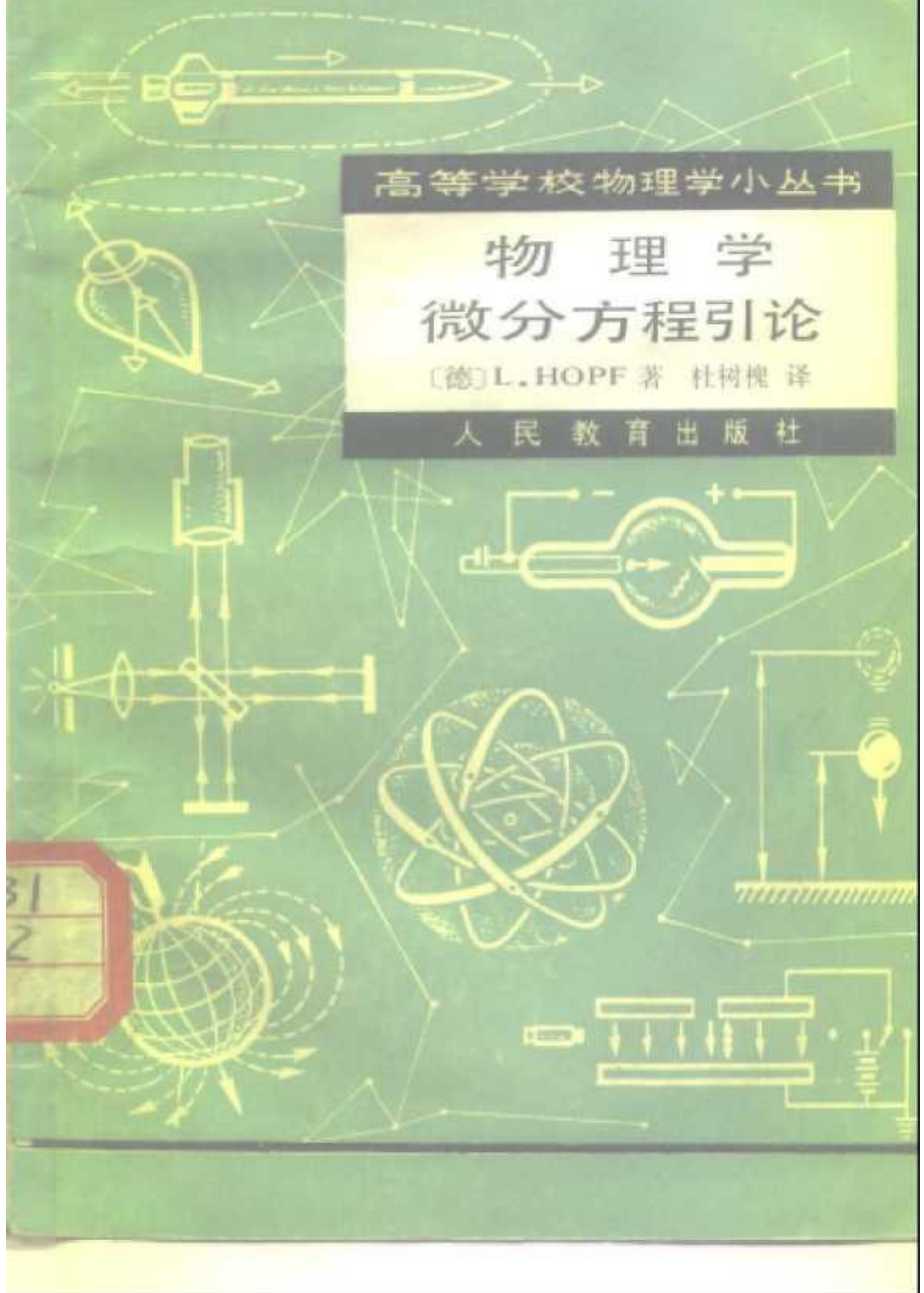


高等学校物理学小丛书

物理学
微分方程引论

〔德〕L. HOPF 著 杜树槐 译

人 民 教 育 出 版 社



53.31

22

高等学校物理学小丛书

物理学 微分方程引论

〔德〕L. Hopf 著

杜树槐 译



人民教育出版社

1110592

DS85/21
内 容 简 介

本书是根据〔德〕L.Hopf原著的 W.Nef 英译本《Introduction to the Differential Equations of Physics》翻译的，这是欧美广为流传的一本小书，为美国著名的《伯克利物理学教程》的参考读物，虽然篇幅不多，却较为全面地论述了各种物理问题，并建立了相应的常微分方程或偏微分方程，内容精炼，深入浅出，易于自学。书中通过各种典型实例，不仅给出了这些问题的分析计算方法，而且指明了各种数学关系的物理意义，使数学工具与物理概念较好地结合起来。对于学习物理学中的微分方程的读者来说，这是一本较好的入门书，可供理工科大学师生和具有初步微积分基础的读者学习参考。全书共分七章，前四章着重于物理学的各种微分方程的分析与建立过程，后三章则通过各种典型实例，给出了方程的各种解法。

高等学校物理学小丛书

物理学微分方程引论

〔德〕L.Hopf 著

杜树槐 译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂 印装

开本 787×1092 1/32 印张 4.5 字数 93,000

1981年10月第1版 1982年12月 第1次印刷

印数 00,001—10,700

书号 13012·0685 定价 0.49 元

英译本出版说明

从物理学家和工程师的观点来看，这是一本优秀的数理常微分方程和偏微分方程的入门参考书。书中的基本数学概念和方法是通过紧密联系历史上的物理问题引出的。它主要强调直观方面，而不着重数学推演的形式。由此，作者成功地使读者直接地理解问题，这些问题所涉及的内容远远超出了本书所预期的范围。

另外，学习本书只需有初步的微积分知识，不必先具有更高的数学基础。所以，特别适合于自学。书中通过作者采取的典型方式，引出了矢量运算和分析的基本概念，而不是把这些内容编入预备性章节或附录。作者在讨论问题的过程中自然而然地逐步引入了这些概念。

目 录

第一章 自然定律的微分方程表达式	(1)
1. 因果律	(1)
2. 常微分方程和偏微分方程	(2)
3. 初始条件和边界条件	(3)
4. 标量与矢量	(3)
第二章 质点力学的常微分方程	(5)
1. 质点的运动	(5)
2. 自由落体	(7)
3. 抛射体的轨道	(9)
4. 摩擦	(10)
5. 行星的运动	(12)
6. 能量	(13)
7. 动量矩	(16)
8. 质点系	(19)
9. 动量定理 (质心的运动)	(20)
10. 动量矩定理	(20)
11. 能量定理	(22)
12. 振动方程	(23)
13. 阻尼振动	(26)
14. 受迫振动	(27)
15. 耦合振动	(30)
16. 摩擦耦合	(32)
17. 稳定性	(33)

第三章 最简单的偏微分表达式	(35)
1. 梯度	(35)
2. 柱面坐标和球面坐标	(37)
3. 矢量场	(38)
4. 散度	(39)
5. 散度的数学表达式	(40)
6. 实例和高斯定理	(43)
7. 旋度	(43)
8. 旋度的物理意义	(46)
9. 旋度的数学表达式	(47)
10. 梯度的散度和旋度	(50)
11. 旋度的散度和旋度	(51)
12. 算符 Δ 的物理意义	(52)
第四章 物理学中最简单的偏微分方程	(54)
1. 势方程	(54)
2. 热传导方程	(55)
3. 波动方程	(57)
4. 理想流体的微分方程	(57)
5. 涡旋	(59)
6. 势流	(62)
7. 电动力学的微分方程	(63)
8. 实物中的场方程	(65)
9. 能量定理	(66)
10. 电磁波	(67)
11. 电磁势	(69)
12. 边界条件	(70)
第五章 用本征函数求解	(72)
1. 乘法	(72)

2. 例: 稳恒热流	(73)
3. 傅里叶级数	(75)
4. 例	(78)
5. 弦的振动	(79)
6. 推广	(82)
7. 格临定理和正交性	(85)
8. 笛卡儿坐标中的特解	(86)
9. 柱面坐标中的特解	(87)
10. 球面坐标中的特解	(89)
11. 用级数展开解常微分方程	(92)
12. 渐近展开式	(97)
13. 例: 具有柱对称的热流	(98)
14. 圆环的电势	(101)
15. 例: 带电的半球面	(103)
16. 例: 波的传播	(104)
17. 傅里叶积分	(105)
第六章 用换元法求解	(108)
1. 波的传播	(108)
2. 二维势问题	(110)
3. 等势线和流线	(111)
4. 保角映射	(114)
5. 例	(116)
第七章 用奇异点求解	(120)
1. 源	(120)
2. 正源和负源的迭加	(121)
3. 满足边界条件	(122)
4. 用格临定理求解	(124)
5. 热源	(126)

6. 闪光	(127)
7. 转变为积分方程	(129)
汉英对照索引	(131)

第一章 自然定律的微分 方程表达式

1. 因果律

任何微分方程都是表达导数之间或导数与变量的某种函数之间的关系式。因此，有了它就可以确定某些量的增量与这些量本身之间的关系。微分方程的这一特性使它成了因果律原理的自然表达式，而因果律原理则是精确的自然科学的基础。古代希腊人建立了一些自然定律，其中各数目间的一定关系（球的谐和），或物体某些形状起了特殊的作用。他们曾假定定律是关于某个全过程或某个物体完整形状的叙述。在近代（伽利略、牛顿等人），则采用了不同的概念。我们并不试图直接建立一个过程所有各阶段（或状态）之间的关系式，而是想把过程的一个阶段（或状态）和下一个阶段（或状态）联系起来。这一类定律可以表示某个状态在最近的将来要如何演变，也可以描述一个质点的状态对邻近质点的影响。这样，我们就有了根据时间和空间的微小差别（用数学语言，即所谓“无限小”）来描述自然定律的程序。定律中涉及的增量是以导数（即用以描述过程的变量的增量除以发生这一演变的空间或时间的增量得到的商取极限）的形式出现的。这种形式的自然定律就是一个状态（在时间或空间上）和邻近状态之间关系的表达式。所以它代表了因果律原理的一种特殊形式。

2. 常微分方程和偏微分方程

一个微分方程如果仅有一个独立变量，就叫做常微分方程；如果有几个独立变量，则称为偏微分方程。在常微分方程中，只出现普通导数；而偏微分方程，则包含偏导数。这两类微分方程间的差别，从物理学的观点来看更为显著，它涉及到最深刻的物理问题。关于物理过程，存在着两种根本不同的概念，物理学理论即以这些概念为基础。第一种观点认为：物质由单个粒子组成，这些粒子在空间运动，不发生改变。而每个粒子的位置作为时间的函数是可以确定的。在所有的过程中，时间是唯一的独立变量。这个观点是牛顿力学和原子论的依据，原子论也是把基本粒子的运动看成是所有物理过程的唯一基础。因为常微分方程只有时间这个独立变量，所以，它是这一类定律的数学表达式。

第二种观点是：在物理学特别是在电磁学和光学领域里用到的场论。在这一理论中，所有过程都是通过场量来确定的，场量在空间的每一点都有确定值，这个值通常是时间的函数。于是，我们有四个独立变量（三个空间坐标和时间），建立在这个概念基础上的定律用偏微分方程来表达。

常微分方程和偏微分方程就是这样两种基本观点的数学表达式，两者在量子理论中的综合是现代物理学中一个重要的问题。

不过，常微分方程也可能出现在与原子论毫无关系的物理问题中。例如，也出现在电振荡理论或梁弯曲理论中。但是，在这些场合下，常微分方程并不是任何基本定律的直接表达式，而只是除了一个变量以外，忽略了所有其它变量影

响的一个近似式。

3. 初始条件和边界条件

单靠微分方程还不能表达一个特定的物理问题。微分方程所表达的只是我们研究的普遍定律，并非表示特定情况。一个特定的情况是由初始条件或边界条件来确定的。任何一个积分都包含一任意常数，而偏微分方程的积分，却包含着任意函数。为了用数学形式完整地表述这个问题，并解出微分方程，必须给出数目与被积方程的积分中任意函数或任意常数的个数相同的物理学边界条件。以后，我们要始终注意关于这些条件的必要个数。

4. 标量与矢量

用来描述一个物理量或物理过程的数学量是各种各样的，这些数学量的差别主要在于确定它们所需数值的个数。如果一个量仅由一个数就能完全确定，这个量就叫做标量（如：温度、密度、时间等）。当然，在我们确定这个单一的数量之前，必须选定单位制。

空间中一点的位置，则不能只用一个数来确定。因为空间是三维的，所以，必须给定三个数来确定这个点的位置。确定这三个数的方式是不重要的，它们可以是直角坐标系中一个点的坐标，也可以是从坐标原点到这个点的距离和确定由原点到此点方位的另外两个数。但是，在任何情况下，我们都必须用三个数来确定一个点在空间中的位置。有很多量

也可以用三维空间中的一个线段来表示。例如，图解静力学问题中的力。任何需要用三个数来确定的量就叫做矢量。

还有很多复杂的物理量要由三个以上的数来确定（如：弹性体中的应力和应变，每个量都要由六个数来确定），这种量叫做张量。在一般的张量理论中，矢量是一阶张量，而标量为零阶张量。在现代物理学中，还有一些量要用四维空间中的线段来表示，它们叫做四维矢量。此外，还有四维张量等等。我们这里只用到标量和三维的矢量。

由于本书的篇幅所限，不允许我们涉及到更加深入的物理学专门问题。因此，这里连波动力学和相对论的最基本内容也不能予以介绍。在这本书中，我们只用微积分中的基本定理作为工具，并力争将物理概念和数学方程的建立紧密联系起来。作为进一步学习的基础，我们建议大家阅读：Ph. Frank 和 R. Von Mises 所著的《力学和物理学的微分方程与积分方程》（Ph. Frank and R. Von Mises: Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik）^①。

^①第二版，影印。M. S. Rosenberg, 1945年出版于纽约。

第二章 质点力学的常微分方程

1. 质点的运动

力学的基本单元是质点，其物理特性可以用它的质量 m 和它在空间中的位置来完全确定。质量 m 是一个不变的标量，而质点在空间中的位置则是随时间变化的，它可以用直角坐标 x, y, z 来描述。量 x, y, z 是从坐标系原点到点 x, y, z 的矢量 r 的分量。唯一的独立变量是时间 t 。

质点的运动是由两个量来描述的。这两个量表示在很短的时间间隔内质点位置的变化，我们可以借助于取极限的方法来加以确定。首先令质点仅沿 x 轴移动，即该质点在每一时刻坐标 $y=0, z=0$ 。如果我们指定在时刻 t 时的 x -坐标为 x ，时刻 t_1 时的 x -坐标为 x_1 ，则比值(位置的差)/(时间的差) = $(x_1 - x)/(t_1 - t)$ 叫做在时间间隔 $(t_1 - t)$ 内的

“平均速度”。它的极限值 $\frac{dx}{dt}$ 叫做在时刻 t 的“瞬时速度”，或者就叫“速率” v 。速率通常不是常量，它随时间而变。如果作出比值(速率的差)/(时间的差)，并对 $(t_1 - t)$ 趋于零取极限，就可以得到“瞬时加速度”，即 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ 。

如果运动没有固定的方向，则 y 和 z 就可能不等于零。但

是，我们也可以用同样的取极限的步骤得到速度的三个分量。

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.1)$$

和加速度的三个分量

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} & a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

这样，速度和加速度也都是矢量。所以，也应当用黑体字 \mathbf{v} 和 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 来表示。

牛顿的基本定律就是由“加速度”矢量和作用在质点上的“力”矢量 \mathbf{F} 之间的关系式构成的。这条定律可以用微分方程来表示，即

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.3)$$

其分量式为

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} \left(= m \frac{dv_x}{dt} \right) &= F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z \end{aligned} \quad (2.3a)$$

本书不可能讨论所有与“力”和“质量”这些概念相关的物理学和哲学问题，我们唯一的向导是用肌肉的力量移动重物，拉长橡皮绳等等日常经验所得到的直觉知识。在这些动作里，很明显力是具有方向和大小这些矢量性质的。任何一个力都能引起质点运动速度的变化，从而使质点的位置也发生变化。这些变化是用导数表示的。所以，上述定律具有

微分方程的形式。

2. 自由落体

为了从一般的自然定律过渡到特定的情况，我们取一个仅在重力影响下的物体，这样，物体就只受重力 W 的作用。重力的作用方向总是“向下”的。如果我们把这个方向取作 y 轴的负方向，则力的三个分量是

$$F_x = 0, \quad F_y = -W, \quad F_z = 0 \quad (2.4)$$

由此我们可以得到该问题的微分方程：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -W, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (2.5)$$

现在，我们的任务是确定 x 、 y 、 z 这三个量与 t 的函数关系。为此，我们需要一些附加的信息，以便把我们所研究的特定情况与所有其它情况分开，从而确定上述方程的积分常数。

式 (2.5) 为三个二阶微分方程（即含有二阶导数的方程）。把二阶导数变换成函数的两次积分要产生两个任意常数。这样，在整个求解过程中，就会出现六个积分常数。为了确定这些常数，就需要六个给定的数值。在物理学上可以把这种情况表述为：上述定律仅与加速度有关，也就是说当一个质点有确定的加速度时，却可以有任意的速度或位置。速度和位置不确定，但它们却表征特定情况。因此，为了处理特定情况，必须给出速度和位置。这一事实在数学上用微分方程的阶数来表示，不过，如果在任一时刻给定了三个速

度分量和三个位置坐标，而它们将来的演变遵从微分方程，那么，我们就能够算出它们在任一时刻的数值。当然，这里必须预先假定微分方程是可积的。

举例来说，我们取时间 $t = 0$ 时的“初始值”为

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad y = h, & \quad z = a, \\ \frac{dx}{dt} = 0, & \quad \frac{dy}{dt} = 0, & \quad \frac{dz}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

在物理学上，这种情况意味着在 $t = 0$ 时刻，位于点 $(0, h, a)$ 处初始速度为零的质点，在只有其本身重量的影响下下落。这种质点运动就是“自由落体”。

式 (2.5) 中三个微分方程是联立的，它们含有三个未知量，并同时成立。在这种情况下，方程是很简单的，因为每个方程只包含一个未知量，而且对于初始条件来说也是这样。所以，这个数学问题可以简化为三个独立的二阶微分方程的积分。对于每个微分方程来说，有两个给定的初始条件。这时方程的通解也是简单的，它有六个积分常数，即 C_1, C_2, \dots, C_6 。积分式 (2.5) 后，可得

$$\begin{aligned} x &= C_1 t + C_2, & y &= -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4, \\ z &= C_5 t + C_6 \end{aligned} \quad (2.7)$$

式中 $g = W/m$ ，即自由落体的加速度。这些方程与微分方程

(2.5) 是等效的。如果我们取 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ ，并在所有的表达式中引入 $t = 0$ ，给出相应于式 (2.6) 的初始值，最后再求解关于六个未知量 C_1, C_2, \dots, C_6 的六个线性方程。这样，我们就可以得到方程 (2.7) 在特定情况下的解了。然而，求解

这类问题往往是很困难的。但是，在我们的这种情况下，这是个简单的问题，我们只给出其最后结果：

$$x = 0, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + h, \quad z = a \quad (2.8)$$

这些表达式及其对 t 的导数可给出质点在任一时刻的位置和速度，也给出与运动轨道有关的所有问题的数值解答。通常，物理学家的主要工作就是这样开始的，即给数学结果以物理解释。这里，由于篇幅所限，我们只限于论述问题的两个基本部分，不能讨论解的物理意义了。这两部分是：1) 把物理问题化成数学形式 [式 (2.5) 和 (2.6)]；2) 对数学方程求解 [式 (2.8)]。下面，我们再给出两个简单的实例，来说明这些步骤。

3. 抛射体的轨道

一个质点从高度为 h 处，以初速 v_0 沿与水平面成 α 角方向抛射出去，试问它将会怎样运动呢？

这一运动的微分方程与前面的式 (2.5) 是一样的。顺便说一句，大家注意到比值 W/m 对所有物体都是相同的数值，这个比值 g 就是“重力加速度”。现在我们仍选通过质点初始位置的竖直线为 y 轴，把抛射体初始速度的方向在水平面上的投影定为 x 轴。

于是，质点的初始位置（即 $t = 0$ 时的位置）为

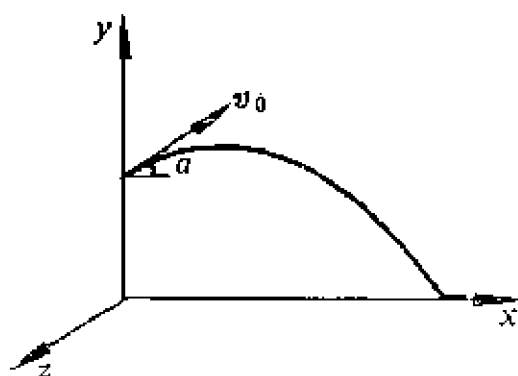


图1 抛射体的轨道

$$x = 0, \quad y = h, \quad z = 0$$

初始速度为

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha,$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

如果不考虑初始条件，解仍然和式 (2.7) 一样。用了初始条件后，可得

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos \alpha)t, & y &= -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t + h, \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

从这些公式中可以直接求出在任一时刻 t 抛射体的位置和速度。同样也可以从这些公式中求出相应于给定坐标值的时刻 t （例如，相应于 $y = 0$ 的时刻）。此外，用消去 t 的方法可以得到描述质点“轨迹”的坐标 x 和 y 之间的关系式。由这个关系式可以很容易地确定抛射体的射程、抛射高度和其它有关的数值。方程 $z = 0$ ，表示整个运动过程发生在一个平面内。

4. 摩 擦

如果以初速 v_0 沿着一条直线运动的质点受到摩擦力的作用，摩擦力的大小与物体的运动速度成比例，即等于 cv 。那么，这个运动将怎样进行呢？

我们可以把运动方向取为 x 轴，这样就只有一个微分方

程了，不过，这一次求解稍微难些。方程如下：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = -cv \quad (2.10)$$

初始条件为： $t=0$ 时， $v=v_0$ 和 $x=0$ ，现在，我们用“分离变量”法来求关于速度 v 的微分方程的解。“分离变量”法就是把方程变换成一端仅有与 v 有关的量，另一端仅有与 t 有关的量，然后对方程两端进行积分，可得

$$\frac{dv}{v} = -\frac{c}{m} dt \quad (2.10a)$$

或

$$\ln v = -\frac{c}{m} t + \text{常数} \quad (2.10b)$$

或

$$v = C_1 e^{-ct/m} \quad (2.11)$$

因为我们把式 (2.10b) 写成了指数形式，所以，积分常数 C_1 在这里是一个系数，由 v 的初始条件可得 $C_1 = v_0$ 。为了进一步积分，我们把上式写作

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-ct/m}$$

积分可得

$$x = -\frac{mv_0 e^{-ct/m}}{c} + C_2$$

由 x 的初始条件得

$$0 = -\frac{mv_0}{c} + C_2 \quad \text{或} \quad C_2 = \frac{mv_0}{c}$$

这样，结果为

$$x = -\frac{mv_0}{c} (1 - e^{-ct/m}) \quad (2.12)$$

讨论这一结果，我们可以看出，速度永远不会变成零，而物体的位置渐近地趋于点 $x = \frac{mv_0}{c}$ 。

5. 行星的运动

其实，微分方程并不总是有这样简单的形式，也不是总能用简单的积分或分离变量等等容易的方法进行计算。为此，我们再举一个质点力学的经典问题——在太阳引力作用

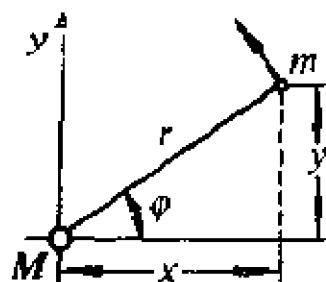


图 2 太阳和行星

下行星运动的例子。如果 M 和 m 是太阳和行星各自的质量，根据牛顿的万有引力定律有（如图 2 所示）

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

其中 G 为万有引力恒量。假定已知行星在某一时刻的位置和速度，我们选定坐标系，使太阳和 $t=0$ 时刻的行星运动方向同处于 x, y 平面内，并以太阳为原点。那么有， $t=0$ 时， $z=0, \frac{dz}{dt}=0$ 。由此可得微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{GM}{r^2} \cos \varphi = -\frac{GMx}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{GM}{r^2} \sin \varphi = -\frac{GMy}{r^3} \end{aligned} \quad (2.13)$$

而 $\frac{d^2z}{dt^2}$ 与 z 成比例，由初始条件可知，它总是等于零。这样， $r^2 = x^2 + y^2$ 。于是我们有两个联立的微分方程和四个初始条件。这两个方程与 x 和 y 的关系都是相当复杂的。因

此，用初等的解法就不行了，然而，我们仍然有求解的基本方法。下面先从普遍方程导出方程的解，以后再把它运用到行星运动这个特殊情况上来。

6. 能 量

我们首先从普遍的矢量方程

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.14)$$

出发，将方程两端同乘以矢量 \mathbf{v} ，以形成标积。我们知道，两个矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的标积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 是数量 $AB\cos\alpha$ ，其中 A 和 B 是两个矢量的长度（大小）。由此可见，标积是第一个矢量的长度和第二个矢量在第一个矢量上投影长度的乘积（见图 3）。在直角坐标中，两个矢量的标积是简单的。即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (2.15)$$

由初等微分计算可知

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right)$$

因为 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ，把乘积

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

乘以 dt ，即得到一个普遍方程

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.16)$$

这个方程就是力学中能量定理的表达式，即“动能 $mv^2/2$ 的增量等于力 \mathbf{F} 在对应的轨道元 $d\mathbf{r}$ 上所作的功”。如果 \mathbf{F} 仅与位置有关（与速度无关），这个方程就可以直接进行积分。

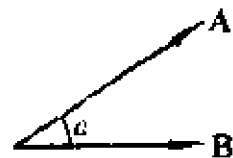


图 3 两个矢量的标积

在这种情况下，积分—— $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (包含一个任意常数) 叫做质量 m 在积分上限那一点处的“势能”。这个势能等于质点从任意起点移到我们所研究的点 \mathbf{r} 时克服力 \mathbf{F} 所作的功。于是，能量定理就可以表示为这样简单的形式：“在运动的全过程中，势能和动能的总和为一个常数”。

从这个积分我们可以得到一个既不出现时间，也不出现二阶导数，只有一阶导数 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ 的关系式。

在上述的行星运动实例中，如果将式 (2.13) 的第一个方程乘以 dx/dt ，第二个方程乘以 dy/dt ，二者相加，就可以得到与式 (2.16) 同样的结果，即

$$\begin{aligned} d\left\{\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\right\} \\ = -\frac{GMm}{r^3}(x dx + y dy) \end{aligned} \quad (2.17)$$

上式中 $(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2$ 就是速度 (由两个速度分量构成) 的平方，可以用 v^2 来表示。

这个方程是可积的。我们取对应 $t = 0$ 的值 (用下标“0”来表示) 作为下限，则得

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) &= -GMm \left[\int_{x_0}^x \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{y_0}^y \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right] \\ &= GMm \left[\frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

$$= GMm \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] \textcircled{1}$$

或写作

$$\frac{m}{2} v^2 - G \frac{Mm}{r} = \frac{m}{2} v_0^2 - G \frac{Mm}{r_0} \quad (2.18)$$

这样，对应于每个位置我们都可以知道行星所应具有的速度值。不过，速度的方向是未知的。而且，由此也不能得到有关行星怎样随时间运动的任何数据。

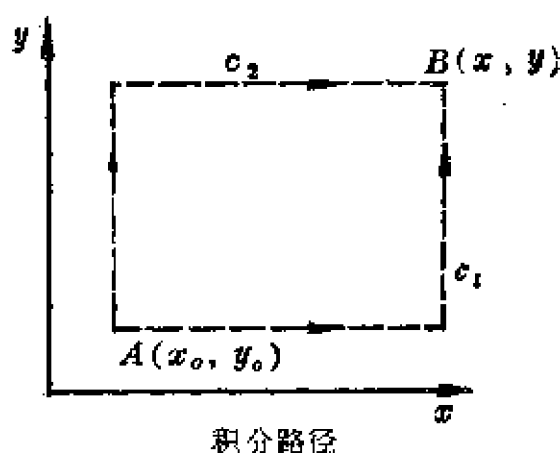
这里，值得注意的是式 (2.18) 只包含一阶导数 $[v^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]$ ，而不包含二阶导数。因此，它仅是一阶方程。

①在第一个积分中把 y 看作常数 y_0 ，第二个积分中把 x 看作常数 x_0 。
——作者注

原注有误。实际上函数满足：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

所以由 A 点到 B 点的积分与积分路径无关〔如图右所示〕。如果沿路径 c_1 积分，式右端第一个积分中 y 应取为 y_0 ，第二个积分中 x 应取为积分的上限 x_1 。如沿路径 c_2 积分，第一个积分中 y 应取为积分的上限，而第二个积分



中 x 应取为 x_0 。事实上 $x dx + y dy$ 可以写为 $x dx + y dy = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr$ ，而 $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2$ ，把它们代入式 (2.17)，即可得式中的结果

$$\frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) = -GMm \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = GMm \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] \quad \text{——译者注}$$

7. 动 量 矩

我们可以用同样方法求出仅有一阶导数的牛顿方程的一次积分，即将微分方程

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

乘以 \mathbf{r} 求其矢积，应当指出，矢量 \mathbf{r} 的原点虽然是任意的，但是，这个点必须固定。

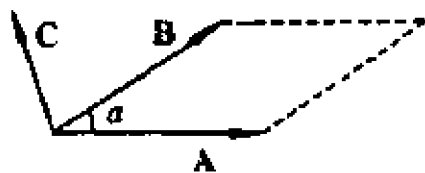


图 4 两个矢量的矢积

矢积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 数值上等于图 4 所示的平行四边形面积，即为 $AB \sin \alpha$ 。这个平面在空间的方位可以用两个角来表示，所以，

与矢量类似的矢积可以用三个数值来确定。选择这三个数的最简单方法是取平行四边形在三个垂直面上投影的面积。因为矢积可以用三个数来确定，所以，它也可以用一个矢量来表示（然而它不是矢量）^①。对于这种表示方法，我们取一个垂直于平行四边形的矢量 \mathbf{C} ，其长度在数值上等于平行四边形的面积，其方向则遵从 \mathbf{A} ， \mathbf{B} ， \mathbf{C} 所构成的右手坐标系规则。因此， $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ 。它的三个直角坐标分量是

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

①严格说来， $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 不是一个矢量，而是一个“伪矢量” (pseudo-vector)。因为，当由右手坐标系变换到左手坐标系时， $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的变换和一个真正矢量的变换不同。事实上，当 $x \rightarrow -x$ ， $y \rightarrow -y$ ， $z \rightarrow -z$ 时，矢量 (A_x, A_y, A_z) 的三个分量变换后成为 $(-A_x, -A_y, -A_z)$ ，但矢积 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的三个分量 C_x, C_y, C_z 变换后仍然是 (C_x, C_y, C_z) 。
——译者注

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z.$$

用这一表示法，我们得到

$$\mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2.19)$$

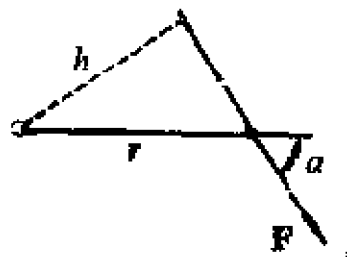


图5 力矩

右边的表达式叫做力 \mathbf{F} 对于原点的“矩”。由图5可知 $h = r \sin \alpha$ ，它说明了“矩”的上述定义和由原点到力的方向引垂线来确定“矩”的通常定义之间的关系。^①

式(2.19)中左边的表达式可以用下式来变换：

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

因为 $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ ，而任何矢量与它自己的矢积等于零 ($\alpha = 0$)，故由式(2.19)可得

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2.20)$$

量 $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ 叫做质点对于原点的“动量矩”。由此可知，动量矩对时间的导数等于力矩（原点可取在任何位置）。我们只要在选取原点时，使力矩化作简单的表达式，比方说，使它等于零，就可以用上述定理进行积分。这对所有的“有心力”都是可以做到的。“有心力”就是在任何位置总是指向一个固定点的力。如果把这个固定点取作原点，则在整个空间内力矩就等于零。若取太阳为原点，那么我们前面研究过

^①原文中力矩和动量矩的矢量式分别写作 $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ 和 $m\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ 。这种写法与常用习惯写法不符，为了和通常用法一致，译文已作更改，下同。另外，力矩的通常定义为力 F 和力臂 h 的乘积，即数值上等于 $Fh = Fr \sin \alpha$ 。——译者注

的行星运动问题就可作为一个例子。如果我们把方程(2.13)写成坐标系中矢量相乘的形式，就可以从形式上论证这一点。现在，我们将式(2.13)中上面的方程乘以 y ，把下面的方程乘以 x ，使两式相减。我们发现，右边两部分恰好互相抵消。这个结果在物理学上就意味着矩等于零。于是，我们得到

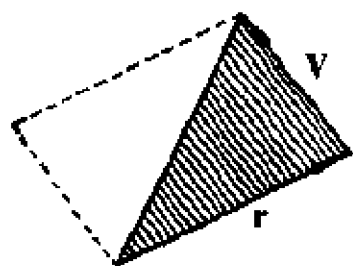


图 6 用面积表示矢积

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0$$

通过简单的变换，则得

$$m\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0 \textcircled{1}$$

由此我们有动量矩

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \text{常数} \quad (2.21)$$

这样，我们又得到一个仅含一阶导数的运动方程的积分。方程中的矢积等于速度矢量和太阳到行星的矢径所构成的平行四边形的面积，即等于单位时间内动矢径所扫过的三角形面积的两倍。这就是开普勒第二定律。于是，我们就证明了这一定律是力矩普遍定理的一个结果。开普勒第二定律告诉我们：“运动的矢径在相等的时间内扫过相等的面积”。

借助于这两个普遍定理（即能量定理和动量矩定理——译者），我们把方程(2.13)变成了较为简单的方程(2.18)

①此式和上式原文为

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}y - \frac{d^2y}{dt^2}x\right) = 0 \text{ 和 } m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}y - \frac{dy}{dt}x\right) = 0$$

更改原因同前，以后此类更改不再注明。

——译者注

和 (2.21)。由这两个方程, 我们还可以进一步用积分求出另外两个开普勒定律。不过, 这两个定律都不具有普遍的性质, 它们仅适用于特定的情况。因此, 我们就不去研究它们了。

8. 质 点 系

现在, 我们从单个质点的力学问题过渡到几个质点的力学问题。这些质点同时受到外力和内力的作用, 内力代表系统内各质点间的相互影响, 它只能成对出现, 即两个相互作用的内力大小相等, 方向相反。因此, 不仅是点 1 对点 2 的作用力 J_{12} 和点 2 对点 1 的作用力 J_{21} 大小相等、方向相反, 而且它们对于任意点的力矩也是大小相等、方向相反。这样一个由 n 个质点组成的系统的运动可以用力 and 加速度的 n 个矢量方程, 或者用它们的 $3n$ 个分量方程来表示。即

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{J}_{12} + \mathbf{J}_{13} + \cdots + \mathbf{J}_{1n} \\ m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{J}_{21} + \mathbf{J}_{23} + \cdots + \mathbf{J}_{2n} \\ &\dots\dots\dots \\ m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} &= \mathbf{F}_n + \mathbf{J}_{n1} + \mathbf{J}_{n2} + \cdots + \mathbf{J}_{n, n-1} \end{aligned} \quad (7.22)$$

J_{1n} 的意义和它们之间的关系如图 7 所示。对于外力来说, 虽然也对应着同样大小的反作用力。但是, 由于这些反作用力作用在系统外的点上, 所以, 我们不必考虑

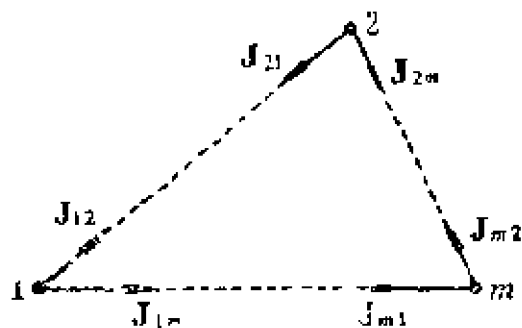


图 7 内 力

它们。另外，力学系统在空间的界限是任意的，因而内力和外力之间的区分也是任意的，可按实际情况考虑区分。为了对方程组 (2.22) 进行积分，我们必须想法消去内力。没有内力的积分就表示下述质点系力学的主要定理。

9. 动量定理 (质心的运动)

如果我们把式 (2.22) 的所有方程都加在一起，由于 J_{lm} 是成对的等值反向力，它们将会相互抵消。这样，相加后的矢量方程为：

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1 + \dots + m_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_n \quad (2.23)$$

乘积 $m_i \mathbf{v}_i$ 叫做质点 i 的“动量”，所有外力的矢量和叫做外力的“合力”，而所有动量的矢量和叫做系统的“总动量”。力学的“动量定理”就包含在方程 (2.23) 中，该方程对于一个质点来说，相当于单个质点的牛顿方程，即“总动量对时间的导数与外力的合力大小相等，方向相同”。我们引入一个和整个系统有同样质量和动量的理想的点，这个点就叫做“质心”^①，它的方程与所有外力同时作用在一个质点上的方程一样。

10. 动量矩定理

应当指出，内力的力矩也是成对出现，而且大小相等，

^①这里和标题 9 原文均为“重心”，按一般用法，这样的点应为“质心”。
——译者注

方向相反。因此，如果我们将方程组 (2.22) 分别乘以从任意原点到每一点的矢径 r_1, r_2, \dots ，以形成矢积，并把这些方程加起来，那么我们就得到一个没有内力的矢量方程，即，

$$\begin{aligned} & m_1 \left(r_1 \times \frac{dv_1}{dt} \right) + \dots + m_n \left(r_n \times \frac{dv_n}{dt} \right) \\ &= r_1 \times F_1 + \dots + r_n \times F_n \end{aligned}$$

这里如果我们也象第 7 节那样进行变换，就得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (r_1 \times m_1 v_1 + \dots + r_n \times m_n v_n) \\ &= r_1 \times F_1 + \dots + r_n \times F_n \end{aligned} \quad (2.24)$$

即“质点系总动量矩对时间的导数等于外力的合力矩”，这就是质点系的“动量矩定理”。

下面是一个简单而又重要的特殊情况。一个由任意数目的质点所组成的刚性系统，可绕固定轴转动（如果系统内所有质点相互间的距离是不变的，这个系统就是刚性的）。这里，相应于式 (2.24) 的三个分量方程中，只有垂直于轴的平面内的分量方程是重要的。设从轴到第 n 个点的距离为 r_n ，转动的角速度为 ω ，则第 n 个点的速度为 $r_n \omega$ 。因为在刚体绕定轴转动时，速度矢量总是垂直于 r 。所以， $r \times v = r^2 \omega$ 。由此，可以将方程 (2.24) 简化为

$$\frac{d}{dt} (\omega \sum m_n r_n^2) = M$$

其中 M 是外力对轴的力矩。总和 $\sum m_n r_n^2$ 叫做惯性矩，用 I 表示（又称为转动惯量——译者注），于是，这一方程就变成与牛顿方程 (2.3a) 类似的方程了，即有

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \quad (2.25)$$

另外，如果我们取转角为变量，它对时间的导数等于角速度，则上式又可写作

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M \quad (2.25a)$$

(2.23) 和 (2.24) 这两个定理是牛顿原理的一般结论，也就是说，它们是一个质点的运动方程 (2.3) 和每个力都对应着一个大小相等，方向相反的反作用力这一定律的一般结论。因此，它们是普遍适用的。

11. 能量定理

然而，方程组 (2.22) 相应于前述定理的积分却没有这样普遍的意义。如果我们把方程组 (2.22) 中的每一个方程都乘以对应的速度（取标积），并把它们加起来，就可以得到起源于内力的表达式 $J_{12} \cdot v_1 + J_{21} \cdot v_2$ 等。把矢量 v_1 和 v_2 投影到 J_{12} 和 J_{21} 的方向上，如果两个投影等值反向，

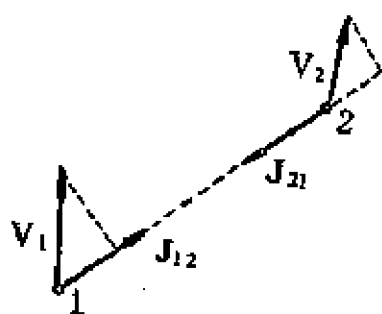


图 8 内力做功

即运动中两点间距离不变，那么就可以看到上述的和等于零。 v_1 和 v_2 垂直于线段 m_1m_2 的分量和线段 m_1m_2 的方向都是可以改变的。这样，仅当点与点之间的相互距离为常数，即系统为刚性系统时，我们才能得到一个与内力无关的能量定理。

在这种情况下，就得到了一个与前述式 (2.16) 相应

的关系式。

$$\begin{aligned} d\left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2}\right) \\ = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r}_n \end{aligned} \quad (2.26)$$

即“一个刚性力学系统的总动能的增量等于外力的总功”。如果力仅为位置的函数，那么这个方程和式 (2.16) 一样，可以容易地进行积分。相反，若系统不是刚性的，那么内力做功就必须考虑。这时，这个定理往往就不那么容易计算了。

不过，大多数力学问题是可以借助于上述三个运动定理中的一个定理或几个定理求解的。在某些情况下（例如，对于刚体或单纯的转动等等），问题可以被简化。但是，在这里研究更进一步的例子是不合适的，因为我们不会由此取得任何更进一步的关于微分方程的建立和求积分的经验，而只是多学习到一些物理问题而已。然而，有一个问题属于例外情况，因为它不仅为我们提供了一个解决问题的直接方法，而且还是一个最重要的实际问题。这就是下面要介绍的振动理论。

12. 振 动 方 程

当一个系统移动后，有一个外力总是趋于把它拉回平衡位置时，这个系统就会发生振动。在振动中，如果恢复力的强度与系统离开平衡位置的距离（即位移）成比例时，这种振动就具有最简单的形式（谐振动）。

我们首先研究一个质点的情况（见图 9）。这个质点可

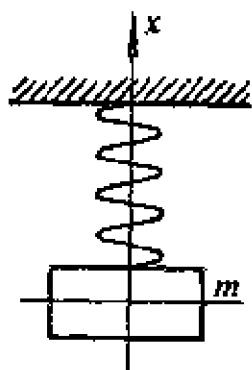


图9 挂在弹簧上的物体

沿 x 轴运动,并在弹簧恢复力的作用下,回到平衡位置。设弹簧的重量不计,恢复力 $F_x = -cx$ 。那么,它的运动情况可以用下面的微分方程来表示:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx \quad (2.27)$$

为了精确地定出质点的运动情况,

我们还需要有质点的初始位置和初始速度这两个给定值。比方说,若最初使质点偏离平衡位置,而后在没有任何初始速度的情况下释放,那么,

当 $t = 0$ 时, 则有 $x = x_0$ 和 $\frac{dx}{dt} = 0$ 。在另一情况下, 如果

位于平衡位置的质点, 于 $t = 0$ 时受到一个打击。那么, 对

于这一时刻则有 $x = 0$ 和 $\frac{dx}{dt} = v_0$ 。不过, 在这个实例中, 我

们不借助于初始条件, 仅从微分方程本身也能求出运动的极为重要的特性。

微分方程 (2.27) 是齐次线性的, 即在每一项中所含的未知量 x 或它的导数的幂次都是相同的 (这里都是一次)。这类微分方程, 用指数函数 (对任意阶, 任意个未知数) 可以直接积出来, 其解可以由下式给出:

$$x = Ae^{\alpha t} \quad (2.28)$$

其中 A 是任意的积分常数, 而常数 α 可由微分方程确定。因为微分方程是齐次线性的, 所以任意多个这样的解都可以相加, 其和仍是方程的解。由方程的阶数可以确定它的独立解的个数和必要的积分常数的数目 (在我们这种情况下是两

个)，也可以确定所有的 α 值。如果把式 (2.28) 代入式 (2.27)，则得

$$m\alpha^2 Ae^{\alpha t} = -cAe^{\alpha t}$$

这是一个关于 α 的代数方程，因为我们在等式两端可以各除以指数因子，代数方程的次数由微分方程的阶数而定，于是，恰好得到了解的必要个数，在我们的情况下有

$$\alpha = \pm i \left(\frac{c}{m} \right)^{1/2}$$

因此
$$x = Ae^{i \left(\frac{c}{m} \right)^{1/2} t} + Be^{-i \left(\frac{c}{m} \right)^{1/2} t} \quad (2.29)$$

应用熟知的公式（一般称为欧勒公式——译者）

$$e^{\pm iy} = \cos y \pm i \sin y \quad (2.30)$$

我们可以把式 (2.29) 改写成如下形式

$$\begin{aligned} x &= (A+B)\cos\left(\frac{c}{m}\right)^{1/2} t + i(A-B)\sin\left(\frac{c}{m}\right)^{1/2} t \\ &= C\cos\left(\frac{c}{m}\right)^{1/2} t + D\sin\left(\frac{c}{m}\right)^{1/2} t \end{aligned} \quad (2.31)$$

因为方程的解必须为实数，所以 C 和 D 应当是两个实常数，它们可以很容易地由初始条件确定出来。

三角函数表示振动，振动的“频率”（在 2π 个时间单位内振动的次数）^① 是 $\nu = \left(\frac{c}{m} \right)^{1/2}$ ，而“周期”是 $T = 2\pi(m/c)^{1/2}$ ，这两个数值是与初始条件和积分常数无关的，另一方面，振幅 A 和初周相 φ （见图 10）则完全由初始条件确定。然而，在大多数振动理论问题中，最重要的一点是

^①这里的“频率”一般应称为角频率或圆频率。

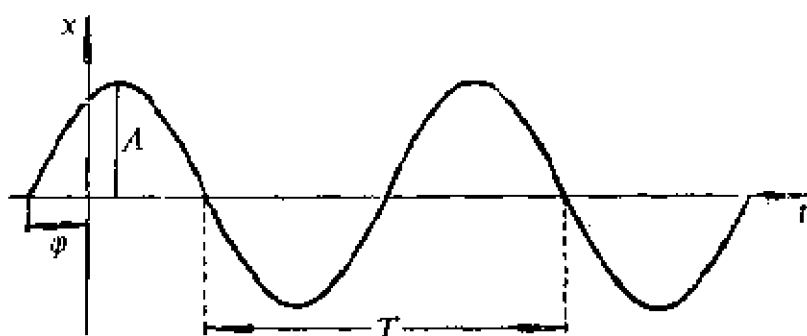


图 10 振 动

要知道频率。所以，初始条件不是很重要的。现在，我们把这个问题从三个方面进行推广。

13. 阻 尼 振 动

我们假定除了将质点拉回平衡位置的恢复力之外，还有因摩擦而产生的阻力。这个阻力的大小与速度 dx/dt 成比例（系数为 k ）。但是，这并不总是阻力的精确形式，只不过在大多数情况下，可以作为一个近似式来用而已。现在，微分方程可以写为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx - k \frac{dx}{dt} \quad (2.32)$$

这个方程也是齐次线性的，可以积分为 $x = Ae^{at}$ 的形式。仿上法得

$$ma^2 + ka + c = 0$$

和
$$a = -\frac{k}{2m} \pm i \left(\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2} \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

应用式 (2.30) 可求得如下形式的解

$$x = e^{-kt/2m} \times \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left[\left(\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2} \right)^{1/2} t \right]$$

这就是阻尼振动，其频率为

$$\left(\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2} \right)^{1/2}$$

而对数减缩为 $kT/2m$ 。所谓对数减缩，就是说分别对应于时刻 t 和 $t+T$ 的两个 x 值（例如，图 11 中标记 x_a 和 x_b 这两个值）之比是 $e^{-kT/2m}$ ，因而，这一比值的对数就等于 $kT/2m$ 。

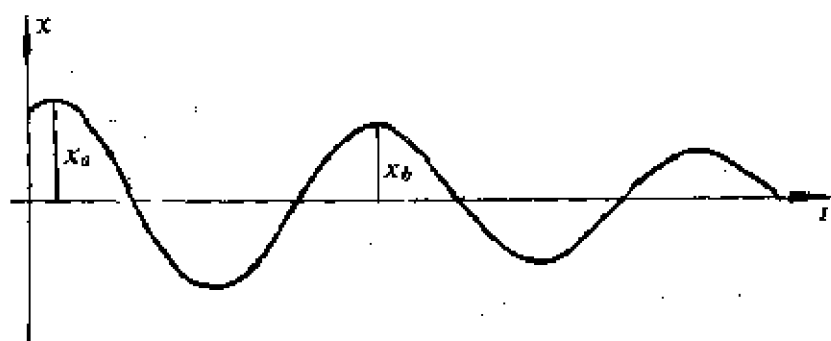


图 11 阻尼振动

当恢复力比摩擦力大得多时，阻尼常数对频率的影响很小。然而，如果摩擦力较大时，运动就可能不是周期性的了。当 $k^2/4m^2 > c/m$ 时就是这样，在这种情况下，振动是非周期性衰减的。

14. 受迫振动

因为，除了恢复力和摩擦力之外，还可以有另一种力，这种力不是 x 的函数，而是时间 t 的函数。例如，一个引起质点运动的外力，我们把它叫做 $F(t)$ 。于是，运动方程为：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - k \frac{dx}{dt} + F(t) \quad (2.34)$$

这个方程不再是齐次的了，它表示的是“受迫”振动，而不是“自由”振动。为了找出它的通解，我们先找一个满足方程 (2.34) 的特定函数 $x_1(t)$ 。这只是一个特解，它不包含任何积分常数。如果我们加上齐次方程

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -cx_2 - k \frac{dx_2}{dt}$$

的通解 $x_2(t)$ （这个通解是我们所知道的），那么，两者之和 $x_1 + x_2$ 仍是方程 (2.34) 的解，而且是一个完全解。在我们的情况下，特解 x_1 通常叫做“受迫振动”，而 x_2 叫做“自由振动”。将后者迭加在前者之上，其方式由初始条件来确定。剩下的任务是寻找一个特解，这可以用“参数变值法”来解。这里，我们假定读者学过初等微积分课程，对这个方法是熟悉的。

这里我们只考虑外力是周期性变化的情况，这种情况在实际上是最重要的，并且是容易处理的。其微分方程是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = F_0 \cos \omega t \quad (2.35)$$

其中 F_0 是振幅， ω 是外力的频率，我们希望知道的是受迫振动 x_1 的振幅、频率和周相，这里 x_1 是一个没有积分常数的特解。如果 k 等于零的话，我们就可以用一个与 $\cos \omega t$ 成比例的函数来表示 x_1 。于是，方程中的每一项都包含因子 $\cos \omega t$ ，因此是可以消去的。但是，现在 k 并不等于零，因而 x_1 就比较复杂，力和振动两者之间将有周相差。下面我们介绍一个求方程 (2.35) 的特解的最方便实用的方法。

我们在方程右端加上 $iF_0 \sin \omega t$ ，使之等于 $F_0 e^{i\omega t}$ 。复数方程

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k \frac{dx_1}{dt} + cx_1 = F_0 e^{i\omega t} \quad (2.36)$$

的解是复函数 x_1 ，其实部就是我们所求的方程 (2.35) 的解，对虚部我们不感兴趣。这个从三角函数到复数指数函数的变换，常常被用来简化微分方程的积分。如果在方程 (2.36) 中，令 $x_1 = Ae^{i\omega t}$ ，并在所有各项中消去因子 $e^{i\omega t}$ ，剩下的方程就是

$$A(-m\omega^2 + ik\omega + c) = F_0$$

或者

$$A = \frac{F_0}{-m\omega^2 + c + ik\omega} = \frac{F_0(-m\omega^2 + c - ik\omega)}{(-m\omega^2 + c)^2 + k^2\omega^2}$$

我们再把 A 写成 $A = Ce^{i\varphi}$ 的形式，则有

$$C = \frac{F_0}{[(c - m\omega^2)^2 + k^2\omega^2]^{1/2}} \quad \text{和} \quad \lg \varphi = \frac{k\omega}{m\omega^2 - c} \quad ①$$

于是，方程 (2.35) 的特解是

$$x_1 = Ce^{i(\omega t + \varphi)} \quad \text{的实部} = C \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.37)$$

由此，我们可以直接得到振幅 C 和受迫振动与周期性外力间的周相差 φ ，式 (2.37) 的最重要的结果是给出了发生“共振”的条件，即当 k 很小，而 $\omega = (c/m)^{1/2}$ ，也就是说 ω 等于自由振动的频率时②，解中振幅 C 就会变得很大。

①关于 C 和 $\lg \varphi$ 的两个公式原文误为：

$$C = \frac{F_0}{(c - m\omega^2)^2 + k^2\omega^2} \quad \text{和} \quad \lg \varphi = \frac{k}{m\omega^2 - c}$$

读者可利用式 (2.30) 将 $A = Ce^{i\varphi}$ 展开，并与 A 的代数方程的解比较，即可证明。

——译者注

②确定的自由振动频率已在第 12 节给出。

15. 耦 合 振 动

两个或者更多的振动系统可以耦合起来。现在我们举一个

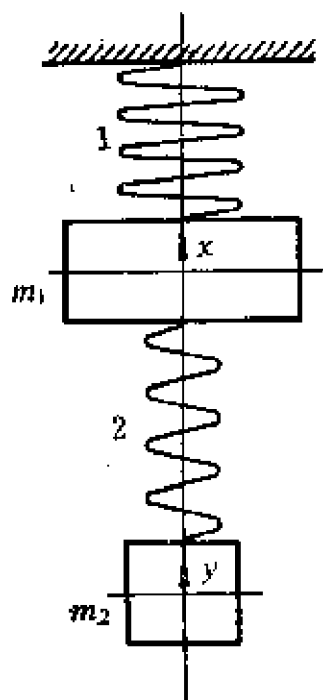


图 12 耦合振动

最简单的两个质点耦合的例子来说明这种振动的微分方程是如何建立和积分的。其中，第一个质点被弹簧拉回到某一平衡位置（情况同前），而第二个质点和第一个质点则用另一个弹簧相连结。我们假定没有摩擦力和外力，两个质点离开各自的平衡位置的位移分别以 x 和 y 表示。这时，第一个弹簧作用在第一个质点上的力为 c_1x ，而第二个弹簧作用在第二个质点上的力，由于第二个弹簧的伸长量为 x 和 y 之差，则为 $c_2(y-x)$ 。由此可以列出微分方程

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x}{dt^2} &= -c_1x + c_2(y-x) \\ &= -(c_1 + c_2)x + c_2y \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = -c_2(y-x)$$

这是两个联立的齐次方程，可以用消元法将其简化为一个方程。例如，我们可以从方程组 (2.38) 的第二个方程解出 x ，把 x 的表达式代入第一个方程。这样，我们就得到了一个四阶微分方程，它可以用前述的方法求积分。对应于两个

质点各自的初始位置和初始速度，共有四个积分常数，然而，我们特别感兴趣的是微分方程本身的结论，因而就不再叙述这一解法了。

我们也可以不用上述的消元法，而用指数函数的方法，通常这是比较简单的方法。我们试用下列表达式：

$$x = A_1 e^{\alpha t}, \quad y = A_2 e^{\alpha t} \quad (2.39)$$

代入式 (2.38) 则得

$$\begin{aligned} A_1(m_1 \alpha^2 + c_1 + c_2) - A_2 c_2 &= 0 \\ -A_1 c_2 + A_2(m_2 \alpha^2 + c_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

这是关于 A_1 和 A_2 的两个齐次线性代数方程。只要方程是彼此无关的，它们唯一的解就是 $A_1 = A_2 = 0$ 。如果方程是彼此相关的，则只能确定比值 A_2/A_1 ，而未知数的绝对值仍然是不确定的。这种情况相当于自由地选定一个积分常数。因为，若 $A_1 = A_2 = 0$ ，就有 $x = y = 0$ 。所以，实际发生的是后一种情况，即两个方程是相关的。这就是说，方程组的系数行列式等于零。由式 (2.40) 有

$$\begin{vmatrix} m_1 \alpha^2 + c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & m_2 \alpha^2 + c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.41)$$

这个关系式也可以从两个方程直接计算 A_2/A_1 中得到。但是，当存在两个以上未知数时，令行列式等于零更方便些。

由方程 (2.41) 得

$$(m_1 \alpha^2 + c_1 + c_2)(m_2 \alpha^2 + c_2) - c_2^2 = 0$$

它给出了相应于两个频率的 α^2 值。每个频率都对应着一个振幅和一个周相常数。如果上式中没有 $(-c_2^2)$ 这一项，它所给出的两个频率就会分别等于质量 m_1 和 m_2 单独在弹簧 c_1 和 $c_1 + c_2$ 上的频率，这时，数值 c_2 表示弹簧 2 的耦合特

性。由于耦合作用，上述两个频率就会发生变化，这在声学中叫做“不和谐”。在一般情况下，频率的方程是高次的，通常不象我们这个例子这样是 α^2 的二次方程。

16. 摩擦耦合

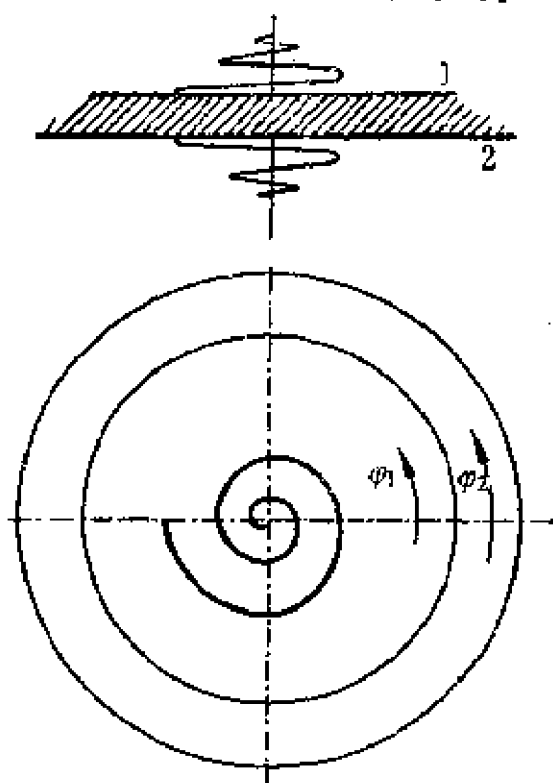


图 13 摩擦耦合的旋转振动

耦合也可以由摩擦或类似摩擦的力来得到。下面举一个简单的力学例子。两个圆盘由允许旋转振动的弹簧恢复到平衡位置（图 13）。圆盘之间有少量的粘性液体，且其摩擦力与圆盘的相对角速度成比例。这个例子在技术上是重要的，它与船上的抗滚箱的性能有关。

由式 (2.32)，微分方程为

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= -c_1 \varphi_1 - k \left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} &= -c_2 \varphi_2 - k \left(\frac{d\varphi_2}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

这里 φ_1 和 φ_2 是两个圆盘各自的角位移， I_1 和 I_2 是惯性矩。因为我们只对从方程组 (2.42) 求出的频率和振动阻尼感兴趣，所以，这里不需要任何初始条件。

借助于 $\varphi_1 = A_1 e^{\alpha t}$, $\varphi_2 = A_2 e^{\alpha t}$ 可得

$$A_1(I_1 \alpha^2 + k\alpha + c_1) + A_2(-k\alpha) = 0$$

$$A_1(-k\alpha) + A_2(I_2 \alpha^2 + k\alpha + c_2) = 0$$

因为主行列式必须等于零，所以，可得关于 α 的四次方程

$$(I_1 \alpha^2 + k\alpha + c_1)(I_2 \alpha^2 + k\alpha + c_2) - k^2 \alpha^2 = 0 \quad (2.43)$$

在一般情况下，要解出这个给出了四个（复数的） α 值的方程是困难的。因为，在各种情况下，这个解构成的问题不同，所以，关于它我们不能谈什么普遍性的东西。每个 α 的复数值表示一个振动，频率由 α 的虚部给出，阻尼由实部给出〔参阅式 (2.33)〕。因为四个解组成两对共轭虚数，所以我们只有两个频率值。这些解的两个或四个也可以是实数解。这时，对应的振动是非周期性的。

17. 稳 定 性

稳定性问题是力学系统运动方程为齐次线性微分方程的许多情况中的一种。如果一个系统处于稳态平衡中（例如，刚体（飞机）作不随时间变化的运动），这个运动就要满足和自由度一样多的平衡条件。比方说，一个刚体能够在三个方向上移动，还能绕三个轴转动，总共就有六个自由度，它的稳态运动就要满足表示力和力矩之间平衡的六个平衡条件。现在，我们假定平衡被轻微扰动，因而运动的一个或几个变量就具有和平衡时不同的数值。再假定扰动很小，因而所有的外力和力矩都可以表示为扰动的线性函数（正象通过一个点的曲线，在很小范围内，可以用切线表示那样），扰动的结果，运动受到加速，平衡受到干扰。线加速度和角加

速度也是描述扰动变量的线性函数，因此，关于这些变量的微分方程也是线性的。由于没有受到扰动的力和力矩的分量符合平衡条件，它们相互抵消。所以，这些微分方程仍是齐次的。这样，稳定性问题就可以用和振动方程同样类型的方程来描述。因此，它也可以用指数函数 $Ae^{\alpha t}$ 来求解。这种方法叫做“微振动法”。不过，在特殊情况下，结果可能是非周期性的。

我们得到的 α 值的个数与相应的微分方程的个数和阶数一样多。如果所有 α 值的实部都是负值，则所有的振动都随时间而衰减。这些负 α 值的绝对值越大，振动就衰减的越快。在这种情况下，原始的运动是稳定的。另一方面，如果一个或几个 α 值的实部是正值，则扰动增大，原始的运动将不能恢复，因而不稳定的。任何稳定性问题都可以在这个基础上解出来。不过，要得到数值解，特别是确定作为高次代数方程的解的 α 值，可能是很难的。

第三章 最简单的偏微分表达式

1. 梯 度

在一切场方程中，未知量（可能是标量，矢量或张量）都取决于时间和三个空间坐标。显然，在描述物理事实的方程中，导数不能包含于任意的组合之中。因此，只有与坐标系无关的那些表达式才能在这类方程中出现。坐标系的选取是任意的，因而在用微分方程描述自然现象时，取什么样的坐标系，就象透过玻璃窗向外看东西用什么窗框一样，没有什么意义。比方说，如果 u 是标量， x 是空间坐标，那么 $\partial u / \partial x$ 本身并没有什么物理意义。因为坐标系是任意的，所以在某一时刻是 x 轴，而在另一时刻就可能是 y 轴。同样，在我们已经遇到过的微分方程中出现过矢量 F ，但却不会出现单独一个分量 F_x ，因为分量仅仅出现在分量方程中，是和相应的其它分量一起出现的。

我们的任务是寻求具有物理意义的、与坐标系无关的，但却在任意坐标系中具有确定意义的微分表达式。这种类型的第一个表达式对应着导数本身，它描述空间中某一点 (x, y, z) 标量场的变化。这个变化显然不象对时间的微分那样是一个标量。它在不同的方向上是不同的。但是，在不同方向的导数之间是

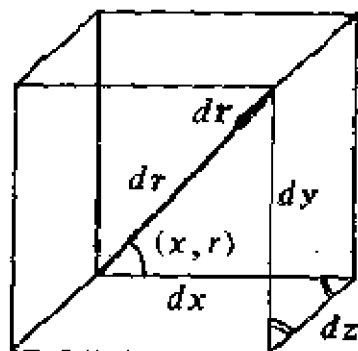


图 14 路径元及其分量

有关系的。我们假定读者已经知道偏微商和全微商的概念。我们从点 (x, y, z) 出发，沿着长为 dr ，分量为 dx, dy, dz 的矢量 dr 移动（见图 14），那么，如果 Φ 是任一标量函数，则有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} dr = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

或

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(x, r) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(y, r) \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos(z, r) \end{aligned} \quad (3.1)$$

于是，在任一方向上，导数可以用三个量 $\partial \Phi / \partial x$ 、 $\partial \Phi / \partial y$ 、 $\partial \Phi / \partial z$ 来表示，这个表达式和用三个正交的分量 K_x, K_y, K_z 表示的矢量 \mathbf{K} 的分量 K_r 的表达式一样。矢量 \mathbf{K} 的方向

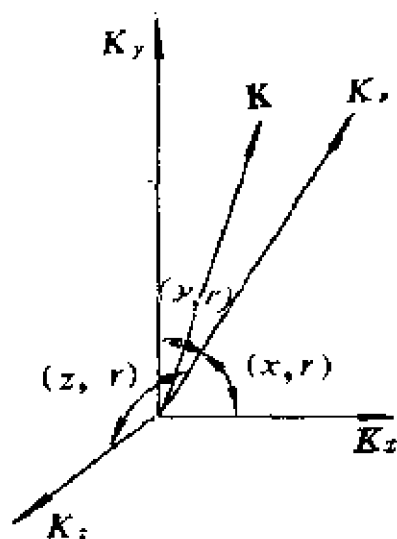


图 15 矢量及其分量

是分量在这个方向上具有极大绝对值的方向。这个长度等于三个分量的“毕达格拉斯”和^①。我们可以用同样的方法容易地算出在某一方向 r_0 上 $\partial \Phi / \partial r$ 具有极大值，而在与之垂直的所有各个方向上 $\partial \Phi / \partial r$ 等于零。在 r_0 的反方向上，则 $\partial \Phi / \partial r$ 取极小值，其绝对值与极大值相等。因此在三维空间中，一个矢量与一个变量的导数相对应，它在

①毕达格拉斯(Pythagoric)和即指

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}$$

——译者注

长度和方向上对应于标量 Φ 在我们所研究的那一点的最大增长率。这个矢量在任一方向上的分量等于标量 Φ 在这个方向上的偏微商。该矢量就叫做“梯度”（用 grad 表示）。

矢量 $\text{grad } \Phi$ 的分量是 $\partial\Phi/\partial x$ 、 $\partial\Phi/\partial y$ 、 $\partial\Phi/\partial z$ 。一般说来，它在 r 方向的分量是 $\partial\Phi/\partial r$ 。

$$|\text{grad } \Phi| = \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

一个标量相对于空间坐标的变化，只能以 grad （或 ∇ ，发音为“del”）的形式包含在任一物理方程中。例如，一个处处与 $\text{grad } T$ （ T 为温度）成比例的热流 \mathbf{q} 。如果 T 是位置的函数，则 $\text{grad } T$ 是一个矢量，它给出每一点处一切可能的方向上的温度增量。热沿着梯度的反方向（从高温向低温）流动，比例系数 λ 叫做材料的导热系数。方程是

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad } T \quad (3.3)$$

对任一方向都有一定的热流，最大的热流是在 $\text{grad } T$ 的反方向上，但在垂直于 $\text{grad } T$ 的各个方向上， T 等于常数，即没有热流发生。

2. 柱面坐标和球面坐标

矢量 $\text{grad } \Phi$ 与坐标系无关，它表示标量 Φ 在某一点变化的特性。因此，要求它在任一方向上的分量，可以取与这个方向上两个点对应的 Φ 值之差，并除以这两点间的距离。为此，我们可以取任意的坐标系，例如，选取柱面坐标系。这里，长度元为 dr 、 $r d\phi$ 和 dz 。梯度的相应分量是

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.4)$$

而在球面坐标系中，长度元为 $d\rho$ 、 $\rho d\theta$ 和 $\rho \sin \theta d\varphi$ ，则梯度的分量为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (3.5)$$

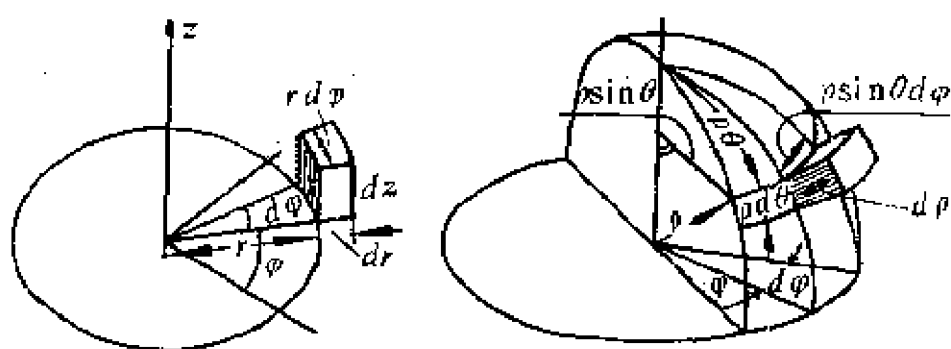


图 16 柱面坐标和球面坐标

3. 矢 量 场

除了标量场以外，还有用空间可变矢量（如 \mathbf{q} ）来定义的矢量场。这样的—个矢量场不一定象热流 \mathbf{q} 那样是标量场的梯度。矢量场是梯度场的条件将在下文中讨论确定〔参阅式（3.23）〕。

我们把液体的流动作为矢量场的一个例子。在流体内的每—点速度都有确定的大小和方向（可能随时间变化）。其它的例子如电场和磁场也是矢量场。可以用箭头在图上表示这些矢量，但较好的表示法是只画出矢量的方向，不画出矢量的大小。在这种情况下，我们可得到一些表示矢量在空间各点方向的连续线。在这些线中，大家最熟悉的是磁力

线，我们可以从放在磁场中的铁屑所构成的图象看出来，这时，这些线叫做“力线”，但在流体中相应的线则称为“流线”，在场的任一区域内，由力线或流线组成的面叫“力管”或“流管”，场矢量在垂直于这样一根管的面上的分量恒等于零。

4. 散 度

假定有一个矢量场，场内有一个封闭面把空间分为内、外两部分，对于每一个面元来说，面元 ds 和场矢量的垂直分量（外法线方向为正）的乘积是一个与坐标系无关的数值，它可以用场矢量与另一个长度值等于面元的面积、方向沿面元外法线方向的矢量的标积来表示。这个乘积对整个封闭面的积分是有物理意义的，如果场矢量是流体的速度，则这个乘积就是单位时间内由内部到外部穿过面元流出的流体体积，于是，积分也就表示由内部流出的流体体积。当然，在表面上的点，如果速度 v 指向内部，那么被积函数就变成了负值。因此，积分就表示内部所有源的总强度。如果后者不等于零，这可能有两种原因：一种原因是流线发源于内部；另一种原因是沿着流线方向流动速率的增加或减少。在流体力学中，第一种情况相当于封闭面内部存在有源的流体（见图 17），第二种情况则相当于沿流动方向密度减小的气体的稳定流动（见图 18）。因为在后一种情况下，单位时间内进入两壁和两端面之间区域内的气体质量和离开这个区域的气体质量是一样的（图 18）。这样，对两个端面来说，“密度乘速度再乘入口或出口的面积”的积必须有相同的数值。

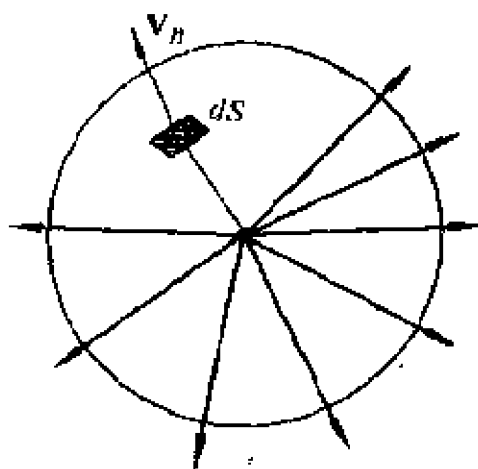


图 17 一个任意面元和源

因为在两个端面处密度是不同的，所以“速度与端面面积”的乘积也是不同的。在这种情况下，积分等于两个乘积之差，而不等于零。

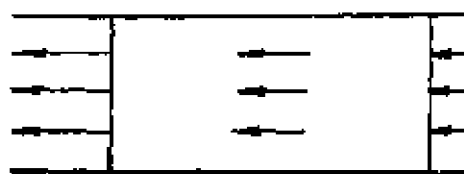


图 18 具有可变密度的流

为了寻求空间一点“源的大小”的数学表达式，我们可以取一个包含此点在内的无限小邻域的封闭面。于是，积分就成了三阶无穷小（表面本身是二阶无穷小，而入口处和出口处场矢量之差也是无穷小）。这样，如果我们用封闭区域的体积 V 去除这一积分，就可以得到一个有限的极限值，这个极限值就叫做场的“散度”（用 div 表示），它可以写作

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{A}_n \cdot d\mathbf{s} \quad (3.6)$$

散度是一个标量。

5. 散度的数学表达式

现在，在各种坐标系中，计算散度就简单了。例如，在直角坐标系中，我们在 \mathbf{A} 的场中取一个无限小的立方体，其边长为 a 并与坐标轴平行。在这种情况下，立方体各面元上，矢量的法向分量分别为 A_x , A_y 和 A_z 。对于面 1、2、3 来说，正方向是垂直指向面内的方向。而对其它各面来

说，正方向则是垂直指向面外的方向。因此，在面 1 上 $A_n = -A_x$ ，在面 4 上 $A_n = A_x$ 。如果 A_{x0} 为面 1 上 A_x 的平均值，则对面 1 的积分等于 $-A_{x0} \cdot a^2$ 。面 4 和面 1 上的 A_x

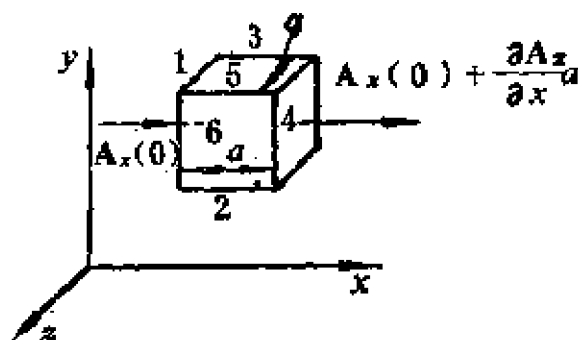


图 19 散度公式的导出

相差非常小，因此，我们可以假定它们是线性相关的。当 y 和 z 为常数时，我们有

$$A_x(a) = A_x(0) + \frac{\partial A_x}{\partial x} a$$

因而对面 4 的积分值为

$$\left[A_{x0} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_0 a \right] a^2$$

这里 $(\partial A_x / \partial x)_0$ 是面 1 上导数的平均值。其它各面上也可作同样的考虑。因为当 $a \rightarrow 0$ 时，平均值取极限就变成它本身的值了，于是，我们得到

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} \oint \mathbf{A}_n ds \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} a - A_x + A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} a - A_y \right. \\ &\quad \left. + A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} a - A_z \right) a^2 \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.7)$$

对于任何其它坐标系来说，如果用坐标元构成体积元，也很容易进行类似的计算。图 20 表示柱面坐标上的一个体

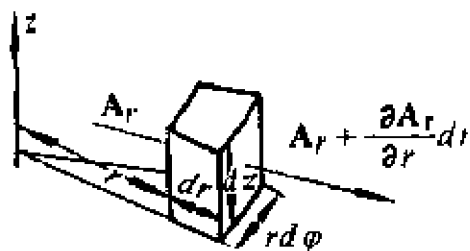


图 20 柱面坐标中散度的计算
也是平均值的话)

积元，它与上述直角坐标系不同的是它的三个坐标是不等价的。在这里，一个有限但却很小的体积元的各边长分别为 Δr ， $r\Delta\varphi$ 和 Δz 。对表面上不同部分的积分则是（如果 A_r 等

$$\begin{aligned}
 1) & - A_r \cdot r\Delta\varphi\Delta z & 4) & \left(A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta\varphi\Delta z \\
 2) & - A_\varphi \cdot \Delta r\Delta z & 5) & \left(A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \Delta\varphi \right) \Delta r\Delta z \\
 3) & - A_z \cdot r\Delta r\Delta\varphi & 6) & \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \right) r\Delta r\Delta\varphi
 \end{aligned}$$

体积元是 $r\Delta r\Delta\varphi\Delta z$ 。把以上六部分加起来，并取极限，则得

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

对于球面坐标来说，也可以用同样的方法求得

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{2 A_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\rho} A_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
 &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 A_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) \\
 &\quad + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

6. 实例和高斯定理

我们把电场和磁场作为散度在物理学上应用的一个例子来加以说明。电场仅仅是由电荷引起的，电荷就是它的源，电荷密度 ρ （读者注意：这里的 ρ 表示电荷密度，而上一节的 ρ 表示球的曲率半径——译者注）和电场 \mathbf{E} 之间的关系是

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \quad (3.10)$$

另一方面，由于不存在磁荷，所以，在磁场 \mathbf{H} 中没有正源，也没有负源，即有

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (3.11)$$

现在，我们对有限的区域取积分 $\iiint \operatorname{div} \mathbf{A} dV$ ，这个区域又可以分成无限多个无穷小的单元，每个单元上的面积分可以用前面讲过的方法估算。很明显，在该区域内部的每个面元都会在两个积分（即两个单元的连接处）中出现，而在这两个积分中 A_n 有相反的符号。所以，这些积分会相互抵消。由此，我们即可得到“高斯定理”



图 21 高斯定理的导出

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint A_n ds \quad (3.12)$$

这里第一个积分是对区域内部取的，第二个积分是对区域表面取的。

7. 旋 度

令 C 为矢量场中一条封闭的平面曲线。我们取场矢量

和曲线元 dl 的标积沿该曲线的积分。当然，必须事先（任意地）确定沿曲线求积分的方向。这个积分与坐标系无关。如果 A_t 是矢量在曲线切线方向的分量， dl 是曲线元 dl 的长度，则积分值为 $\oint A_t dl$ 。现在，如果对曲线的长度取极限

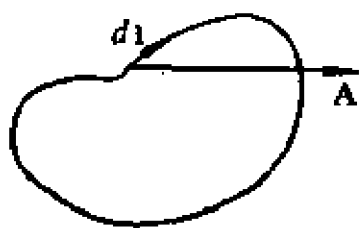


图 22 线元和矢量

使之趋近于零，则积分值就变成了二阶无穷小。因为一方面曲线的长度变小了，另一方面在曲线的不同部分场矢量的差也变小了。若把积分除以曲线所包围的表面面积 s ，则可得到一个有限的极限值，这个极限值就是矢量 \mathbf{A} 的“旋度”在表面 s 法线方向的分量。即

$$(\text{rot } \mathbf{A})_n = \text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \oint A_t dl \quad (3.13)$$

现在，我们任取一个有限的由曲线 C 包围的面（不一定是平面），并把这个面分成许多可以看作平面的小面。对每个小面我们可以象前面所讨论的那样取积分。如果把这些积分加在一起，则相应于面以内的弧线上的积分将会彼此抵消，结果只剩下对曲线 C 的积分，即为

$$\iint \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint A_t dl \quad (3.14)$$

这是因为围绕一个无限小面的线积分等于与式 (3.13) 相对应的 $\text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ ，这就是“斯托克斯定理”。旋度的性质是由平面

①式 (3.13) 左端原文为 $\text{rot } \mathbf{A}$ 是不正确的，本文已作改正。另外，旋度原文均写作“curl”，curl 有“卷发”的意思。但一般书中均用“rot”表示旋度，其意义为“旋转”。以后本书中 curl 均改为 rot，不再另注。——译者注

在空间的方位决定的，这样，旋度就不可能是一个标量。简单地讨论一下就可知道，相应于曲线的不同方位的值是由三个数决定的。我们取一个和上述面元一样，在 x, y, z 系统内可以有任意方位的三角形（见图 24），它在三个坐标

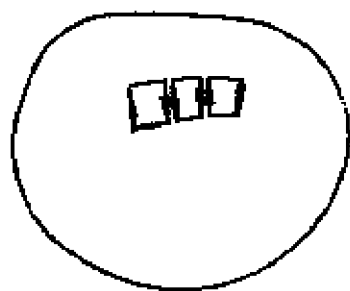


图 23 斯托克斯定理的导出

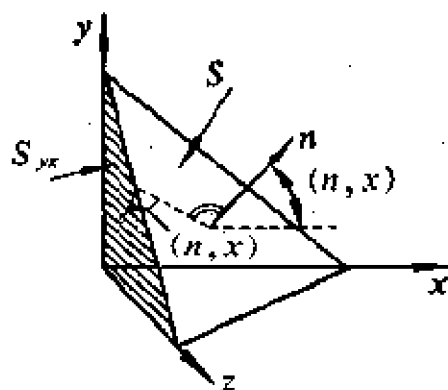


图 24 旋度的几何表示法

平面上的投影的面积为 $S_{yx} = S \cos(n, x)$ ……等，其中 n 是三角形平面的法线。对于无限小的面积来说，我们有

$$S \cdot \text{rot}_{\triangle} \mathbf{A} = \oint A_i dl \quad (\text{沿三角形三个边的线积分})$$

$$S_{yx} \cdot \text{rot}_{yx} \mathbf{A} = \oint A_i dl \quad (\text{沿三角形的一个边和两个坐标轴的线积分})$$

如果我们用同样的方法作出 $S_{xz} \text{rot}_{xz} \mathbf{A}$ 和 $S_{xy} \text{rot}_{xy} \mathbf{A}$ ，并把这三个表达式相加，在这里由于对三角形的每个边在积分时用过一次，而对每个坐标轴则在相反方向上用过两次。所以有

$$S \cdot \text{rot}_{\triangle} \mathbf{A} = S_{xy} \text{rot}_{xy} \mathbf{A} + S_{yz} \text{rot}_{yz} \mathbf{A} + S_{zx} \text{rot}_{zx} \mathbf{A}$$

或

$$\begin{aligned} \text{rot}_{\triangle} \mathbf{A} = & (\text{rot}_{xy} \mathbf{A}) \cos(n, z) + (\text{rot}_{yz} \mathbf{A}) \cos(n, x) \\ & + (\text{rot}_{zx} \mathbf{A}) \cos(n, y) \end{aligned} \quad (3.15)$$

如果知道了 $\text{rot}_x \mathbf{A}$ ……等三个分量，那么，对任一方向旋度的数值也就知道了。旋度和矢量一样，可以用三个数值来确定。尽管如此，但旋度却不是一个矢量，因为它在空间的方位不是用线段，而是用一个平面的取向来给定的。然而，它可以用一个长度等于旋度的绝对值、方向垂直于旋转平面的矢量表示。为此，我们需要有一个矢量和旋转方向间的确定关系。通常这种关系和坐标轴之间的关系一样，用互相垂直的右手前三个手指来表示。用第一个手指所指的方向表示矢

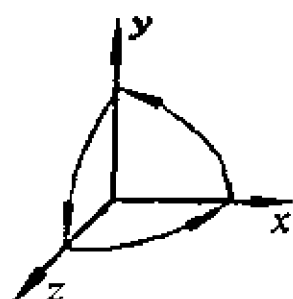


图 25 一个矢量的方向和一个平面上旋转方向之间的对应关系

量的方向，这个方向恰好与从第二个手指转到第三个手指的旋转方向相对应。

以后，我们将把式 (3.15) 中的 $\text{rot}_x \mathbf{A}$ 写作 $\text{rot}_x \mathbf{A}$ 。因此，方程 (3.15) 在形式上就变得和式 (3.1) 一致了，而式 (3.1) 对矢量分量的计算是正确的。

8. 旋度的物理意义

为了具体说明旋度的物理意义，我们可以研究一个半径为 r 的旋转刚性圆盘。沿圆盘边缘取积分 $\oint \mathbf{v}_i d\mathbf{l}$ ，速度 \mathbf{v} 沿切线方向的绝对值为 ωr ，其中 ω 为角速度。这样，积分就等于 $\omega r 2\pi$ ，相应的旋度的表达式 $S^{-1} \oint \mathbf{v}_i d\mathbf{l}$ 等于 2ω ，这就意味着角速度和旋度具有相同的本质。为了从另一方面说明旋度，我们还可以再举一个质点沿封闭曲线移动而作机械

功的例子。如果 \mathbf{A} 是场力，那么，当质点在力的作用下，沿该曲线运动时，力所作的功等于 $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 。这个定义对解释电流和磁场之间的关系特别有用。我们必须记住，这个功和曲线的方位有关，它的矢量性仅仅在对方位的依赖性上才显示出来，而功本身则是一个标量。

9. 旋度的数学表达式

现在，我们先计算直角坐标系中的旋度。用一个位于场中的矩形作为封闭曲线，并用 A_{x0} 表示矩形边 1 上 A_x 的平均值。因此，如果 Δy 和 Δz 足够小，那么边 3 上的这个平均值就是 $A_{x0} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y$ 。同样，边 2 和边 4 上切向分量的平均值分别为 A_{y0} 和 $A_{y0} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z$ 。于是，在相应于从 y 轴到 z 轴的旋转方向上，沿整个曲线的积分则为

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= A_{x0} \Delta y + \left(A_{x0} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z \\ &\quad - \left(A_{y0} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y - A_{y0} \Delta z \end{aligned}$$

上式除以 $\Delta y \Delta z$ 并取极限，则得

$$\text{rot}_z \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (3.16)$$

（按照我们的符号规则，在图 26 中 x 轴的正方向指向读者）通过变换下标，我们还可得到

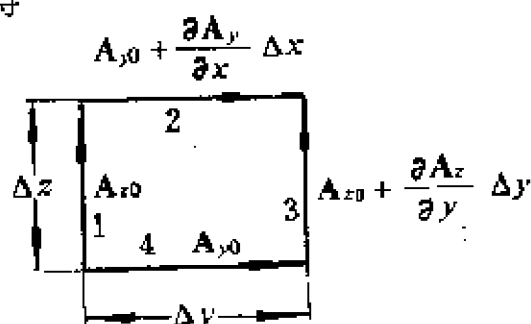
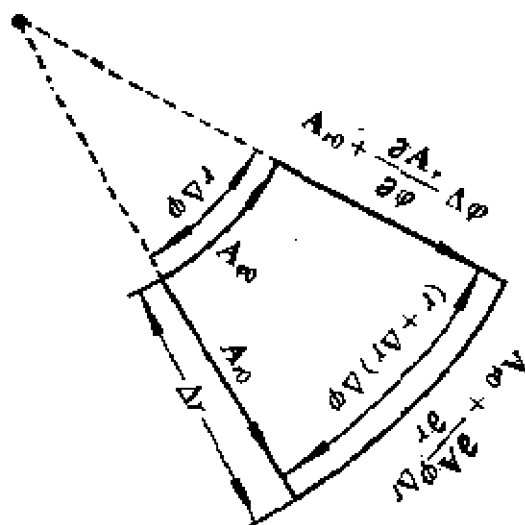


图 26 旋度公式的导出



$$\text{rot}_y \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$\text{rot}_x \mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

(3.16a)

当我们在任何其它坐标系中计算旋度时，必须根据所用的坐标系来选择曲线。举例来说，在图 27 所表示的柱面坐标

图 27 柱面坐标中旋度的计算 中

$$\begin{aligned} \oint A_i dl &= A_{\phi 0} \Delta r + \left(A_{\phi 0} + \frac{\partial A_{\phi}}{\partial r} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta \varphi \\ &\quad - \left(A_{r 0} + \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \Delta \varphi \right) \Delta r - A_{\phi 0} r \Delta \varphi \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \text{rot}_z \mathbf{A} &= \frac{\partial A_{\phi}}{\partial r} + \frac{A_{\phi}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{\phi})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (3.17)$$

其它分量是

$$\begin{aligned} \text{rot}_{\varphi} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \text{rot}_r \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_{\phi}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.17a)$$

而在球面坐标中，则有

$$\text{rot}_{\rho} \mathbf{A} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_{\varphi} \sin \theta) - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} \right]$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \quad (3.18)$$

$$\text{rot}_\theta \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) \right]$$

现在，我们再以 ρ 分量为例说明一下推导过程。先取垂直于半径 ρ 的面元，这个面元的边界是长度为 $\rho \Delta \theta$ 的两条子午线弧元和长度各为 $\rho \sin \theta \Delta \varphi$ 和 $\rho \sin(\theta + \Delta \theta) \Delta \varphi$ 的两条纬线弧元（见图 28）。于是有

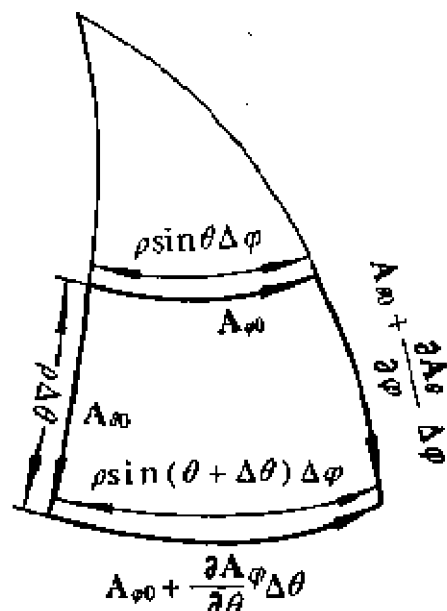


图 28 球面坐标中旋度的计算

$$\begin{aligned} \oint A_i dl = & + \left(A_{\varphi 0} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \Delta \theta \right) \rho \sin(\theta + \Delta \theta) \Delta \varphi \\ & - \left(A_{\theta 0} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \Delta \varphi \right) \rho \Delta \theta - A_{\varphi 0} \rho \sin \theta \Delta \varphi \\ & + A_{\theta 0} \rho \Delta \theta \end{aligned}$$

利用展开式 $\sin(\theta + \Delta \theta) = \sin \theta + \Delta \theta \cos \theta$ （因为 $\Delta \theta$ 很小，故 $\sin \Delta \theta \doteq \Delta \theta$ ，而 $\cos \Delta \theta \doteq 1$ ——译者），再除以面积 $\rho^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \varphi$ ，并在 $\Delta \varphi \rightarrow 0$ ， $\Delta \theta \rightarrow 0$ 的条件下取极限，就可

得到公式 (3.18) 中的第一式。

10. 梯度的散度和旋度

应当指出，微分表达式的一些组合形式对物理学的应用来说是非常重要的。例如，我们可以研究一个矢量场的散度和旋度所具有的特殊性质，其中矢量本身是一个标量的梯度，或是另一个矢量的旋度。

设 $\mathbf{A} = \text{grad}\Phi$ ，在直角坐标系中取其散度，则得如下简单的表达式：

$$\begin{aligned}\text{div grad}\Phi &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (3.19)$$

该式后来被命名为拉普拉斯算子，它在物理学的微分方程中是很常见的，可用 $\Delta\Phi$ （或用 $\nabla^2\Phi$ ）来表示。它在直角坐标、柱面坐标和球面坐标中的表达式分别为：

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\quad (3.20)$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\sin\theta\right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\end{aligned}\quad (3.22)$$

如果我们计算直角坐标系中梯度的旋度，则得

$$\text{rot grad}\Phi = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = 0$$

这个结果对其它分量同样是正确的，很明显，它也与坐标系无关，所以，一般有

$$\text{rot grad } \Phi = 0 \quad (3.23)$$

11. 旋度的散度和旋度

如果 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ，我们立即可以看出 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ，因为我们已经知道以同一曲线为边界的两个面上 $\iint \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{s}$ 是相同的

(见图 29)。这两个面围成一个空间区域，它表示面上的旋度矢量对一个面来说是指向区域内部的，而对另一个面来说则是指向区域外部的。因为两者的积分是相等的，即流向外的等于流向内的，所以，这里不存在“源头”或“尾闾”，它的散度等于零。这一结果也可以很容易地通过任一坐标系中的计算来证实，普遍式为

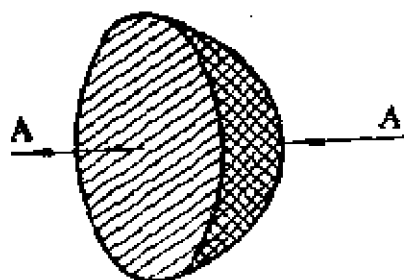


图 29 证明 $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0 \quad (3.24)$$

最后，我们来计算一下直角坐标系中旋度的旋度

$$\begin{aligned} \text{rot}_x(\text{rot } \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial y}(\text{rot}_x \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial z}(\text{rot}_y \mathbf{A}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \end{aligned}$$

右端加上

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$$

即得

$$\text{rot}_x(\text{rot}\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(\text{div}\mathbf{A}) - \Delta A_x$$

或

$$\text{rot rot}\mathbf{A} = \text{grad div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} \quad (3.25)$$

值得注意的是在这个公式中出现了算子 Δ ，这一次它作用在一个矢量上，即分别作用在矢量的各个分量上。

我们也可以在任一坐标系中表示出式 (3.25) 的算子。但是，应当记住，在这个方程中， \mathbf{A} 是代表笛卡儿直角坐标分量 A_x, A_y, A_z 的。如果我们把 \mathbf{A} 分解为相应于另一坐标系的分量，例如，用柱面坐标系中的分量 A_r, A_φ, A_z ，计算就比较复杂了。

12. 算符 Δ 的物理意义

因为 $\Delta\Phi$ 在物理学的微分方程中是非常重要的，所以，我们试图找到一个算子 Δ 的简单解释。

设在标量场中的某一点 O 处， Φ 可以有值 Φ_0 。我们围绕 O 点作一个边长为 a 的立方体， Φ 在这个立方体内的平均值为 $\bar{\Phi}$ ，则有

$$\bar{\Phi}a^3 = \iiint_{-a/2}^{+a/2} \Phi dx dy dz$$

而对于任一点 x, y, z 来说，泰勒表示法给出

$$\begin{aligned}\Phi = & \Phi_0 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0 z + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 x^2 \right. \\ & + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)_0 z^2 \left. \right] + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)_0 xy \\ & + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\right)_0 yz + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}\right)_0 zx + \dots\dots\end{aligned}$$

如果我们从 $-a/2$ 到 $a/2$ 求积分，奇函数相互抵消，由其它的项则得到

$$\iiint_{-a/2}^{+a/2} x^2 dx dy dz = \frac{a^5}{12}, \text{ 等等.}$$

最后有

$$\overline{\Phi} a^3 = \Phi_0 a^3 + \frac{a^5}{24} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right)_0$$

或

$$\overline{\Phi} - \Phi_0 = \frac{a^2}{24} \Delta_0 \Phi$$

因此，量 $\Delta\Phi$ 是量度 Φ 在点“O”处的数值和在包括这一点的一个无限小邻域内的平均值之差。

第四章 物理学中最简单的偏微分方程

1. 势 方 程

在很多重要的情况下，函数的局部值与它在邻域内的平均值之差，对描述场随空间-时间的发展来说是极其重要的，因此算子 Δ 经常出现在一些微分方程之中，例如

a. 存在着这样一种场，其中 Φ 在场中任一点的值等于其所在邻域内的平均值。因此，拉普拉斯方程为

$$\Delta\Phi = 0 \quad (4.1)$$

例如，一个没有质量的区域内的重力场就是这样的实例。在这样的场中，作用在单位质量的质点上的力 \mathbf{K} 仅仅是质点位置的函数。在一般情况下，要在场中移动质点必须做功（正功或负功）。如果移动质点的路径是沿着一条闭合曲线，那么，它所作的总功就等于零。根据第三章第 8 节，这种情况可以表示为

$$\text{rot } \mathbf{K} = 0 \quad (4.2)$$

如果我们采用式 (3.23)，则这三个方程（对每一个分量都有一个方程）的系统可以简化为一个方程。根据式 (3.23)，方程 (4.2) 应满足 $\mathbf{K} = \text{grad } \Phi$ 。但重力场又有更进一步的特性，这就是它的源仅仅存在于有物质的地方。因而，在真空中重力场是无源的，即有

$$\text{div } \mathbf{K} = \text{div grad } \Phi = \Delta\Phi = 0 \quad (4.3)$$

以后，我们将证明这个方程和牛顿的万有引力定律是相同的（第七章第1节）。

另外，我们还会在静电学、静磁学和流体力学中看到同样的场，不过，无论在哪里，只要存在一个旋度等于零的矢量场，我们就可以把这个场表示为标量的梯度，并把未知量的数目从三个简化为一个。这时， Φ 就叫做矢量场的“势”，点0和1之间的势差等于

$$\Phi_1 - \Phi_0 = \int_0^1 \mathbf{k}_l dl$$

这里积分的路径是连接点0和点1的任一曲线。如果 \mathbf{K} 是力，积分就表示力沿这一路径作的功。这时， Φ 叫做“势能”（在重力情况下，为单位质量的势能）。

b. 存在着这样一些物理条件，使得在一个点上的标量值不同于其所在邻域内的平均值。这时，我们有泊松方程

$$\Delta\Phi = F \quad (4.4)$$

这里 F 是给定的空间函数。当力为重力时，物质的密度 ρ 和力 \mathbf{K} 的散度大小成比例，即有

$$\Delta\Phi = G\rho \quad (4.5)$$

G 为万有引力恒量。在静电学中，电荷密度起着同样的作用，但在静磁学中不存在这种现象。

2. 热传导方程

c. 存在着这样几种物理过程，其中任一点上的 Φ 值在某些时刻可能与它所在邻域内的平均值不同，但不是在全部时间内都这样。在这种情况下，这种差别会引起一种随时间而

趋于均匀化的趋势，而且，局部值比平均值越小，它随时间的增长率就越大。这在数学上可以表示为

$$\Delta\Phi = k \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.6)$$

k 为比例系数，热传导就是这样一种趋向均匀化的典型例子。方程 (4.6) 通常叫做热传导方程。在这个特例中， Φ 就是温度 T 。热流 $\mathbf{q} = -\lambda \text{grad } T$ [参阅式 (3.3)]，它在单位时间内引起离开任一体积元 dV 的总热量为 $dV \text{div } \mathbf{q}$ 。因此，温度将以 $dV c\rho(\partial T/\partial t)$ 的速率下降。其中 c 为材料的比热， ρ 为材料的密度。由此可见，

$$\text{div } \mathbf{q} = -\lambda \Delta T = -c\rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

或

$$\Delta T = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.7)$$

其中 $\lambda/c\rho$ 叫做“热导率”。

扩散定律可以用同样的微分方程来表示。这时， Φ 为扩散物质的密度。密度的变化率与它的局部值和平均值之差成比例。象热流和温度梯度成比例一样，扩散速率也和密度的变化率成比例。

从物理学的观点来看，液体和气体中的内摩擦也是类似的现象。这种类比在气体动力论中是很重要的，它给出了热传导常数与物质摩擦力之间的关系。但是，这一问题从数学的观点来看是相当困难的，因为这些摩擦现象不能用标量或矢量来描述，而要用到张量的概念。这里我们就不去研究这个问题了。

3. 波动方程

d. 最后，局部值与所在邻域内的平均值的偏离也可能具有象振动现象中离开平衡位置的位移那样（见第二章第12节）的作用，可以出现一个使变量趋向平均值的力，从而使系统恢复到平衡位置。于是，我们就得到一种运动，它与时间的关系可以用类似于加速度的量（即二阶导数）来表示。这个方程应有如下的形式：

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \quad (4.8)$$

这里 $1/c^2$ 写成平方是因为它是一个正值系数。 Φ 的值“被加速”，由此，在比平均值小的位置上 Φ 值增大。这个微分方程的主要性质，可以由它与机械振动相比较而求得，也就是说可以用力学中振动方程的那些解法（见第二章第12节）。由于加速的结果， $\partial\Phi/\partial t$ 在平衡位置不等于零 [而不是象在式 (4.6) 中那样等于零]。系统“移过”平衡位置，而后再重复同样的运动。变量 Φ 在其平衡位置的数值附近振动，式 (4.8) 是一般的波动方程。我们在第五章第5节中将会看到常数 c 就是传播速度。

4. 理想流体的微分方程

流体动力场可以用流体静压强 p （它是一个标量）和速度 v （矢量）来描述。我们将把这两个量都表示成位置和时间的函数，而不是表示成流体中固定质点的函数。在空间某一位置，不同的时间有不同的质点，这样， p 和 v 就成了时间

和不随流体运动的点的坐标的函数。根据未知量的数目，我们有一个标量微分方程和一个矢量微分方程。第一个方程表示质量守恒定理。在体积元中包含的质量等于 ρdV ，其中 ρ 为密度。则单位时间离开体积元的质量为 $dV \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ ，它使体积元中包含的质量减少，因而引起这个体积元中剩下的流体密度下降。如果用密度的导数来表示，则单位时间内 dV 中质量的减少等于 $-dV \frac{\partial \rho}{\partial t}$ 。于是，流体力学的连续性方程有如下形式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.9)$$

如果流体是不可压缩的 ($\rho = \text{常数}$)，它就有更简单的形式：

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4.9a)$$

流体力学的矢量方程包含着单个体积元 dV 的基本牛顿定律式 (2.3)，质量为 ρdV 。在牛顿方程中，加速度是某个确定质点的速度导数，而不是一个固定点上的速度导数。因而，速度的变化由以下两部分组成：第一，在质点所在位置上的速度变化；第二，由于质点位置的变化而引起的速度变化。第一种变化可以用偏导数 $\partial \mathbf{v} / \partial t$ 表示，第二种变化则等于：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (4.10)$$

在这个方程中， $\frac{dx}{dt}$ ， \dots 等表示质点位置对时间的导数，这意味着它们与该点的速度 \mathbf{v} 分量是相等的。如果我们用 u 、 v 、 w 表示这些分量，则表达式 (4.10) 的三个分量式为：

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\
& u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\
& u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.10a}$$

作为缩写，我们将 (4.10 a) 的三个表达式写成矢量形式 $(\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v}$ 。作用在体积元 dV 上的力是由体积力（如，重力） $\mathbf{K} dV$ 和等于 $-dV \text{ grad } p$ 的体积元表面上的压力合成的。我们可用图30所示的体积元 $dx dy dz$ 来导出这个结果。压力垂直于表面，所以，力 $p dy dz$ 作用于 x 轴的正方向，而力 $-[p + (\partial p / \partial x) dx] dy dz$ 作用于 x 轴的负方向。因此， x 方向分力的合力为 $-(\partial p / \partial x) dx dy dz$ 。

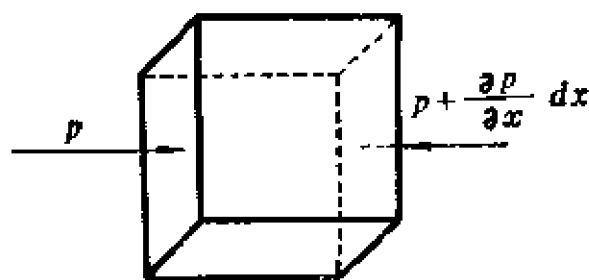


图 30 流体的静压力

于是，我们得到一个流体力学的矢量方程（欧勒方程）

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} \right] = \mathbf{K} - \text{grad } p \tag{4.11}$$

如果流体是不可压缩的（例如，水），则 ρ 为常数。反之，如果流体是可以压缩的，例如对绝热过程，则 ρ 是 p 的已知函数。下面我们只研究 ρ 为常数的情况。

5. 涡 旋

为了数学处理，只要可能的话，我们就要把这个包含四

个未知量的四个微分方程简化为只含一个未知量的一个方程。首先，我们通过计算式 (4.11) 右端各项的旋度来消去压强（根据式 (3.23) $\text{rot grad } p = 0$ ）。若体积力 \mathbf{K} 是由势 Ω 导出的（参阅第四章第 1 节），它的旋度也等于零，于是我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{v}) + \text{rot}[(\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v}] = 0 \quad (4.12)$$

我们在笛卡儿直角坐标系中写出这个方程，但是，下面只计算其中的 z 分量，它等于：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + w \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \\ - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - w \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = 0 \end{aligned}$$

或以更清楚的形式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

利用

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.9a)$$

并且加上

$$+ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial z} \\ - \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial z}$$

最后得到较为简单的形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ - \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

这是一个关于三个旋度分量的方程。此外，还有其它两个方程。现在，式 (4.13) 的第一项等于固定点处旋度对时间的导数（根据前一节），式 (4.13) 还表明，如果旋度本身等于零，这个导数也就等于零，旋度的物理意义是“涡旋”

（参阅第三章第 8 节）。可见，一个在某一瞬时不旋转的流体质点，它永远也不会旋转。只要我们关于理想流体和保守

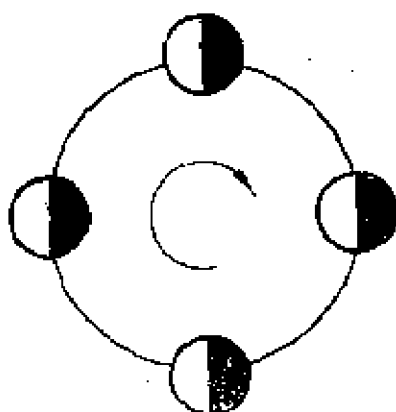


图 31a 没有自转的圆周运动 (Ferris 轮)

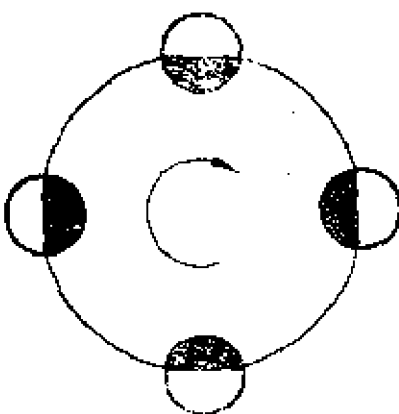


图 31b 有自转的圆周运动 (月亮绕地球旋转)

的体积力的假设成立，这个结论就是正确的。如果一个流体质点在一个弯曲的路径上移动，不一定就表示这个质点本身在旋转。若如图 31 所示，在 origin 产生一个涡旋，那些原来不旋转，仅仅是在压力作用下才移动的其他质点，仍然保持没有涡旋，它们的运动情况与图 31 a 所表示的情况相同，而与图 31 b 所表示的情况不同。

6. 势 流

虽然用式 (4.13) 来处理涡流是完全可能的，但是，我们还是只研究没有涡旋的流动，因为它代表了一个非常明显的微分方程的应用实例。如果在某一瞬间处处都有 $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ，那么对任一时刻同样会有 $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ 。于是，根据式 (3.23) [类似于式 (4.3)]， \mathbf{v} 是标量 Φ 的梯度， Φ 叫做“速度势”，即有

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi \quad (4.14)$$

从连续性方程 (4.9 a) 可得

$$\text{div grad } \Phi = \Delta \Phi = 0 \quad (4.15)$$

此外，我们还有以下两个边界条件：a. 在一个刚性的壁上，流体不能透入壁内，因而，不存在垂直于壁的速度分量；b. 在自由表面上，压强为常数。

通过简单的计算，则得

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4.15a)$$

或 $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2$ 。如果在式 (4.11) 中, 用 $\text{grad } \Phi$ 代替 \mathbf{v} , 并应用式 (4.15a), 则得

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \text{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \\ & = - \text{grad } \Omega - \text{grad } p \end{aligned}$$

对上式积分一次, 得

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} + \Omega + p \\ & = \text{常数} \end{aligned} \quad (4.16)$$

因此, 若已知 Φ , 并且由 Φ 和 p 在某一点上的给定值可以定出常数, 那么, 我们就可以求出 p 来了。

应当指出, 没有涡旋的流动 (势流) 仅仅是真实流动中的一个特别简单的情况。不过, 大量的实际问题都可以用与势流近似的方法解出。翼面理论和飞机、螺旋桨、汽轮机以及表面波、射流束等有关理论问题, 都是用这种办法处理的。

7. 电动力学的微分方程

真空中的电磁场是由电场和磁场这两个矢量 (\mathbf{E} 和 \mathbf{H}) 来描述的。它的微分方程是麦克斯韦从两个实验事实导出的。第一个实验事实是法拉第电磁感应定律, 即磁场的变化率 $\partial \mathbf{H} / \partial t$ 伴随着电场 \mathbf{E} , 即有

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \text{rot } \mathbf{E} \quad (4.17)$$

常数 c 为比例系数, 如果 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 用静电场和静磁场中的力来定义 (即 \mathbf{E} 用静电制单位, 而 \mathbf{H} 用静磁制单位——译者), 则 c 具有速度的量纲. 这个因子在式 (4.18) 中还会遇到, 它恰好等于光的速度, 这曾是导致光的电磁理论创立的首要事实之一.

由麦克斯韦推广为基本定律的第二个实验事实涉及到电流所产生的磁场, 而电流和磁场两者之间的耦合是应用旋度概念的一个实例, 原来的微分方程是

$$\frac{1}{c} \mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H}$$

如果电流密度 \mathbf{J} 也用静电制单位, 这里的 c 就和式 (4.17) 中的 c 数值相同. 麦克斯韦根据交流电流的某些性质的推论, 和出于寻求光和电磁场之间类比的目的, 通过引入“位移电流” $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 的概念建立了这个方程. 位移电流应当象普通电流 \mathbf{J} 一样能够产生磁场, 并与式 (4.17) 的 $\partial \mathbf{H} / \partial t$ 类似.

那么, 微分方程就变成了

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) = \text{rot } \mathbf{H} \quad (4.18)$$

根据电子论, 可以把电流密度 \mathbf{J} 写成电荷密度 ρ 和电荷的速度 \mathbf{v} 的乘积.

从式 (4.17) 和 (3.24) 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{H}) = 0$$

这意味着 $\text{div } \mathbf{H}$ 与时间无关. 根据我们的经验, 磁源 (磁荷) 是不存在的, 于是有

$$\text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (4.19)$$

如果我们对式 (4.18) 两边取散度, 就可得到“连续性方程”

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{E}) + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (4.20)$$

电荷密度 ρ 可以用下面的方程来定义,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \quad (4.21)$$

运用 $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, 则式 (4.20) 和流体力学的连续性方程 (4.9) 具有同样的形式。实际上, 这种类比早在“电流”这个词中就表现出来了。

8. 实物中的场方程

到目前为止, 我们仅仅讨论了真空中在电流和电荷影响下的场。然而, 从电子论的观点来看, 这种情况包括了所有的可能性。因为这个理论不仅考虑了电流和电荷, 还通过实物中假定的电荷和电流分布说明了这些实物对场的影响。至于这些电流和电荷在实物中分布的精确方式, 那是专门理论的研究题目, 我们这里由于篇幅所限, 就不能深入研究了。

旧的麦克斯韦理论, 采取把基本方程写成广义形式的办法来避免这些困难。为此, 基本方程中包含了材料的某些常数。这些包含有磁导率 μ 、介电常数 ϵ 和电导率 σ 的普遍方程是

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{c} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \right) = \text{rot } \mathbf{H}, \quad \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0$$

现在，我们试图用消元法来简化麦克斯韦方程组。不过，为了这个目的，我们还需要再次研究真空中的电磁场。

9. 能量定理

如果我们取式(4.18)与 \mathbf{E} 和式 (4.17) 与 \mathbf{H} 的标积并利用关系式

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \textcircled{1}$$

①此式的推导过程如下：式 (4.18) 与 \mathbf{E} 的标积为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} &= E_x \text{rot}_x \mathbf{H} + E_y \text{rot}_y \mathbf{H} + E_z \text{rot}_z \mathbf{H} \\ &= E_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + E_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + E_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &= E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} - E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} - E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned}$$

而式 (4.17) 与 \mathbf{H} 的标积为

$$\begin{aligned} -\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} &= -H_x \frac{\partial E_z}{\partial y} + H_x \frac{\partial E_y}{\partial z} - H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} + H_y \frac{\partial E_z}{\partial x} - H_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ &+ H_z \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned}$$

两式相加，并按 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ 整理得

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} &= H_y \frac{\partial E_z}{\partial x} + E_x \frac{\partial H_z}{\partial x} - H_x \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_y \frac{\partial H_x}{\partial x} \\ &+ H_x \frac{\partial E_z}{\partial y} + E_x \frac{\partial H_x}{\partial y} - H_z \frac{\partial E_x}{\partial y} - E_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ &+ H_z \frac{\partial E_y}{\partial z} + E_y \frac{\partial H_z}{\partial z} - H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (E_x H_x - E_y H_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x H_x - E_z H_x) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (E_y H_x - E_x H_y) \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_z \right] \\ &= -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \end{aligned}$$

——译者注

(这个关系式可以用直角坐标容易地证明) 就可以得到一个简单的关系式。于是，我们得到下面的方程

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (H^2 + E^2) + \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \approx 0 \quad (4.23)$$

这个方程就是能量定理，其中 $\frac{1}{2}E^2$ 和 $\frac{1}{2}H^2$ 分别是每一单位体积的电场能和磁场能； $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ 是单位时间内单位体积产生的焦耳热； $c \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ 是单位时间内离开这个体积的能量。由此可知， $c \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 是单位时间内通过表面的能流，这个矢量叫做“坡印廷矢量”。

10. 电 磁 波

只要有 $\rho = 0$ 和 $\mathbf{J} = 0$ ，麦克斯韦方程就可以简化为仅包含一个未知量的单一方程。因为，如果在下列两方程

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

中，对第一个方程取旋度，将第二个方程对时间求导数，后者再乘以 $1/c$ 。然后，把它们加起来，则得

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

利用式 (3.25) 和 $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ [由式 (4.21) 可知 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$ ，而 $\rho = 0$ ，则 $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ ——译者注]，可得波动方程

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{E} \quad (4.24)$$

\mathbf{E} 的每一分量都满足这个方程。对 \mathbf{H} 来说，这种形式的方程也成立，这一结果具有重大的理论意义，因为它不仅证明了电磁波的存在，还指出了它的传播速度等于光的速度，因此，光的传播也可以用麦克斯韦理论来处理。如果我们用同样的方法，从式 (4.22) 中消去 \mathbf{H} ，则得

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E} \quad (4.25)$$

在这个微分方程中，第一项相当于速度为 $c/(\varepsilon\mu)^{1/2}$ 的波，第二项相当于振动的阻尼。如果我们把这一项与式 (4.7) 作一比较，就会看到材料的电导率越小，则阻尼系数越大。

①式 (4.25) 中第二项原文为 $\frac{\sigma\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ，其中系数的分母 c 上漏掉了方指数“2”。因为用同样方法，将式 (4.22) 的第一个方程取旋度，而将第二个方程对时间求导数，并各乘以 μ/c ，可得

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{H}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} \\ \frac{\mu}{c^2} \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

两式相加得

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\mu}{c^2} \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{H}}{\partial t} \\ \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} \end{aligned}$$

由式 (3.25) 可知

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$$

而由式 (4.22) 已知

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0$$

所以，

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$$

由此即可得到式 (4.25)

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E} \quad \text{——译者注}$$

11. 电 磁 势

通过引入势的概念，我们还可以得到另一种麦克斯韦方程的简化形式。这种简化对于静态情况并没有给出什么新的东西，因为，若 $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ 或 $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ ，则情况和我们以前研究过的重力场或流体流动（势流）的情况类似。现在，我们引入一个势 Φ ，使 $\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi$ 。于是，由 $\text{div}\mathbf{E} = 0$ ，可得

$$\Delta\Phi = 0 \quad (4.26)$$

在一般情况下，我们还可以引入一个叫做“矢量势”的矢量

$$\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (4.27)$$

因为 $\text{div}\mathbf{H} = 0$ [参阅式(3.24)]，这个等式是可能实现的。不过，由于 \mathbf{A} 仍是矢量，所以，引入它并没有直接的好处。我们只是用了三个另外的未知量来代替三个原有的未知量而已。但是，如果我们把这个关于 \mathbf{H} 的表达式代入式(4.17)，则得

$$\text{rot}\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\text{rot}\mathbf{E}$$

由此，我们还不能断定 $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 。因为从式(3.23)已知梯度的旋度恒等于零。所以，两个旋度相等的量可能相差一个标量的梯度。即有

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\Phi \quad (4.28)$$

如果我们把这一关系式分别代入另外两个麦克斯韦方程(4.18)和(4.21)，就可得到

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\mathbf{A}) - \Delta\Phi = \rho$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \Phi + \frac{1}{c} \mathbf{J} = \text{grad} \text{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \quad (4.29)$$

因为在选择势时，只需满足式 (4.27) 和 (4.28)。所以，我们可以自由地规定两个势之间的另一个关系式。为此，我们选择下面的关系式来化简式 (4.29)，即

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (4.30)$$

在这种情况下，我们从式 (4.29) 就得到了两个和波动方程非常类似的方程，即是

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \mathbf{J} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi &= \rho \end{aligned} \quad (4.31)$$

这四个微分方程只包含四个未知量（矢量 \mathbf{A} 的三个分量和标量 Φ ——译者），而原来的方程则包含六个未知量。应当注意符号 Δ 的重要性，也要注意我们在第四章第 1 节到第 3 节曾经见过的这类微分方程的重要性。

12. 边界条件

现在，我们来研究包含两种材料部分界面的面元 S （见图 32），它垂直于界面的线度远远小于平行于界面的线度。

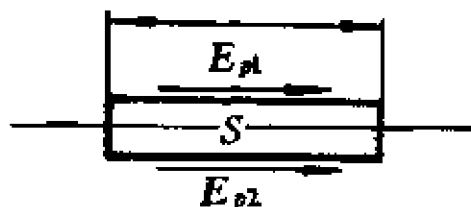


图 32 在两种材料边界上的电场力

如果平行于界面的分量（图 32 的 E_{p1} 和 E_{p2} ）之差是有限的，则旋度将是无限大。考虑到面积 S 是无限小时线积分 $\oint \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}$ 是有限的，又因为 $\partial(\mu \mathbf{H})/\partial t$ 在

式 (4.22) 中不能为无限大, 所以, 我们有

$$E_{n1} = E_{n2} \quad (4.32)$$

这个结果对平行于界面的磁场也同样是适用的, 因为式 (4.22) 中另一个方程左端一项也不能为无限大.

如果我们把两个散度方程用于底面为 S (见图 32)、高为 h (垂直于图 32 所在的平面) 的柱形区域, 就可以得到 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 法向分量的两个边界条件. 因为 $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, 所以, 两个法向分量不可能有差别, 于是有

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} \quad (4.33)$$

另一方面, 还有

$$\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) Sh = (\epsilon_2 E_{n2} - \epsilon_1 E_{n1}) lh$$

因此,

$$\epsilon_2 E_{n2} - \epsilon_1 E_{n1} = \lim_{S \rightarrow 0} \rho \frac{S}{l} = \omega \quad (4.34)$$

ω 可以不等于零, 因为两种材料的界面上有电荷密度存在, 在极限情况下其值可以大到趋近于 ω/l ①. 这种电荷 (在一个无限小体积中的有限电荷) 叫做 “面电荷”.

①原文为 S/l , 这是不正确的. 因为这样就有

$$\lim_{S \rightarrow 0} \rho \frac{S}{l} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S}{l} \frac{S}{l} = 0$$

一般来说, 电荷密度应写作: $\rho = \frac{q}{Sl}$ (q 为电量) 如写作 $\rho = \frac{\omega}{l}$, 则 $\omega = \frac{q}{S}$, 即相当于电荷的面密度.

——译者注

第五章 用本征函数求解

1. 乘 积 法

一个偏微分方程可能存在着由几个函数的乘积所组成的解，其中每一个函数只与一个变量有关。应用这个概念常常使我们有可能把一个偏微分方程的解简化为几个常微分方程的解。当然，这种解不是通解，而且，只有当边界条件满足某种对称性和齐次性条件时，才能应用这种解法。不过，在很多实际情况中，用这种方法求解是很普遍的。

现在，我们以势方程为例来说明这种方法。势方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1)$$

我们尝试取 $u = XYZ$ ，其中 X 只是 x 的函数， Y 只是 y 的函数， Z 只是 z 的函数。如果用“'”（撇）表示微分，则由式 (5.1) 得到

$$X''YZ + Y''XZ + Z''XY = 0 \quad (5.2)$$

上式除以 XYZ 后得

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

现在 X''/X 只是 x 的函数，……等等。仅当这三个不同变量的函数都是常数时，它们之和才可能为零，故有

$$\frac{X''}{X} = -\alpha, \quad \frac{Y''}{Y} = -\beta, \quad \frac{Z''}{Z} = -\gamma \quad (5.3)$$

这里，常数 α, β, γ 满足以下条件：

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (5.4)$$

考虑到实际需要，我们在式 (5.3) 中取负号。

现在要解式 (5.3) 这三个常微分方程，它们的解包含六个积分常数，如果这些常数是充分满足边界条件的，那么，边界条件的性质就决定了能否确定这些常数，也就决定了这种方法究竟是否完全可用。下面，我们专门从物理上来研究这些问题，并列几种边界条件。

2. 例：恒稳热流

方程 $\Delta u = 0$ 给出了热为恒稳分布（即温度处处仅与位置有关，而与时间无关）的物体上的温度 u 。我们假定这个物体是长方体，边长分别为 a, b, c ，再选取一个坐标轴分别平行于这一物体各个边的直角坐标系，并使物体的四个侧面与外界完全绝缘，因而在这些侧面上没有热流出入。现把一个侧面 ($x = a$) 置于常温(零度)下，另一个侧面上 ($x = 0$) 的温度由函数 $u = f(y, z)$ 给定。但是，怎样求出物体内部的温度呢？现在有六个边界条件：

$$x = 0 \text{ 时, } u = f(y, z);$$

$$x = a \text{ 时, } u = 0 \text{ 或 } X = 0.$$

此外，因为热流与 $\text{grad} u$ 成比例[根据式 (3.5)]，故有

$$y = 0 \text{ 和 } y = b \text{ 时, } \partial u / \partial y = 0 \text{ 或 } Y' = 0;$$

$$z = 0 \text{ 和 } z = c \text{ 时, } \partial u / \partial z = 0 \text{ 或 } Z' = 0. \quad (5.5)$$

在这些边界条件中，除了第一个以外，其余的条件都是齐次线性的，这意味着每一项内都包含着未知量的一次乘方。

我们首先利用式 (5.3) 中的第二个方程： $Y'' + \beta Y = 0$ ，

以及边界条件 $y=0$ 和 $y=b$ 时, $Y'=0$, 最普遍的解是

$$Y = A\sin(\beta^{1/2}y) + B\cos(\beta^{1/2}y)$$

为了满足 $y=0$ 时 $Y'=0$, 我们必须让 $A=0$. 另外, 由第二个条件得

$$B\beta^{1/2}\sin(\beta^{1/2}b) = 0$$

于是我们有 $B=0$ 或者 $\sin(\beta^{1/2}b)=0$. 在第一种情况下 ($B=0$ 时), 可得 $Y=0$, 但它对我们没有什么用处. 在第二种情况下, 得到

$$\beta^{1/2} = n\pi/b \quad (n \text{ 为任意整数}) \quad (5.6)$$

在开始计算时, 我们引入了一个任意常数 β , 现在它已经在某种程度上由计算确定了. 式 (5.6) 给出了无数个可能的 β 值, 叫做“本征值”. 每一个本征值对应着一个本征函数 $\cos(n\pi y/b)$, 它们都满足式 (5.3) 的第二个方程及其边界条件. 而且, 将无限多个本征函数中的每一个函数乘以任意常数 (B_n) 都是一个解. 现在, 我们需要解决的问题是考察哪些本征函数是有意义的和如何确定常数 B_n .

然而, 我们注意到用类似的方法可以求出本征值

$$\gamma^{1/2} = m\pi/c \quad (m \text{ 为任意整数}) \quad (5.7)$$

本征函数 $\cos(m\pi z/c)$ 对应着下列方程

$$Z'' + \gamma z = 0, \text{ 而且, 当 } z=0 \text{ 和 } z=c \text{ 时, } Z'=0$$

从式 (5.6)、(5.7) 和 (5.4) 可得

$$\alpha = - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \quad (5.8)$$

如果把上式代入方程 $X'' + \alpha X = 0$, 就可得到

$$X'' - \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \right] X = 0$$

其边界条件为：当 $x = a$ 时， $X = 0$ 。用简写

$$\left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \right]^{1/2} = \nu_{mn}$$

则方程的解是

$$X = A_{mn} [\cos h(\nu_{mn} x) - \cot h(\nu_{mn} a) \sin h(\nu_{mn} x)] \quad (5.9)$$

这样，我们就找到了具有齐次边界条件的微分方程的双重无限多个解 $u = XYZ$ 。因为微分方程是线性的，几个解的和仍然是解。现在，我们要找到这些解的线性组合，使它们也满足 $x = 0$ 处的非齐次边界条件。

如果 $f(y, z)$ 具有下列形式

$$f(y, z) = A_{mn} \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{m\pi}{c} z$$

那么，这个问题已经由齐次问题的一个特解解决了。

3. 傅里叶级数

由于微分方程的特解可以相加组成通解，所以，我们有如下结果：如果函数 $f(y, z)$ 可以表示为如下形式：

$$f(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{m\pi z}{c} \quad (5.10)$$

则温度场为

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} [\cos h \nu_{mn} x - \cot h \nu_{mn} a \sin h \nu_{mn} x] \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{m\pi z}{c} \quad (5.11)$$

这里

$$\nu_{mn} = \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{c} \right)^2 \right]^{1/2}$$

因此，我们的方法对所有能够展开成式(5.10)型三角级数的函数都是可用的。

为了简单起见，我们假定，当 m 不等于 1 时，在式(5.10)中所有的系数 A_{mn} 都等于零。这就是说， $f(y, z)$ 具有 $F(y) \cos(\pi z/c)$ 的形式。于是，问题就简化为把 $F(y)$ 展成级数

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (5.12)$$

式(5.12)这种类型的级数叫做傅里叶级数，以纪念第一个使用并确定了这一级数普遍性质的数学家——傅里叶。

式(5.12)右端的函数是周期性的。最大的周期相应于 $n=1$ (如果我们省略 $n=0$)，它的值为 $2b$ ，其它各周期等于 $2b$ 除以某个整数。因此，式(5.12)右端的函数是周期等于 $2b$ 的周期函数。函数 $F(y)$ 只在半个周期(即在 $y=0$ 和 $y=b$ 之间)内是给定的，对我们来说，只要式(5.12)中级数在 $y=0$ 到 $y=b$ 这个区间内代表 $F(y)$ 就够了，在这个区间之外的数值与我们无关。为了把 $F(y)$ 从区间 $(0, b)$ 延拓到整个周期的区间 $(-b, b)$ ，我们可对区间 $(0, b)$ 内的任一个 y 定义 $F(-y) = F(y)$ 。实际上，由于级数中只出现含有余弦的项，所以，任一个可以用式(5.12)表示的函数都是一个偶函数。又因为函数必须是周期性的，所以，在整个 y 轴范围内，可以唯一地确定它们。

首先，我们可以得到 A_n 的一个简单的表达式。将方程(5.12)乘以 $\cos \left(\frac{l\pi y}{b} \right)$ (l 为整数)，并从 $y=0$ 到 $y=2b$

积分, 则得

$$\int_0^{2b} F(y) \cos \frac{l\pi y}{b} dy = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{2b} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{l\pi y}{b} dy \quad (5.13)$$

此外, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{2b} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{l\pi y}{b} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2b} \left[\cos(n+l) \frac{\pi y}{b} + \cos(n-l) \frac{\pi y}{b} \right] dy \quad (5.14) \end{aligned}$$

除了 $n=l$ 以外, 这些积分都等于零. 在这种情况下, 式 (5.14) 的积分可以简化为

$$\int_0^{2b} dy = 2b$$

这一运算使式 (5.13) 中所有 $n \neq l$ 的各项都等于零, 只剩下一项 $A_l b$.

这就使 A_n 可以用简单的方法计算出来, 即

$$A_n = \frac{1}{b} \int_0^{2b} F(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \quad (5.15)$$

我们再引入一个新的变量 $\eta = \pi y/b$, 其周期不是 $2b$, 而是 2π . 由此, 我们就能得到一个更好的数学形式

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\eta) \cos(n, \eta) d\eta \quad (5.16)$$

$n=1$ 是一个特殊情况. 如果在式 (5.12) 中, 我们对右端各项取平均值, 则因每一个余弦项常常是正的部分与负的部分相等, 所以, 我们得到的结果为零. 当 $n=0$ 时, $\cos 0 = 1$, 于是有

$$A_0 = \frac{1}{2b} \int_0^{2b} F(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\eta) d\eta \quad (5.17)$$

这样，我们就有了一个计算系数 A_n 的方法。只要式 (5.15) 和 (5.17) 的积分有意义，即 $F(y)$ 一定是可积的。那么，对 $F(y)$ 就不需要什么限制了。然而，在每一点上连续和可微则不是必要的。

这里，我们必须省略关于带有计算出的系数的级数以 $F(y)$ 为极限的证明。以后我们将证明这种计算系数的方法，在许多比我们的例子远为普遍的情况下也是正确的。

4. 例

现在，我们来对一个特例进行完整的计算。当 $x=0$ 时，温度可能是 y 的一个线性函数。于是有 $F(y) = C(b-y)$ 。这个函数和它作为一个周期性偶函数的连续性表示在图 33 中。根据这一表示，在区间 $(b, 2b)$ 内有 $F(y) = C(y-b)$ 。由式 (5.17) 可得

$$A_0 = \frac{C}{2b} \left[\int_0^b (b-y) dy + \int_b^{2b} (y-b) dy \right] = C \frac{b}{2}$$

由式 (5.15) 得

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{C}{b} \left[\int_0^b (b-y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy + \int_b^{2b} (y-b) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \right] \\ &= 2 \frac{Cb}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

或

$$A_n = 4 \frac{Cb}{n^2 \pi^2} \quad (n \text{ 为奇数})$$

$$A_n = 0 \quad (n \text{ 为偶数})$$

于是，我们有傅里叶级数

$$F(y) = 4 \frac{Cb}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{1^2} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi y}{b} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi y}{b} \dots \right] \quad (5.18)$$

问题的解为

$$u = \frac{4Cb}{\pi^2} \cos \frac{\pi z}{c} \left\{ \frac{\pi^2}{8} \left(\cosh \frac{\pi x}{c} - \coth \frac{\pi a}{c} \sinh \frac{\pi x}{c} \right) + \frac{1}{1^2} \left[\cosh \pi \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{1/2} x - \coth \pi \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{1/2} a \sinh \pi \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{1/2} x \right] \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{3^2} \left[\cosh \pi \left(\frac{9}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{1/2} x - \coth \pi \left(\frac{9}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{1/2} a \sinh \pi \left(\frac{9}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{1/2} x \right] \cos \frac{3\pi y}{b} + \dots \right\} \quad (5.19)$$

这个解给出了物体上任何一点 (x, y, z) 的温度, 图 33 表示级数收敛得很快。

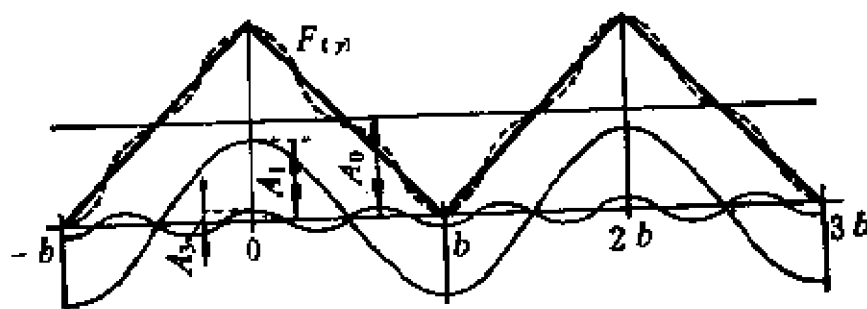


图 33 函数 $F(y)$ 分解为傅里叶级数
--- 曲线表示傅里叶展开的前三项之和

5. 弦 的 振 动

傅里叶级数这个数学方法在声学振动理论中是非常清楚

的。声音可以分解为基音和谐音，这是读者所熟悉的概念。在我们刚刚完成的计算中三角级数的重要性，使我们联想到振动理论中的又一个例子。在振动理论中，我们已经见到过三角函数(第二章第12节)。对所有的发音工具，方程(4.8)都是成立的。根据我们研究的特定情况，这个方程可以从弹性材料(弦、膜片)理论中导出，也可以由可压缩流体(对管乐器)的理论中导出。

现在，我们来研究一个简单的例子。有一根弦固定在 $x=0$ 和 $x=l$ 的两点上，受到张力 S (单位横截面上的力) 的作用，求离开平衡位置的垂直位移 u 与位置 x 和时间 t 的函数关系，其微分方程可以通过研究质量为 ρdx (ρ 为单位长度的质量) 的一段线元来导出(见图34)。线元在 u 方向上的

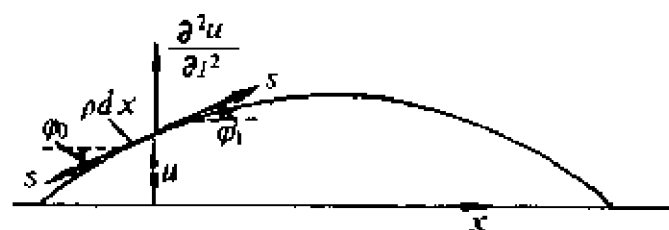


图34 弦的振动

的加速度为 $\partial^2 u / \partial t^2$ ，这个方向上的分力为 $S \sin \varphi_1 - S \sin \varphi_0$ 。当角度很小时， $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \partial u / \partial x$ ，由此得

$$S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \right] = S \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

由牛顿定律得

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.20)$$

如果我们令 $S/\rho = c^2$ ，就可得到象最简单的方程(4.8)那样的形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.21)$$

这里，如果我们再令 $u = X(x)T(t)$ ，则有

$$\frac{X''}{X} = -\alpha \quad \text{和} \quad \frac{T''}{T} = -\alpha c^2 \quad (5.22)$$

其中 α 是一个待定常数，选取负号是为了简化方程。相应于式 (5.22) 中第一个方程的边界条件是

当 $x=0$ 和 $x=l$ 时， $u=0$

由于 $X = A\sin(\alpha^{1/2}x) + B\cos(\alpha^{1/2}x)$ ，如果本征值 $n^2\pi^2/l^2$ (n 为整数) 中一个也不等于 α 值的话，我们就又得到平凡解 $X=0$ 。本征函数是 $\sin(n\pi x/l)$ ，其中 $n\pi/l$ 是空间振动频率。波长为 $2l/n$ ，它等于弦长的两倍或弦长几分之一两倍 (图 35)，这是众所周知的基频和谐频振动的表示法。从式 (5.22) 的第二个方程直接可得到时间频率，方程的解为

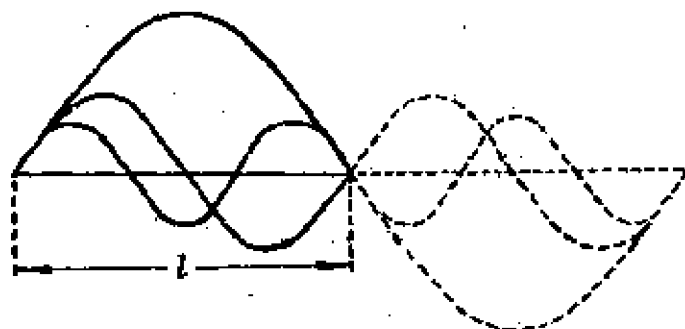


图 35 基频和谐频的振动

$$T = A_r \cos \frac{n\pi c t}{l} + B_r \sin \frac{n\pi c t}{l}$$

频率等于 $n\pi c/l$ ，振动周期是 $2l/\pi c$ ，传播速度通常等于振动波长/振动时间，即等于 c (参阅第四章第 3 节)。

这里，我们从相应于 $t=0$ 的值可以得到常数 A_r 和 B_r 。弦的位置 u 和速度 $\partial u/\partial t$ 必须在振动开始时作为 x 的函数给出。在拨弦的情况下，初始位置是给定的；在敲击弦的情况下，初始速度是给定的。激发的具体方式对不同的弦乐器来说是很不相同的。由此就可以确定常数 A_r 和 B_r ，以及谐波的强度和音质。

如果初始条件是 $u = f(x)$ 和 $\partial u/\partial t = 0$ ，则所有的 B_r 都等

于零，且 $f(x)$ 应具有下列求和的形式，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

而如果初始条件为 $u = 0$ 和 $\partial u / \partial t = g(x)$ ，则 A_n 等于零，且

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

正弦级数的导数可以用和余弦级数同样的方法进行计算，如果初始位置和初始速度两者都不等于零，那么，最好是把解表示为两个函数之和，一个是初始速度等于零的函数，另一个是初始位置等于零的函数。有些乐器可以把振动象傅里叶级数一样分解为“部分振动”，它们大多数是以共振现象为基础的。这就是听觉的原理。其它能进行傅里叶分解的天然的方法是弥散，在弥散中各部分振动具有不同的传播速度。最后，还有阻尼，其中谐频振动比基频振动消失得快些。以后，我们还要研究关于后一现象的例子。

6. 推 广

现在，我们来说明上述方法的适用范围。前面我们所研究的方法似乎是依赖于三角函数的应用，而三角函数又满足关系式

$$\int_0^{2\pi} \cos n\eta \cos l\eta d\eta = 0 \quad (l \neq n)$$

这似乎是比较偶然的巧合，但它却使结果得到很大的简化。然而，容易看出，这个方法并不局限于单纯的余弦级数。利用下列公式

$$\int_0^{2\pi} \sin n\eta \sin l\eta d\eta = 0 \quad (l \neq n)$$

和

$$\int_0^{2\pi} \cos n\eta \sin l\eta d\eta = 0 \quad (\text{任意的 } l \text{ 和 } n)$$

这个方法还可以推广到单纯的正弦级数，甚至于正弦、余弦相混合的级数。我们以前把式 (5.10) 简化为式 (5.12)，只不过是方便了，在一般的情况下，我们可以用同样的方法来确定系数 A_{mn} 。因为除非 $n=l$ 和 $m=k$ ，总有

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\eta \cos m\xi \cos l\eta \cos k\xi d\eta d\xi = 0$$

如果 $n=l, m=k$ ，这个二重积分等于 π^2 。因此，在式 (5.10) 中我们有

$$A_{mn} = \frac{1}{bc} \int_0^{2b} \int_0^{2c} f(y, z) \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{m\pi z}{c} dy dz \quad (5.23)$$

为了了解这些关系式的普遍含意，大家必须弄清楚，我们会用上 $\cos(n\pi y/b) \cos(m\pi z/c)$ 这些函数的。它们是具有某些边界条件，形如

$$\Delta u = 0 \quad \text{或} \quad \Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

的微分方程的本征函数，这是我们曾经得到过的。从第四章第 1—3 节 [当然，在方程 (4.5) 的情况下，不能用这种方法] 来看，当把未知函数表示为乘积时，这些齐次线性微分方程总可以变换成如下形式：

$$\Delta v = \lambda v \quad (5.24)$$

这里 v 与一个、两个或三个变量有关， Δv 具有第三章第 10

节中给定的一个形式。根据变量的数目，我们所考虑的区域可能是一条曲线，也可能是一个表面或一个体积。常数 λ 相当于我们的例子中的常数 α 、 β 、 γ ，它可有不同的数值用在方程的解中。我们再一次把这些数值叫做本征值。我们将这样来选择函数 v ，使得它们只满足齐次线性边界条件。这种类型的最普遍的条件是

$$hv + k \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (5.25)$$

其中 n 是区域边界的法线。在温度场的例子中，式 (5.2) 中 YZ 的表达式相当于现在的 v 。根据式 (5.2) 和 (5.3)，我们有下列方程

$$\Delta v = Y''Z + Z''Y = -\frac{X''}{X}YZ = \alpha v$$

函数 v 的区域是以 0 和 b 以及 0 和 c 为界的 y 、 z 平面，边界条件是线性齐次的，即 $\partial u / \partial n = 0$ 。

不过，因为我们有

$$\Delta Y = Y'' = -\left(\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z}\right)Y = (\alpha + \gamma)Y$$

所以，函数 Y 和 Z 本身应分别满足条件 (5.24) 和 (5.25)。而这一次，区域是一条直线，也即 0 和 b 之间的 y 轴。其边界条件是 $Y' = 0$ ，它相当于 $h = 0$ 的式 (5.25)。在弦振动的例子中， X 满足所有的 v 的边界条件，这是因为

$$\Delta X = X'' = -\alpha X$$

它的区域是从 $x = 0$ 到 $x = l$ 的线段，而边界条件是 $X = 0$ ，它相当于式 (5.25) 中 $k = 0$ 的情况。

7. 格临定理和正交性

有一些关于满足式 (5.24) 和 (5.25) 中 v 这一类型函数的定理, 我们可以借助于由高斯定理 (3.12) 推出的格临定理将其求出, 在式 (3.12) 中, 用

$$\mathbf{A} = \Phi \operatorname{grad} \Psi - \Psi \operatorname{grad} \Phi \quad (5.26)$$

来代替 \mathbf{A} , 其中 Φ 和 Ψ 是标量. 因为, 比方说, 在直角坐标系中有

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad} \Psi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \\ &= \Phi \Delta \Psi + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned}$$

所以有

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi$$

此外,

$$A_n = \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

这样, 我们就得到了格临定理

$$\iiint (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) dV = \oint \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS \quad (5.27)$$

这里的 V 可以是任一区域 (一维、二维或三维), S 是该区域的界面.

现在, 我们将式 (5.27) 应用于满足式 (5.24) 和 (5.25) 的两个本征函数 v_l 和 v_m . 根据式 (5.24), 在

$$\iiint (v_l \Delta v_m - v_m \Delta v_l) dV = \oint \left(v_l \frac{\partial v_m}{\partial n} - v_m \frac{\partial v_l}{\partial n} \right) dS \quad (5.28)$$

中引入表达式

$$\Delta v_l = \lambda_l v_l \quad \text{和} \quad \Delta v_m = \lambda_m v_m$$

并注意到，根据式 (5.25)，式 (5.28) 右端的被积函数等于零。于是有

$$(\lambda_l - \lambda_m) \iiint v_l v_m dV = 0 \quad (5.29)$$

如果 λ_l 和 λ_m 是两个不同的本征值，则

$$\iiint v_l v_m dV = 0 \quad (5.30)$$

这是我们已经遇到的一个公式的推广。这个公式使我们可以用简单的方法计算出傅里叶系数。式 (5.30) 所描述的本征函数的性质叫做“正交性”。当然，如果 $m=l$ ，式 (5.30) 是不成立的，因为这时 $\iiint v_l^2 dV$ 是正值。

8. 笛卡儿坐标中的特解

在我们的例子中，采用直角坐标系，对于 X 、 Y 、 Z ，方程的解可以用三角函数来表示。而在振动问题中，对于 T ，这样的表示也同样是正确的，至于热传导，方程的解含有指数函数。如果我们在方程

$$\Delta u = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t}$$

中，把 u 写作 $u = vT(t)$ ，则得

$$\frac{T'}{T} = \text{常数} = -\alpha$$

这一方程的解为

$$T = e^{-\alpha z} \quad (5.31)$$

9. 柱面坐标中的特解

如果问题具有柱对称性，我们可以根据式 (3.21) 在柱面坐标中表示出 Δv 来。于是，方程 (5.24) 取为如下形式：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \lambda v \quad (5.32)$$

如果在式 (5.32) 中，令 $v = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$ ，并将等式各项除以 $R\Phi Z$ ，则得

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2\Phi} \Phi'' + \frac{Z''}{Z} = \lambda \quad (5.33)$$

因为 Z''/Z 和 Φ''/Φ 分别与 z 和 φ 无关，由式 (5.33) 可得下列关系式

$$\frac{Z''}{Z} = -\alpha \quad \text{和} \quad \frac{\Phi''}{\Phi} = -\beta \quad (5.34)$$

如果 α 和 β 是正数，则三角函数满足这些关系式。反之，如果 α 和 β 是负数，则双曲函数满足这些关系式。但是， β 只能是正数。

从式 (5.33) 和 (5.34)，我们得到关于 R 的方程，即

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left[(\lambda + \alpha) + \frac{\beta}{r^2} \right] R = 0$$

如果我们令 $-(\lambda + \alpha) = k^2$ ， $\beta = p^2$ ，则有

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{p^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (5.35)$$

这个方程可以通过引入变量 $kr = \rho$ 来简化。于是有

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{p^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (5.36)$$

这就是贝塞耳方程，它的解叫做贝塞耳函数。如果人们想用这些函数进行计算，就必须象计算三角函数那样使用函数表。 p 叫做贝塞耳函数的阶，因为式 (5.36) 是二阶的，所以，必然有两个独立的 p 阶贝塞耳函数。如果 p 是有理数，这两个函数就叫做“ $+p$ 阶和 $-p$ 阶”贝塞耳函数，并用 $J_p(\rho)$ 和 $J_{-p}(\rho)$ 来表示。对于整数 p ，函数表通常包含一个贝塞耳函数 $J_p(\rho)$ 和一个“诺埃曼函数” $K_p(\rho)$ ，后者有时也用 $N_p(\rho)$ 或 $Y_p(\rho)$ 表示^①。

在本章后面第 11、12 两节中，我们将对这些函数理论上的最重要方法进行简单的讨论。

①贝塞耳函数又称第一类柱函数，如果我们所考虑的定解问题属于某个圆柱内部，我们只需用阶数为正数的贝塞耳函数。但是，如果所考虑的定解问题属于圆柱外部或某个空心圆柱，就要求有两个线性独立解。若 p 不是整数， $J_{-p}(\rho)$ 就是第二个解。若 p 为整数，则 $J_p(\rho)$ 和 $J_{-p}(\rho)$ 线性相关，必须另求第二解，一般取其下列的线性组合，即

$$\frac{J_p(\rho) \cos \pi p - J_{-p}(\rho)}{\sin \pi p}$$

为第二解，并称之为诺埃曼函数或第二类柱函数。在很多情况下，习惯于取其下列的两个线性独立解：

$$\begin{cases} H_p^{(1)}(\rho) = J_p(\rho) + iN_p(\rho) \\ H_p^{(2)}(\rho) = J_p(\rho) - iN_p(\rho) \end{cases}$$

它们称为汉克尔函数或第三类柱函数。 $H_p^{(1)}$ ， $H_p^{(2)}$ ， J_p ， N_p 之间的关系颇有些象 e^{ix} ， e^{-ix} ， $\sin x$ ， $\cos x$ 之间的关系。

读者需要进一步深入了解这些内容，可参阅有关数理方程的书籍。

——译者注

也可能发生 $\lambda + \alpha = 0$ 这样的特殊情况, 比方说, 当方程 $\Delta v = 0$, 且 v 与 z 无关时就是这样. 这时方程为如下形式:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{p^2}{r^2} R = 0 \quad (5.37)$$

它的两个特解是 $R = r^\nu$ 和 $R = r^{-\nu}$.

10. 球面坐标中的特解

如果问题具有球对称性, 则利用方程 (3.22) 可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \lambda v \end{aligned} \quad (5.38)$$

令 $v = R(\rho) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$, 并将等式各项除以 $R \Theta \Phi$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2 R} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 R') + \frac{1}{\rho^2 \Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\Theta' \sin \theta) \\ + \frac{1}{\rho^2 \Phi \sin^2 \theta} \Phi'' = \lambda \end{aligned} \quad (5.39)$$

由此可得 Φ''/Φ 与 φ 无关, 因此, 它是一个常数(等于 $-\alpha$). 这样, 式 (5.39) 左端就是 ρ 的函数和 θ 的函数的总和, 即有

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 R') - \lambda \rho^2 \right] + \left[-\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\Theta' \sin \theta) - \frac{\alpha}{\sin^2 \theta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

不过, 因为总和为零, 所以, 第一项、第二项分别等于 β 和 $-\beta$ (β 为常数). 要给出这些问题的普遍理论是很难的, 因此, 我们这里仅研究特殊的情况.

首先, 我们取 $\lambda = 0$ 这一特殊情况来化简方程:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 R') - \lambda \rho^2 = \text{常数} = \beta \quad (5.41)$$

简化后的方程相应于微分方程 $\Delta v = 0$ ，显而易见

$$\frac{d}{d\rho} (\rho^2 R') = \rho \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho R)$$

由此可得微分方程

$$\rho \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho R) = \beta R \quad (5.42)$$

取 $R = \rho^\nu$ 就可以解出这一方程。由此可得

$$\nu(\nu + 1) = \beta \quad (5.43)$$

现在，如果我们把 β 写作 $\beta = m(m+1)$ ，则有

$$\nu = m \quad \text{或} \quad \nu = -m - 1 \quad (5.44)$$

另一个极限情况是 $\beta = 0$ ，这对应着与 θ 、 φ 无关的振动问题和传热问题。其方程为

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (\rho R) = \rho R \lambda \quad (5.45)$$

方程的解为 $\rho R = \sin(\lambda^{1/2} \rho)$ 和 $\cos(\lambda^{1/2} \rho)$ ，亦即

$$R = \frac{\sin(\lambda^{1/2} \rho)}{\rho} \quad \text{和} \quad \frac{\cos(\lambda^{1/2} \rho)}{\rho} \quad (5.46)$$

来自式 (5.40) 的第二个方程为

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\Theta' \sin \theta) + \left(\gamma - \frac{\alpha}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (5.47)$$

这里，我们只研究 $\alpha = 0$ 的情况，即与“经度”无关的情况。

为了找到常用的形式，我们令 $\gamma = m(m+1)$ ，但是，只要我们对 γ 和 m 毫无所知，这就有某种任意性。不过，如果在我们所研究的问题中， $\lambda = 0$ ，同时 $\alpha = 0$ ，则 m 就和式 (5.44) 中的 m 有同样的意义。因为，在这种情况下，我

们有 $\gamma = \beta$, 于是得到

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d^{\Theta}}{d\theta} \sin \theta \right) + m(m+1)\Theta = 0 \quad (5.48)$$

或令 $x = \cos \theta$, 而把上式改写为

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d^{\Theta}}{dx} \right] + m(m+1)\Theta = 0 \quad (5.49)$$

这个微分方程的解叫做球函数, 用 $P_m(x)$ 和 $Q_m(x)$ 表示. 这里 m 是函数的阶. 因为 $\cos \theta$ 在 -1 和 $+1$ 之间变化, 且为偶函数. 所以, 只要在 $0 \leq x \leq 1$ 或 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 区间内知道球函数就够了. 这些函数也有表可查.

带有任意 α 的方程 (5.47) 的解也可以用球函数表示, 这种球函数叫做缔合勒让德函数, 这里因为篇幅的限制, 我们就不再考虑这种情况了③.

③式 (5.49) 称为勒让德方程, 而 α 不等于零时, 方程则为

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d^{\Theta}}{dx} \right] + \left[m(m+1) - \frac{\alpha}{1-x^2} \right] \Theta = 0$$

称为缔合勒让德方程. 仅当 m 为整数时, 勒让德方程才可能有一个从 $x = -1$ 到 $x = +1$ 都有意义的解, 称为勒让德多项式. 当 m 为偶整数时, m 阶勒让德多项式为

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m/2} (-1)^k \frac{(2m-2k)!}{2^m k! (m-k)! (m-2k)!} x^{m-2k}$$

而 m 为奇整数时, m 阶勒让德多项式则为

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^k \frac{(2m-2k)!}{2^m k! (m-k)! (m-2k)!} x^{m-2k}$$

缔合勒让德方程的解, 则称为缔合勒让德函数, 用 $P_m^l(x)$ 表示.

勒让德多项式的微分表达式为 (又称为洛德利格公式)

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} [(x^2-1)^m]$$

而缔合勒让德函数的微分表达式为

$$P_m^l(x) = \frac{(1-x^2)^{l/2}}{2^m m!} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^m$$

——译者注

11. 用级数展开解常微分方程

这样的微分方程我们已经遇到过两次了，它们的解不是从前边的论述中得知的初等函数。在实际计算时，我们需要利用函数表来求出它的数值。现在，我们就以这些函数为例，来说明揭示满足给定微分方程的函数性质的步骤。

我们假定微分方程 (5.36)

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{p^2}{\rho^2}\right) R = 0 \quad (5.50)$$

的解在 $\rho = 0$ 这一点附近可以展开为幂级数。不过，这个级数的系数是未知的，要把级数代入方程来加以确定。设级数具有如下形式

$$R = \rho^\nu + a_1 \rho^{\nu+1} + a_2 \rho^{\nu+2} + \cdots + a_n \rho^{\nu+n} + \cdots \quad (5.51)$$

其中系数 a_1, \dots 等和第一个指数 ν 都是未知的。由这个级数，我们可以求出

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\rho} &= \nu \rho^{\nu-1} + a_1(\nu+1)\rho^\nu + \cdots + a_n(\nu+n)\rho^{\nu+n-1} \\ &\quad + a_{n+1}(\nu+n+1)\rho^{\nu+n} + \cdots \\ \frac{d^2 R}{d\rho^2} &= \nu(\nu-1)\rho^{\nu-2} + a_1(\nu+1)\nu\rho^{\nu-1} + \cdots \\ &\quad + a_{n+1}(\nu+n+1)(\nu+n)\rho^{\nu+n-1} \\ &\quad + a_{n+2}(\nu+n+2)(\nu+n+1)\rho^{\nu+n} + \cdots \end{aligned}$$

把这些表达式代入式 (5.50)，并分别把 ρ 的同次项归为一组，即可得到

$$\rho^{\nu-2}[\nu(\nu-1) + \nu - p^2] + \rho^{\nu-1}[a_1(\nu+1)\nu + a_1(\nu+1) - a_1 p^2]$$

$$\begin{aligned}
& + \rho^{\nu} [a_2(\nu+2)(\nu+1) + a_2(\nu+2) - a_2 p^2 + 1] + \cdots \\
& + \rho^{\nu+n} [a_{n+2}(\nu+n+2)(\nu+n+1) + a_{n+2}(\nu+n+2) \\
& - a_{n+2} p^2 + a^n] + \cdots = 0
\end{aligned}
\tag{5.52}$$

如果在某一个 $\rho \neq 0$ 的邻域内, ρ 所有的值都满足这个方程, 那么 ρ 的各次幂的系数必须等于零. 第一个系数只包含作为未知量的第一个指数 ν . 于是, 可以求出

$$\nu = \pm p \tag{5.53}$$

现在, 我们有了两个级数形式的解, 这正是预期到的情况. 一个解从 ρ^p 开始, 另一个解从 ρ^{-p} 开始. 当 $\rho = 0$ 时, 一个解等于零, 另一个解则取无限大值. 从上述第二个系数可得 $a_1 = 0$. 如果在第三个系数中, 我们令 $\nu = \pm p$, 即得

$$a_2[(\pm p+2)(\pm p+2) - p^2] + 1 = 0$$

或

$$a_2 = -\frac{1}{2(\pm 2p+2)}$$

依此类推, 我们就可得到一个普遍的递推公式

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(\pm 2p+n+2)} \tag{5.54}$$

于是, 表示微分方程解的两个级数即为

$$\begin{aligned}
R_1 = \rho^p & \left[1 - \frac{\rho^2}{2(2p+2)} + \frac{\rho^4}{2 \times 4(2p+2)(2p+4)} \right. \\
& \left. - \frac{\rho^6}{2 \times 4 \times 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \cdots \right]
\end{aligned}
\tag{5.55}$$

$$R_2 = \rho^{-p} \left[1 - \frac{\rho^2}{2(2-2p)} + \frac{\rho^4}{2 \times 4(2-2p)(4-2p)} \right.$$

$$- \frac{\rho^6}{2 \times 4 \times 6(2-2p)(4-2p)(6-2p)} + \dots \Big]^{①}$$

在贝塞耳函数表中，这些函数都乘以按常规选定的常数。对每个 ρ 值来说，级数是收敛的。但是，如果 ρ 值很大时，它们收敛得很慢。

如果 p 是正整数，则级数 R_2 没有意义。反之，如果 p 是负整数，则 R_1 没有意义。所以，在此情况下，我们只能用一个级数作为方程的解。对于 $p=0$ ，我们也只有一个解。这里，我们可用以下方法求出第二个解，这就是：开始设 p 值不等于零，而只是很小。因而， R_1 和 R_2 彼此没有多大差别，两者之差有与 p 同样的数量级。因此，如果我们对 $p \rightarrow 0$ 取极限，即

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{R_1 - R_2}{2p}$$

那么就可得到方程的一个新解，这个解与我们以前叫做诺埃曼函数的 $K_0(\rho)$ 是相等的。级数第一项的极限是

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\rho^p - \rho^{-p}}{2p} &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{p \ln \rho} - e^{-p \ln \rho}}{2p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + p \ln \rho + \dots) - (1 - p \ln \rho + \dots)}{2p} \\ &= \ln \rho \end{aligned}$$

而第二项是

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{2p} \left[\frac{\rho^{p+2}}{2(2+2p)} - \frac{\rho^{-p+2}}{2(2-2p)} \right] \\ = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{8p} \left[\frac{1 + p \ln \rho + \dots}{1+p} - \frac{1 - p \ln \rho + \dots}{1-p} \right] \end{aligned}$$

①原文中 ρ^4 项分母中 $(4-2p)$ 误为 $(2-4p)$ ， ρ^6 项前误为“+”号。——译者注

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{8\rho} [(1 + \rho \ln \rho + \cdots)(1 - \rho + \cdots) \\
&\quad - (1 - \rho \ln \rho + \cdots)(1 + \rho + \cdots)] \\
&= -\frac{\rho^2}{4} (\ln \rho - 1) \quad (5.56) \textcircled{1}
\end{aligned}$$

等等。因为我们由此已经可以看到级数的最重要的性质，所以，就不需要再求完整的级数了。由于级数从 $\ln \rho$ 项开始，因此，对于 $\rho = 0$ 来说，这一项将对数方式趋于无限大，而与任意次幂的 ρ^p 不一样，这就是我们求不出幂级数解的原因。

现在，我们用这种展开为级数的方法来确定由下式定义的球函数

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + m(m+1)\Theta = 0 \quad (5.57)$$

级数

$$\Theta = x^\nu + a_1 x^{\nu+1} + \cdots + a_n x^{\nu+n} + \cdots \quad (5.58)$$

给出关系式

$$\nu(\nu-1) = 0, \text{ 即 } \nu_1 = 0 \text{ 和 } \nu_2 = 1$$

$$a_1 = a_3 = \cdots = 0$$

$$a_2 = -\frac{m(m+1) - \nu(\nu+1)}{(\nu+1)(\nu+2)}$$

且

$$a_{n+2} = -\frac{m(m+1) - (\nu+n)(\nu+n+1)}{(\nu+n+1)(\nu+n+2)} a_n \quad (5.59)$$

①原文中把自然对数也写作“log”，这是因为欧美国家习惯上把自然对数与常用对数均写作log，考虑到我国读者的习惯，这里我们把自然对数均改写为ln，下同。
——译者注

于是，我们得到两个解（对应 $\nu_1 = 0$ 和 $\nu_2 = 1$ 这两种情况——译者注）

$$\begin{aligned}\Theta_1 = & 1 - \frac{m(m+1) - 0 \times 1}{1 \times 2} x^2 \\ & + \frac{[m(m+1) - 0 \times 1][m(m+1) - 2 \times 3]}{1 \times 2 \times 3 \times 4} x^4 - \dots\end{aligned}\quad (5.60)$$

$$\begin{aligned}\Theta_2 = & x - \frac{m(m+1) - 1 \times 2}{2 \times 3} x^3 + \\ & + \frac{[m(m+1) - 1 \times 2][m(m+1) - 3 \times 4]}{2 \times 3 \times 4 \times 5} x^5 \\ & - \dots\end{aligned}$$

这些函数的一个重要性质是：只要 m 是一个整数，其中一个级数就具有有限项（物理问题中总是这样）。如果 $\nu + n = m$ ，则 $x^{\nu+n+2}$ 的系数和所有的高次幂都等于零。当 Θ_1 中 m 为偶数时和 Θ_2 中 m 为奇数时，这一特性是很明显的。例如，当 $m = 2$ 时，

$$\Theta_1 = 1 - \frac{2 \times 3}{1 \times 2} x^2$$

而当 $m = 3$ 时，

$$\Theta_2 = x - \frac{3 \times 4 - 1 \times 2}{2 \times 3} x^3$$

这些有限的级数（乘上一个归一化因子后）叫做第一类球函数，用 $P_n(x)$ 表示；无限的级数叫做第二类球函数，用 $Q_n(x)$ 表示。后者在 $x = 1$ 时，有无限大的值。

12. 渐近展开式

因为球函数只在区间 $0 < x < 1$ 内有定义，所以，我们所求得的展开式就足以确定球函数的性质了。但是，在贝塞耳函数情况下，自变量可以有较大的数值，在某些情况下，用级数表示也许是不可能的。这时，对于数值很大的变量来说，可以用“渐近的方式”对微分方程求积分。现在，我们用贝塞耳函数来说明这个方法。在方程 (5.50) 中

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{p^2}{\rho^2}\right) R = 0 \quad (5.61)$$

我们先忽略分母中含有大的 ρ 和 ρ^2 值的各项，于是得到方程

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + R = 0$$

方程的一个解是 $R = e^{\pm i\rho}$ 。现在，我们尝试着找方程 (5.61) 的一个解，这个解可以表示为 $e^{i\rho}$ 和 ρ 的幂次递减的级数的乘积。即有

$$R = e^{i\rho} [\rho^\nu + a_1 \rho^{\nu-1} + a_2 \rho^{\nu-2} + \dots] \quad (5.62)$$

这里，因为两个相对应的解总是共轭解，所以，我们就不再写 $\pm i$ 了。由此我们得到

$$\frac{dR}{d\rho} = e^{i\rho} \left\{ \rho^\nu i + \rho^{\nu-1} (ia_1 + \nu) + \rho^{\nu-2} [ia_2 + (\nu-1)a_1] + \dots \right\}$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} = e^{i\rho} \left\{ \rho^\nu (-1) + \rho^{\nu-1} (-a_1 + 2iv) + \rho^{\nu-2} [-a_2 + i(\nu-1)a_1 + (\nu-1)(ia_1 + \nu)] + \dots \right\}$$

如果我们把这些表达式代入方程 (5.61)，就可得到 $e^{i\rho}$ 与一个降幂级数的乘积。在这个级数中， ρ 的每一幂次的系数都必须等于零（和上一节一样）。由于 ρ^0 的系数恒等于零，下一项等于 $-a_1 + 2iv + i + a_1$ ，于是，我们得到 $v = -1/2$ 。 $\rho^{-1/2}$ 的系数是

$$-a_2 + (v-1)(2ia_1 + v) + ia_1 + v + a_2 - p^2$$

由此可得

$$a_1 = \frac{i(v^2 - p^2)}{2v - 1} = i \frac{4p^2 - 1}{8}$$

于是，我们得到渐近级数

$$R = \frac{e^{i\rho}}{\rho^{1/2}} \left(1 + i \frac{4p^2 - 1}{8\rho} + \dots \right) \quad (5.63)$$

特别有趣的是：当 ρ 值很大时，贝塞耳函数的行为和振幅按 $1/\rho^{1/2}$ 衰减的周期函数一样。

渐近展开式不是收敛的，而是“半收敛”的，即高次项不是减少而是增加。尽管如此，如果在级数开始增加之前就截止，那么，用它们来进行计算还是可以的。

13. 例：具有柱对称的热流

假定我们有一个无限长的由两个半圆柱组成的圆柱，每个半圆柱的横截面都是半圆的。设一个半圆柱的温度为 T ，而另一个半圆柱的温度为零。此外，我们再设热量由圆柱表面向外传导的情况服从下述定律，即热流跟圆柱与温度为零的外部空间之间的温差成比例。我们希望找到温度 u 和时间以及圆柱上的位置的函数关系。

根据式 (4.7) 和 (3.21), 可写出微分方程

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.64)$$

$\varphi = 0$ 的方向取在沿温度为 T 的面积的中线方向, 因此, u 一定是 φ 的一个偶函数。如果我们引入 $u = R\Phi T$, 则有

$$\frac{T'}{T} = -\alpha \quad \text{和} \quad \frac{\Phi''}{\Phi} = -\beta$$

并由此得到

$$T = e^{-\alpha t} \quad \text{和} \quad \Phi = \cos(\beta^{1/2} \varphi)$$

这里, 我们没有引入任何任意的系数, 也没有加上特解 $\sin(\beta^{1/2} \varphi)$, 这是因为特解是 φ 的一个奇函数。常数 β 可以用 Φ 的周期为 2π 这个条件来确定, 这相当于一个边界条件, 本征值是

$$\beta^{1/2} = n \quad (n \text{ 为整数})$$

现在, 我们得到 R 的方程为

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{c\rho}{\lambda} \alpha - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (5.65)$$

这个方程的解是宗量 $c\rho ar/\lambda$ 的 n 阶贝塞耳函数。因为 n 是整数, 所以, 这些函数是贝塞耳函数 $J_n(c\rho ar/\lambda)$ 和 诺埃曼函数 $K_n(c\rho ar/\lambda)$, 它们的值和主要性质都是熟知的, 并且可以从表中查出。如果 $r = 0$, K_n 为无穷大, 这样, 我们就不能用这个特解。

在圆柱表面上 ($r = r_0$), 我们还有附加的条件:

$$\frac{dR}{dr} + bR = 0 \quad (b \text{ 为比例常数})$$

由这个条件和 $c\rho ar_0/\lambda = \nu$, 我们可以得到 ν 的超越方程:

$$\frac{\nu}{r_0} J'_n(\nu) + b J_n(\nu) = 0 \quad (5.66)$$

这个方程的无限多个解都是实数解。但是，这里我们不能证明这个事实。如果我们用 ν_m 表示这些解，就可以把我们计算结果写作

$$u = \sum_m \sum_n A_{mn} J_n\left(\nu_m \frac{r}{r_0}\right) \cos n\varphi \cdot \exp(-\nu_m \lambda t / c\rho r_0) \quad (5.67)$$

A_{mn} 可以由初始条件来确定。这个初始条件是说，在由 $r=0$ 到 $r=r_0$ 的区域内，当 $t=0$ 时，我们有

$$u = T \quad (-\pi/2 < \varphi < \pi/2)$$

和

$$u = 0 \quad \left(\pi/2 < \varphi < \frac{3}{2}\pi\right)$$

这里，普遍定理式 (5.30) 是成立的。因此，当 $m \neq l$ 且 $n \neq k$ 时，我们有正交条件

$$\int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{+\pi} J_n\left(\nu_m \frac{r}{r_0}\right) \cos n\varphi J_l\left(\nu_l \frac{r}{r_0}\right) \cos k\varphi r dr d\varphi = 0$$

我们必须注意，体积元是 $r dr d\varphi$ （而不是 $dr d\varphi$ ）。因此，现在我们可以从以下方程中求系数 A_{mn} 。

$$\begin{aligned} & \int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{+\pi} T J_n\left(\nu_m \frac{r}{r_0}\right) \cos n\varphi r dr d\varphi \\ &= A_{mn} \int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[J_n\left(\nu_m \frac{r}{r_0}\right) \right]^2 \cos^2 n\varphi r dr d\varphi \end{aligned} \quad (5.68)$$

求这些二重积分的值无非是些具体计算，这里，我们就不求它了。

如果完全与 φ 无关，那么计算就可以变得非常简单，这

就是圆柱上初始温度等于常数时出现的情况。这时，我们有 $n=0$ ，即只需有零阶贝塞耳函数 J_0 就够了。这种函数表是很多的，超越方程的解也可在这些表中找到。

由式 (5.67) (由其指数函数) 可见，项的阶数越高，衰减就越快，经过一段时间 (随 λ/cpr_0 而定) 以后，将只有含最小 ν_m 的项留下来。

14. 圆环的电势

带电圆环电势 u 的计算是应用球函数的一个例子 (圆环可以有一个无限小的截面)。设圆环的半径为 a ，均匀分布的总电荷为 M 。我们采用球坐标。在选定坐标系时，使圆上所有点的坐标都为 $\theta = \pi/2$ ，因而一切均与 φ 无关，并且微分方程 (4.1) 具有式 (5.40) 在 $\lambda = \alpha = 0$ 时所取的形式，其特解为

$$R = \rho^m \quad \text{和} \quad R = \frac{1}{\rho^{m+1}}$$

$$\Theta = P_m(\cos \theta) \quad \text{和} \quad \Theta = Q_m(\cos \theta)$$

因为， R 必须是唯一的。所以，在这个解中只考虑整数值的 m 。根据本章第 11 节，函数 P_m 是 $x (= \cos \theta)$ 的 m 次的代数式。当 m 是偶数时，它们是偶函数，而当 m 是奇数时，它们是奇函数。当 $\cos \theta = 1$ (或 $\theta = 0$) 时，每个 Q_m 均有无限大值。所以，在我们的问题中不能用 Q_m 。因此，我们尝试采用下列形式的表达式

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (5.69)$$

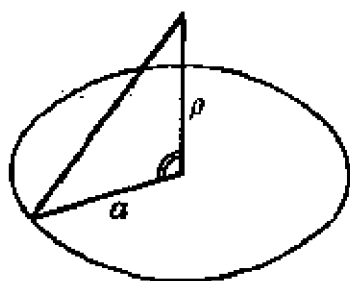


图 36 圆环的电势

为了确定系数 A_n 和 B_n ，我们需要有一个非齐次的边界条件，这个条件可以由 $\theta = 0$ 的轴上的电势值得到。这个轴上的每个点与环上所有点的距离都相同（见图 36），即等于 $(a^2 + \rho^2)^{1/2}$ ，电荷的每个单元为 $M d\varphi / 2\pi$ 。因此，它所产生的电势为 $M d\varphi / 2\pi (a^2 + \rho^2)^{1/2}$ （参阅第七章第 1 节）。于是，在 $\theta = 0$ 时，总电势为

$$u_0 = \frac{M}{(a^2 + \rho^2)^{1/2}} \quad (5.70)$$

为了把这个表达式与式 (5.69) 进行比较，当 $\rho < a$ 时，我们必须把 u_0 展开成 (ρ/a) 的升幂级数，即有

$$u_0 = \frac{M}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{1 \times 3 \rho^4}{2 \times 4 a^4} - \frac{1 \times 3 \times 5 \rho^6}{2 \times 4 \times 6 a^6} + \dots \right) \quad (5.71a)$$

而当 $\rho > a$ 时，就要把 u_0 展成 (ρ/a) 的降幂级数

$$u_0 = M \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{\rho^3} + \frac{1 \times 3 a^4}{2 \times 4 \rho^5} - \frac{1 \times 3 \times 5 a^6}{2 \times 4 \times 6 \rho^7} + \dots \right) \quad (5.71b)$$

当 $\theta = 0$ 时，所有的 $P_n(1)$ 都等于 1。比较式 (5.69) 和式 (5.71)，我们可以求出，当 $\rho < a$ 时有

$$A_0 = \frac{M}{a}, \quad A_2 = \frac{M}{a} \left(-\frac{1}{2a^2} \right) \text{ 等等}$$

因此，

$$u = \frac{M}{a} \left[P_0(\cos \theta) - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{a^2} P_2(\cos \theta) + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{\rho^4}{a^4} P_4(\cos \theta) - \dots \right] \quad (5.72a)$$

当 $\rho > a$ 时, 则得

$$u = \frac{M}{a} \left[\frac{a}{\rho} P_0(\cos \theta) - \frac{1}{2} \frac{a^3}{\rho^3} P_2(\cos \theta) + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{a^5}{\rho^5} P_4(\cos \theta) - \dots \right] \quad (5.72b)$$

15. 例: 带电的半球面

为了具体说明球谐函数的展开式, 我们取两个半径为 a , 电势分别为 $+M$ 和 $-M$ 的半球, 再将两个半球组合成一个完整的球. 对电势来说, 我们又有 $\alpha = \lambda = 0$ 情况下的方程 (5.40). 其边界条件是

当 $\rho = 0$ 和 $\rho = \infty$ 时, $u = 0$; 而当 $\rho = a, 0 < \theta < \pi/2$ 时, $u = +M$; $\rho = a, \pi/2 < \theta < \pi$ 时, $u = -M$. 方程的解也是

$$u = \sum_0^{\infty} A_m \rho^m P_m(\cos \theta) \quad (\rho < a)$$

或

$$u = \sum_0^{\infty} \frac{B_m}{\rho^{m+1}} P_m(\cos \theta) \quad (\rho > a)$$

具体的形式可根据 $\rho < a$ 还是 $\rho > a$ 这个条件来选取, 其系数可以从 $\rho = a$ 的非齐次条件中求出. 根据正交条件则有

$$2\pi a^2 \int_0^{\pi} P_m(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (m \neq l) \quad (5.73)$$

因此,

$$\int_0^{\pi/2} M P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\pi/2}^{\pi} M P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\
& = A_m a^m \int_0^{\pi} [P_m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta
\end{aligned} \tag{5.74}$$

对于 B_m 也有相应的公式。

15. 例：波的传播

如果我们在给定时间频率 ω 下，对方程

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

的解进行比较，那么，仅与 x ， r 或 ρ 有关的某些函数的性质就变得很清楚了。

如果 Δu 只与笛卡儿坐标 x 有关，我们就可以得到一个平面波动方程

$$u = e^{\pm i\omega x/c} e^{i\omega t} \tag{5.75}$$

这里，为了简化起见，我们使用了复数的指数函数。当柱对称时，我们有

$$u = J_0\left(\frac{\omega}{c}r\right) e^{i\omega t} \tag{5.76}$$

当球对称时，我们有

$$u = \frac{e^{i\omega\rho/c}}{\rho} e^{i\omega t} \tag{5.77}$$

零阶贝塞耳函数表示柱面波，高阶贝塞耳函数则表示与 φ 有关的柱面波。表达式

$$\frac{1}{\rho} e^{i\omega\rho/c}$$

随 ρ 的增加按 $1/\rho$ 减小。当波扩展时，每个波动脉冲发射

出的能量保持为常数。不过，因为分布能量的表面面积按 ρ^2 的规律增加，故幅度必然按 $1/\rho$ 减小（因为能量与 u^2 成比例）。而对于柱面波来说，它的能量是分布在面积按 r 的规律增加的表面上，因此幅度就应按 $1/r^{1/2}$ 的规律减小。贝塞耳函数确实具有这种渐近形式的特性，即 r 的数值越大，贝塞耳函数越能精确地得到满足。这个结果由式（5.63）也可以看出来。此外，超越方程相继出现的零点，彼此间的距离趋近于一个常数，就象正弦和余弦的相邻零点彼此间的距离保持不变一样。

17. 傅里叶积分

到目前为止，我们研究的所有问题都只涉及到有限的区域。实际上，对整个空间（振动或热流在整个空间中传播），我们也可以采用同样的方法。这里，我们必须经过一次取极限的过程，以便把傅里叶级数的求和变换成积分。

例如，函数 $f(x)$ 可以在 $-a$ 和 $+a$ 之间取常数值1，而在别处取为零。这里，我们所研究的过程不必象弦振动的情况那样，限制在区间 $-a, a$ 内，它可以沿着整个 x 轴变化。在这种情况下，函数 $f(x)$ 不可能作为周期性函数处理。我们必须在由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整个区域内研究这个函数，这就如同必须给定周期是 ∞ 值一样。因为，我们的方法给出了本征函数 $\sin ax$ 和 $\cos ax$ ，所以，必须由这些函数来构成给定的非周期性函数。周期的极限为无限大相当于基振频率极限为零。在极限的情况下，分离的谐振频率形成连续序列，而求和则变成积分。对于给定周期 $-b, +b$ 来说，普遍的傅里叶

级数是

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{b}$$

其中

$$A_0 = \frac{1}{2b} \int_{-b}^{+b} f(\xi) d\xi,$$

$$A_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^{+b} f(\xi) \cos \frac{n\pi \xi}{b} d\xi,$$

$$B_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^{+b} f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{b} d\xi$$

这里，我们把积分变量写作 ξ ，是为了下一步处理中要用到 x 。现在，我们交换积分与求和的次序，则得

$$f(x) = \int_{-b}^{+b} f(\xi) \left[\frac{1}{2b} + \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{b} (x - \xi) \right] d\xi \quad (5.78)$$

令 $n\pi/b = \alpha$ ，并注意到，如果 $b \rightarrow \infty$ ，只有大的 n 值才有影响，而 α 取由 0 到 ∞ 的全部值。于是，级数的和有一个变得很小的因子 $1/b = \alpha/n\pi$ 。为了确定这个极限，对于级数和来说，可以忽略 $1/2b$ 这一项。如果我们把 α/n 写成 $d\alpha$ ，这些无限小项（数量级 α/n ）的和就变成

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha (x - \xi) d\alpha$$

现在，我们有了用傅里叶积分表示任意函数的方法，即

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) \int_0^{\infty} \cos \alpha (x - \xi) d\alpha \quad (5.79)$$

作为一个例子，我们来研究一个无限大物体内的热传导问题。设在时间 $t=0$ 时，在 $x=-a$ 到 $x=+a$ 的一条窄带上，

物体的温度等于 T ，而在任何其它点上等于零。微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t}$$

的特解是函数 $\cos \alpha x$ 和 $\sin \alpha x$ [也可以写作 $\cos \alpha(x - \xi)$] 乘以时间因子

$$e^{-\alpha^2 \lambda t / c\rho}$$

上述结果用我们的方法可以很容易地加以证明，也可以直接验证。于是，当初始温度场 $u_0 = f(x)$ 时，方程的解为

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \lambda t / c\rho} \cos \alpha(x - \xi) d\alpha \quad (5.80)$$

在我们的例子中有

$$f(x) = \frac{T}{\pi} \int_{-a}^{+a} d\xi \int_0^{\infty} \cos \alpha(x - \xi) d\alpha$$

因此，

$$u = \frac{T}{\pi} \int_{-a}^{+a} d\xi \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \lambda t / c\rho} \cos \alpha(x - \xi) d\alpha$$

第六章 用换元法求解

对很多微分方程来说，如果我们用空间-时间变量的某些线性组合作为新变量，就可以求出通解。这是特征线法的一个特例，而特征线法在偏微分方程理论中是非常重要的。因为我们只研究非常简单的情况，所以，就没有必要去涉及特征线的普遍理论了。

1. 波的传播

方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6.1)$$

可以为变量是 $x \pm ct$ 的任何函数所满足，这是容易验证的。如果我们令

$$u = f(x \pm ct) \quad (6.2)$$

则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' \quad \text{和} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''$$

由此即可得到式 (6.1)。

在这种情况下，具有方程 $x + ct = \text{常数}$ 和 $x - ct = \text{常数}$ 的曲线就叫做特征线。方程的解

$$u = f_1(x + ct) + f_2(x - ct) \quad (6.3)$$

包含两个必须确定的任意函数，从而使这个解满足边界条件。函数 $f_1(x + ct)$ 表示在 $t = 0$ 时，由 u 给定的一个形状不

变的波，沿着 x 轴负方向运动（如，沿着绳子传播的扰动或运河中的潮汐波）。同样， $f_2(x - ct)$ 表示沿着 x 轴正方向运动的波。如果波在无限大的物体内部传播，则边界条件是容易满足的。我们必须在初始时刻对每个 x 给定 u 和 $\partial u / \partial t$ 。设

$$t = 0 \text{ 时, } u = F(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = G(x) \quad (6.4)$$

于是，为了确定 f_1 和 f_2 ，我们可用关系式

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= F(x) \\ cf_1'(x) - cf_2'(x) &= G(x) \end{aligned}$$

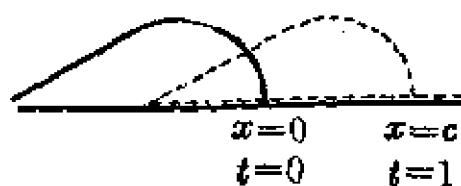


图 37 波的传播

令 $\int G(x) dx = H(x)$ ，由这些方程我们可得

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \left[F(x) + \frac{1}{c} H(x) \right] \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \left[F(x) - \frac{1}{c} H(x) \right] \end{aligned}$$

问题的全解是

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left[F(x + ct) + F(x - ct) + \frac{1}{c} H(x + ct) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c} H(x - ct) \right] \quad (6.5) \end{aligned}$$

如果物体是有限的，例如，弦的振动，这个方法也是可以用的。弦可以在 $t = 0$ 时被拉离平衡位置（图 38），并且在没有加速度的情况下放开（即 $G(x) = 0$ ）。于是，我们有 $f_1 = f_2$ ，而扰动则以同样的方式向两个方向传播。我们可以把弦的振动描绘成沿相反方向传播的两个形状不变的波的迭加。为了在两端满足条件 $u = 0$ ，我们必须在两个方向上把函数向外延

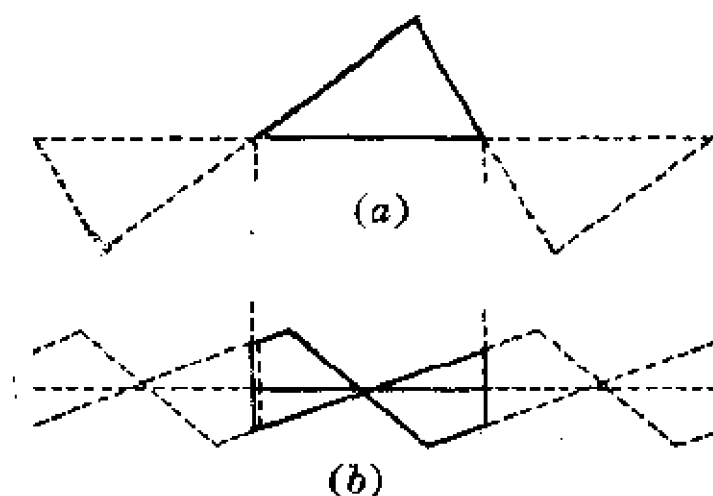


图 38 来自初始状态 (a) 的两个相反方向运动迭加 (b) 的弦振动

拓(从物理上看, 这一函数仅在 $0 \leq x \leq l$ 区间内才是给定的), 使它成为反对称的, 并且使在点 $x = 0$ 和 $x = l$ 处, 向左和向右连续传播的扰动不断地互相抵消. 从物理观点来看, 这就是说, 到达端点的波被反射, 并有半波损失(符号改变). 很明显, 函数的这一延拓和傅里叶级数比较, 两者是类似的.

2. 二维势问题

应用这一方法的最熟知的领域是在求解方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.6)$$

中, 用下列形式的函数

$$\Phi = f_1(x + iy) + f_2(x - iy) \quad (6.7)$$

这里, i 是虚数单位. 因为 Φ 是实数, 所以 f_1 和 f_2 必须是共轭的.

我们可以用加上一个虚数解 $i\Psi$ 的方法, 在形式上把这个解简化, 其中 Ψ 满足

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.8)$$

而且，我们这样来选择 Ψ ，使 Φ 与 $i\Psi$ 之和

$$\Phi + i\Psi = f(x + iy) \quad (6.9)$$

是一个复变量 $x + iy$ 的函数。于是，我们就有了联系 Φ 和 Ψ 的导数的柯西-黎曼方程，即

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6.10)$$

上式中第一个方程的两边表示 f' 的实部，而第二个方程表示 i 乘 f' 的虚部。

如果我们研究一下方程 (6.6) 的由来，这些方程的物理意义就变得很清楚了（第三章第 10、11 两节）。场矢量 \mathbf{v} （可以表示势流的速度或者表示静力场中的力）满足方程

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0 \quad (6.11)$$

和

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (6.12)$$

另外， \mathbf{v} 还与 z 坐标无关。因为有式 (6.11)，我们以前曾引入了一个标量势 $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ ，而且这个势函数必须满足 $\Delta \Phi = 0$ [因为有式 (6.12)]。

我们可以根据式 (6.12)，用同样的方法，再引入一个矢量势，由式 (6.11) 可得该矢量势满足 $\Delta \Psi = 0$ 。不过，对于平面问题，矢量势只有一个分量。因此，对我们计算的目的来说，它和 Φ 一样，也是一个标量。

3. 等势线和流线

矢量 \mathbf{v} 的分量 u 和 v 是

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6.13)$$

$\Phi = \text{常数}$ 的曲线 (等势线) 由下式给出

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0$$

或

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \quad (6.14)$$

同样, 对于 $\Psi = \text{常数}$ 的曲线有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (6.15)$$

这意味着这些曲线的方向和矢量 \mathbf{v} 的方向相同, 即曲线在场中每一点的方向就是场矢量的方向. 由于这个原因, 这些曲线叫做流线或力线 (根据问题的性质而定). 方程 (6.14) 和 (6.15) 表示流线和等势线在每一点都相互垂直.

画出这些线的网络, 我们就可以得到整个过程的清晰图象. 图上流线的方向给出了任一点场矢量的方向. 我们也可以按下述考虑来求出矢量的大小. 对于 $\Phi = \text{常数}$ 和 $\Psi = \text{常数}$ 中的

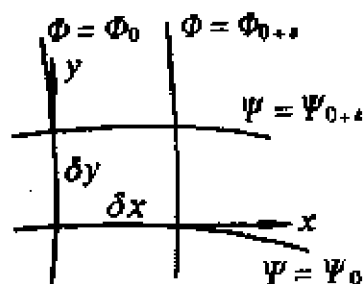


图 39 势线和流线的网络元

的这些常数, 我们可以给出一系列数值, 并使这些数值具有足够小的恒定差值 ϵ . 现在, 如果我们在任一点选择坐标系, 使 x 轴方向为流线方向, y 轴方向为等势线方向 (图 39), 则势差为 ϵ 的两条等势线之间的距离 δ_x 满足

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta_x = \epsilon$$

而 Ψ 的差值为 ε 的两条流线之间的距离 δ_y 满足

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \delta_y = \varepsilon$$

于是, 根据式 (6.10) 可得 $\delta_x = \delta_y$, 而网络就是由这些小方格组成的. 若 ε 保持不变, 因为场矢量 \mathbf{v} 的绝对值等于 $\partial \Phi / \partial x$, 所以 \mathbf{v} 的绝对值越大, 这个网络的方格就越小. 作为例子, 我们将在后面说明电容器中的电势和势流的表示法.

为了得到这样的解, 我们还必须知道怎样满足边界条件. 在最简单的情况下, 边界条件也可用 Φ 和 Ψ 来表示. 例如, 在流体流动的情况下, 任一刚性物体的表面都必须是流线 ($\Psi = \text{常数}$), 因为流动的方向必定沿着表面的切线方向. 在静电学问题中, 力线总是与导体表面垂直, 而沿着导体表面的电势是一个常数 ($\Phi = \text{常数}$). 这两种情况从数学观点来看是等价的. 如果

$$w = \Phi + i\Psi$$

而且

$$z = x + iy$$

则由此可得复方程

$$w = f(z) \quad (6.16)$$

在某些简单的情况下, 函数 f 很容易找到. 例如, 如果势流有一个不变的平行于 x 轴的速度 U , 则

$$w = Uz \quad (6.17)$$

通过微分可以求出

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U \quad \text{和} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

由两个在 $y = 0$ 和 $y = a$ 处电势分别为 0 和 Φ_0 的无限大

平板构成电容器，它所产生的静电场是

$$w = -iz\Phi_0/a \quad (6.18)$$

这就意味着 $\Phi = \Phi_0 y/a$ ，因此满足了边界条件，所有的力线 $\Psi = -\Phi_0 x/a$ 都与平面垂直①。

4. 保角映射

象绕圆柱流动这样的一些困难问题，可以用下述方法来处理（图40）。我们引入一个新变量 $\zeta = \xi + i\eta$ ，并尝试找

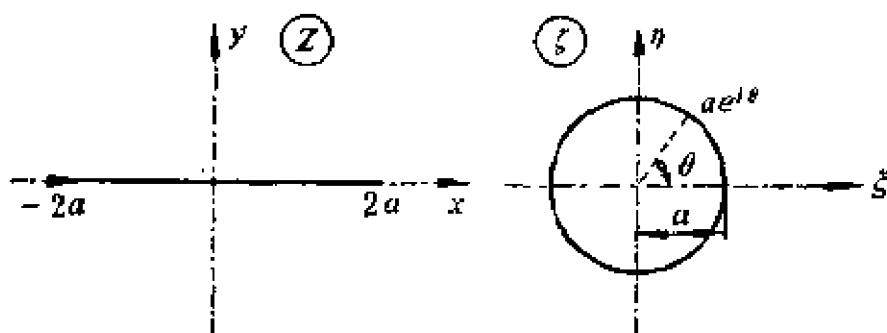


图 40 由两次通过横截线变换到圆的保角映射

一个函数 $z = \varphi(\zeta)$ ，利用它来建立这个困难问题的边界值 ζ 和解为已知的某一简单问题的边界值 z 之间的对应关系。例如，我们可以尝试建立简单的平行流动的中心流线〔式(6.17)〕和绕圆柱的弯曲流线之间的对应关系。

这样，如果 $f(z)$ 是简单问题的解，则函数

$$w = f[\varphi(\zeta)] = f_1(\zeta) \quad (6.19)$$

就是这个困难问题的解。因为根据我们的基本想法，每一复

①由式 (6.18) $w = -i\frac{\Phi_0}{a}(x + iy) = \frac{\Phi_0}{a}y - i\frac{\Phi_0}{a}x$

而 $w = \Phi + i\Psi$ $\therefore \Phi = \Phi_0 y/a$, $\Psi = -\Phi_0 x/a$ ———译者注

变（解析）函数都是一个解，而且这个解也满足边界条件。所以，它就是我们所要求的解。

变量 x 和 y 通过方程 $z = \varphi(\xi)$ 由变量 ξ 、 η 所取代，这种变换通常被说成是把复平面 z 映射到复平面 ξ 上。这一映射把用变量 x 和 y 所表示的简单情况的解变换成用变量 ξ 和 η 所表示的比较复杂情况的解。对我们的例子（平行流动 \rightarrow 绕圆柱流动）来说，可以用函数

$$z = \xi + \frac{a^2}{\xi} \quad (6.20)$$

表示。因为，如果 $\xi = ae^{i\theta}$ （它是圆上的一个点），则对应的 z 是实数，并等于 $2a \cos\theta$ 。这是 x 轴上 $-2a$ 到 $+2a$ 之间的一个点。 ξ 的所有实数值也都映射为 z 的实数值，于是， z 平面上的 x 轴就映射成 ξ 平面上的 ξ 轴加上圆。在两种情况下，它们都是一条流线（ $\Psi = 0$ ）。这个映射把 z 平面上每一条流线变换成 ξ 平面上的流线。这对于等势线来说，同样也是正确的。我们可以用把式（6.20）代入式（6.17）的方法来进行这种计算，即

$$w = U\left(\xi + \frac{a^2}{\xi}\right) \quad (6.21)$$

由此可得

$$\Phi + i\Psi = U\left(x + iy + \frac{a^2}{x + iy}\right)$$

或

$$\Phi = U\left(x - \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}\right)$$

和

$$\Psi = U\left(y - \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}\right)$$

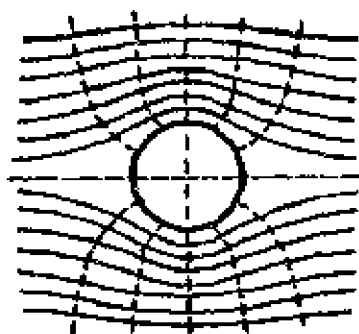


图 41 围绕圆柱的流动

—— $\Psi = \text{常数}$
 - - - $\Phi = \text{常数}$

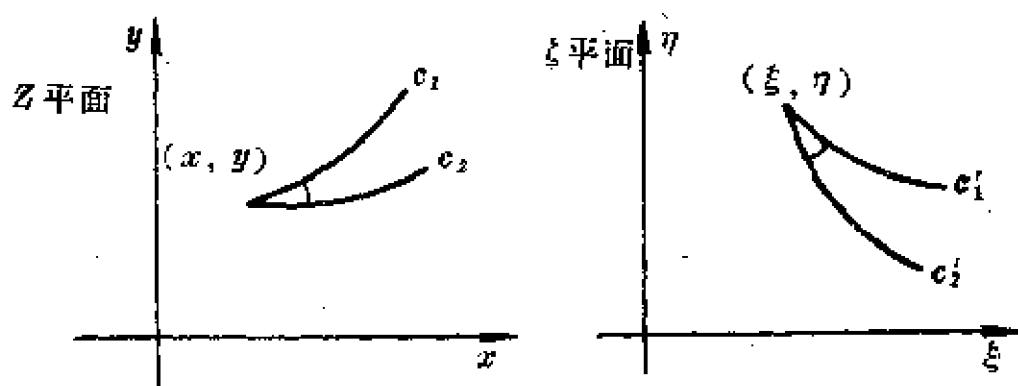
结果如图 41 所示。

这一方法和保角映射的性质是函数理论中较为重要的一个问题，其中最重要的一个性质是除了奇异点以外，在保角映射下两个方向之间的夹角保持不变。具体地说，这就意味着如果对流线和等势线使用保角映射，那么它们应当保持相互垂直①。

5. 例

在很多情况下，映射函数完全是已知的。而且，也存在着关于把多边形映射成半平面或圆等等的普遍定理（即许瓦兹-克里斯托夫变换——译者注）。不过，这里我们不

①保角映射又称保角变换或共形映射，是复变函数论的一个重要内容，它的基本性质是：在 z 平面上每给定一点， ζ 平面必有一点 $\zeta = \zeta(z)$ 与之相应。因而对于 z 平面上每一根曲线， ζ 平面上也有一根曲线与之相应。所以，如果 z



平面中有两根曲线在点 (x, y) 相交，则 ζ 平面中也有相应的两根曲线在相应的点 (ξ, η) 相交，从 z 平面到 ζ 平面，两根曲线旋转同样的角度，因而它们的交角不变，这就是“保角映射”一词的由来。

——译者注

能去研究这些专门问题了。上面提到的绕圆流动的例子是特别重要的，因为它可以把圆映射成翼面的轮廓线。为了说明这个问题，我们再举按照式 (6.18) 进行映射的那个电容器的例子。通过映射函数

$$z = \frac{a}{\pi} \ln \xi \quad (6.22)$$

把每个实数 z 映射成正实数 ξ ，因为

$$\ln(-r) = i\pi + \ln r \text{ ①}$$

在式 (6.18) 中表示一个电容器极板的直线为 $z = x + ia$ ，直线上的每一点对应着一个负实数 ξ ，于是，式 (6.22) 把两个极板映射成 ξ 轴的两部分，而方程

$$w = -i \frac{\Phi_0}{\pi} \ln \xi \quad (6.23)$$

则描述具有不同电势的两块平行板所产生的静电场。如果把式 (6.23) 分成实部和虚部，就可以求出

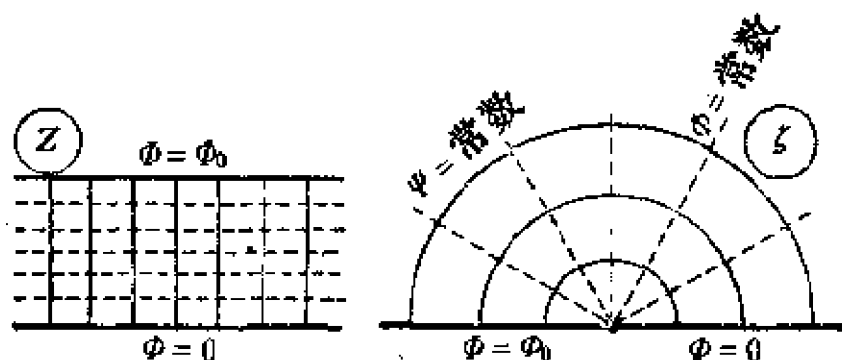


图 42 一个窄带映射成一个平面

①这个公式可以这样简单证明：

$\because e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$

$\therefore \ln(-r) = \ln(re^{i\pi}) = \ln r + i\pi \ln e = i\pi + \ln r$

——译者注

$$\begin{aligned}\Phi + i\Psi &= -i\frac{\Phi_0}{\pi} \ln(re^{i\theta}) = -i\frac{\Phi_0}{\pi} (\ln r + i\theta) \\ &= -i\frac{\Phi_0}{\pi} \ln r + \frac{\Phi_0}{\pi} \theta\end{aligned}$$

等势线是通过原点的直线 ($\theta = \text{常数}$), 而力线则是以原点为中心的圆 ($r = \text{常数}$), 现在我们再用函数

$$Z = \arcsin \xi$$

或

$$\xi = \sin Z \quad (6.24)$$

把另一映射用于 ξ -平面, 从而把 ξ -平面变换成 Z -平面. 于是, ξ -平面的实轴转变成图 43 所示的 Z -平面的周线. -1 和 $+1$ 之间的 ξ 值相应于 $-\pi/2$ 与 $+\pi/2$ 之间 Z 的实数值, 而大于 1 和小于 -1 的 ξ 值则相应于实部为 $-\pi/2$ 或 $+\pi/2$ 的 Z 值.

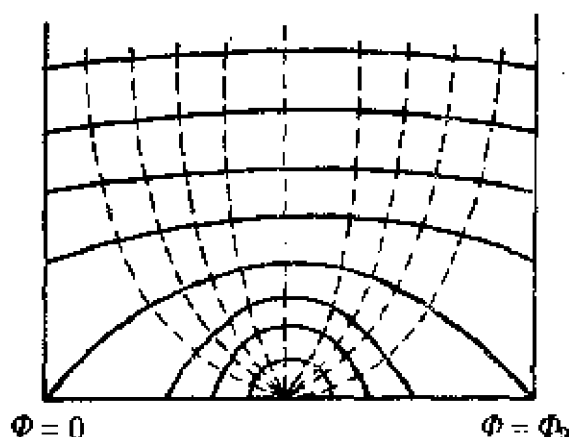


图 43 保角映射的实例 ——— $\Psi = \text{常数}$, - - - $\Phi = \text{常数}$

下面的方程中包含着场量

$$w = -i\frac{\Phi_0}{\pi} \ln \sin Z \quad (6.25)$$

数值计算给出图 43 的曲线①。

①为了帮助读者阅读，现将第 4,5 两节中，所用到的几种变换作如下介绍：

1. 平移： $w = z + \beta$

利用这个变换，将 z 平面内的图形沿矢量 β 方向作移动或平移。

2. 旋转： $w = e^{i\theta} z$

利用这个变换，将 z 平面内的图形绕坐标系原点转过一个角度 θ 。若 $\theta > 0$ ，旋转为逆时针的，而若 $\theta < 0$ ，旋转为顺时针的。

3. 伸缩： $w = az$

利用这个变换，若 $a > 1$ （或 $0 < a < 1$ ），则将 z 平面内的图形沿 z 的方向伸长（或缩小）。我们将缩小看成是伸长的特殊情况。

4. 反演： $w = \frac{1}{z}$ 利用这个变换，可将单位圆内的点全部变到单位圆外，同时也把单位圆外的点全部变到圆内，在全平面（包括无穷远点在内）都是保角的。

5. 线性变换： $w = az + \beta$

这是平移，旋转和伸缩变换的组合。

6. 双线性或分式线性变换： $w = \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}$ ， $a\delta - \beta\gamma \neq 0$ 。

这是平移，旋转，伸缩和反演变换的组合。

上列各式中 w 为解析函数， α 、 β 、 γ 、 δ 为已知复常数，而 a 、 θ 为实常数。希望详细了解的读者，可参阅有关复变函数的书籍。

第七章 用奇异点求解

我们常常容易求出微分方程的解在整个空间都是有定义的，并在无限远处各点等于零。但是它在空间某一点处却有奇异性，即在该点解变成无限大。这个解是否具有物理意义则取决于奇异点的性质。

1. 源

上述情况的一个最清楚的例子就是由一个源产生的势流。这时，微分方程

$$\Delta\Phi = 0 \quad (7.1)$$

必须在整个空间成立，但是在源所在的原点处除外，即在原点处方程不能成立。原因是根据式(4.15)，方程成立的区域应当是无源的。显然，方程的解具有以原点为中心的球对称性，因而它仅仅是半径的函数。按照式(3.22)的形式，这一微分方程应为

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{d\Phi}{d\rho}\right) = 0 \quad (7.2)$$

由此，我们可以得到两个特解： $\Phi = \text{常数}/\rho$ 和 $\Phi = \text{常数}$ 。后者没有物理意义，而前者在无限远处等于零，同时在原点处具有奇异性。因此，它可以表示我们所要找的有源势流。常数取决于源的大小。如果我们把 Φ 写作 $\Phi = -C/\rho$ ，则矢量 \mathbf{v} 除了在原点外，在整个空间都是无源的。矢量 \mathbf{v} 的

大小是

$$v = \frac{d\Phi}{d\rho} = + \frac{C}{\rho^2}$$

我们对任何一个包围着原点的球取 v 的散度的积分，并应用高斯定理 (3.12) 则得

$$Q = \iiint \operatorname{div} v dV = \oint \frac{C}{\rho_0^2} \rho_0^2 d\omega \quad (7.3)$$

这里 $d\omega$ 是立体角元， ρ_0 是球的半径。由此可以求出

$$Q = 4\pi C \quad (7.4)$$

单位时间内离开球的流量必须与球的半径无关，因为若流量与半径有关，则两个球壳之间的区域就一定有源存在。方程 (7.2) 的解是

$$\Phi = - \frac{Q}{4\pi\rho} \quad (7.5)$$

这是一个点源的数学表达式。对于单个质点重力场中的势来说，因为微分方程是同一个方程 (4.3)，所以，结果是相同的。如果 G 是万有引力恒量，而 M 是质点的质量，则常数 Q 相应于数值 $-4\pi GM$ 。由对 ρ 的微分，就得到每单位质量所受的力为 $-GM/r^2$ ，这就是牛顿万有引力定律。

2. 正源和负源的迭加

因为方程是线性齐次的，所以，我们可以由这些基本解的迭加求出更复杂情况的解。现在，我们可以用这种方法来求连续分布的源的势，设源的强度 μ (单位体积内源的大小) 是位置的函数。于是有

$$\begin{aligned}\Phi &= - \iiint \frac{\mu dV}{4\pi\rho} \\ &= - \iiint \frac{\mu(\xi, \eta, \xi)}{4\pi\rho(\xi, \eta, \xi; x, y, z)} d\xi d\eta d\xi \quad (7.6)\end{aligned}$$

因为 $\Delta\Phi = \text{div}\mathbf{v}$ 是源的强度, 所以, 上式就是微分方程

$$\Delta\Phi = \mu \quad (7.7)$$

的解。为了计算式 (7.6) 这个积分, 我们必须记住 ρ 的原点取决于这里的点的位置。例如, 如果要计算在点 x, y, z 上的势, 则被积函数中应有

$$\rho = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \xi)^2]^{1/2} \quad (7.8)$$

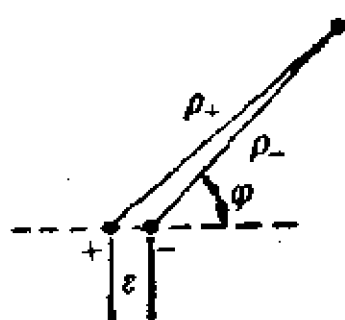


图 44 偶极子

另外, μ 也可以有负值。一个特别重要的情况是大小相等, 彼此非常靠近的一个正源和一个负源 (如, 两个电荷), 这种正负源的复合体叫做偶极子 (见图 44)。如果某一点与偶极子的距离 ρ 比偶极子的线度 ϵ 大很多时, 这一点的势就可以写作

$$\Phi = \left(\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-} \right) \right) = + \frac{Q\epsilon \cos\phi}{4\pi\rho^2} \quad (7.9)$$

$Q\epsilon$ 叫做偶极矩。

3. 满足边界条件

如果我们采用反射法, 那么, 我们的基本解也可以满足简单的边界条件。例如, 如果有一个源和一个法向分量为零 (势流) 的壁, 那么, 我们就引入一个大小相等的理想的源, 使这个源的位置与前一个源的位置相对于壁是对称的。

此外,如果这个壁具有一个不变的势(如:电势),那么,必须假定第二个源与第一个源大小相等,符号相反(见图45)。

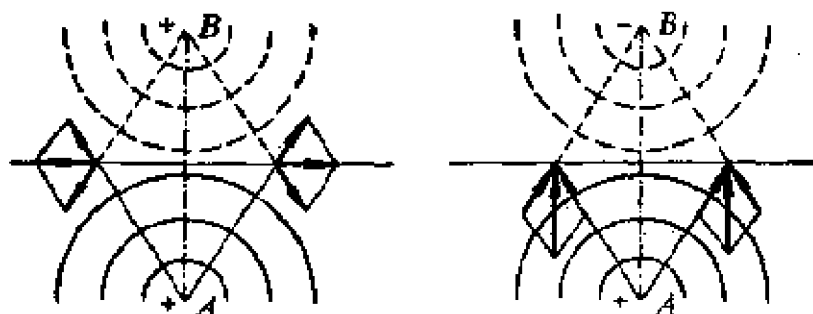


图45 反射

在第一种情况下,场的势为

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\rho_A} + \frac{Q}{4\pi\rho_B} \quad (7.10)$$

而在第二种情况下,场的势为

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\rho_A} - \frac{Q}{4\pi\rho_B} \quad (7.11)$$

对于不是平面的壁,也可以用负源、正源与偶极子相迭加的办法来满足边界条件。例如,用沿 x 轴的平行势流和位于原点处的偶极子相迭加,则得

$$\Phi = U_\infty + \frac{Q\epsilon \cos\varphi}{4\pi\rho^2} = \left(U_\infty + \frac{Q\epsilon}{4\pi\rho^2} \right) \cos\varphi \quad (7.12)$$

如果我们计算半径为 $\rho_0 = (Q\epsilon/2\pi U)^{1/3}$ 的球上的分量 $\partial\Phi/\partial\rho$ (速度的径向分量),则结果为零。于是,式(7.12)就表示绕球的势流。用点源或沿 x 轴连续分布的源,我们可以得到一个势流很容易计算的回转体(而不是球)。

如果是平面的势流,则具有柱对称性。这时,由微分方程

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$$

可以计算出源的势，即有

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad (7.13)$$

相应于偶极子的势为

$$\Phi = \frac{Q\epsilon \cos \varphi}{2\pi r} \textcircled{1}$$

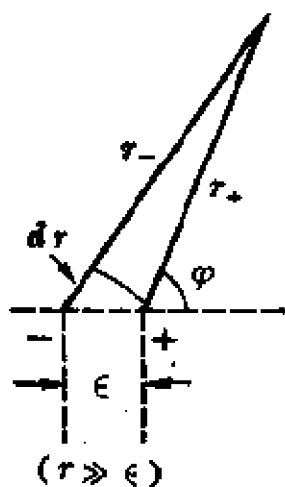
用这种偶极子与平行势流的迭加，我们就可以得到一个绕圆柱的势流

$$\Phi = U_{\infty} r + \frac{Q\epsilon}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r} \quad (7.13a)$$

取 $Q\epsilon/2\pi a^2 = U$ ，我们又可得到公式 (6.21)。

4. 用格临定理求解

如果引入 $\Psi = 1/\rho$ ，从格临定理 (5.27)，我们就可得到 $\Delta \Phi = \mu$ 的一个普遍而又物理意义明确的解。取我们希望知道它的势的那一点作为坐标 ρ 的原点，由于 $\Delta(1/\rho) = 0$ ，则得



①此式可以象式 (7.9) 那样推导出来，即

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{Q}{2\pi} (\ln r_- - \ln r_+) = \frac{Q}{2\pi} d(\ln r) \\ &= \frac{Q}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{Q\epsilon \cos \varphi}{2\pi r} \end{aligned}$$

——译者注

$$\iiint \Delta \Phi \frac{1}{\rho} dV = \oint \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] dS \quad (7.14)$$

我们把这个方程用到一个外部是任意有限的或无限的区域，但是，从这个区域中挖掉一个半径为 ρ_0 ，中心在 $\rho = 0$ 处的很小的球。在这个球上有

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho} \right) = + \frac{1}{\rho^2}$$

(n 是向外的法线，所以在这种情况下，方向朝着原点！) 另外，我们有 $dS = \rho^2 d\omega$ ($d\omega$ 为立体角)。如果取极限，使 $\rho_0 \rightarrow 0$ ，则式 (7.14) 右端积分式的第一项可以消去，第二项则变成为 $-4\pi\Phi_0$ 。若 Φ_0 是我们所要找的原点处的势，则有

$$4\pi\Phi_0 = - \iiint \Delta \Phi \frac{1}{\rho} dV + \oint \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS - \oint \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho} \right) dS \quad (7.15)$$

这里，积分必须只在区域的外表面上进行。

式 (7.15) 右端三项都有特殊的物理意义，空间积分和式 (7.6) 一样，是表示电荷或质量势的，而面积分则表示边界值的影响。 $\partial\Phi/\partial n$ 是矢量 $\text{grad } \Phi$ 在边界上的法向分量。因而，它就等于穿过表面 S 进入区域 V 的场矢量强度。如果这个区域被一个金属罩包围，根据式 (4.34)， $\partial\Phi/\partial n$ 就可以作为“面电荷”来考虑。

为了解释式 (7.15) 中最后一个积分，我们将研究一个厚度为无限薄的区域。在极限情况下，这个区域将以“表面

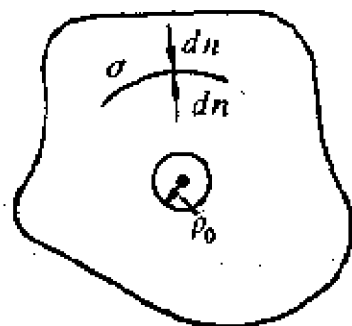


图 46 在一个面上和一个点上的电荷

两侧为边界”。在这个区域的两侧， $\partial(1/\rho)/\partial n$ 大小相等，符号相反。因此，如果 Φ 在两侧是一样的，则积分等于零。假如势穿过表面是不连续的，则积分是有限的。这样的不连续性是由于偶极子的分布（在表面两侧电荷相反）引起的。

5. 热 源

这个方法在热传导理论上也是可以用的。现在，我们来研究一个一维区域，在这个区域内，微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.16)$$

是正确的。假定在点 $x=0$ 处有一个“热源”，这就意味着，在 $t=0$ 时刻这一点的温度为无限大，但总热量却保持有限。描绘来自热源的热流方程 (7.16) 的解是

$$u = \frac{1}{(4\pi kt)^{1/2}} e^{-x^2/4kt} \quad (7.17)$$

这是容易证明的。在图 47 中，我们画出了这个函数在不同

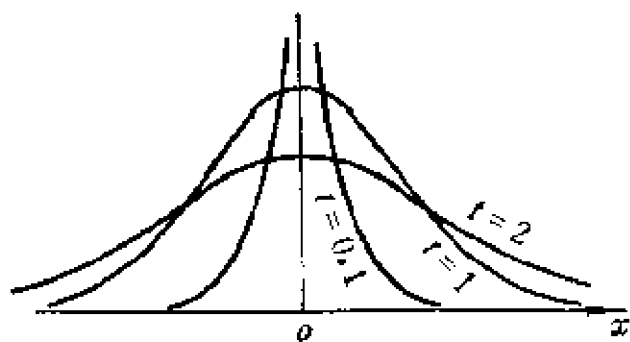


图 47 来自热源的热流

时刻的曲线。在这种情况下，用反射方法也可以满足最重要的边界条件，可以把任意的初始温度 $f(x)$ 看成是在 $x=\xi$ 各点处强度为 $f(\xi)d\xi$ 的热源的和。于是，得

到一个积分形式的解

$$u = \frac{1}{(4\pi kt)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2/4kt} d\xi \quad (7.18)$$

这个公式与我们由傅里叶积分得到的公式 (5.80) 是等价的。因而

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 kt} \cos \alpha (x - \xi) d\alpha = \left(\frac{\pi}{4kt} \right)^{1/2} e^{-(x-\xi)^2/4kt}$$

但是，这里我们不能证明这个公式，在二维情况下，式 (7.17) 可以用

$$u = \frac{1}{4\pi kt} e^{-r^2/4kt} \quad (7.19)$$

来代替。而在三维情况下，式 (7.17) 则用

$$u = \frac{1}{(4\pi kt)^{3/2}} e^{-\rho^2/4kt} \quad (7.20)$$

来代替。

6. 闪 光

对于波动方程，我们也可以找到一个包括奇异点的解。在 $t=0$ 时刻，从原点发出的闪光，在球坐标中遵从以下的微分方程

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.21)$$

这个方程的解是

$$u = \frac{C}{\rho} F(\rho - ct) \quad (7.22)$$

这是容易验证的。

现在，令 $F(x)$ 为除了在点 $x=0$ 处之外，处处为零的“ δ 函数”。在 $x=0$ 处，函数取无限大值的方式是使

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 1 \quad (7.23)$$

(至于更严格的理论, 我们应该设想有一个函数序列, 它在极限的情况下, 具有上式所述性质)。常数 C 由闪光量 Q 来确定。计算一个来自以原点为中心, 有很小半径 ρ_0 的区域的光流, 我们可以得到下面的关系式 (dS 为面元)

$$Q = \int_0^\infty dt \oint \frac{\partial u}{\partial \rho} dS = - \int_0^\infty 4\pi \rho_0^2 \frac{C}{\rho_0^2} F(\rho_0 - ct) dt$$

这是因为

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{C}{\rho^2} F + \frac{C}{\rho} F'$$

在积分时, 第二项当 $\rho_0 \rightarrow 0$ 时变为零。现在, 根据式(7.23)有

$$Q = \frac{4\pi C}{c} \quad (7.24)$$

这个表示法在电子论上是特别重要的。这里, 根据式(4.31)对于真空中的标量势和矢量势的三个分量, 我们有方程(7.21)。现在, 在离我们所求的标量势 Φ 所在点距离为 ρ 处, 有一个体积元 dV , 这个体积元在 $t = \tau$ 时刻的 $d\tau$ 时间间隔内包含着电荷 μdV 。根据式(7.22)和(7.24), 则有

$$d\Phi = \frac{c}{4\pi} \mu dV \frac{1}{\rho} F[\rho - c(t - \tau)] d\tau \quad (7.25)$$

通过对整个空间和从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的所有时间元积分, 就可得到总的势为

$$4\pi\Phi = \int \frac{dV}{\rho} \mu^* \quad (7.26)$$

这里, μ^* 是体积元 dV 内 $t - \tau = \rho/c$ 时刻的电荷密度。这个时刻超前于我们希望知道势的那个时刻 t , 时间差为 ρ/c ,

它正好是脉冲传播距离 ρ 所需的时间, 这就是式 (7.26) 中被积函数和 A 相应的表达式之所以叫做推迟势的原因。

7. 转变为积分方程

我们由奇异点方法得到的用一个积分来表示的解, 积分域为辅助变量的整个区域。其典型的形式已在实例(7.18)中清楚地说明了, 这个解的积分形式只包含一个变量, 即

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) K(x - \xi, t) d\xi \quad (7.27)$$

函数 K 是方程的一个解, 它在 $x = \xi$ 处有一个奇异点。在积分计算中, K 对于 t 的依赖性是不重要的。在 $x = \xi$ 处具有奇异性的基本过程是由函数 K 描述的。这里, 我们就不再需要为从微分方程推导 K 而为难了。

也可以在开始时, 不给定函数 $f(x)$, 而给定 (对某一时刻 t) 函数 $u(x)$ 。于是, 问题就变成了确定 $f(x)$ 。在这种情况下, $f(x)$ 是第一类积分方程 (7.27) 中的未知函数。 K 叫做方程的核。

由某一瞬间的热函数求初始时刻的热源, 这个问题实际上很少出现。不过, 这类问题在其它场合却经常出现。例如, 如果要确定绕某一形状的飞船的气流时就是这样。根据本章第2节, 为了计算可以产生给定流线形状流的源, 就要应用类似于式 (7.6) 的积分方程。

如果 u 本身是未知的, 而 u 和 $f(\xi)$ 之间存在一个已知的关系式。那么, 积分方程表示法就变得更加重要了。在弦的振动这个例子中就有这种情况, 振动是由惯性力和张力之

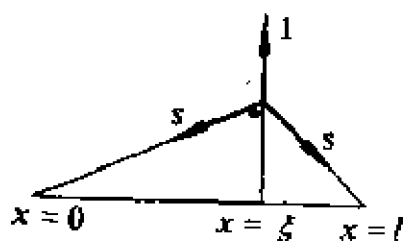


图 48 用单独一个力拉长的弦

间的平衡引起的。为了求出一个基本解，我们来研究一个由唯一的单位力拉起的弦（见图 48）。如果 u 是位移， S 是张力，则有方

$$\begin{aligned} \text{当 } x < \xi \text{ 时, } K(x, \xi) &= \frac{1}{Sl} x(l - \xi) \\ \text{当 } x > \xi \text{ 时, } K(x, \xi) &= \frac{1}{Sl} \xi(l - x) \end{aligned} \quad (7.28)$$

这个函数 $K(x, \xi)$ 是积分方程的核。在点 ξ 处的惯性力相应于函数 $f(\xi)$ 。如果振动是

$$u = y(\xi) \sin \nu t \quad (7.29)$$

则这个惯性力为 $\rho \nu^2 y(\xi) d\xi \sin \nu t$ 。于是，我们就得到积分方程

$$y(x) = \rho \nu^2 \int_0^l y(\xi) K(x, \xi) d\xi \quad (7.30)$$

这就是所谓的第二类齐次积分方程。如果我们在式 (7.30) 左端，除了 $y(x)$ 以外，再加上一个 x 的已知函数，那么，方程就成了第二类非齐次积分方程。这里，参量 ν 具有与微分方程情况下的本征值相同的性质。在我们这个例子中，同样的问题可以用具有边界条件的微分方程来表示，也可以用这样一个积分方程来表示。在后一种情况下，边界条件是由核的形式自动地满足的。

汉英对照索引

二 画

力	Force	6, 13
力线	Line of force.....	39, 118

三 画

万有引力	Gravitation	12, 55
飞船	Airship	129

四 画

贝塞耳函数	Bessel functions.....	88, 94, 99
介电常数	Dielectric constant	65
内力	Interior force	19, 22
比热	Specific heat	56
牛顿	Newton	1, 6, 12
反射	Reflection	123
分离变量	Separation of variables	11
双曲函数	Hyperbolic functions	87
开普勒定律	Kepler's laws.....	18

五 画

加速度	Acceleration	5, 9
边界条件	Boundary condition	3, 70, 115

电荷	Charge	55, 65, 128
电容器	Condenser.....	117
电导率	Conductivity	68, 65
电动力学	Electrodynamics	63
电子论	Electronic Theory	64
电流	Current	64, 65
本征函数	Eigenfunction	72
本征值	Eigenvalue.....	74
外力	Exterior force	19, 23
对数减缩	Logarithmic decrement	27
正交性	Orthogonality	86
矢量	Vector	3, 16, 36
矢量势	Vector potential.....	69, 126
矢量积	Vector product	16
功	Work	13
归一化因子	Normalization factor	96

六 画

机翼、翼面	Airfoil.....	63
齐次边界条件	Homogeneous boundary conditions.....	75, 84
因果关系	Causality	1
自由度	Degree of freedom	33
扩散	Diffusion.....	56
色散、弥散	Dispersion	82
自由落体	Free fall.....	7
有心力	Central force	17
光的传播	Propagation of light	68
动量矩	Moment of momentum.....	16, 20

动量	Momentum	20
光学	Optics	2
光的速度	Velocity of light	68
行星	Planet	12
共振、谐振	Resonance	29, 82
轨道	Trajectory	9
共轭虚数	Conjugate imaginary number	33
级数	Series	76, 92

七 画

抗滚箱	Anti-rolling tanks	32
麦克斯韦	Maxwell	64, 67
声学	Acoustics	32, 79
尾閤	Sink	51
连续性方程	Equation of continuity	58
场	Field	35, 38
伽利略	Galileo	1
初始条件	Initial conditions	3, 10
阻尼振动	Damped oscillation	26
均匀化	Equalization	56
角速度	Angular velocity	22

八 画

非周期运动	Aperiodic motion	27
法拉第定律	Faraday's law	63
拉普拉斯	Laplace	50
质量	Mass	6
质点	Particles	5, 8, 24

周相	Phase.....25, 28
周期	Period25
势	Potential.....54, 110
坡印廷	Poynting.....67
波的传播	Propagation of waves104
波动力学	Wave mechanics4
波动方程	Wave equation.....57
波长	Wave length.....81
奇异性	Singularities120
受迫振动	Forced oscillation27
张量	Tensor4, 56
欧勒方程	Euler's equation.....59

九 画

柯西·黎曼方程	Cauchy-Riemann equations111
指数函数	Exponential function24, 29
柱面坐标	Cylindrical coordinates37, 48
相对论	Relativity4
标量	Scalar3
标量积	Scalar product.....13
绝热	Adiabatic59
保角映射	Conformal mapping114, 118
矩	Moment.....17, 20

十 画

速度	Velocity5, 64
速度势	Velocity potential62
振幅、幅度	Amplitude25, 29

振动	Oscillation	23, 27
能量	Energy	13, 22
格林定理	Green's theorem	85, 124
热传导	Heat conduction	55, 56
热流	Heat flow	56, 126
热源	Heat source	126
积分方程	Integral equation	129
核	Kernel	129
诺埃曼函数	Neumann function	86, 94, 99
递推公式	Recurrence formula	93
流线	Stream line	111
流管	Stream tube	39
流体力学	Fluid dynamics	58
高斯定理	Gauss' theorem	43, 85
泰勒	Taylor	52
涡旋	Vortex	59, 61

十 一 画

偶极子	Dipole	123
旋转振动	Rotational oscillation	32
旋度	Curl (书中改写为 rot——译者注)	43, 47
渐近展开式	Asymptotic expansions	97
笛卡儿坐标	Cartesian coordinates	88, 104
密度	Density	3, 55
梯度	Gradient	35, 50
基频振动	Fundamental oscillation	81
谐频振动	Harmonic oscillation	81
推迟势	Retarded potential	129

球面坐标	Spherical coordinates37, 48, 89
球函数	Spherioal functions91, 96, 97
梁弯曲	Bending of beams.....2

十 二 画

超越方程	Transcendental equation105
幂级数	Power series92, 95
量子理论	Quantum theory2
等势曲线	Curves of constant potential112
散度	Divergence39, 42, 51
焦耳热	Joule heat.....67
惯性矩	Moment of inertia.....21, 32
斯托克斯	Stokes44
傅里叶级数	Fourier series.....75, 105
傅里叶积分	Fourier integral.....105
缔合勒让德函数	Assoc. Legendre functions91

十 三 画

源	Source120, 129
感应	Induction63
频率	Frequency25, 81

十四至十五画

磁导率	Permeability65
稳定性	Stability33
静电学	Electrostatics55
静磁学	Magnetostatics55
耦合振动	Coupled oscillation30
摩擦	Friction.....10, 56