z} \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

由于本投影的等高圈和垂直圈同主方向一致(即投影后仍保持互相垂

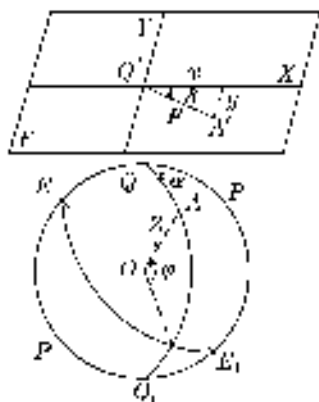


图 3-2 方位投影示意图

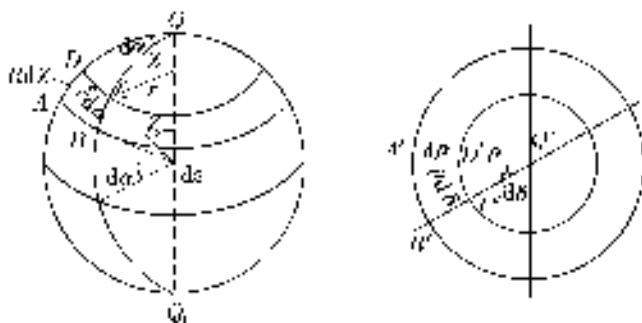


图 3-3 球面微分梯形在平面上的投影

直),故  $\mu_1$  和  $\mu_2$  为极值长度比  $a$  和  $b$ ,因而面积比为:

$$P=ab=\mu_1\mu_2=\frac{\rho d\rho}{R^2 \sin Z dZ}, \quad (3-5)$$

最大角度变形为:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right|. \quad (3-6)$$

以上是方位投影变形的一般公式。如果以  $\lambda$  和  $(90^\circ - \varphi)$  取代上列各式中的方位角  $\alpha$  和天顶距  $Z$ ,就可以得到正轴方位投影的各变形公式。以  $m$  和  $n$  分别表示经纬线长度比,则有:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{d\rho}{R d(90^\circ - \varphi)} = -\frac{d\rho}{R d\varphi} \\ n &= \frac{\rho d\lambda}{r d\lambda} = \frac{\rho}{R \sin(90^\circ - \varphi)} \\ P &= mn = -\frac{\rho d\rho}{R^2 \sin(90^\circ - \varphi) d\varphi} \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \left| \frac{m-n}{m+n} \right| \end{aligned} \right\}。 \quad (3-7)$$

由以上的变形公式可以看出:在非正轴投影中,它们是  $Z$  的函数,变形值随  $Z$  而变;在正轴投影中,它们是  $\varphi$  的函数,变形值随  $\varphi$  而变。同时还可以认识到,所有方位投影具有一个共同特点,即从投影中心到任一点的方位角保持正确。这也是方位投影命名的由来。

在前面讲的方位投影的一般公式中,还有一个最关键的问题,即投影半径  $\rho$  的具体函数形式尚未确定。这一问题,需要根据投影的变形性质来定,接下来将分别讨论之。

## 3.2 等面积方位投影

以等面积条件  $P=1$ ,确定方位投影的投影半径  $\rho$  的函数形式,即为等面积方位投影。由公式(3-5)有:

$$P=\mu_1\mu_2=\frac{\rho d\rho}{R^2 \sin Z dZ}=1,$$

右端移项有

$$\rho d\rho = R^2 \sin Z dZ,$$

等式两端积分有

$$\int \rho d\rho = R^2 \int \sin Z dZ,$$

$$\frac{\rho^2}{2} = C - R^2 \cos Z. \quad (3-8)$$

式中  $C$  为积分常数, 当  $Z=0$  时,  $\rho=0$ , 故

$$\frac{0}{2} = C - R^2,$$

即  $C=R^2$ 。

以此代入(3-8)式则有

$$\frac{\rho^2}{2} = R^2 - R^2 \cos Z,$$

$$\rho^2 = 2R^2 (1 - \cos Z) = 4R^2 \sin^2 \frac{Z}{2}.$$

开方得:

$$\rho = 2R \sin \frac{Z}{2}. \quad (3-9)$$

将上式  $\rho$  值代入(3-4)式, 可以求得本投影的长度比公式:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{d\rho}{R dZ} = \frac{2R \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{Z}{2} dZ}{R dZ} = \cos \frac{Z}{2} \\ \mu_2 &= \frac{\rho}{R \sin Z} = \frac{2R \sin \frac{Z}{2}}{R \cdot 2 \sin \frac{Z}{2} \cos \frac{Z}{2}} = \sec \frac{Z}{2} \end{aligned} \right\}; \quad (3-10)$$

面积比:

$$P = \cos \frac{Z}{2} \sec \frac{Z}{2} = 1;$$

由于  $\sec \frac{Z}{2} > \cos \frac{Z}{2}$ , 故:

$$a = \mu_2 = \sec \frac{Z}{2}, \quad b = \mu_1 = \cos \frac{Z}{2}.$$

最大角度变形:

$$\tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{\sec \frac{Z}{2}}{\cos \frac{Z}{2}}} = \sec \frac{Z}{2}.$$

现将等面积方位投影的公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned}
 \rho &= 2R \sin \frac{Z}{2} \\
 \delta &= \alpha \\
 x &= \rho \cos \delta = 2R \sin \frac{Z}{2} \cos \alpha \\
 y &= \rho \sin \delta = 2R \sin \frac{Z}{2} \sin \alpha \\
 b &= \mu_1 = \cos \frac{Z}{2} \\
 a &= \mu_2 = \sec \frac{Z}{2} \\
 P &= 1 \\
 \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) &= \sec \frac{Z}{2}
 \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

有了上列公式,可按本书 2.3 的方法预先确定投影中心点并将制图区内的经纬网点换算成为  $\alpha, Z$  值,然后代入 (3-11) 式即能计算出本投影的平面直角坐标值、长度变形和角度最大变形。至于正轴投影,只需用  $\lambda$  和  $(90^\circ - \varphi)$  取代上式的  $\alpha$  和  $Z$  就可以达到计算目的。

本投影的经纬网形状如图 3-4、图 3-5 和图 3-6 所示。

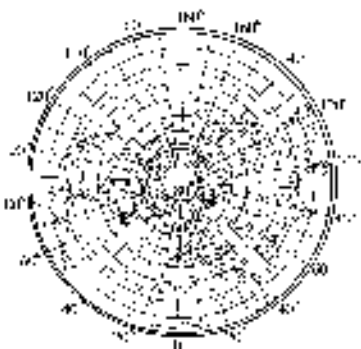


图 3-4 正轴等面积方位投影

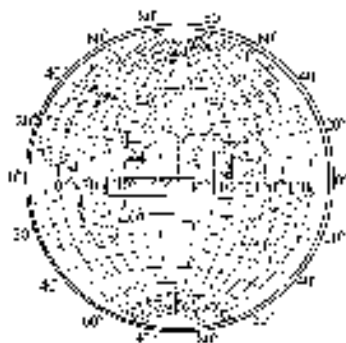


图 3-5 横轴等面积方位投影

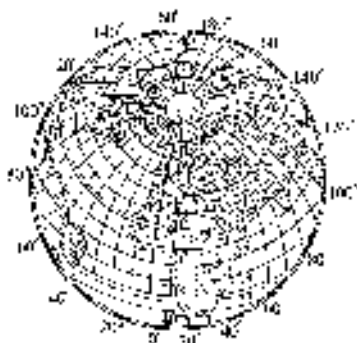


图 3-6 斜轴等面积方位投影

等面积方位投影为 J·H·兰勃特于 1772 年所创,故又称兰勃特等面积方位投影。



### 3.3 等距离方位投影

根据等距离条件  $\mu_1=1$  或  $m=1$ , 以确定方位投影  $\rho$  的函数形式, 则构成等距离方位投影。由公式(3-4)可以写出等距离条件为:

$$\mu_1 = \frac{d\rho}{RdZ} = 1,$$

即

$$d\rho = RdZ。$$

积分后得:  $\rho = RZ + C$ 。

式中  $C$  为积分常数, 因  $Z=0$  时,  $\rho=0$ , 故  $C=0$ , 因而

$$\rho = RZ。 \quad (3-12)$$

确定了  $\rho$  的具体形式后, 代入公式(3-4)和(3-5)可以得到长度比与面积比公式:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 1 \\ \mu_2 &= \frac{\rho}{R \sin Z} = \frac{Z}{\sin Z} \\ P &= \mu_1 \mu_2 = \frac{Z}{\sin Z} \end{aligned} \right\}。 \quad (3-13)$$

因为  $\mu_2$  恒大于  $\mu_1$ , 故  $\mu_2 = a, \mu_1 = b$ , 其最大角度变形公式为:

$$\tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{Z}{\sin Z}}。$$

现将等距离方位投影的公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= RZ \\ \delta &= \alpha \\ x &= \rho \cos \delta = RZ \cos \alpha \\ y &= \rho \sin \delta = RZ \sin \alpha \\ \mu_1 &= 1 \\ \mu_2 &= \frac{Z}{\sin Z} \\ P &= \frac{Z}{\sin Z} \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z} \\ \text{或 } \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) &= \sqrt{\frac{Z}{\sin Z}} \end{aligned} \right\}。 \quad (3-14)$$

有了上列公式,就可以参照前一节的方法和步骤,计算本投影的平面直角坐标值和长度与面积的变形。

等距离方位投影的经纬网的形状,如图 3-7、图 3-8 和图 3-9 所示。

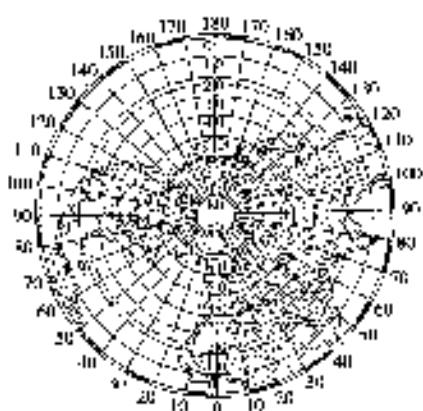


图 3-7 正轴等距离方位投影

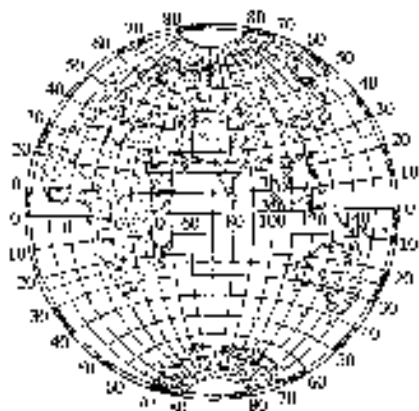


图 3-8 横轴等距离方位投影

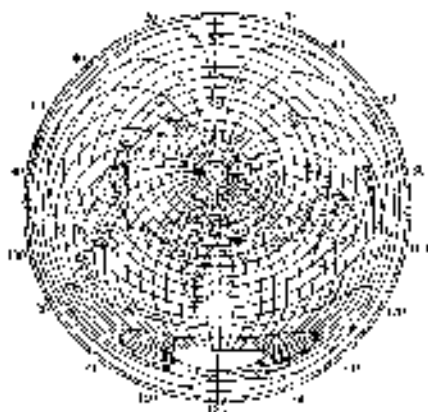


图 3-9 斜轴等距离方位投影

等距离方位投影为数学家波斯托(G. Postel)于 1581 年所创,故又名波斯托投影。

### 3.4 透视方位投影的种类和一般公式

透视方位投影是方位投影的特殊情况,它除了具有方位投影的一般特

点外,还具有地球面上的点与相应的投影点之间的透视关系。因此这种投影要有固定的视点。视点通常在垂直于投影面的一个地球直径或其延长线上,如图3-10所示。如果视点在这一直径上取不同位置,地面点A的透视(即投影)点A'也有不同的位置。例如视点取1,2,3,4各点,则A的投影分别为 $A'_1$ , $A'_2$ , $A'_3$ 和 $A'_4$ 。同时还可以看出,如果投影面F在固定轴上做垂直移动(与地球相切或相割),并不影响投影的描写形状,而仅是比例尺有变化而已。

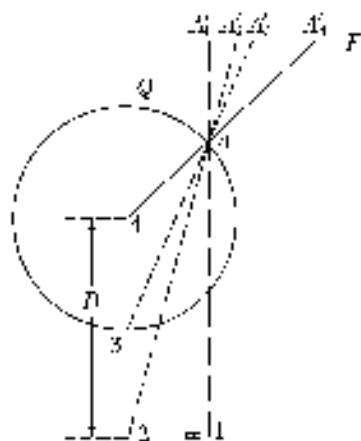


图3-10 透视投影示意图

透视方位投影根据视点O离球心的距离D的大小不同(即透视条件),可分为以下几种:

- (1) 视点在无穷远处,即 $D=\infty$ ,称为正射投影(图3-11(a))。
- (2) 视点在球面外, $R<D<\infty$ ,称为外心投影(图3-11(b))。
- (3) 视点在球面上,即 $D=R$ ,称为球面投影(图3-11(c))。
- (4) 视点在球心上,即 $D=0$ ,称为球心投影(或称日晷投影)(图3-11(d))。

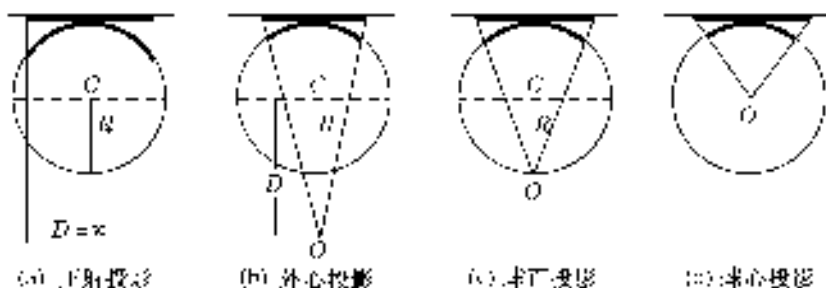


图3-11 透视方位投影分类示意图

根据投影面与地球面的关系位置不同(即投影中心点Q的纬度 $\varphi_0$ 的不同),透视方位投影又分为正轴( $\varphi_0=90^\circ$ )、斜轴( $0^\circ<\varphi_0<90^\circ$ )和横轴( $\varphi_0=0^\circ$ )投影。

现在推求透视方位投影的一般公式。如图3-12,设视点O离球心的

距离为  $D$ ,  $Q$  为新极点 (投影中心),  $A'$  为  $A$  点的投影; 以过  $Q$  点的经线  $PQ$  的投影  $P'Q'$  作为  $X$  轴, 过  $Q$  点与  $P'Q'$  垂直的直线作为  $Y$  轴; 大圆弧线  $QA$  投影为  $Q'A'$ , 即  $A$  点等高圈  $AP$  的投影半径  $\rho$ ;  $QA$  的方位角  $\alpha$  投影为  $\delta$ , 由于具有方位投影的特性, 故有

$$\delta = \alpha.$$

图 3-12 为了使线画关系清晰, 将投影面  $F$  与  $Q$  点之间移开一段距离。实际上投影面  $F$  切于  $Q$  点, 即  $QQ' = 0$ 。由于三角形  $Q'A'O$  与三角形  $qAO$  相似而有:

$$\frac{Q'A'}{qA} = \frac{Q'O}{qO},$$

或

$$Q'A' = \frac{Q'O \times qA}{qO}.$$

把  $Q'A' = \rho$ ,  $Q'O = R + D = L$ ,  $qA = R \sin Z$ ,  $qO = R \cos Z + D$ , 代入  $Q'A'$  式, 则得到等高圈投影半径  $\rho$  的表达式:

$$\rho = \frac{LR \sin Z}{D + R \cos Z}. \quad (3-15)$$

由此也可以得到直角坐标公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta = \frac{LR \sin Z \cos \alpha}{D + R \cos Z} \\ y &= \rho \sin \delta = \frac{LR \sin Z \sin \alpha}{D + R \cos Z} \end{aligned} \right\}. \quad (3-16)$$

根据公式 (3-4) 和透视关系, 可以求出透视方位投影的垂直圈长度比  $\mu_1$ 、等高圈长度比  $\mu_2$  和面积比  $P$  的一般公式:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{d\rho}{R dZ} = \frac{L(D \cos Z + R)}{(D + R \cos Z)^2} \\ \mu_2 &= \frac{\rho}{R \sin Z} = \frac{L}{(D + R \cos Z)} \\ P &= \mu_1 \mu_2 = \frac{L^2 (D \cos Z + R)}{(D + R \cos Z)^3} \end{aligned} \right\}. \quad (3-17)$$

最大角度变形公式为

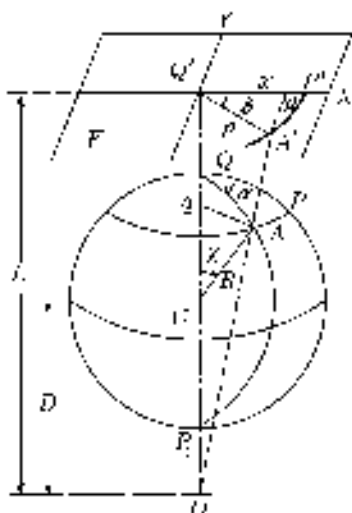


图 3-12 视点与相关点的关系

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b},$$

在  $\mu_1$  和  $\mu_2$  中,大者为  $a$ ,小者为  $b$ 。

### 3.5 正射投影

正射投影是视点位于无穷远处,即  $D=\infty$ ,故视线平行并垂直于投影平面。以  $D$  分别除(3-15)式的分子和分母,则

$$\rho = \frac{\frac{L}{D} R \sin Z}{1 + \frac{R}{D} \cos Z}。$$

由于  $D=\infty, L=R+D=\infty$ ,故  $\frac{L}{D}=1, \frac{R}{D}=0$ ,代入上式,得

$$\rho = R \sin Z。 \quad (3-18)$$

将  $\rho$  值代入平面直角坐标公式,则

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta = R \sin Z \cos \alpha \\ y &= \rho \sin \delta = R \sin Z \sin \alpha \end{aligned} \right\}。 \quad (3-19)$$

以公式(3-18)代入公式(3-4)和(3-5),可求得本投影的变形公式:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{d\rho}{R dZ} = \frac{R \cos Z dZ}{R dZ} = \cos Z \\ \mu_2 &= \frac{\rho}{R \sin Z} = 1 \\ P &= \mu_1 \mu_2 = \cos Z \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) &= \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{1}{\cos Z}} = \sqrt{\sec Z} \end{aligned} \right\}。 \quad (3-20)$$

现将正射投影的公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= R \sin Z \\ \delta &= \alpha \\ x &= R \sin Z \cos \alpha \\ y &= R \sin Z \sin \alpha \\ \mu_1 &= \cos Z \\ \mu_2 &= 1 \\ P &= \cos Z \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) &= \sqrt{\sec Z} \end{aligned} \right\}。 \quad (3-21)$$

正射投影的经纬网形状,如图 3-13、图 3-14 和图 3-15 所示。

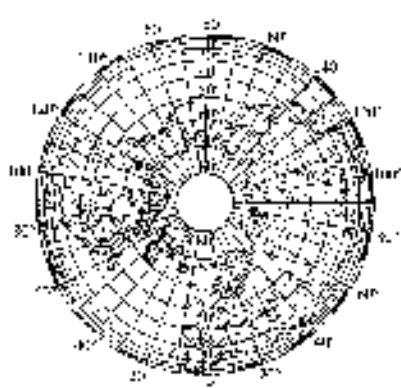


图 3-13 正射正透视投影

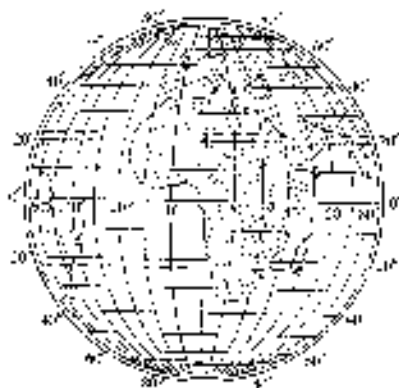


图 3-14 正射横透视投影

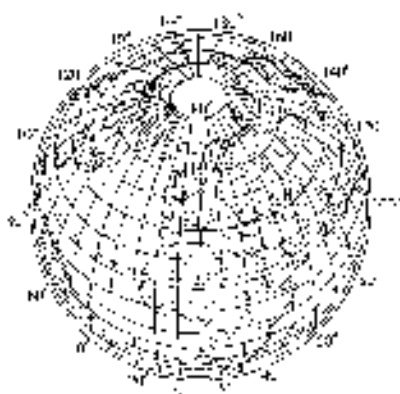


图 3-15 正射斜透视投影

正射投影由于变形很大,因此一般不用它制作地面地图。但这种投影有一个特点,即看起来像在远距离对某一原面拍照。根据这一特点常用以绘制月球图或其他星体图。

### 3.6 球面投影(等角方位投影)

球面投影就是视点在地球面上的透视方位投影,如图 3-16 可知  $D=R$ ,  $L=2R$ 。代入公式(3-15),则

$$\rho = \frac{2R^2 \sin Z}{R(1 + \cos Z)} = \frac{2R \sin Z}{1 + \cos Z}。$$

利用公式  $\tan \frac{Z}{2} = \frac{\sin Z}{1 + \cos Z}$  代入上式, 于是

$$\rho = 2R \tan \frac{Z}{2} \quad (3-22)$$

此式的简单几何意义如图 3-16。

有了投影半径  $\rho$  的具体公式, 就可根据它和公式 (3-4), (3-5) 求得垂直圈与等高圈的长度比  $\mu_1$  和  $\mu_2$ , 以及面积比  $P$ 。

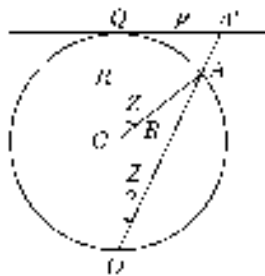


图 3-16 球面投影的几何示意

$$\mu_1 = \frac{d\rho}{R dZ} = \sec^2 \frac{Z}{2}, \quad (3-23)$$

$$\mu_2 = \frac{\rho}{R \sin Z} = \frac{2R \tan \frac{Z}{2}}{R \sin Z} = \frac{2 \tan \frac{Z}{2}}{2 \sin \frac{Z}{2} \cos \frac{Z}{2}} = \sec^2 \frac{Z}{2}. \quad (3-24)$$

比较 (3-23) 和 (3-24) 两式, 知  $\mu_1 = \mu_2$ 。而且在透视投影中垂直圈与等高圈为正交, 即主方向, 因而满足等角条件。由此证实球面投影属于等角方位投影。其面积比为:

$$P = \mu_1 \mu_2 = \sec^4 \frac{Z}{2}. \quad (3-25)$$

现在将球面投影的公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 2R \tan \frac{Z}{2} \\ \delta &= \alpha \\ x &= \rho \cos \delta = 2R \tan \frac{Z}{2} \cos \alpha \\ y &= \rho \sin \delta = 2R \tan \frac{Z}{2} \sin \alpha \\ \mu &= \mu_1 = \mu_2 = \sec^2 \frac{Z}{2} \\ P &= \mu^2 = \sec^4 \frac{Z}{2} \\ \omega &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3-26)$$

球面投影的经纬网形状, 如图 3-17, 图 3-18 和图 3-19 所示。

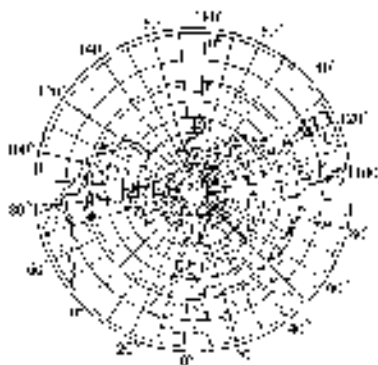


图 3-17 球面极透视投影

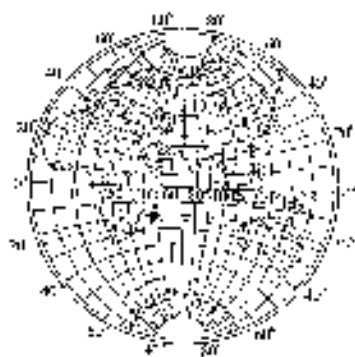


图 3-18 球面横透视投影图

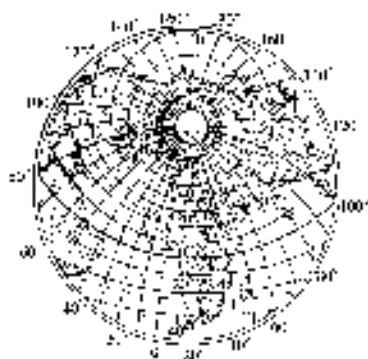


图 3-19 球面斜透视投影

由于球面投影具有等角性质,故有较多的用途,将在本章最后一节加以介绍。

### 3.7 球心投影(日晷投影)

视点位于球心的透视投影称为球心(中心)投影或日晷投影。由于视点在球心,则  $D=0, L=R$ (图 3-20),代入公式(3-15)得:

$$\rho = R \tan Z. \quad (3-27)$$

现在根据投影半径  $\rho$  求长度比和面积比公式:

$$\mu_1 = \frac{d\rho}{R dZ} = \frac{R d \tan Z}{R dZ} = \sec^2 Z, \quad (3-28)$$

$$\mu_2 = \frac{\rho}{R \sin Z} = \frac{R \tan Z}{R \sin Z} = \sec Z, \quad (3-29)$$



$$P = \mu_1 \mu_2 = \sec^3 Z. \quad (3-30)$$

现将球心投影的公式集中如下：

$$\left. \begin{aligned} \rho &= R \tan Z \\ \delta &= \alpha \\ x &= R \tan Z \cos \alpha \\ y &= R \tan Z \sin \alpha \\ \mu_1 &= \sec^2 Z \\ \mu_2 &= \sec Z \\ P &= \sec^3 Z \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \tan^2 \frac{Z}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (3-31)$$



图 3-20 球心投影示意图

表 3-1 球心投影的变形情况

$Z$	$\mu_1$	$\mu_2$	$P$	$\omega$
$0^\circ$	1.000	1.000	1.000	$0^\circ 00'$
$15^\circ$	1.072	1.035	1.110	$1^\circ 50'$
$30^\circ$	1.333	1.155	1.540	$8^\circ 14'$
$45^\circ$	2.000	1.414	2.828	$19^\circ 46'$
$60^\circ$	4.000	2.000	8.000	$38^\circ 57'$
$75^\circ$	14.928	3.864	57.678	$72^\circ 09'$
$90^\circ$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$180^\circ 00'$

由以上的变形公式和表 3-1 的数字可知，球心投影的各种变形都很大，所以通常不用它绘制一般地图。但是这种投影具有一个重要特点，即球面上任何大圆在此投影中都投影成为直线。这是因为所有大圆平面都通过球心（即视点），大圆平面延伸与投影面相交则成为直线。如图 3-21 中直线  $A'B'C'$  为大圆弧  $ABC$  在平面  $F$  上的投影。根据这一特点，常用球心投影编制航海图或航空图。在这种地图上连接两点间的直线即为大环航线——球面上两点间的最短距离。大环航线与各经线的交角随纬度的不同而变，航行时还需要将大环航线转绘到墨卡托投影的地图上以利于确定分段的航向（在本书第 4 章将进一步说明）。

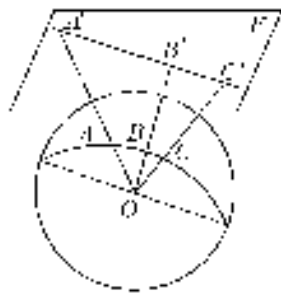


图 3-21 球面大圆弧在球心投影中为直线

球心投影的经纬网形状如图 3-22、图 3-23 和图 3-24 所示。

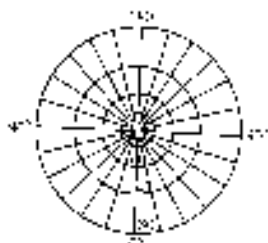


图 3-22 球心正透  
视投影

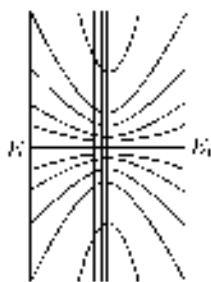


图 3-23 球心横透  
视投影

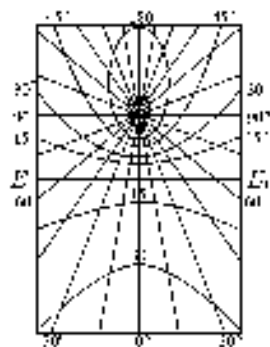


图 3-24 球心斜透  
视投影

## 3.8 方位投影的分析和应用

### 3.8.1 变形分析

方位投影是一种古老的投影,发展到现在已有十多种,前面所介绍的只是其中最常见和使用较为广泛的五种。这五种方位投影的正轴经纬网形状比较如图 3-25 所示。由此可以知道,方位投影的差别是取决于纬圈或等高圈投影半径  $\rho$  的形式,而  $\rho$  的具体形式则又取决于变形性质或透视条件 ( $D$  的大小)。

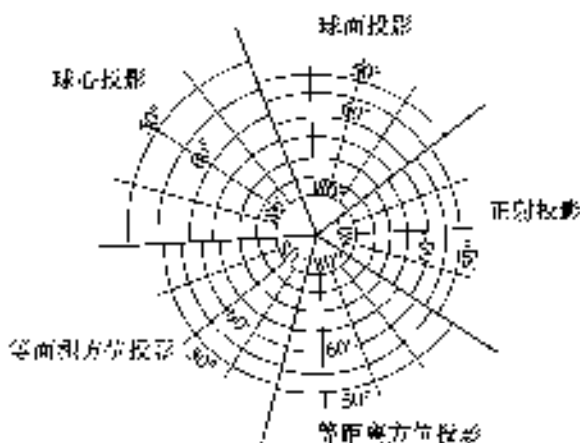


图 3-25 五种方位投影经纬网比较

根据方位投影长度比、面积比和角度最大变形的公式来看,在正轴投影中它们是纬度  $\varphi$  的函数,在斜轴和横轴投影中它们是天顶距  $Z$  的函数。因此等变形线是同心圆,即在正轴投影中与纬圈形状一致,在斜轴和横轴投影中与等高圈形状一致。根据这一特点,方位投影适用于制图区域的轮廓近于圆形的地区。就制图区域的地理位置而言,在两极地区宜用正轴投影,在赤道附近宜用横轴投影,其余地区宜用斜轴投影。

本章介绍的五种方位投影中,从变形性质讲包括了等角投影、等面积投影和任意投影,任意投影中有一个是等距离投影。表 3-2、表 3-3 和表 3-4 分别列出了等角、等面积和等距离三种方位投影的具体变形情况,可供分析比较。

表 3-2 等角方位投影的变形情况

$Z$	$\mu_1 = \mu_2$	$P$	$\omega$
$0^\circ$	1.000	1.000	$0^\circ$
$15^\circ$	1.017	1.035	$0^\circ$
$30^\circ$	1.072	1.149	$0^\circ$
$45^\circ$	1.172	1.373	$0^\circ$
$60^\circ$	1.333	1.778	$0^\circ$
$75^\circ$	1.589	2.524	$0^\circ$
$90^\circ$	2.000	4.000	$0^\circ$

表 3-3 等面积方位投影的变形情况

$Z$	$\mu_1$	$\mu_2$	$P$	$\omega$
$0^\circ$	1.000	1.000	1	$0^\circ 00'$
$15^\circ$	0.991	1.009	1	$0^\circ 59'$
$30^\circ$	0.966	1.035	1	$3^\circ 58'$
$45^\circ$	0.924	1.082	1	$9^\circ 04'$
$60^\circ$	0.866	1.155	1	$16^\circ 26'$
$75^\circ$	0.793	1.260	1	$26^\circ 17'$
$90^\circ$	0.707	1.414	1	$38^\circ 57'$

表 3-4 等距离方位投影的变形情况

$Z$	$\mu_1$	$\mu_2$	$P$	$\omega$
$0^\circ$	1	1.000	1.000	$0^\circ 00'$
$15^\circ$	1	1.012	1.012	$0^\circ 39'$
$30^\circ$	1	1.047	1.047	$2^\circ 39'$
$45^\circ$	1	1.111	1.111	$6^\circ 01'$
$60^\circ$	1	1.209	1.209	$10^\circ 52'$
$75^\circ$	1	1.355	1.355	$17^\circ 21'$
$90^\circ$	1	1.571	1.571	$25^\circ 39'$

3.8.2 应用

由于各种方位投影具有不同的特点,因而各有不同的用途。下面介绍一些应用实例。

1. 等角方位投影

由表 3-2 知,这种投影无角度变形,长度与面积的变形在中心点附近较小,离中心点愈远愈大,其等变形线是以极点为圆心的同心圆。故这一投影适于圆形的小的制图区域。因此,正轴方位投影常用于两极地区的航空图或海图。第二次世界大战后,美国编制的《世界 1:100 万航空图》,赤道至南北纬  $80^\circ$  用等角圆锥投影,南北纬  $80^\circ$  至两极的范围即采用等角方位投影。前苏联编制的《世界海图集》中,两极地区的图幅使用割方位投影,割纬线为  $\varphi_k=70^\circ$ 。在通用横墨卡托(UTM)投影(见本书 9.3)中,规定北纬  $84^\circ$  至北极和南纬  $80^\circ$  至南极间的图幅采用“通用极球面系”(Universal Polar Sterographic System)即正轴割方位投影。此外,正轴方位投影还常用于南北半球的气象-气候图,图 3-26 是用这一投影绘制的南半球冬、夏季的主要锋区。

横轴等角方位投影使用得较少,斜轴等角方位投影常用于世界的某一大陆或大区域的小比例尺地图,如航空路线图或某种自然地理图等。

2. 等面积方位投影

由于本投影保持面积正确,适用于表示具有面积对比关系的地图。许多中外世界地图集中,常用横轴等面积方位投影绘制东、西半球图。东半球的投影中心为东经  $70^\circ$  与赤道的交点,西半球的投影中心为西经  $110^\circ$  与赤道的交点,两个半球以赤道相连(图 3-27)。横轴等面积方位投影也适于绘制非洲大陆地图,中心点在东经  $20^\circ$  与赤道的交点上。

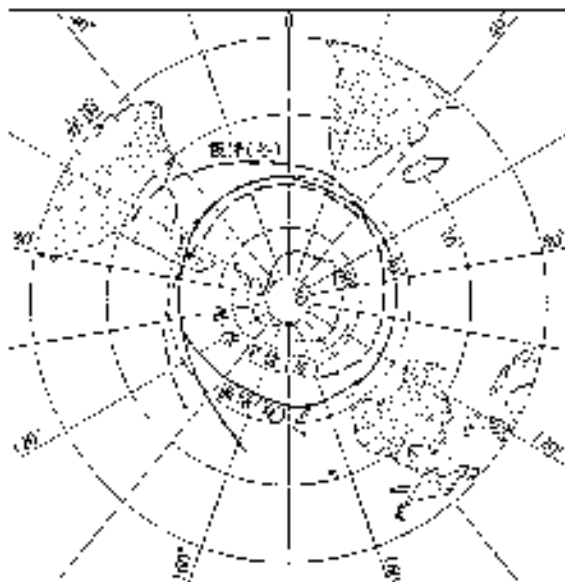


图 3-26 南半球冬季和夏季的主要锋区

(引自 R. G. 巴里、R. J. 乔利著, 施尚文等译《大气、天气和气候》一书)

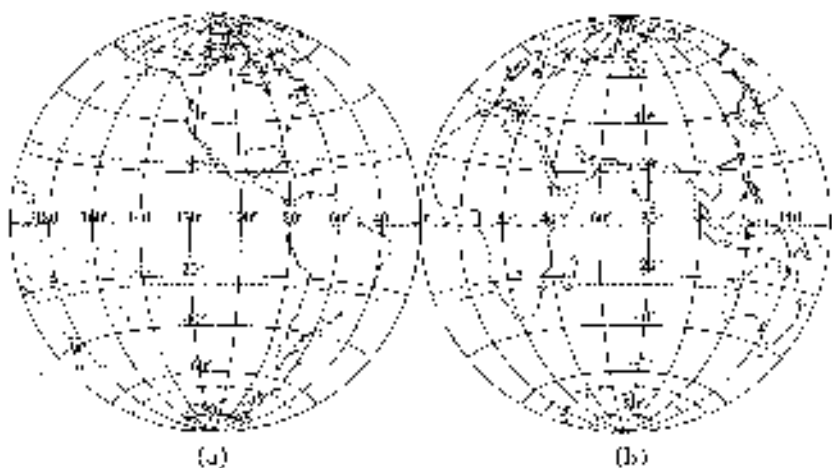


图 3-27 等积横轴方位投影半球图((a)西半球,(b)东半球)

斜轴等面积方位投影应用较广泛,常用以编绘非洲以外的各大陆地图。各洲的投影中心通常采用下列位置:

亚洲图  $\varphi_0 = 44^\circ \text{N}$   $\lambda_0 = 90^\circ \text{E}$

欧洲图	$\varphi_0 = 52.5^\circ\text{N}$	$\lambda_0 = 20^\circ\text{E}$
北美洲图	$\varphi_0 = 45^\circ\text{N}$	$\lambda_0 = 100^\circ\text{W}$
南美洲图	$\varphi_0 = 20^\circ\text{S}$	$\lambda_0 = 60^\circ\text{W}$

斜轴等面积方位投影现常用作中国政区图的数学基础(南海诸岛不作插图),对于反映我国版图的全貌、同四邻的关系位置以及正确的面积对比等都比较好。投影中心定为  $\varphi_0 = 30^\circ\text{N}$ ,  $\lambda_0 = 105^\circ\text{E}$ , 投影范围由赤道至北纬  $55^\circ$  和由东经  $70^\circ$  至东经  $140^\circ$ 。其配置略图及经纬网形状如图 3-28。

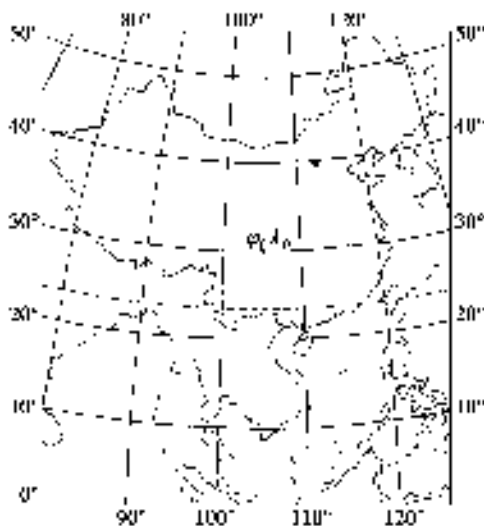


图 3-28 等面积斜方位投影用于中国全图的概略形状

### 3. 等距离方位投影

由于等距离投影的变形大小介于等角与等面积之间,因而等距离方位投影的应用比较广泛。许多世界地图集中,常用正轴等距离方位投影绘制两极地图,用横轴等距离方位投影绘制东西半球地图。

斜轴等距离方位投影的使用更为广泛。在世界地图集中常用它绘制陆半球和水半球地图。在选择投影中心时,应使前者集中显示地球上的陆地(图 3-29),使后者显示地球上最大范围的水域(图 3-30)。由于这一投影具有从中心点至周围任一点保持方位角与距离都正确的优点,对于以航空中心站、气象中心站、地震观测站等为中心,编制一定范围的地图具有很重要的意义。

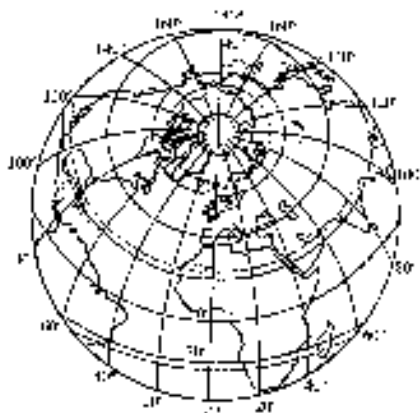


图 3-29 陆半球图

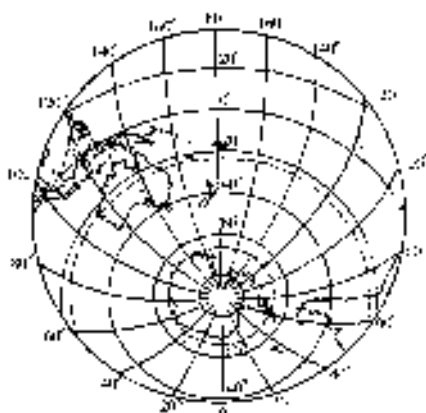


图 3-30 水半球图

### 3.8.3 经纬网的构成

在平面上建立经纬网作为地图的数学基础,是研究地图投影的首要目的。方位投影的经纬网都可以用几何法来绘制,但是几何法绘正轴经纬网比较简单,绘横轴或斜轴经纬网则比较繁琐。下面介绍几种简便易行的方法。

#### 1. 正轴方位投影经纬网

正轴方位投影经纬网的构成,最简单的方法是纬圈投影半径法。此法是先以  $90^\circ - \varphi$  取代各方位投影的投影半径公式中的  $Z$ ,按地图主比例尺将地球半径  $R$  缩小,并按一定纬差计算某一方位投影的  $\rho$  值,然后以各  $\rho$  值为半径在图纸上画同心圆即为纬线,再于最外一圈纬线上按与纬差相等的经差等分此圆周,过纬圈的共同中心连接外圈上的对应点,绘成直线即为经线,最后注上经纬度度数,于是一幅某一正轴方位投影的经纬网便绘成了。

表 3-5 是按 1:1 000 万比例尺和纬差  $5^\circ$  计算本章所讲的五种方位投影纬圈投影半径  $\rho$  值。应用时还可以根据所需要的比例尺再缩小(或放大),纬差可选用  $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ \dots$ 。例如,根据上述方法,利用表 3-5 的  $\rho$  值,按缩小后的比例尺为 1:30 000 万和经纬差  $15^\circ$  绘的球面投影正轴经纬网如图 3-31 所示。

表 3-5 纬圈投影半径

$\begin{matrix} \rho \\ \varphi \end{matrix}$	等积 $\rho(\text{cm})$	等距 $\rho(\text{cm})$	球面 $\rho(\text{cm})$	正射 $\rho(\text{cm})$	球心 $\rho(\text{cm})$
90°	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
85°	5.558	5.560	5.563	5.553	5.574
80°	11.105	11.119	11.148	11.063	11.234
75°	16.632	16.679	16.775	16.489	17.071
70°	22.126	22.239	22.467	21.790	23.188
65°	27.575	27.799	28.248	26.925	29.708
60°	32.979	33.358	34.142	31.855	36.783
55°	38.316	38.918	40.175	36.542	44.610
50°	43.580	44.478	46.377	40.952	53.459
45°	48.761	50.038	52.779	45.050	63.710
40°	53.850	55.597	59.417	48.805	75.927
35°	58.836	61.157	66.331	52.188	90.987
30°	63.710	66.717	73.566	55.174	110.349
25°	68.463	72.277	81.175	57.741	136.626
20°	73.085	77.836	89.220	59.868	175.042
15°	77.568	83.396	97.773	61.539	237.769
10°	81.904	88.956	106.918	62.742	361.317
5°	86.084	94.516	116.759	63.467	728.209
0°	90.099	100.075	127.420	63.710	$\infty$

注:地球半径  $R=6\,371\text{ km}$ ,比例尺为  $1:1\,000\text{ 万}$ , $Z$  须由  $90^\circ$  减去表中  $\varphi$ 。

2. 斜轴、横轴方位投影经纬网

斜轴、横轴方位投影经纬网的构成,不能使用前面讲的以投影半径  $\rho$  绘同心圆的方法。因为斜轴、横轴投影中心不是地球两极之一,投影半径  $\rho$  是天顶距  $Z$  的函数,如果按正轴展绘经纬网的方法,则绘出的是等高圈和垂直圈构成的网格,这种网格不能用作地图的数学基础。因此需要按本书2.3的方法,将地理坐标换算成为球面极坐标,然后用投影公式计算直角坐标  $x,y$  值,才能在平面上展绘出经纬网。斜轴与横轴方位投影的投影半径  $\rho$  和直角坐标  $x,y$  的公式完全一样,所不同的是投影中心不同,即新极点  $Q(\varphi_0,\lambda_0)$  和依此所计算的  $Z,\alpha$  值不同。现分别加以说明。

(1) 斜轴方位投影经纬网的构成。

第一步先确定制图区域和投影中心点。现仍以编制中国全图为例,确定投影中心  $Q$  的  $\varphi_0=30^\circ\text{N},\lambda_0=105^\circ\text{E}$ ,并按  $\Delta\lambda=\Delta\varphi=5^\circ$  将制图区域所需



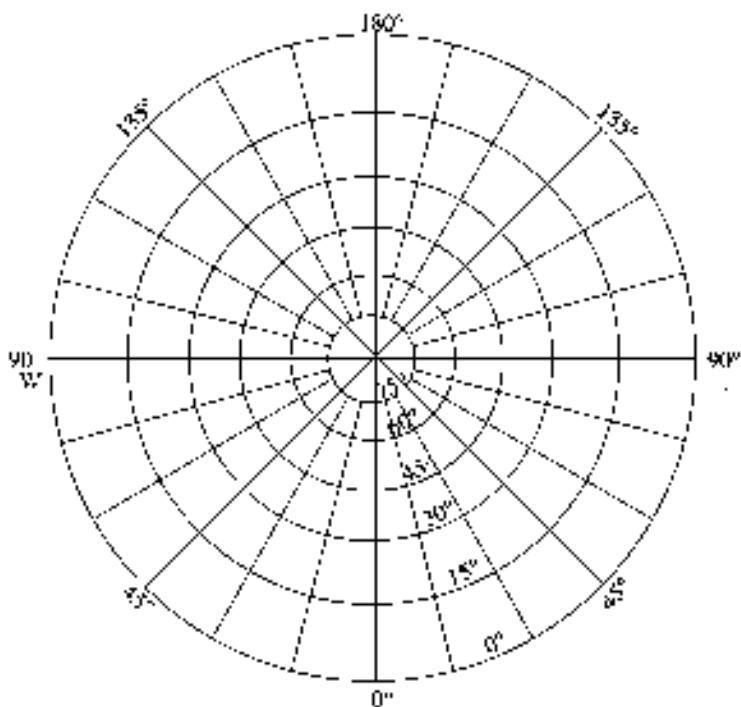


图 3-31 正轴球面投影经纬网

(1 : 30 000 万)

要的经纬网点用公式(2-30)换算成为  $Z, \alpha$  值,并以表 2-1 的形式记录。表 2-1 中  $Z, \alpha$  值可用于同一地区不同性质(等角、等面积和等距离)的斜方位投影。

第二步,确定具体投影、地图主比例尺和计算直角坐标。例如决定使用等距离斜方位投影,主比例尺为 1 : 1 000 万。先将地球半径按主比例尺缩小为  $R_c = R/\mu_0 = 63.710$  cm,于是

$$\rho_{cm} = R_c Z,$$

这里须注意,天顶距  $Z$  在上式中应以弧度表示。

由公式(3-14)知

$$x = \rho_{cm} \cos \alpha,$$

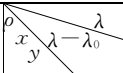
$$y = \rho_{cm} \sin \alpha.$$

用以上三式计算以 cm 计的  $\rho, x, y$  值按表 3-6 的形式记载(未全部列出)备用。

第三步是展绘经纬网。将制图区域所需要的各点的直角坐标值计算完

成之后,便可以展绘地图的经纬网。表 3-6 中的坐标值是以投影中心为原点计算的,因此中心点以南的  $x$  坐标为负值。为了避免负值对展绘的不便,应将原点向南移至赤道与中央经线( $\lambda_0=105^\circ$ )的交点,这时所有的  $x$  值都要加上 33.358 cm,即由中心点至赤道的天顶距  $Z(Z=30^\circ)$  的投影半径之长度(图 3-32)。表 3-6 中  $x$  值之所以未用移轴后的数值,目的是让读者对这一问题更加清楚。

表 3-6 等距离斜方位投影的  $\rho, x, y$  记录格式

$\varphi$		105°	110°	115°	120°	...
		0°	5°	10°	15°	...
0°	$\rho$	33.358	33.776	34.999	36.945	...
	$x$	-33.358	-33.270	-33.006	-32.564	
	$y$	0.000	5.821	11.640	17.451	
5°	$\rho$	27.799	28.289	29.713	31.944	...
	$x$	-27.799	-27.706	-27.426	-26.959	
	$y$	0.000	5.717	11.431	17.136	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
25°	$\rho$	5.560	7.430	11.315	15.788	...
	$x$	-5.560	-5.455	-5.141	-4.616	
	$y$	0.000	5.044	10.080	15.098	
30°	$\rho$	0.000	4.814	9.627	14.434	...
	$x$	0.000	0.102	0.421	0.948	
	$y$	0.000	4.813	9.617	14.403	
35°	$\rho$	5.560	7.271	10.894	15.106	...
	$x$	5.560	5.664	5.978	6.502	
	$y$	0.000	4.558	9.107	13.635	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
55°	$\rho$	27.799	28.082	28.915	30.262	...
	$x$	27.799	27.888	28.159	28.622	
	$y$	0.000	3.290	6.569	9.827	

$\rho, x, y$  的单位: cm

展绘时,如果是正式编绘地图最好使用坐标展点仪,在一般情况下,使用丁字尺、三角板、分规等工具也可达到一定精度。手工展绘的关键是使两坐标轴严格垂直,其次是精确量取坐标值和刺点(图 3-32)。最后用曲线板连成经纬网并绘出内图廓,如图 3-33。

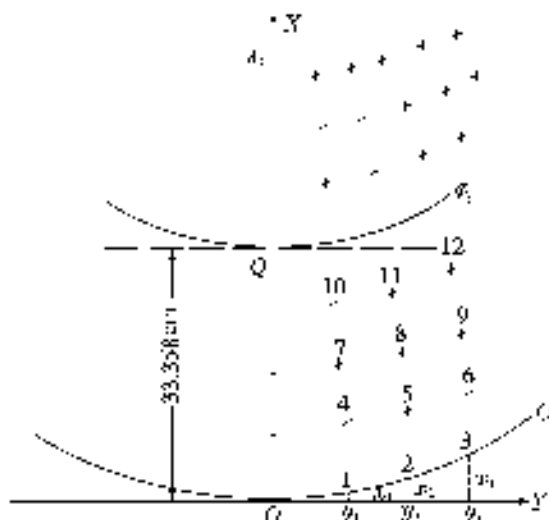


图 3-32 展绘斜轴经纬网节点示意

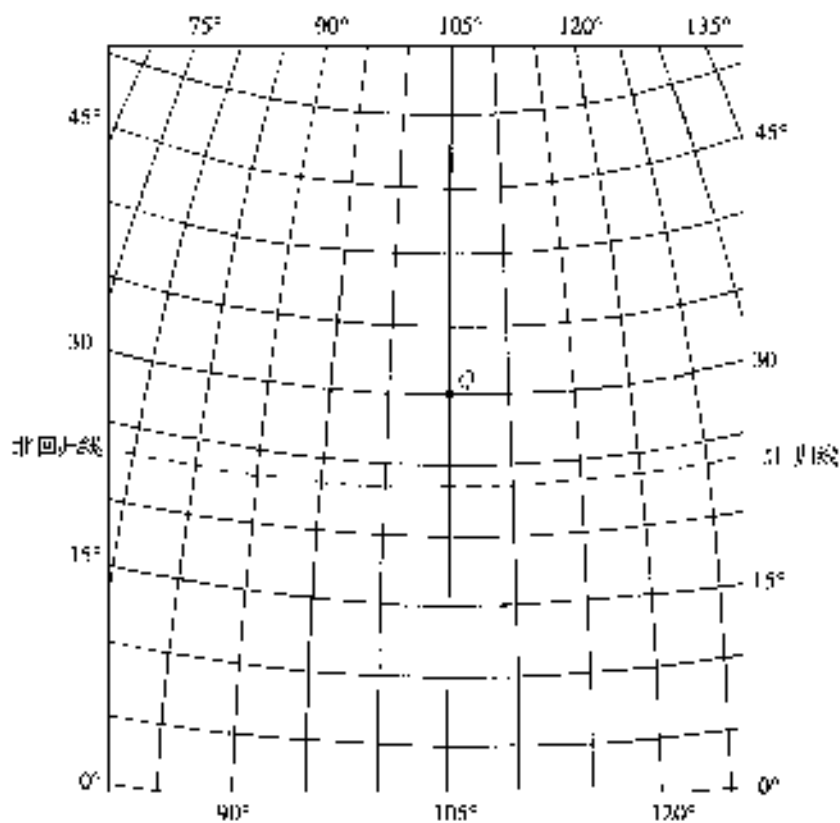


图 3-33 连成经纬网及图廓

(2) 横轴方位投影经纬网的构成。

横轴方位投影经纬网的构成,其步骤与斜轴投影基本相同。本书 2.3 的表 2-2 是按绘制东半球地图采用横系方位投影所定的投影中心并计算的  $Z, \alpha$  值,若将  $Z, \alpha$  值全部计算出,可供用于东半球的等角、等面积和等距离的三种横系方位投影使用。

现以等面积横方位投影为例,确定主比例尺为  $1:50\,000$  万,  $\Delta\lambda=\Delta\varphi=10^\circ$ 。首先将地球半径按主比例尺缩小,令

$$R_2=\frac{2R}{\mu_0}=25.484\text{ cm},$$

于是

$$\begin{aligned}\rho_{\text{cm}} &= R_2 \sin \frac{Z}{2}, \\ x &= \rho_{\text{cm}} \cos \alpha, \\ y &= \rho_{\text{cm}} \sin \alpha.\end{aligned}$$

由以上三式计算的  $\rho, x$  和  $y$  值,用表 3-7 的形式记录,然后进行经纬网的展绘。展绘的方法,先以  $90^\circ$  的  $\rho_{\text{cm}}=18.020\text{ cm}$  绘一个圆,过圆心  $Q$  作两个互相垂直的直径。则水平直径代表赤道的投影并作  $y$  轴,垂直直径代表中央经线( $\lambda_0=70^\circ$ )的投影并作  $x$  轴。接着用赤道上(或中央经线上)的  $10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$  的  $\rho_{\text{cm}}$  为半径,以  $Q$  为圆心在正负坐标轴上各定出 8 个点,即为  $x=0$  时  $10^\circ$  经差的各  $y$  值和  $y=0$  时  $10^\circ$  纬差的各  $x$  值(图 3-34)。

表 3-7 等面积横方位投影的  $\rho, x, y$  记录格式

$\varphi$	<div><div><div><math>\lambda</math></div><div><math>\rho</math></div><div><math>x</math></div><div><math>y</math></div></div><div><math>\lambda-\lambda_0</math></div></div>	$70^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$	...	$160^\circ$
		$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	...	$90^\circ$
$0^\circ$	$\rho$	0.000	2.221	4.425	...	18.020
	$x$	0.000	0.000	0.000		0.000
	$y$	0.000	2.221	4.425		18.020
$10^\circ$	$\rho$	2.221	3.129	4.921	...	18.020
	$x$	2.221	2.229	2.255		3.129
	$y$	0.000	2.196	4.374		17.746
$20^\circ$	$\rho$	4.425	4.921	6.163	...	18.020
	$x$	4.425	4.442	4.491		6.163
	$y$	0.000	2.119	2.220		16.933
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$90^\circ$	$\rho$	18.020	18.020	18.020	...	18.020
	$x$	18.020	18.020	18.020		18.020
	$y$	0.000	0.000	0.000		0.000

$\rho, x, y$  的单位:cm

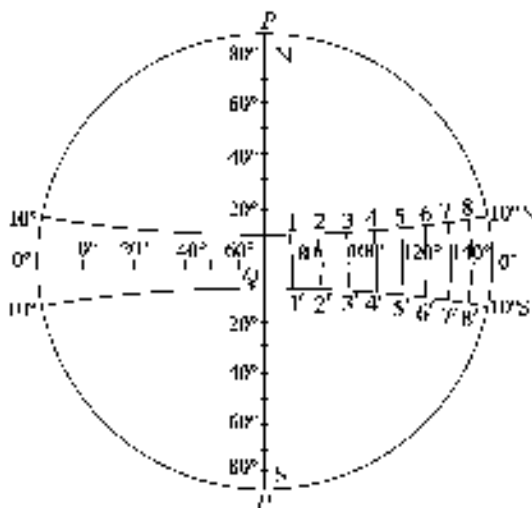


图 3-34 横轴方位投影展绘经纬网示意

其余各点按相应的  $x, y$  值展绘,展绘完成的经纬网形状如图 3-27(b) (该图的经差、纬差为  $20^\circ$ ) 所示。

为了使读者概念清楚,在前面讨论斜轴和横轴方位投影中是采取球面坐标换算和直角坐标的计算,分两步来阐述的。在实际工作中只要确定了投影中心点的  $\varphi_0, \lambda_0$ , 完全可以利用有关公式直接由地理坐标计算直角坐标  $x, y$  值。现仅以等角方位投影(其他方位投影同)为例加以说明。由公式(3-26)知等角方位投影中,

$$\rho = 2R \tan \frac{Z}{2},$$

$$x = 2R \tan \frac{Z}{2} \cos \alpha = 2R \frac{\sin Z}{1 + \cos Z} \cos \alpha,$$

$$y = 2R \tan \frac{Z}{2} \sin \alpha = 2R \frac{\sin Z}{1 + \cos Z} \sin \alpha.$$

将公式(2-27)、(2-28)和(2-29)代入  $x, y$  式,并令  $\lambda_0 = 0$ ,则得到以经纬度表示的直角坐标公式:

$$x = \frac{2R \sin Z \cos \alpha}{1 + \cos Z} = \frac{2R (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda)}{1 + (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda)}, \quad (3-32)$$

$$y = \frac{2R \sin Z \sin \alpha}{1 + \cos Z} = \frac{2R \cos \varphi \sin \lambda}{1 + (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda)}. \quad (3-33)$$

利用公式(3-32)和(3-33)借助函数计算器(或微机)便可以非常迅速地求得所需各点的  $x, y$  值,而不必预先计算  $Z, \alpha$  值。

## 复习思考与计算题

1. 方位投影的一般公式是什么,为什么极坐标  $\delta=\alpha$ ?
2. 等角、等面积和等距离方位投影的建立条件是什么?它们的变形分布规律如何,各有哪些用途?
3. 在透视方位投影中,地球面上同一点在何种投影中  $\rho$  为最长或最短?试绘图说明。
4. 利用正轴等角方位投影公式,计算北半球经纬差分别为  $10^\circ$  的格网点的  $x, y$  值及变形值,并在计算机上绘制经纬格网。

# 第 4 章 圆柱投影

## 4.1 圆柱投影的种类和基本原理

假设一圆柱面与地球面相切或相割,地球子午圈平面延伸与圆柱面相交,则成为圆柱面上的一组母线;纬圈平面延伸与圆柱面相交,则在圆柱面上形成与母线垂直的一组平行圆。沿圆柱面一条母线切开展平,便得到两组互相垂直的直线,即代表经纬线的投影。各经线的间距与相应经差成正比;纬线的间距则与投影性质(等角、等积或任意)和投影条件(透视、切或割等)相关。图 4-1 是中心透视圆柱投影的形状。

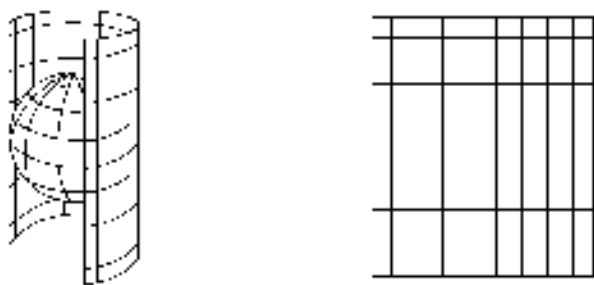


图 4-1 中心透视圆柱投影

圆柱投影的分类也同其他投影一样,有正轴、横轴与斜轴投影;在性质上有等角、等面积和任意投影;此外还有透视圆柱投影。

根据前面的阐述和圆柱投影的定义(见本书 2.4.2),可以写出圆柱投影的一般方程式:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\varphi) \\ y &= c\lambda \end{aligned} \right\}。 \quad (4-1)$$

由(4-1)式知,在圆柱投影中需要解决两个问题,一是确定  $x$  的函数形式,一是确定常数  $c$ 。由于确定这两个问题的方法不同,所以圆柱投影也有好多种。

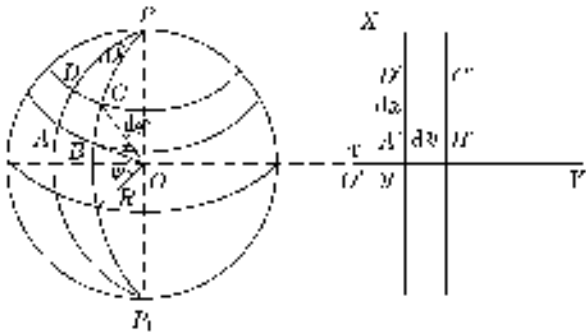


图 4-2 圆柱投影中球面与平面上的微分线段

现在先求出圆柱投影变形的一般公式。

如图 4-2,在地球面上微分弧 $\widehat{AB}=r\mathrm{d}\lambda$ ,微分弧 $\widehat{AD}=\widehat{BC}=R\mathrm{d}\varphi$ 。在投影面上:微分线段 $A'B'=\mathrm{d}y$ ,微分线段 $A'D'=\mathrm{d}x$ 。由此则有:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{A'D'}{\widehat{AD}} = \frac{\mathrm{d}x}{R\mathrm{d}\varphi} \\ n &= \frac{A'B'}{\widehat{AB}} = \frac{\mathrm{d}y}{r\mathrm{d}\lambda} = \frac{c\mathrm{d}\lambda}{r\mathrm{d}\lambda} = \frac{c}{r} \\ P &= m \cdot n = \frac{\mathrm{d}x}{R\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{c}{r} = \frac{c\mathrm{d}x}{R^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi} \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \left| \frac{m-n}{m+n} \right| \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

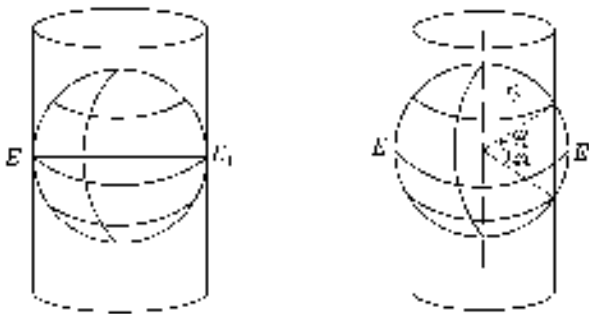


图 4-3 切圆柱与割圆柱投影示意

在上列公式中,常数 $c$ 是根据切圆柱还是割圆柱投影来确定。在切圆柱投影中,圆柱面切于赤道(图 4-3 左图),则 $\varphi_0=0^\circ$ ,于是



$$n_0 = \frac{c}{r_0} = \frac{c}{R \cos \varphi_0} = 1,$$

因此,

$$c = R \cos 0^\circ, \text{ 即 } c = R.$$

在割圆柱投影中,圆柱面割于赤道南北两条同名纬线  $\pm \varphi_k$  上(图 4-3 右图),则

$$n_k = \frac{c}{r_k} = 1,$$

所以,

$$c = r_k = R \cos \varphi_k.$$

在一般公式(4-1)中,还有圆柱投影的一个关键问题,即  $x$  的函数形式未定,它取决于圆柱投影的变形性质。下面分别进行讨论。

## 4.2 等角圆柱投影(墨卡托投影)

### 4.2.1 投影公式

根据等角条件经纬线投影后长度比相等,即  $m = n$ ,以此确定  $x$  的函数形式,则成为等角圆柱投影。由公式(4-2)则有

$$\frac{dx}{R d\varphi} = \frac{c}{r},$$

或

$$dx = \frac{c}{\cos \varphi} d\varphi,$$

积分得

$$\int dx = c \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = c \ln(\sec \varphi + \tan \varphi) + K = c \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + K,$$

即

$$x = c \ln \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + K,$$

$K$  是积分常数,当  $\varphi = 0$  时,  $x = 0$ , 故  $K = 0$ , 于是

$$x = c \ln \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (4-3)$$

现将等角圆柱投影的公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} x &= c \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \\ y &= c\lambda \\ m &= n = \frac{c}{r} \\ P &= n^2, \omega = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

在上列公式中,若以  $R$  取代  $c$ ,则为切圆柱投影;以  $r_k$  取代  $c$ ,则为割圆柱投影。

等角圆柱投影为西欧地图学家墨卡托(G. Mercator 1512 年~1594 年)首先用于世界航海图,故又称墨卡托投影。四个多世纪以来,世界各国都用它作为海图的数学基础。当代常用于较大比例尺分幅海图或赤道附近的航空图。在实用中一般以地球椭球体进行投影,这时应以  $M$  和  $N \cos \varphi$  代替公式(4-2)中的  $R$  和  $r$ ,则

$$m = \frac{dx}{M d\varphi}, \quad n = \frac{c}{N \cos \varphi}.$$

根据等角条件有

$$\frac{dx}{M d\varphi} = \frac{c}{N \cos \varphi}, \quad (4-5)$$

将公式(1-7)和(1-8)的  $M, N$  代入上式并加以整理,则

$$dx = c \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - c \frac{e_1^2 \cos \varphi}{1 - e_1^2 \sin \varphi} d\varphi,$$

积分得

$$\int dx = c \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - c \int \frac{e_1^2 \cos \varphi}{1 - e_1^2 \sin \varphi} d\varphi,$$

整理后得

$$x = c \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{4}) + c \frac{e_1}{2} \ln(1 - e_1 \sin \varphi) - c \frac{e_1}{2} \ln(1 + e_1 \sin \varphi) + \ln K,$$

或

$$x = c \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \left( \frac{1 - e_1 \sin \varphi}{1 + e_1 \sin \varphi} \right)^{\frac{e_1}{2}} + K,$$

式中  $K$  为积分常数,如以赤道作为  $Y$  轴,当  $\varphi = 0$  时,  $x = 0$ , 则  $K = 0$ , 于是

$$x = c \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \left( \frac{1 - e_1 \sin \varphi}{1 + e_1 \sin \varphi} \right)^{\frac{e_1}{2}},$$

令

$$U = \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \left( \frac{1 - e_1 \sin \varphi}{1 + e_1 \sin \varphi} \right)^{\frac{e_1}{2}},$$

则

$$x = c \ln U. \quad (4-6)$$

现在将以地球椭球面为投影原面的等角圆柱投影公式(按切圆柱)集中如下:

$$\left. \begin{aligned} c &= a_e \\ x &= a_e \ln U \\ y &= a_e \lambda \\ \omega &= 0 \\ m &= n = a_e / r \\ P &= mn = n^2 \end{aligned} \right\}, \quad (4-7)$$

式中:  $a_e$  是地球椭球体长半径;  $U$  值载于本书附表 2。

墨卡托投影的  $x$  坐标, 有一个特殊的名称叫做“经长”(或渐长纬度), 常以  $D$  表示。按切圆柱投影

$$D = x = a_e \ln U. \quad (4-6a)$$

为了航海中应用方便, 多以海里(1 海里等于赤道上 1 弧分)计算, 则

$$2\pi a_e = 360 \times 60 (\text{海里}),$$

$$a_e = 21\,600 / 2\pi = 3\,437.747 (\text{海里}) = \rho' = 3\,437.347',$$

于是

$$D' = a_e \ln U = \rho' \ln U (\text{海里}). \quad (4-8)$$

在航空上常用度表示, 故有

$$D^\circ = \rho^\circ \ln U. \quad (4-8a)$$

将地球作为球体, 则(4-8)、(4-8a)两式变为:

$$\left. \begin{aligned} D' &= \rho' \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \\ D^\circ &= \rho^\circ \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \end{aligned} \right\}^\circ. \quad (4-9)$$

墨卡托投影的经纬网形状, 如图 4-4 所示。

## 4.2.2 等角航线(Rhumbline)

墨卡托投影之所以在航海与航空上被广泛应用, 主要在于该投影具有等角性质, 经纬网构成简单和等角航线投影为直线等优点。所谓等角航线, 是指在地球面上与各经线相交成等方位角的一条曲线, 在墨卡托投影中则成为一条直线。在航行时, 船舰按起讫点间固定的方位角前进, 只要不改变方位角便可到达终点。实际上这个问题是不难理解的, 因为墨卡托投影是

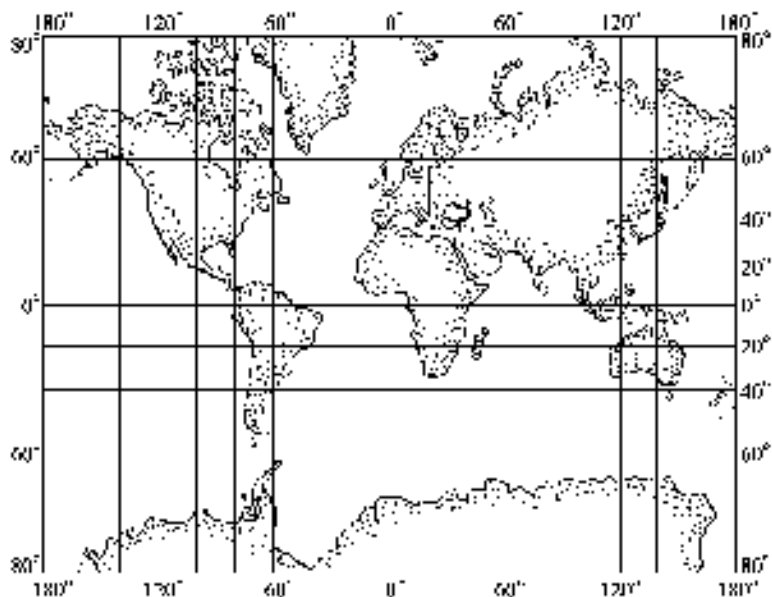


图 4-4 墨卡托投影的经纬网形状

等角投影,而经线投影为一组平行直线,实地上两点间的等方位角曲线,在该投影中只能成为两点间的直线。下面加以证明。

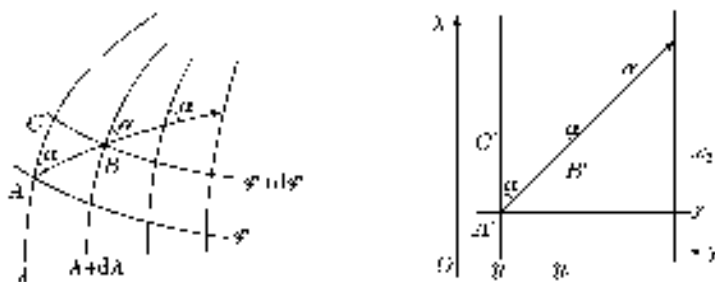


图 4-5 等角航线在墨卡托投影中的表象

由图 4-5,设地球面上一等角航线与各经线的交角为  $\alpha$ (左图),由微分三角形  $ABC$  有

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{rd\lambda}{Md\varphi},$$

故

$$d\lambda = \tan \alpha \cdot \frac{Md\varphi}{N \cos \varphi},$$

积分

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda = \tan\alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M}{N} \cdot \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

将  $\tan\alpha$  视为常数, 积分后得:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan\alpha (\ln U_2 - \ln U_1), \quad (4-10)$$

上式各乘以  $a_e$ , 则

$$a_e \lambda_2 - a_e \lambda_1 = \tan\alpha (a_e \ln U_2 - a_e \ln U_1),$$

将(4-7)式中的  $x$  和  $y$  代入上式, 得:

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{D_2 - D_1}. \quad (4-11)$$

(4-11)式表明, 两点间的等角航线在墨卡托投影中被描写为与  $x$  轴相交成角  $\alpha$  的直线, 如图 4-5 右图所示。

等角航线在两点间与所通过的经线保持方位角相等, 它除了同赤道重合外都不是大圆(对椭球体讲不是大地线)。在地球面上, 只有两点间的大圆弧(或大地线)才是最短距离, 因此等角航线不是地球面上两点间的最短距离, 而且它是以极点为渐近点的一条螺旋曲线(图 4-6)。

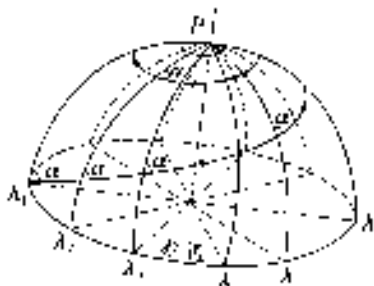


图 4-6 等角航线实际是螺旋曲线

现在予以证明。在公式(4-10)中, 令起点  $\lambda_1 = 0, \varphi_1 = 0$ , 把地球当作球体并顾及公式(4-3), 则

$$\lambda = \tan\alpha \cdot \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}),$$

由此式可见, 无论  $\lambda = 2\pi, 4\pi$  以至更大角值, 终点的纬度不可能等于  $90^\circ$ 。

由上述已知, 等角航线(或称斜航线)在墨卡托投影中成为直线, 虽然对航行有很大的方便, 但它不是两点间的最短距离。特别对远洋航行和长距离飞行, 在航行中为了节省能源和时间, 通常沿大圆航线(正航线)前进。

在本书 3.7 中曾提到, 球面上任一大圆在球心投影地图上表现为直线。图 4-7 是正轴球心投影地图, 在上海至西雅图间连一直线即为大圆航线。但在航行时还需要将大圆航线按它与经纬线的交点转绘到墨卡托投影的地图上, 如图 4-8 中的弧线(实线)。又因沿大圆的线航行时, 需要随时调整航向也很不方便。为此, 常将大圆航线划分成若干段, 把每段连成直线即为等角航线(图 4-8 中的虚折线), 这样, 就每个航段来说是按等角航线航行, 但就全部航程讲, 则接近于代表最短距离的大圆航线。

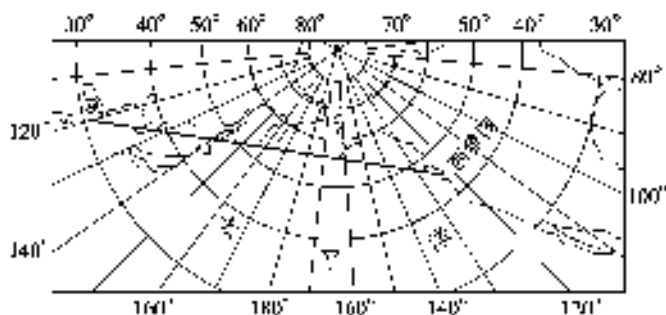


图 4-7 正轴球心投影图上的大圆航线

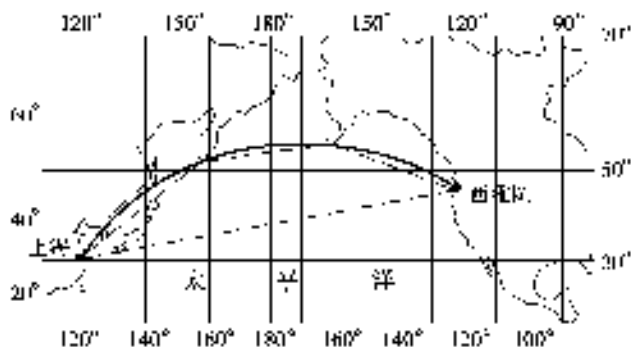


图 4-8 墨卡托投影图上大圆航线与等角航线

## 4.3 等面积和等距离圆柱投影

### 4.3.1 等面积圆柱投影

在正轴投影中,等面积条件为  $P=mn=1$ ,由公式(4-2)并按切圆柱投影( $c=R$ ),则有

$$\frac{dx}{R d\varphi} \cdot \frac{R}{r} = 1,$$

移项得

$$dx = R \cos \varphi d\varphi,$$

积分得

$$\int dx = R \int \cos \varphi d\varphi,$$

则

$$x = R \sin \varphi + K,$$

以赤道的投影作为  $Y$  轴, 当  $\varphi = 0$  时,  $x = 0$ , 故  $K = 0$ , 于是

$$x = R \sin \varphi. \quad (4-12)$$

现将正轴等面积切圆柱投影用于球体的公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \sin \varphi \\ y &= R \lambda \\ m &= \cos \varphi \\ n &= \sec \varphi \\ P &= 1 \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) &= a \end{aligned} \right\}. \quad (4-13)$$

在上式中, 只要将  $R$  换为  $r_k$  则为割圆柱投影。

公式 (4-12) 具有简单的几何意义, 故可以用几何法绘出该投影的经纬网, 如图 4-9。

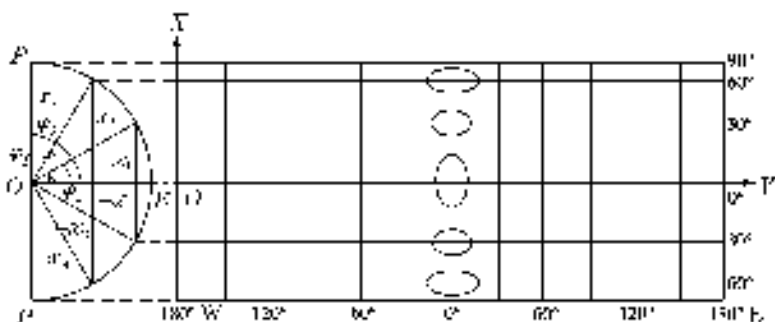


图 4-9 等面积正轴切圆柱投影经纬网的几何构图

绘制时先按主比例尺将地球半径  $R$  缩小成为  $R_{cm}$ , 以它为半径画一个半圆, 在半圆上按预定的纬差  $\Delta \varphi$  等分, 过各分点引画与赤道平行的直线即为纬线, 纬线至赤道的垂直距离  $x = R \sin \varphi$ 。以  $\Delta \lambda$  与  $\Delta \varphi$  相等的度数, 由下式求  $\Delta y$ :

$$\Delta y = R_{cm} \cdot \frac{\Delta \lambda^\circ}{\rho^\circ},$$

用求出的  $\Delta y$  值在赤道上等分, 过各分点作垂直于纬线的一组平行直线即为经线。于是按球体的正轴等面积圆柱投影的经纬网便构成了。

### 4.3.2 等距离圆柱投影

按照等距离条件经线长度比  $m = 1$ , 确定  $x$  的函数形式, 便成为正轴等

距离圆柱投影。由公式(4-2)中的  $m$  式并按切圆柱投影,则有

$$m=\frac{dx}{Rd\varphi}=1,$$

移项

$$dx=Rd\varphi,$$

积分后得

$$x=R\varphi+K,$$

$R\varphi$  是由赤道至纬度  $\varphi$  的一段经线弧长,其投影后为  $x$ 。以赤道的投影为  $Y$  轴,当  $\varphi=0$  时,  $x=0$ , 所以  $K=0$ 。因此

$$x=R\varphi。 \tag{4-14}$$

等距离圆柱投影的公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} x &= R\varphi \\ y &= R\lambda \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{a-b}{a+b} \\ n &= \sec \varphi \\ P &= n \\ m &= 1 \end{aligned} \right\}。 \tag{4-15}$$

在上列公式中以  $r_k$  取代  $y$  式的  $R$ , 则成为割圆柱投影。

球体的正轴等距离切圆柱投影, 是一种最简单的投影。由公式(4-15)知, 所有经线和赤道的投影无变形而且等长, 即经差与纬差相等时其相应的  $x$  值、 $y$  值也相等, 因此经纬网的构成也非常简单。先将地球半径  $R$  按地图主比例尺缩小为  $R_{cm}$ , 再把已确定的  $\Delta\lambda = \Delta\varphi$  化为弧度, 则有

$$\Delta x = R_{cm} \cdot \frac{\Delta\varphi^\circ}{\rho}$$

或

$$\Delta y = R_{cm} \cdot \frac{\Delta\lambda^\circ}{\rho} \quad (\Delta x = \Delta y)。$$

在图纸正中间以  $2\pi R_{cm}$  画一水平直线  $EE_1$  代表赤道的投影, 以  $\Delta y$  或  $\Delta x$  长度在此直线上等分, 过各分点  $1, 2, 3, \dots$ , 作  $EE_1$  的垂直线即为经线。再以  $\Delta x$  或  $\Delta y$  长度在两端的经线  $gf$  和  $g_1f_1$  上等分得  $a, b, \dots$ , 连  $aa_1, bb_1, \dots$  即得纬线。于是该投影的经纬网便绘成了(图 4-10)。

由图 4-10 可以看出, 该投影的经纬网格为相同的正方形, 故球体的正轴等距离切圆柱投影也叫做方格投影。但同样情况若实行割圆柱投影, 则经纬网格为相同的正矩形, 因为所割的纬圈半径  $r_k$  小于地球半径  $R$ 。



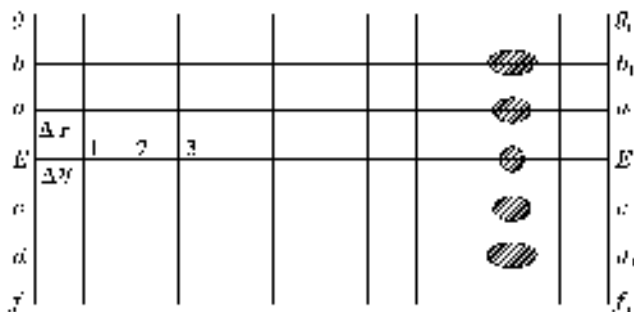


图 4-10 等距正轴圆柱投影经纬网

## 4.4 斜轴与横轴圆柱投影

### 4.4.1 基本概念和一般公式

正轴圆柱投影,通常适用于赤道附近沿纬线延伸的地区。如果制图区域是沿任一方向的大圆延伸或沿某一经线延伸,在这种情况下就不能采用正轴圆柱投影,而需要选用斜轴和横轴圆柱投影才能使变形减小。

为了计算的便利,常把地球作为球体,并按本书 2.3 的方法确定新极点 and 建立球面极坐标系,以  $Z, \alpha$  为参数进行投影计算。这时等高圈投影为一组平行直线;垂直圈投影为与等高圈垂直的另一组平行直线,其间距与方位角  $\alpha$  成正比。但是经纬线投影后一般都成为曲线,只有通过新极点  $Q$  的经线才投影为直线且为其他经线的对称轴。主方向与垂直圈和等高圈相合,故沿垂直圈的长度比  $\mu_1$  与沿等高圈的长度比  $\mu_2$  即为极值长度比。

仿照正轴圆柱投影,不难写出斜轴、横轴圆柱投影的一般公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(Z) \\ y &= c\alpha \end{aligned} \right\}, \quad (4-16)$$

式中  $c$  为常数,  $X$  轴与通过新极点  $Q$  的子午线(投影为直线)相合,在横轴投影中则与中央经线相合;以赤道或最低纬线与  $X$  轴的交点作为坐标原点。

以  $90^\circ - Z$  取代正轴投影公式中的  $\varphi$ , 则得到变形公式:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{dx}{R dZ} \\ \mu_2 &= \frac{c}{R \cos(90^\circ - Z)} = \frac{c}{R \sin Z} \\ P &= \mu_1 \cdot \mu_2 \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right| \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

下面只介绍斜轴与横轴圆柱投影各一种。

#### 4.4.2 斜轴等角切圆柱投影

这一种投影是圆柱面切于地球球体的经圈和赤道以外的大圆上，见图 4-11，则沿此大圆的长度比  $\mu_c = 1$ 。根据等角条件，参考公式(4-4)并以  $(90^\circ - Z)$  代替  $\varphi$ ，以  $\alpha$  代替  $\lambda$ ，按切圆柱投影则有：

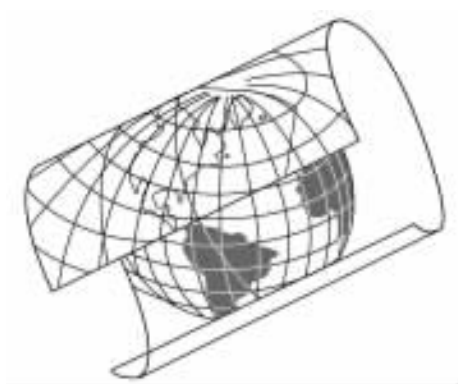


图 4-11 斜轴等角切圆柱投影示意图

$$\left. \begin{aligned} x &= R \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) = R \ln \tan(45^\circ + \frac{90^\circ - Z}{2}) \\ &= R \ln \tan(90^\circ - \frac{Z}{2}) = R \ln \cot \frac{Z}{2} = R \ln \frac{1 + \cos Z}{\sin Z} \\ y &= R \alpha \\ \mu_1 &= \mu_2 = \mu = \csc Z = \frac{1}{\sin Z} \\ P &= \csc^2 Z \\ \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

斜轴等角圆柱投影的经纬网形状如图 4-12 所示，图中除中央经线投影为直线外，其余经线和纬线都投影为对称于中央经线的曲线。

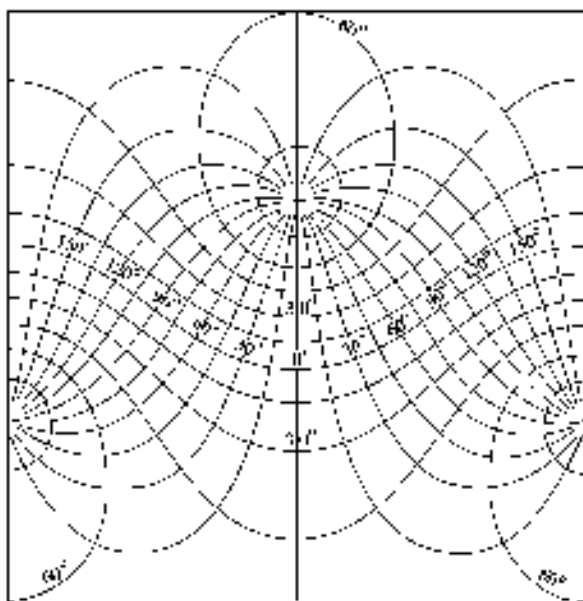


图 4-12 斜轴等角切圆柱投影经纬网形状

### 4.4.3 横轴等角切圆柱投影

在横轴切圆柱投影中,圆柱面切于通过制图区域中央的经线  $\lambda_c$  上,在此经线上  $\mu_c = 1$ ,新极点  $Q$  的地理坐标为  $\varphi_0 = 0^\circ, \lambda_0 = \lambda_c + 90^\circ$ 。

在图 4-13 中,设  $POP_1$  为所切的中央经线,并作为投影的  $X$  轴;赤道  $EOQ$  的投影作为  $Y$  轴。令  $\lambda_c = 0^\circ$ ,即经度自中央经线起算,方位角  $\alpha$  自  $PQ$  起算。

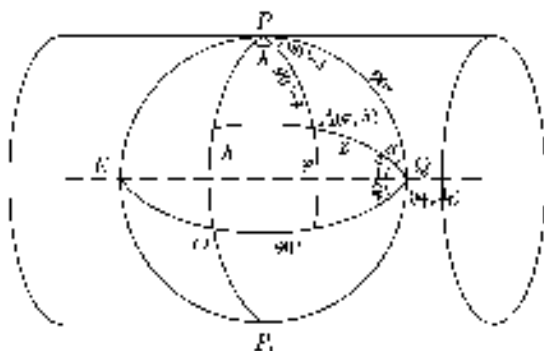


图 4-13 横轴切圆柱投影示意图

根据公式(2-27)和(2-31)可以得出  $Z, \alpha$  同  $\varphi, \lambda$  的关系式如下:

$$\left. \begin{aligned} \cos Z &= \cos \varphi \sin \lambda \\ \cot \alpha &= \tan \varphi \sec \lambda \end{aligned} \right\}, \quad (4-19)$$

式中  $\lambda$  是由投影的中央经线起算。由(4-19)式可以计算用于横轴圆柱投影的  $Z$  和  $\alpha$ 。

横轴等角切圆柱投影,是按  $\mu_c=1$  和  $\mu_1=\mu_2$  的条件而建立,因此可以参照(4-18)式,将  $x$  同  $y$  互换,并以  $(90^\circ-\alpha)$  代替  $\alpha$ ,就可以写出本投影的公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= R(90^\circ - \alpha) \\ y &= R \ln \cot \frac{Z}{2} \\ \mu_1 &= \mu_2 = \csc Z \\ P &= \csc^2 Z \\ \omega &= 0 \end{aligned} \right\}^\circ. \quad (4-20)$$

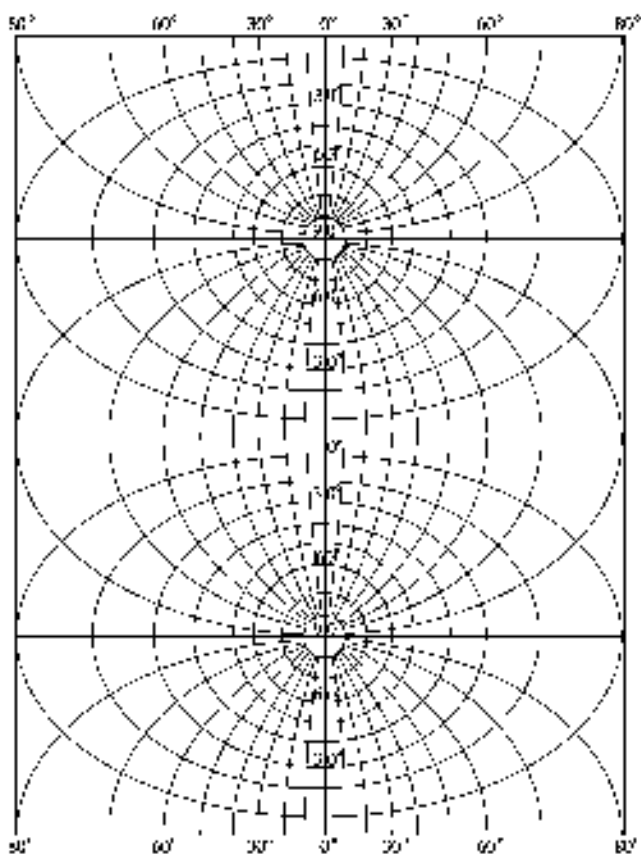


图 4-14 横轴等角切圆柱投影经纬网形状

将(4-20)式以地理坐标表示,即将(4-19)式代入,则有:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \arctan(\tan \varphi \sec \lambda) \\ y &= R \cdot \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \cos \varphi \sin \lambda}{1 - \cos \varphi \sin \lambda} \right) \\ \mu &= \frac{1}{\sin Z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda}} \\ P &= \frac{1}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda} \\ \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-20a)$$

横轴等角切圆柱投影的经纬网形状,如图 4-14 所示。

横轴等角圆柱投影又称横墨卡托投影,它是 J. H. 兰勃特于 1772 年提出的。若在地球椭球面实行等角横切圆柱投影,则成为著名的高斯-克吕格投影(详见第 9 章)。

## 4.5 透视圆柱投影

### 4.5.1 基本概念和种类

运用透视方法,同样可以将地球面上的地理坐标投影到圆柱面上。透视圆柱投影的视点,正轴投影是在赤道的直径及其延长线上;斜轴投影视点是在与圆柱中心轴垂直的大圆(即圆柱面所切大圆或割等高圈中间的大圆)直径及其延长线上。

根据视点至球心的距离  $D$  的大小不同,透视圆柱投影也有以下几种:  
① 正射透视投影,视点在无穷远,  $D = \infty$ ; ② 外心透视投影,视点在球体外,  $R < D < \infty$ ; ③ 球面透视投影,视点在球面上,  $D = R$ ; ④ 球心透视投影,视点在球心,  $D = 0$ 。

透视圆柱投影与透视方位投影的不同之处,不在于视点随  $D$  的大小而不同,而是透视圆柱投影的视点必须绕圆柱旋转才能实行投影。这样,每一条经线及其与各纬线的交点,都投影到子午面与圆柱面相交的直线上。因此经线投影为一组垂直的平行直线,其间距与经差成正比。同纬度各点其投影与赤道的距离相等,其连线为一组水平的平行直线。于是正轴的透视圆柱投影的经纬线也是互相垂直的直线。

下面通过对两种常见的透视圆柱投影的介绍,使上述概念具体化。

### 4.5.2 球面透视切圆柱投影

如图 4-15, 设  $E_1$  为视点,  $EE_1$  为赤道的直径,  $M'$  为地球面上  $M$  点在圆柱面上的投影, 则  $EM' = x$ ,  $EF = R\lambda$ , 而  $EF = E'F' = y$ 。由此可以写出投影的坐标方程式为

$$\left. \begin{aligned} x &= 2R \tan \frac{\varphi}{2} \\ y &= R\lambda \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

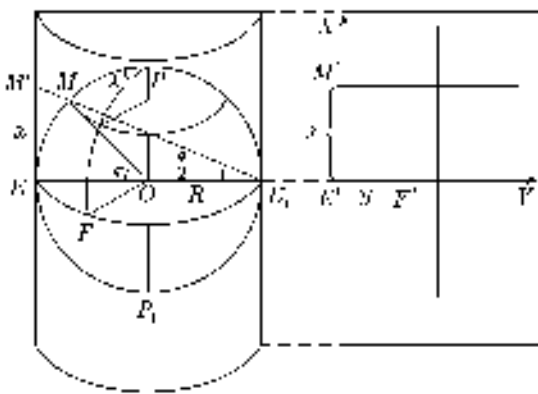


图 4-15 球面透视切圆柱投影示意图

如将上式中的  $x$  式与公式(3-22) $\rho$  式比较, 就会进一步认识球面透视切圆柱投影与球面透视方位投影的异同之处。

现将本投影的变形公式汇总如下:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{dx}{R d\varphi} = \sec^2 \frac{\varphi}{2} \\ n &= \sec \varphi \\ P &= mn = \sec \varphi \cdot \sec^2 \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{n-m}{n+m} \end{aligned} \right\} \quad (4-22)$$

由变形公式知, 本投影属任意投影。

### 4.5.3 高尔(Gall)投影

这一投影是爱丁堡人 R. J. 高尔于 1855 年提出, 他规定圆柱面割于  $\varphi_k = \pm 45^\circ$  的地球纬线上, 以实行球面透视投影。由图 4-16, 设  $E_1$  为视点,

$BB_1$  为割圆柱的一条母线,  $M'$  为球面上  $M$  点在母线  $BB_1$  上的投影, 则  $CM' = x$ 。若  $M$  点的纬度为  $\varphi$ , 则其内接圆周角  $\angle ME_1C = \varphi/2$ , 而

$$x = CM' = CE_1 \tan \frac{\varphi}{2} = (CO + OE_1) \tan \frac{\varphi}{2},$$

因

$$CO = R \cos \varphi_k, OE_1 = R,$$

于是

$$x = (R + R \cos \varphi_k) \tan \frac{\varphi}{2},$$

故有

$$\left. \begin{aligned} x &= R(1 + \cos \varphi_k) \tan \frac{\varphi}{2} \\ y &= r_k \lambda = R \cos \varphi_k \lambda \end{aligned} \right\} \quad (4-23)$$

变形公式:

$$m = \frac{1 + \cos \varphi_k}{1 + \cos \varphi}, \quad n = \frac{r_k}{r} = \cos \varphi_k \sec \varphi, \quad P = mn,$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{m - n}{m + n} (m > n) \quad (\text{或} \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{n - m}{n + m} (n > m)).$$

高尔投影的经纬网以及用此投影绘的世界地图, 如图 4-17 所示。

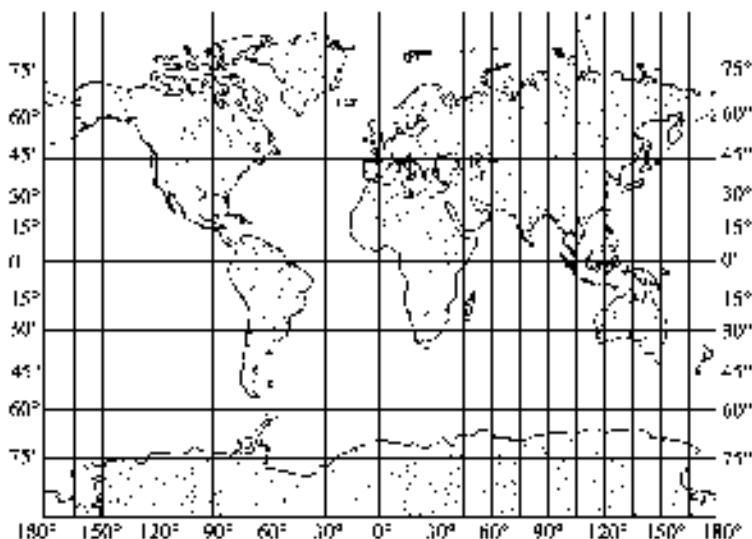


图 4-17 用高尔投影绘制的世界地图

前苏联《世界大地图集》中的许多世界地图,是用割纬线为 $\pm 30^\circ$ 的高尔投影绘制的。

按割纬线的纬度为 $\pm 30^\circ$ 的高尔投影,其变形情况如表 4-1 所示。

表 4-1 割纬线为 $\pm 30^\circ$ 的高尔投影的变形情况

$\pm \varphi$	$m$	$n$	$P$	$\omega$
$0^\circ$	0.933	0.866	0.808	$4^\circ 16'$
$15^\circ$	0.949	0.897	0.851	$3^\circ 16'$
$30^\circ$	1.000	1.000	1.000	$0^\circ 00'$
$45^\circ$	1.093	1.225	1.339	$6^\circ 30'$
$60^\circ$	1.244	1.732	2.155	$18^\circ 53'$
$75^\circ$	1.482	3.346	4.960	$45^\circ 24'$
$90^\circ$	1.866	$\infty$	$\infty$	$180^\circ 00'$

4.6 圆柱投影的分析和应用

4.6.1 变形分析

从圆柱投影的变形公式看,长度比、面积比和角度变形,在正轴投影中它们仅是纬度 $\varphi$ 的函数而与经度 $\lambda$ 无关;在斜轴与横轴投影中它们仅是天顶距 $Z$ 的函数而与方位角 $\alpha$ 无关。因此,在正轴投影中等变形线成为与纬线平行的直线;在非正轴投影中等变形线是与等高圈平行的直线。下面只讨论正轴投影变形特点,非正轴投影同它对照也会清楚。

正轴圆柱投影的变形特点,是以赤道为对称轴,在赤道以南以北的同名纬线上,其变形值相等。不论投影属什么性质,凡切圆柱投影纬线长度比都是 $n = \sec \varphi$ ,凡割圆柱投影纬线长度比都是 $n = \cos \varphi_k \cdot \sec \varphi$ 。但经线长度比则要随投影的性质不同而异。如等角投影 $m = n$ ,等面积投影 $m = 1/n$ 。在任意投影中除等距离投影 $m = 1$ 外,其他投影的 $m$ 则取决于 $\frac{dx}{d\varphi}$ 的具体内容(见本书 4.5)。

现将等面积、等距离和等角的正轴切圆柱投影的变形情况,分别列于表 4-2、表 4-3 和表 4-4,以便对照比较。在各表中,均按 1 : 1 000 万比例尺计算出 $\Delta \lambda = \Delta \varphi = 10^\circ$ 的直角坐标值。



(P=1) 表 4-2 等面积正轴切圆柱投影的变形情况

$\pm\varphi$	$m$	$n$	$\omega$	$\pm x(\text{cm})$	$y(\text{cm})$
0°	1.000	1.000	0°00′	0.000	$\Delta\lambda=10^\circ$ 的 $y$ 值 11.120
10°	0.985	1.015	1°45′	11.063	
20°	0.940	1.064	7°07′	21.790	
30°	0.866	1.155	16°26′	31.856	
40°	0.766	1.305	30°11′	40.953	
50°	0.643	1.556	49°04′	48.806	
60°	0.500	2.000	73°44′	55.175	
70°	0.342	2.924	104°28′	59.869	
80°	0.174	5.759	140°36′	62.743	
90°	$\infty$	$\infty$	180°00′	63.711	

(m=1) 表 4-3 等距离正轴切圆柱投影的变形情况

$\pm\varphi$	$n$	$P$	$\omega$	$\pm x=\pm y$ (cm)
0°	1.000	1.000	0°00′	0.000
10°	1.015	1.015	0°51′	11.120
20°	1.064	1.064	3°33′	22.239
30°	1.155	1.155	8°15′	33.358
40°	1.305	1.305	15°12′	44.478
50°	1.556	1.556	25°08′	55.597
60°	2.000	2.000	38°57′	66.717
70°	2.924	2.924	58°43′	77.836
80°	5.759	5.759	89°31′	88.956
90°	$\infty$	$\infty$	180°00′	100.075

(ω=0) 表 4-4 等角正轴切圆柱投影的变形情况

$\pm\varphi$	$m=n$	$P$	$\pm x(\text{cm})$	$y(\text{cm})$
0°	1.000	1.000	0.000	$\Delta\lambda=10^\circ$ 的 $y$ 值 11.120
10°	1.015	1.031	11.176	
20°	1.064	1.132	22.705	
30°	1.155	1.333	34.997	
40°	1.305	1.704	48.606	
50°	1.556	2.420	64.392	
60°	2.000	4.000	83.905	
70°	2.924	8.549	110.565	
80°	5.759	33.163	155.216	
90°	$\infty$	$\infty$	—	

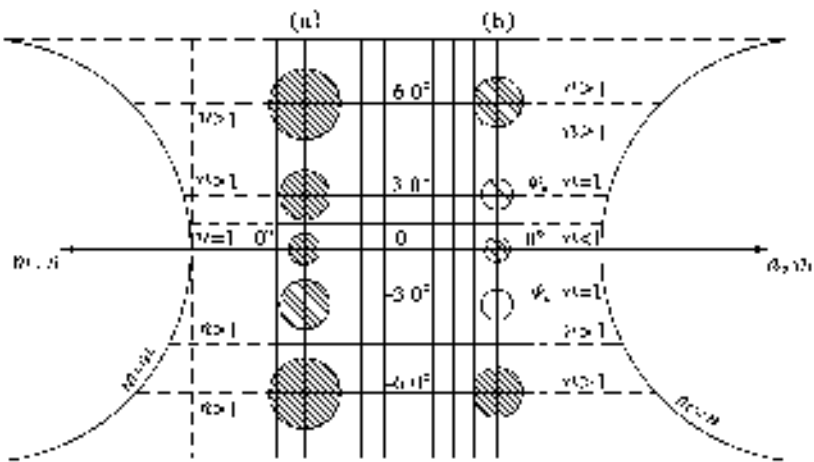


图 4-18 墨卡托投影变形示意 (a)切圆柱 (b)割圆柱

在此需要说明墨卡托投影的变形特点。由表 4-4 和图 4-18 知,这种投影过一点任一方向线的长度比相等,故变形椭圆是圆而非椭圆。但其长度和面积的变形随着离开赤道和割纬线的纬度的增减而增减,即在切圆柱投影中,赤道的变形等于 1,赤道以南以北都大于 1;在割圆柱投影中在  $\pm \varphi_k$  之间变形小于 1,在  $\pm \varphi_k$  之外变形大于 1。等角切圆柱投影  $m=n=\sec \varphi$ ,  $P=\sec^2 \varphi$ ,因而纬度愈高变形愈大。例如当  $\varphi=60^\circ$  时,则长度增大 2 倍,面积增大 4 倍。由此,可以解释这样一个问题:格陵兰岛的实有面积仅为南美洲实有面积的 1/9 左右,为什么在墨卡托投影的世界地图上前者比后者的面积要大?现在我们取它们各自的中间(近于平均)纬度作概略计算。格陵兰的中间纬度为北纬  $75^\circ$ ,南美洲大陆的中间纬度为南纬  $15^\circ$ ,面积比分别为  $P_g=\sec^2 75^\circ=14.93$ ,  $P_s=\sec^2 15^\circ=1.07$ ,设南美大陆面积为  $A$ ,于是

$$14.93 \times \frac{A}{9} > 1.07A。$$

### 4.6.2 经纬网的构成

正轴圆柱投影经纬网的构成非常简单,如等面积和等距离的圆柱投影,在本书 4.3 已作过介绍。至于由公式计算直角坐标值进行展绘,也不复杂。例如稍复杂的墨卡托投影,按公式(4-4),利用函数计算器只需十几分钟便可算出表 4-4 右端两栏的坐标值。在表 4-2 和表 4-3 中,是按相同的比例尺和经纬差计算出的等面积和等距离的切圆柱投影的直角坐标值。

展绘时还可根据需要将比例尺缩小或放大,选一适当大小的图纸,在正中作一水平直线代表赤道的投影。再以  $Y$  值在此水平直线上等分 36 份即经差  $10^\circ$  的各分点,过各分点作赤道的垂直线即为经线。在两端二经线上,按  $X$  值在赤道南北对称刺点,连接对应点(参考图 4-10)作赤道的平行直线即为纬线。于是一幅正轴圆柱投影经纬网便绘成了。

对斜轴与横轴圆柱投影的计算与经纬网构成,要比正轴投影略复杂一些,其步骤:

(1) 选定新极点,对于斜轴投影要确定  $Q$  的  $\varphi_0$  和  $\lambda_0$ ,对于横轴投影要选定中央经线  $\lambda_c$ 。

(2) 根据所确定的经纬网密度,将制图区域的经纬网交点的  $\lambda, \varphi$  换算成为  $Z, \alpha$ ,或者以  $Z, \alpha$  式中的地理坐标直接代入直角坐标公式,如公式(4-20a)。

(3) 确定球体半径  $R$  并按主比例尺缩小,然后计算  $x, y$  值。

(4) 展绘。对于斜圆柱投影,以中央经线的投影(唯一的直线)为  $X$  轴,以制图区域最南边纬线与  $X$  轴的交点作为坐标原点,过此原点作  $X$  轴的垂直线即为  $Y$  轴。这时要注意改变计算中以投影新极点为原点所求得的  $x, y$  的负值。按直角坐标值展绘的斜轴切圆柱投影的经纬网如图 4-12。对于横圆柱投影,中央经线和赤道的投影为互相垂直的直线即为  $X$  轴和  $Y$  轴。由于该投影上下、左右对称,所以当计算直角坐标值时,只需按公式(4-20a)计算制图区域的第一象限部分,其余三部分按对称关系展绘即可。展绘后的横轴切圆柱投影的经纬网,如图 4-14 的中间一部分。

### 4.6.3 应用

根据圆柱投影的变形特点和经纬网的形状分析,正轴投影适用于赤道附近沿纬线延伸的地区。由于墨卡托投影具有方向正确、图形相似的优点,在航海上已使用 400 多年之久,尤其在当代空中交通运输中已居首要地位,因此多用这一投影编制世界交通图。为了改善这一投影高纬度变形太大的缺点常采用组合投影,即在  $60^\circ$  以上使用等距离圆柱投影和它相接合。

横轴圆柱投影,可用于沿经线方向延伸的地区。斜轴圆柱投影,可用于沿任一方向延伸的地区,故常用来绘制飞行航线图。将航线的起讫两点置于圆柱面所切的大圆上,在此大圆两侧各  $15^\circ$  左右的一条带内实行等角投影,则这条带近似于大圆航线,在此带范围内的大圆也几乎都被投影为一些直线。这对长距离飞行非常有利。

另外正轴圆柱投影的纬线为平行直线,对于表示纬向地带性的地理现

象具有重要意义。如果所表示的内容要求对比明显者,宜选用等面积圆柱投影。如果所表示的内容具有运动路径和方向性,如洋流、气流、台风路径等,则宜用等角圆柱投影。

## 复习思考题及计算题

1. 在墨卡托投影中,等角航线为什么表现为直线,两点间的等角航线与两点间的大圆弧有什么区别?
2. 正轴圆柱投影中,如何从一条经线上纬线间距的变化估计该种投影的变形性质?
3. 正、横、斜轴圆柱投影分别适宜于表示怎样的制图区域?
4. 透视圆柱投影与透视方位投影有哪些区别与联系?
5. 利用正轴等角切圆柱投影(墨卡托投影)公式,计算并绘制全球经纬格网,并加绘陆地轮廓。

## 第 5 章 圆锥投影

### 5.1 圆锥投影的种类和基本原理

圆锥投影是假设一个圆锥面与地球相切或相割,根据某种条件(透视、等角、等面积等)将地球面上的经纬网点投影到圆锥面上,然后沿圆锥面的一条母线切开展平,即得到圆锥投影,如图 5-1 和图 5-2 所示。

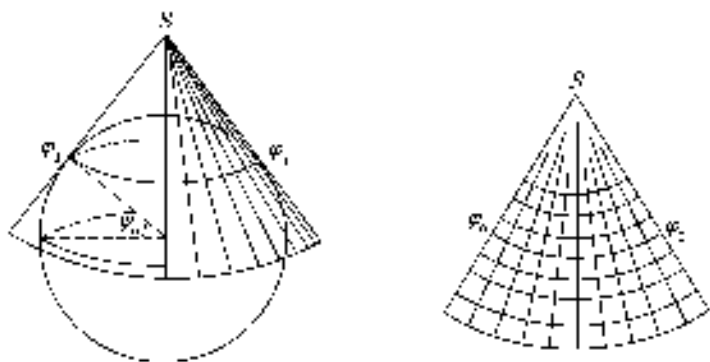


图 5-1 切圆锥投影示意图

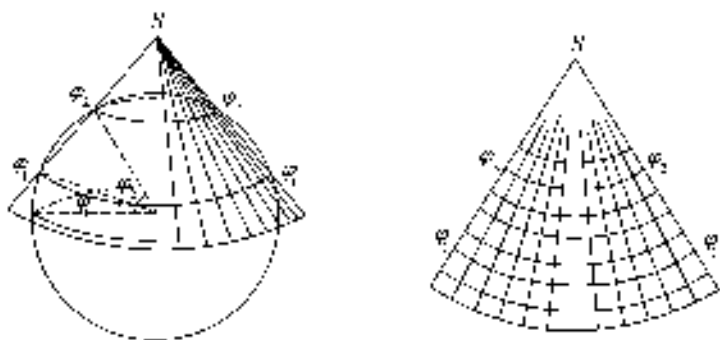


图 5-2 割圆锥投影示意图

根据投影的变形性质,圆锥投影也分为等角、等面积和任意(其中主要为等距离)投影。按照圆锥面与地球面的关系位置不同,圆锥投影又分为正

轴、横轴和斜轴投影,同时又有切圆锥与割圆锥之分(见表 2-4)。

由圆锥投影的定义知,正轴圆锥投影的纬线投影为同心圆弧,经线投影为同心圆的半径,两经线间的夹角与相应经差成正比。因此有

$$\left. \begin{aligned} \rho &= f(\varphi) \\ \delta &= \sigma \lambda \end{aligned} \right\}, \quad (5-1)$$

式中:  $\rho$  是纬线的投影半径,函数  $f$  由投影性质决定,  $\sigma$  是圆锥常数(比例系数)。因在地球极点的  $\lambda = 360^\circ$ , 而圆锥展开后成为扇形,其顶角不足  $360^\circ$ , 这种圆锥顶角与  $360^\circ$  之比即为圆锥常数。由此知,  $0 < \sigma < 1$ , 当  $\sigma = 1$  时则为方位投影; 当  $\sigma = 0$  时, 则为圆柱投影。因此可以说, 方位投影和圆柱投影是圆锥投影的特例。

由以上可知,圆锥投影的主要问题是决定  $\rho$  的函数形式, 其次是确定常数  $\sigma$ 。现在先写出圆锥投影的一般公式。

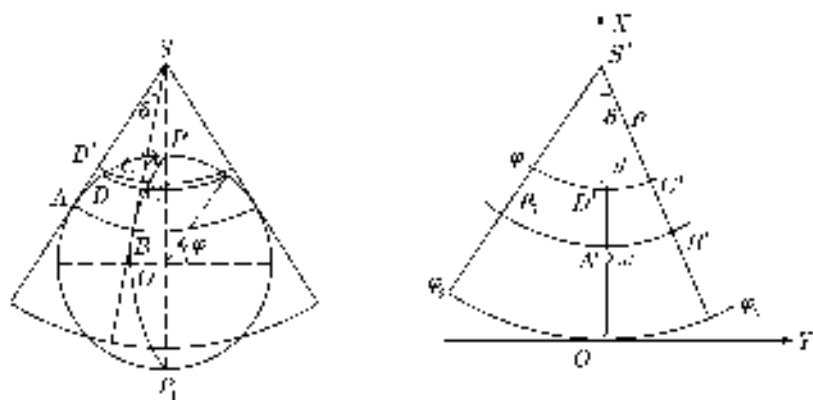


图 5-3 地球面与平面上点的坐标关系

如图 5-3, 如果以圆锥面顶点  $S'$  为原点, 以某一经线的投影为  $X$  轴, 过  $S'$  垂直于  $X$  轴的直线作  $Y$  轴, 则  $C'$  点的平面直角坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\}^{\circ}$$

如果将原点由  $S'$  移至最南边的纬线  $\varphi_s$  与  $X$  轴的交点  $O$  上, 则  $C'$  点的平面直角坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho_s - \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\}^{\circ}. \quad (5-2)$$

下面求长度比和面积比公式。

如图 5-4, 设平面梯形  $A'B'C'D'$  是地球面上微分梯形  $ABCD$  的投影,



$$-\ln \rho = \sigma \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) - \ln K,$$

于是

$$\rho = \frac{K}{\tan^\sigma(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}. \quad (5-4)$$

由上式知,  $K$  为积分常数, 当  $\varphi=0$  时,  $\rho=K$ , 即  $K$  等于赤道投影的半径, 用  $\rho_{eq}=K$  表示; 当  $\varphi=90^\circ$  时, 即在极点的投影半径  $\rho=0$ , 用  $\rho_{po}=0$  表示。

于是正轴等角圆锥投影的一般公式有:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{K}{\tan^\sigma(45^\circ + \frac{\varphi}{2})} \\ \delta &= \sigma \lambda \\ m = n &= \frac{\sigma \rho}{r} = \frac{\sigma K}{r \tan^\sigma(45^\circ + \frac{\varphi}{2})} \\ P &= n^2 \\ \omega &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5-5)$$

在上列公式中, 尚有常数  $\sigma$  和  $K$  还没有具体确定, 故不能应用这些公式进行投影计算。这两个常数需要根据切圆锥投影或割圆锥投影才能确定。

### 5.2.1 单标准纬线等角圆锥投影

设一个圆锥面切于地球一纬度为  $\varphi_0$  的纬线上。由图 5-5 知,  $\angle CAO = \angle ASC = \varphi_0$ , 故

$$AC = r_0 = R \cos \varphi_0,$$

$$AS = \rho_0 = R \cot \varphi_0.$$

将上两式代入纬线长度比公式, 因切纬线的长度比  $n_0 = 1$ , 由 (5-5) 式得

$$n_0 = \frac{\sigma \rho_0}{r_0} = \frac{\sigma K}{r_0 \tan^\sigma(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2})} = 1.$$

(5-6)

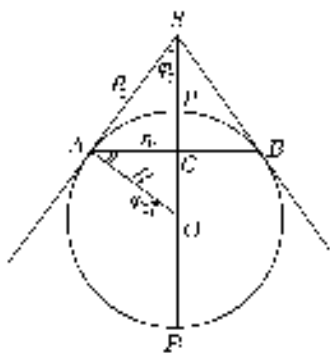


图 5-5 切圆锥投影示意图

由上式  $\frac{\sigma \rho_0}{r_0} = 1$ , 得:

$$\sigma = \frac{r_0}{\rho_0} = \frac{R \cos \varphi_0}{R \cot \varphi_0} = \sin \varphi_0, \quad (5-7)$$



由此可知,切圆锥投影的圆锥常数等于标准纬线纬度的正弦。

由(5-6)式右端可得

$$K = \frac{r_0 \tan^{\sigma}(45^{\circ} + \frac{\varphi}{2})}{\sigma} = \frac{R \cos \varphi_0 \tan^{\sigma}(45^{\circ} + \frac{\varphi_0}{2})}{\sigma},$$

因为  $\sigma = \sin \varphi_0$ , 代入上式则

$$K = R \cot \varphi_0 \tan^{\sigma}(45^{\circ} + \frac{\varphi_0}{2})。 \quad (5-8)$$

有了  $\rho$ ,  $\sigma$  和  $K$  的具体形式后,才能应用公式(5-2)和(5-5)计算本投影的直角坐标和长度与面积的变形。单标准纬线圆锥投影的变形,随着离标准纬线的距离的增加而增大,一般只适用于纬差不大的制图区域。

## 5.2.2 双标准纬线等角圆锥投影

由图 5-6,设圆锥面割于地球的  $\varphi_1, \varphi_2$  两条纬线上,则投影后这两条纬线的长度保持无变形,即  $n_1 = 1, n_2 = 1$ ,而且  $n_1 = n_2$ ,由公式(5-3)而有

$$\frac{\sigma \rho_1}{r_1} = \frac{\sigma \rho_2}{r_2},$$

或

$$\frac{\sigma K}{r_1 \tan^{\sigma}(45^{\circ} + \frac{\varphi_1}{2})} = \frac{\sigma K}{r_2 \tan^{\sigma}(45^{\circ} + \frac{\varphi_2}{2})}。$$

为了简化,令

$$t = \tan(45^{\circ} + \frac{\varphi}{2}), \quad (5-9)$$

于是上式去分子后为

$$r_1 t_1^{\sigma} = r_2 t_2^{\sigma},$$

两边取对数,则

$$\begin{aligned} \lg r_1 + \sigma \lg t_1 &= \lg r_2 + \sigma \lg t_2, \\ \sigma(\lg t_2 - \lg t_1) &= \lg r_1 - \lg r_2, \end{aligned}$$

所以

$$\sigma = \frac{\lg r_1 - \lg r_2}{\lg t_2 - \lg t_1}。 \quad (5-10)$$

由  $\frac{\sigma K}{r_1 t_1^{\sigma}} = \frac{\sigma K}{r_2 t_2^{\sigma}} = 1$ , 同样可以求得

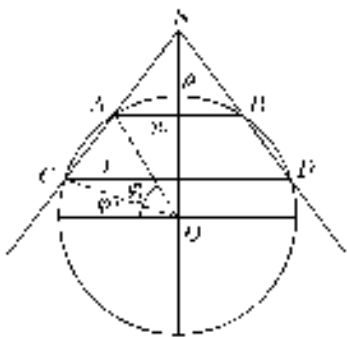


图 5-6 割圆锥投影示意图

$$K = \frac{r_1 t_1^\sigma}{\sigma} = \frac{r_2 t_2^\sigma}{\sigma} \quad (5-11)$$

现将球体的等角割圆锥投影公式集中如下：

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{K}{\tan^\sigma(45^\circ + \frac{\varphi}{2})} = \frac{K}{t^\sigma} \\ K &= \frac{r_1 t_1^\sigma}{\sigma} = \frac{r_2 t_2^\sigma}{\sigma} \\ \delta &= \sigma \lambda \\ m &= n = \frac{\sigma \rho}{r} = \frac{\sigma K}{r t^\sigma} \\ P &= n^2 \\ \omega &= 0 \\ x &= \rho_s - \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \\ \sigma &= \frac{\lg r_1 - \lg r_2}{\lg t_2 - \lg t_1} \\ \left[ t &= \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5-12)$$

等角圆锥投影为 J. H. 兰勃特于 1772 年所创, 故又称兰勃特等角圆锥投影。由于本投影应用范围较广, 适用于中纬度地区各种比例尺的地图, 因此在实用中多按椭球体进行投影。下面给出椭球体等角圆锥投影公式。

以子午圈曲率半径  $M$  和卯酉圈曲率半径  $N$  代替球体半径  $R$ , 并以  $N \cos \varphi$  代替  $r$ , 由公式(5-3)有

$$m = -\frac{d\rho}{M d\varphi}, \quad n = \frac{\sigma \rho}{r} = \frac{\sigma \rho}{N \cos \varphi},$$

按等角条件可得：

$$-\frac{d\rho}{M d\varphi} = \frac{\sigma \rho}{N \cos \varphi},$$

移项

$$-\frac{d\rho}{\rho} = \sigma \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi},$$

上式右端除常数  $\sigma$  不同外其余均与(4-5)式右端完全相同。故将  $M, N$  式代入上式, 通过同样的积分可得：

$$-\ln \rho = \sigma \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \left( \frac{1 - e_1 \sin \varphi}{1 + e_1 \sin \varphi} \right)^{\frac{\sigma}{2}} - \ln K,$$

顾及(4-6)式中的符号  $U$ , 则

$$\ln \rho = \ln K - \sigma \ln U,$$

于是

$$\rho = \frac{K}{U^\sigma}, \quad (5-13)$$

式中  $K$  为积分常数, 当  $\varphi = 0^\circ$  时,  $U = 1$ ,  $\rho_{\text{eq}} = K$ , 即  $K$  为赤道的投影半径; 当  $\varphi = 90^\circ$  时,  $U = \infty$ ,  $\rho_{\text{po}} = 0$ , 即极点投影半径为 0。

现在按割圆锥投影求常数  $\sigma$  和  $K$  的公式。将  $\rho$  式代入  $n_1$  和  $n_2$ , 则

$$n_1 = \frac{\sigma \rho_1}{r_1} = \frac{\sigma K}{r_1 U_1^\sigma} = 1,$$

$$n_2 = \frac{\sigma \rho_2}{r_2} = \frac{\sigma K}{r_2 U_2^\sigma} = 1,$$

或

$$\frac{\sigma K}{r_1 U_1^\sigma} = \frac{\sigma K}{r_2 U_2^\sigma},$$

$$\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^\sigma = \frac{r_2}{r_1},$$

两边取对数

$$\sigma(\lg U_1 - \lg U_2) = \lg r_2 - \lg r_1,$$

于是

$$\sigma = \frac{\lg r_2 - \lg r_1}{\lg U_1 - \lg U_2}. \quad (5-14)$$

由  $\frac{\sigma K}{r_1 U_1^\sigma} = \frac{\sigma K}{r_2 U_2^\sigma} = 1$ , 可以求得

$$K = \frac{r_1 U_1^\sigma}{\sigma} = \frac{r_2 U_2^\sigma}{\sigma}. \quad (5-15)$$

现将椭球体的等角割圆锥投影的公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{K}{U^\sigma} \\ \delta &= \sigma \lambda \\ x &= \rho_s - \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \\ m &= n = \frac{\sigma \rho}{r} = \frac{\sigma K}{r U^\sigma} \\ P &= m^2 = n^2 = \left(\frac{\sigma \rho}{r}\right)^2 = \left(\frac{\sigma K}{r U^\sigma}\right)^2 \\ \omega &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5-16)$$

决定常数  $\sigma$  和  $K$  的方法有多种,下面再介绍一种最常用的方法,其他从略。

### 5.2.3 指定投影区域边纬线和中纬线长度变形的绝对值相等的等角圆锥投影

设投影区域南北边纬线的纬度分别为  $\varphi_S$  和  $\varphi_N$ ,而且中间纬线的纬度为

$$\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_S + \varphi_N),$$

根据所提的条件而有

$$\left. \begin{aligned} n_S &= 1 + v \\ n_N &= 1 + v \\ n_m &= 1 - v \end{aligned} \right\}, \quad (5-17)$$

$n_S, n_N$  和  $n_m$  分别为南北边纬线 and 中间纬线的长度比,  $v$  为其变形值。

现在令  $n_S = n_N$ , 并将(5-16)式中  $n$  代入, 则有

$$\frac{\sigma K}{r_S U_S^\sigma} = \frac{\sigma K}{r_N U_N^\sigma}, \quad \left(\frac{U_N}{U_S}\right)^\sigma = \frac{r_S}{r_N},$$

于是

$$\sigma = \frac{\lg r_S - \lg r_N}{\lg U_N - \lg U_S}. \quad (5-18)$$

同时根据(5-17)式, 则有

$$\left. \begin{aligned} n_S &= \frac{\sigma K}{r_S U_S^\sigma} = 1 + v \\ n_N &= \frac{\sigma K}{r_N U_N^\sigma} = 1 + v \\ n_m &= \frac{\sigma K}{r_m U_m^\sigma} = 1 - v \end{aligned} \right\}. \quad (5-19)$$

$n_S$  或  $n_N$  与  $n_m$  相加则

$$\frac{\sigma K (r_m U_m^\sigma + r_S U_S^\sigma)}{r_m U_m^\sigma \cdot r_S U_S^\sigma} = 2,$$

或

$$\frac{\sigma K (r_m U_m^\sigma + r_N U_N^\sigma)}{r_m U_m^\sigma \cdot r_N U_N^\sigma} = 2,$$

由此得

或

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{2r_m r_S U_m^\sigma U_S^\sigma}{\sigma (r_m U_m^\sigma + r_S U_S^\sigma)} \\ K &= \frac{2r_m r_N U_m^\sigma U_N^\sigma}{\sigma (r_m U_m^\sigma + r_N U_N^\sigma)} \end{aligned} \right\}. \quad (5-20)$$

现将边纬线和中纬线变形绝对值相等的等角圆锥投影的公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{K}{U^\sigma} \\ \delta &= \sigma \lambda \\ x &= \rho_s - \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \\ \sigma &= \frac{\lg r_s - \lg r_N}{\lg U_N - \lg U_s} \\ K &= \frac{2r_m r_s U_m^\sigma U_s^\sigma}{\sigma(r_m U_m^\sigma + r_s U_s^\sigma)} \\ \sin \varphi_m &= \sigma \\ m = n = \mu &= \frac{\sigma \rho}{r} \\ P &= \left(\frac{\sigma \rho}{r}\right)^2 \\ \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \circ \quad (5-21)$$

这一投影常用于编制中国图(南海诸岛作插图形式)。1978 年开始,我国按《1:100 万地形图编绘规范》要求,决定采用这一投影作为中国 1:100 万分幅地形图的数学基础。在此还需要加以说明。

由(5-17)式,有

$$n_N \cdot n_m = n_s \cdot n_m = (1+v)(1-v),$$

即

$$n_N \cdot n_m = n_s \cdot n_m = 1 - v^2。$$

因 1:100 万分幅地图为纬差  $4^\circ$ , 对于以纬差  $4^\circ$  为一投影带的圆锥投影来说,  $v^2$  之值为  $9 \times 10^{-8}$ 。略去此数, 对于投影的计算与实用精度, 都没有什么影响。故可用

$$n_N \cdot n_m = n_s \cdot n_m = 1,$$

将(5-19)式代入上式得

$$\frac{\sigma K}{r_N U_N^\sigma} \cdot \frac{\sigma K}{r_m U_m^\sigma} = \frac{\sigma K}{r_s U_s^\sigma} \cdot \frac{\sigma K}{r_m U_m^\sigma} = 1,$$

故得

$$K = \frac{1}{\sigma} \sqrt{r_N r_m U_N^\sigma U_m^\sigma} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{r_s r_m U_s^\sigma U_m^\sigma}。 \quad (5-22)$$

在纬差  $4^\circ$  的投影带内, 其变形值很微小。长度变形在边纬线和中纬线

上为 $\pm 0.03\%$ ,面积变形约为长度变形的2倍。

每个投影带的两条标准纬线的近似式为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &\approx \varphi_S + 35' \\ \varphi_2 &\approx \varphi_N - 35' \end{aligned} \right\}^{\circ} \quad (5-23)$$

在《1:100万地形图编绘规范》中,载有纬度 $0^{\circ} \sim 56^{\circ}$ 的每幅百万分之一地图的坐标值和图廓尺寸数值。

由于圆锥投影的经线表现为直线,因此同一纬度带的左右邻幅可以完全接合。但是由于上下投影带的常数稍有不同,因而略微影响纬线的投影半径之长,故上下图幅相接时同名纬线的曲率不相同,所以不能完全接合。其裂隙在低纬度区最大约为0.6 mm,在中纬度区一般为0.3 mm~0.4 mm。对地图的实际使用,影响不会很大。

本节中5.2.2及5.2.3所述的两种投影,都属于双标准纬线等角圆锥投影。但前者的两条标准纬线是选定的,通常采用整度数;后者的两条标准纬线是由所指定的条件决定,一般不一定是整度数。按投影的变形情况分析比较,则后者比较均匀;但从计算投影常数和应用简便的角度来衡量,则以事先选定标准纬线较好。关于选定标准纬线的方法,将在本章最后一节加以说明。

### 5.3 等面积圆锥投影

根据等面积条件,确定圆锥投影 $\rho$ 的具体形式,则成为等面积圆锥投影。因正轴圆锥投影经纬网为正交,故等面积条件为

$$P = m \cdot n = 1,$$

将公式(5-3)中的 $m$ 和 $n$ 代入,则

$$\begin{aligned} -\frac{d\rho}{R d\varphi} \cdot \frac{\sigma\rho}{r} &= 1, \\ \rho d\rho &= -\frac{1}{\sigma} R^2 \cos\varphi d\varphi, \end{aligned}$$

两边积分,则

$$\begin{aligned} \int \rho d\rho &= -\frac{R^2}{\sigma} \int \cos\varphi d\varphi, \\ \frac{\rho^2}{2} &= -\frac{R^2}{\sigma} (\sin\varphi + K), \\ \rho^2 &= \frac{2R^2}{\sigma} (K - \sin\varphi). \end{aligned} \quad (5-24)$$

等面积圆锥投影的常数  $\sigma$  和  $K$  同样要根据切圆锥或割圆锥投影来确定。在切圆锥投影中,圆锥切于纬度为  $\varphi_0$  的纬线,参照(5-7)式,则

$$\sigma = \sin \varphi_0。$$

根据切纬线长度比等于 1,可以决定常数  $K$ 。将(5-6)式等号两边平方,得

$$n_0^2 = \frac{\sigma^2 \rho_0^2}{R^2 \cos^2 \varphi_0},$$

将(5-24)式代入上式,则

$$n_0^2 = \frac{\sigma^2 \frac{2R^2}{\sigma} (K - \sin \varphi_0)}{R^2 \cos^2 \varphi_0} = \frac{2\sigma(K - \sin \varphi_0)}{\cos^2 \varphi_0}。 \quad (5-25)$$

因为  $n_0^2 = 1$ ,则

$$\frac{2\sigma(K - \sin \varphi_0)}{\cos^2 \varphi_0} = 1,$$

所以

$$2\sigma K - 2\sigma \sin \varphi_0 = \cos^2 \varphi_0;$$

因  $\sigma = \sin \varphi_0$ ,代入上式则

$$2\sin \varphi_0 K - 2\sin^2 \varphi_0 = \cos^2 \varphi_0,$$

上式两边同除以  $\sin \varphi_0$ ,有

$$2K - 2\sin \varphi_0 = \frac{\cos^2 \varphi_0}{\sin \varphi_0},$$

所以

$$K = \frac{\cos^2 \varphi_0 + 2\sin^2 \varphi_0}{2\sin \varphi_0} = \frac{1 + \sin^2 \varphi_0}{2\sin \varphi_0} = \frac{1}{2}(\csc \varphi_0 + \sin \varphi_0)。 \quad (5-26)$$

对于等面积割圆锥投影,所割的纬线的纬度为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ ,则它们的长度比为

$$n_1 = n_2 = 1。$$

参照(5-25)式写出它们的表达式:

$$\left. \begin{aligned} n_1^2 &= \frac{2\sigma(K - \sin \varphi_1)}{\cos^2 \varphi_1} \\ n_2^2 &= \frac{2\sigma(K - \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2} \end{aligned} \right\}。 \quad (5-27)$$

由

$$\frac{2\sigma(K - \sin \varphi_1)}{\cos^2 \varphi_1} = \frac{2\sigma(K - \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2},$$

$$(K - \sin \varphi_1) \cos^2 \varphi_2 = (K - \sin \varphi_2) \cos^2 \varphi_1,$$

$$K(\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_1) = \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos^2 \varphi_1,$$

所以

$$K=\frac{\sin\varphi_1\cos^2\varphi_2-\sin\varphi_2\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1}。 \tag{5-28}$$

由  $n_1^2$  或  $n_2^2$  等于 1 可求  $\sigma$ , 利用 (5-27) 式:

$$n_1^2=\frac{2\sigma(K-\sin\varphi_1)}{\cos^2\varphi_1}=1,$$

故有

$$\sigma=\frac{\cos^2\varphi_1}{2(K-\sin\varphi_1)}。$$

将 (5-28) 式代入上式, 则

$$\sigma=\frac{\cos^2\varphi_1}{2(\frac{\cos^2\varphi_2\sin\varphi_1-\cos^2\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1}-\sin\varphi_1)}=\frac{\cos^2\varphi_1}{2\left[\frac{\cos^2\varphi_1(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1}\right]},$$

简化后得:

$$\sigma=\frac{\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1}{2(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)}。 \tag{5-29}$$

等面积割圆锥投影要比等面积切圆锥投影的应用较为广泛, 这一投影为德国人亚尔勃斯 (H. C. Albers 1773 年~1833 年) 首先提出, 故又称亚尔勃斯投影。现将等面积割圆锥投影公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= \frac{2R^2}{\sigma}(K-\sin\varphi) \\ \delta &= \sigma\lambda \\ \sigma &= \frac{\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1}{2(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)} \\ x &= \rho_s - \rho\cos\delta \\ y &= \rho\sin\delta \\ n^2 &= \frac{2\sigma(K-\sin\varphi)}{\cos^2\varphi} \\ K &= \frac{\sin\varphi_1\cos^2\varphi_2-\sin\varphi_2\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1} \\ m &= \frac{1}{n} \\ \tan(45^\circ+\frac{\omega}{4}) &= \sqrt{\frac{a}{b}} = n \end{aligned} \right\}。$$

(5-30)



## 5.4 等距离圆锥投影

以等距离条件  $m=1$  来决定圆锥投影中  $\rho$  的具体形式,则成为等距离圆锥投影。

由公式(5-3),则有

$$-\frac{d\rho}{Rd\varphi}=1,$$

$$d\rho=-Rd\varphi,$$

积分得

$$\rho=-R\varphi+K=K-R\varphi. \quad (5-31)$$

式中  $R\varphi$  是从赤道至  $\varphi$  度的经线长度。当  $\varphi=0$  时,  $R\varphi=0$ , 则  $\rho$  为赤道的投影半径  $\rho_{\text{eq}}$ , 于是常数  $K$  与赤道投影半径相等, 即

$$K=\rho_{\text{eq}}。$$

将(5-31)式代入纬线长度比  $n=\frac{\sigma\rho}{r}$ , 则

$$n=\frac{\sigma(K-R\varphi)}{R\cos\varphi}。 \quad (5-31a)$$

在等距离切圆锥投影中, 常数  $\sigma$  的确定同等角、等面积切圆锥投影一样, 即

$$\sigma=\sin\varphi_0。$$

常数  $K$  也就是  $\rho_{\text{eq}}$ , 可根据切纬线长度比等于 1 的条件决定。参照(5-31a)式, 则

$$n_0=\frac{\sigma(K-R\varphi_0)}{R\cos\varphi_0}=1,$$

将  $\sigma=\sin\varphi_0$  和  $K=\rho_{\text{eq}}$  代入上式, 则

$$\frac{\sin\varphi_0(\rho_{\text{eq}}-R\varphi_0)}{R\cos\varphi_0}=1,$$

$$\rho_{\text{eq}}-R\varphi_0=R\cot\varphi_0,$$

故

$$\rho_{\text{eq}}=R\cot\varphi_0+R\varphi_0。 \quad (5-32)$$

在等距离割圆锥投影中, 割纬线的纬度为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ , 其长度比参照(5-31a)式, 则有

$$n_1=\frac{\sigma(K-R\varphi_1)}{R\cos\varphi_1},$$

$$n_2 = \frac{\sigma(K - R\varphi_2)}{R\cos\varphi_2}。$$

根据  $n_1 = n_2 = 1$ , 可求得常数  $\sigma$  和  $K$  :

由  $\frac{\sigma(K - R\varphi_1)}{R\cos\varphi_1} = 1$ , 则

$$K - R\varphi_1 = \frac{R\cos\varphi_1}{\sigma}; \quad (5-33)$$

由  $\frac{\sigma(K - R\varphi_2)}{R\cos\varphi_2} = 1$ , 则

$$K - R\varphi_2 = \frac{R\cos\varphi_2}{\sigma}。 \quad (5-34)$$

以 (5-34) 式减 (5-33) 式得

$$R\varphi_1 - R\varphi_2 = \frac{R\cos\varphi_2 - R\cos\varphi_1}{\sigma},$$

所以

$$\sigma = \frac{R\cos\varphi_2 - R\cos\varphi_1}{R\varphi_1 - R\varphi_2}。 \quad (5-35)$$

由 (5-33) 和 (5-34) 式, 可得

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{R\cos\varphi_1}{\sigma} + R\varphi_1 \\ K &= \frac{R\cos\varphi_2}{\sigma} + R\varphi_2 \end{aligned} \right\}。 \quad (5-36)$$

等距离切圆锥投影仅适用于纬差较小的地区, 不如等距离割圆锥投影使用广泛。现将等距离割圆锥投影公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= K - R\varphi \\ \delta &= \sigma\lambda \\ m &= 1 \\ n &= \frac{\sigma(K - R\varphi)}{R\cos\varphi} \\ \sigma &= \frac{R\cos\varphi_2 - R\cos\varphi_1}{R\varphi_1 - R\varphi_2} \\ K &= \frac{R\cos\varphi_1}{\sigma} + R\varphi_1 = \frac{R\cos\varphi_2}{\sigma} + R\varphi_2 \\ P &= n \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) &= \sqrt{\frac{a}{b}} = n \end{aligned} \right\}。 \quad (5-37)$$

## 5.5 斜轴与横轴圆锥投影

### 5.5.1 斜轴与横轴圆锥投影的一般公式

由正轴圆锥投影的变形公式来看,其长度比、面积比和最大角度变形仅是纬度  $\varphi$  的函数,所以等变形线的形状同纬线的投影一致。因此这种投影适用于沿纬线延伸的制图区域。但对于制图区域沿其他任一方向延伸时,为了减少投影变形,应考虑使用斜轴或横轴圆锥投影。目前横轴圆锥投影很少使用,而斜轴圆锥投影近年来有的地图已在使用。

关于斜轴、横轴圆锥投影新极点  $Q(\varphi_0, \lambda_0)$  的确定,以及由地理坐标  $\lambda, \varphi$  换算成为球面极坐标  $\alpha, Z$  的问题,在本书 2.3 中已有详述,在此不重复。在斜轴、横轴圆锥投影中,等高圈投影为同心圆圆弧,垂直圈投影为同心圆的半径,两垂直圈间的夹角与相应的方位角差成正比。由此可写出它们的一般公式。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= f(Z) \\ \delta &= \sigma \alpha \\ x &= \rho_s - \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \\ \mu_1 &= \frac{d\rho}{R dZ} \\ \mu_2 &= \frac{\sigma \rho}{R \sin Z} \\ P &= \frac{\sigma \rho d\rho}{R^2 \sin Z dZ} \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right| \end{aligned} \right\} \quad (5-38)$$

由(5-38)式可以看出,只要以  $Z, \alpha$  代替(5-1)式的  $\varphi, \lambda$ , 以  $(90^\circ - Z)$  代替(5-3)式中的  $\varphi$ , 便可以将正轴圆锥投影的一般公式转变为斜轴或横轴圆锥投影的一般公式。

### 5.5.2 不同性质的斜轴、横轴圆锥投影

#### 1. 等角斜轴、横轴圆锥投影

根据等角条件应当是垂直圈长度比与等高圈长度比相等,即  $\mu_1 = \mu_2$ 。由(5-38)式有

$$\frac{d\rho}{RdZ} = \frac{\sigma\rho}{R\sin Z},$$

移项

$$\frac{d\rho}{\rho} = \sigma \frac{dZ}{\sin Z},$$

积分后得：

$$\ln \rho = \sigma \ln \tan \frac{Z}{2} + \ln K,$$

式中  $\ln K$  为积分常数。

所以

$$\rho = K \tan^{\sigma} \frac{Z}{2}. \quad (5-39)$$

长度比和面积比的公式为

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 &= \frac{\sigma K \tan^{\sigma} \frac{Z}{2}}{R \sin Z} \\ P = \mu_1 \cdot \mu_2 &= \left( \frac{\sigma K \tan^{\sigma} \frac{Z}{2}}{R \sin Z} \right)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (5-40)$$

(5-39)和(5-40)式中的常数  $\sigma$  和  $K$  的确定同正轴投影一样,要根据切圆锥或割圆锥投影而定。

## 2. 等面积斜轴、横轴圆锥投影

不论斜轴还是横轴圆锥投影,垂直圈与等高圈互相正交,故等面积条件为  $P = \mu_1 \cdot \mu_2 = 1$ 。由(5-38)式,有

$$\frac{d\rho}{RdZ} \cdot \frac{\sigma\rho}{R\sin Z} = 1,$$

移项

$$\rho d\rho = \frac{1}{\sigma} R^2 \sin Z dZ,$$

积分后得：

$$\frac{\rho^2}{2} = \frac{1}{\sigma} (K - R^2 \cos Z), \quad (5-41)$$

$K$  为积分常数。

长度比和最大角度变形公式为

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 &= \frac{2(K - R^2 \cos Z)}{R \sin Z} \\ \mu_1 &= \frac{1}{\mu_2} \\ P &= 1 \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right| \end{aligned} \right\} \quad (5-42)$$

常数  $\sigma$  和  $K$  的确定与正轴圆锥投影相同。

### 3. 等距离斜轴、横轴圆锥投影

等距离条件为垂直圈长度比等于 1, 即

$$\mu_1 = \frac{d\rho}{R dZ} = 1,$$

或

$$d\rho = R dZ,$$

积分得:

$$\rho = K + RZ, \quad (5-43)$$

$K$  为积分常数。

长度比、面积比和最大角度变形公式为:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 1 \\ \mu_2 &= \frac{\sigma(K + RZ)}{R \sin Z} \\ P &= \mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{\sigma(K + RZ)}{R \sin Z} \\ \sin \frac{\omega}{2} &= \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right| \end{aligned} \right\} \quad (5-44)$$

常数  $\sigma$  和  $K$  的确定, 与正轴圆锥投影相同。

## 5.6 圆锥投影的分析和应用

### 5.6.1 变形分析

在前面曾提到, 正轴圆锥投影的经线长度比( $m$ )、纬线长度比( $n$ )、面积比( $P$ )和最大角度变形( $\omega$ )仅是纬度( $\varphi$ )的函数, 而与经度( $\lambda$ )无关, 所以等变形线的形状与纬线的投影相同。而在斜轴、横轴圆锥投影中, 垂直圈长度比( $\mu_1$ )、等高圈长度比( $\mu_2$ )、面积比( $P$ )和最大角度变形( $\omega$ )仅是天顶距( $Z$ )的函数, 而与方位角( $\alpha$ )无关, 所以等变形线的形状与等高圈的投影相同。

由于正轴圆锥投影与斜轴、横轴圆锥投影的变形情况相似,在此只讨论正轴情况。

图 5-7 表示正轴圆锥投影等变形线,  $\varphi_0$  是切圆锥投影标准纬线,  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  是割圆锥投影的标准纬线,箭头指示变形增大的方向。凡标准纬线上的长度比和面积比都等于 1 且  $\omega=0^\circ$ 。切圆锥投影的变形大小自标准纬线由南向北逐渐增大。在割圆锥投影中,纬线长度比在两标准纬线  $\varphi_1, \varphi_2$  之间小于 1,在  $\varphi_1, \varphi_2$  之外大于 1;经线长度比则根据投影的性质不同而不同。表 5-1 列出了在标准纬线相同的条件下,不同性质的圆锥投影其经纬线长度比的变化情况。



图 5-7 圆锥投影等变形线

表 5-1 圆锥投影经纬线长度比

标准纬线	等角		等面积		等距离	
	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$	$m$
切于 $\varphi_0$	$n > 1$	$m > 1$	$n > 1$	$m < 1$	$n > 1$	$m = 1$
	$n_0 = 1$	$m_0 = 1$	$n_0 = 1$	$m_0 = 1$	$n_0 = 1$	$m_0 = 1$
	$n > 1$	$m > 1$	$n > 1$	$m < 1$	$n > 1$	$m = 1$
割于 $\varphi_1, \varphi_2$	$n > 1$	$m > 1$	$n > 1$	$m < 1$	$n > 1$	$m = 1$
	$n_2 = 1$	$m_2 = 1$	$n_2 = 1$	$m_2 = 1$	$n_2 = 1$	$m_2 = 1$
	$n < 1$	$m < 1$	$n < 1$	$m > 1$	$n < 1$	$m = 1$
	$n_1 = 1$	$m_1 = 1$	$n_1 = 1$	$m_1 = 1$	$n_1 = 1$	$m_1 = 1$
	$n > 1$	$m > 1$	$n > 1$	$m < 1$	$n > 1$	$m = 1$

任何圆锥投影的变形,从标准纬线起向高纬度增长快,向低纬度增长慢。在不同性质(等角、等面积和等距离)的圆锥投影中并在标准纬线相同的条件下,沿纬线长度比的差别程度较小,但沿经线长度比的差别程度较大。在同一制图区域若用同一性质的投影,则割圆锥投影变形增大的绝对值要比切圆锥投影小。因此,前者比后者优越,所以实际应用也较为广泛。

5.6.2 标准纬线的选定

当决定采用某一性质的圆锥投影后,首先要选定适当的标准纬线。如果制图区域的纬度差不大,在  $3^\circ \sim 4^\circ$  以内,可采用单标准纬线圆锥投影。如

果制图区域的纬差大于上述数值,一般应采用双标准纬线圆锥投影。对于单标准纬线的选择非常简单,只要由制图区域南北边纬线的纬度  $\varphi_S, \varphi_N$  取中数并凑整为整度或半度就可以。对于双标准纬线的选择,通常有两种情况,即预先选定和由所指定的投影条件决定。对于后者,在 5.2.2 节中已作了介绍,只要根据所提出的投影条件进行计算,便会自行定出两标准纬线,但这样所定出的两标准纬线一般不是整度数。

现在介绍预先选定双标准纬线的两种常用的方法。

(1) 利用下列近似式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_S + \frac{1}{k}(\varphi_N - \varphi_S) \\ \varphi_2 &= \varphi_N - \frac{1}{k}(\varphi_N - \varphi_S) \end{aligned} \right\}, \quad (5-45)$$

式中:  $\varphi_1, \varphi_2$  为所求的南北两条标准纬线的纬度;  $\varphi_S, \varphi_N$  为投影区域南北边纬线的纬度;  $k$  是根据制图区域的形状而确定的数值(依据长度均方变形为最小的条件,由一种经验公式所定)。例如:① 当制图区域为矩形或平行四边形,其四角位于纬线上,可用  $k=5$ ;② 当制图区域近于圆形、椭圆形或某种闭合曲线形,可用  $k=4$ ;③ 若制图区域为任意四边形或菱形,且顶点位于边纬线上,可用  $k=3$ 。

(2) 当制图区域的纬差不超过  $20^\circ$  时,可使用以下的近似式求标准纬线:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_S + 0.16(\varphi_N - \varphi_S) \\ \varphi_2 &= \varphi_N - 0.12(\varphi_N - \varphi_S) \end{aligned} \right\}, \quad (5-46)$$

式中符号的意义与(5-45)式同。应用(5-46)式推求的标准纬线,基本上能符合边纬线与中纬线长度变形绝对值相等的要求。例如我国各省、自治区的地图,可利用此法选定圆锥投影的两标准纬线。

### 5.6.3 经纬网的构成

现在以双标准纬线等角圆锥投影编制中国全图(南海诸岛作插图)为例,阐述该投影的计算和经纬网的构成。

投影范围:  $70^\circ\text{E} \sim 145^\circ\text{E}, 15^\circ\text{N} \sim 55^\circ\text{N}$ 。

标准纬线:  $\varphi_1 = 25^\circ\text{N}, \varphi_2 = 47^\circ\text{N}$ 。

网格间隔:  $\Delta\lambda = \Delta\varphi = 5^\circ$ , 中央经线:  $110^\circ$ 。

主比例尺:  $1:1\,000$  万,采用克拉索夫斯基椭球体。

计算步骤(利用计算器或微机):

(1) 计算常数  $\sigma$

公式：

$$\sigma=\frac{\lg r_1-\lg r_2}{\lg U_2-\lg U_1},$$

式中  $r_1, r_2$  和  $U_1, U_2$  按标准纬线纬度由附表 2 查取(或按  $r$  和  $U$  的表达式直接计算)。

按上式计算结果得：

$$\sigma=0.591\,530\,5。$$

(2) 计算常数  $K$

公式：

$$K=\frac{r_1U_1^\sigma}{\sigma}=\frac{r_2U_2^\sigma}{\sigma},$$

化为图上长,则

$$K_{\text{cm}}=\frac{r_1U_1^\sigma}{\sigma}\cdot\frac{100}{\mu_0}=\frac{r_2U_2^\sigma}{\sigma}\cdot\frac{100}{\mu_0},$$

式中  $\mu_0$  为主比例尺分母,图上长度单位为 cm。

计算后得：

$$\begin{aligned} K &=12\,745\,644\text{ m}, \\ K_{\text{cm}} &=127.456\,4\text{ cm}。 \end{aligned}$$

(3) 计算投影半径  $\rho$

公式：

$$\rho=\frac{K}{U^\sigma}\quad\text{或}\quad\rho_{\text{cm}}=\frac{K_{\text{cm}}}{U^\sigma},$$

$U$  值按相应纬度由附表 2 查取。

计算结果按表 5-2 的格式列出：

表 5-2  $\rho_{\text{cm}}$  记录格式

$\varphi$	15°	20°	北回归线	25°	…	55°
$\rho_{\text{cm}}$	109.086 1	103.370 6	99.447 8	97.782 2	…	64.602 8

(4) 计算极角  $\delta$

公式：

$$\delta=\sigma\lambda,$$

式中  $\sigma$  值在(1)步, $\lambda$  为格网经度对中央经线之经差,即  $\lambda=\lambda_{\text{G}}-\lambda_0$ 。

$$\delta_1=\sigma\cdot5^\circ,\delta_2=\sigma\cdot10^\circ,\cdots,\delta_n=\sigma\cdot n5^\circ。$$



计算结果列入表 5-3 的  $\delta$  栏内。

(5) 计算经纬网交点的直角坐标  $x, y$  值

利用前面算出的  $\rho_{cm}, \delta$  和  $\rho_s$  (即  $15^\circ$  的  $\rho_{cm}$ ), 由公式

$$\begin{cases} x=\rho_s-\rho\cos\delta \\ y=\rho\sin\delta \end{cases}$$

进行计算。

计算结果按表 5-3 的格式列出。

表 5-3  $x, y$  记录格式

$\varphi$	$\lambda_G$	$110^\circ$	$105^\circ, 115^\circ$	$100^\circ, 120^\circ$	...	$70^\circ, 150^\circ$
	$\lambda$	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	...	$40^\circ$
	$\delta$	$0^\circ$	$2^\circ 57' 28''$	$5^\circ 54' 55''$	...	$23^\circ 39' 40''$
$15^\circ$	$x$	0	0. 145 3	0. 580 8	...	9. 170 3
	$y$	0	5. 628 8	11. 242 2	...	43. 779 1
$20^\circ$	$x$	5. 715 5	5. 853 2	6. 265 9	...	14. 405 4
	$y$	0	5. 333 9	10. 653 2	...	41. 485 5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$55^\circ$	$x$	44. 483 3	44. 569 4	44. 827 3	...	49. 914 1
	$y$	0	3. 333 5	6. 657 8	...	25. 926 8

(6) 计算长度比  $n$  和面积比  $P$

公式:

$$m=n=\frac{\sigma\rho}{r}=\frac{\sigma K}{rU^\sigma}, P=n^2,$$

计算结果列入表 5-4, 可供绘复式比例尺用。

表 5-4  $n, P$  记录格式

$\varphi$	$n$	$P$	$\varphi$	$n$	$P$
$15^\circ$	1. 047 1	1. 096 5	$40^\circ$	0. 983 8	0. 967 8
$20^\circ$	1. 019 8	1. 040 0	$45^\circ$	0. 993 6	0. 987 3
$25^\circ$	1. 000 0	1. 000 0	$50^\circ$	1. 012 5	1. 025 1
$30^\circ$	0. 987 4	0. 974 9	$55^\circ$	1. 042 2	1. 086 2
$35^\circ$	0. 981 9	0. 964 1			

计算的工作步骤已完成,但表 5-3 中的  $x, y$  值未全部计算出来。读者如能按上述计算方法和步骤将表 5-3 中  $x, y$  值计算齐全,就可以利用它展绘地图的经纬网。

经纬网的展绘,以南边纬线  $\varphi_s$  与中央经线的交点为坐标原点,过该点作中央经线的垂直线即为  $Y$  轴。在图版或图纸上定出坐标原点和  $X, Y$  坐标轴,然后按各点坐标值进行展绘并连接成经纬网,如图 5-8 所示(该图为概略形式)。

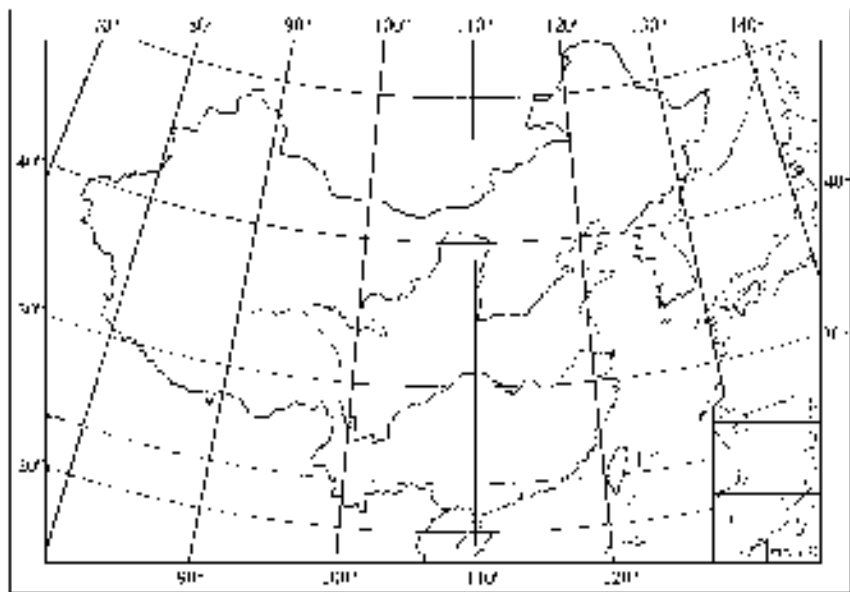


图 5-8 等角圆锥投影用于中国全图(南海诸岛作插图)的经纬网略图

#### 5.6.4 应用

根据正轴圆锥投影的变形特点看,它适用于中纬度地区沿纬线方向延伸的制图区域。由于世界上很大一部分陆地处在北半球和南半球的中纬地带,而且圆锥投影的经纬网形状简单,计算和使用都比较方便,因此这种投影被广泛使用。尤其等角圆锥投影,可用于大、中、小各种比例尺的地图。

中国过去的 1:5 万地形图,曾以等角割圆锥投影作为数学基础。从北纬  $21^{\circ}40'$  起每隔  $3^{\circ}30'$  作为一个投影带,将我国大陆分为 21 带。带与带之间重叠  $30'$ ,每带的标准纬线为南边纬线的纬度加  $30'$ ,北边纬线的纬度减  $30'$ 。各带均以中央经线  $105^{\circ}$  的投影作为  $X$  轴,中央经线与每带南边纬线的交点为坐标原点,过交点与  $X$  轴垂直的直线作  $Y$  轴。以此按等角割圆锥投影

公式计算并制成坐标表。为了避免  $y$  出现负值,将  $X$  轴向西平移 3 500 km。该投影的最大长度变形约为  $1/4\ 000$ ,能满足测图精度要求。西欧国家中,至今还有使用此投影作为地形图数学基础的。

等角圆锥投影很适宜于编制航空图。在第二次世界大战期间,美国编制的 1:100 万《美国空军航空图》(US Air Force Aeronautical Chart),在南北纬  $4^{\circ}\sim 72^{\circ}$  之间使用等角割圆锥投影( $4^{\circ}\text{S}\sim 4^{\circ}\text{N}$  使用墨卡托投影,南北纬  $72^{\circ}$  至南北极都使用正轴等角方位投影)。并划分三带进行投影:

第一带  $4^{\circ}\sim 28^{\circ}, \varphi_1=7^{\circ}, \varphi_2=20^{\circ}$ ;

第二带  $28^{\circ}\sim 48^{\circ}, \varphi_1=33^{\circ}, \varphi_2=45^{\circ}$ ;

第三带  $48^{\circ}\sim 72^{\circ}, \varphi_1=55^{\circ}, \varphi_2=65^{\circ}$ 。

第二次世界大战结束后,将上述《美国空军航空图》改名为《美国空军世界航空图》,并对投影稍有改变。从赤道至南北纬  $80^{\circ}$  都使用等角割圆锥投影,以  $4^{\circ}$  为一带单独计算坐标,两标准纬线距南北边纬线为  $\pm 40'$ 。1947 年后,国际航空组织(ICAO&ICAN)决定以该种航空图为基础,建议各成员国编制各自的 1:100 万航空图。

1962 年联合国在波恩举行的世界百万分之一国际地图会议上通过的制图规范,建议用等角圆锥投影取代原先的改良多圆锥投影,作为 1:100 万地图的数学基础。这样,可使世界 1:100 万普通地图与世界 1:100 万航空图的数学基础取得一致。

1978 年我国新制订的《1:100 万地形图编绘规范》,决定采用边纬线和中纬线长度变形绝对值相等的等角割圆锥投影作为中国 1:100 万分幅地形图的数学基础。投影带的划分与国际百万分之一地图的分幅一致(详见本书 5.2 后段)。

有的地图集中,也使用等角圆锥投影,如 20 世纪 50 年代我国地图出版社出版的中国分省图。

1949 年以后我国出版的一些挂图和地图集中常使用等面积割圆锥投影。如中国科学院地理研究所编绘的《1:400 万中国地势图》,采用标准纬线为  $25^{\circ}$  和  $45^{\circ}$  的等面积圆锥投影。地图出版社 1977 年出版的《1:600 万中华人民共和国地图》,采用标准纬线为  $25^{\circ}$  和  $47^{\circ}$  的等面积圆锥投影。此外我国出版的地图集中,有些图幅也采用等面积圆锥投影。

前苏联出版的地图和地图集中,常使用等距离圆锥投影。如《1:250 万全苏联分层设色地势图》,即采用了等距离割圆锥投影。前苏联出版的《世界大地图集》中的苏联图幅,多采用长度均方变形为最小的等距离圆锥投影,标准纬线选在  $\varphi_1=47^{\circ}, \varphi_2=62^{\circ}$ 。

由于等距离投影的变形介于等角与等面积投影之间,在中纬度地带,如果对角度和面积的变形要求不高,一般可选用等距离圆锥投影。

横轴圆锥投影极少使用,斜轴圆锥投影近年来已有使用。美国地理学会(AGS)曾根据米勒(Miller)和布里斯迈司特(Briesemeister)1941年提出的双极斜轴等角圆锥投影(Bipolar Oblique Conic Conformal Projection),编制过南北美洲合幅地图。实际上这是组合投影,即用两个方向相反的斜轴圆锥并使不等值的等高圈相接合,按等角条件将南北美洲大陆投影到一幅图上,如图5-9所示。图中虚线为两条标准等高圈。1969年美国地质测量局曾用该投影作为北美洲地壳构造图的数学基础,不过在边框处略有调整。

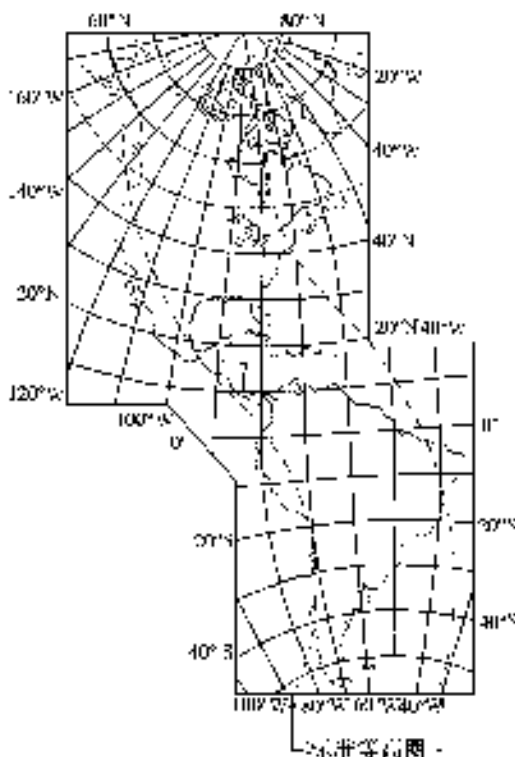


图 5-9 双极斜轴等角圆锥投影的南北美洲图

## 复习思考与计算题

1. 正轴等角圆锥投影常数  $\sigma, K$  是依据什么条件决定的, 主要有哪几种?
2. 为什么编制地图时通常选用割圆锥投影, 割圆锥投影与切圆锥投影变形分布有什么规律?
3. 圆锥投影的等变形线为什么形状, 它适宜于编制什么样地区的地图?
4. 在双标准纬线的等角、等积和等距离圆锥投影种, 经纬线长度比是如何变化的?
5. 利用双标准纬线等角圆锥投影公式, 计算并绘制用于编制中国全图(南海诸岛作插图)时的经纬格网(具体参数详见本章 5.6.3)。

# 第 6 章 多圆锥投影

## 6.1 普通多圆锥投影

由第 5 章我们知道,在切圆锥投影中,圆锥所切的纬线投影后无变形,离切纬线愈远其变形愈大。为了改变这一缺点,可以把所需要的纬线都当作切纬线。如此就假设有许多圆锥和地球相切,然后沿交于同一个平面的各圆锥母线切开展平,即得多圆锥投影。

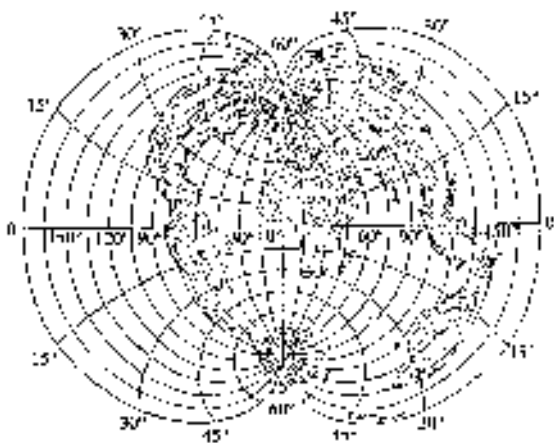


图 6-1 多圆锥投影经纬网

在多圆锥投影中,中央经线投影为直线且保持长度无变形;纬线投影为同轴圆圆弧,圆心在中央经线及其延长线上,各纬线都保持投影后无长度变形且与中央经线正交;其余经线为对称于中央经线的曲线。如图 6-1 所示。

在多圆锥投影中,应用较多的是普通多圆锥投影和改良多圆锥投影。普通多圆锥投影是保持中央经线和各纬线投影后长度不变的多圆锥投影。

参看图 6-2,设有许多圆锥切于地球上,其中某个圆锥切于纬度为  $\varphi$  的  $ABG$  纬线上。由于各纬线投影后无长度变形即  $n=1$ 。于是

$$AB=A'B'=r\lambda=R\cos\varphi\lambda,$$

而

$$A'B' = \rho\delta \text{ 或 } \delta = A'B'/\rho。$$

由图 6-2(a) 知, 纬度  $\varphi$  的纬线投影半径为:

$$\rho = R \cot \varphi,$$

因而

$$\delta = \frac{A'B'}{\rho} = \frac{R \cos \varphi \lambda}{R \cot \varphi} = \lambda \sin \varphi。$$

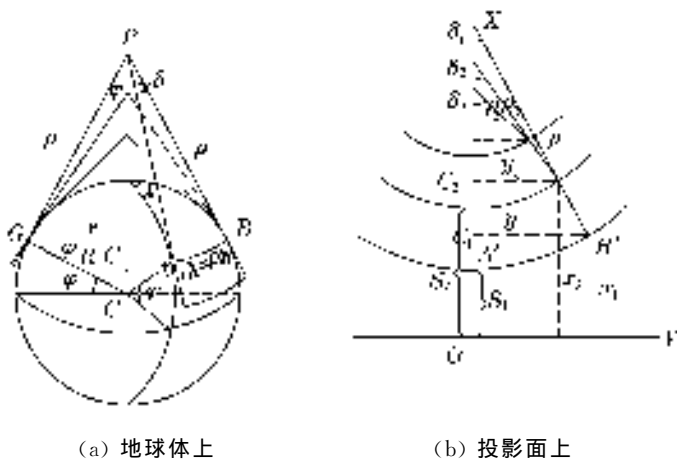


图 6-2 多圆锥投影示意图

由此得普通多圆锥投影的极坐标公式为

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \lambda \sin \varphi \\ \rho &= R \cot \varphi \end{aligned} \right\}^{\circ} \quad (6-1)$$

由图 6-2(b) 有

$$\begin{aligned} x_1 &= S_1 + C_1 A' = S_1 + \rho_1 - \rho_1 \cos \delta_1 \\ &= S_1 + \rho_1 (1 - \cos \delta_1), \\ y_1 &= \rho_1 \sin \delta_1。 \end{aligned}$$

按图 6-2(b) 所示, 同样可得  $x_2, y_2 \dots$ , 于是普通多圆锥投影的直角坐标公式为

$$\left. \begin{aligned} x &= S + \rho (1 - \cos \delta) \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\}^{\circ} \quad (6-2)$$

将 (6-1) 式有关值代入 (6-2) 式, 则有:

$$\left. \begin{aligned} x &= S + R \cot \varphi [1 - \cos(\lambda \sin \varphi)] \\ y &= R \cot \varphi \cdot \sin(\lambda \sin \varphi) \end{aligned} \right\}, \quad (6-3)$$

式中  $S$  为中央经线上由赤道至纬度  $\varphi$  的经线弧长。由于中央经线投影的长度不变,故  $S$  可按式求得:

$$S=R\varphi=\frac{R}{\mu_0}\cdot\varphi,$$

式中:  $\mu_0$  为地图主比例尺分母,  $\varphi$  以弧度计。

普通多圆锥投影属任意投影,既不等角也不等面积,除了各纬线和中央经线保持长度无变形外,其余经线都增大了。表 6-1 列出本投影的经线长度、面积和角度的变形情况。

表 6-1 普通多圆锥投影的经线长度比、面积比和角度的变形情况

$\varphi$	$\lambda$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
	$m\ P\ \omega$				
$0^\circ$	$m$	1	1.138	1.552	2.242
	$P$	1	1.138	1.552	2.242
	$\omega$	0	$7^\circ24'$	$24^\circ59'$	$45^\circ03'$
$30^\circ$	$m$	1	1.103	1.406	1.898
	$P$	1	1.103	1.404	1.883
	$\omega$	0	$5^\circ37'$	$19^\circ38'$	$36^\circ51'$
$60^\circ$	$m$	1	1.034	1.129	1.270
	$P$	1	1.034	1.129	1.270
	$\omega$	0	$1^\circ55'$	$7^\circ14'$	$14^\circ52'$
$90^\circ$	$m$	1	1	1	1
	$P$	1	1	1	1
	$\omega$	0	0	0	0

根据这一投影的变形值随着离中央经线的经差的增大而增加的特点,它适用于沿某一经线延伸的制图区域。美国海岸大地测量局(USCGS)曾用该投影编制美国海岸附近的地图。

将地球当作球体的普通多圆锥投影还有一项专门的用途,即作为地球仪的数学基础。这主要是利用该投影的中央经线和所有纬线投影无长度变形的特点,对于沿中央经线两侧经差不大的十几个狭长条瓣单独实行投影,能够合成球形而无多大误差。

当展绘地球仪经纬网时,可以不用投影直角坐标,只用纬线投影半径和相应的纬线弧长即可。下面作简要介绍。



第一步,确定地球仪半径、经纬差和分瓣数目。若将地球球体半径缩小 5000 万倍,可制作半径  $R_s=12.74\text{ cm}$  的地球仪。若采用经纬差为  $\Delta\lambda=\Delta\varphi=15^\circ$  时,可以  $2\times\Delta\lambda=30^\circ$  为一瓣,全球分为 12 瓣。若采用  $\Delta\lambda=\Delta\varphi=10^\circ$  时,可以  $2\times\Delta\lambda=20^\circ$  为一瓣,全球分为 18 瓣。现以前者为例。

第二步,计算  $\Delta\lambda=\Delta\varphi=15^\circ$  的各纬线弧长和纬圈投影半径。按下式计算  $\Delta\lambda=15^\circ$  的各纬线弧长  $S_n$ :

$$S_n = \frac{2\pi r}{360^\circ/\Delta\lambda} = \frac{\pi R_s \cos\varphi}{12}; \quad (6-4)$$

按下式计算  $\varphi=15^\circ, 30^\circ, \dots, 75^\circ$  的纬圈半径  $\rho_c$ :

$$\rho_c = \rho_s \cot\varphi. \quad (6-5)$$

由(6-4)和(6-5)式计算结果得表 6-2。

表 6-2  $S_n, \rho_c$  记录格式

$\varphi$	$\Delta\lambda=15^\circ$ 的 $S_n(\text{cm})$	各纬圈半径 $\rho_c(\text{cm})$
$75^\circ$	0.86	3.41
$60^\circ$	1.67	7.35
$45^\circ$	2.36	12.74
$30^\circ$	2.89	12.07
$15^\circ$	3.22	47.55
$0^\circ$	3.34	—

第三步,构成经纬网。先在图纸(最好是裱版)上精确打出两条直角坐标轴,水平轴代表赤道,垂直轴代表中央经线。再按  $\pi R_s/2=20.01\text{ cm}$ ,由  $O$  点向上、向下在中央经线上定出  $N$  和  $S$  两极点。然后对  $ON$  和  $OS$  都等分为 6 等分,各分点即纬度  $15^\circ, 30^\circ, \dots, 75^\circ$  在中央经线上的截距。再以  $15^\circ, 30^\circ, \dots$  纬圈半径  $\rho_c$  在中央经线及其延长线上由各点定出圆心,然后过  $15, 30, \dots$  点画  $\widehat{11'}, \widehat{22'}, \dots$  弧即为纬线。接着用表 6-2 中  $S_n$  值由中央经线向左右定出  $O_1, O_2, a_1, a_2, b_1, b_2, \dots$  各点即得边经线,如图 6-3。

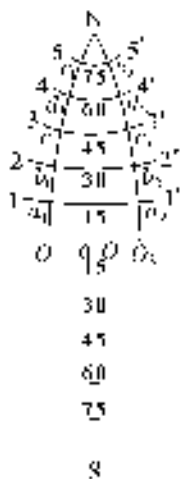


图 6-3 地球仪之一瓣的展绘

南北半片的展绘方法和数据与北半片相同。

如果认为在弧线上量长度不够精确,也可用各纬线弧上两点间的弦长来检查。其弦长可按下式计算:

$$g = 2R_s \cos \varphi \cdot \sin \Delta \lambda (\text{cm}) \quad (6-6)$$

当展绘完成一瓣的经纬网后,将它复制成相等的 12 瓣,在图版上绘出赤道和各中央经线并以此作控制进行拼贴,以保证精度和一致性。然后转绘上陆地轮廓和其他地理要素,即成为地球仪原稿,如图 6-4。

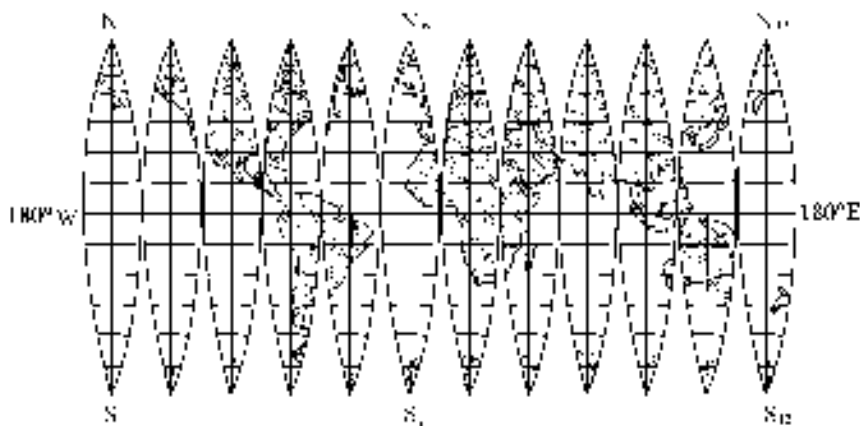


图 6-4 地球仪原稿的形状

如果需要大量生产,还须经过清绘、制板、彩色印刷和粘贴到地球仪坯胎上等工艺过程。

## 6.2 改良多圆锥投影

1962 年以前,世界各主要国家根据世界地图专门委员会于 1909 年在伦敦和 1913 年在巴黎两次国际会议上的决定和建议,在各国编制出版国际 1:100 万地图时,采用改良多圆锥投影。

改良多圆锥投影是在普通多圆锥投影的基础上,进行以下的改良而成。

(1) 统一分幅单独投影。在纬度  $0^{\circ} \sim 60^{\circ}$  之间,按纬差  $4^{\circ}$  和经差  $6^{\circ}$  分幅;在纬度  $60^{\circ} \sim 76^{\circ}$  之间,按纬差  $4^{\circ}$  和经差  $12^{\circ}$  分幅;在纬度  $76^{\circ} \sim 88^{\circ}$  之间,按纬差  $4^{\circ}$  和经差  $24^{\circ}$  分幅。并以每个图幅范围的球面梯形单独投影。

(2) 图幅的边纬线投影成同轴圆弧,且保持其长度无变形。其投影半径为

$$\rho = N \cot \varphi,$$

式中  $N$  为卯酉圈曲率半径。以边纬线与中央经线的交点为坐标原点, 参看图 6-5, 并考虑 (6-1) 式中

$$\delta = \lambda \sin \varphi,$$

则其直角坐标公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho - \rho \cos \delta = \rho [1 - \cos(\lambda \sin \varphi)] \\ y &= \rho \sin \delta = \rho \sin(\lambda \sin \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6-7)$$

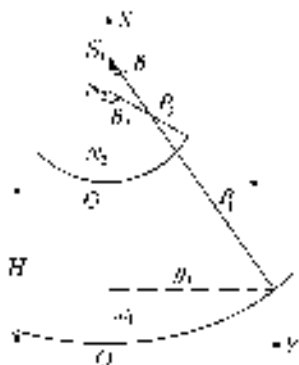


图 6-5 改良多圆锥投影的直角坐标

国际百万分之一地图规定经纬网密度为  $\Delta\lambda = \Delta\varphi = 1^\circ$ , 故对经差  $6^\circ$  的图幅来说, 只要计算边纬线上三个点的  $x, y$  值即可, 其余各点由上、下边纬线上的对应点连成直线并进行四等分, 即可求得。如图 6-6 所示。但纬线须连成圆滑的曲线。

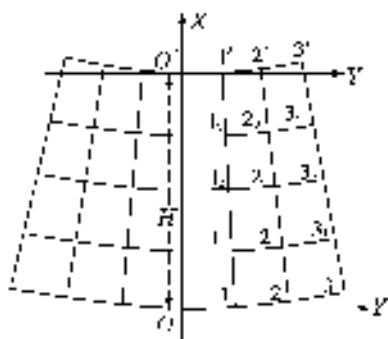


图 6-6 国际 1:100 万地图经纬网展绘示意图

由于大多数的图幅为经差  $\pm 3^\circ$ ,  $\lambda$  是一微量, 故可将 (6-7) 式展开为级

数,并舍去  $\lambda^4$  项,最后得到的直角坐标公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\lambda^2}{2} N \cos \varphi \cdot \sin \varphi \\ y &= \lambda N \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{6} N \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6-8)$$

由(6-8)式可以计算边纬线上各点的直线坐标。

(3) 所有经线都绘成直线,在离中央经线  $\pm 2^\circ$  的经线(经差  $12^\circ$  的图幅为  $\pm 4^\circ$ ,经差  $24^\circ$  的图幅为  $\pm 8^\circ$  的经线)上保持长度不变。

为了达到  $\lambda$  为  $\pm 2^\circ$  的经线长度比等于 1,必须使中央经线略微缩短,使其长度比小于 1。经过推算,得中央经线长度比为

$$m'_0 = 1 - 0.000\,609 \cos^2 \varphi。$$

以  $K$  表示中央经线的缩小值,则

$$K = 0.000\,609 \cdot \Delta S \cdot \cos^2 \varphi,$$

式中  $\Delta S$  为纬差  $4^\circ$  的经线弧长。由于  $K$  值甚小,  $\Delta S$  可以采用近似值表示,即

$$\Delta S = 444 \text{ mm},$$

于是

$$K = 0.27 \cos^2 \varphi \text{ mm}。$$

通常用  $H$  表示百万分一图中的中央经线长度(图 6-6),即缩小后长度。设其实长为  $S_0$ ,则

$$H = S_0 - K。$$

$H$  值载于老百万分一地图编绘规范附录 2 中。

由于这一投影是按各幅 1:100 万地图单独实施,沿同纬度的单幅地图横排,或沿同经度的单幅地图纵排,都可以严密接合。但是四幅图拼接在一起时,会产生裂隙角,如图 6-7。

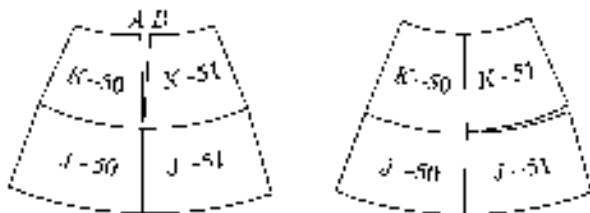


图 6-7 四幅图拼接时所产生的裂隙

四幅 1:100 万地图拼接可能产生的最大裂隙角  $\epsilon'$ ,可由下式计算

$$\epsilon' = 25.1' \cos \varphi,$$

式中  $\varphi$  为共同图角点纬度。设百万分一图图廓纵长为 445 mm, 则裂隙角的线性距离为

$$AB = 3.25 \cos \varphi \text{ (mm)}.$$

由于改良多圆锥投影为任意投影, 既不等角又不等面积, 尤其今天, 对于用作航空图的地理底图很不适合, 故被等角割圆锥投影所取代。但这一投影在世界上应用较广, 历史较长, 各国用这一投影编制的 1:100 万地图数量很大, 因而储存着大量信息和历史资料, 所以对这一投影仍需有所了解。

### 6.3 广义多圆锥投影

在前面讲的多圆锥投影中, 由于附加了以下两个条件, 使广义多圆锥投影成为狭义的。这两个条件是: ① 纬线的投影半径  $\rho = N \cot \varphi$  (或  $\rho = R \cot \varphi$ ); ② 沿中央经线的长度比不变, 即  $m=1$ 。

广义多圆锥投影则不受以上条件限制, 只规定中央经线和纬线的投影形状, 即中央经线投影为直线, 纬线投影为同轴圆圆弧并与中央经线垂直。称这类投影为广义多圆锥投影。下面简单介绍两种这类投影。

#### 6.3.1 前苏联中央测绘科学研究所多圆锥投影

前苏联测绘科研所用 Н. А. 乌尔马耶夫数值法拟定的用于世界地图的投影, 即所谓 ЦНИИГАИК 多圆锥投影。它主要是在 Г. А. 金兹布尔格领导下完成的。现将他们 1950 年多圆锥投影方案的拟定步骤和投影特点简述如下:

(1) 拟定经纬网草图。根据用图要求: 中央经线为直线, 经纬网对称于中央经线; 纬线上各经线间隔相等(等分); 两极投影为平滑的曲线, 但不包括在图廓内; 高纬度纬线要求不要弯曲太大; 变形性质介于等角与等面积之间, 面积变形在大陆的重要地区不超过 50%~60%, 大部分地区的角度变形不超过 45°~50°; 使其国家领土位置近于图幅中部。绘出草图后, 用图解法求出具有特征的经纬网交点的长度比  $m, n$  和经纬线倾角  $\epsilon$ 。再据此求面积比  $P$  和最大角度变形  $\omega$ 。经过反复纠正, 使之符合设计要求。

(2) 计算边缘(离中央经线 180°)经线与各纬线交点的直角坐标。这时要利用草图量出的坐标值, 以符合下列  $x, y$  的多项式:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_0 \varphi + a_1 \varphi^3 + a_2 \varphi^5 + \dots \\ y &= b_0 \varphi^2 + b_1 \varphi^4 + b_2 \varphi^6 + \dots \end{aligned} \right\}^{\circ}$$

经过计算、改正等手续,定出边缘经线与各纬线交点的直角坐标。

(3) 求经差  $60^{\circ}$  和  $120^{\circ}$  的中间经线与各纬线交点的直角坐标。根据纬线等分的条件,按比例进行计算。

(4) 其余经线与各纬线交点的直角坐标,可根据已定出的边缘经线和中间经线上各交点的直角坐标,用内插法和外延法推求。

(5) 最后计算长度比、面积比和最大角度变形。

前苏联中央测绘科学研究所 1950 年多圆锥投影方案的实用公式为:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= R(a\varphi^{\circ} - b\varphi^{\circ}) \\ x_{180} &= R(c\varphi^{\circ} - d\varphi^{\circ 3}) \\ y_{180} &= R(e - f\varphi^{\circ 2} - g\varphi^{\circ 4}) \end{aligned} \right\}.$$

(6-9)

式中:

$$\left. \begin{aligned} a &= \arcsin 1^{\circ} \\ b &= 0.000\,000\,239\,2 \\ c &= 0.023\,550 \\ d &= 0.000\,000\,293\,7 \\ e &= 150a \\ f &= 0.000\,190\,80 \\ g &= 0.000\,000\,003\,19 \end{aligned} \right\}.$$

$x_0$  为各纬线与中央经线交点的纵坐标; $x_{180}, y_{180}$  为边缘经线( $\lambda = 180^{\circ}$ )与各纬线交点的纵横坐标;

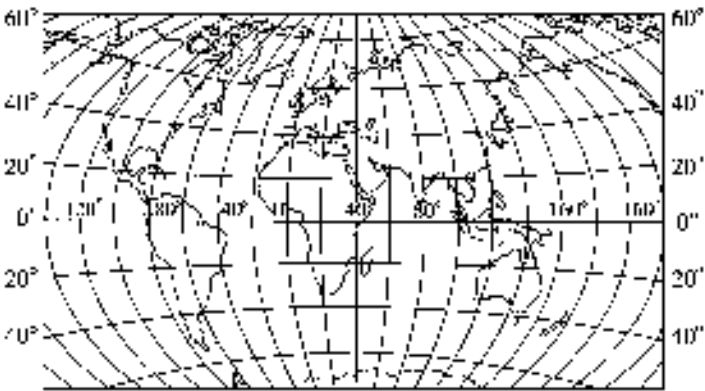


图 6-8 ЦНИИГАИК 多圆锥投影世界图

该投影的经纬网形状如图 6-8。这一投影的特点:中央经线和赤道投影为直线,并且为其他经纬线的对称轴;纬线的间隔从赤道向两极逐渐增大,而各纬线上的经线间隔则相等,故又称等分纬线多圆锥投影。我国 20

世纪 50 年代曾用此投影编制过世界地图。

### 6.3.2 等差分纬线多圆锥投影

等差分纬线多圆锥投影,是我国地图出版社 1963 年的设计方案。针对我国在世界上的形势和位置,指定变形分布。投影的直角坐标和变形值全部用解析计算式获得。该投影的设计过程,大致有以下几个阶段:

- (1) 确定中央经线上的  $x_0$  坐标公式和边经线上  $x_n, y_n$  坐标公式;
- (2) 计算各纬线的极距(投影半径) $\rho$  和边缘经线的极角  $\delta_{\varphi_n}$ ;
- (3) 确定不等分纬线的函数式  $\delta_{\varphi_i}$  和赤道上的  $y_0$  坐标公式;
- (4) 计算投影直角坐标  $x, y$  值;
- (5) 计算投影变形值。

通过设计、计算和实践完成了这一投影。地图出版社用这一投影编制过数种比例尺的世界政区图和其他内容的世界地图。图 6-9 是等差分纬线多圆锥投影的经纬网略图。

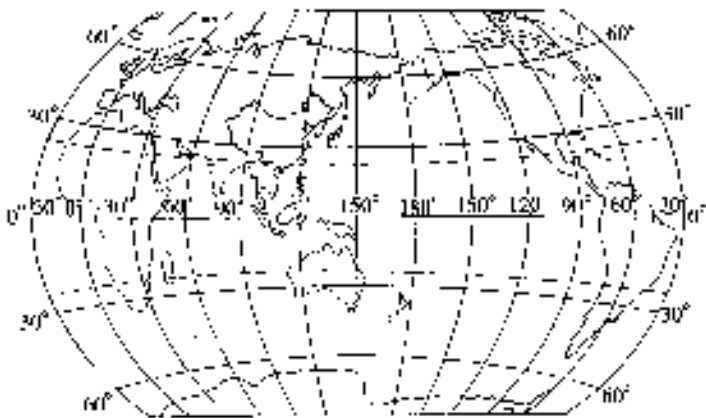


图 6-9 等差分纬线多圆锥投影(纬线不等分)

参看图 6-9,有助于认识这一投影的下列特点:

- (1) 纬线投影为同轴圆圆弧,并对称于赤道;中央经线投影为直线,为各纬线投影中心所在之轴;其余经线为对称于中央直经线的曲线,各经线间的间隔,随着离中央经线的距离的增大而成比例地逐渐减小。
- (2) 极点投影为圆弧,其长度为赤道的  $\frac{1}{2}$  (未包括在图廓内)。
- (3) 这一投影的变形性质属于面积变形不大的任意投影。中国地区绝

大部分面积变形在 10% 以内,少数部分地区在 20% 左右,面积比等于 1 的等变形线,横穿中国中部;位于中央经线和南北纬约  $44^{\circ}$  的交点附近无角度变形。我国大部分地区的最大角度变形在  $10^{\circ}$  以内,部分地区也不超过  $13^{\circ}$ 。

因此,这一投影比较适合于我国编制世界地图使用。

## 复习思考题

1. 多圆锥投影的经纬网形状与圆锥投影有什么不同?
2. 改良多圆锥投影与普通多圆锥投影间有什么区别与联系?
3. 利用普通多圆锥投影公式,计算并绘制全球经纬格网。



# 第 7 章 伪圆锥投影和伪方位投影

## 7.1 伪圆锥投影——彭纳投影

根据伪圆锥投影的定义,该投影纬线描写为同心圆圆弧,中央经线描写为通过各纬线共同中心的直线,其他经线描写为对称于中央经线的曲线。由于伪圆锥投影的经、纬线不正交,故无等角投影,只有等面积和任意投影。

下面只讨论等面积伪圆锥投影即彭纳投影。它是 1752 年法国水利工程师彭纳(Bonne 1727 年~1795 年)为制作法国地图而创订的。1832 年法国曾使用此投影测制 1:8 万地形图。19 世纪中叶欧洲还有一些国家用这一投影测制地图,后因非等角投影不适宜地形图,逐步被摒弃。我国 20 世纪 50 年代出版的分省地图集中,曾用此投影编制中国政区图。

彭纳投影有这样一些条件:

- (1) 中央经线投影为直线,并保持长度无变形,即  $m_0 = 1$ ;
- (2) 纬线投影为同心圆圆弧且保持长度无变形,即  $n = 1$ ;
- (3) 中央经线与所有纬线正交,而中间纬线(切纬线)则与所有经线正交;
- (4) 面积比  $P = 1$ 。

伪圆锥投影的构成原理与等距离切圆锥投影基本相同。如图 7-1,设  $SA$  是切纬线的投影半径  $\rho_0$ ,由切圆锥投影(本书 5.2.1)知

$$\rho_0 = R \cot \varphi_0。$$

其他纬线的投影半径,根据中央经线投影后长度不变的条件,可利用等距离切圆锥投影公式(5-31)和(5-32)而有:

$$\rho = K - R\varphi,$$

$$\rho_{eq} = K = R \cot \varphi_0 + R\varphi_0。$$

将第二式的  $K$  代入第一式,则得

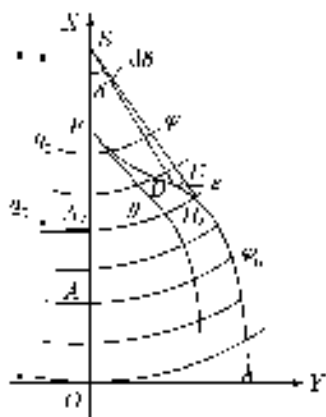


图 7-1 伪圆锥投影平面极坐标形式

$$\left. \begin{aligned} \rho &= R \cot \varphi_0 + R \varphi_0 - R \varphi \\ \rho &= \rho_0 + R \varphi_0 - R \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (7-1)$$

或  
式中:  $R\varphi_0$  是由赤道至切纬线间中央经线的弧长;  $R\varphi$  为赤道至所求投影半径的纬线间中央经线的弧长。

由公式(7-1)可以计算出展绘各纬线的投影半径  $\rho$ , 用  $\rho$  可以绘出纬线。

根据纬线长度比  $n=1$  的条件, 计算各纬线自中央经线至某一经线间各纬线弧的弦长。用弦长可以定出该经线与各纬线的交点。然后用圆滑的曲线连接, 就是经线的投影。

要求出纬线弧的弦长, 需要用两经线间的一段纬线弧与中心角的关系式。

在投影面上一段纬线弧长

$$\widehat{AB} = \rho \delta.$$

在地球面上相应的纬线弧长

$$S_n = r\lambda = R \cos \varphi \lambda.$$

由于彭纳投影纬线无长度变形, 故有

$$\rho \delta = \lambda R \cos \varphi,$$

所以

$$\delta = \frac{R \cos \varphi}{\rho} \lambda = \frac{r}{\rho} \lambda. \quad (7-2)$$

以  $g$  表示纬线的弦长, 则

$$g = 2\rho \sin \frac{\delta}{2}. \quad (7-3)$$

如果用于较大比例尺的地图, 可由下式计算投影直角坐标值

$$\left. \begin{aligned} x &= q - \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \end{aligned} \right\}, \quad (7-4)$$

式中:  $q$  为各纬线共同中心至坐标原点的距离。

由图 7-1 知,

$$q_0 = SO = R\varphi_0 + R \cot \varphi_0.$$

现将彭纳投影公式集中如下:

$$\left. \begin{aligned}
 \rho &= \rho_0 + R\varphi_0 - R\varphi \\
 \delta &= \frac{r}{\rho}\lambda \\
 x &= q - \rho \cos \delta \\
 y &= \rho \sin \delta \\
 m &= \sec \epsilon \\
 m_0 &= 1 \\
 n &= 1 \\
 \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \tan \epsilon
 \end{aligned} \right\}, \quad (7-5)$$

式中:  $\epsilon$  为经纬线交角  $\theta$  与直角之差, 即  $\epsilon = \theta - 90^\circ$ 。

彭纳投影的纬线比切圆锥投影的纬线要短。经线的投影为对称于中央直经线并向外突出的曲线。除了中央经线与各纬线、中间纬线(切纬线)与各经线正交外, 其余经纬线都不正交, 因此经纬线方向不是主方向。沿中央经线和中间纬线无投影变形, 离开这两条线越远, 其经线长度和角度的变形越大。该投影的经纬网形状如图 7-2 所示。

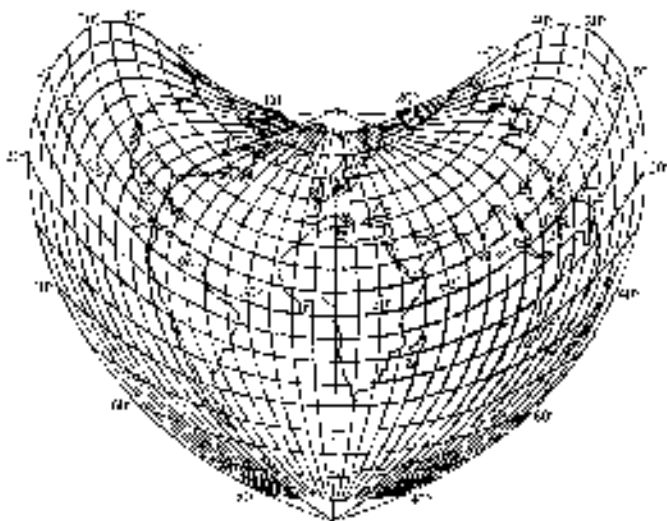


图 7-2 彭纳投影经纬网

## 7.2 伪方位投影

### 7.2.1 伪方位投影的一般公式

在正轴情况下,伪方位投影的纬线描写为同心圆,经线描写为交于各纬线共同圆心并对称于中央经线(直线)的曲线,如图 7-3。在斜轴或横轴投影中,等高圈描写为同心圆,垂直圈描写为交于各等高圈共同中心并对称于中央垂直圈的曲线,而经纬线都成为较为复杂的曲线。现在按上述定义,写出它的一般公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \\ \rho &= f_1(Z) \\ \delta &= f_2(Z, \alpha) \end{aligned} \right\}, \quad (7-6)$$

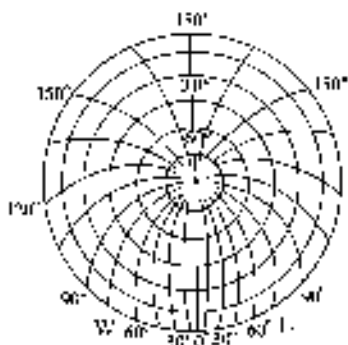


图 7-3 伪方位投影经纬网

式中:  $Z$  为天顶距,  $\alpha$  为方位角。

将式中的  $\rho, \delta$  对  $Z, \alpha$  微分, 经过整理, 可以求得这一投影的一般变形公式。现在略去推导过程, 只将结果书写于下:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{d\rho}{R dZ} \sec \epsilon \\ \mu_2 &= \frac{\rho}{R} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \csc Z \\ P &= \mu_1 \cdot \mu_2 \cos \epsilon \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{P} - 2} \\ \tan \epsilon &= -\rho \cdot \frac{\frac{\partial \delta}{\partial Z}}{\frac{d\rho}{dZ}} \end{aligned} \right\}. \quad (7-7)$$

从伪方位投影的变形性质分析, 它只有任意投影, 而不可能有等角或等面积投影。因为经纬线投影不正交, 等高圈投影为圆。

在(7-6)式中,  $\rho$  和  $\delta$  的函数形式需要具体确定, 确定的方法也有几种。下面结合伪方位投影的应用实例, 说明  $\rho$  和  $\delta$  形式的具体确定方法。

## 7.2.2 伪方位投影应用实例

现在介绍将伪方位投影用于中国全图的实例<sup>①</sup>。投影的两位设计者刘家豪和李国藻,分析了中国疆域的轮廓形状,具有三处向外凸出和三处向内凹进的特点,即:东北方向、新疆方向和南海诸岛方向是向外凸出;中蒙边界中部、渤海黄海一段岸线和中印缅三国交界处是向内凹进,而且可以估计出,每两个凸出方向(或两凹入方向)间的夹角都近于  $120^\circ$ 。

据此,设计者又研究了三叶玫瑰线的极坐标方程  $\rho = a \cos 3\varphi$  及其图形,如图 7-4,并对此方程式作了适当的变化,成为如下形式:

$$\rho = a + \frac{a}{K} \cos 3\varphi. \quad (7-8)$$

当给定  $K=3$  时,则

$$\rho = a + \frac{a}{3} \cos 3\varphi,$$

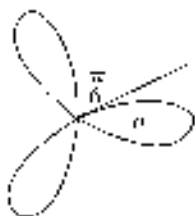


图 7-4 三叶玫瑰线图形



图 7-5 改变左图极坐标方程所得图形

其曲线图形如图 7-5,可以看出它很接近于中国疆域轮廓。因此认为,投影中某种变形的方程式具有(7-8)式的形式时,应当视为对中国全图较理想的投影。在参考了 Г. А. 金兹布尔格设计用于大西洋地图的伪方位投影的基础上,设计者成功地设计了用于中国全图的伪方位投影方案。

关于  $\rho$  的函数式,有三种选择:

$$\rho = KR \sin \frac{Z}{K}, \quad (7-9)$$

$$\rho = RZ, \quad (7-10)$$

$$\rho = KR \tan \frac{Z}{K}. \quad (7-11)$$

当  $\rho$  按(7-9)式时,面积变形最小;当  $\rho$  按(7-11)式时,角度变形最小;当  $\rho$

① 刘家豪,李国藻. 伪方位投影及其对中国全图的应用. 测绘学报,1963,6(2)

按(7-10)式时,介于以上两者之间。前面已提到,伪方位投影没有等角和等面积投影,而只有任意投影。而比较之下,以选用 $\rho=RZ$ 为有利,它近似于等距离投影(只能说近似,即 $\mu_1 \approx 1$ ),各种变形都比较均衡,计算简单,而且各种变形线具有基本相同的形状。

关于 $\delta$ 的决定,可采用下式:

$$\delta = \alpha - c \left( \frac{Z}{Z_\pi} \right)^q \sin K\alpha, \quad (7-12)$$

式中: $c, q, Z_\pi, K$ 都是参数,可根据具体情况决定数值。 $Z_\pi$ 是制图区域中心至最远边界的距离; $q$ 主要是影响制图网垂直圈的弯曲程度,当 $q$ 大时,中心点附近接近于方位投影,在边界上弯曲越强烈; $K$ 是决定投影对称轴的参数,应取正整数,并根据投影区域的轮廓形状而定,例如 $K=1$ 时,有一条对称轴, $K=2$ 时有两条对称轴,按此类推; $c$ 与 $q$ 要在确定最适当的等变形线的计算与实验中才能决定。

当决定采用 $\rho=RZ$ 和 $\delta$ 为(7-12)式后,这种“等距离”伪方位投影的一般公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \\ \rho &= RZ \\ \delta &= \alpha - c \left( \frac{Z}{Z_\pi} \right)^q \sin K\alpha \end{aligned} \right\} \circ \quad (7-13)$$

令上式中 $R=1$ ,则

$$\begin{aligned} d\rho &= dZ, \\ \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} &= 1 - Kc \left( \frac{Z}{Z_\pi} \right)^q \cos K\alpha. \end{aligned}$$

代入(7-7)式,并注意 $R=1$ ,则得到这种“等距离”伪方位投影的一般变形公式:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \sec \epsilon \\ \mu_2 &= \frac{Z}{\sin Z} \left[ 1 - Kc \left( \frac{Z}{Z_\pi} \right)^q \cos K\alpha \right] \\ P &= \mu_2 \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{P} - 2}} \\ \tan \epsilon &= \rho \frac{\frac{\partial \delta}{\partial Z}}{\frac{d\rho}{dZ}} \end{aligned} \right\} \circ \quad (7-14)$$

由公式(7-14)可以看到,  $P$  的形式与(7-8)式相似。从而可以相信, 所选定的投影其面积等变形线, 将与图 7-5 的形状近似。

下面进一步确定  $\delta$  表达式中各参数值。先以东北方向为依据, 当中心点为  $\lambda_0 = 105^\circ$ ,  $\varphi_0 = 35^\circ$  时, 估计  $Z_\pi \approx 26^\circ$ ; 根据中国疆域轮廓形状应选择  $K = 3$ ; 为使边缘的角度变形不至太大, 决定令  $q = 1$ ; 下面确定  $c$ , 因凸出与凹入两方向的夹角近于  $60^\circ$ , 设凹入处  $\alpha = 0^\circ$ , 凸出处  $\alpha = 60^\circ$ ; 又凸出方向最远点的极距定为  $26^\circ$ , 凹入处最近点平均极距定为  $14^\circ$ , 令凸出的最远点和凹入的最近点的面积变形相等, 由(7-14)式中  $P = \mu_2$ , 则有:

$$\frac{14^\circ}{\sin 14^\circ} \left( 1 - 3c \frac{14^\circ}{26^\circ} \cos 0^\circ \right) = \frac{26^\circ}{\sin 26^\circ} \left( 1 - 3c \frac{26^\circ}{26^\circ} \cos 180^\circ \right),$$

由此式解出:

$$c = -0.005\,308.$$

为了使等变形线与制图区域轮廓一致, 在计算  $\delta$  时, 应将球面坐标变换所求得的方向角加上  $15^\circ$ , 也就是将方位角起算方向按逆时针转  $15^\circ$ 。

最后求得适用于中国全图的“等距离”伪方位投影的实用公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta \\ y &= \rho \sin \delta \\ \rho &= RZ \\ \delta &= \alpha + \frac{0.005\,308}{0.453\,786} \cdot Z \cdot \sin 3(15^\circ + \alpha) \\ \mu_1 &= \sec \epsilon \\ \mu_2 &= \frac{Z}{\sin Z} \left[ 1 + 3 \frac{0.005\,308}{0.453\,786} \cdot Z \cdot \sin 3(15^\circ + \alpha) \right] \\ P &= \mu_2 \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{P} - 2} \\ \tan \epsilon &= \frac{0.005\,308}{0.453\,786} \cdot Z \cdot \sin 3(15^\circ + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (7-15)$$

图 7-6 和图 7-7 是以这一投影绘制中国全图的经纬网略图及其面积变形等变形线和角度最大变形等变形线。由这两图可以看出, 两种等变形线的形状几乎完全相同, 且与中国疆界轮廓形状基本相似。全部制图区域内, 面积变形和最大角度变形能达到小比例尺地图中等量测的精度要求。

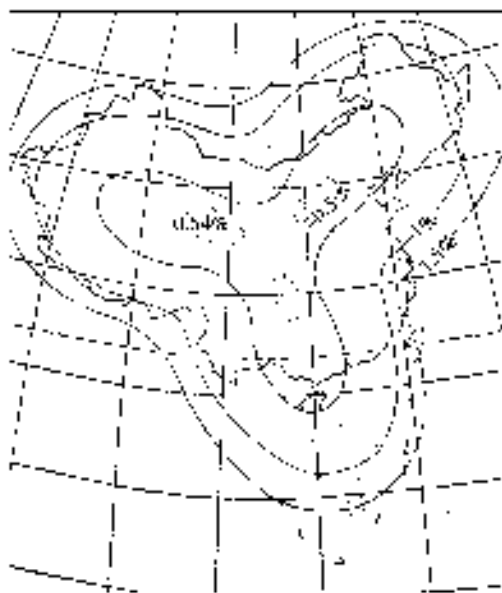


图 7-6 伪方位投影用于中国全图的面积变形等变形线

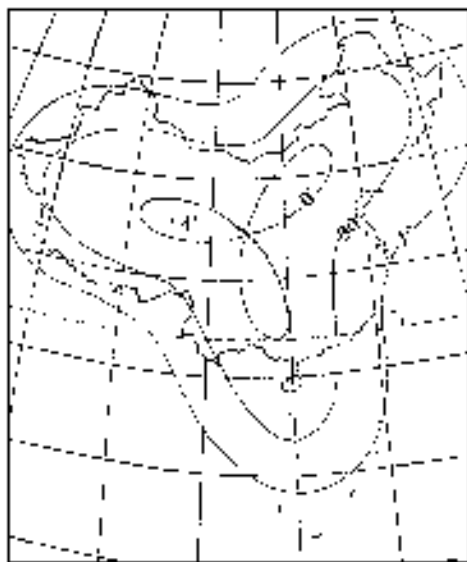


图 7-7 伪方位投影用于中国全图的角度最大变形等变形线



在 20 世纪 50 年代前苏联中央测绘科学研究所曾设计一种用于大西洋的伪方位投影方案,并用于前苏联的《中学教师地图集》,效果较好,如图 7-8。其公式中有关数据为: $K=2, Z_{\pi}=\frac{2}{3}\pi, q=1, c=0.1, \rho=3R\sin\frac{Z}{3}, \varphi_0=+25^{\circ}, \lambda_0=-30^{\circ}$ 。

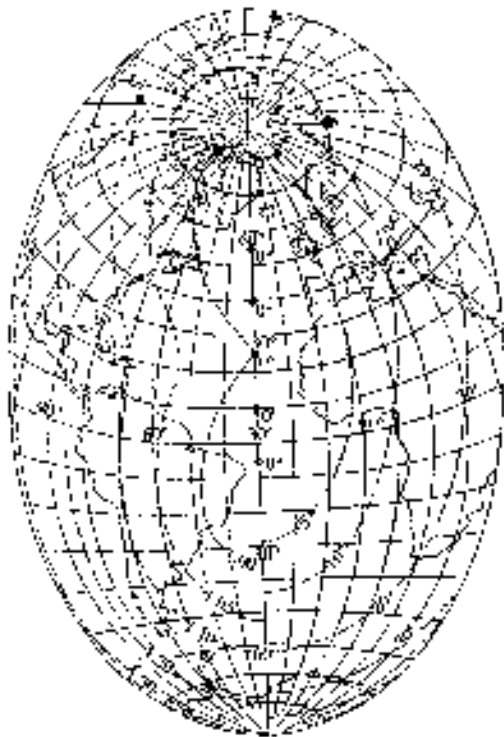


图 7-8 伪方位投影大西洋图

## 复习思考题

1. 伪圆锥投影与圆锥投影,伪方位投影与方位投影在经纬线形状和极点表象上有什么区别?
2. 伪方位投影用于中国全图的实例中,其设计的基本原则是什么?

# 第 8 章 伪圆柱投影

## 8.1 伪圆柱投影的一般公式

伪圆柱投影是在圆柱投影的基础上,规定经纬线的描写形状,再根据一定投影条件而求出投影公式。在伪圆柱投影中,规定纬线投影为相互平行的直线,中央经线投影为垂直于各纬线的直线,其他经线投影后成为对称于中央经线的曲线。如果以中央经线的投影为  $X$  轴,以赤道的投影为  $Y$  轴,如图 8-1。则  $x$  坐标仅是纬度  $\varphi$  的函数,而与经度  $\lambda$  无关;但  $y$  坐标则是  $\lambda$  和  $\varphi$  的函数。由此,可以写出伪圆柱投影的一般公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(\varphi) \\ y &= f_2(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\}^{\circ} \quad (8-1)$$

对上式取导数,利用有关的变形公式,可以推求本投影的一般变形公式。现在只写出其推导结果如下:

$$\left. \begin{aligned} \tan \epsilon &= -\frac{\partial y}{\partial \varphi} / \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ m &= \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{R} \sec \epsilon \\ n &= \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{R} \sec \varphi \\ P &= \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{R^2} \sec \varphi \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2mn \cos \epsilon}{mn \cos \epsilon}} \end{aligned} \right\}^{\circ} \quad (8-2)$$

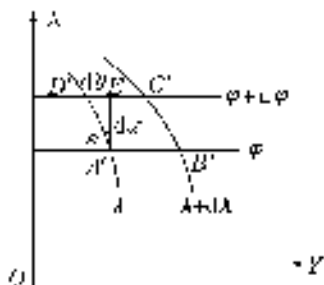


图 8-1 微分梯形在平面上的坐标关系

由于伪圆柱投影的纬线为平行直线,经线为任意曲线,两者不能垂直相交,故无等角投影,只有等面积和任意投影,而常用者多为等面积伪圆柱投影。

伪圆柱投影的经线描写形状虽然可以是任意曲线,但一般多选择正弦曲线和椭圆曲线两种。下面介绍几种常用的伪圆柱投影。

## 8.2 桑逊投影

桑逊(Sanson 1600 年~1667 年)投影是经线为正弦曲线的等面积伪圆柱投影。虽然已经有了伪圆柱投影的一般公式(8-1)和(8-2),但想求得某一具体的投影,还必须根据其投影所给定的条件才能求出相应的投影公式。桑逊投影的具体条件是:① 等面积,即  $P=1$ ;② 纬线投影保持正常,即  $n=1$ ;③ 中央经线投影为直线并保持正常,即  $m_0=1$ 。

由于  $m_0=1$ ,则

$$x=R\varphi。$$

又因  $n=1$ ,所有纬线投影长度不变,则

$$y=r \cdot \lambda = \lambda R \cos \varphi。$$

于是桑逊投影的直角坐标公式为:

$$\left. \begin{array}{l} x=R\varphi \\ y=\lambda R \cos \varphi \end{array} \right\}。 \quad (8-3)$$

在上式中消去  $\varphi$ ,令  $\varphi = \frac{x}{R}$ ,代入  $y$  式,则

$$y=\lambda R \cos \varphi = \lambda R \cos \left( \frac{x}{R} \right) = \lambda R \sin \left( 90^\circ - \frac{x}{R} \right)。$$

由此证明,本投影的经线表现为正弦曲线。图 8-2 是本投影的经纬网形状。

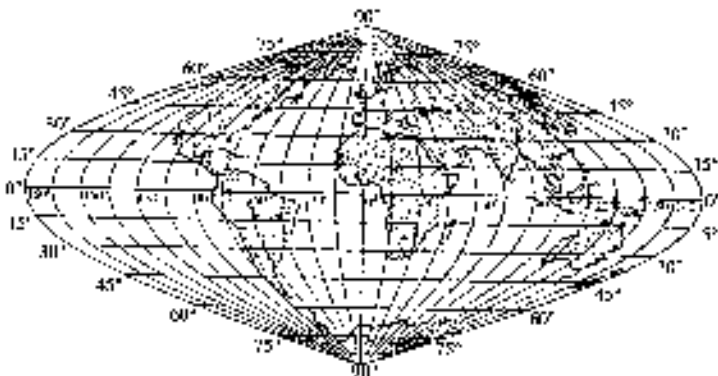


图 8-2 桑逊投影经纬网形状

对(8-3)式取导数,则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \varphi} &= R, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= -\lambda R \sin \varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= R \cos \varphi.\end{aligned}$$

然后代入(8-2)式,便可求得本投影的变形公式如下:

$$\left. \begin{aligned}\tan \epsilon &= \frac{\lambda R \sin \varphi}{R} = \lambda \sin \varphi \\ m &= \frac{R}{R} \sec \epsilon = \sec \epsilon \\ n &= 1 \\ P &= 1 \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \tan \epsilon = \frac{1}{2} \lambda \sin \varphi\end{aligned}\right\} \quad (8-4)$$

根据公式(8-4)计算出的本投影的经线长度比和角度最大变形如表8-1和表8-2所示。

(m 值)                      表 8-1    桑逊投影经线长度比

$\varphi \backslash \lambda$	0°	10°	20°	30°	40°
0°	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
10°	1.000	1.000	1.002	1.004	1.007
20°	1.000	1.002	1.007	1.016	1.028
30°	1.000	1.004	1.015	1.034	1.059
40°	1.000	1.006	1.025	1.055	1.096

(ω 值)                      表 8-2    桑逊投影角度最大变形

$\varphi \backslash \lambda$	0°	10°	20°	30°	40°
0°	0°00′.0	0°00′.0	0°00′.0	0°00′.0	0°00′.0
10°	0°00′.0	1°44′.2	3°28′.2	5°12′.4	5°56′.2
20°	0°00′.0	3°25′.6	6°50′.0	10°14′.0	13°37′.0
30°	0°00′.0	4°59′.8	9°58′.4	14°55′.0	19°48′.0
40°	0°00′.0	6°25′.2	12°48′.2	19°06′.2	25°17′.6

本投影曾用以编制世界地图,中央经线选在  $0^\circ$ ,如图 8-2。在许多国外出版的地图集中,常用此投影绘制非洲地图,中央经线选在东经  $20^\circ$ ,其缺点是高纬度变形太大。

### 8.3 爱凯特正弦投影

由图 8-2 看出,桑逊投影在高纬度地区经线密集,变形很大。在南北两极投影边界与中央经线的交角为  $72^\circ 20'$ ,也就是说在此投影中两极以  $144^\circ 40'$  的角表示实际  $360^\circ$  的角。为了克服这一缺点,爱凯特(Eckert 1868 年~1938 年)于 1906 年提出了改进,即经线在极点不交于一点,而是交于一条叫做“极线”的直线。并规定极线的长度等于  $1/2$  赤道周长的投影,而且与中央经线至两极的长度相等。

如图 8-3,设以中央经线的投影为  $X$  轴,赤道的投影为  $Y$  轴,则图上  $M$  点的地理坐标  $\varphi = 0, \lambda = \pi$ 。  $P$  点的地理坐标  $\varphi = \pi/2, \lambda = \pi$ 。

按本投影规定的极线长度,则

$$y_P = x_P = \frac{1}{2} y_M。$$

根据以上条件,运用经线投影为正弦曲线的一般公式,可以求得本投影的坐标方程式,兹略去推导过程,仅写出最后结果。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2R}{\sqrt{\pi+2}} u \\ y &= \frac{2R}{\sqrt{\pi+2}} \lambda \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (8-5)$$

$$\sin u + u = \frac{\pi+2}{2} \sin \varphi。 \quad (8-6)$$

上列各式中的  $u$  是纬度的函数,当  $\varphi = 0$  时,  $u = 0$ ; 当  $\varphi = \pi/2$  时,  $u = \pi/2$ 。

(8-6)式表示  $u$  和  $\varphi$  的关系,是(8-5)式的辅助方程。当计算直角坐标时,需要先用公式(8-6)求出  $u$  和  $\varphi$  的关系值,然后将  $u$  代入(8-5)式,才能求出各点的  $x, y$  值。实施计算时,需要将  $x$  式中的  $u$  和  $y$  式中的  $\lambda$  化为弧度。

表 8-3 列出了纬度间隔  $10^\circ$  的  $u$  值和经差为  $180^\circ$  的经线上同纬线各交点的  $x, y$  值。其他经线上各点的  $y$  值可按比例计算。

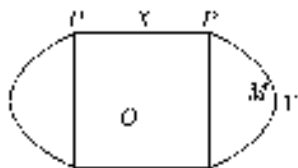


图 8-3 爱凯特投影的几何示意

表 8-3  $u, x, y$  记录格式

$\varphi$	$u$	$x(\text{km})$	$y_{180}(\text{km})$
0°	0°00'00"	0	17 654
10°	12°50'33"	1 260	17 433
20°	25°36'41"	2 512	16 787
30°	38°12'32"	3 748	15 763
40°	50°28'52"	4 951	14 444
50°	62°10'03"	6 097	12 948
60°	72°49'19"	7 142	11 434
70°	81°42'54"	8 014	10 099
80°	87°48'15"	8 612	9 165
90°	90°00'00"	8 827	8 827

爱凯特投影的变形公式为：

$$\left. \begin{aligned} \tan \epsilon &= \frac{1}{2} \lambda \sin u \\ m &= \frac{\sqrt{\pi+2}}{2} \cos \varphi \sec^2\left(\frac{u}{2}\right) \sec \epsilon \\ n &= \frac{2}{\sqrt{\pi+2}} \sec \varphi \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \\ P &= 1 \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{m^2+n^2-2} \end{aligned} \right\} \quad (8-7)$$

利用上式计算的经纬线长度比  $m, n$  和最大角度变形  $\omega$  值, 分别列于表 8-4 和表 8-5。

表 8-4 爱凯特投影经纬线长度比

$\varphi$	<div><div><math>m</math></div><div><math>\lambda</math></div><div><math>n</math></div></div>	$m$						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0°	0.882	1.134	1.134	1.134	1.134	1.134	1.134	1.134
15°	0.888	1.127	1.131	1.143	1.164	1.192	1.227	1.269
30°	0.909	1.100	1.114	1.156	1.223	1.310	1.415	1.533
45°	0.969	1.032	1.057	1.126	1.234	1.370	1.527	1.700
60°	1.142	0.875	0.902	0.979	1.094	1.238	1.402	1.579
75°	1.847	0.541	0.560	0.611	0.688	0.783	0.890	1.006
90°	$\infty$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表 8-5 爱凯特投影最大角度变形( $\omega$ )

$\varphi \backslash \lambda$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0°	0°00′	0°00′	0°00′	0°00′	0°00′	0°00′	0°00′
15°	0°00′	4°56′	9°48′	14°31′	19°03′	29°21′	27°23′
30°	0°00′	9°12′	17°57′	25°54′	32°56′	38°59′	44°10′
45°	0°00′	12°18′	24°36′	33°12′	41°06′	47°29′	52°37′
60°	0°00′	14°03′	26°35′	36°53′	45°01′	51°21′	56°19′
75°	0°00′	14°37′	27°33′	38°03′	46°13′	52°31′	57°26′
90°	0°00′	14°40′	27°38′	38°09′	46°19′	52°37′	57°31′

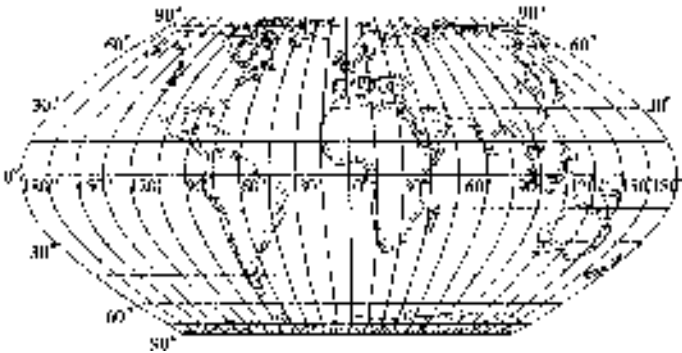


图 8-4 爱凯特投影经纬网

图 8-4 是爱凯特正弦投影的经纬网形状。这一投影过去曾用它编制小比例尺世界地图。由于该投影具有等面积性质,纬线为平行于赤道的直线等特点,故常用它编制全球性的分布图和气候图等。

8.4 摩尔威德投影

摩尔威德投影(Mollweide Projection)是经线投影成为椭圆曲线的一种等面积伪圆柱投影。这一投影是德国数学家摩尔威德(K. B. Mollweide1774 年~1825 年)于 1805 年创拟的。该投影规定离中央经线 $\pm 90^\circ$ 的经线投影后合成一个圆,圆的水平直径及其延长线作为赤道的投影,圆的垂直直径作为中央经线的投影,如图 8-5。这个

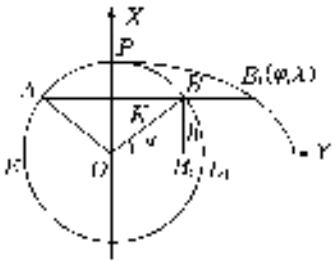


图 8-5 摩尔威德投影几何示意图

圆的半径,根据该圆的面积等于地球面积的一半来确定。以  $K$  表示此圆的半径,则

$$\pi K^2=2\pi R^2,$$

于是

$$K=\sqrt{2}R。 \tag{8-8}$$

由于经差  $\pm 90^\circ$  的经线投影成为一个圆,故在圆上一点  $B$  的坐标为

$$x_B=K\sin u=\sqrt{2}R\sin u,$$

$$y_B=K\cos u=\sqrt{2}R\cos u,$$

式中  $u$  是  $B$  点至圆心  $O$  的连线与赤道的交角,它是纬度的函数。当  $\varphi=0^\circ$  时,  $u=0^\circ$ ; 当  $\varphi=90^\circ$  时,  $u=90^\circ$ 。

在等面积伪圆柱投影中,纬线为平行的水平直线,故同一纬线上  $x$  坐标相同,而  $y$  坐标则与经差成正比,因此有

$$x=\sqrt{2}R\sin u, \tag{8-9}$$

而

$$\frac{y}{y_B}=\frac{\lambda}{\frac{\pi}{2}},$$

移项将  $y_B$  代入则有

$$y=\frac{\sqrt{2}R\cos u\lambda}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}R\lambda\cos u。 \tag{8-10}$$

由上面的  $x, y$  式还不能求出投影各点的直角坐标值,因为式中  $u$  和  $\varphi$  是什么关系还不清楚。为此,可以按等面积条件用几何法导出  $u$  和  $\varphi$  的关系式。

由前述知,投影面上  $EABE_1$  面积  $S_{EABE_1}$  等于地球上自赤道至纬度  $AB$  的球带面积的一半。由图 8-5,并设球带面积为  $P_a$ ,则

$$S_{EABE_1}=S_{\triangle AOB}+2S_{BOE_1}=\frac{1}{2}P_a, \tag{8-11}$$

而

$$S_{\triangle AOB}=K\sin u \cdot K\cos u=K^2\sin u\cos u。$$

扇形  $BOE_1$  面积为

$$S_{BOE_1}=\frac{1}{2}\widehat{BE_1} \cdot K=\frac{1}{2}K^2u。$$

球带高

$$h=R\sin\varphi。$$



则球带面积为

$$P_a = 2\pi R h = 2\pi R^2 \sin\varphi_0.$$

将以上相关各式代入(8-11)式,则

$$K^2 \sin u \cos u + K^2 u = \pi R^2 \sin\varphi_0.$$

再将(8-8)式平方,即  $K^2 = 2R^2$  代入上式并消去  $R^2$ ,最后得:

$$\sin 2u + 2u = \pi \sin\varphi_0. \quad (8-12)$$

(8-12)式是计算  $u$  的公式,因为是超越函数,解算时应先给定  $u$  反求  $\varphi$ ,然后用内插法求出各纬度为整度数的  $u$  值。计算结果列为表 8-6,以备代入(8-9)和(8-10)式,计算  $x, y$  值。

将(8-9)式、(8-10)式和(8-12)式对  $\varphi$  取导数,代入(8-2)式,可求出摩尔威德投影的变形公式。其结果如下:

$$\left. \begin{aligned} \tan \epsilon &= \frac{2}{\pi} \lambda \tan u \\ m &= \frac{\pi \cos \varphi}{2\sqrt{2} \cos u} \sec \epsilon \\ n &= \frac{2\sqrt{2} \cos u}{\pi \cos \varphi} \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2} \end{aligned} \right\}.$$

(8-13)

由(8-13)式计算的经纬线长度比和最大角度变形分别列于表 8-7 和表 8-8。

表 8-7 摩尔威德投影经纬线长度比

$\varphi$	$n$	$m$			
		$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$89^\circ$	3.665	0.273	1.365	2.568	3.840
$60^\circ$	1.165	0.858	0.922	1.091	1.326
$30^\circ$	0.951	1.052	1.063	1.096	1.150
$0^\circ$	0.900	1.111	1.111	1.111	1.111

表 8-6 整度数纬度对应  $u$  值

$\varphi$	$u$
$0^\circ$	$0^\circ 00' 00''$
$10^\circ$	$7^\circ 51' 49''$
$20^\circ$	$15^\circ 47' 03''$
$30^\circ$	$23^\circ 49' 36''$
$40^\circ$	$32^\circ 04' 17''$
$50^\circ$	$40^\circ 37' 45''$
$60^\circ$	$49^\circ 40' 31''$
$70^\circ$	$59^\circ 31' 54''$
$80^\circ$	$70^\circ 58' 42''$
$90^\circ$	$90^\circ 00' 00''$

表 8-8 摩尔威德投影最大角度变形

$\varphi \backslash \lambda$	0°	30°	60°	90°
90°	180°00′	180°00′	180°00′	180°00′
60°	17°27′	25°41′	40°39′	55°42′
30°	5°46′	10°33′	15°30′	26°44′
0°	12°01′	12°01′	12°01′	12°01′

摩尔威德投影经纬网的形状如图 8-6。该投影常用于绘制世界地图，近年来国外许多地图书刊，特别是通俗读物，很多用此投影制作世界地图。这主要是由于本投影具有椭球形感、等面积性质和纬线为平行于赤道的直线等特点，因此适宜于表示具有纬度地带性的各种自然地理现象的世界分布图。



图 8-6 摩尔威德投影经纬网

### 8.5 伪圆柱投影分瓣法

前面介绍的几种伪圆柱投影，都存在一定缺点，有的经纬线交角与实地相差太大，使得地物轮廓变形较大；有的用“极线”表示两极的投影，又失于纬线拉长过多。为了补救这些缺点，1923 年美国学者古特(J. P. Goode1862 年~1932 年)提出应用摩尔威德投影采取分瓣方法，来编制世界地图(当然其他伪圆柱投影如桑逊投影、爱凯特投影等都可以分瓣)。其法是按大陆或大洋为主分为几瓣，每一局部设立一条中央经线，使用统一的比例尺和经纬差相同的地图网格，并将各瓣沿赤道连结为一个整体。

如果所编制的世界地图是以大陆为主,则按大陆范围选定中央经线,在大洋的适当处分裂。按大陆分瓣的方案如表 8-9。

表 8-9 按大陆分瓣的方案

大陆名称	区域范围	中央经线
北美洲	西经 $160^{\circ} \sim 40^{\circ}$	西经 $100^{\circ}$
拉丁美洲	西经 $20^{\circ} \sim 100^{\circ}$ (向西)	西经 $60^{\circ}$
欧洲大陆	西经 $40^{\circ} \sim$ 东经 $160^{\circ}$	东经 $60^{\circ}$
非洲(赤道南)	西经 $20^{\circ} \sim$ 东经 $90^{\circ}$	东经 $20^{\circ}$
澳洲	东经 $90^{\circ} \sim$ 西经 $160^{\circ}$	东经 $150^{\circ}$

图 8-7 是摩尔威德投影按大陆为主进行分瓣的世界地图网格。

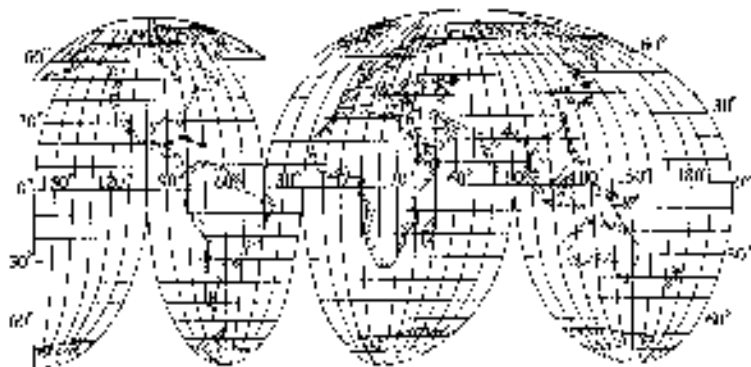


图 8-7 伪圆柱投影在大洋上断开的世界地图

如果以大洋为主进行分瓣,其中央经线可按表 8-10 所列数字选定。

表 8-10 以大洋分瓣的中央经线

大洋名称	中央经线
北大西洋	西经 $30^{\circ}$
南大西洋	西经 $20^{\circ}$
太平洋北部	西经 $170^{\circ}$
太平洋南部	西经 $140^{\circ}$
印度洋北部	东经 $60^{\circ}$
印度洋南部	东经 $90^{\circ}$

## 8.6 任意伪圆柱投影

任意伪圆柱投影虽然角度和面积都有变形,但角度变形较等面积伪圆柱投影为小。下面介绍卡夫拉依斯基(B. B. Каврайский)任意伪圆柱投影。该投影由以下条件确定:对中央经线的经差为 $\pm 120^\circ$ 的经线投影为圆弧;中央经线保持长度无变形;两极投影为直线,其长度为赤道周长投影的一半;经线形状为椭圆,用等分纬线的方法绘出。如图 8-8,

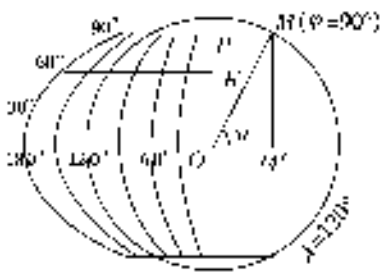


图 8-8 任意伪圆柱投影示意图

设以  $O$  为圆心,  $OM$  为半径的圆代表经差 $\pm 120^\circ$ 的经线的投影,  $M$  为极线上的一点, 根据极线长度等于赤道周长  $1/2$  的条件, 则

$$PM = \frac{1}{2}K, \angle POM = 30^\circ;$$

再根据中央经线投影无变形的条件, 则

$$OP = \frac{\pi}{2}R,$$

所以

$$K = \frac{\pi}{2}R \sec 30^\circ = \frac{\pi}{\sqrt{3}}R. \quad (8-14)$$

本投影既可以用简单几何法也可以用直角坐标值构成经纬网。

用几何法构成经纬网时, 先要计算  $K$  值, 以  $K$  值为半径画圆代表 $\pm 120^\circ$ 的经线。过圆心作互相垂直的两直线代表中央经线和赤道的投影。把圆周长分为 6 份, 过分点作平行于赤道的两个弦, 即为极线。在赤道至极线的中央经线上, 按规定的纬差等分, 过各分点作平行于赤道的直线即为纬线。再把圆内各纬线按规定经差等分, 并将各纬线等分的长度向圆外延伸至 $\pm 180^\circ$ 的经线, 然后以圆滑的曲线连接纬线上同经线的各分点, 即得经线。

由直角坐标构成经纬网时, 先要导出坐标公式。参看图 8-8, 因中央经线投影保持长度不变, 故有

$$x = R\varphi, \quad (8-15)$$

$$y_{120^\circ} = K \cos u = \frac{\pi}{\sqrt{3}}R \cos u。$$

因  $y$  坐标与经差成正比, 即

$$y : y_{120^\circ} = \lambda : 120^\circ,$$

$$y = \frac{\lambda}{120^\circ} y_{120^\circ} = \frac{\lambda}{120^\circ} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} R \cos u,$$

所以

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda R \cos u. \quad (8-16)$$

$u$  和  $\varphi$  的关系可根据中央经线投影无变形的条件求得。由图 8-8 知

$$x = K \sin u,$$

以此式与(8-15)式比较,则有

$$R\varphi = K \sin u.$$

顾及(8-14)式,所以

$$\sin u = \frac{R}{K} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \varphi. \quad (8-17)$$

本投影的变形公式为:

$$\left. \begin{aligned} \tan \epsilon &= \frac{3}{2\pi} \lambda \tan u \\ n &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos u \sec \varphi \\ m &= \sec \epsilon \\ P &= n \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{P} - 2} \end{aligned} \right\} \circ \quad (8-18)$$

利用上式计算的经纬线长度比如表 8-11。

表 8-11 任意伪圆柱投影的经纬线长度比

$\varphi$	$n$	$m$									
		$0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$100^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$	$180^\circ$
$0^\circ$	0.87	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$20^\circ$	0.90	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.02	1.03	1.03	1.04
$40^\circ$	1.04	1.00	1.00	1.01	1.02	1.04	1.06	1.08	1.11	1.14	1.18
$60^\circ$	1.41	1.00	1.01	1.03	1.06	1.11	1.16	1.22	1.30	1.37	1.46
$80^\circ$	3.18	1.00	1.02	1.08	1.17	1.28	1.42	1.57	1.73	1.89	2.07

注:  $P=n$

卡夫拉依斯基任意伪圆柱投影的经纬网形状和最大角度变形等变形线,如图 8-9 所示。从图形看,经线曲率比爱凯特投影小。从表 8-11 分

析,其长度变形和面积变形也比较均衡。常用以绘制小比例尺世界地图。

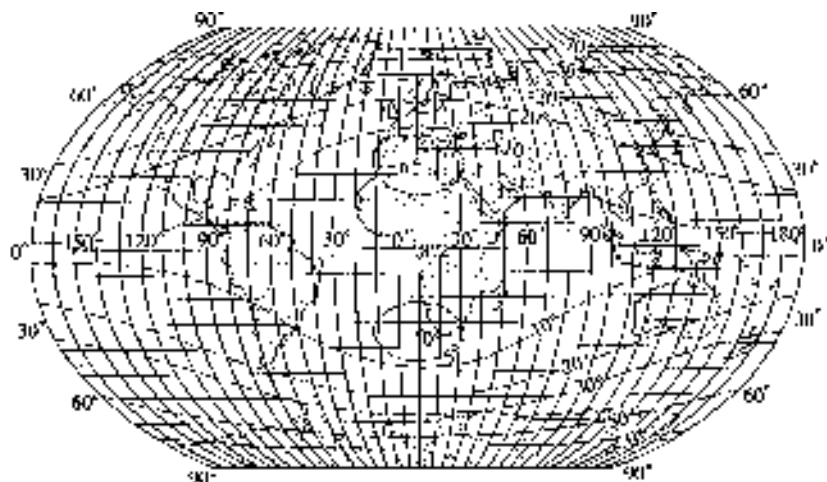


图 8-9 卡夫拉依斯基任意伪圆柱投影的经纬网和最大角度变形等变形线

## 复习思考与计算题

1. 伪圆柱投影和圆柱投影在经纬线形状和极点表象上有什么区别?
2. 伪圆柱投影按变形性质分为哪几种类型,为什么不存在等角伪圆柱投影?
3. 利用桑逊投影公式,计算并绘制全球经纬格网。

# 第 9 章 高斯-克吕格投影与通用横墨卡托投影

## 9.1 高斯-克吕格投影的原理和公式

高斯-克吕格(Gauss-Krüger)投影是在地球椭球面上采用等角横切圆柱进行投影,因此不能像球体投影那样,可利用球面坐标换算,按本书 4.4.3 的方法实行投影。在椭球面上直接进行等角横切圆柱投影,要比按球体进行投影复杂得多,需要运用以偏导数表示的长度比,等角条件等公式。为此,先要求出有关公式。

### 9.1.1 预备公式的推求

#### 1. 求长度比的公式

设在地球椭球面上,由经差  $d\lambda$  和纬差  $d\varphi$  构成的微分梯形  $ABCD$ ,由图 9-1 和 1.4 节知:

$$\left. \begin{aligned} \text{经线微分线段 } AD &= M d\varphi \\ \text{纬线微分线段 } AB &= r d\lambda \\ \text{对角线 } AC &= dS = \sqrt{M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2} \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

(9-1) 式是椭球面上线素的表达式。

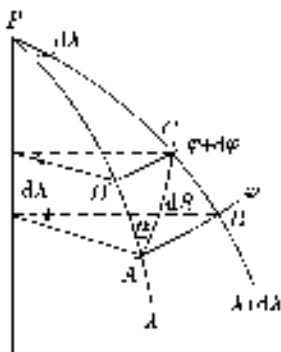


图 9-1 地球椭球面上一微分梯形

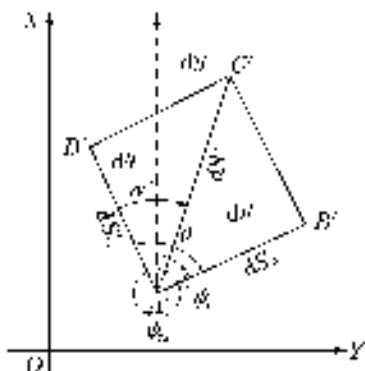


图 9-2 微分梯形在平面上的投影

假设图形  $A'B'C'D'$  是地球椭球面上微分梯形  $ABCD$  在平面上的投影。 $A'$  为  $A$  点的投影,其平面直角坐标为  $x, y$ ;  $C'$  为  $C$  点的投影,其平面直角坐标为  $x+dx, y+dy$ ;  $dS'$  为  $dS$  的投影。由图 9-2 可知

$$dS' = \sqrt{dx^2 + dy^2}。 \quad (9-2)$$

将(2-1)式

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda) \\ y &= f_2(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\}$$

微分,可得到  $dx$  和  $dy$  的全微分:

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \end{aligned} \right\}。 \quad (9-3)$$

代入(9-2),则

$$\begin{aligned} dS'^2 = dx^2 + dy^2 &= \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] d\varphi^2 + \\ &2 \left[ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] d\varphi \cdot d\lambda + \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2。 \end{aligned} \quad (9-4)$$

引用下列符号,令

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 &= E \\ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 &= G \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= F \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= H \end{aligned} \right\}, \quad (9-5)$$

上式中  $H$  的表达式,可由  $\sqrt{EG-F^2}=H$  的式中解出。

将  $E, G, F$  代入(9-4)式,则有:

$$dS' = \sqrt{E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2}。 \quad (9-6)$$

由此式不难求得经线微分线段  $AD$  和纬线微分线段  $AB$  的投影  $A'D'$  和  $A'B'$  的表达式:

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } d\lambda &= 0, & A'D' &= dS'_m = \sqrt{E} d\varphi \\ \text{当 } d\varphi &= 0, & A'B' &= dS'_n = \sqrt{G} d\lambda \end{aligned} \right\}。 \quad (9-7)$$

(9-6)和(9-7)式是地球椭球面上的线素在投影面上的描写公式。



$E, G, F, H$  都是与投影一般公式(2-1)的偏导数有关的高斯系数。

由(9-1)式、(9-6)式和(9-7)式,很易于写出任意方向线长度比和经纬线长度比的公式:

$$\mu = \frac{dS'}{dS} = \frac{\sqrt{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}}{\sqrt{M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}}, \quad (9-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{经线长度比 } m &= \frac{A'D'}{AD} = \frac{\sqrt{E}d\varphi}{Md\varphi} = \frac{\sqrt{E}}{M} \\ \text{纬线长度比 } n &= \frac{A'B'}{AB} = \frac{\sqrt{G}d\lambda}{rd\lambda} = \frac{\sqrt{G}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (9-9)$$

## 2. 求经纬线交角投影后的描写公式

由图9-2,线段 $A'D'$ 与 $A'B'$ 的交角 $\theta$ 是经纬线 $AD$ 和 $AB$ 交角投影后的角度。 $A'D'$ 、 $A'B'$ 两线段同 $X$ 轴方向所构成的角度分别为 $\Psi_m$ 和 $\Psi_n$ 。由(9-3)和(9-7)式,则有

$$\left. \begin{aligned} \sin\Psi_m &= \frac{dy}{dS'_m} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi}{\sqrt{E} d\varphi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \\ \cos\Psi_m &= \frac{dx}{dS'_m} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi}{\sqrt{E} d\varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \\ \sin\Psi_n &= \frac{dy}{dS'_n} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G} d\lambda} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \\ \cos\Psi_n &= \frac{dx}{dS'_n} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G} d\lambda} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \end{aligned} \right\} \quad (9-10)$$

由图9-2可以看出,  $\theta = 360^\circ + \Psi_n - \Psi_m$ , 故利用(9-10)式则有

$$\sin\theta = \sin(\Psi_n - \Psi_m) = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) = \frac{H}{\sqrt{EG}}, \quad (9-11)$$

$$\cos\theta = \cos(\Psi_n - \Psi_m) = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad (9-12)$$

所以

$$\tan\theta = \frac{H}{F}. \quad (9-13)$$

在地图投影的分析与应用中,常要研究经纬线交角投影后的角度 $\theta$ 与 $90^\circ$ 的差值 $\epsilon$ 。参看图9-3知

$$\tan\epsilon = \tan(\theta - 90^\circ) = -\cot\theta。$$

顾及(9-13)式,则

$$\tan \varepsilon = -\frac{F}{H}, \quad (9-14)$$

在上式中,若  $\varepsilon=0$ ,则需  $F=0$ 。于是  $F=0$  为经纬线投影后仍保持正交的充要条件。



图 9-3 经纬线交角投影后的角度与  $90^\circ$  之差

### 3. 求等角投影的条件公式

由前面几章中已经知道,在投影中能保持  $a=b$ ,  $\omega=0$  或经纬线投影后仍保持正交即  $F=0$  (或  $\theta=90^\circ$ ) 和  $m=n$ ,即是等角投影的充要条件。

由(9-9)式,则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{G}}{r} &= \frac{\sqrt{E}}{M} \\ F &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (9-15)$$

将  $E, G, F$  的偏导数代入(9-15)式,得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] &= \frac{1}{M^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \\ F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (9-15a)$$

(9-15a)式的二式中各有四个偏导数,若由第二式得  $\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}$ ,代

入第一式,则

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \left[ 1 + \frac{\left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2}{\left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2} \right] = \frac{1}{M^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right],$$

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \left[ \frac{\left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2}{\left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2} \right] = \frac{1}{M^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right],$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 = \frac{r^2}{M^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2,$$

两边开方,取负号,则

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\frac{r}{M} \frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

再以此式代入(9-15a)第一式,则

$$\left( -\frac{r}{M} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 = \frac{r^2}{M^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right],$$

$$\left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 = \frac{r^2}{M^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] - \frac{r^2}{M^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2,$$

$$\left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 = \frac{r^2}{M^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2,$$

开方取正号,则

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = +\frac{r}{M} \frac{\partial x}{\partial \varphi}.$$

于是便求得以偏导数表示的等角投影条件公式为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -\frac{r}{M} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= +\frac{r}{M} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\}.$$
(9-16)

(9-16)式在开方中取正负二值,是因为  $H$  为面积元素恒为正。顾及

(9-5)式的末式,  $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$  和  $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$  在组合中应符号相反。

(9-16)式是对椭球体投影而言。若对于球体投影则以  $R$  代替  $M$ , 以  $R \cos \varphi$  代替  $r$ , 于是得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -\cos \varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= +\cos \varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\}.$$
(9-16a)

此式是用于球体投影中以偏导数表示的等角条件。

### 9.1.2 高斯—克吕格投影原理和公式

高斯—克吕格投影是假设圆柱面横切于地球椭球面的一条经圈上, 椭

圆柱的中心轴位于赤道上并通过地球中心。将地球表面经纬网按等角条件描写到椭圆柱面上而得此投影。中央经线和赤道投影为互相垂直的直线，以中央经线的投影作为  $X$  轴，赤道的投影作为  $Y$  轴，其交点为坐标原点，则形成高斯-克吕格投影的坐标系(图 9-4)。

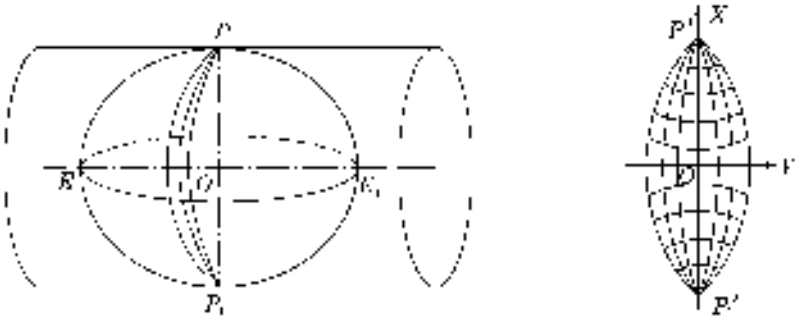


图 9-4 等角横切椭圆柱投影示意图

高斯-克吕格投影由以下三个条件确定：

- (1) 中央经线和赤道投影为互相垂直的直线，而且为投影的对称轴；
- (2) 投影无角度变形；
- (3) 中央经线投影后保持长度不变。

本投影通常是按一定的经度差分带投影，每带的经度差一般不大( $6^{\circ}$ 或 $3^{\circ}$ )，而  $\lambda$  则表示一带内的经度对中央经线的经差( $3^{\circ}$ 或 $1^{\circ}30'$ )，故可以看作一微量，并可将(2-1)式展开为  $\lambda$  的幂级数。

根据第一个条件，在  $x$  的展开式中，仅有  $\lambda$  的偶次幂的项参入。这是因为当  $\lambda$  的符号改变时， $x$  的符号和绝对值都不改变，即  $x=f_1(-\lambda)=f_1(\lambda)$ 。但在  $y$  的展开式中，仅有  $\lambda$  的奇次幂的项参入，因此当  $\lambda$  的符号改变时， $y$  也改变符号，但绝对值不变，即  $y=f_2(-\lambda)=-f_2(\lambda)$ 。由此，则有

$$\left. \begin{aligned} x &= a_0 + a_2 \lambda^2 + a_4 \lambda^4 + a_6 \lambda^6 + \dots \\ y &= a_1 \lambda + a_3 \lambda^3 + a_5 \lambda^5 + a_7 \lambda^7 + \dots \end{aligned} \right\}, \tag{9-17}$$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  是纬度的函数，也是待定系数。

根据第二个条件，本投影具有等角性质。也就是(9-17)式应满足等角条件公式(9-16)，为此先求(9-17)式的偏导数：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{da_0}{d\varphi} + \lambda^2 \frac{da_2}{d\varphi} + \lambda^4 \frac{da_4}{d\varphi} + \lambda^6 \frac{da_6}{d\varphi} + \dots \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= 2a_2\lambda + 4a_4\lambda^3 + 6a_6\lambda^5 + \dots \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \lambda \frac{da_1}{d\varphi} + \lambda^3 \frac{da_3}{d\varphi} + \lambda^5 \frac{da_5}{d\varphi} + \lambda^7 \frac{da_7}{d\varphi} + \dots \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= a_1 + 3a_3\lambda^2 + 5a_5\lambda^4 + 7a_7\lambda^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9-18)$$

将以上这些偏导数代入等角条件公式(9-16),则有:

$$\left. \begin{aligned} &2a_2\lambda + 4a_4\lambda^3 + 6a_6\lambda^5 + \dots \\ &= -\frac{r}{M}(\lambda \frac{da_1}{d\varphi} + \lambda^3 \frac{da_3}{d\varphi} + \lambda^5 \frac{da_5}{d\varphi} + \dots) \\ &a_1 + 3a_3\lambda^2 + 5a_5\lambda^4 + 7a_7\lambda^6 + \dots \\ &= \frac{r}{M}(\frac{da_0}{d\varphi} + \lambda^2 \frac{da_2}{d\varphi} + \lambda^4 \frac{da_4}{d\varphi} + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (9-19)$$

在上式中当  $\lambda$  为任何值时,都应得到满足,故比较每一方程式内  $\lambda$  的同次幂的系数,可得到下列一组等式:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{r}{M} \cdot \frac{da_0}{d\varphi} \\ a_2 &= -\frac{r}{2M} \cdot \frac{da_1}{d\varphi} \\ a_3 &= \frac{r}{3M} \cdot \frac{da_2}{d\varphi} \\ a_4 &= -\frac{r}{4M} \cdot \frac{da_3}{d\varphi} \\ a_5 &= \frac{r}{5M} \cdot \frac{da_4}{d\varphi} \\ a_6 &= -\frac{r}{6M} \cdot \frac{da_5}{d\varphi} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (9-20)$$

若概括为一般形式,则有:

$$a_{k+1} = (-1)^k \frac{1}{1+k} \cdot \frac{r}{M} \cdot \frac{da_k}{d\varphi}, \quad (9-21)$$

式中,  $k=0, 1, 2, \dots$

由此可见,高斯-克吕格投影公式的最后确定,在于求出各系数  $a$  的形式。为此第一步首先知道  $a_0$ , 欲求  $a_0$  就要利用第三个条件,即中央经线投影后无长度变形。即当  $\lambda=0$  时,则(9-17)式中  $x=a_0$ , 而  $a_0=S$ , 即为中央

经线投影后的长度,因而有

$$a_0 = x = S = \int_0^\varphi M d\varphi,$$

代入(9-20)式,则

$$a_1 = \frac{r}{M} \frac{da_0}{d\varphi} = \frac{rM d\varphi}{M d\varphi} = r = N \cos \varphi. \quad (9-22)$$

为求得  $a_2$ , 可以求导数  $\frac{da_1}{d\varphi}$ , 因  $a_1 = r$ , 即求  $\frac{dr}{d\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{a_e \cos \varphi}{(1 - e_1^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &= - \frac{a_e \sin \varphi (1 - e_1^2 \sin^2 \varphi - e_1^2 \cos^2 \varphi)}{(1 - e_1^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -M \sin \varphi, \end{aligned} \quad (9-23)$$

由此得

$$a_2 = - \frac{r da_1}{2M d\varphi} = \frac{r}{2} \sin \varphi = \frac{1}{2} N \cos \varphi \sin \varphi. \quad (9-24)$$

将  $a_2$  微分可求得  $a_3$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{r}{3M} \cdot \frac{da_2}{d\varphi} = \frac{r}{3M} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{2} N \cos \varphi \sin \varphi \right) \\ &= \frac{r}{6M} \left( \frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi \right) \\ &= \frac{r}{6M} (r \cos \varphi - M \sin^2 \varphi) \\ &= \frac{N \cos \varphi}{6M} (N \cos^2 \varphi - M \sin^2 \varphi) \\ &= \frac{N \cos^3 \varphi}{6} \left( \frac{N}{M} - \tan^2 \varphi \right). \end{aligned}$$

因为

$$\frac{N}{M} = \frac{1 - e_1^2 \sin^2 \varphi}{1 - e_1^2} = \frac{1}{1 - e_1^2} - \frac{e_1^2 \sin^2 \varphi}{1 - e_1^2},$$

由(1-6)式:  $e_2^2 = \frac{e_1^2}{1 - e_1^2}$ , 则  $1 + e_2^2 = \frac{1}{1 - e_1^2}$ , 而有

$$\frac{N}{M} = 1 + e_2^2 - e_2^2 \sin^2 \varphi = 1 + e_2^2 \cos^2 \varphi.$$

令

$$e_2^2 \cos^2 \varphi = \eta^2,$$

则  $\frac{N}{M} = 1 + \eta^2$ , 故  $a_3$  式可写为:

$$a_3 = \frac{N \cos^3 \varphi}{6} (1 - \tan^2 \varphi + \eta^2). \quad (9-25)$$

按前述相同的方法,依次微分  $a_3$  可得  $a_4$ ,微分  $a_4$  可得  $a_5, \dots$ 。下面略去推导过程仅写出  $a_4, a_5$  的结果。

$$a_4 = \frac{N \sin \varphi \cos^3 \varphi}{24} (5 - \tan^2 \varphi + 9\eta^2 + 4\eta^4), \quad (9-25a)$$

$$a_5 = \frac{N \sin \varphi \cos^5 \varphi}{120} (5 - 18 \tan^2 \varphi + \tan^4 \varphi). \quad (9-25b)$$

将以上求得的  $a_0, a_1, a_2, \dots$  代入(9-17)式,加以整理,并略去  $\lambda$  六次方以上各项,即可得到高斯—克吕格投影的坐标公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= s + \frac{\lambda^2 N}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4 N}{24} \sin \varphi \cos^3 \varphi \\ &\quad \cdot (5 - \tan^2 \varphi + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots \\ y &= \lambda N \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - \tan^2 \varphi + \eta^2) \\ &\quad + \frac{\lambda^5}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18 \tan^2 \varphi + \tan^4 \varphi) + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (9-26)$$

在实际计算中,  $\lambda$  需化为弧度。

本投影的坐标计算比较复杂,在未使用计算机以前会有一定难度。因此,由国家测绘主管部门预先按地形图分幅的最小经差和纬差计算制成《高斯—克吕格投影坐标表》,以供地图测绘与编绘作业中使用。

现在推求高斯—克吕格投影长度比公式。

前面已经说明本投影为等角投影。在等角投影中,在一点附近各方向的长度比是一致的,因此只需要求出一个方向的长度比即可。在长度比公式(9-9)中,应用  $n$  式比较方便,因该式中  $G$  表达的  $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$  和  $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$  在(9-18)式中不含偏导数,只有各系数  $a$ ,而各  $a$  值已经求出,于是

$$n = \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

由(9-18)式,则有

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 &= (2a_2 \lambda + 4a_4 \lambda^3)^2 + (a_1 + 3a_3 \lambda^2 + 5a_5 \lambda^4)^2 \\ &= a_1^2 + (6a_1 a_3 + 4a_2^2) \lambda^2 + (9a_3^2 + 10a_1 a_5 + 16a_2 a_4) \lambda^4. \end{aligned}$$

将前面已求得的  $a_1, a_2, a_3, \dots$  各值代入上式,则

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 &= N^2 \cos^2 \varphi + [N^2 \cos^4 \varphi (1 - \tan^2 \varphi + \eta^2) + N^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi] \lambda^2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{4} N^2 \cos^6 \varphi (1 - \tan^2 \varphi + \eta^2)^2 + \frac{1}{12} N^2 \cos^6 \varphi (5 - \right. \\ &\quad \left. 18 \tan^2 \varphi + \tan^4 \varphi) + \frac{1}{3} N^2 \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi (5 - \tan^2 \varphi)\right] \lambda^4 \end{aligned}$$

略去上式右端第三项中的  $\eta^2$  ,代入纬线长度比公式,得

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \eta^2 + \sin^2 \varphi) \lambda^2 + \frac{\cos^4 \varphi}{12} (3 - 6 \tan^2 \varphi + \\ &\quad 3 \tan^4 \varphi + 5 - 18 \tan^2 \varphi + \tan^4 \varphi + 20 \tan^2 \varphi - 4 \tan^4 \varphi) \lambda^4 \\ &= 1 + \cos^2 \varphi (1 - \eta^2) \lambda^2 + \frac{\cos^4 \varphi}{3} (2 - \tan^2 \varphi) \lambda^4, \end{aligned}$$

将上式开方,按以下公式

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\cdots$$

展开,则得

$$\begin{aligned} n &= 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi (1 - \eta^2) \lambda^2 + \frac{1}{6} \cos^4 \varphi (2 - \tan^2 \varphi) \lambda^4 - \frac{1}{8} \cos^4 \varphi \lambda^4 \\ &= 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4}{24} \cos^4 \varphi (5 - 4 \tan^2 \varphi)。 \end{aligned}$$

$\lambda$  以弧度表示,最后得:

$$\mu = m = n = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4}{24} \cos^4 \varphi (5 - 4 \tan^2 \varphi)。 \tag{9-27}$$

这就是计算该投影长度比的公式。

下面求子午线收敛角  $\gamma$  的公式。

子午线收敛角是  $X$  轴正向与过已知点所引经线切线间的夹角。由于高斯-克吕格投影的经线收敛于两极,在以该投影绘制的地形图上,除中央经线外各经线都与坐标纵线构成夹角,即子午线收敛角或称坐标纵线偏角。

由图 9-5,设  $A'$  为地球椭圆面上  $A$  点在平面上的投影,相交于  $A'$  点的  $N\lambda$  和  $F\varphi$  分别为经线和纬线微小线段的投影。过  $A'$  点作  $X$  轴平行线  $A'B$  和  $Y$  轴平行线  $A'C$ ,则有

$$\angle BA'N = \angle DA'F = \gamma。$$

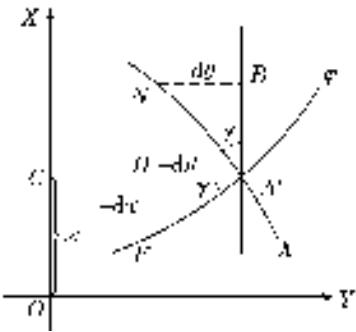


图 9-5 子午线收敛角



但子午线收敛角在北半球和中央经线以东为逆时针方向计算,故

$$\tan\gamma = -\frac{dy}{dx},$$

将(9-3)式代入,因经线的经度为常数,  $d\lambda=0$ , 于是

$$\tan\gamma = -\frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}。 \quad (9-28)$$

根据(9-18)式,对  $\lambda$  取导数比对  $\varphi$  取导数较方便。因此可利用等角条件(9-16)式,有

$$-\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{r}{M}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}}{\frac{r}{M}},$$

将上式代入(9-28)式,则得

$$\tan\gamma = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}。$$

将(9-18)式偏导数代入上式,仅限于三次项,则

$$\begin{aligned} \tan\gamma &= \frac{2a_2\lambda + 4a_4\lambda^3}{a_1 + 3a_3\lambda^2} = \left(\frac{2a_2\lambda}{a_1} + \frac{4a_4\lambda^3}{a_1}\right) \left(1 + \frac{3a_3\lambda^2}{a_1}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{2a_2\lambda}{a_1} + \frac{4a_4\lambda^3}{a_1}\right) \left(1 - \frac{3a_3\lambda^2}{a_1} + \dots\right) \\ &= \frac{2a_2\lambda}{a_1} + \frac{4a_4\lambda^3}{a_1} - \frac{6a_2a_3\lambda^3}{a_1^2} - \dots \end{aligned}$$

将  $a_1, a_2, \dots$  各值代入上式,则有

$$\begin{aligned} \tan\gamma &= \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{6} \sin\varphi \cos^2\varphi (5 - \tan^2\varphi + 9\eta^2 + 4\eta^4) - \\ &\quad \frac{\lambda^3}{2} \sin\varphi \cos^2\varphi (1 - \tan^2\varphi + \eta^2) + \dots \\ &= \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin\varphi \cos^2\varphi (1 + \tan^2\varphi + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \dots \end{aligned}$$

因  $\lambda$  角很小,可利用反正切函数的级数

$$\gamma = \arctan(\tan\gamma) = \tan\gamma - \frac{1}{3}\tan^3\gamma + \frac{1}{5}\tan^5\gamma - \dots$$

展开,略去  $\eta^4$  项,得

$$\gamma = \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin\varphi \cos^2\varphi (1 + 3\eta^2) + \dots \quad (9-29)$$

在计算  $\gamma$  时,  $\lambda$  应以弧度表示。

按地形图图廓地理坐标计算的子午线收敛角  $\gamma$  值,载于《高斯-克吕格投影坐标表》的后半部以备查用。

## 9.2 高斯-克吕格投影的分析和应用

### 9.2.1 变形分析

对本投影长度比公式(9-27)分析,可知:

(1) 当  $\lambda=0$  时,  $\mu=1$ ,证明本投影第一个条件,即中央经线投影无长度变形。

(2) 在同一条纬线上,长度变形随经差的增大而增大;在同一条经线上,长度变形随纬度的增大而减小,在赤道处变形最大。

(3) 在(9-27)式中,  $\lambda$  和  $\cos\varphi$  都是偶次方且各项均为正号,故长度变形恒为正,除中央经线外其他任何线段都变大。

(4) 由于  $\cos\varphi$  都为小于1的值,其2次方和4次方的值更小,所以长度变形的大小,主要取决于经差  $\lambda$ 。由于变形值随  $\lambda$  的增大而增大,为了保证地图必要的精度,投影带不宜太宽,通常采用  $6^\circ$  带( $\lambda=\pm 3^\circ$ )或  $3^\circ$  带( $\lambda=\pm 1.5^\circ$ )。

由子午线收敛角公式(9-29)可以看出,  $\gamma$  角随经差和纬度的增大而增大。在同一经线(中央经线除外)上,纬度越高  $\gamma$  角越大,在赤道上  $\gamma=0$ ;在同一纬线上,  $\lambda$  越大  $\gamma$  角也越大,在中央经线上  $\gamma=0$ 。另外,(9-29)式是一奇函数,所以  $\gamma$  有正有负,其符号与每带经差一致,但因点位不同,  $\gamma$  值也不同。为了使用方便,在同一幅地形图中,则将四个图角点的  $\gamma$  取平均数,以代表本幅图的子午线收敛角。

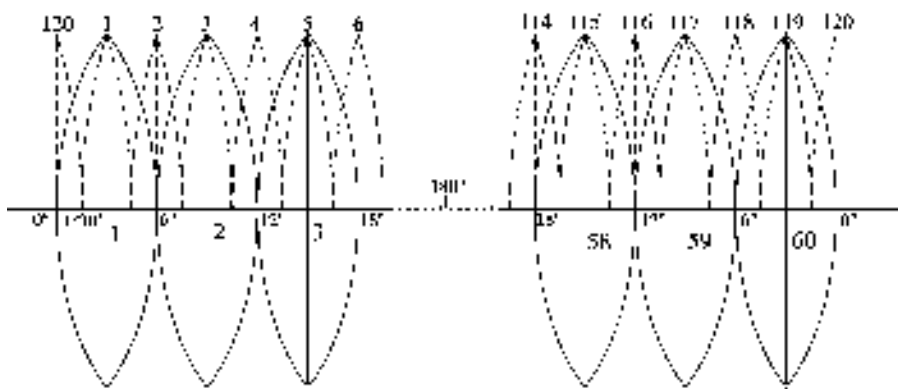
高斯-克吕格投影的长度变形值,列于表9-1。从表中可以看到,本投影在低纬地区变形较大,如在纬度  $30^\circ$  以下投影带的边缘部分其变形值超过  $1/1\,000$ ,故对低纬度地区地形图并不很适宜,但对高纬度地区则较好。

表 9-1 高斯-克吕格投影的长度变形值

$\begin{array}{c} \pm\lambda \\ \varphi \quad \mu-1 \end{array}$	0°	1°	2°	3°
90°	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
80°	0.000 00	0.000 00	0.000 02	0.000 04
70°	0.000 00	0.000 02	0.000 07	0.000 16
60°	0.000 00	0.000 04	0.000 15	0.000 34
50°	0.000 00	0.000 06	0.000 25	0.000 58
40°	0.000 00	0.000 09	0.000 36	0.000 81
30°	0.000 00	0.000 11	0.000 46	0.001 03
20°	0.000 00	0.000 14	0.000 54	0.001 22
10°	0.000 00	0.000 15	0.000 59	0.001 34
0°	0.000 00	0.000 15	0.000 61	0.001 38

### 9.2.2 投影带的划分、坐标规定及其应用

投影带划分的宽窄,取决于变形的大小。如果按经差  $6^\circ$  ( $\lambda = \pm 3^\circ$ ) 作为一带,在中纬度地区每带的边缘上其最大长度变形约为  $0.08\%$  (见表 9-1)。因此我国  $1:2.5$  万~ $1:50$  万比例尺地形图采用  $6^\circ$  分带,即从  $0^\circ$  子午线起由西向东每隔  $6^\circ$  为一带,将全球划分为 60 带。凡  $6^\circ$  的整倍数的子午线即为分界子午线。每带的中央经线  $L_0 = 6n - 3$ ,  $n$  为带号  $1, 2, 3, \dots, 60$ 。

图 9-6 全球投影带的划分,实线为  $6^\circ$  带,虚线为  $3^\circ$  带

$1:1$  万及其以上更大比例尺的地形图,采用  $3^\circ$  分带,它是在  $6^\circ$  分带的基础上进行划分的。从  $1^\circ 30'$  开始,由西向东每  $3^\circ$  为一带,全球分为 120 带。

这样,凡  $6^\circ$  带的分界子午线和中央经线,都是  $3^\circ$  带的中央经线,见图 9-6。

确定了投影带后,可以用任意带的中央经线的投影作为  $X$  轴,赤道的投影作为  $Y$  轴,两轴的交点为坐标原点。这样, $x$  坐标在赤道以北为正,以南为负。我国位于北半球, $x$  坐标都是正值。而  $y$  坐标则有正有负,为了避免负值在使用上的不便,规定将每带的坐标纵轴向西平移 500 km(图 9-7)。但在计算投影坐标表时, $y$  值是未加入 500 km 的。设同一带内,同一条纬线上有经差的绝对值相等的两点  $A$  和  $B$ (图 9-7),则  $x_A = x_B$ ,但  $y$  值,则数字相等而符号相反: $y_A = 189\ 687.4\text{ m}$ , $y_B = -189\ 687.4\text{ m}$ 。按移轴规定加 500 km 后,则

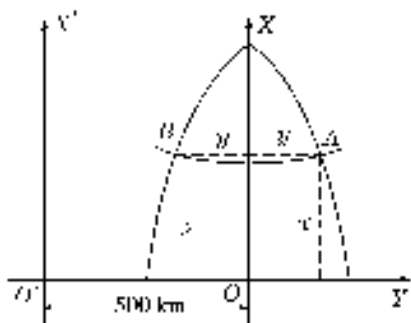


图 9-7  $X$  轴平移

$$y_A = 189\ 687.4\text{ m} + 500\ 000\text{ m} = 689\ 687.4\text{ m},$$

$$y_B = -189\ 687.4\text{ m} + 500\ 000\text{ m} = 310\ 312.6\text{ m}.$$

但是这样的分带法,各带投影完全相同,坐标成果各带通用,因此一带内的某一定点,在 60 带内都有对应点,会产生混乱。为了加以区别,规定在  $y$  值上加 500 km 后,又在百公里位数前加上带号。如上述  $A, B$  两点是在百万分之一图幅  $H-50$  内,其带号为  $50-30=20$ ,即第 20 带,则  $y$  的通用坐标为

$$y_{A\text{通}} = 20\ 689\ 687.4\text{ m},$$

$$y_{B\text{通}} = 20\ 310\ 312.6\text{ m}.$$

这样在 60 带内就不会有相同的坐标数值出现。

此外,本投影还规定邻带坐标的重叠问题。由于分带投影,各带自成独立坐标系统,相邻两带的图幅,其直角坐标网(方里网)互不连接。这样对相邻两带边缘的地形图拼接使用极为不便。因此规定:每投影带西边缘经差  $7.5'$  和  $15'$  以内各相应图幅加绘邻带坐标网。就是本投影带西边的一行  $1:10$  万,两行  $1:5$  万,四行  $1:2.5$  万地形图和经差  $7.5'$  内的  $1:1$  万地形图,都加绘西邻带延伸出的坐标网;每投影带的东边一行  $1:5$  万地形图和一行  $1:2.5$  万地形图都加绘有东邻带延伸过来的坐标网。展绘时,本带坐标网在图廓内绘全,邻带坐标网只在外图廓线上绘出能连接成纵横方里线的短线即可。

由于高斯-克吕格投影具有等角性质,经纬网同直角坐标网的偏差较小

以及计算一带的  $x, y$  值和  $\gamma$  角(实际是一带的  $1/4$ )可以世界通用等优点,所以不少国家用作地形图的数学基础。我国自 1953 年开始采用这一投影作为  $1:50$  万及其以上更大比例尺的地形图系列的数学基础。其他如前苏联、蒙古、朝鲜、东欧几个国家等,大约有 60 多个国家和地区都使用这一投影测制地形图。

### 9.3 通用横墨卡托(UTM)投影

通用横墨卡托(Universal Transverse Mercator)投影,简称 UTM 投影。如果将(9-26)式的  $x, y$  式和(9-27) $\mu$  式分别都乘以 0.999 6,就可以将高斯-克吕格投影变成 UTM 投影。

通用横墨卡托投影与高斯-克吕格投影的主要不同之处,在于以下两点:

#### 1. 带的划分相同而带号的起算不同

关于高斯-克吕格投影带的划分,我们在本书 9.2.2 中已经讲过,它的分带是从零子午线向东每  $6^\circ$  为一带。通用横墨卡托投影的分带是从  $180^\circ$  起向东每  $6^\circ$  为一带,即与国际百万分之一地图行的划分一致。也就是高斯-克吕格投影的第一带( $0^\circ \sim 6^\circ \text{E}$ )为 UTM 投影的第 31 带;UTM 的第一带( $180^\circ \sim 174^\circ \text{W}$ )是高斯-克吕格投影的 31 带。

通用横墨卡托投影每带的投影范围,限制在北纬  $84^\circ$  至南纬  $80^\circ$  之间,两极地区采用通用极球面(UPS)系。它是 UTM 的补充,但又是独立系统,两系的相接处,有一定的重叠。

#### 2. 根本的差别是中央经线长度比不同

我们知道,高斯-克吕格投影每带中央经线的投影长度比等于 1。但通用横墨卡托投影是将每带中央经线的长度比确定为 0.999 6。这一长度比的选择,可以使  $6^\circ$  带的中央经线与边缘经线的长度变形的绝对值大致相等。因此在中央经线与边缘经线之间,可以求得两条无长度变形的线,其位置距中央经线以东以西各为 180 000 m,相当于经差  $\pm 1^\circ 40'$ (图 9-8)。

这样一来,通用横墨卡托投影并非横切圆柱投影,而是横割圆柱投影,椭圆柱面不通过地球两极,在两条割线上长度比等于 1。由图 9-8 和表 9-2,可以具体了解 UTM 投影的变形情况。

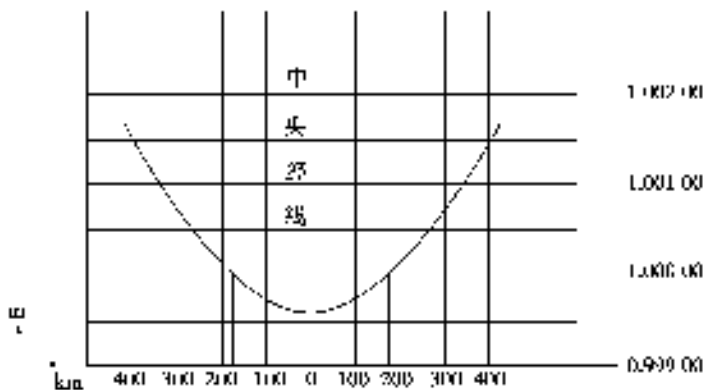


图 9-8 UTM 投影长度变形示意

表 9-2 UTM 投影的长度变形值

$\begin{matrix} \pm\lambda \\ \varphi \end{matrix}$	$\mu-1$	0°	1°	2°	3°
90°		-0.000 40	-0.000 40	-0.000 40	-0.000 40
80°		-0.000 40	-0.000 40	-0.000 38	-0.000 36
70°		-0.000 40	-0.000 38	-0.000 33	-0.000 24
60°		-0.000 40	-0.000 36	-0.000 25	-0.000 06
50°		-0.000 40	-0.000 34	-0.000 15	+0.000 17
40°		-0.000 40	-0.000 31	-0.000 04	+0.000 41
30°		-0.000 40	-0.000 28	+0.000 06	+0.000 63
20°		-0.000 40	-0.000 27	+0.000 14	+0.000 81
10°		-0.000 40	-0.000 26	+0.000 19	+0.000 94
0°		-0.000 40	-0.000 25	+0.000 21	+0.000 98

UTM 投影的坐标系为：每一投影带以中央经线与赤道投影的交点为坐标原点。为了避免出现负值，东西坐标( $y$  坐标)起始点加 500 km(同高斯-克吕格投影)；南北坐标( $x$  坐标)北半球以原点为 0，南半球以原点为 10 000 km。在实际使用时，

- 北半球： $x_{\text{实}} = x$ ，
- 南半球： $x_{\text{实}} = 100\,000\,00\text{ m} - x$ ，
- 经差为正： $y_{\text{实}} = y + 500\,000\text{ m}$ ，
- 经差为负： $y_{\text{实}} = 500\,000\text{ m} - y$ 。

为了便于两个投影带边界上图幅的拼接使用，规定两带的坐标约重叠

40 km, 相当于赤道上的经差  $22'$  的距离。这样则每带的正负经差都延伸为  $3^{\circ}11'$ 。

UTM 投影系统, 原先的计划是为世界范围所设计的, 但由于统一分带等原因未被世界各国普遍采用。目前有美国、西德等 60 多个国家以此投影作为国家基本地形图的数学基础。但又由于各国使用的地球椭球体不同, 而略有差异。

根据表 9-1 和表 9-2 进行比较和分析, 可以肯定, 对于中纬度地区和低纬度地区来讲, UTM 投影优于高斯-克吕格投影。因此有人曾建议, 中国最好也改用这一投影作为地形图的数学基础。

## 复习思考与计算题

1. 叙述高斯-克吕格投影的三个条件, 说出推导直角坐标的过程中是如何应用这些条件的?
2. 试根据高斯-克吕格投影的直角坐标公式分析投影后经纬线的形状。
3. 高斯-克吕格投影为什么要按经差划分为  $3^{\circ}$  和  $6^{\circ}$  带, 分别叙述其用途。
4. 高斯-克吕格投影和 UTM 投影有何区别和联系?
5. 计算  $\varphi=25^{\circ}\text{N}, \lambda=114^{\circ}30'\text{E}$  点的高斯-克吕格投影通用坐标。

## 第 10 章 几种派生的投影

### 10.1 哈默(Hammer)等面积投影

西方国家出版的地图集中,常采用某一派生的地图投影绘制世界地图,哈默投影(有些书上称作哈默-爱托夫投影)就是其中一种。哈默投影是由等面积横轴方位投影派生而来。其经纬网交点的直角坐标是由等面积横方位投影的每一横坐标乘以 2 求得,并重新注记经线,由中心点至边经线代表  $180^\circ$ ,而不是原来的  $90^\circ$ 。这样,哈默投影就能在一个椭圆内表示全球(图 10-1),不像等积横方位投影只表示半球(图 3-27)。

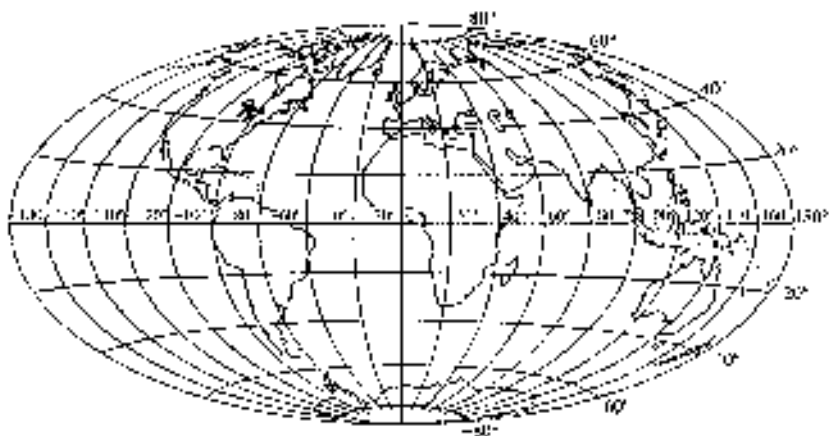


图 10-1 哈默投影世界地图

等面积方位投影的坐标公式,由(3-11)式知:

$$\rho = 2R \sin \frac{Z}{2},$$

$$\delta = \alpha,$$

$$x = \rho \cos \alpha,$$

$$y = \rho \sin \alpha.$$

由于



$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \\ \sin\alpha &= \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \\ \sin\frac{Z}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos Z}{2}},\end{aligned}$$

在横轴投影中,由地理坐标换算成球面极坐标,可用(2-32)式,并令  $\lambda_0=0^\circ$ , 则

$$\left. \begin{aligned}\cos Z &= \cos\varphi\cos\lambda \\ \tan\alpha &= \cot\varphi\sin\lambda\end{aligned} \right\}^\circ \quad (10-1)$$

由以上各式,则有

$$\left. \begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\varphi\sin^2\lambda}} \\ \sin\alpha &= \frac{\cot\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1+\cot^2\varphi\sin^2\lambda}}\end{aligned} \right\}, \quad (10-2)$$

而

$$\begin{aligned}\rho &= 2R\sin\frac{Z}{2} = 2R\sqrt{\frac{1-\cos Z}{2}} \\ &= \sqrt{2}R\sqrt{1-\cos Z} = \sqrt{2}R\sqrt{1-\cos\varphi\cos\lambda},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}x = \rho\cos\alpha &= \frac{\sqrt{2}R\sqrt{1-\cos\varphi\cos\lambda}}{\sqrt{1+\cot^2\varphi\sin^2\lambda}} \\ &= \frac{\sqrt{2}R\sin\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi\cos\lambda}},\end{aligned} \quad (10-3)$$

$$\begin{aligned}y = \rho\sin\alpha &= \rho\cos\alpha\tan\alpha \\ &= \frac{\sqrt{2}R\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1+\cos\varphi\cos\lambda}}.\end{aligned} \quad (10-4)$$

(10-3)和(10-4)式是用地理坐标表示的等积横方位投影的坐标公式。根据哈默投影的条件,不难写出它的坐标公式为:

$$\left. \begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{2}R\sin\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi\cos\frac{\lambda}{2}}} \\ y &= \frac{2\sqrt{2}R\cos\varphi\sin\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1+\cos\varphi\cos\frac{\lambda}{2}}}\end{aligned} \right\}^\circ \quad (10-5)$$

在等积横方位投影中,半球投影图的面积为  $\pi b_1^2 = 2\pi R^2$ , 由此则  $b_1 = \sqrt{2}R$ 。在哈默投影中,  $x$  方向  $b_1$  值不变,  $y$  方向增大一倍为  $2b_1$ , 即  $a_1$ , 故

$$a_1 = 2b_1 = 2\sqrt{2}R。$$

由长短半径  $a_1, b_1$  构成的椭圆表示全球的投影, 因该椭圆面积为

$$\pi a_1 b_1 = \pi 2\sqrt{2}R \cdot \sqrt{2}R = 4\pi R^2,$$

而  $4\pi R^2$  是全球的面积, 由此证明哈默投影仍为等面积投影。

在制图实践中, 常使两半径  $a_1 \neq 2b_1$ , 而使  $a_1/b_1 = k, k$  为一常数。根据等面积条件  $\pi a_1 b_1 = 4\pi R^2$ , 即  $a_1 b_1 = 4R^2$ , 及  $a_1 = kb_1$ , 解此二式, 得

$$a_1 = 2\sqrt{k}R,$$

$$b_1 = \frac{2}{\sqrt{k}}R,$$

因此

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2R}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 + \cos\varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} \\ y &= 2\sqrt{k}R \frac{\cos\varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1 + \cos\varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} \end{aligned} \right\}。 \quad (10-6)$$

哈默投影的变形公式为:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2}}{R} \\ n &= \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2}}{R \cos\varphi} \\ P &= 1 \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 + 2} \end{aligned} \right\}, \quad (10-7)$$

式中偏导数可由(10-6)式求得如下:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{R}{\sqrt{k}} \left[ \frac{2\cos\varphi}{\sqrt{1 + \cos\varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} + \frac{\sin^2\varphi \cos \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{(1 + \cos\varphi \cos \frac{\lambda}{2})^3}} \right],$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\sqrt{k}R \left[ \frac{2\sin\varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1 + \cos\varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} - \frac{\cos\varphi \sin\varphi \cos \frac{\lambda}{2} \sin \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{(1 + \cos\varphi \cos \frac{\lambda}{2})^3}} \right],$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{R \cos \varphi \sin \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{2 \sqrt{k} \sqrt{(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})^3}},$$
$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \sqrt{k} R \cos \varphi \left[ \frac{\cos \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})}} + \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \sin \frac{\lambda}{2}}{2 \sqrt{(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})^3}} \right]。$$

将四偏导数代入(10-7)式,可以计算  $m, n$  和  $\tan \frac{\omega}{2}$ 。

在中央经线上,  $\lambda=0$ , 这时

$$\begin{aligned} \varphi=0^{\circ}, \quad m &= \sqrt{\frac{2}{k}}, \quad n = \sqrt{\frac{k}{2}}; \\ \varphi=90^{\circ}, \quad m &= \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad n = \sqrt{k}。 \end{aligned}$$

在边经线上,  $\lambda=180^{\circ}$ , 这时

$$\begin{aligned} \varphi=0^{\circ}, \quad m &= \frac{2}{\sqrt{k}}, \quad n = \frac{\sqrt{k}}{2}; \\ \varphi=90^{\circ}, \quad m &= 2 \sqrt{k}, \quad n = \frac{1}{2 \sqrt{k}}。 \end{aligned}$$

在不同的  $k$  值情况下, 各  $m, n$  值如表 10-1。

表 10-1 不同  $k$  值对应的  $m, n$  值

位 置	长度比	$k=2$	$k=1.6$	$k=1.5$	$k=1.4$
$\lambda=0^{\circ}, \varphi=0^{\circ}$	$m$	1.00	1.12	1.15	1.20
	$n$	1.00	1 : 1.12	1 : 1.15	1 : 1.20
$\lambda=0^{\circ}, \varphi=90^{\circ}$	$m$	1 : 1.42	1 : 1.27	1 : 1.23	1 : 1.19
	$n$	1.42	1.27	1.23	1.19
$\lambda=180^{\circ}, \varphi=0^{\circ}$	$m$	1.42	1.67	1.61	1.68
	$n$	1 : 1.42	1 : 0.63	1 : 0.61	1 : 0.59
$\lambda=180^{\circ}, \varphi=90^{\circ}$	$m$	2.84	2.54	2.46	2.38
	$n$	1 : 2.84	1 : 2.54	1 : 2.46	1 : 2.38

哈默投影的经纬网形状如图 10-1。该投影常在地图集中用以绘制世界专题地图。

10.2 爱托夫(Aitoff)投影<sup>①</sup>

爱托夫投影是由等距离横轴方位投影派生出来的一种椭圆形投影。其经纬网交点的直角坐标由等距横轴方位投影半球图的相应横坐标 2 倍而得到。同时重新注记经线,类似于哈默投影使中央经线东西两侧的边经线代表  $180^\circ$ ,而不是原来的  $90^\circ$ ,如图 10-2。

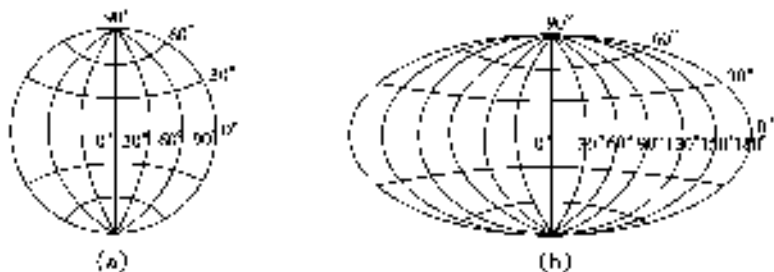


图 10-2 (a) 等距横轴方位投影 (b) 爱托夫投影

由公式(3-14)知,等距方位投影公式为:

$$\begin{aligned}\rho &= RZ, \\ \delta &= \alpha, \\ x &= \rho \cos \delta = RZ \cos \alpha, \\ y &= \rho \sin \delta = RZ \sin \alpha.\end{aligned}$$

根据横轴投影中地理坐标与球面坐标的转换公式(10-1)中之第一式,则有

$$Z = \arccos(\cos \varphi \cos \lambda).$$

并顾及(10-2)式,于是

$$\begin{aligned}x &= RZ \cos \alpha = \frac{R \arccos(\cos \varphi \cos \lambda)}{\sqrt{1 + \cot^2 \varphi \sin^2 \lambda}} \\ &= \frac{R \sin \varphi \arccos(\cos \varphi \cos \lambda)}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}}, \\ y &= RZ \sin \alpha = \frac{R \cot \varphi \sin \lambda \arccos(\cos \varphi \cos \lambda)}{\sqrt{1 + \cot^2 \varphi \sin^2 \lambda}} \\ &= \frac{R \cos \varphi \sin \lambda \arccos(\cos \varphi \cos \lambda)}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}}.\end{aligned}$$

① 王近仁,温克尔(Winkel)投影剖析,南京师范大学学报,1985(2)

此两式为以地理坐标表示的等距横方位投影的直角坐标公式。只要将上两式中的  $\lambda$  除以 2 并将  $y$  式乘以 2,就可变为爱托夫投影的直角坐标公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R \sin \varphi \arccos(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\lambda}{2}}} \\ y &= \frac{2R \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2} \arccos(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\lambda}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (10-8)$$

以上各式中所求出的  $Z$  值都应以弧度计。表 10-2 列出了经差纬差各为  $30^\circ$  的等距横方位投影和爱托夫投影的直角坐标值,可供展绘很小比例尺世界图的经纬网,并可进行互相比较。

表 10-2 等距横方位投影和爱托夫投影的直角坐标值

地理坐标		等距横方位		地理坐标		爱托夫	
$\varphi$	$\lambda$	$x$	$y$	$\varphi$	$\lambda$	$x$	$y$
$0^\circ$	$0^\circ$	0	0	$0^\circ$	$0^\circ$	0	0
$0^\circ$	$30^\circ$	0	3.34	$0^\circ$	$60^\circ$	0	6.67
$0^\circ$	$60^\circ$	0	6.68	$0^\circ$	$120^\circ$	0	13.34
$0^\circ$	$90^\circ$	0	10.00	$0^\circ$	$180^\circ$	0	20.02
$30^\circ$	$0^\circ$	3.36	0	$30^\circ$	$0^\circ$	3.36	0
$30^\circ$	$30^\circ$	3.48	3.01	$30^\circ$	$60^\circ$	3.48	6.03
$30^\circ$	$60^\circ$	3.97	5.95	$30^\circ$	$120^\circ$	3.97	11.90
$30^\circ$	$90^\circ$	5.00	8.67	$30^\circ$	$180^\circ$	5.00	17.34
$60^\circ$	$0^\circ$	6.68	0	$60^\circ$	$0^\circ$	6.68	0
$60^\circ$	$30^\circ$	6.87	1.98	$60^\circ$	$60^\circ$	6.87	3.96
$60^\circ$	$60^\circ$	7.51	3.76	$60^\circ$	$120^\circ$	7.51	7.52
$60^\circ$	$90^\circ$	8.67	5.00	$60^\circ$	$180^\circ$	8.67	10.00
$90^\circ$	$0^\circ$	10.00	0	$90^\circ$	$0^\circ$	10.00	0
$90^\circ$	$30^\circ$	10.00	0	$90^\circ$	$60^\circ$	10.00	0
$90^\circ$	$60^\circ$	10.00	0	$90^\circ$	$120^\circ$	10.00	0
$90^\circ$	$90^\circ$	10.00	0	$90^\circ$	$180^\circ$	10.00	0

比例尺 1 : 10 000 万,单位:cm

爱托夫投影绘制世界地图的形状如图 10-3。

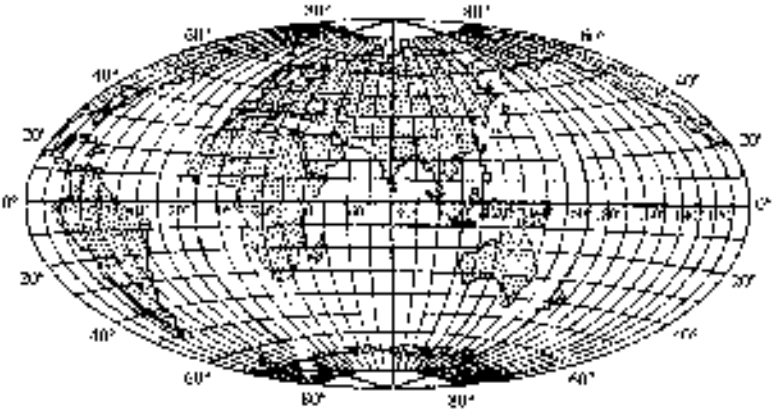


图 10-3 爱托夫投影世界地图①

爱托夫投影的变形公式：

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}}{R} \\ n &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{R \cos \varphi} \\ P &= \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)}{R^2 \cos \varphi} \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \frac{a-b}{\sqrt{ab}} \end{aligned} \right\} \quad (10-9)$$

上式中偏导数可由(10-8)式求得后代入上式以计算  $m, n, P$ , 现从略。

爱托夫投影属任意投影, 常用以绘世界地图。

### 10.3 温克尔(Winkel)投影②

温克尔投影也属于派生投影。构成投影网的直角坐标, 是取自爱托夫投影和等距离正轴圆柱投影相应坐标值的算术平均数。

① A. В. Граур. Математическая Картография. Издательство Ленинградского Университета, 1956.

② 王近仁. 温克尔(Winkel)投影剖析. 南京师范大学学报, 1985(2)

由公式(4-15)知等距正圆柱投影的坐标公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= R\varphi \\ y &= R\lambda \end{aligned} \right\}。 \quad (10-10)$$

由(10-8)式和(10-10)式中的  $x$  式与  $x$  式相加,  $y$  式与  $y$  式相加, 并都除以 2, 便可得到温克尔投影的直角坐标公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left[ \frac{R \sin \varphi \arccos(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\lambda}{2}}} + R\varphi \right] \\ y &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2R \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2} \arccos(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\lambda}{2}}} + R\lambda \right] \end{aligned} \right\}。 \quad (10-11)$$

温克尔投影的变形公式为:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2}}{R} \\ n &= \frac{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2}}{R \cos \varphi} \\ P &= \frac{(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi})}{R^2 \cos \varphi} \\ \tan \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{P} - 2} \end{aligned} \right\}。 \quad (10-12)$$

(10-12)式中偏导数可由(10-11)式求出代入, 在此从略。图 10-4 是该投影的经纬网形状。

表 10-3 载有爱托夫、等距正圆柱和温克尔三投影的直角坐标值, 以便于比较。如用以展绘温克尔投影经纬网, 还需内插适当经纬线。

从温克尔投影经纬网形状看, 它具有以下特征: 赤道和中央经线投影为一对正交的直线, 其长度无变形, 并且是整个投影网的对称轴。赤道被经线等分, 中央经线被纬线等分。其余经纬线都是曲线, 纬线凹向两极, 经线凹向投影中心。极点投影为平行于赤道的直线, 其长度为赤道的一半。

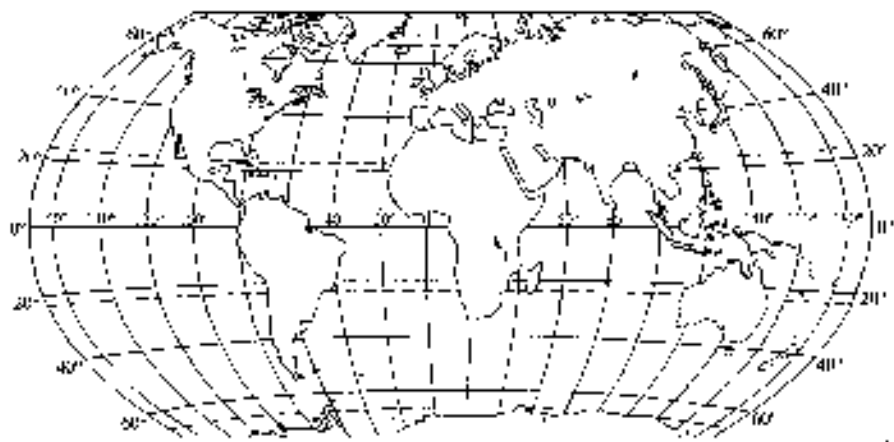


图 10-4    温克尔投影世界地图

表 10-3    爱托夫、等距正圆柱、温克尔投影的直角坐标

地理坐标		爱托夫		等距正圆柱		温克尔	
$\varphi$	$\lambda$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
0°	0°	0	0	0	0	0	0
	60°	0	6.67	0	6.67	0	6.67
	120°	0	13.34	0	13.34	0	13.34
	180°	0	20.02	0	20.02	0	20.02
30°	0°	3.36	0	3.36	0	3.36	0
	60°	3.48	6.03	3.36	6.68	3.42	6.35
	120°	3.97	11.90	3.36	13.34	3.67	12.62
	180°	5.00	17.34	3.36	20.02	4.18	18.68
60°	0°	6.68	0	6.68	0	6.68	0
	60°	6.87	3.96	6.68	6.68	6.78	5.32
	120°	7.51	7.52	6.68	13.34	7.10	10.43
	180°	8.67	10.00	6.68	20.02	7.68	15.01
90°	0°	10.00	0	10.00	0	10.00	0
	60°	10.00	0	10.00	6.68	10.00	3.34
	120°	10.00	0	10.00	13.34	10.00	6.68
	180°	10.00	0	10.00	20.02	10.00	10.01

比例尺 1 : 10 000 万,单位:cm



表 10-4 是温克尔投影的变形情况表。由此可以看出,该投影的变形随着离开中央经线和赤道距离的增大而增大,其最大变形位置,在图幅的四角处。全球主要陆地部分,其面积变形不超过 100%,最大角度变形不超过  $40^\circ$ ,而且变形分布比较均匀,水陆轮廓形状变异较小。因此是用于世界地图的一种较好的投影。英国 2000 年第 2 版《泰晤士世界地图集》(压缩版)的序图中许多图幅,如世界的气候、人口等图幅,都是采用的温克尔投影。其他国家出版的地图集中,也有使用这一投影编制世界专题地图的。

表 10-4 温克尔投影的变形情况

$\varphi$	$\lambda$	$m$	$n$	$P$	$\omega$
$0^\circ$	$30^\circ$	1.016 8	1.000 0	1.016 8	$1^\circ 00'$
	$60^\circ$	1.063 9	1.000 0	1.063 9	$3^\circ 30'$
	$90^\circ$	1.131 2	1.000 0	1.131 2	$7^\circ 00'$
	$120^\circ$	1.203 4	1.000 0	1.203 4	$10^\circ 30'$
	$150^\circ$	1.261 6	1.000 0	1.261 6	$13^\circ 15'$
	$180^\circ$	1.285 4	1.000 0	1.285 4	$14^\circ 20'$
$30^\circ$	$30^\circ$	1.022 9	1.138 2	1.154 2	$9^\circ 40'$
	$60^\circ$	1.086 2	1.128 9	1.189 8	$14^\circ 15'$
	$90^\circ$	1.176 2	1.112 6	1.237 7	$19^\circ 30'$
	$120^\circ$	1.274 4	1.089 4	1.283 4	$24^\circ 35'$
	$150^\circ$	1.361 2	1.058 3	1.307 7	$29^\circ 20'$
	$180^\circ$	1.417 6	1.018 1	1.290 6	$33^\circ 25'$
$60^\circ$	$30^\circ$	1.039 9	1.691 4	1.703 3	$31^\circ 20'$
	$60^\circ$	1.145 8	1.655 3	1.699 5	$34^\circ 30'$
	$90^\circ$	1.287 4	1.595 0	1.682 8	$38^\circ 50'$
	$120^\circ$	1.432 8	1.510 3	1.639 4	$43^\circ 40'$
	$150^\circ$	1.554 2	1.401 4	1.553 5	$48^\circ 40'$
	$180^\circ$	1.627 1	1.268 6	1.410 4	$53^\circ 30'$
$85^\circ^*$	$30^\circ$	1.059 6	6.495 7	6.634 8	$94^\circ 50'$
	$60^\circ$	1.207 9	6.425 8	6.181 7	$95^\circ 50'$
	$90^\circ$	1.385 7	6.313 0	5.764 8	$97^\circ 45'$
	$120^\circ$	1.542 5	6.163 0	5.193 0	$100^\circ 25'$
	$150^\circ$	1.643 2	5.983 8	4.485 9	$104^\circ 10'$
	$180^\circ$	1.664 9	5.785 8	3.675 6	$109^\circ 00'$

\*  $\varphi=90^\circ$ 时出现分母为 0,故限制在  $\varphi=85^\circ$ ;  $\omega$  凑整至  $5'$

这类派生的地图投影还有其他几种,如纬线间隔取桑逊投影和摩尔威德投影的算术平均数的博格斯(S. Whittemore Boggs 1884 年~1954 年)投影等。在这里我们只介绍以上三种,其他不再介绍了。

## 复习思考题及计算题

1. 哈默投影、爱托夫投影和温克尔投影分别是由何种地图投影派生来的?各有什么特点与用途?
2. 已知投影方程式为  $x=R\varphi, y=R\lambda$ , 试求:① 投影性质;② 经纬线长度比;③ 面积比;④ 经纬线投影形状。

# 第 11 章 月球投影和空间地图投影

## 11.1 月球的形状和大小<sup>①</sup>

制作详细的月球地图,是地图学由地球进入外星的第一次实践。当美国宇航太空船阿波罗 11 号 (APOLLO 11) 首次在月球着陆时,月球的某些地图已经制作出来了。那是根据月球探测器提供的摄影信息制作的,其范围从整个可见月球面到几平方千米的特殊区域。在比例尺方面,从小比例的月亮半球图到 1 : 500 的着陆范围图。现在更广泛更精确的资料已足够编制整个月球的地图。因此为月球制图选择地图投影,已经不是一个学术问题,而是一个实际问题了。为月球地图选择投影,一方面要考虑月球的形状和大小,另一方面要考虑投影的限差问题。

月球的形状,经过宇宙飞行器的精密观测,它是近于圆球的一个椭球体。其定义为:

- $a_L$ —通过月球赤道和零子午线交点的半轴长;
- $b_L$ —与月球的平均天平动轴一致的半轴长;
- $c_L$ —对  $a_L, b_L$  轴互相垂直的半轴长。

其参数是:

$$\begin{aligned} a_L &= 1\,738.57\text{ km}, \\ b_L &= 1\,737.49\text{ km}, \\ c_L &= 1\,738.21\text{ km}. \end{aligned}$$

月球的<sup>最大</sup>扁率:

$$f_{\max} = \frac{a_L - b_L}{a_L} = 0.000\,517\,720\,2,$$

月球的最小扁率:

$$f_{\min} = \frac{c_L - b_L}{a_L} = 0.000\,408\,466;$$

第一偏心率为:

---

① Peter Richardus, Ron K. Adler. Map Projections. North-Holland, 1972

$$e_L^2 = 2f_{\max} - f_{\max}^2 = 0.001\,035\,172\,8,$$

第二偏心率为：

$$e_L'^2 = \frac{e_L^2}{1 - e_L^2} = 0.001\,363\,455\,2;$$

将月球视为球体时,可用平均月球半径：

$$R_L = \frac{a_L + b_L + c_L}{3} = 1\,738.09(\text{km});$$

使用这个半径时,参考月球面上：

$$\text{月球 } 1^\circ \text{弧长} = \frac{2\pi}{360} \times 1\,738\,090 \text{ m} = 30\,335 \text{ m};$$

$$\text{月球的体积} = 2.119 \times 10^{10} \text{ km}^3;$$

月球距地球的平均距离为 384 402 km。

由以上参数知,月球的扁率很小,把它当作三轴椭球没有多大实际意义,因此把月球当作球体处理会有许多方便。

## 11.2 用于月球的投影及变形分析<sup>①</sup>

像在地球面上一样,根据地图的用途、比例尺和区域位置不同,可以选用不同的月球地图投影。对于月球,以采用等角性质和等面积性质的投影比较适当。

已经用于月球地图制图的投影,有如下几种：

- (1) 正射投影
- (2) 横轴等积方位投影
- (3) 球面投影
- (4) AMS 月球投影
- (5) 墨卡托投影
- (6) 横轴墨卡托投影
- (7) UTM 投影
- (8) 正轴等角圆锥投影

以上这些投影,都可以沿用原有的公式,只是采用月球参数进行投影而已。

AMS 月球投影 (AMS Lunar Projection) 是美国陆军地图局 (现为 TOPOCOM) 专用于月球的投影。该投影的视点位于投影面与月球面的切点所确定的直径的延长线上,即外心透视投影。在 AMS 月球投影中,规定

<sup>①</sup> Peter Richardus, Ron K. Adler. Map Projections. North-Holland, 1972

视点  $O$  至月球中心  $C$  的距离为：

$$OC=D=1.537\,48R,$$

此处  $R$  为月球的平均半径。参看图 11-1。

AMS 月球投影的坐标方程式为：

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R(D+R)(\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda)}{D+R(\sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda)} \\ y &= \frac{R(D+R)\cos\varphi \sin\lambda}{D+R(\sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda)} \end{aligned} \right\}, \tag{11-1}$$

式中的符号及其定义同本书 2.3 和 3.4 一致，所不同的只是地球与月球的参数不同。

1960 年美国编制的 1：500 万和 1：1 000 万两种比例尺的月球像片镶嵌图以及 1967 年出版的月球等温线图，都采用横轴正射投影。前苏联也采用这一投影在 1960 年编制过 1：1 000 万月球侧面图，中心点位于 120°E 与赤道的交点上。

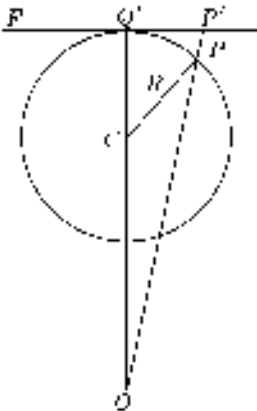


图 11-1 AMS 月球投影示意图

1964 年美国出版的两幅 1：500 万月球半球图，采用了横轴等面积方位投影。

表 11-1 列出了三种方位投影的变形情况，可作比较，以判断投影的优劣。

表 11-1 球面、AMS、正射投影的变形情况

方位 投 影	角度变形(弧分)		30 km 直线的长度变形(以万分之一计)				
	离原点 60 km 处	离原点 300 km 处	相切情况 ( $\mu_0=1.00$ )		相割情况 ( $\mu_0=0.994$ )		
			离原点 60 km	离原点 300 km	在 原点	离原点 60 km	离原点 300 km
球面	0	0	3	77	30	27	46
AMS	0.11	5.57	3	60	24	23	36
正射	2.40	26.3	14	152	0	14	152

表中离原点距离为 60 km，即月球表面上约 2°弧长。它表示一个月球站的工作区域。离原点为 300 km，即月球表面上约为 10°弧长。从表 11-1 中可以看出，正射投影变形最大，AMS 投影变形较好，但球面投影具有等角性质，故常被采用。

对月球来讲，方位投影的最大范围一般只用以表示从地面上周期可见

的“圆盘”或其另一面。对于表示全部月球表面,则不能用方位投影,应选择其他投影。

1960年美国编的月球宇航图(LAC),比例尺为1:100万,它采用了三种投影:在南北纬 $16^\circ$ 之间绕月球赤道一条带,采用墨卡托投影;从南北纬 $16^\circ$ 至 $80^\circ$ 的地带,采用正轴等角圆锥投影; $80^\circ$ 至极点的两极地区,采用极球面投影。

1972年美国为阿波罗宇宙飞船所编制的1:25 000和1:100 000的月球地形图,采用的是横轴墨卡托投影。

关于墨卡托投影、横墨卡托投影和等角圆锥投影等的变形特点,在前面有关章节已有详述,在此不再重复。

## 11.3 空间斜墨卡托(SOM)投影<sup>①②</sup>

### 11.3.1 空间地图投影的一般概念

传统的地图投影是建立在静态的条件下,即原面(地球的数学面)与投影面(平面或可展曲面)是彼此固定的,也就是在静态下成图。然而空间摄影的情况则不同,人造卫星和地球都是相对运动的。卫星在沿轨道围绕一个自转着的地球运行中,通过星载扫描装置获得连续的地面图像。这种空间扫描成像必然导致产生新的地图投影概念。所谓空间地图投影(Space Map Projection),实际上是指与传统的静态的地图投影不同的空间动态地图投影。这种新的地图投影,是在惯性空间中定义的。由于卫星在空间运行,其位置 $(X, Y, Z)$ 随时间 $t$ 而改变,所以位置是时间 $t$ 的函数,从而构成四维投影 $(x, y, z, t)$ 。如果以简单的数学公式来表述空间摄影过程中像片坐标 $(x, y)$ 、地理坐标 $(\varphi, \lambda)$ 和摄影的投影坐标 $(X, Y, Z)$ 之间的相互关系,那么,传统投影为:

$$(x, y) = f(\varphi, \lambda) = F(X, Y, Z),$$

空间投影为

$$(x, y) = f(\varphi, \lambda, t) = F(X, Y, Z, t)。$$

下面对空间斜墨卡投影(Space Oblique Mercator Projection, 简称

① 黄国寿. 空间斜墨卡托(SOM)投影. 中国测绘学会地图生产管理学术讨论会论文选集, 1987

② John P. Snyder. The Space Oblique Mercator Projection. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1978, 44(5): 585~596

SOM 投影)进行具体的讨论。

SOM 投影是美国地质测量局(USGS)为轨道航天器运载的扫描装置摄取的连续图像所设计的一种新投影。由最早的创始人科尔沃科雷塞斯(Alden P. Colvocoresses)于 1974 年提出的,当时未推导出数学公式。1978 年 7 月,美国弗吉尼亚大学的琼金斯(John. L. JunKins)和美国化学工程师、业余地图投影学者斯奈德(John. P. Snyder)两人分别独立地推导出球体的 SOM 投影的数学公式。同时也导出了椭球体的 SOM 投影公式。现在只讨论球体 SOM 投影。

### 11.3.2 斜墨卡托投影的坐标转换

在本书 4.2 中我们已经讲过正轴墨卡托投影的公式。不过在 SOM 投影的直角坐标系统中,它们的  $X, Y$  轴同我们以前所用的  $X, Y$  轴互易,即  $X$  为横轴,  $Y$  为纵轴。同时其经纬线长度比,分别以  $h$  和  $k$  表示(11.4 节同此)。为此球体的正轴墨卡托投影公式可以写成如下形式(以  $R$  取代 4-4 式中的  $c$ ,即切圆柱):

$$h = k = \sec \varphi, \quad (11-2)$$

$$x = R\lambda, \quad (11-3)$$

$$y = R \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (11-4)$$

回顾本书 4.4,已知斜墨卡托(斜轴等角切圆柱)投影是通过制图区域中部的大圆的极为新极点。也就是以此确定转换赤道和新极点。然后按公式(2-30)进行球面坐标换算,以  $Z, \alpha$  为参数,按公式(4-18)进行直角坐标计算即为通常的斜墨卡托投影。

对于卫星扫描图像设计的斜墨卡托投影所采用的转换赤道和新极点,需要根据卫星轨道参数确定。如卫星沿着一个与地球赤道构成倾斜角  $i$  的固定圆形轨道运行,并假定地球为静止的球体,那么轨道平面与地球相交成的大圆,就是卫星轨迹,它与赤道的交角仍是  $i$ 。卫星地面轨迹是卫星扫描的轴线,以此静态的卫星地面轨迹作为转换坐标系的赤道显

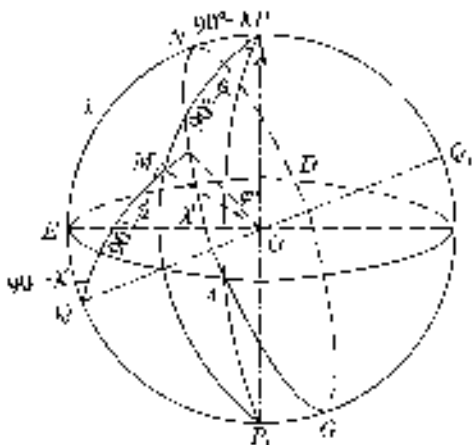


图 11-2 转换赤道与新极点

然是合适的。

由图 11-2, 设  $P, P_1$  为地球的北极和南极,  $EAD$  为地球的赤道,  $NAG$  为转换赤道, 它同地球赤道的交点  $A$  即升交点。  $Q, Q_1$  为转换坐标系的两极。转换赤道附近任意点  $M$ , 其地理坐标为  $\varphi, \lambda$  ( $M$  点对升交点的经差), 其转换坐标为  $\varphi', \lambda'$ 。转换纬度  $\varphi'$  是过  $M$  点的地球半径和转换赤道面的交角, 自转换赤道面起算。转换经度  $\lambda'$  是沿转换赤道的角距, 自升交点向北起算。

在球面三角形  $QPM$  中,

$$\begin{aligned}\widehat{PM} &= 90^\circ - \varphi, \\ \widehat{QP} &= i, \\ \widehat{QM} &= 90^\circ - \varphi', \\ \angle P &= 90^\circ - \lambda, \\ \angle Q &= 90^\circ - \lambda' .\end{aligned}$$

解此球面三角形, 可得转换坐标公式。应用球面三角正弦定律

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \lambda) / \sin(90^\circ - \varphi') &= \sin(90^\circ - \lambda') / \sin(90^\circ - \varphi), \\ \cos \lambda / \cos \varphi' &= \cos \lambda' / \cos \varphi,\end{aligned}$$

于是

$$\cos \lambda' = \frac{\cos \varphi \cos \lambda}{\cos \varphi'} . \quad (11-5)$$

应用球面三角边的余弦定律

$$\cos(90^\circ - \varphi') = \cos i \cos(90^\circ - \varphi) + \sin i \sin(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \lambda),$$

得

$$\sin \varphi' = \cos i \sin \varphi - \sin i \cos \varphi \sin \lambda, \quad (11-6)$$

同理得

$$\sin \varphi = \cos i \sin \varphi' + \sin i \cos \varphi' \sin \lambda',$$

于是

$$\sin \lambda' = \frac{\sin \varphi - \cos i \sin \varphi'}{\sin i \cos \varphi'} . \quad (11-6b)$$

以(11-5)式除(11-6b)式, 则有

$$\tan \lambda' = \frac{\sin \varphi - \cos i \sin \varphi'}{\sin i \cos \varphi \cos \lambda},$$

以(11-6)式代入上式, 整理后得:

$$\tan \lambda' = \frac{\sin i \tan \varphi}{\cos \lambda} + \cos i \tan \lambda . \quad (11-7)$$

(11-6)和(11-7)式即转换坐标公式, 将(11-6)和(11-7)式求出的  $\varphi'$  和  $\lambda'$  分别代替(11-4)和(11-3)式中的  $\varphi$  和  $\lambda$ , 即成为以卫星轨道确定的斜墨



卡托投影的坐标公式:

$$x = R\lambda', \quad (11-8)$$

$$y = R \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right). \quad (11-9)$$

但是这样的斜墨卡托投影,仍然是静态投影。

### 11.3.3 动态地图投影

现在利用正射透视投影绘制的北半球图,表示出半球的卫星轨迹(图 11-3)。卫星沿轨道运行的同时,地球自转着,从空间和地球同步公转的一点看卫星轨道是固定的。可以设想卫星轨道面和地球的交线(大圆)是一个贴近套在地球面上的环,它和轨道面成为一体是没有相对运动的。然而地球可以在环内自转。

卫星沿一圆形轨道绕着地球运行,随着时间的推移,卫星在轨道面交线上的投影也相应地改变位置,形成卫星地面轨迹。由于卫星沿空间轨道运行和地球自转这两种运动的合成作用,星下点将形成如图 11-3 中带小圆的曲线  $AD$ ,  $AD$  就是卫星地面轨迹的表象。卫星通过升交点的一瞬间,卫星地面轨迹的升交点同轨道面交线的升交点是重合的。当卫星自升交点运行到降交点时,  $\lambda' = 180^\circ$  ( $\lambda'$  和时间成正比),星下将是卫星地面轨迹的降交点  $D(0^\circ, -192.908^\circ)$ ,而不是  $D'(0^\circ, +180^\circ)$  点。 $D'$  可称为轨道交线上的降交点。假设地球是静止的,轨道面在地球面上的交线就是卫星地面轨迹。

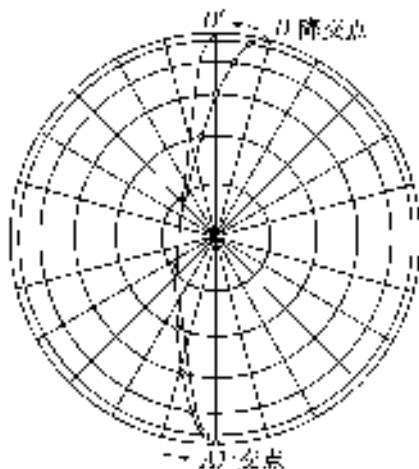


图 11-3 北半球地面轨迹(正射透视投影)  
( $i=99.092^\circ$ , 降交点进动  $12.908^\circ$ )

因此,轨道面在地球面的交线,也是静态卫星地面轨迹,即图 11-3 中的曲线  $AD'$ 。在卫星近极点,卫星地面轨迹和轨道面在地球面上的交线相交, $D$  和  $D'$  的经度差即降交点的轨道进动,陆地资源卫星为  $12.908^\circ$ 。因此实际的卫星地面轨迹与静态的卫星地面轨迹是不同的。

当卫星沿轨道运行到某一点的瞬间在地球自转的实际情况下,从空间卫星上观察沿扫描线上的某点之下出现的一点其大地经度为  $\lambda$ 。如果假定地球是静止的,在空间卫星扫描线上的同一点之下出现的将会是另一点,其经度为  $\lambda_t$ 。 $\lambda_t$  称为卫星视在经度(“Satellite-apparent”Longitude)。由于地球自西向东自转, $\lambda < \lambda_t$ ,两点的经度相差  $(P_2/P_1)\lambda'$ 。 $\lambda_t$  满足:

$$\lambda_t = \lambda + (P_2/P_1)\lambda', \quad (11-10)$$

式中: $\lambda'$  是卫星自升交点开始运行到达该点的时角,即该点的转换经度; $P_2$  是卫星绕地球运行一周所需的时间,陆地卫星为  $103.267'$ ;  $P_1$  是地球自转一周所需的时间,为  $1440'$  即一太阳日。

现在可以这样定义,卫星视在经度  $\lambda_t$  是和实际卫星地面轨迹上某一点相应的静态地面轨迹上纬度相同的一点的经度。这一对点的纬度相同而经度不同,在图 11-3 中可以看出这种一对一对的点。

以卫星视在经度  $\lambda_t$  代换(11-6)和(11-7)式中的  $\lambda$ ,则得

$$\sin\varphi' = \cos i \sin\varphi - \sin i \cos\varphi \sin\lambda_t, \quad (11-11)$$

$$\tan\lambda' = \frac{\sin i \tan\varphi}{\cos\lambda_t} + \cos i \tan\lambda_t. \quad (11-12)$$

同时要顾及(11-10)式,因为  $\lambda_t$  是  $\lambda$  的函数,用(11-12)和(11-10)式计算  $\lambda$  时要应用迭代法。

用(11-10)至(11-12)式计算所得到的转换经纬度  $\lambda'$  和  $\varphi'$ ,分别代入斜墨卡托投影公式(11-8)和(11-9),由此计算出的  $x, y$  值即为动态的斜墨卡托投影的直角坐标。

为什么说以  $\lambda_t$  代换  $\lambda$  就能得到动态投影呢?我们设想圆柱面与地球相切的大圆是与轨道面同地球的交线(大圆)重合,这轨道面与地球的交线,前面已定义为转换坐标系的转换赤道。作为投影面的圆柱面,转换赤道和卫星轨道结合为一体,而没有相对运动。前面已经讲过,把转换赤道看作是紧紧套在地球面上的一个环,在此将这个环延伸为圆柱面,地球仍在环内自转。开始时卫星在升交点, $\lambda' = 0$ ,星下点经度  $\lambda = 0$ ,经过一微分时段  $dt$  后,卫星沿轨道向北运行  $d\lambda'$ ,这时因地球自转星下点的经度改变为  $\lambda = \arctan [\tan(d\lambda') \cos i] - (P_2/P_1)d\lambda'$ ,式中右边第一项即  $\lambda_t$ 。在这一瞬间可以把星下点以及扫描线上的各点都投影到圆柱面上。但是只投影这一瞬间在星下

的一条扫描线上出现的各点,至于尚未在星下出现的许多许多点,在这一瞬间一律不予理会。再经过一个微分时段  $dt$  后,卫星运行  $d\lambda' + d\lambda'$ ,星下出现的点经度为

$$\lambda = \arctan[\tan(2d\lambda')\cos i] - 2(P_2/P_1)d\lambda',$$

又进行了一次瞬间投影。这样不停地进行瞬间投影,积累起来就可以把动态的图像完整连续地投影到圆柱面上。如此,便构成了动态投影。对比静态地图投影,其投影面与地球面没有相对运动,可以一次完成投影。以  $\lambda_i$  代换  $\lambda$ ,各点的经度都加  $(P_2/P_1)\lambda'$  (注意  $\lambda'$  是随时间  $t$  变化的变量,动态地图投影由此引入了新的变量——时间),其意义就是实现了分时的瞬间投影。

另一方面,瞬间投影和陆地资源卫星多光谱扫描器的扫描过程是完全符合的。以上我们用一条扫描线为单位进行一次瞬间投影,是为了叙述方便。若进一步细分,一个扫描点投影一次则更切合实际。因此 SOM 投影最适宜于陆地卫星的扫描图像。

上述动态投影的结果,卫星地面轨道投影为直线,扫描线投影为一系列垂直于卫星地面轨迹投影的平行线,这样的地面轨迹投影既非正形也不符合实长。由于地球自转,在赤道上时卫星在地球上的地面轨迹方向与扫描线约成  $86^\circ$  角。当卫星运行到近极点 ( $180^\circ \sim 99.092^\circ$  或南北纬约  $81^\circ$  处),地面轨迹和扫描线垂直,因此这一投影还要进行修正,使地面轨迹的投影成为曲线。

### 11.3.4 卫星地面轨迹投影的修正

如图 11-4,  $AB$  是静态卫星地面轨迹投影上的一微分元素,  $AE$  是纬度为  $\varphi_0$  的纬线的投影,  $BE$  为过  $B$  点经线的投影。经纬线投影为正交,  $i'$  为静态的卫星地面轨迹投影对纬线投影的倾角。当卫星由  $A$  点出发经历一微分时段到达  $B$  点时,由于地球自转进入星下的将是经差为  $(P_2/P_1)\lambda'$ , 其纬度与  $B$  点相同的  $D$  点。 $AD$  就是相应于卫星自  $A$  点运行到  $B$  点的卫星地面轨迹的投影。兹以  $AB$  为  $X$  轴,自  $D$  作直线  $DC$  垂直于  $AB$  ( $X$  轴),

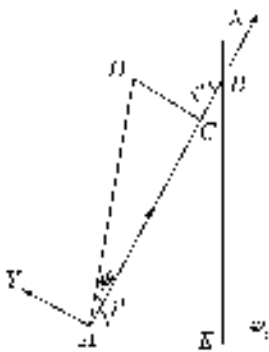


图 11-4 卫星地面轨迹投影示意

$AC$  即为卫星地面轨迹上  $D$  点的横坐标  $dx$ ,  $DC$  即为  $D$  点的纵坐标  $dy$ 。由

图 11-4 可知

$$\begin{aligned} dx &= AB - CB = d\lambda' - BD \cos i', \\ dy &= BD \sin i', \end{aligned}$$

上式中的  $BD$  是纬线微分弧长即  $BD = R \cos \varphi_0 (P_2/P_1) d\lambda'$ 。令地球半径  $R$  为单位长, 将  $BD$  代入上两式, 则

$$dx = d\lambda' [1 - (P_2/P_1) \cos \varphi_0 \cos i'], \quad (11-13)$$

$$dy = (P_2/P_1) \cos \varphi_0 \sin i' d\lambda', \quad (11-14)$$

以上两微分中  $d\lambda'$  和纬线微分弧长采用实地长, 所以含有  $x, y$  坐标为正长的条件, 由此导出的投影公式, 可使地面轨迹的长度无变形。

由图 11-4 知,  $\tan i' = BE/AE$ , 式中  $BE = d\varphi_0$ ,  $AE$  为纬线微分弧长, 令地球半径  $R=1$ , 则  $AE = \cos \varphi_0 d\lambda$ , 而  $A$  点是卫星出发点  $\lambda = \lambda_t$ ,  $d\lambda = d\lambda_t$ , 因而  $AE = \cos \varphi_0 \lambda_t$ , 所以

$$\tan i' = \frac{BE}{AE} = \frac{d\varphi_0}{\cos \varphi_0 d\lambda_t}. \quad (11-15)$$

在卫星地面轨迹上  $\varphi' = 0$ , 在其上点的地理纬度记作  $\varphi_0$ , 由 (11-11) 式, 则有

$$\begin{aligned} \cos i \sin \varphi_0 &= \sin i \cos \varphi_0 \sin \lambda_t, \\ \sin \lambda_t &= \tan \varphi_0 / \tan i. \end{aligned} \quad (11-16)$$

对上式两边求微分, 得

$$\cos \lambda_t d\lambda_t = \frac{\sec^2 \varphi_0 d\varphi_0}{\tan i}, \quad (11-17)$$

代入 (11-15) 式, 得

$$\tan i' = \frac{\cos \lambda_t d\lambda_t \cos^2 \varphi_0 \tan i}{\cos \varphi_0 d\lambda_t} = \tan i \cos \varphi_0 \cos \lambda_t. \quad (11-18)$$

由 (11-16) 式可知,

$$\tan \varphi_0 = \tan i \sin \lambda_t, \quad (11-16b)$$

于是

$$\cos \varphi_0 = \frac{\cos i}{(1 - \sin^2 i \cos^2 \lambda_t)^{\frac{1}{2}}}, \quad (11-19)$$

代入 (11-18) 式

$$\tan i' = \frac{\tan i \cos i \cos \lambda_t}{(1 - \sin^2 i \cos^2 \lambda_t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin i \cos \lambda_t}{(1 - \sin^2 i \cos^2 \lambda_t)^{\frac{1}{2}}},$$

于是有

$$\sin i' = \sin i \cos \lambda_t, \quad (11-20)$$

$$\cos i' = (1 - \sin^2 i \cos^2 \lambda_t)^{\frac{1}{2}}。 \quad (11-21)$$

以(11-19)和(11-21)式代入(11-13)式得

$$dx = d\lambda' [1 - (P_2/P_1) \cos i], \quad (11-22)$$

积分得

$$x = [1 - (P_2/P_1) \cos i] \lambda', \quad (11-22b)$$

引用符号

$$H = 1 - (P_2/P_1) \cos i, \quad (11-23)$$

地球半径恢复用  $R$ , 则

$$x = RH\lambda'。 \quad (11-24)$$

上式是卫星地面轨迹投影的横坐标公式。不在地面轨迹上的任何点的投影其横坐标与  $\varphi'$  无关, 所以上式也是投影普遍适用的公式。

将(11-19)和(11-20)式代入(11-14)式, 则

$$dy = \frac{(P_2/P_1) \cos i \sin i \cos \lambda_t}{(1 - \sin^2 i \cos^2 \lambda_t)^{\frac{1}{2}}} d\lambda'。 \quad (11-25)$$

由(11-16)第二式中的  $\tan \varphi_0$  的表达式代(11-12)式的  $\tan \varphi$ , 则

$$\tan \lambda' = \cos i \tan \lambda_t + \frac{\sin i \sin \lambda_t \tan i}{\cos \lambda_t} = \frac{\tan \lambda_t}{\cos i},$$

因而有

$$\tan \lambda_t = \tan \lambda' \cos i,$$

所以

$$\cos \lambda_t = \frac{1}{(1 + \tan^2 \lambda' \cos^2 i)^{\frac{1}{2}}},$$

代入(11-25)式化简得

$$dy = (P_2/P_1) \sin i \cos \lambda' d\lambda', \quad (11-26)$$

积分, 并将地球半径  $R$  乘进, 得

$$y = R(P_2/P_1) \sin i \sin \lambda'。 \quad (11-27)$$

上式是地面轨迹投影的纵坐标公式, 对于不在地面轨迹上的点, 其纵坐标应与(11-9)式相加。经过对卫星轨道投影的修正, 投影公式为

$$x = RH\lambda', \quad (11-24)$$

$$y = R \left[ (P_2/P_1) \sin \lambda' \sin i + \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \right]。 \quad (11-28)$$

上式中  $\lambda'$  和  $\varphi'$  应用(11-11)、(11-12)和(11-10)式进行计算, 保持动态投影的性质。根据(11-24)和(11-28)式, 卫星地面轨迹的投影为一正弦曲线, 无长度变形并保持正形。扫描线的投影垂直于  $X$  轴。今以  $\psi$  表示地面

轨迹的投影与  $X$  轴的倾角,由图 11-4 和(11-22),(11-26)两式可知

$$\tan\Psi=\frac{dy}{dx}=\frac{(P_2/P_1)\sin i\cos\lambda'}{1-(P_2/P_1)\cos i}。 \tag{11-29}$$

根据上式计算地面轨迹和赤道的交点上( $\lambda'=0$ )的倾角,则上式中 $\cos\lambda'=1$ 。将  $P_2/P_1=18/251,i=99.092^\circ$ 代入上式,则得

$$\tan\Psi=0.070\,02,\Psi=4.005^\circ。$$

$x$  坐标和时间成正比,沿卫星地面轨迹的距离和时间不成比例。

11.3.5 卫星地面轨迹投影的再次修正

陆地资源卫星扫描范围约 185 km,相当于卫星地面轨迹两侧转换纬度 $\varphi'=\pm 0.83^\circ$ 。静态的斜墨卡托投影的长度比  $h=k=\sec\varphi'$ ,当  $\varphi'=\pm 1^\circ$ 时,长度比为 1.000 152,卫星地面轨迹的投影修正为曲线后,增加了投影的长度变形。表 11-2 列出了上述投影的长度比和最大角度变形。

表 11-2 卫星地面轨迹投影距离转换纬差  $\varphi'=\pm 1^\circ$ 处的长度比和最大角度变形

$\lambda'$	$\varphi'=1^\circ$			$\varphi'=-1^\circ$		
	$h$	$k$	$\omega$	$h$	$k$	$\omega$
$0^\circ$	1.000 154	1.000 151	$0.000\,6^\circ$	1.000 154	1.000 151	$0.000\,6^\circ$
$15^\circ$	0.999 847	1.000 142	$0.018\,1^\circ$	1.000 462	1.000 159	$0.018\,1^\circ$
$30^\circ$	0.999 566	1.000 128	$0.035\,0^\circ$	1.000 747	1.000 169	$0.035\,0^\circ$
$45^\circ$	0.999 339	1.000 102	$0.049\,5^\circ$	1.000 983	1.000 187	$0.049\,5^\circ$
$60^\circ$	0.999 212	1.000 035	$0.060\,6^\circ$	1.001 131	1.000 233	$0.060\,7^\circ$
$75^\circ$	0.999 350	0.099 776	$0.067\,6^\circ$	1.001 059	1.000 428	$0.067\,7^\circ$
$90^\circ$	1.000 152	0.998 930	$0.070\,0^\circ$	1.000 152	1.001 375	$0.070\,0^\circ$

注: $\lambda'$ 沿地面轨迹的角距自升交点起算; $\varphi'$ 与地面轨迹的角距,不在北极一侧为正,在地面轨迹上  $\varphi'=0,h=k=1,\omega=0$ 。

由表 11-2 可以看出,长度变形随着  $\lambda'$  的增加而增大,最大长度变形在  $\lambda'=90^\circ,\varphi'=-1^\circ$ 处,已有 1.375‰,远不能满足制图的精度要求(约万分之一的限差),投影公式必须再做进一步修正。

在卫星地面轨迹投影上, $\lambda'=90^\circ$ 的一点(近极点)两侧  $\varphi'=\pm 1^\circ$ 的点长度变形最大,而且纬线长度比在  $\varphi'=1^\circ$ (离北极一侧)的点上小于 1,在  $\varphi'=-1^\circ$ (北极所在一侧)的点上大于 1。在近极点卫星地面轨道的投影与纬圈平行,为了减少长度变形,可以使卫星地面轨道的投影在近极点处增大弯曲。在赤道上因卫星地面轨迹的投影修正为曲线而引起的变形很小,不需

再加大它的弯曲。

为了提高投影精度,斯奈德(P. Snyder)经过反复试验与思考,决定将地面轨迹投影对  $X$  轴的倾斜角度增大一倍推求出坐标公式以实现修正的目的。下面加以说明。

由(11-23)式知

$$H=1-(P_2/P_1)\cos i,$$

令

$$S=(P_2/P_1)\sin i\cos\lambda',$$

将以上两式代入(11-29)式,则有

$$\tan\Psi=\frac{dy}{dx}=\frac{S}{H}, \quad (11-30)$$

于是

$$\Psi=\arctan\left(\frac{S}{H}\right)。$$

设

$$\Psi_1=\arctan S, \quad (11-31)$$

由此知  $\Psi$  随  $\Psi_1$  的增减而增减。设修正后的投影坐标为  $x', y'$ , 倾斜角为  $\Psi'$ , 则

$$\Psi'=\arctan\left(\frac{dy'}{dx'}\right)=\Psi+\Psi_1, \quad (11-32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy'}{dx'} &= \tan\Psi' = \tan(\Psi+\Psi_1) = \frac{\tan\Psi+\tan\Psi_1}{1-\tan\Psi\tan\Psi_1} \\ &= \frac{\frac{S}{H}+S}{1-\frac{S}{H}S} \\ &= \frac{S+HS}{H-S^2}。 \end{aligned} \quad (11-33)$$

为了保持原有卫星地面轨迹的长度比不变,应符合下式:

$$(dx)^2+(dy)^2=(dx')^2+(dy')^2。$$

整理化简得:

$$dx'=\left[\frac{(H-S^2)}{H\sqrt{1+S^2}}\right]dx,$$

将(11-22)式代入上式,则

$$dx'=\frac{(H-S^2)}{\sqrt{1+S^2}}d\lambda', \quad (11-34)$$

积分,得

$$x' = \int_0^{\lambda'} \frac{(H-S^2)}{\sqrt{1+S^2}} d\lambda'. \quad (11-35)$$

同理,由(11-33)式而有

$$dy' = \frac{S+HS}{H-S^2} dx',$$

将(11-34)式代入上式,则有

$$\begin{aligned} dy' &= \frac{(S+HS)(H-S^2)}{(H-S^2)\sqrt{1+S^2}} d\lambda' \\ &= \frac{S(1+H)}{\sqrt{1+S^2}} d\lambda', \end{aligned} \quad (11-36)$$

积分得

$$y' = (1+H) \int_0^{\lambda'} \frac{S}{\sqrt{1+S^2}} d\lambda'. \quad (11-37)$$

对于不在卫星地面轨迹上的点,必须对方程式加以改正。即(11-35)式减  $\sin\Psi_1 \operatorname{Intan}(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2})$ , (11-37)式加  $\cos\Psi_1 \operatorname{Intan}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2})$ 。

由(11-31)式知

$$\tan\Psi_1 = S,$$

于是

$$\sin\Psi_1 = \frac{S}{\sqrt{1+S^2}}, \quad (11-38)$$

$$\cos\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+S^2}}, \quad (11-39)$$

去掉  $x', y'$  的右上角撇号,仍以  $x, y$  表示修正后的坐标,并将地球半径  $R$  代入,则 SOM 投影的最后坐标公式为

$$\frac{x}{R} = \int_0^{\lambda'} \frac{(H-S^2)}{\sqrt{1+S^2}} d\lambda' - \frac{S}{\sqrt{1+S^2}} \operatorname{Intan}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}), \quad (11-40)$$

$$\frac{y}{R} = (1+H) \int_0^{\lambda'} \frac{S}{\sqrt{1+S^2}} d\lambda' + \frac{1}{\sqrt{1+S^2}} \operatorname{Intan}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}). \quad (11-41)$$

1984年前后南京地质学校黄国寿副教授,在未得到斯奈德(P. Snyder)的《空间斜墨卡托投影的数学推导》一书前,根据《摄影测量工程与遥感》1978年第5期刊载的《空间斜墨卡托投影》一文中未加推导的最后公式,进行过不同于前文的推导。他采用的图形微分连续旋转即坐标转轴的方法,



修正地面轨迹投影对  $X$  轴的倾角。图形旋转公式为

$$x' = x \cos \Psi_1 + y \sin \Psi_1,$$

$$y' = x \sin \Psi_1 - y \cos \Psi_1,$$

通过微分、整理,其推导的结果与(11-40)式和(11-41)式完全一致<sup>①</sup>,在此不再重述。

(11-40)和(11-41)式是球体 SOM 投影的最后公式。为了便于计算公式中的积分项,可应用傅利叶级数展开:

$$\frac{x}{R} = B\lambda' + A_2 \sin 2\lambda' + A_4 \sin 4\lambda' + \cdots - \frac{S}{\sqrt{1+S^2}} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right), \quad (11-42)$$

$$\frac{y}{R} = C_1 \sin \lambda' + C_3 \sin 3\lambda' + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+S^2}} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right). \quad (11-43)$$

上两式中的傅利叶常数的公式为

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H-S^2}{\sqrt{1+S^2}} d\lambda', \quad (11-44)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \frac{H-S^2}{\sqrt{1+S^2}} \cos n\lambda' d\lambda', \quad (11-45)$$

$$C_n = \frac{H+1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \frac{S}{\sqrt{1+S^2}} \cos n\lambda' d\lambda'. \quad (11-46)$$

以上各系数的积分,可运用辛普生公式计算。对于陆地卫星,  $P_2/P_1 = 18/251$ ,  $i = 99.092^\circ$ 。把地球视作球体时,傅利叶常数值如下:

$$B = 1.000\,756\,541\,42 \quad \lambda' \text{ 以弧度为单位}$$

$$= 0.017\,585\,533\,39 \quad \lambda' \text{ 以度为单位}$$

$$A_2 = -0.001\,881\,980\,8$$

$$A_4 = 0.000\,000\,686\,8$$

$$A_6 = -0.000\,000\,000\,4$$

$$C_1 = 0.142\,157\,741\,0,$$

$$C_3 = 0.000\,029\,618\,2,$$

$$C_5 = 0.000\,000\,016\,7.$$

SOM 投影坐标公式(11-40)和(11-41)的长度比和最大角度变形如表 11-3。

① 黄国寿. 空间斜墨卡托(SOM)投影. 中国测绘学会地图生产管理学术讨论会论文集, 1987

表 11-3 和卫星地面轨迹投影相距转换纬差  $\varphi' = \pm 1^\circ$  处的长度变形和角度变形  
[空间斜墨卡托投影公式(11-40)和(11-41)]

$\lambda'$	$\varphi' = 1^\circ$				$\varphi' = -1^\circ$			
	$h$	$k$	$\omega$	$m_{\varphi'}$	$h$	$k$	$\omega$	$m_{\varphi'}$
0°	1.000 151	1.000 151	0.000 6°	1.000 152	1.000 154	1.000 151	0.000 6°	1.000 152
5°	1.000 153	1.000 151	0.000 6°	1.000 151	1.000 154	1.000 151	0.000 6°	1.000 152
10°	1.000 153	1.000 151	0.000 6°	1.000 151	1.000 155	1.000 151	0.000 6°	1.000 153
15°	1.000 153	1.000 151	0.000 6°	1.000 150	1.000 155	1.000 151	0.000 6°	1.000 153
20°	1.000 152	1.000 151	0.000 6°	1.000 150	1.000 156	1.000 151	0.000 6°	1.000 154
25°	1.000 152	1.000 151	0.000 6°	1.000 150	1.000 156	1.000 151	0.000 6°	1.000 154
30°	1.000 152	1.000 151	0.000 5°	1.000 149	1.000 156	1.000 151	0.000 5°	1.000 154
35°	1.000 152	1.000 150	0.000 5°	1.000 149	1.000 156	1.000 151	0.000 5°	1.000 154
40°	1.000 152	1.000 153	0.000 5°	1.000 150	1.000 156	1.000 151	0.000 5°	1.000 154
45°	1.000 152	1.000 150	0.000 4°	1.000 150	1.000 156	1.000 151	0.000 5°	1.000 154
50°	1.000 152	1.000 150	0.000 4°	1.000 150	1.000 156	1.000 151	0.000 4°	1.000 154
55°	1.000 152	1.000 150	0.000 4°	1.000 150	1.000 155	1.000 151	0.000 4°	1.000 154
60°	1.000 153	1.000 151	0.000 3°	1.000 151	1.000 155	1.000 151	0.000 3°	1.000 154
65°	1.000 153	1.000 151	0.000 3°	1.000 151	1.000 155	1.000 151	0.000 3°	1.000 153
70°	1.000 153	1.000 151	0.000 2°	1.000 152	1.000 154	1.000 151	0.000 2°	1.000 153
75°	1.000 153	1.000 151	0.000 2°	1.000 152	1.000 154	1.000 151	0.000 2°	1.000 153
80°	1.000 153	1.000 151	0.000 1°	1.000 152	1.000 153	1.000 152	0.000 1°	1.000 153
85°	1.000 153	1.000 152	0.000 1°	1.000 152	1.000 153	1.000 152	0.000 1°	1.000 152
90°	1.000 152	1.000 151	0.000 1°	1.000 152	1.000 152	1.000 152	0.000 0°	1.000 152

注： $m_{\varphi'}$  为沿转换纬线的长度比

由表 11-3 可以看出,经过再次修正后,变形分布相当均匀。沿经纬线方向的长度比和墨卡托投影相差在 0.000 004 以下,最大角度变形不超过 0.000 6°。基本上消除了由于将卫星地面轨迹投影修正为曲线所引起的变形。修正的结果令人满意。

经过两次修正,本投影不是真正的正形投影。但在扫描范围内其投影变形对于球体投影是可以忽略的。对于陆地卫星两极的投影靠近 X 轴,但不在 X 轴上。扫描线偏离垂线在  $\pm 4.05^\circ$ (逆时针方向角  $\arctan S$ ) 之间,偏离卫星地面轨迹法线在  $\pm 4.01^\circ$ (顺时针方向角  $\arctan(S/H)$ ) 之间。卫星地面轨迹在赤道上和 X 轴倾斜  $8.06^\circ$ 。

图 11-5 是球体 SOM 投影经差纬差为  $30^\circ$  的经纬网及全球一周的轨道图形。

将地球当作椭球的 SOM 投影,其公式推导比较复杂,现在已有专门论著,在此不述。

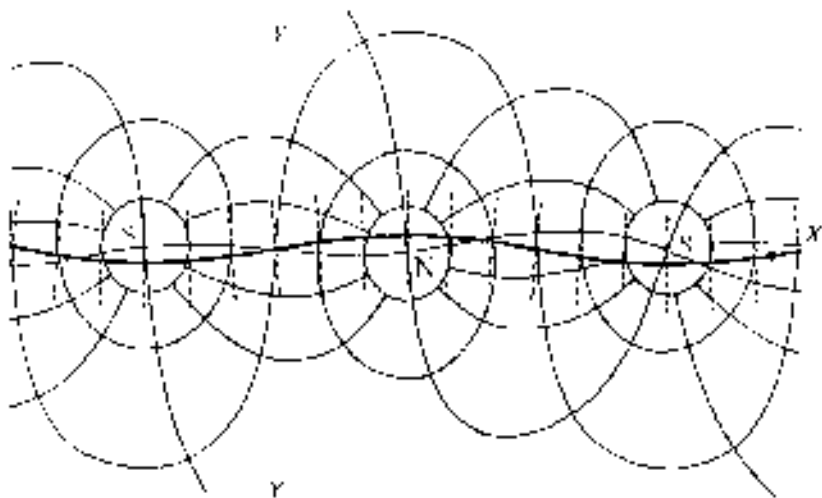


图 11-5 球体 SOM 投影一周轨道的  $30^\circ \times 30^\circ$  经纬线网  
(.....扫描线;——卫星地面轨迹)

## 11.4 卫星轨迹地图投影

在前一节中讨论了 SOM 投影,它是一种特别适合于陆地卫星影像制图的投影。但是用这种投影展绘的地面轨迹仍然为曲线,因此展绘工作还不够简化。

斯奈德(P. Snyder)于 1980 年间又提出了一种新的空间地图投影,它也是建立在圆形轨道和假设地球为球体的基础上。这种投影可使卫星地面轨迹呈直线形。其优点是简化,并能在地图上显示出卫星轨迹和摄影地区。由于这种投影极易确定卫星地面轨迹,故命名“卫星轨迹地图投影”。但是这种投影只适合于小比例尺地图上表示卫星地面轨迹和了解摄影地区。由于变形较大而不能代替 SOM 投影用于大中比例尺的卫星影像制图。

斯奈德(P. Snyder)提出了两种类型的卫星轨迹投影,即卫星轨迹圆柱投影和卫星轨迹圆锥投影。其中后者可分为两条纬线为正形和一条纬线为正形的两种情况<sup>①</sup>。在本节内,只介绍卫星轨迹圆柱投影和两条纬线均为正形的卫星轨迹圆锥投影。

① John. P. Snyder 著,王兆彬译. 卫星轨迹地图投影. 海洋测绘,1982(1)

### 11.4.1 卫星轨迹圆柱投影

现在求卫星轨迹圆柱投影地面轨迹的公式。为此暂且假定卫星是绕着一个非旋转性地球上一轨道运行。如图 11-6, 设  $A$  为地面轨迹由北向南经过赤道时的交点(陆地卫星摄影通常是在卫星向南运行时进行), 设过  $A$  点的经线的经度为  $0$ ,  $i$  是轨道倾角(陆地卫星一般为  $99.092^\circ$ ),  $B$  为极点,  $C$  为地面轨迹的另一点(其大地纬度为  $\varphi$ , 经度为  $L$ )。  $\varphi$  与地面轨迹相交之点的经度  $L$  同一般经度  $\lambda$  有所区别, 在非交点处,  $L$  和  $\lambda$  向东均为正值。

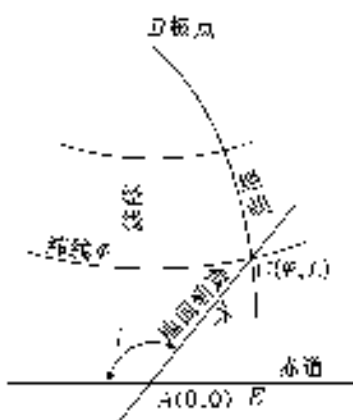


图 11-6 轨道倾角示意

由图 11-6, 根据球面三角正弦定律和余弦定律可求得如下公式:

$$\tan L = \tan \lambda' \cos i, \quad (11-47)$$

$$\sin \lambda' = \sin \varphi / \sin i, \quad (11-48)$$

式中  $\lambda'$  为转换经度, 在  $A$  点为  $0$ , 它沿轨道与时间成比例。

考虑到地球是旋转的, 卫星视在经度  $\lambda_t$  应取代(11-47)式中的  $L$ , 则

$$\lambda_t = L + (P_2/P_1)\lambda', \quad (11-49)$$

$P_2, P_1$  的定义及参数同本书 11.3 之公式(11-10)。假若轨道是按恒星定位, 则  $P_1$  约等于恒星日的  $1436'$ 。

现在将用于非旋转地球的(11-47)式改写为用于旋转地球的相应公式:

$$\tan \lambda_t = \tan \lambda' \cos i. \quad (11-50)$$

将(11-49)式改写为

$$L = \lambda_t - (P_2/P_1)\lambda', \quad (11-51)$$

上式中的  $\lambda_t$  和  $\lambda'$  分别由(11-50)和(11-48)式求得。

假如我们所设计的圆柱投影为正常的圆柱投影, 纬线为不等距的水平直线, 而经线则为等距的垂直直线, 那么, 连续的地面轨迹就可以用直线表示。假定纬线  $\varphi$  至赤道的距离为  $L$ , 这种地面轨迹对赤道的倾角为  $45^\circ$ 。然而, 我们所希望的是伸长或缩短经线的投影以使选定的距赤道等距的纬度为  $\pm \varphi$  的一对纬线保持正形条件。

就正形而言, 必须保证经线长度比与纬线长度比相等, 即  $h=k$ , 正常的圆柱投影或圆锥投影都应满足这一条件。

在圆柱投影中

$$\left. \begin{aligned} h &= dy/Rd\varphi \\ k &= dx/R\cos\varphi d\lambda \end{aligned} \right\}^{\circ} \quad (11-52)$$

现在指定割纬线之一的纬度为  $\varphi_1$ , 要求在割纬线上任一点都满足正形条件, 因此在割纬线上各点  $h=k$ 。由以上二式, 则有

$$dy = \frac{dx}{\cos\varphi_1 \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)_{\varphi_1}} \quad (11-53)$$

同时, 在割纬线上  $k=1$ , 故由 (11-52) 式, 有

$$k=1 = \frac{dx}{R\cos\varphi_1 d\lambda}, \quad (11-54)$$

移项积分 (将  $\varphi_1$  视为常量) 得:

$$x = R\lambda\cos\varphi_1. \quad (11-55)$$

(11-55) 式是求  $x$  的一般公式。将 (11-53) 式部分积分, 并将 (11-55) 式代入, 则得:

$$y = \frac{R\lambda\cos\varphi_1}{\cos\varphi_1 \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)_{\varphi_1}} = \frac{R\lambda}{\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)_{\varphi_1}}. \quad (11-56)$$

要求地面轨迹投影为直线, 必须使  $y$  为  $\lambda$  的线性函数, 可将  $C$  点的经度  $L$  代替 (11-56) 式的  $\lambda$  而得:

$$y = \frac{RL}{\left(\frac{dL}{d\varphi}\right)_{\varphi_1}}. \quad (11-57)$$

现将 (11-51), (11-50) 和 (11-48) 式依次微分,

$$\frac{dL}{d\varphi} = \frac{d\lambda_t}{d\varphi} - (P_2/P_1) \frac{d\lambda'}{d\varphi}, \quad (11-58)$$

$$\sec^2\lambda_t \frac{d\lambda_t}{d\varphi} = \sec^2\lambda' \cos i \frac{d\lambda'}{d\varphi}, \quad (11-59)$$

$$\cos\lambda' \frac{d\lambda'}{d\varphi} = -\frac{\cos\varphi}{\sin i}. \quad (11-60)$$

将 (11-60) 式写为

$$\frac{d\lambda'}{d\varphi} = -\frac{\cos\varphi}{\sin i \cos\lambda'},$$

代入 (11-59) 式, 得

$$\frac{d\lambda_t}{d\varphi} = \frac{-\cos i \cos\varphi}{\sec^2\lambda_t \sin i \cos^3\lambda'}, \quad (11-61)$$

将 (11-60) 和 (11-61) 式代入 (11-58) 式整理后将 (11-50) 式代入, 得

$$\frac{dL}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin i \cos \lambda'} \cdot \frac{(P_2/P_1) - \cos i}{(1 - \sin^2 \lambda' \sin^2 i)}, \tag{11-62}$$

将(11-48)式代入(11-62)式,消  $\lambda'$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\varphi} &= \frac{\cos\varphi}{\sin i (1 - \sin^2 \varphi / \sin^2 i)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(P_2/P_1) - \cos i}{1 - \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{(P_2/P_1) \cos^2 \varphi - \cos i}{(\cos^2 \varphi - \cos^2 i)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi} \end{aligned} \tag{11-63}$$

现在引用一个新符号  $F$  表示地面轨迹与经线在球面上的夹角,设

$$\tan F = \frac{(P_2/P_1) \cos^2 \varphi - \cos i}{(\cos^2 \varphi - \cos^2 i)^{\frac{1}{2}}}, \tag{11-64}$$

则

$$\frac{dL}{d\varphi} = \frac{\tan F}{\cos \varphi} \circ \tag{11-65}$$

如设  $\varphi = \varphi_1$ , 由(11-57)式则得

$$y = \frac{RL \cos \varphi_1}{\tan F_1}, \tag{11-66}$$

式中  $L$  可由(11-47)和(11-51)式求得。(11-64)式可写为:

$$\tan F_1 = \frac{(P_2/P_1) \cos^2 \varphi_1 - \cos i}{(\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 i)^{\frac{1}{2}}} \circ \tag{11-67}$$

然后根据(11-55)式和(11-66)式,可展绘出经线网。地面轨迹的展绘形状为与经线构成倾角为  $F_1$  的一系列平行线(图 11-7 中的虚线)。

由(11-53)式和(11-65)式知,  $F_1$  角的正切  $dx/dy$  为:

$$\frac{dx}{dy} = \cos \varphi_1 \left( \frac{dL}{d\varphi} \right)_{\varphi_1} = \tan F_1 \circ \tag{11-68}$$

如果绘出完整的轨道,则地面轨迹在北部和南部纬线极限(或称轨迹极限)处将有尖形裂隙,即轨迹将呈  $Z$  字形系列。

任一经线和纬线的长度比,分别由以下二式表示。

$$h = \frac{\frac{dy}{dL} \cdot \frac{dL}{d\varphi}}{R} = \frac{\cos \varphi_1 \tan F}{\cos \varphi \tan F_1}, \tag{11-69}$$

$$k = \frac{\frac{dx}{d\lambda}}{R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi} \circ \tag{11-70}$$

现将绘制经纬网的坐标值和经纬线长度比,按  $\varphi_1 = 0^\circ, \pm 30^\circ$  和  $\pm 45^\circ$  载于表 11-4,如果  $\varphi_1 = 0^\circ$ ,则为切圆柱投影,这时无法用上面所列公式计算比轨

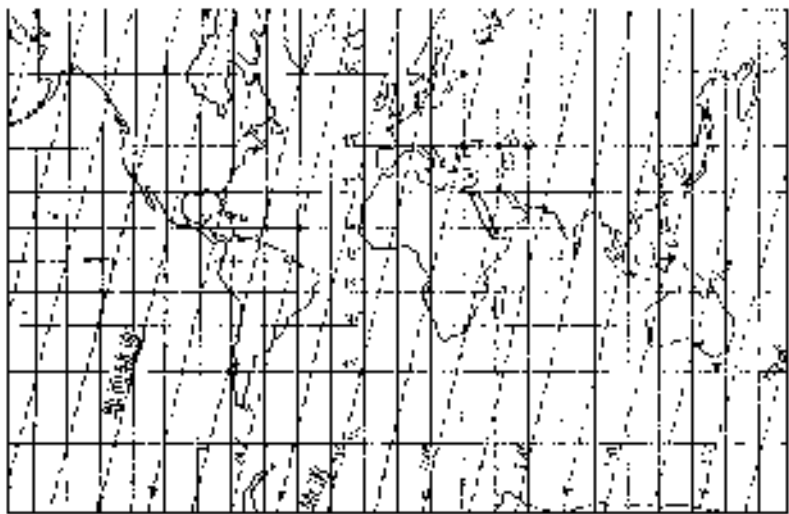


图 11-7 卫星轨迹圆柱投影(标准纬线:±30°)陆地卫星轨道图

迹极限更接近极点的纬线坐标(因在这些地区无地面轨迹,(11-64)式中的分母为虚数)。这样的纬线有时按图面配置的要求任意绘出或略去不绘。

表 11-4 卫星轨迹圆柱投影直角坐标表

陆地卫星轨道: $i=99.092^\circ$        $P_2=103.267'$        $P_1=1440.0'$   
球面半径: $R=1.0$

$\varphi_1$	0°			±30°			±45°		
$F_1$	13.09724°			13.96868°			15.71115°		
$X$	0.017453λ°			0.015115λ°			0.012341λ°		
±φ	±y	h	k	±y	h	k	±y	h	k
TL*	7.235 71	∞	6.328 30	5.860 95	∞	5.480 47	4.231 71	∞	4.474 79
80°	5.350 80	55.071 4	5.758 77	4.334 17	44.608 1	4.987 24	3.129 34	32.207 8	4.072 07
70°	2.344 65	6.894 43	2.923 80	1.899 18	5.584 52	2.532 09	1.371 24	4.032 12	2.067 44
60°	1.536 90	3.188 46	2.000 00	1.244 89	2.582 66	1.732 05	0.898 83	1.864 73	1.414 21
50°	1.098 49	2.013 89	1.555 72	0.889 79	1.631 26	1.347 30	0.642 44	1.177 80	1.100 06
40°	0.797 41	1.497 87	1.305 41	0.645 91	1.213 28	1.130 52	0.466 36	0.876 01	0.923 06
30°	0.561 35	1.234 56	1.154 70	0.454 70	1.000 00	1.000 00	0.328 30	0.722 02	0.816 50
20°	0.359 52	1.092 98	1.064 18	0.291 21	0.885 32	0.921 60	0.210 26	0.639 21	0.752 49
10°	0.175 79	1.021 79	1.015 43	0.142 39	0.827 66	0.879 39	0.102 81	0.597 58	0.718 02
0°	0.00 000	1.000 00	1.000 00	0.000 00	0.810 00	0.866 03	0.000 00	0.584 84	0.707 11

\* 轨迹极限  $80.908^\circ=(180^\circ-i)$

## 11.4.2 两条纬线均为正形的卫星轨迹圆锥投影

如果说全世界性的制图宜采用卫星轨迹圆柱投影,那么对于一个大陆或大的国家则宜采用卫星轨迹圆锥投影。这一原则,也与选用一般地图投影的原则一致。图 11-8 所示为卫星轨迹圆锥投影各要素,  $AB$  表示赤道的投影半径  $\rho_0$ ,  $BC$  为纬线  $\varphi$  的圆弧半径  $\rho$ ,  $\delta$  为中央经线  $AB$  (其  $\lambda$  为 0) 和代表经度  $\lambda$  的  $BC$  线之间的夹角。当用于纬度为  $\varphi$  处的地面轨迹的经线时,  $\delta$  称作  $\delta_\varphi$ , 而  $\lambda$  再次叫做  $L$ 。地面轨迹将是通过  $C$  点和赤道相交于一点  $A$  的直线。

圆锥常数  $\sigma$  是  $\delta$  与  $\lambda$  的比例系数, 即

$$\delta = \sigma \lambda, \quad (11-71)$$

也可用  $\delta_\varphi$  与  $L$  之比表示

$$\delta_\varphi = \sigma L, \quad (11-72)$$

式中, 经度由中央经线向东量算。

如果以  $S_0$  表示地面轨迹与图上经线在赤道上的交角, 按球面三角正弦定律可导出

$$\rho = \rho_0 \sin S_0 / \sin(\delta_\varphi + S_0)。 \quad (11-73)$$

圆锥投影的经纬线长度比分别由下式计算

$$h = -d\rho / R d\varphi, \quad (11-74)$$

$$k = \sigma \rho / R \cos \varphi。 \quad (11-75)$$

将(11-73)式代入(11-75)式, 得

$$k = \frac{\sigma \rho_0 \sin S_0}{R \cos \varphi \sin(\delta_\varphi + S_0)}。 \quad (11-76)$$

对(11-73)式两边求微分, 并代入(11-74)式, 得

$$h = \frac{\rho_0 \sin S_0 \cos(\delta_\varphi + S_0)}{R \sin^2(\delta_\varphi + S_0)} \left( \frac{d\delta_\varphi}{d\varphi} \right)。 \quad (11-77)$$

将(11-72)式两边求微分, 并将(11-65)式代入, 得

$$\frac{d\delta_\varphi}{d\varphi} = \frac{\sigma dL}{d\varphi} = \frac{\sigma \tan F}{\cos \varphi}, \quad (11-78)$$

将(11-78)式代入(11-77)式, 再将(11-76)式代入整理后, 得



图 11-8 卫星轨迹圆锥投影各要素



$$h = \frac{k \tan F}{\tan(\delta_\infty + S_0)} \quad (11-79)$$

假若沿纬线  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  获得正形, 在这两条纬线中的任一条纬线上  $h=k$ , 或由 (11-79) 式得

$$\begin{aligned}\tan(\delta_1 + S_0) &= \tan F_1, \\ \tan(\delta_2 + S_0) &= \tan F_2,\end{aligned}$$

或

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 + S_0 &= F_1 \\ \delta_2 + S_0 &= F_2 \end{aligned} \right\}, \quad (11-80)$$

则

$$S_0 = F_1 - \delta_1 = F_2 - \delta_2, \quad (11-81)$$

以及

$$\delta_2 - \delta_1 = F_2 - F_1.$$

以(11-72)式代换上式的  $\delta_2, \delta_1$ , 得圆锥常数:

$$\sigma = \frac{F_2 - F_1}{L_2 - L_1} \circ \quad (11-82)$$

式中,  $F_j$  由(11-64)式计算求出,  $L_j$  由(11-50), (11-49)和(11-48)各式求得; 下标  $j$  等于 1 或 2,  $F$  与  $\varphi$  及  $L$  与  $\varphi$  采用相同的下标。

虽然沿  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  产生正形,但是这两条纬线的长度比并不相等。如果  $\varphi_1$  的纬线为正长(符合主比例尺),则在(11-76)式中,当  $\varphi = \varphi_1$  和  $\delta_\varphi = \delta_1$  时,  $k=1$ 。按此情况将(11-80)式代入(11-76)式,则得

$$\rho_0 = \frac{R \cos \varphi_1 \sin F_1}{\sigma \sin S_0}, \quad (11-83)$$

将上式代入(11-73)式,得

$$\rho = \frac{R \cos \varphi_1 \sin F_1}{\sigma \sin(\delta_\infty + S_0)} \quad (11-84)$$

在此必须指出,不能以  $F$  代替  $(\delta_\phi + S_0)$ 。

至此, 我们已经由(11-84), (11-82)和(11-71)式求出卫星轨迹圆锥投影的极坐标。其直角坐标通常可按下式计算:

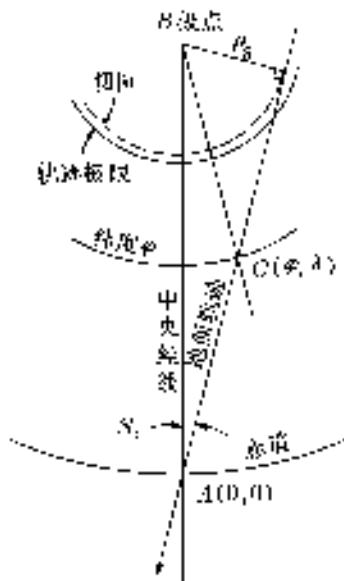


图 11-9 轨迹极限与切圆示意

$$x = \rho \sin \delta, \quad (11-85)$$

$$y = \rho_{\phi_0} - \rho \cos \delta. \quad (11-86)$$

式中  $\varphi_0$  为与中央经线在坐标原点处 ( $x=0, y=0$ ) 相交的任一纬线。用 (11-79) 式计算  $h$ , 用 (11-75) 式计算  $k$  最为简便。

同圆柱投影一样, 在轨迹极限处, 直线形地面轨迹将有裂隙 (特殊情况除外), 但是, 地面轨迹相互间不再是平行的, 然而它们的展绘形状与辐射状的经线相像 (图 11-10 中的虚线)。

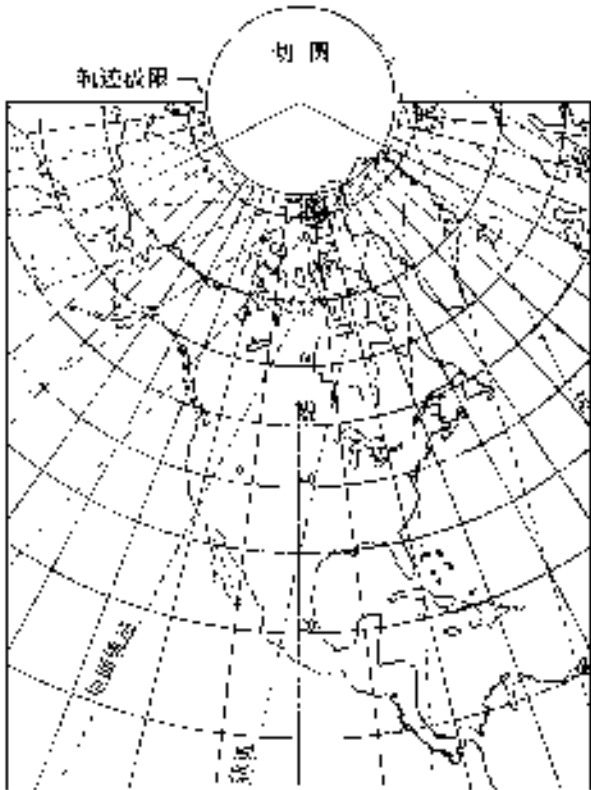


图 11-10 卫星轨迹圆锥投影  
(北纬 45°及 70°纬线为正形)陆地卫星轨道图

绘出基本经纬网后, 如果地图离北部或南部轨迹极限充分接近, 以至能包括一个“切圆”(各投影地面轨迹都与切圆相切), 则展绘直线形地面轨迹非常简易。如图 11-9 所示, 以虚线绘出的内圆 (在此, 地面轨迹  $AC$  与此圆相切) 的半径为  $\rho_s$ , 将 (11-83) 式代入下式得

$$\rho_s = AB \sin S_0 = \rho_0 \sin S_0 = R \cos \varphi_1 \sin F_1 / \sigma_0. \quad (11-87)$$

图 11-10 所示, 是有“切圆”的陆地卫星地面轨迹所绘制的陆地轮廓和

经纬网。

在北纬  $45^\circ$  和  $70^\circ$  处产生正形。这种地图与在不同的一对纬度 ( $30^\circ$  和  $60^\circ$ ) 产生正形的地图, 以及如图 11-11 所示的地图 (在北纬  $45^\circ$  和上方的轨迹极限北纬  $80.908^\circ$  处为正形), 它们的极坐标载于表 11-5。这些坐标可供进行上述投影计算时查用。

假如轨迹极限在地图边缘以外, 须查明每一地面轨迹与有关经线相交的倾角, 在纬线  $\varphi_1$  上为  $F_1$ , 在纬线  $\varphi_2$  上为  $F_2$ 。若在其他纬线上, 图上的倾角不是  $F$ , 而应是  $(\delta_\varphi + S_0)$ 。

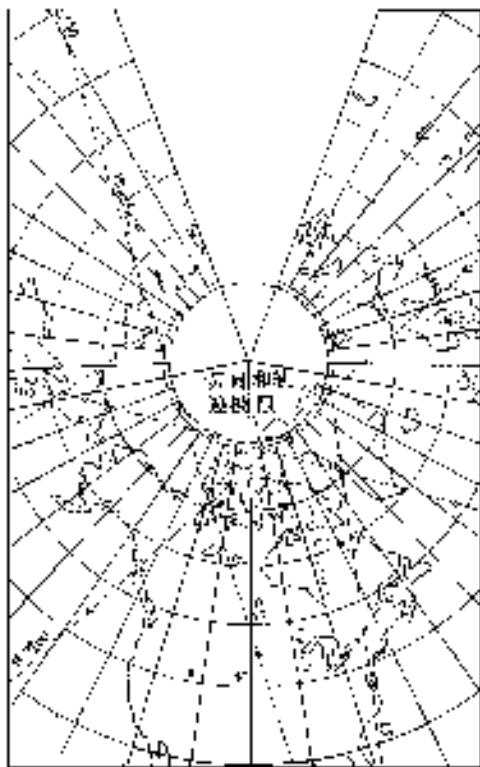


图 11-11 卫星轨迹圆锥投影(北纬  $45^\circ$  和  $80.9^\circ$  处为正形)陆地卫星轨道图

表 11-5 有两条正形纬线的卫星轨迹圆锥投影的极坐标  
陆地卫星轨道( $i, P_2, P_1$  同表 11-4)  
球面半径:  $R=1.0$

$\varphi_1$	30°			45°			45°		
$\varphi_2$	60°			70°			80.908°		
$\sigma$	0.490 73			0.69478			0.884 75		
$F_1$	13.968 68°			15.711 15°			15.711 15°		
$\rho_S$	0.426 00			0.275 59			0.216 42		
$\pm\varphi$	$\rho$	$h$	$k$	$\rho$	$h$	$k$	$\rho$	$h$	$k$
$TL$	0.5043 9	$\infty$	1.566 35	0.286 63	$\infty$	1.260 24	0.216 42	1.211 72	1.211 72
80°	0.599 34	3.729 28	1.693 73	0.330 14	1.938 50	1.320 93	0.233 80	1.083 25	1.191 21
70°	0.984 70	1.615 28	1.412 83	0.572 97	1.163 94	1.163 94	0.404 84	0.908 32	1.047 27
60°	1.225 00	1.202 28	1.202 28	0.759 75	1.005 96	1.055 72	0.558 75	0.872 90	0.988 71
50°	1.418 06	1.035 21	1.082 60	0.931 54	0.979 14	1.006 89	0.715 04	0.933 44	0.984 21
45°	1.506 59	0.997 71	1.045 56	1.017 74	1.000 00	1.000 00	0.799 21	1.000 00	1.000 00
40°	1.592 81	0.981 35	1.020 35	1.106 69	1.042 12	1.042 12	0.890 42	1.095 69	1.028 40
30°	1.764 78	1.000 00	1.000 00	1.300 60	1.197 08	1.043 42	1.106 16	1.409 01	1.130 08
20°	1.945 51	1.081 81	1.015 99	1.531 88	1.479 84	1.132 63	1.398 52	2.008 77	1.316 75
10°	2.146 62	1.236 77	1.069 65	1.829 78	1.983 71	1.290 91	1.845 27	3.286 41	1.657 80
0°	2.383 32	1.497 81	1.169 56	2.250 35	2.947 95	1.563 51	2.662 70	6.721 24	2.355 83
-10°	2.679 91	1.941 72	1.335 39	2.925 03	5.104 90	2.063 61	4.791 53	22.290 2	4.304 72
-20°	3.082 10	2.755 86	1.609 53	4.265 19	11.638 0	3.153 56	29.394 5	898.207	27.675 9
$ML$	$-60.65^\circ(\rho=\infty)$			$-38.52^\circ(\rho=\infty)$			$-21.86^\circ(\rho=\infty)$		

注:  $TL$ : 轨迹极限  $80.908^\circ = (180^\circ - i)$ ;  $ML$ : 无穷大半径的最小纬度。

复习思考题

1. 用于月球的地图投影有哪几种？
2. 为什么说 SOM 投影是动态投影？SOM 投影是否是等角性质的投影？
3. 卫星轨迹圆柱投影和卫星轨迹圆锥投影各有哪些特点和用途？

# 第 12 章 地图投影的识别、选择 以及不同投影的变换

## 12.1 地图投影的识别

在已经出版的地图上判别它所使用的地图投影的种类和变形性质及其大小等,对于正确使用地图和分析选择编图资料,都具有很重要的意义。如果在已成的地图或地图集中,都有明确的投影说明,那就不需要进行投影识别。遗憾的是,许多出版的地图,尤其国外出版的许多地图和地图集,往往缺少这方面的说明资料。有些地图虽有投影说明,但很不完全,如仅指明投影的名称。因此,要想从地图上获得有关地图投影的较完整确切的资料,还需运用地图投影有关知识,根据不同投影的外在特征——经纬网形状和变形分布规律等,经过分析、推断和必要的量算,一般是可以获得关于投影的种类、性质等的结论。

地图投影的识别,主要是对小比例尺地图而言,因为在 1:100 万以上的大、中比例尺地图,经纬网的形状差别不大,因而判别很困难。但是大比例尺地图往往属于国家的地形图系列,投影资料一般容易查知。对于小比例尺地图,由于经纬网图形有着明显的差别,有的一看便可判知是什么投影,例如伪圆柱投影、伪圆锥投影等。但是要想深入了解某种投影的中心点、标准线(无变形线)、变形分布及其大小等情况,还需要进行一系列的分析研究和一定的量算工作才能获得。

识别地图投影应根据某项实际工作的需要,通过一定的分析、量算和推断,确定下面几个问题:

- (1) 投影的种类——属方位、圆锥、圆柱或其他投影;
- (2) 变形性质——属等角、等面积、任意或等距离投影;
- (3) 投影方式——投影面与地球面的关系位置,相切还是相割,中心点和标准线的位置。

对于第(1)、第(2)两项,一般是容易确定的,但对于第(3)项即使进行了深入细致地分析研究和量算工作,有时还不一定获得圆满的结果。

现在对以上三个问题,分别加以讨论。

12.1.1 确定投影种类

本书各章所阐述的各种投影的理论基础、性质特点和经纬网形状等,是识别不同投影的基础知识,特别是投影经纬网形状,对识别投影具有直观的作用。为此,根据投影的经纬网形状和其他特征,排列出绝大部分常见投影,制成表 12-1,可供识别投影时参考。一般说,对于常见投影利用此表还是比较容易确定它的系统和种类的。

表 12-1 地图投影识别简表

纬线形状	经线形状	其他特征	投影名称
平行直线	与纬线垂直的平行直线,其间距与经差成比例	等纬差间经线等长	等距正圆柱投影
		等纬差间经线随纬度增加而增大	正轴等角圆柱及透视圆柱投影
		等纬差间经线随纬度增加而减小	等面积正圆柱投影
	正弦曲线	中经与赤道为互相垂直的直线且为对称轴	桑逊及爱凯特正弦曲线投影
	椭圆曲线		摩尔威德及横轴正射投影、爱凯特椭圆曲线投影
	任意曲线		其他伪圆柱投影
同心圆	放射直线束	$\delta = \Delta\lambda$	正轴方位投影
同心圆圆弧		$\delta < \Delta\lambda$	正轴圆锥投影
同心圆	任意曲线	中央经线为其他经线的对称轴	彭纳投影
同轴圆圆弧			正轴伪方位投影
		中经与赤道垂直	多圆锥投影
非同心圆	圆弧		球形、拉格朗、格灵顿、斜轴球面等投影
双曲线	平行直线		横轴球心投影
抛物线	直线束	大圆投影成直线	斜轴球心投影
各种曲线	各种曲线		其他投影(横、斜轴)

对于个别投影,有时目视难以确定,例如曲线是否为圆弧。这时可用一片塑料片或透明纸在地图上沿一条曲线的一段距离定出三个以上的点,然

后沿曲线移动此透明纸,如果在曲线的不同部位上,所定的几个点处处都与曲线吻合,则证明此曲线是圆弧,否则,就是其他曲线。

再如同心圆弧与同轴圆弧的判断,可以量测其相邻圆弧间的垂直距离是否处处相等。如果处处相等,则是同心圆弧,否则是同轴圆弧。同轴圆弧还可以在一条通过各圆弧的直线上,找出各圆弧的圆心。

正轴方位投影和正轴圆锥投影的经纬网形状基本相似,所不同的仅在于两经线间的夹角投影后不一样,即前者  $\delta = \lambda$ , 后者  $\delta = \sigma \lambda$ 。这一点不经过一定的测量是区别不出来的。由图 12-1, 设地图上两条经线  $AC$  与  $BD$  的经差为  $30^\circ$ , 作  $AE \parallel BD$ , 用量角器测定  $\angle CAE$ , 若  $\angle CAE = 30^\circ$ , 则为正轴方位投影, 若  $\angle CAE < 30^\circ$ , 则为正轴圆锥投影。

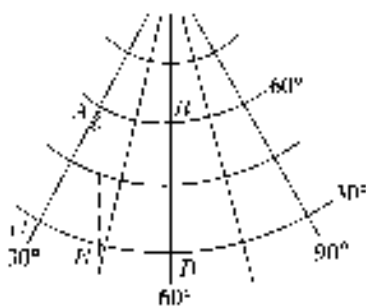


图 12-1 正轴方位投影和正轴圆锥投影的判断

## 12.1.2 确定投影的变形性质

当确定了投影的种类为某一系统的投影后,就可以进一步确定投影的变形性质是等角、等面积或任意投影中的某一种。

在确定了投影系统的基础上,有些投影的变形性质比较容易判断。例如伪圆柱投影肯定不是等角投影,球面透视方位投影肯定为等角投影。

有些投影的变形性质,从经纬网形状上分析,也能分辨出。例如投影的经纬线的交角不成直角,肯定不会是等角投影;在同一条纬度带上,经差相同的各个球面梯形的面积,如果差别较大,当然不可能是等面积投影;假如在同一条经线上检查相同纬差的纬线所截的几段经线,其长度不相等者,就断定不是等距离( $m=1$ )的投影。当然这只是问题的一个方面,如等角投影必须是经纬线保持正交,但是经纬线正交的投影并不都是等角投影。例如正轴的方位投影、圆柱投影和圆锥投影,它们的经纬线全都是正交的,但不全为等角投影,而是各有等面积和等距离投影。所以说,判别投影的变形性质单凭经纬网的形状进行判断是不够的,还必须结合其他条件并进行必要的量算工作。

有的投影需要量算经纬线的长度比,才能确定它的变形性质。方法是过经纬线的交点作经线和纬线的切线,首先看两切线的夹角是否为  $90^\circ$ 。若两切线垂直相交时,再进一步量测交点上下和左右等长的一段经线和纬线弧长(为了便于利用现成的数表,最好以整度或半度为单位),分别记作

$\Delta S'_m$  和  $\Delta S'_n$ , 再由本书附表 1 或《制图用表》查取相应的经线弧长和纬线弧长, 并按地图主比例尺缩小, 记为  $\Delta S_m$  和  $\Delta S_n$ 。然后将上述取得的数值代入经纬线长度比公式:

$$m = \frac{\Delta S'_m}{\Delta S_m},$$

$$n = \frac{\Delta S'_n}{\Delta S_n},$$

进行计算。为了便于比较, 在一幅图的不同部位计算几处经纬线交点。如果算出的结果都是  $m=n$ , 就断定为等角投影; 若  $m \cdot n=1$  或为一常数, 则是等面积投影; 若  $m=1$  或为一常数, 则是等距离投影。在图上进行量算, 要受到图纸的伸缩、量测误差的影响, 不一定达到精确无误, 但毕竟这是判断的重要参考。

当地图的经纬线不正交时, 还需要量测经纬线的交角  $\theta$ , 从而由  $m, n$  和  $\theta$  按公式(2-7)计算极值长度比  $a$  和  $b$ , 然后判断是等面积投影还是任意投影。

对有些投影也可以察看经纬网的变化情况以判断它们的变形性质。例如方位投影, 正轴投影可以察看纬线间的间距大小; 横轴投影则察看中央经线上纬线的间隔和赤道上经线的间隔; 斜轴投影则察看中央经线上的间距大小。根据方位投影的变形规律, 在同经差或同纬差时, 自投影中心沿大圆的交点, 间隔相同者为等距离投影; 显著缩小者可能是正射投影; 逐渐缩小者可能是等面积投影; 明显放大者应为球心投影(参看图 3-25)。要想进一步证明, 最好量取几条纬线(或等高圈)的投影半径值, 同时按相应方位投影的半径  $\rho$  式计算之值进行验算比较。一般说, 用这样的方法判别方位投影是比较有把握的。

### 12.1.3 确定投影的方式

确定投影的方式就是找出投影中心点、标准纬线和其他无变形线等, 这项工作一般说比较困难, 而且经过若干量算分析工作, 也不一定取得满意的结果。这一步工作, 也是前两步工作的继续, 或者是对前项结论的进一步验证。

对一些常见的投影, 如方位投影, 中心点肯定在中央经线上。量算中央经线上与各纬线交点间的长度比  $m$ , 根据  $m$  的变化是对称于中心点的道理, 就不难找出中心点的位置。在一般情况下, 中心点都在制图区域中部。

在正轴圆柱投影中, 赤道以外各纬线长度比都大于 1, 肯定为切圆柱投



影。若赤道及其邻近的纬线长度比小于 1, 然后逐步随纬度增加计算各长度比  $n$ , 最后终可以找到  $n=1$  的纬线  $\pm\varphi$ 。对于球体的正轴等距离圆柱投影, 其经纬网为等大正方形的是切圆柱投影; 若经纬网格为等大的南北方向长的矩形, 则是割圆柱投影, 这时再寻求  $n=1$  的纬线。

对于圆锥投影, 通常采取双标准纬圈的圆锥投影。可根据经线上各点纬线长度比的变化规律即:  $\varphi_1, \varphi_2$  以内的  $n<1$ ;  $\varphi_1, \varphi_2$  以外的  $n>1$ 。在  $n$  大于 1 和小于 1 之间总可以找到  $n=1$  的纬线  $\varphi_1$  或  $\varphi_2$ 。

在地图投影的判别中, 要掌握地图投影的基本理论知识, 如果能够熟练地运用, 就能比较顺利地取得判别的正确结果。

## 12.2 地图投影的选择

地图投影是地图的数学基础, 对于投影的选择使用是否适当, 会直接影响成图的精度和实用价值。因此在编制地图之前, 应根据前面各章中所讨论的一些常用投影的变形性质、经纬网形状以及其他的特点, 针对即将编绘的地图的具体条件和要求, 选择最合适的地图投影。

这里所谈的地图投影的选择, 不包括国家基本比例尺地形图的投影选择。因为国家地形图的投影和分幅等, 是由国家测绘主管部门研究制订, 并作为国家的基本测绘法颁布实行。例如 1:50 万及其以上更大比例尺的地形图系列, 规定都使用高斯-克吕格投影; 1:100 万分幅地形图, 规定使用双标准纬线的等角圆锥投影。这是不容许任意改变的。除此之外, 编制全国或任何地区的中、小比例尺的各种地图或地图集, 一般都需要另行选择适当的地图投影。

在选择地图投影中, 往往要考虑许多因素的影响和互相的制约。这些因素主要有: 地图的主要用途, 制图区域的大小、形状和地理位置, 地图的出版方式以及其他特殊要求等。

### 12.2.1 地图的主要用途

地图主要用于哪一方面、解决什么样的问题, 这对于选择什么投影, 是必须首先考虑的问题。例如航海图、航空图、天气图、军用地图等, 都要求方位正确。因此, 这类地图以选用等角为宜。如行政区划图、自然区划图、某些经济地图等, 一般要求面积正确, 能在地图上反映出面积信息量的对比关系, 因此应选择等面积投影。又如等距离方位投影具有从中心点至各方向任意点保持方位角和距离都正确的特点, 对于编制以某点为中心向四周不

同半径范围内有密切联系的地图,如城市防空图、雷达站图、地震监测站图等,具有很重要的意义。

其次,在考虑地图用途时,还应顾及用图对象的感受能力。对于中、小学生用的地图,其投影的网格要有球形感和直观性;对于大专以上的学生和一般科技人员用的地图,则要求投影变形小,能满足一定的量测精度要求。对于没有特殊要求的普通地图,可以提出图上量算的精度要求,作为选择投影的参考。例如对高精度量测,希望长度与面积变形在 $\pm 0.5\%$ 和角度变形在 $0.5^\circ$ 以内;中等测量精度希望长度与面积变形在 $\pm 1\% \sim 2\%$ 和角度变形在 $\pm 1^\circ \sim 2^\circ$ 以内;近似量测,一般长度和面积变形在 $\pm 3\% \sim 4\%$ ,角度变形在 $3^\circ \sim 5^\circ$ 以内已足够。

## 12.2.2 制图区域的大小

选择地图投影主要是对大区域小比例尺地图而言,因为在不太大的区域内,无论使用什么性质的地图投影其变形都比较小而且差别不显著。以我国最大的省区新疆维吾尔自治区的面积大小来说,用等角、等面积和等距离的三种正轴圆锥投影,计算不同纬度的长度变形值进行比较,其结果差别甚微( $0.0001 \sim 0.0003$ )。当然在我国其他省区,一般说面积更小,则其变形的差别更加微小。

关于制图区域的大小的划分,并没有绝对界限,不过应当将世界地图和半球地图除外,再讨论制图区域大小为好。为此,首先谈一谈世界地图和半球地图的投影选择。

对于世界地图来说,可用的投影很多,主要有四个系统:正轴圆柱、伪圆柱、广义多圆锥和某些派生的地图投影。国外有的学者主张,世界地图最好采用圆柱投影和伪圆柱投影,因其网格的纬线为平行于赤道的直线,这对于研究现象的纬向地带性是很重要的。因为世界上的许多自然地理现象的分布,与纬度带有密切关系。另外在圆柱投影中,重复出现的地区在图形上能保持一致。但缺点是在高纬度地区变形太大,虽然可以用割圆柱(一般割于 $\pm 30^\circ$ 或 $\pm 45^\circ$ 纬线上)投影的方法加以改善,但仍然不令人满意。在世界地图集中,常用墨卡托投影绘制世界航线(航空与航海)图与时区图。在透视圆柱投影中的高尔投影属于任意投影(本书 4.5),此投影尚能适当地、较完整地表示世界海陆的分布及对比关系(图 4-17)。等面积圆柱投影一般只适用于沿赤道一圈低纬度地区的地理现象地图,例如热带年降水量分布图等。伪圆柱投影中的爱凯特投影和摩尔威德投影常用以绘制书刊中的世界专题地图。但这种投影在高纬度地区角度变形很大,因此重复出现的地区

其形状改变很大。由于摩尔威德投影具有一定的椭球形感,国外许多地理书刊,特别是中小学教科书和通俗读物,常用它绘世界地图。我国编制的世界挂图和地图集中的世界地图多用等差分纬线多圆锥投影(本书 6.3)和正切差分纬线多圆锥投影(中国地图出版社设计)。这类投影对安排中国版图形状以及与四邻国家对比关系较好,但重复出现的地区,其形状变化太大。近年西方国家出版的地图集中,有的使用派生投影制作世界性专题地图。如英国 2000 年版《泰晤士世界地图集》(压缩版)的序图中的世界气候、人口……图幅,采用了温克尔投影(图 10-4)。从经纬网形状及水陆轮廓图形来看,这一投影优于广义多圆锥投影,而投影的计算和经纬网的构成也比较简单。

对于半球地图,一般都属于一览性地图,常分为东、西半球,南、北半球和水、陆半球的地图。东西半球图常采用横轴等面积或等距离方位投影,投影中心:东半球为  $\varphi_0=0^\circ, \lambda_0=70^\circ$ ;西半球为  $\varphi_0=0^\circ, \lambda_0=-170^\circ$ 。水陆半球一般采用斜轴等距离或等面积方位投影,其投影中心:水半球为  $\varphi_0=45^\circ\text{S}, \lambda_0=180^\circ$ ;陆半球为  $\varphi_0=45^\circ\text{N}, \lambda_0=0^\circ$ 。南北半球图,一般都采用正轴等角或等距离方位投影。

除了世界图和半球图以外,论区域的大小,首先是七大洲,其次是几个面积大的国家,如俄罗斯、中国、美国、加拿大、巴西、澳大利亚等。其余国家和地区,都算作中等或小的区域。

各大洲除了非洲可采用横轴等面积方位投影、横轴等角圆柱投影或桑逊投影外,其他洲基本上都可以使用斜轴等面积方位投影,所不同的仅是投影中心  $\varphi_0, \lambda_0$  不同而已。

世界上的几个大的国家多数在南、北半球的中纬度地区沿纬线延伸,故都可以选用不同变形性质的正轴圆锥投影。对于中国,若编制全图地图(即南海诸岛不作插图形式)一般多采用斜轴等面积或等距离的方位投影,中心点设在  $\varphi_0=30^\circ\text{N}, \lambda_0=105^\circ\text{E}$ 。

### 12.2.3 制图区域的形状和地理位置

根据制图区域的轮廓形状选择投影,有一条大家公认的原则,即投影的等变形线与制图区域的轮廓线的形状基本上一致的投影,就是这一区域最合适的地图投影。根据这一原则,并结合制图区域的地理位置,使选择的投影近于合理。如制图区域近于圆形,宜采用方位投影;中心点在两极附近,用正轴方位投影;中心点近于赤道,宜使用横轴方位投影。当制图区域是沿纬线延伸而又在中纬度地区,如中国、美国、俄罗斯等,宜选用正轴圆锥投

影;当制图区域是沿经线方向延伸时,如南美的智利、阿根廷等,可选用横轴圆柱投影或多圆锥投影;对于沿任一方向延伸的地区,可以考虑使用斜轴圆柱投影,或者采用正轴圆锥投影而在地图配置时加以调整,使图幅的中央经线不与东西图廓线平行,如中国东北各省的图幅。

## 12.2.4 地图的出版方式

对于单幅地图,选择投影比较单纯,只要考虑前面讲到的一些主要因素就可以,如地图的主要用途、区域形状、地理位置等。但是,对于一部地图集选择投影,情况就复杂得多,特别是世界地图集。因为地图集是一批(或几组)地图的系统汇编,它是统一体,但各图组或各图幅又有自己的主题、内容和地区等的区别,因此对投影的要求也不可能相同。例如经济地图组一般要求面积正确,但其中的交通运输图,则又要求方向距离正确;自然地图组又有其他的要求等等。但是,在一本地图集中不容许采用五花八门的多种投影。一般的处理原则是,对于大多数没有特殊要求的图幅,选用面积和角度变形都不太大的任意投影或等距离投影。而对于面积、方向有要求的图幅,可采用等面积和等角投影。但在投影系统上尽可能一致(如采用圆锥系统中的各变形性质的投影)。

对于单幅的区域地图,主要是根据制图区域轮廓形状和地理位置选用一种投影,然后再根据地图的内容,确定投影的变形性质。有时同一个制图区域,由于编制地图主旨和范围略有不同,常需要采用不同的两种投影。例如前面已提到的中国地图,南海诸岛作插图和不作插图的全图形式,就使用不同的投影,前者使用正轴圆锥投影,后者使用斜轴方位投影。

当然在针对某一制图任务而选择投影时,至少要选出两种以上的投影方案,并经过计算,展绘经纬网略图和等变形线分布略图等,进行仔细地比较,最后选定一种。

## 12.3 地图投影变换

### 12.3.1 变换的意义与方法

在地图编制的实践中,有时遇到所选用的编图资料与新编地图的数学基础不相同,需要改变资料地图的投影以符合新编地图的投影。这一情况,在我国大陆地区的基本比例尺地形图系列已测绘和编绘完成的今天,编制大于1:100万比例尺的内陆地图,因1:50万比例尺以上的国家地形图都

统一采用高斯-克吕格投影,故无需进行投影变换。即使用上述资料编绘采用等角割圆锥投影的1:100万地图,由于这两种地图投影的变形都很微小,经纬网形状差别也不大,对常规作业改变投影无太大困难。但是,当编制小比例地图和跨海岸线或跨国界线的任何比例尺地图时,一般都需要进行投影变换。例如,编制跨海岸线的1:50万地形图,其陆地部分使用相同投影的1:25万或1:10万地形图作为基本资料,无需进行投影变换,但海域部分要使用墨卡托投影的海图资料转绘有关地图要素;再如跨国界的地图,国界线以外的部分要用邻国的地图资料,他们的地图多数与我国使用的投影不同。因此,以上两种情况在制图作业中都需要实行投影变换。

过去在常规编图作业中,改变地图投影的方法是将资料地图通过照相复制蓝图纠正一部分,然后在新编地图展绘的经纬网内,用小块分割拼接形成小的裂隙或重叠使误差较均匀配置,以达到投影变换的目的。如果资料地图与新编地图的经纬网形状相差较大,还可以利用航测大型纠正仪,进行二至三次纠正,制成像片资料图在新编地图经纬网上拼贴,以改变投影。以上的方法虽然勉强能解决变换投影的问题,但是这些方法既费工又费时,不适应大面积作业,而且其最大缺点是不能保证投影变换的精度。

在电子计算机技术日新月异和地图制图自动化快速发展的今天,上述变换地图投影的方法显然已不适用了,需要寻求严密的数学方法来解决。根据机助地图制图的要求,需要建立地图资料与新编地图两种不同投影平面间点的坐标变换关系式,即数学模型,才能进行变换。目前,由一种地图投影点的坐标变换为另一种投影点的坐标,求出其关系式的基本方法有两种。

一是解析变换法。它必须在资料地图和新编地图的两种投影的坐标方程式和常数已知的情况下,建立变换的解析计算公式。在解析变换法中,又可采用反解和正解两种变换法。反解变换法,是按资料地图投影坐标公式反解出该投影的地理坐标 $\varphi, \lambda$ ,代入新编地图投影方程式中,求得新投影点的直角坐标。正解变换,是确定在资料地图和新编地图上相应的直角坐标的直接联系,不需要反解出前一投影点的地理坐标 $\varphi, \lambda$ ,而直接引出两种投影的直角坐标关系式。

二是数值变换法。当资料地图投影点的直角坐标解析式无法求得,或不易求出两种投影的平面直角坐标之间的直接关系时,可采用多项式逼近法,即数值变换法来建立两投影间的变换关系式。

下面对这两种变换方法,分别加以说明。

### 12.3.2 解析变换法

两个不同的投影平面场上,点的对应关系可用下式表示:

$$X=F_1(x,y), \quad Y=F_2(x,y), \quad (12-1)$$

式中: $x,y$  为资料地图投影的直角坐标; $X,Y$  为新编地图投影的直角坐标; $F_1,F_2$  在一定域内是单值而连续的函数,同时要满足两曲面间点的一一对应关系。

设资料地图投影的坐标方程式为

$$x=f_1(\varphi,\lambda), \quad y=f_2(\varphi,\lambda); \quad (12-2)$$

新编地图投影的坐标方程式为

$$X=\phi_1(\varphi,\lambda), \quad Y=\phi_2(\varphi,\lambda)。 \quad (12-3)$$

按解析变换法,将方程式(12-2)反解求出  $\varphi,\lambda$ ,则有

$$\varphi=\psi_1(x,y), \quad \lambda=\psi_2(x,y); \quad (12-4)$$

将(12-4)式代入(12-3)式,则

$$\left. \begin{aligned} X &= \phi_1[\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)] \\ Y &= \phi_2[\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)] \end{aligned} \right\}。 \quad (12-5)$$

这就是解析法进行地图投影变换的数学模式,下面举例说明之。

**【例 1】** 试求由等角圆柱投影变换为等角圆锥投影的坐标关系式。

等角圆柱投影点的坐标方程式为:

$$x=r_0 \ln U,$$

$$y=r_0 \lambda。$$

由上式得

$$\ln U = \frac{x}{r_0} \text{ 或 } U = e^{\frac{x}{r_0}},$$

$$\lambda = \frac{y}{r_0}。$$

等角圆锥投影点的坐标方程式为:

$$\rho = \frac{K}{U^\sigma},$$

$$\delta = \sigma \lambda,$$

$$X = \rho_s - \rho \cos \delta,$$

$$Y = \rho \sin \delta,$$

式中

$$U = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e_1 \sin \varphi}{1 + e_1 \sin \varphi}\right)^{\frac{e_1}{2}},$$

$$r_0 = N_0 \cos \varphi_0,$$

将前一投影的  $U$  和  $\lambda$  代入后一投影坐标公式中,得

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho_s - \rho \cos \delta = \rho_s - \frac{K}{U_\sigma} \cos(\sigma \lambda) \\ &= \rho_s - \frac{K}{e^{\frac{x}{r_0} \sigma}} \cos\left(\sigma \frac{y}{r_0}\right) \\ Y &= \rho \sin \delta = \frac{K}{U_\sigma} \sin(\sigma \lambda) \\ &= \frac{K}{e^{\frac{x}{r_0} \sigma}} \sin\left(\sigma \frac{y}{r_0}\right) \end{aligned} \right\} \quad (12-6)$$

(12-6)式即为由等角圆柱投影变换为等角圆锥投影点的坐标关系式。式中角度以弧度计。

**【例 2】** 试求由等距离方位投影变换为等距离圆锥投影点的坐标关系式。

等距离方位投影的坐标方程式为:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= S, \quad \delta_1 = \lambda, \\ x &= \rho_1 \cos \delta_1, \quad y = \rho_1 \sin \delta_1. \end{aligned}$$

解出  $\lambda$  和  $S$

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \tan \delta_1, \quad \lambda = \delta_1 = \arctan \frac{y}{x}, \\ x &= \rho_1 \cos \delta_1 = S \cos \lambda = S \cos(\arctan \frac{y}{x}), \end{aligned}$$

所以

$$S = x / \cos(\arctan \frac{y}{x}).$$

等距离圆锥投影点的坐标方程式为:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= K - S, \quad \delta_2 = \sigma \lambda, \\ X &= \rho_{02} - \rho_2 \cos \delta_2, \quad Y = \rho_2 \sin \delta_2. \end{aligned}$$

将前一投影求出的  $\lambda, S$  代入后一投影的坐标公式中,则有

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho_{02} - \rho_2 \cos \delta_2 = \rho_{02} - (K - S) \cos(\sigma \lambda) \\ &= \rho_{02} - \left[ K - x / \cos(\arctan \frac{y}{x}) \right] \cos(\sigma \arctan \frac{y}{x}) \\ Y &= \rho_2 \sin \delta_2 = (K - S) \sin(\sigma \lambda) \\ &= \left[ K - x / \cos(\arctan \frac{y}{x}) \right] \sin(\sigma \arctan \frac{y}{x}) \end{aligned} \right\} \quad (12-7)$$

(12-7)式即由等距离方位投影变换为等距离圆锥投影点的坐标关系式。

【例3】 试求由等角圆柱投影变换成等积圆柱投影点的坐标关系式。  
按球体投影,并假定这两种圆柱投影的标准纬线是一致的。

(1) 用反解变换法

等角圆柱投影点的坐标方程式为:

$$x = r_0 \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}),$$

$$y = r_0 \lambda。$$

等积圆柱投影点的坐标方程式为:

$$X = \frac{R^2}{r_0} \sin \varphi,$$

$$Y = r_0 \lambda。$$

将前一投影点的坐标方程式反解,求出  $\varphi, \lambda$ ,

$$x = r_0 \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) = \ln \tan^{r_0}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})。$$

于是

$$e^x = \tan^{r_0}(45^\circ + \frac{\varphi}{2}),$$

$$e^{\frac{x}{r_0}} = \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}),$$

由

$$45^\circ + \frac{\varphi}{2} = \arctan e^{\frac{x}{r_0}},$$

得

$$\varphi = 2 \arctan e^{\frac{x}{r_0}} - 90^\circ$$

及

$$\lambda = \frac{y}{r_0}。$$

将  $\varphi, \lambda$  代入后一投影中,得

$$\begin{aligned} X &= \frac{R^2}{r_0} \sin \varphi = \frac{R^2}{r_0} \sin(2 \arctan e^{\frac{x}{r_0}} - 90^\circ) \\ &= -\frac{R^2}{r_0} \sin(90^\circ - 2 \arctan e^{\frac{x}{r_0}}) = -\frac{R^2}{r_0} \cos(2 \arctan e^{\frac{x}{r_0}}) \\ &= -\frac{R^2}{r_0} [\cos^2(\arctan e^{\frac{x}{r_0}}) - \sin^2(\arctan e^{\frac{x}{r_0}})] \\ &= -\frac{R^2}{r_0} (\frac{1}{1 + e^{\frac{2x}{r_0}}} - \frac{e^{\frac{2x}{r_0}}}{1 + e^{\frac{2x}{r_0}}}) = \frac{R^2}{r_0} (\frac{e^{\frac{2x}{r_0}} - 1}{1 + e^{\frac{2x}{r_0}}), \end{aligned}$$



于是

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{R^2}{r_0} \sin \varphi = \frac{R^2}{r_0} \left( \frac{e^{\frac{2x}{r_0}} - 1}{e^{\frac{2x}{r_0}} + 1} \right) \\ Y &= r_0 \lambda = r_0 \frac{y}{r_0} = y \end{aligned} \right\}, \quad (12-8)$$

式中  $r_0 = R \cos \varphi_0$  为一常数。

## (2) 用正解变换法

由

$$\begin{aligned} x &= r_0 \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) = r_0 \ln \sqrt{\frac{1 - \cos(90^\circ + \varphi)}{1 + \cos(90^\circ + \varphi)}} \\ &= \frac{r_0}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \end{aligned}$$

即

$$\ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \frac{2x}{r_0},$$

或

$$\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = e^{\frac{2x}{r_0}}。$$

解之

$$\sin \varphi = \frac{e^{\frac{2x}{r_0}} - 1}{e^{\frac{2x}{r_0}} + 1},$$

于是

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{R^2}{r_0} \sin \varphi = \frac{R^2}{r_0} \left( \frac{e^{\frac{2x}{r_0}} - 1}{e^{\frac{2x}{r_0}} + 1} \right) \\ Y &= y \end{aligned} \right\}。 \quad (12-8)$$

与前面反解所得结果完全一致。(12-8)式即由等角圆柱投影变换为等积圆柱投影点的坐标公式。

## 12.3.3 数值变换法

如果资料地图投影点的直角坐标的解析式为未知,或不易求出两种投影点的平面直角坐标间的直接关系,可用近似方法分解关系式(12-1)为如下的多项式:

$$\left. \begin{aligned} X' &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + \\ &\quad a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ Y' &= b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + \\ &\quad b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \end{aligned} \right\} \quad (12-9)$$

为解这种三次多项式,需要确定此多项式的系数  $a_{ij}$  和  $b_{ij}$ ,为此需在两种投影之间选定与地理坐标相应的 10 个点的平面直角坐标  $x_i, y_i$  和  $X'_i, Y'_i$ ,组成线性方程组。解这些方程组,求出系数  $a_{ij}, b_{ij}$  之值。有了这些系数值,则方程式(12-9)就可进行计算了。上述 10 个地理坐标相应的点,应选择投影范围的图形特征点上。

为了保证变换的一定精度,采用这种方法时一般不要一次将全部区域的投影变换完毕,而应分块变换为好。在实际计算中还必须按公式(12-9)算出一些检查点的坐标,如果检查点计算的坐标与给出点的坐标之差不超过允许的数值,就说明多项式幂次在此范围内是符合要求的。

在分解关系式求各系数中,还有应用最小二乘法原理进行投影变换的,在此不再介绍。

## 复习思考题

1. 识别一个投影一般应从哪几个方面去考虑?
2. 地图制作过程中,可以根据哪些原则选择地图投影?
3. 地图投影变换有哪几种方法?
4. 利用等角圆锥投影公式,经投影变换后,绘制等角圆柱投影的经纬格网(具体参数参见本书 5.6.3)。

# 附录 地图投影中常用的数学公式

## (一) 平面三角

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha \qquad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\csc^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\csc \alpha} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}}{\csc \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \sqrt{\sec^2 \alpha - 1} = \frac{1}{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \sqrt{\csc^2 \alpha - 1} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\csc \alpha}{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}} = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{\sec \alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cot \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha + 1}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 1} = \frac{2}{\cot \alpha - \tan \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} = \frac{1}{2} (\cot \alpha - \tan \alpha)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha})$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha})$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a \pm \tan b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}$$

$$\cot a \pm \cot b = \pm \frac{\sin(a \pm b)}{\sin a \sin b}$$

$$\tan a \pm \cot b = \pm \frac{\cos(a \mp b)}{\cos a \cos b}$$

$$\cot a \pm \tan b = \frac{\cos(a \mp b)}{\sin a \cos b}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha$$

$$\sin^5 \alpha = \frac{5}{8} \sin \alpha - \frac{5}{16} \sin 3\alpha + \frac{1}{16} \sin 5\alpha$$

$$\cos^5 \alpha = \frac{5}{8} \cos \alpha + \frac{5}{16} \cos 3\alpha + \frac{1}{16} \cos 5\alpha$$

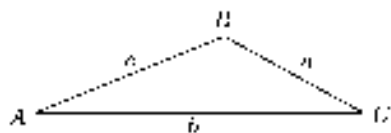
三角形正、余弦定理：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C$$



函数 角 A	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$90^\circ - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$90^\circ + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$180^\circ - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\sec\alpha$	$\csc\alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$270^\circ - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$360^\circ - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$360^\circ + \alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$

$\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
0	0	1	0	$\infty$	1	$\infty$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\infty$	0	$\infty$	1
$\pi$	0	-1	0	$\infty$	-1	$\infty$
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$\infty$	0	$\infty$	-1
$2\pi$	0	1	0	$\infty$	1	$\infty$

## (二) 球面三角

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

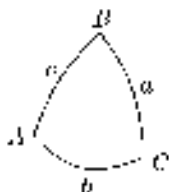
$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$$

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$$

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$$



$$\cos c = \cos a \cos b$$

$$\cos A = \cos a \sin B$$

$$\cos B = \cos b \sin A$$

$$\cos c = \cot A \cot B$$

$$\cos A = \tan b \cot c$$

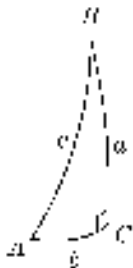
$$\cos B = \tan a \cot c$$

$$\sin b = \sin B \sin c$$

$$\sin a = \sin A \sin c$$

$$\sin b = \tan a \cot A$$

$$\sin a = \tan b \cot B$$



## (三) 函数展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

$$\cot x = \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \dots \right)$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots$$

$$\csc x = \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \frac{31x^6}{15120} + \cdots \right)$$

$$y = \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots (x = \sin y)$$

$$y = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots (x = \tan y)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots$$

#### (四) 微分和积分

$$d(a \pm x) = \pm dx$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(ax) = a dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{a}{x^2} dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(x^a) = ax^{a-1} dx$$

$$d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$d(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$d\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{ndx}{x^{n+1}}$$

$$d(\sec x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$d(A^x) = A^x \ln A dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(e^x) = e^x dx$$

$$d(u \pm v \pm w \pm \dots) = du \pm dv \pm dw \pm \dots$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

$$s = F(u, v, w, \dots)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial u} du + \frac{\partial s}{\partial v} dv + \frac{\partial s}{\partial w} dw + \dots$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \dots$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \dots$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \dots$$

.....

$$\int a du = a \int du = au + c$$

$$\int (u+v) dx = \int u dx + \int v dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\int A^x \ln A dx = A^x + c$$

$$\int A^x dx = \frac{A^x}{\ln A} + c$$

$$d(\csc x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$d(\operatorname{arccsc} x) = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$d(\operatorname{arcsec} x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(\lg x) = \frac{\lg e}{x} dx$$

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$d(u^v) = u^v \ln u dv + v u^{v-1} du$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$



$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

$$\int \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \sin nx + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{x}{2} \right) + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$$

$$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$$

$$\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + c$$

$$\int \csc x dx = \ln(\csc x - \cot x) + c$$

附表

1. 由赤道至纬度为  $\varphi$  的纬线间的子午线弧长  $S_m$  ,  
纬差  $30'$  的子午线弧长  $\Delta S_m$  ,经差  $30'$  的纬线弧长  $S_n$

$\varphi$	$S_m(m)$	$\Delta S_m(m)$	$S_n(m)$	$\varphi$	$S_m(m)$	$\Delta S_m(m)$	$S_n(m)$
$0^{\circ}0'$	0	55 288	55 661	$30^{\circ}0'$	3 320 172	55 430	48 244
$30'$	55 288	55 288	55 659	$30'$	3 375 602	55 433	48 000
$1^{\circ}0'$	110 576	55 289	55 652	$31^{\circ}0'$	3 431 035	55 438	47 753
$30'$	165 865	55 288	55 642	$30'$	3 486 473	55 442	47 502
$2^{\circ}0'$	221 153	55 289	55 627	$32^{\circ}0'$	3 541 915	55 447	47 247
$30'$	276 442	55 290	55 608	$30'$	3 597 362	55 451	46 986
$3^{\circ}0'$	331 732	55 290	55 585	$33^{\circ}0'$	3 652 813	55 455	46 727
$30'$	387 022	55 290	55 558	$30'$	3 708 268	55 460	46 462
$4^{\circ}0'$	442 312	55 291	55 526	$34^{\circ}0'$	3 763 728	55 465	46 193
$30'$	497 603	55 292	55 490	$30'$	3 819 193	55 469	45 921
$5^{\circ}0'$	552 895	55 293	55 450	$35^{\circ}0'$	3 874 662	55 473	45 645
$30'$	608 188	55 294	55 406	$30'$	3 930 135	55 478	45 365
$6^{\circ}0'$	663 482	55 295	55 358	$36^{\circ}0'$	3 985 613	55 483	45 083
$30'$	718 777	55 295	55 305	$30'$	4 041 096	55 488	44 796
$7^{\circ}0'$	774 072	55 297	55 249	$37^{\circ}0'$	4 096 584	55 492	44 507
$30'$	829 369	55 299	55 188	$30'$	4 152 076	55 497	44 213
$8^{\circ}0'$	884 668	55 299	55 125	$38^{\circ}0'$	4 207 573	55 501	43 917
$30'$	939 967	55 301	55 053	$30'$	4 263 074	55 506	43 617
$9^{\circ}0'$	995 268	55 303	54 980	$39^{\circ}0'$	4 318 580	55 511	43 314
$30'$	1 050 571	55 304	54 902	$30'$	4 374 091	55 516	43 007
$10^{\circ}0'$	1 105 875	55 305	54 821	$40^{\circ}0'$	4 429 607	55 521	42 698
$30'$	1 161 180	55 308	54 735	$30'$	4 485 128	55 526	42 385
$11^{\circ}0'$	1 216 488	55 309	54 645	$41^{\circ}0'$	4 540 654	55 530	42 068
$30'$	1 271 797	55 311	54 551	$30'$	4 596 184	55 535	41 749
$12^{\circ}0'$	1 327 108	55 313	54 452	$42^{\circ}0'$	4 651 719	55 540	41 426
$30'$	1 382 421	55 316	54 350	$30'$	4 707 259	55 545	41 100
$13^{\circ}0'$	1 437 737	55 317	54 243	$43^{\circ}0'$	4 762 804	55 550	40 771
$30'$	1 493 054	55 319	54 133	$30'$	4 818 354	55 554	40 439
$14^{\circ}0'$	1 548 373	55 322	54 018	$44^{\circ}0'$	4 873 908	55 560	40 104

续表

$\varphi$	$S_m(m)$	$\Delta S_m(m)$	$S_n(m)$	$\varphi$	$S_m(m)$	$\Delta S_m(m)$	$S_n(m)$
30'	1 603 695	55 324	53 899	30'	4 929 468	55 564	39 765
15°0'	1 659 019	55 327	53 776	45°0'	4 985 032	55 570	39 424
30'	1 714 346	55 329	53 649	30'	5 040 602	55 574	39 080
16°0'	1 769 675	55 331	53 518	46°0'	5 096 176	55 579	38 732
30'	1 825 006	55 335	53 383	30'	5 151 755	55 584	38 382
17°0'	1 880 341	55 337	53 244	47°0'	5 207 339	55 589	38 029
30'	1 935 678	55 339	53 101	30'	5 262 928	55 593	37 672
18°0'	1 991 017	55 343	52 953	48°0'	5 318 521	55 599	37 313
30'	2 046 360	55 346	52 802	30'	5 374 120	55 603	36 951
19°0'	2 101 706	55 348	52 647	49°0'	5 429 723	55 608	36 587
30'	2 157 054	55 352	52 488	30'	5 485 331	55 613	36 219
20°0'	2 212 406	55 354	52 324	50°0'	5 540 944	55 618	35 848
30'	2 267 760	55 358	52 157	30'	5 596 562	55 623	35 475
21°0'	2 323 118	55 361	51 986	51°0'	5 652 185	55 628	35 099
30'	2 378 479	55 365	51 811	30'	5 707 813	55 632	34 721
22°0'	2 433 844	55 368	51 632	52°0'	5 763 445	55 637	34 340
30'	2 489 212	55 371	51 449	30'	5 819 082	55 641	33 956
23°0'	2 544 583	55 375	51 262	53°0'	5 874 723	55 647	33 569
30'	2 599 958	55 378	51 071	30'	5 930 370	55 651	33 180
24°0'	2 655 336	55 382	50 877	54°0'	5 986 021	55 656	32 788
30'	2 710 718	55 385	50 678	30'	6 041 677	55 660	32 394
25°0'	2 766 103	55 390	50 476	55°0'	6 097 337	55 665	31 998
30'	2 821 493	55 393	50 270	30'	6 153 002	55 670	31 598
26°0'	2 876 886	55 397	50 060	56°0'	6 208 672	55 674	31 197
30'	2 932 283	55 400	49 846	30'	6 264 346	55 679	30 793
27°0'	2 987 683	55 405	49 628	57°0'	6 320 025	55 683	30 387
30'	3 043 088	55 409	49 407	30'	6 375 708	55 687	29 978
28°0'	3 098 497	55 413	49 182	58°0'	6 431 395	55 692	29 567
30'	3 153 910	55 416	48 953	30'	6 487 087	55 696	29 154
29°0'	3 209 326	55 421	48 720	59°0'	6 542 783	55 701	28 738
30'	3 264 747	55 425	48 484	30'	6 598 484	55 705	28 320
30°0'	3 320 172		48 244	60°0'	6 654 189		27 900

2. 子午圈曲率半径  $M$ 、卯酉圈曲率半径  $N$ 、纬圈半径  $r$  与符号  $U$  的数值

$\varphi$	$M(m)$	$N(m)$	$r=N\cos\varphi(m)$	$U$
0°0′	6 335 553	6 378 245	6 378 245	0.000 000 0
30′	558	247	6 378 004	1.008 706 0
1°0′	572	252	6 377 280	1.017 488 5
30′	596	260	6 376 074	1.026 348 8
2°0′	630	271	6 374 385	1.035 288 5
30′	674	286	6 372 215	1.044 308 7
3°0′	727	304	6 369 562	1.053 411 1
30′	790	325	6 366 428	1.062 597 0
4°0′	862	349	6 362 812	1.071 868 2
30′	944	376	6 358 714	1.081 226 0
5°0′	6 336 036	407	6 354 135	1.090 672 1
30′	137	441	6 349 076	1.100 208 0
6°0′	248	478	6 343 536	1.109 835 7
30′	368	519	6 337 516	1.119 556 7
7°0′	498	562	6 331 017	1.129 372 7
30′	637	609	6 324 039	1.139 285 6
8°0′	785	658	6 316 582	1.149 297 3
30′	943	711	6 308 647	1.159 409 4
9°0′	6 337 110	767	6 300 234	1.169 624 1
30′	286	826	6 291 345	1.179 943 5
10°0′	471	889	6 281 979	1.190 369 3
30′	666	954	6 272 138	1.200 903 5
11°0′	869	6 379 022	6 261 822	1.211 548 4
30′	6 338 082	094	6 251 031	1.222 306 4
12°0′	303	168	6 239 768	1.233 179 8
30′	534	245	6 228 032	1.244 170 2
13°0′	773	325	6 215 824	1.255 280 6
30′	6 339 021	409	6 203 145	1.266 513 1
14°0′	277	495	6 189 996	1.277 870 4
30′	542	584	6 176 379	1.289 355 0
15°0′	816	675	6 162 293	1.300 969 2
30′	6 340 098	770	6 147 740	1.312 716 1
16°0′	388	867	6 132 722	1.324 598 3
30′	687	968	6 117 239	1.336 618 6
17°0′	994	6 380 070	6 101 292	1.348 779 9
30′	6 341 309	176	6 084 882	1.361 085 2
18°0′	632	284	6 068 011	1.373 537 4
30′	962	395	6 050 680	1.386 140 0

续表

$\varphi$	$M(m)$	$N(m)$	$r=N\cos\varphi(m)$	$U$
19°0'	6 342 301	509	6 032 890	1.398 895 9
30'	6 342 647	625	6 014 642	1.411 808 5
20°0'	6 343 001	743	5 995 938	1.424 881 3
30'	6 343 362	865	5 976 778	1.438 118 3
21°0'	6 343 731	988	5 957 166	1.451 521 9
30'	6 344 107	6 381 114	5 937 101	1.465 097 1
22°0'	6 344 490	242	5 916 585	1.478 847 2
30'	6 344 879	373	5 895 620	1.492 775 8
23°0'	6 345 276	506	5 874 208	1.506 887 7
30'	6 345 680	642	5 852 349	1.521 186 6
24°0'	6 346 090	779	5 830 046	1.535 677 1
30'	6 346 507	919	5 807 299	1.550 363 0
25°0'	6 346 931	6 382 061	5 784 112	1.565 250 0
30'	6 347 360	205	5 760 484	1.580 341 7
26°0'	6 347 796	351	5 736 419	1.595 643 6
30'	6 348 238	499	5 711 918	1.611 160 8
27°0'	6 348 686	649	5 686 982	1.626 898 3
30'	6 349 139	801	5 661 614	1.642 861 3
28°0'	6 349 598	955	5 635 815	1.659 055 4
30'	6 350 063	6 383 111	5 609 587	1.675 486 4
29°0'	6 350 533	268	5 582 932	1.692 160 3
30'	6 351 008	427	5 555 852	1.709 082 8
30°0'	6 351 488	588	5 528 349	1.726 260 8
30'	6 351 974	751	5 500 426	1.743 700 1
31°0'	6 352 464	915	5 472 083	1.761 407 7
30'	6 352 958	6 384 081	5 443 324	1.779 390 6
32°0'	6 353 457	248	5 414 119	1.797 656 0
30'	6 353 961	416	5 384 562	1.816 211 4
33°0'	6 354 468	586	5 354 565	1.835 064 4
30'	6 354 980	758	5 324 159	1.854 223 2
34°0'	6 355 495	930	5 293 347	1.873 695 4
30'	6 356 014	6 385 104	5 262 132	1.893 489 9
35°0'	6 356 537	279	5 230 514	1.913 616 0
30'	6 357 064	455	5 198 498	1.934 082 1
36°0'	6 357 593	633	5 166 085	1.954 898 4
30'	6 358 126	811	5 133 278	1.976 074 0
37°0'	6 358 661	990	5 100 079	1.997 620 1
30'	6 359 199	6 386 170	5 066 490	2.019 546 7
38°0'	6 359 740	351	5 032 514	2.041 864 9
30'	6 360 283	533	4 998 153	2.064 586 6
39°0'	6 360 829	6 386 716	4 963 410	2.087 723 1
30'	6 361 376	899	4 928 288	2.111 287 1

续表

$\varphi$	$M(m)$	$N(m)$	$r=N\cos\varphi(m)$	$U$
40°0′	6 361 926	6 387 083	4 892 790	2. 135 291 6
30′	6 362 477	267	4 856 916	2. 159 750 1
41°0′	6 363 030	452	4 820 671	2. 184 675 8
30′	6 363 584	638	4 784 058	2. 210 084 1
42°0′	6 364 140	824	4 747 078	2. 235 989 7
30′	6 364 697	6 388 010	4 709 735	2. 262 408 4
43°0′	6 365 254	197	4 672 031	2. 289 356 9
30′	6 365 813	384	4 633 970	2. 316 852 0
44°0′	6 366 372	571	4 595 553	2. 344 912 3
30′	6 366 931	758	4 556 784	2. 373 555 5
45°0′	6 367 491	945	4 517 666	2. 402 801 5
30′	6 368 051	6 389 132	4 478 202	2. 432 670 6
46°0′	6 368 611	319	4 438 394	2. 463 184 8
30′	6 369 170	506	4 398 246	2. 494 365 6
47°0′	6 369 729	693	4 357 760	2. 526 235 9
30′	6 370 287	880	4 316 940	2. 558 821 6
48°0′	6 370 845	6 390 066	4 275 789	2. 592 146 8
30′	6 371 402	252	4 234 309	2. 626 239 9
49°0′	6 371 957	438	4 192 505	2. 661 127 6
30′	6 372 512	624	4 150 378	2. 696 839 5
50°0′	6 373 065	808	4 107 933	2. 733 407 6
30′	6 373 616	993	4 065 171	2. 770 863 3
51°0′	6 374 165	6 391 176	4 022 098	2. 809 241 7
30′	6 374 713	359	3 978 715	2. 848 578 5
52°0′	6 375 258	542	3 935 026	2. 888 911 9
30′	6 375 801	723	3 891 034	2. 930 2812
53°0′	6 376 342	904	3 846 744	2. 972 728 9
30′	6 376 880	6 392 083	3 802 157	3. 016 299 1
54°0′	6 377 415	262	3 757 278	3. 061 038 6
30′	6 377 947	440	3 712 109	3. 106 996 8
55°0′	6 378 476	617	3 666 654	3. 154 226 7
30′	6 379 002	793	3 620 918	3. 202 782 9
56°0′	6 379 525	967	3 574 902	3. 252 724 6
30′	6 380 044	6 393 140	3 528 611	3. 304 113 8
57°0′	6 380 559	312	3 482 047	3. 357 015 9
30′	6 381 070	483	3 435 216	3. 411 501 0
58°0′	6 381 577	652	3 388 120	3. 467 643 2
30′	6 382 080	820	3 340 762	3. 525 521 8
59°0′	6 382 578	987	3 293 147	3. 585 220 7
30′	6 383 072	6 394 152	3 245 277	3. 646 829 8
60°0′	6 383 561	315	3 197 158	3. 710 444 2

### 3. $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ , $2^{\circ} \times 2^{\circ}$ 和 $5^{\circ} \times 5^{\circ}$ 球面梯形的面积

(单位:  $\text{km}^2$ )

$\varphi$	$1^{\circ} \times 1^{\circ}$	$2^{\circ} \times 2^{\circ}$	$5^{\circ} \times 5^{\circ}$
$0^{\circ}$	12 308.90		
$1^{\circ}$	12 305.25	49 228.3	
$2^{\circ}$	12 297.95		307 358
$3^{\circ}$	12 287.01	49 169.9	
$4^{\circ}$	12 272.42		
$5^{\circ}$	12 254.19	49 053.2	
$6^{\circ}$	12 232.33		
$7^{\circ}$	12 206.83	48 878.3	305 080
$8^{\circ}$	12 177.71		
$9^{\circ}$	12 144.97	48 645.3	
$10^{\circ}$	12 108.61		
$11^{\circ}$	12 068.66	48 354.5	
$12^{\circ}$	12 025.11		300 538
$13^{\circ}$	11 977.98	48 006.2	
$14^{\circ}$	11 927.28		
$15^{\circ}$	11 873.01	47 600.6	
$16^{\circ}$	11 815.20		
$17^{\circ}$	11 753.86	47 138.1	293 759
$18^{\circ}$	11 689.00		
$19^{\circ}$	11 620.63	46 619.3	
$20^{\circ}$	11 548.78		
$21^{\circ}$	11 473.46	46 004.5	
$22^{\circ}$	11 394.68		284 781
$23^{\circ}$	11 312.48	45 414.3	
$24^{\circ}$	11 226.86		
$25^{\circ}$	11 137.85	44 729.4	
$26^{\circ}$	11 045.48		
$27^{\circ}$	10 949.76	43 990.5	273 661
$28^{\circ}$	10 850.71		
$29^{\circ}$	10 748.37	43 198.2	
$30^{\circ}$			

续表

$\varphi$	$1^{\circ}\times 1^{\circ}$	$2^{\circ}\times 2^{\circ}$	$5^{\circ}\times 5^{\circ}$
$31^{\circ}$	10 642.76	42 353.3	260 466
$32^{\circ}$	10 553.91		
$33^{\circ}$	10 421.84	41 456.8	
$34^{\circ}$	10 306.58		
$35^{\circ}$	10 188.16	40 509.6	
$36^{\circ}$	10 066.62		245 282
$37^{\circ}$	9 941.99	39 512.5	
$38^{\circ}$	9 814.29		
$39^{\circ}$	9 683.56	38 466.8	
$40^{\circ}$	9 549.85		
$41^{\circ}$	9 413.17	37 373.5	228 207
$42^{\circ}$	9 273.58		
$43^{\circ}$	9 131.11	36 233.8	
$44^{\circ}$	8 985.79		
$45^{\circ}$	8 837.67	35 048.9	
$46^{\circ}$	8 686.79		209 357
$47^{\circ}$	8 533.19	33 820.2	
$48^{\circ}$	8 376.92		
$49^{\circ}$	8 218.01	32 549.1	
$50^{\circ}$	8 056.52		
$51^{\circ}$	7 892.49	31 236.9	188 865
$52^{\circ}$	7 725.96		
$53^{\circ}$	7 556.99	29 885.2	
$54^{\circ}$	7 385.63		
$55^{\circ}$	7 211.92	28 495.7	
$56^{\circ}$	7 035.91		166 877
$57^{\circ}$	6 857.67	27 069.8	
$58^{\circ}$	6 677.23		
$59^{\circ}$	6 494.67	25 609.4	
$60^{\circ}$	6 310.02		



#### 4. 《地图投影》中常用字符一览表

字符	字符说明
$a_e$	地球椭球体的长半径
$b_e$	地球椭球体的短半径
$f_e$	地球椭球体的椭圆扁率
$e_1$	地球椭球体的第一偏心率
$e_2$	地球椭球体的第二偏心率
$\lambda$	地理经度(或经差)
$\varphi$	地理纬度
$M$	子午圈曲率半径
$N$	卯酉圈曲率半径
$\bar{R}$	平均曲率半径
$r$	纬圈半径(或微分圆半径)
$R$	地球球体半径
$S_m$	经线弧长
$S_n$	纬线弧长
$\mu$	任一方向线之长度比
$v_\mu$	长度变形
$m$	经线长度比
$n$	纬线长度比
$\theta$	经纬线交角投影后之角度
$\varepsilon$	经纬线交角投影后之角度与 $90^\circ$ 之差
$a$	极大长度比
$b$	极小长度比
$\beta$	微分圆半径与 $X$ 轴之交角(方向角)
$\beta'$	微分圆半径与 $X$ 轴之交角的投影
$\omega$	最大角度变形
$P$	面积比

续表

字符	字符说明
$v_p$	面积变形
$\alpha$	方位角
$Z$	天顶距
$\rho$	纬圈(等高圈)投影之半径
$\delta$	两经线经差投影后之夹角
$\mu_1$	垂直圈长度比(用于非正轴投影)
$\mu_2$	等高圈长度比(用于非正轴投影)
$c$	圆柱投影常数
$D$	经长(渐长纬度)
$\sigma$	圆锥投影常数(比例系数)
$\gamma$	子午线收敛角
$a_L$	月球通过赤道与零子午线交点的半轴长
$b_L$	与月球平均天平动轴一致的半轴长
$c_L$	对 $a_L$ 与 $b_L$ 互相垂直的半轴长
$f_{\max}$	月球最大扁率
$f_{\min}$	月球最小扁率
$e_L$	月球第一偏心率
$e'_L$	月球第二偏心率
$R_L$	视月球为球体的半径
$u$	伪圆柱投影中纬度的函数
$h$	经线长度比(用于空间地图投影)
$k$	纬线长度比(用于空间地图投影)
$\lambda'$	转换经度
$\varphi'$	转换纬度
$i$	卫星轨迹与赤道的交角
$\lambda_i$	视在经度
$\psi$	卫星地面轨迹的投影与 $X$ 轴之交角

# 参 考 文 献

- 1 J. A. Steers 著,褚绍唐译. 地图投影法. 上海亚光舆地学社,1943
- 2 叶雪安. 地图投影. 上海:龙门联合书局,1953
- 3 M. Д. 索洛维耶夫著,李连珠译. 数学制图学实习材料. 北京:测绘出版社,1955
- 4 H. A. 乌尔马耶夫著,李连珠译. 数学制图学. 北京:测绘出版社,1956
- 5 方俊. 地图投影学(第一册). 北京:科学出版社,1957
- 6 前苏联中央测绘科学研究所编,刘文庆译. 制图用表. 北京:测绘出版社,1958
- 7 吴忠性. 数学制图学. 北京测绘学院,1962
- 8 黄国寿. 地图投影. 中国工业出版社,1962
- 9 胡毓钜. 数学制图学. 中国工业出版社,1964
- 10 武汉测绘学院地图制图系编. 小比例尺地图投影集(一). 北京:测绘出版社,1978
- 11 方炳炎. 地图投影学. 北京:地图出版社,1978
- 12 吴忠性. 地图投影. 北京:测绘出版社,1980
- 13 孙达. 地图投影(讲义). 南京大学地理系,1980
- 14 胡毓钜,龚剑文,黄伟. 地图投影. 北京:测绘出版社,1981
- 15 黄国寿. 地图投影. 北京:测绘出版社,1983
- 16 吴忠性,胡毓钜主编. 地图投影论文集. 北京:测绘出版社,1983
- 17 金应春,丘富科. 中国地图史话. 北京:科学出版社,1984
- 18 龚剑文,胡毓钜. 地图投影图集. 北京:测绘出版社,1985
- 19 黄国寿. 空间斜墨卡托(SOM)投影. 中国测绘学会地图生产管理学术讨论会论文选集,1987
- 20 吴忠性、杨启和. 数学制图学原理. 北京:测绘出版社,1989
- 21 吴忠性. 地图投影学与地图学论文集. 中国地图出版社,1993
- 22 任留成. 空间投影理论及其在遥感技术中的应用. 北京:科学出版社,2003
- 23 刘家豪,李国藻. 伪方位投影及其对中国全图的应用. 测绘学报,1963,6(2)

- 24 John. P. Snyder 著,王兆彬译. 卫星轨迹地图投影. 海洋测绘,1982(1)
- 25 王近仁. 温克尔(Winkel)投影剖析. 南京师范大学学报,1985(2)
- 26 方炳炎,王桥,胡毓钜. 地图投影的坐标变换. 地图,1994,(1):47~52
- 27 方炳炎,王桥,胡毓钜. 地图投影的坐标变换. 地图,1994,(2):34~36
- 28 方炳炎,王桥. 地图投影的坐标变换. 地图,1994,(3):56~59
- 29 方炳炎,王桥. 地图投影的坐标变换. 地图,1994,(4):58~65
- 30 乔俊军. 正弦经线等面积伪圆柱投影族的研究. 地图,1994,(4):30~34
- 31 张明席,朱应珍. 地图投影及其屏幕作图方法. 河南气象,1995,(2):  
35~38
- 32 赵琪,张志宏,任留成. 空间信息高速公路和地图投影. 地图,1999,(4):  
1~4
- 33 任留成,吕泗洲,吕晓华. 地图投影学科性质的演变. 地图,2001,(1):  
1~2
- 34 颜耀文. 地图投影在地理信息系统中的应用. 东北测绘,2001,24(4):  
21~25
- 35 刘宏林,吕晓华,安敏. 透视圆锥投影的研究. 测绘学院学报,2001,18  
(4):300~302
- 36 吕晓华,刘宏林. 地图投影数值变换方法综合评述. 测绘学院学报,  
2002,19(2):150~153
- 37 王清华,鄂栋臣,陈春明,周春霞. 南极地区常用地图投影及其应用. 极  
地研究,2002,14(3):226~233
- 38 任留成,杨晓梅,赵忠明. 空间墨卡托投影研究. 测绘学报,2003,32(1):  
78~81
- 39 张国坤. 关于微分圆投影变成变形椭圆的分析与研究. 测绘科学,2004,  
29(3):14~15
- 40 滕骏华,孙美仙,历冬玲. 牛顿迭代法在海图与地形图坐标相互转换中  
的应用. 东海海洋,2004,22(2):1~8
- 41 滕骏华,孙美仙,黄韦良. 地图投影反解变换的一种新方法. 测绘学报,  
2004,33(2):179~185
- 42 张家立. 地图投影——地图“大厦”的根基. 地图,2005,(3):56~59
- 43 A. B. Граур. Математическая Картография. Издательство Ленинградского  
Университета, 1956
- 44 Par R. Cuenn. Cartographie Générale. Tome 1. éditions Eyrolles,  
1972

- 45 Peter Richardus, Ron K. Adler. Map Projections. North-Holland, 1972
- 46 John P. Snyder. Map Projections Used by the U. S. Geological Survey. Washington: U. S. Government Printing Office, 1982
- 47 Pearson Frederick. Map Projections: Theory and Applications. Florida: CRC Press Inc. 1990
- 48 John P. Snyder. The Space Oblique Mercator Projection. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1978, 44(5): 585~596
- 49 John P. Snyder. Map Projections for Satellite Tracking. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. V. xlv11 No. 2, 1981
- 50 Allison D. MAPPRO: a program for processing the projection of latitude—longitude coordinates into rectangular map coordinate systems. Computers and Geosciences. 1995, 21(7): 859~875
- 51 Williams R. T. Lambert and Mercator map projections in geology and geophysics. Computers and Geosciences. 1995, 21(3): 353~364
- 52 Vitek J. D. , Giardino J. R. , Fitzgerald J. W. Mapping geomorphology: a journey from paper maps, through computer mapping to GIS and virtual reality. Geomorphology. 1996, 16(3): 233~249
- 53 Brainerd J. and Pang A. Interactive map projections and distortion. Computers and Geosciences. 2001, 27(3): 299~314
- 54 Mulcahy K. A. and Clake K, C. Symbolization of map projection distortion; a review. Cartography and Geographic Information Science. 2001, 28(3): 167~181
- 55 Usery E. L. and Seong J. C. All equal—area map projections are created equal, but some are more equal than others. Cartography and Geographic Information Science. 2001, 28(3): 183~193
- 56 Bildirici I. O. Numerical inverse transformation for map projections. Computers and Geosciences. 2003, 29(8): 1003~1011
- 57 Berthoud M. G. An equal—area map projection for irregular objects. Icarus. 2005, 175(2): 382~389