6-2 贝塞尔函数 柱函数

在用分离变量法一章介绍了拉普拉斯方程在柱坐标系下分离变量得到了一种特殊类型的常微分方程:贝塞尔方程.

通过幂级数解法得到了另一类特殊函数，称为贝塞尔函数.

贝塞尔函数具有一系列性质，在求解数学物理问题时主要是引用贝塞尔函数的正交完备性.

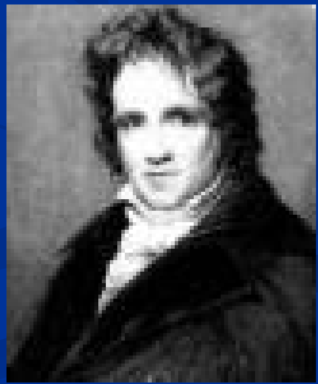
6.1 贝塞尔方程及其解

6.1.1 贝塞尔方程

拉普拉斯方程在柱坐标系下的分离变量得出了一般的贝塞尔方程。

考虑固定边界的圆膜振动，可以归结为下述定解问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & (0 \le x^2 + y^2 < l^2, t > 0) \\
u|_{x^2+y^2=l^2} = 0 & (t \ge 0) \\
u(x,y,t)|_{t=0} = \varphi(x,y) \\
u_t(x,y,t)|_{t=0} = \psi(x,y)
\end{cases}
\quad (6.1.1)
$$



其中 l 为已知正数，$\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 为已知函数.

这个定解问题宜于使用柱坐标，从而构成柱面问题.
（由于是二维问题，即退化为极坐标）

设 $u(x,y,t)=u(\rho,\varphi,t)=T(t)U(\rho,\varphi)$

对泛定方程分离变量（取 $\lambda=k^2$ ）得

$$T''+k^2a^2T=0 \tag{6.1.2}$$

$$\begin{cases} U''_{\rho}+\dfrac{1}{\rho}U'_{\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}U''_{\varphi}+k^2U=0 \\ U\big|_{\rho=l}=0 \end{cases} \tag{6.1.3}$$

再令 $U(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$ ，得到

$$\Phi''+\nu^2\Phi=0 \qquad \textbf{(6.1.4)}$$

$$\rho^2R''+\rho R'+(k^2\rho^2-\nu^2)R=0 \qquad （6.1.5）$$

令 $k\rho=x,\quad R(\rho)=y(x)$ 于是**(6.1.5)**得到

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\nu^2)y=0 \qquad \textbf{（6.1.6）}$$

边界条件为

$$y(k\rho)\big|_{\rho=l}=y(kl)=0$$

方程（6.1.6）称为 ν 阶贝塞尔微分方程．这里

ν 和 x 可以为任意数．

6.1.2 贝塞尔方程的解

通过数学物理方程的幂级数求解方法可以得出结论：

（1）当 $\nu \neq$ 整数时，贝塞尔方程(6.1.6)的通解为

$$y(x) = A\mathrm{J}_{\nu}(x) + B\mathrm{J}_{-\nu}(x) \qquad (6.1.7)$$

其中 A, B 为任意常数，$\mathrm{J}_{\nu}(x)$ 定义为 ν 阶第一类贝塞尔函数

但是当 $\nu = n$ 整数时，有 $\mathrm{J}_{-n}(x) = (-1)^n \mathrm{J}_n(x)$ 故上述解中的 $\mathrm{J}_n(x)$ 与 $\mathrm{J}_{-n}(x)$ 是线性相关的，所以(6.1.7)成为通解必须是 $\nu \neq$ 整数.

（2）当 ν 取任意值时：

定义**第二类贝塞尔函数** $\mathrm{N}_\nu(x)$，这样贝塞尔方程的通解可表示为

$$y(x) = A\mathrm{J}_\nu(x) + B\mathrm{N}_\nu(x) \qquad (6.1.8)$$

(3) 当ν 取任意值时：

由第一、二类贝塞尔函数还可以构成线性独立的

第三类贝塞尔函数 $\mathrm{H}_\nu(x)$ ，又称为汉克尔函数.

$$\begin{cases} \mathrm{H}_\nu^{(1)}(x) = \mathrm{J}_\nu(x) + \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x) \\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(x) = \mathrm{J}_\nu(x) - \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x) \end{cases} \qquad (6.1.9)$$

分别将 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}, \mathrm{H}_\nu^{(2)}$ 称为第一种和第二种汉克尔函数.

于是贝塞尔方程的通解又可以表示为

$$y(x = A\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x) + B\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x) \qquad （6.1.10）$$

最后，总结 ν 阶贝塞尔方程的通解通常有下列三种形式:

（i） $y(x) = A\mathrm{J}_\nu(x) + B\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ （$\nu \neq$ 整数）

（ii） $y(x) = A\mathrm{J}_\nu(x) + B\mathrm{N}_\nu(x)$ （ν 可以取任意数）

（iii） $y(x) = A\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x) + B\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$ （ν 可以取任意数）

6.2 三类贝塞尔函数的表示式及性质

6.2.1 第一类贝塞尔函数的表示式

第一类贝塞尔函数 $\mathrm{J}_\nu(x)$的级数表示式为

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \qquad (6.2.1)$$

式中 $\Gamma(x)$ 是伽马函数．满足关系

$$\Gamma(\nu+k+1)=(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+2)(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

当 ν 为正整数或零时，$\Gamma(\nu+k+1)=(\nu+k)!$

当 ν 取整数时 $\Gamma(-\nu+k+1)=\infty,(k=0,1,2,\cdots,\nu-1)$

所以当 $\nu=n$ 整数时，上述的级数实际上是从 $k=n$ 的项开始，即

$$\mathrm{J}_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k},\qquad (n\geq 0)\quad \textbf{(6.2.2)}$$

而

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{-n}(x)&=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}\\&=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{1}{l!\Gamma(n+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l},\qquad (l=k-n)\end{aligned}\quad \textbf{(6.2.3)}$$

所以 $$\mathrm{J}_{-n}(x)=(-1)^n\mathrm{J}_n(x) \qquad (6.2.4)$$

同理可证 $$\mathrm{J}_{-n}(x)=\mathrm{J}_n(-x) \qquad (6.2.5)$$

因此有重要关系

$$\mathrm{J}_n(-x)=(-1)^n\mathrm{J}_n(x) \qquad (6.2.6)$$

可得几个典型的贝塞尔函数表示式

$$\mathrm{J}_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\cdots$$

$$\mathrm{J}_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\cdots$$

当**x**很小时 $(x\to 0)$ 保留级数中前几项，可得

$$\mathrm{J}_\nu(x)\approx\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1)},\quad (\nu\neq -1,-2,-3,\cdots)\qquad（6.2.7）$$

特别是 $\mathrm{J}_0(0)=1,\mathrm{J}_n(0)=0\quad (n=1,2,3,\cdots)\qquad (6.2.8)$

当**x**很大时 $\mathrm{J}_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2}\right)+o\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$（6.2.9）

例**6.2.1** 试证半奇阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$

证明：由公式**(6.2.1)**有

$$\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{\frac{1}{2}+2k}}{2^{\frac{1}{2}+2k}k!\Gamma(\frac{1}{2}+k+1)}$$

而

$$\Gamma(\frac{3}{2}+k)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}$$

故

$$\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\quad=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

同理可证 $$\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

6.3 贝塞尔函数的基本性质

6.3.1 贝塞尔函数的递推公式

由贝塞尔函数的级数表达式（6.2.1）容易推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{J}_\nu(x)}{x^\nu}\right]=-\frac{\mathrm{J}_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \qquad (6.3.1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)]=x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x) \qquad (6.3.2)$$

以上两式都是贝塞尔函数的线性关系式. 诺伊曼函数 $\mathrm{N}_\nu(x)$

和汉克尔函数也应该满足上述递推关系

若用 $Z_v(x)$ 代表 v 阶的第一或第二或第三类函数,总是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^v Z_v(x)] = x^v Z_{v-1}(x) \qquad (6.3.3)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-v} Z_v(x)] = -x^{-v} Z_{v+1}(x) \qquad (6.3.4)$$

把两式左端展开, 又可改写为

$$Z_v'(x) - \frac{v}{x} Z_v(x) = -Z_{v+1}(x) \qquad (6.3.5)$$

$$Z_v' + \frac{v}{x} Z_v(x) = Z_{v-1}(x) \qquad (6.3.6)$$

从(6.3.5)和(6.3.6)消去 Z_v 或消去 Z_v' 可得

$$Z_{v+1}(x)=Z_{v-1}(x)-2Z_v'(x)$$

$$Z_{v+1}(x)=-Z_{v-1}(x)+\frac{2v}{x}Z_v(x)$$

即为从 $Z_{v-1}(x)$ 和 $Z_v(x)$ 推算 $Z_{v+1}(x)$ 的递推公式.

上式也可以写成为

$$Z_{v-1}(x)+Z_{v+1}(x)=2\frac{v}{x}Z_v(x) \qquad (6.3.7)$$

$$Z_{v-1}(x)-Z_{v+1}(x)=2Z_v'(x) \qquad (6.3.8)$$

任一满足一组递推关系的函数 $Z_v(x)$ 统称为柱函数

例6.3.1 证明柱函数满足贝塞尔方程

【证明】 以满足（6.3.7）和（6.3.8）这一组递推公式来进行证明：

将 (6.3.7)与（6.3.8）相加或相减消去 $Z_{\nu+1}$ 或 $Z_{\nu-1}$ 分别得到

$$Z'_\nu(x)+\frac{\nu}{x}Z_\nu(x)=Z_{\nu-1}(x) \qquad (6.3.9)$$

$$Z_{\nu+1}(x)=\frac{\nu}{x}Z_\nu(x)-Z'_\nu(x) \qquad （6.3.10）$$

将(6.3.9) 式中的 ν 换成 $\nu+1$，得到

$$Z_\nu(x)=Z'_{\nu+1}(x)+\frac{\nu+1}{x}Z_{\nu+1}(x) \qquad （6.3.11）$$

将（6.3.10）代入上式，立即得到 $Z_\nu(x)$ 满足 ν 阶贝塞尔方程.

例 6.3.2 求 $\int x\mathrm{J}_2(x)\mathrm{d}x$

【解】 根据公式（6. 3. 8） $Z_{\nu-1}(x)-Z_{\nu+1}(x)=2Z'_\nu(x)$有

$$\mathrm{J}_2(x)=\mathrm{J}_0(x)-2\mathrm{J}'_1(x)$$

$$\int x\mathrm{J}_2(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x-2\int x\mathrm{J}'_1(x)\mathrm{d}x=x\mathrm{J}_1(x)-2[x\mathrm{J}_1(x)-\int \mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x]$$

$$=x\mathrm{J}_1(x)-2[x\mathrm{J}_1(x)+\int \mathrm{J}_0{}'(x)\mathrm{d}x]=-x\mathrm{J}_1(x)-2\mathrm{J}_0(x)+c$$

例 6.3.3 证明下式成立

$$\int_0^x x^{m+1}\mathrm{J}_m(x)\mathrm{d}x = x^{m+1}\mathrm{J}_{m+1}(x) \qquad (6.3.17)$$

特别是 $$\int_0^x x^2\mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x = x^2\mathrm{J}_2(x) \qquad (6.3.18)$$

【证明】利用**递推公式(6.3.2)** 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^v\mathrm{J}_v(x)] = x^v\mathrm{J}_{v-1}(x)$$ ，令 $v = m+1$ 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{m+1}\mathrm{J}_{m+1}(x)] = x^{m+1}\mathrm{J}_m(x)$$

两边积分，故得到

$$x^{m+1}\mathrm{J}_{m+1}(x) = \int_0^x x^{m+1}\mathrm{J}_m(x)\mathrm{d}x$$

其中取 $m=1$ ，即为（22.3.18）式。

6.3.2 贝塞尔函数与本征问题

拉普拉斯方程在柱坐标系下的分离变量，得到了方程(14.6.7) 即

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+(\mu-\frac{\nu^2}{\rho^2})R=0 \qquad (6.3.19)$$

在自然周期边界条件下，$\nu = m$ 取整数，其它情况下 ν 可取任意复数

对另一本征值 μ 分三种情况：$\mu=0$，$\mu>0$ 和 $\mu<0$ 进行讨论：

（1）$\mu=0$ ．方程（6.3.19）是**欧拉方程**；

（2） $\mu>0$ ．作代换 $x=\sqrt{\mu}\rho$ ，则得到

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(x^2-\nu^2\right)R=0\quad(x=\sqrt{\mu}\rho)\qquad（\mathbf{6.3.21}）$$

即为 ν 阶**贝塞尔(Bessel)方程**.

（3） $\mu<0$ ．记 $-\mu=k^2>0$ ，以 $\mu=-k^2$

代入，并作代换 $x=k\rho$

则方程化为

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-\left(x^2+\nu^2\right)R=0\qquad\mathbf{(6.3.22)}$$

这叫作**虚宗量贝塞尔方程**．如把贝塞尔方程（**6.3.22**）的宗量 x 改成虚数 $\mathrm{i}x$ ，就成了方程（**6.3.21**）

贝塞尔方程本征值问题（即本征值 $\mu>0$ 的情况）：

1. 第一类边界条件的贝塞尔方程本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}]+(k^2-\dfrac{\nu^2}{\rho^2})R(\rho)=0 \quad (0\le\rho\le\rho_0) \\ R(\rho_0)=0 \qquad |R(0)|<M\end{cases} \tag{6.3.23}$$

根据圆柱的周期性边界条件 $\Phi(\varphi)=\Phi(2\pi+\varphi)$

，则方程（**6.3.23**）中的 $\nu=m=0,1,2,3,\cdots$

上述方程**(6.3.23)**可进一步化为施—刘型本征值问题的形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}]+(-\dfrac{m^2}{\rho})R+k^2\rho R(\rho)=0 \quad (0\le\rho\le\rho_0) \\ R(\rho_0)=0 \qquad |R(0)|<M\end{cases} \tag{6.3.24}$$

相应于施一刘型方程中的

$$k(x) = x,\quad q(x) = -\frac{m^2}{x},\quad \rho(x) = x,\quad \lambda = \mu = k^2$$

故施一刘型本征值问题的结论对于贝塞尔方程的本征值问题也成立.

贝塞尔方程(6.3.24)的通解为

$$R(\rho) = A\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu}\rho) + B\mathrm{N}_m(\sqrt{\mu}\rho) \qquad (6.3.25)$$

代入边界条件决定本征值及本征函数．因为

$R(0) < M$ 故 $B = 0$

又 $R(\rho_0) = 0$ ，要 $A \neq 0$ ，则必须

$J_m(k\rho_0) = 0$ 则

$J_m(x) = 0$ 就是决定本征值的方程.

若用 $x_n^{(m)}$ 表征 $J_m(x) = 0$ 的第 n 个正根，于是本征值

$$\lambda_n^{(m)} = \mu_n^{(m)} = [k_n^{(m)}]^2 = [\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0}]^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \textbf{(6.3.26)}$$

施一刘型本征值问题的结论

(1) 本征值存在，且都是非负的实数；

(2) 本征值可编成单调递增的序列

本征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$

即 $$\left(\frac{x_1^{(m)}}{\rho_0}\right)^2 < \left(\frac{x_2^{(m)}}{\rho_0}\right)^2 < \cdots < \left(\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0}\right)^2 < \cdots \quad \textbf{(6.3.27)}$$

本征函数 $$\mathrm{J}_m\left(\frac{x_1^{(m)}}{\rho_0}\rho\right), \mathrm{J}_m\left(\frac{x_2^{(m)}}{\rho_0}\rho\right), \cdots, \mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0}\rho\right), \cdots \quad \textbf{(6.3.28)}$$

（3）对于每一个本征值

$$\lambda_n^{(m)} = [k_n^{(m)}]^2$$

有一个相应的本征函数

$$\mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho)$$

且本征函数 $\mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho)$

在 $[0, \rho_0]$ 区间上有 $(n-1)$ 个零点

$J_{m+1}(x)$

即

$$\frac{x_1^{(m)}}{x_n^{(m)}}\rho_0,\frac{x_2^{(m)}}{x_n^{(m)}}\rho_0,\cdots,\frac{x_{n-1}^{(m)}}{x_n^{(m)}}\rho_0$$

若在区间 $[0,\infty,]$ 则贝塞尔函数有无穷个零点.

（4） $J_m(x)$ 的零点与 $J_{m+1}(x)$ 的零点是彼此相间分布的，即 $J_m(x)$ 的任意两个相邻零点之间必有且仅有一个 $J_{m+1}(x)$ 的零点

（5）以 $x_n^{(m)}$ 表示 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第n个正零点，则

$$\lim_{n\to+\infty}[x_{n+1}^{(m)}-x_n^{(m)}]=\pi$$ ，即 $\mathrm{J}_m(x)$几乎是以 2π

为周期的周期函数.

(6)零点还可以用下面的公式计算

$$x_n^{(m)}=A-\frac{B-1}{8A}\left(1+\frac{C}{3(4A)^2}+\frac{2D}{15(4A)^4}+\frac{E}{105(4A)^6}+\cdots\right)$$

其中

$$A=(m-\frac{1}{2}+2n)\frac{\pi}{2},B=4m^2,C=7B-31,D=83B^2-982B+3779$$

$$E=6949B^3-153855B^2+1585743B-6277237$$

2.第二类齐次边界条件 $R'(\rho_0)=0$

这个条件就是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\mathrm{J}_m(k\rho)]\Big|_{\rho=\rho_0}=k\mathrm{J}'_m(k\rho_0)=0 \quad （6.3.30）$$

对于 $k \neq 0$，则本征值

$$\lambda_n^{(m)} = (x_n^{(m)} / \rho_0)^2 \quad (6.3.31)$$

其中 $x_n^{(m)}$ 是 $\mathrm{J}'_m(x)$ 的第 n 个零点.

$\mathrm{J}'_m(x)$ 的零点在一般的数学用表中并未列出.

不过，$m = 0$ 的特例还是容易得到的：

由公式(6.3.12)得到 $\mathrm{J}_0'(x) = -\mathrm{J}_1(x)$

这样， $J_0'(x)$ 的零点不过就是 $J_1(x)$ 的零点，可从许多数学用表中查出.

- 至于 $m \neq 0$ 的情况，$J_m'(x)$ 的零点 $x_n^{(m)}$ 可以利用递推公式(6.3.8)

$$J_m'(x) = \frac{1}{2}[J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)]$$

这样 $J_m'(x)$ 的零点可从曲线 $J_{m-1}(x)$和 $J_{m+1}(x)$ 的交点得出.

对于$m \neq 0$ 的情况，$J'_m(x)$ 的零点 $x_n^{(m)}$

还可以用下面的公式计算：

$$x_n^{(m)} = A - \frac{B+3}{8A} - \frac{C}{6(4A)^3} - \frac{D}{15(4A)^5} - \cdots$$

- 其中

$$A = \left(m + \frac{1}{2} + 2n\right)\frac{\pi}{2}, B = 4m^2, C = 7B^2 + 82B - 9$$

$$D = 83B^3 + 2075B^2 - 3039B + 3537$$

(3) 第三类齐次边界条件

$$R(\rho_0)+HR'(\rho_0)=0.$$

这个条件就是

$$\mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho_0)+Hk_n^{(m)}\mathrm{J}_m'(k_n^{(m)}\rho_0)=0$$

记 $x_0=k_n^{(m)}\rho_0,\quad h=\rho_0/H,$

并引用（6.3.5）可将上式改写为

$$\mathrm{J}_m(x_0)=\frac{x_0}{h+m}\mathrm{J}_{m+1}(x_0)$$

所以本征值 $\mu_n^{(m)}=(x_n^{(m)}/\rho_0)^2$，其中 $x_n^{(m)}$

- 是方程（6.3.33）的第N个根

6.3.3贝塞尔函数正交性和模

1. 正交性

对应不同本征值的本征函数分别满足

$J_m(k_i^{(m)}\rho)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho\frac{\mathrm{dJ}_m}{\mathrm{d}\rho}]+\{[k_i^{(m)}]^2-\frac{m^2}{\rho^2}\}\mathrm{J}_m(k_i^{(m)}\rho)=0 \qquad \textbf{(6.3.34)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho\frac{\mathrm{dJ}_m}{\mathrm{d}\rho}]+\{[k_j^{(m)}]^2-\frac{m^2}{\rho^2}\}\mathrm{J}_m(k_j^{(m)}\rho)=0 \qquad (6.3.35)$$

将(6.3.34)乘以 $\mathrm{J}_m(k_j^{(m)}\rho)$ **,将(6.3.35)乘以** $\mathrm{J}_m(k_i^{(m)}\rho)$

两式相减，再积分，利用分部积分法得到

$$\{[k_i^{(m)}]^2-[k_j^{(m)}]^2\}\int_0^{\rho_0}\mathrm{J}_m(k_i^{(m)}\rho)\mathrm{J}_m(k_j^{(m)}\rho)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=[\rho\mathrm{J}_m(k_i^{(m)}\rho)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{J}_m(k_j^{(m)}\rho)-\rho\mathrm{J}_m(k_j^{(m)}\rho)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{J}_m(k_i^{(m)}\rho)]|_0^{\rho_0}=0$$

故当 $k_i^{(m)} \neq k_j^{(m)}$

$$\int_0^{\rho_0} \mathrm{J}_m(k_i^{(m)}\rho)\mathrm{J}_m(k_j^{(m)}\rho)\rho \mathrm{d}\rho = 0 \qquad \textbf{(6.3.36)}$$

2. 贝塞尔函数的模 $N_n^{(m)}$

为了用贝塞尔函数作基进行广义傅立叶级数展开，需要先计算贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho)$ 的模 $N_n^{(m)}$

$$[N_n^{(m)}]^2 = \int_0^{\rho_0} [\mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho)]^2 \rho \mathrm{d}\rho \qquad \textbf{(6.3.37)}$$

$x_n^{(m)} > 0$

注意

$$\lambda_n^{(m)} = [k_n^{(m)}]^2 = [\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0}]^2$$

对于 $x_n^{(m)} > 0$ 把 $k_n^{(m)}\rho$ 记为 x

$k_n^{(m)}\rho_0$ 记作 x_0

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{x_0}[\mathrm{J}_m(x)]^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\lambda_n}\int_0^{x_0}[\mathrm{J}_m(x)]^2\mathrm{d}(x^2)$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n}[x^2\mathrm{J}_m^2(x)]_0^{x_0} - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{x_0}[x^2\mathrm{J}_m(x)]\mathrm{J}'_m(x)\mathrm{d}x$$

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2\lambda_n}[x^2 \mathrm{J}_m^2(x)]_0^{x_0} + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{x_0}[x^2\mathrm{J}_m''(x) + x\mathrm{J}_m'(x) - m^2\mathrm{J}_m(x)]\mathrm{J}_m'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n}[x^2 \mathrm{J}_m^2(x)]_0^{x_0} + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{x_0}[x^2\mathrm{J}_m'(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m'(x)}{\mathrm{d}x} + x(\mathrm{J}_m')^2]\mathrm{d}x - \frac{m^2}{\lambda_n}\int_0^{x_0}\mathrm{J}_m\mathrm{d}\mathrm{J}_m$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n}[x^2 \mathrm{J}_m^2(x)]_0^{x_0} + \frac{1}{2\lambda_n}\int_0^{x_0}\mathrm{d}[x^2\mathrm{J}_m'^2(x)] - \frac{m^2}{2\lambda_n}[\mathrm{J}_m^2(x)]_0^{x_0}$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n}[(x^2 - m^2)\mathrm{J}_m^2(x)]_0^{x_0} + \frac{1}{2\lambda_n}[x^2\mathrm{J}_m'^2(x)]_0^{x_0}$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_0^2 - \frac{m^2}{\lambda_n})[\mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho_0)]^2 + \frac{1}{2}\rho_0^2[\mathrm{J}_m'(k_n^{(m)}\rho_0)]^2. \qquad \textbf{(6.3.38)}$$

第一类齐次边界条件

$$\mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho_0)=0,$$

则式（6.3.38）成为

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}\rho_0^2[\mathrm{J}'_m(k_n^{(m)}\rho_0)]^2 \qquad (6.3.39)$$

以（6.3.5）代入上式，并且考虑到第一类齐次边界条件 $\mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho_0)=0,$ 故得

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}\rho_0^2[\mathrm{J}_{m+1}(k_n^{(m)}\rho_0)]^2 \qquad （6.3.40）$$

第二类齐次边界条件 $J'_m(k_n^{(m)}\rho_0)=0$，

（6.3.38）成为

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}(\rho_0^2-\frac{m^2}{\lambda_n})[J_m(k_n^{(m)}\rho_0)]^2 \qquad (6.3.41)$$

第三类齐次边界条件

$$J'_m=-\frac{J_m}{k_n^{(m)}H}$$ (6.3.38)成为

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}(\rho_0^2-\frac{m^2}{\lambda_n}+\frac{\rho_0^2}{\lambda_n H})[J_m(k_n^{(m)}\rho_0)]^2 \qquad (6.3.42)$$

6.3.3 广义傅立叶—贝塞尔级数

按照施—刘型本征值问题的性质，本征函数族

$\mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho)$ 是完备的，可作为广义傅立叶级数展开的基.

定义在区间 $[0,\rho_0]$ 上的函数 $f(\rho)$ 可以展开为广义的

傅立叶—贝塞尔级数 $f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho)$

（6.3.43）

其中广义傅氏系数

$$f_n=\frac{1}{[N_n^{(m)}]^2}\int_0^{\rho_0} f(\rho)\mathrm{J}_m(k_n^{(m)}\rho)\rho\mathrm{d}\rho \qquad (6.3.44)$$

例6.3.4

在区间 $[0,\rho_0]$ 上，以 $\mathrm{J}_0(k_n^{(0)}\rho)$ 为基，把函数 $f(\rho)=u_0$（常数）展开为傅里叶一贝塞尔级数.

说明： 其中 $\lambda_n^{(0)}=[k_n^{(0)}]^2$ 是本征函数 $\mathrm{J}_0(k_n^{(0)}\rho)$ 对应的本征值.

【解】根据(6.3.43)和(6.3.44) 则

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{J}_0(k_n^{(0)}\rho)$$

其中系数

$$f_n = \frac{1}{[N_n^{(0)}]^2}\int_0^{\rho_0} u_0 \mathrm{J}_0(k_n^{(0)}\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

这里的 $N_n^{(0)}$ 由第一类边界条件所对应的模公式(6.3.40) 给出.

本征值

$$\lambda_n^{(0)} = [k_n^{(0)}]^2 = [\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}]^2$$

而 $x_n^{(0)}$ 是0阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_0(x)$ 的第 n 个零点，

可由贝塞尔函数表查出.

这样 $$f_n=\frac{2u_0}{\rho_0^2[\mathrm{J}_1(x_n^{(0)})]^2}\int_0^{\rho_0}\mathrm{J}_0(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho)\rho\mathrm{d}\rho$$

令 $x=\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho$ ，则

$$f_n=\frac{2u_0}{[x_n^{(0)}\mathrm{J}_1(x_n^{(0)})]^2}\int_0^{x_n^{(0)}}x\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x=\frac{2u_0}{[x_n^{(0)}\mathrm{J}_1(x_n^{(0)})]^2}[x\mathrm{J}_1(x)]_0^{x_n^{(0)}}=\frac{2u_0}{x_n^{(0)}\mathrm{J}_1(x_n^{(0)})}$$

故

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u_0}{x_n^{(0)}\mathrm{J}_1(x_n^{(0)})}\mathrm{J}_0(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho)$$

6.3.4 贝塞尔函数的母函数（生成函数）

1. 母函数（生成函数）

考虑解析函数 $G(x,z)=e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ 在

$0<|z|<+\infty$ 内的罗朗展式.

注意　此处的 X 为参变数，不是复变数 Z 的实部.

$$e^{\frac{x}{2}z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^k}{k!} z^k$$

$$e^{-\frac{x}{2}z^{-1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^l}{l!} (-z)^{-l}$$

,

$$\Rightarrow \quad e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^k}{k!} z^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^l}{l!} (-z)^{-l}$$

对于固定的 z，以上两级数在 $0<|z|<+\infty$

内是可以相乘的，且可按任意方式并项.

$$k-l=n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

$$G(x,z)=e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{k!l!}(\frac{x}{2})^{k+l}z^{k-l}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!l!}(\frac{x}{2})^{2l+n}]z^n$$

$$G(x,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)z^n \qquad \textbf{(6.3.45)}$$

称 $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ 为贝塞尔函数的母函数（或生成函数）.

2 .平面波用柱面波的形式展开

$z=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta},x=kr$

式（6.3.45）

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(kr)\mathrm{i}^n e^{in\theta}=\mathrm{J}_0(kr)+\sum_{n=1}^{\infty}[\mathrm{J}_n(kr)\mathrm{i}^n e^{in\theta}+\mathrm{J}_{-n}(kr)\mathrm{i}^{-n}e^{-in\theta}]$$

$$\Downarrow$$

$$e^{ikr\cos\theta}=\mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(kr)\cos n\theta \qquad (6.3.46)$$

这公式是函数 $e^{ikr\cos\theta}$ 的傅氏余弦展开式.

当 $x = kr$ 为实数时，在物理意义上,

（6.3.46）式可以理解为用柱面波来表示平面波，并可写为

$$\cos(kr\cos\varphi) = \mathrm{J}_0(kr) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \mathrm{J}_{2m}(kr)\cos 2m\varphi \qquad (22.3.47)$$

$$\sin(kr\cos\varphi) = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \mathrm{J}_{2m+1}(kr)\cos(2m+1)\varphi \qquad (22.3.48)$$

3.加法公式

利用母函数公式

$$G(x,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)z^n$$

$$G(x+y,z)=e^{\frac{x+y}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(x+y)z^m$$

$$=e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}e^{\frac{y}{2}(z-\frac{1}{z})}=G(x,z)G(y,z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_k(x)z^k\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(y)z^n$$

比较两边的 z^m 项的系数，即得加法公式

$$\mathrm{J}_m(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_k(x)\mathrm{J}_{m-k}(y) \qquad (6.3.49)$$

4. 贝塞尔函数的积分表达式

利用母函数公式(6.3.30)和罗朗展式的系数表达式，得到

$$\mathrm{J}_m(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}}{z^{m+1}}\mathrm{d}z \quad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

C 是围绕 $z=0$ 点的任意一条闭曲线.

如果取 C 为单位圆，则在 C 上，有 $z=e^{i\theta}$

从而得到

$$\mathrm{J}_m(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}e^{\mathrm{i}x\sin\theta}(e^{\mathrm{i}\theta})^{-m-1}(\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\mathrm{i}(x\sin\theta-m\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{J}_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta-m\theta)\mathrm{d}\theta,\qquad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

（6.3.50）

其中积分式中的 $\sin(x\sin\varphi-m\varphi)$ 的项已被省去.

因为在 $[0,2\pi]$ 上其积分为零.

式(6.3.35)就是整数阶贝塞尔函数的积分表达式.

★ $m=0$ 时，有

$$\mathrm{J}_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

6.4 虚宗量贝塞尔方程

6.4.1 虚宗量贝塞尔方程的解

在前面一节中，我们提到拉普拉斯方程在柱坐标系下的

分离变量方程，在 $\mu < 0$ 的情况下，$R(\rho)$ 应满足

虚宗量贝塞尔方程即为（6.3.22）式

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - \left(x^2 + \nu^2\right) R = 0 \qquad (6.4.1)$$

虚宗量贝塞尔方程也称为修正贝塞尔方程.

若令 $\xi = \mathrm{i}x, y(\xi) = R(x)$，代入上方程

得到贝塞尔方程形式

$$\xi^2 y'' + \xi y' + \left(\xi^2 - \nu^2\right) y = 0 \tag{6.4.2}$$

令 $\xi = \mathrm{i}x$ 即可得到虚宗量贝塞尔方程(6.4.1)的解.

- 定义虚宗量贝塞尔方程的解具有下列形式

$$\mathrm{I}_\nu(x) = \frac{1}{\mathrm{i}^\nu}\mathrm{J}_\nu(\xi) = (-\mathrm{i})^\nu \mathrm{J}_\nu(\mathrm{i}x)$$

式中 $(-\mathrm{i})^\nu$ 的引入是为了确保 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 是实函数.

利用 $J_\nu(x)$ 的级数形式(6.2.1)

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$$\mathrm{I}_\nu(x)=(-\mathrm{i})^\nu\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{\mathrm{i}x}{2}\right)^{\nu+2k}=(-\mathrm{i})^\nu\mathrm{i}^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{i}^{2k}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$$\mathrm{I}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \qquad \textbf{(6.4.4)}$$

$\mathrm{I}_\nu(x)$ 称为 ν 阶第一类虚宗量贝塞尔函数.

也称为第一类修正贝塞尔函数

讨论

(1)当 $\nu\neq$整数时，方程(6.4.1)的通解为

$$y(x)=C\mathrm{I}_\nu(x)+D\mathrm{I}_{-\nu}(x) \qquad (6.4.5)$$

C,D 为任意常数.

(2)当 ν 取任意值时：

由于任意值中可能包含 $\nu=m$ 整数.

根据

$$\mathrm{I}_{-m}(x)=\mathrm{i}^m\mathrm{J}_{-m}(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}^m(-\mathrm{i})^m\mathrm{J}_m(\mathrm{i}x)=(-\mathrm{i})^m\mathrm{J}_m(\mathrm{i}x)=\mathrm{I}_m(x)$$

$$\Downarrow$$

$\mathrm{I}_m(x),\mathrm{I}_{-m}(x)$ 线性相关

因此要求方程 (6.4.1)的**通解**，必须先求出与 $\mathrm{I}_m(x)$ 线性无关的**另一特解**. 为此我们定义

$$\mathrm{K}_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{I}_{-\nu}(x)-\mathrm{I}_\nu(x)}{\sin\pi\nu} \qquad (6.4.6)$$

为 ν 阶第二类虚宗量贝塞尔函数,

又称为麦克唐纳(Macdonale)函数,

或第二类修正贝塞尔函数.

这样定义后，不管 ν 是否为整数，$\mathrm{K}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 一起总能构成虚宗量贝塞尔方程(6.4.1)的两个线性无关的通解.

故得到当 ν 取任意值时球贝塞尔方程的通解为

$$y(x) = C\mathrm{I}_\nu(x) + D\mathrm{K}_\nu(x) \qquad （\nu \text{ 任意值}）$$

其中 C, D 是两任意常数.

6.4.2 第一类虚宗量贝塞尔函数的性质

由第一类虚宗量贝塞尔函数的级数形式（6.4.4）知

$$\mathrm{I}_m(-x) = (-1)^m \mathrm{I}_m(x)$$

$m =$ 奇数 $\Rightarrow$ $\mathrm{I}_m(x)$ 为奇函数

$m =$ 偶数 $\Rightarrow$ $\mathrm{I}_m(x)$ 为偶函数

$m = 0$

$\Downarrow$

$$\mathrm{I}_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} + \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \cdots \quad \textbf{(6.4.8)}$$

（1）特殊值

$$\mathrm{I}_0(0)=1,\quad \mathrm{I}_m(0)=0\quad (m>0)$$

（2）由级数表达式知，当 x 是大于零的实数时，

所有的项都是正的. $\mathrm{I}_\nu(x)$ 没有实零点;

(3) 递推公式

$$\mathrm{I}_{m-1}(x)-\mathrm{I}_{m+1}(x)=\frac{2m}{x}\mathrm{I}_m(x),\qquad \mathrm{I}_{m+1}(x)+\mathrm{I}_{m-1}(x)=2\mathrm{I}_m'(x)$$

$$\mathrm{I}_m'(x)+\frac{m}{x}\mathrm{I}_m(x)=\mathrm{I}_{m-1}(x),\qquad \mathrm{I}_m'(x)-\frac{m}{x}\mathrm{I}_m(x)=\mathrm{I}_{m+1}(x)$$

(6.4.9)

6.4.2 第二类虚宗量贝塞尔函数的性质

根据定义式(6.4.5)，给出当 $\nu=m$ 整数时的级数形式：

$$\mathrm{K}_m(x)=(-1)^{m+1}[\gamma+\ln\frac{x}{2}]\mathrm{I}_m(x)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{(m-k-1)!}{k!}(\frac{x}{2})^{m-2k}$$

$$+\frac{(-1)^m}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}[\varphi(m+k)+\varphi(k)](\frac{x}{2})^{m+2k}$$

(6.4.10)

$\gamma=0.577216\cdots$ 是欧拉常数. $\varphi(k)=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$

递推公式：

$$K_{m+1}(x)-K_{m-1}(x)=\frac{2m}{x}K_m(x),\quad K_{m+1}(x)+K_{m-1}(x)=-2K'_m(x)$$

$$K'_m(x)+\frac{m}{x}K_m(x)=-K_{m-1}(x),\quad K'_m(x)-\frac{m}{x}K_m(x)=-K_{m+1}(x)$$

(6.4.11)

6.5 球贝塞尔方程

6.5.1. 球贝塞尔方程

用球坐标系对亥姆霍兹方程进行分离变量，得

球贝塞尔方程(14.4.25)即

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0 \tag{6.5.1}$$

称为 l 阶球贝塞尔方程.

因为对于 $k>0$ 把自变量 r 和函数 $R(r)$ 分别换作

x 和 $y(x)$，令 $x=kr$ $R(r)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}y(x)$

则

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[x^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0 \qquad \textbf{(6.5.2)}$$

即为（$l+\dfrac{1}{2}$）阶贝塞尔方程.

而对于 $k=0$，方程(6.5.1)即为 欧拉型方程,解为

$$R(r)=Cr^l+\frac{D}{r^{l+1}}$$

6.5.2 球贝塞尔方程的解

根据并贝塞尔方程(6.5.2）的解，可得**球贝塞尔方程(6.5.1)的两个线性独立解**为

$$\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad \mathrm{N}_{l+\frac{1}{2}}(x) \qquad \text{或} \quad \mathrm{H}^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad \mathrm{H}^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

再将它们每一个乘以 $\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ 即得到下列定义：

$$\mathrm{j}_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

$$\mathrm{n}_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{l+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{-(l+\frac{1}{2})}(x) \qquad \textbf{(6.5.3)}$$

称之为球贝塞尔方程的解，并且称 $j_l(x)$ 为第一类球贝塞尔函数，$n_l(x)$ 为第二类球贝塞尔函数或球诺依曼函数.

第三类球贝塞尔函数或球汉克尔函数可定义为

$$h_l^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)=j_l(x)+i\cdot n_l(x)$$

$$h_l^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)=j_l(x)-i\cdot n_l(x) \qquad \textbf{(6.5.4)}$$

球贝塞尔方程的通解为

$$y(x)=C\mathrm{j}_l(x)+D\mathrm{n}_l(x) \qquad \textbf{(6.5.5)}$$

或

$$y(x)=C\mathrm{h}_l^{(1)}(x)+D\mathrm{h}_l^{(2)}(x) \qquad \textbf{(6.5.6)}$$

其中C,D 为两个任意实数

6.5.3 球贝塞尔函数的级数表示

根据球贝塞尔函数的定义式和贝塞尔函数的级数表示得到

$$\mathrm{j}_l(x)=2^l x^l\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+l)!}{k!(2k+l+1)!}x^{2k} \qquad \textbf{(6.5.7)}$$

和

$$\mathrm{n}_l(x)=\frac{(-1)^{l+1}}{2^l x^{l+1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k-l)!}{k!(2k-2l)!}x^{2k} \quad (6.5.8)$$

6.5.4 球贝塞尔函数的递推公式

若用 $\mathrm{f}_l(x)$ 代表球贝塞尔函数或球诺伊曼函数或球汉克尔函数，

$$\mathrm{f}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Z_{l+1/2}(x) \quad (6.5.9)$$

根据贝塞尔函数的递推公式（6.3.7）：

$$Z_{v-1}(x)+Z_{v+1}(x)=2\frac{v}{x}Z_v(x)$$

并取 $v=l+1/2,$ 得

$$Z_{l-\frac{1}{2}}(x)+Z_{l+\frac{3}{2}}(x)=\frac{(2l+1)}{x}Z_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

故有

$$\mathrm{f}_{l+1}(x)=\frac{2l+1}{x}\mathrm{f}_l-\mathrm{f}_{l-1} \qquad \text{(6.5.10)}$$

这就是从 f_{l-1} 和 f_l 推算 $\mathrm{f}_{l+1}(x)$ 递推公式.

6.5.5 球贝塞尔函数的初等函数表示式

贝塞尔函数 ⟹ $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x,\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$

式（6.5.9） ⟹ $j_0(x)=\dfrac{\sin x}{x},\qquad j_{-1}(x)=\dfrac{\cos x}{x}$

反复应用递推公式，我们就得出所有的 $j_l(x)$ 初等函数表示式.

至于半奇数阶的诺伊曼函数，按其定义有

$$N_{l+\frac{1}{2}}(x)=\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(x)\cos[(l+\frac{1}{2})\pi]-J_{-(l+\frac{1}{2})}(x)}{\sin[(l+\frac{1}{2})\pi]}=(-1)^{l+1}J_{-(l+\frac{1}{2})}(x)$$

改用球诺伊曼函数 $n_l(x)$ 和球贝塞尔函数 $j_{-(l+1)}(x)$ 表出，

$$n_l(x)=(-1)^{l+1}j_{-(l+1)}(x) \qquad (6.5.12)$$

在上式中，依次置 $l=0$ 和 $l=-1$ 即得

$$n_0(x)=-\frac{\cos x}{x},\ n_{-1}(x)=\frac{\sin x}{x} \qquad (6.5.13)$$

对（6.5.11）和（6.5.13）分别反复应用递推公式(6.5.10)，得到

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x};j_1(x)=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x);j_2(x)=\frac{1}{x^3}[3(\sin x-x\cos x)-x^2\sin x]$$

·······

$$n_0(x)=\frac{-\cos x}{x};n_1(x)=\frac{-1}{x^2}(\cos x+x\sin x);n_2(x)=\frac{-1}{x^3}[3(\cos x+x\sin x)-x^2\cos x]$$

·······

6.5.6球形区域内的球贝塞尔方程的本征值问题

球贝塞尔方程（6.5.1）写成施图姆－刘维尔型即是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R+k^2r^2R=0. \qquad (6.5.14)$$

左边最后一项的系数 k^2r^2，这里的 k^2 是本征值， r^2 是权重函数.

方程在 $r=0$ 有自然边界条件，应取 $\mathrm{j}_l(kr)$ 而舍弃 $\mathrm{n}_l(kr)$. $\mathrm{j}_l(kr)$ 还应满足球面 $r=r_0$ 上的第一、第二或第三类齐次边界条件，这就决定了本征值

$$k_m(m=1,2,3,\cdots\cdots).$$

- 决定球贝塞尔函数的边界条件往往化为贝塞尔函数

$\mathrm{J}_{l+1/2}(kr)$ 的边界条件来求解.

- 对应不同本征值的本征函数在区间 $[0, r_0]$ 上带权重

r^2正交, $\int_0^{r_0} \mathrm{j}_l(k_m r)\mathrm{j}_l(k_n r) r^2 \mathrm{d}r = 0$.($k_m \neq k_n$) **(6.5.15)**

- 本征函数族 $\mathrm{j}_l(k_m r)(m = 1, 2, 3, \cdots)$ 是完备的,

可作为广义傅立叶展开的基,

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \mathrm{j}_l(k_m r) \qquad \textbf{(6.5.16)}$$

其中系数

$$f_m = \frac{1}{[N_m]^2}\int_0^{r_0} f(r)\,\mathrm{j}_l(k_m r)\,r^2\mathrm{d}r \qquad (6.5.17)$$

式中

$$[N_m]^2 = \int_0^{r_0}[\mathrm{j}_l(k_m r)]^2 r^2\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2k_m}\int_0^{r_0}[J_{l+\frac{1}{2}}(k_m r)]^2 r\mathrm{d}r.$$

(6.5.18)