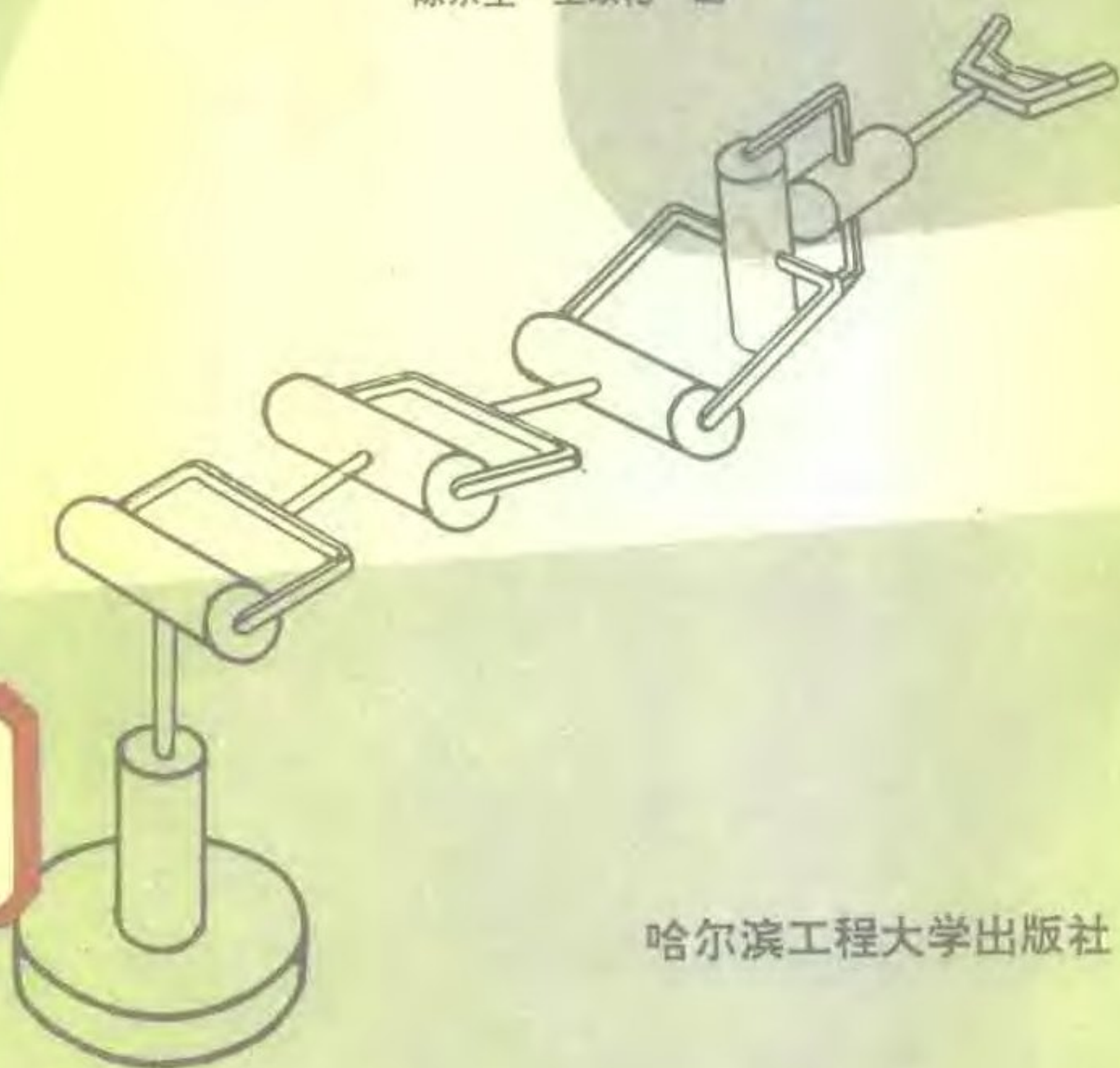


多刚体 动力学基础

陈乐生 王以伦 编



哈尔滨工程大学出版社

TH113
C44

379881

多刚体动力学基础

陈乐生 王以伦 编



哈尔滨工程大学出版社

(黑)新登字第9号

内 容 简 介

本书综合了国内外被广泛采用的书籍、资料共编写成10章。第1章为虚位移原理;第2章讨论完整系统的拉格朗日方程;第3、4章介绍刚体定点转动的运动学和动力学;第5章为多刚体动力学基础;第6章分析空间齐次变换关系;第7至第10章讨论机器人运动学和动力学的分析方法;附录部分简单介绍了矢量和张量的基本运算。

本书可作为机械工程及自动化专业高年级本科生教学用书,也可供有关研究生和工程技术人员参考。

多刚体动力学基础
陈乐生 王以伦 编
责任编辑 李玉琴

哈尔滨工程大学出版社出版
新华书店经销
哈尔滨毕升电脑排版有限公司排版
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 7.625 字数 193 千字
1995年3月 第1版 1995年3月 第1次印刷
印数: 1—2000册

ISBN 7-81007-416-4
TH·16 定价: 6.80元

前 言

机电结合、发展机电一体化技术，是机械行业现代化的必由之路。同时，它为工科院校机械工程有关的专业的工作带来了新的活力，提出了新的课题。其中，作为联结“机”与“控”的纽带中的一个重要环节是机械系统的动力学分析。

在机械系统的动力学范畴内，机械振动、机械动力学分析已经有了相当成熟的理论和相关的教材。而空间多自由度机械系统的动力学理论只是在 80 年代以来才得以迅速的发展。虽然有关的书籍、资料 and 文章很多，但适用于本科生学习的教材还不成熟。“多刚体动力学基础”正是为高年级机械工程和自动化专业的本科生而尝试编写的，我们相信它适应了机电一体化技术发展的需要，弥补了仅有理论力学知识所造成的不足。

多刚体动力学涉及的知识面很广，程度也很深，考虑到大学本科生的知识结构，本书在内容的衔接、渐进性、系统性和联系实际等方面作了认真的安排。本书将从虚位移原理入手，建立动力学普遍方程，再深入讨论完整系统的拉格朗日方程和刚体定点转动的运动学和动力学；最后以机器人这一典型的多自由度机电一体化机械系统为主要内容分析了空间齐次变换关系，机器人运动学和动力学。在动力学分析中，仅介绍拉格朗日方法和牛顿-欧拉方法。以求使得学生掌握住基本的多刚体系统的动力学分析方法。这是本书编写的特点。

由于编者水平所限，书中缺点、错误在所难免，敬请使用者

提出宝贵意见。

编者对本书中所参考的有关书籍、文章、资料的作者表示深切的谢意。

编 者

1994 年 7 月

目 录

1	虚位移原理	1
1.1	非自由系统的约束	1
1.2	广义坐标和自由度	4
1.3	虚位移原理	9
	习题 1	13
2	第二类拉格朗日方程	16
2.1	第二类拉格朗日方程	16
2.2	第二类拉格朗日方程的讨论	18
	习题 2	26
3	刚体定点转动运动学	28
3.1	刚体绕定点转动的欧拉定理	28
3.2	描述刚体定点转动的解析法	30
	习题 3	50
4	刚体定点转动的微分方程	52
4.1	刚体的质量几何	52
4.2	绕定点转动刚体的动量矩与动能	58
4.3	刚体绕定点转动的运动微分方程	59
	习题 4	67
5	多刚体系统动力学概述	69
5.1	多刚体系统动力学研究的对象	69
5.2	用常规方法建立多刚体系统动力学 分析的数学模型	71
6	齐次坐标及其变换	76
6.1	齐次坐标	76

6.2	齐次坐标的变换矩阵·····	80
6.3	齐次变换·····	83
	习题 6 ·····	103
7	机器人运动学 ·····	104
7.1	机器人的结构形式与坐标系统 ·····	104
7.2	机械手系统变换方程和变换图 ·····	107
7.3	机器人运动学方程 ·····	110
7.4	两种典型操作手的运动学方程 ·····	127
	习题 7 ·····	134
8	机器人运动学方程的解 ·····	137
8.1	欧拉变换方程的解 ·····	137
8.2	RPY 变换方程的解 ·····	142
8.3	Sph 变换方程的解 ·····	143
8.4	机器人运动学方程解的实例 ·····	145
	习题 8 ·····	158
9	微分变换关系 ·····	160
9.1	微移动和微转动 ·····	160
9.2	相对于杆坐标系的微变换 ·····	168
9.3	各杆坐标系微变换的变换关系 ·····	173
9.4	操作手的雅可比矩阵 ·····	178
9.5	逆雅可比矩阵 ·····	186
	习题 9 ·····	193
10	机器人动力学·····	196
10.1	机器人的牛顿-欧拉法 ·····	196
10.2	机器人的拉格朗日方法·····	212
	习题 10 ·····	232
附 录	·····	234
参考文献	·····	238

1 虚位移原理

本章作为刚体动力学的基础介绍非自由质点系统的约束分类，引入广义坐标的概念，通过对坐标变分的讨论给出系统自由度的定义，最后由虚位移原理导出动力学普遍方程。

1.1 非自由系统的约束

多个质点的集合可以组成一个质点系统，根据系统的运动是否受到预先规定的几何及运动条件的制约可以分为自由系统和非自由系统。

对于非自由系统，那些预先规定的、与初始条件及受力条件无关的、限制系统的几何位置或（和）速度的运动学条件称为约束。约束有多种形式，这里只介绍其中两类。

1.1.1 完整约束与非完整约束

仅仅限制系统的几何位置（也称位形）的约束称为完整约束。若用 x_i 、 y_i 、 z_i 表示系统中某质点的笛卡尔直角坐标，那么 N 个质点组成的质点系统的完整约束的约束方程可写作

$$\begin{aligned} f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) &= 0 \\ (k &= 1, 2, \dots, r; \quad r < 3N) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

完整约束又称为几何约束。

若不仅限制系统的位形，而且还限制系统的运动速度，这样的约束称为非完整约束。其约束方程取微分的形式。一个由 N 个质点组成的系统的非完整约束方程可写作

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N, t) = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, r; \quad r < 3N) \quad (1.1.2)$$

非完整约束因其表现出微分形式, 因此又称为微分约束或运动约束。但是, 如果约束方程可以积分, 那么它又能从微分形式回到有限形式, 其实质仍然是完整约束。

例 1.1 一个半径为 r 的轮子沿斜面向下作纯滚动 (见图 1-1), 分析轮子所受的约束。

解: 轮子所受的几何约束为

$$y_c = r \quad (1.1.3)$$

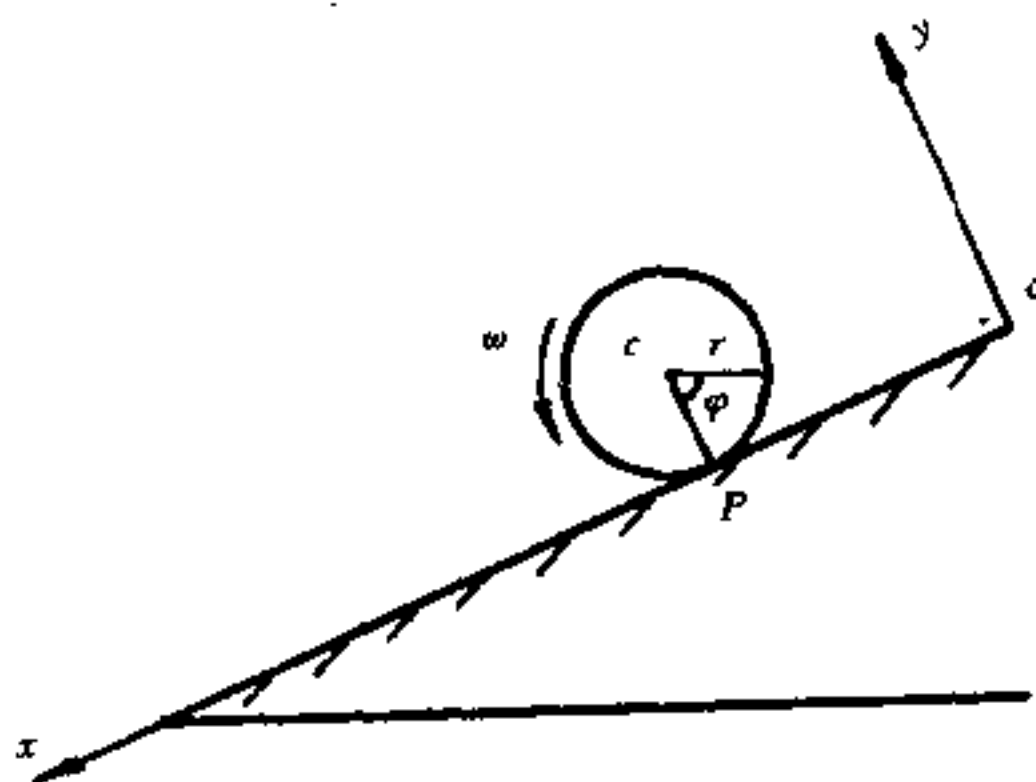


图 1-1 轮子的约束

又运动条件的限制是轮子作纯滚动时 P 点的速度为零, 即

$$v_c - r\omega = 0 \quad (1.1.4)$$

$$\text{或} \quad \dot{x}_c - r\dot{\varphi} = 0 \quad (1.1.5)$$

这一约束方程显然是可积分的, 即

$$x_c - r\varphi + c = 0 \quad (1.1.6)$$

故而轮子仍受完整约束, 其约束方程为 (1.1.3) 式和 (1.1.6) 式。

例 1.2 质点 m_1 和 m_2 由一长为 l 的刚性杆相连, 设该系统在图 1-2 所示 xoy 平面内运动。若要求杆中点 c 的速度保持沿杆轴方向, 分析该系统的约束情况。

解：由于杆是刚性的，所以 m_1 与 m_2 必须满足的几何约束是

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2 \quad (1.1.7)$$

而运动约束是 c 点的速度必须沿杆轴方向，即

$$\frac{\dot{y}_c}{\dot{x}_c} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \tan \theta$$

代入 m_1, m_2 坐标即为

$$\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{\dot{x}_1 + \dot{x}_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (1.1.8)$$

(1.1.8) 式说明系统受到一个非完整约束。

我们经常遇到的系统一般是非完整系统。非完整约束又分为一阶线性非完整约束、一阶非线性非完整约束、二阶非完整约束等。 N 个质点的系统受到 k 个一阶线性非完整约束时，其约束方程可以写作

$$\sum_{i=1}^N (a_{\lambda} \dot{x}_i + b_{\lambda} \dot{y}_i + c_{\lambda} \dot{z}_i) + d_{\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.1.9)$$

或写作

$$\sum_{i=1}^N (a_{\lambda} dx_i + b_{\lambda} dy_i + c_{\lambda} dz_i) + a_{\lambda} dt = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.1.10)$$

1.1.2 定常约束与非定常约束

约束方程中不显含时间 t 的约束称为定常约束。例如由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (1.1.11)$$

所确定的约束。

约束方程中显含时间 t 的约束称为非定常约束。例如由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2(t) \quad (1.1.12)$$

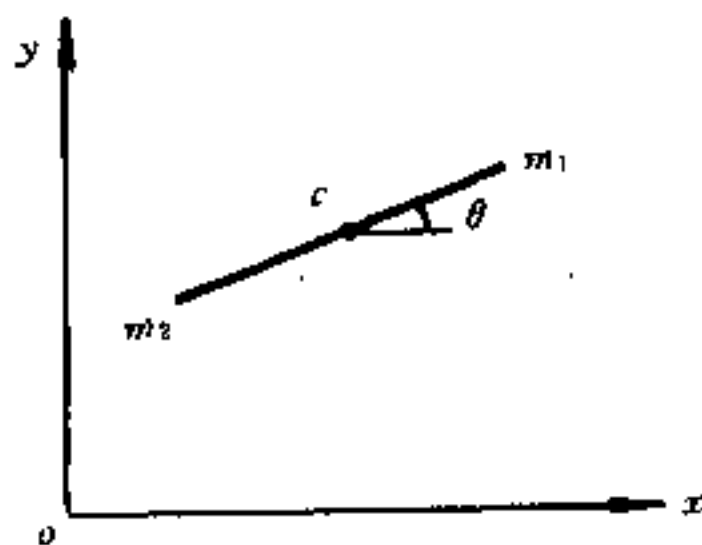


图 1-2 平面运动杆的约束

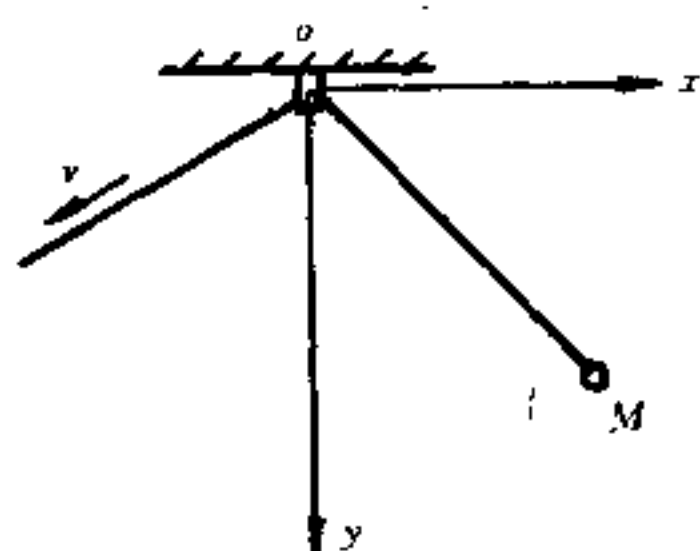


图 1-3 质点的非定常约束

所确定的约束。

例 1.3 设质点 M 所系绳子穿过 o 点，如图 1-3 所示，绳子另一端以一匀速 v 拉动使 M 在 xoy 平面内运动。试讨论 M 的约束。

解：设 M 的起始位置为 l_0 ，则它到 o 点的距离 l 将随时间变化。其约束方程为

$$x^2 + y^2 = (l_0 - vt)^2 \quad (1.1.13)$$

显然， M 所受的约束是非定常约束。

1.2 广义坐标和自由度

1.2.1 广义坐标

系统的几何位置即位形可以用坐标参数来描述，我们已经习惯于用笛卡尔直角坐标系来作这样的描述。然而，根据问题的不同，不一定非得采用长度坐标参数来描述系统的几何位置。

例如，我们可以用直角坐标 (x, y) 来描述图 1-4 所示的作平面运动的动点 M 的几何位置；也可以用极坐标 (φ, r) 来描述；还可以用 (A, φ) 这组参数来表示，其中 A 为图中阴影部分的面积；还可以有其他的参数表示方法。这就是说，动点 M 的几何位置可以用不同的参数组来描述，即有了选择参数

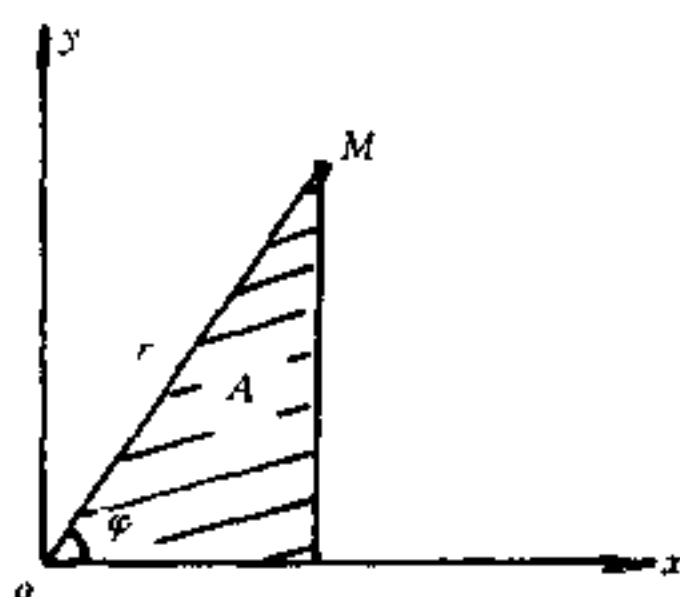


图 1-4 点 M 的广义坐标

的余地。为此，引入广义坐标的概念。

所谓广义坐标，就是选择一组互相独立的参数 q_1, q_2, \dots, q_n ，只要它们能够确定系统的位形，而不管这些参数的几何意义如何。这样的一组参数就称为广义坐标。因此，上述中的 $(x, y), (\varphi, r), (A, \varphi)$ 等都可以作为描述 M 点的位形的广义坐标。可见，广义坐标对于某一系统来讲不是唯一的，或者说，可以任意选取。

广义坐标可以用下面的通式表示

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (1.2.1)$$

式中， \mathbf{r}_i 表示系统中第 i 个质点的位形； q_j ($j=1, \dots, n$) 和 t 是广义坐标。

1.2.2 用广义坐标表示的非完整约束方程

(1) 速度的广义坐标表示

设 N 个质点组成的系统有 n 个广义坐标 q_j ($j=1, \dots, n$)，且 $q_j = q_j(t)$ ，则系统中第 i 个质点的速度是

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (1.2.2)$$

式中， \dot{q}_j 相应地称为广义速度。

\mathbf{v}_i 可以写作如下投影形式

$$\begin{aligned} v_x = \dot{r}_{ix} = \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ v_y = \dot{r}_{iy} = \dot{y}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial y_i}{\partial t} \\ v_z = \dot{r}_{iz} = \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial z_i}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

若系统为定常，由于

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0 \quad (1.2.4)$$

结果有

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (1.2.5)$$

例 1.4 空间中的一动点 M , 若选取极坐标 r, θ, φ 为广义坐标, 如图 1-5 所示, 则 M 点在笛卡尔直角坐标系中的位置是

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

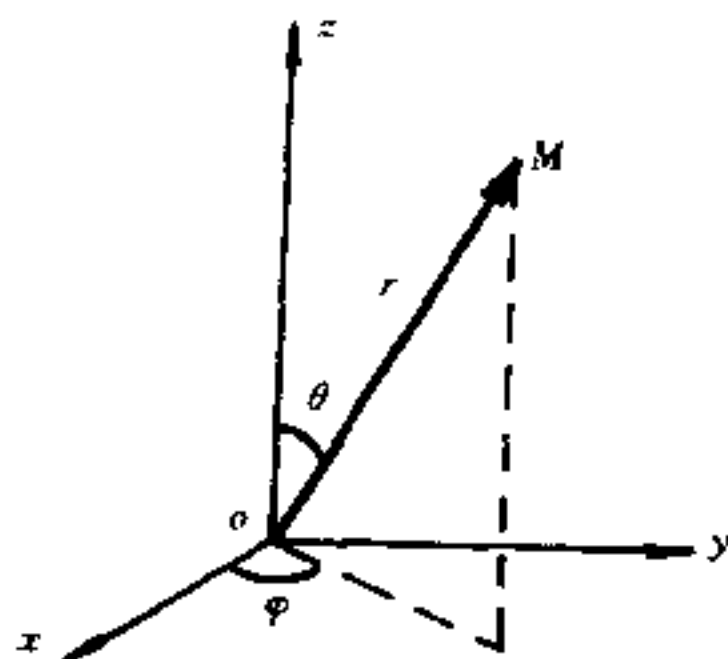


图 1-5 点 M 的速度

于是 M 点的速度为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ \dot{z} &= \frac{\partial z}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

即

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

于是, M 点的速度为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ &= \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

(2) 用广义坐标表示的非完整约束方程

一阶线性非完整约束方程已由 (1.1.9) 式给出, 把第 i 个质点的速度的广义坐标表示代入该式得到

$$\sum_{i=1}^N \left[a_{ik} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) + b_{ik} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial y_i}{\partial t} \right) \right]$$

$$+ c_k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) + d_k = 0$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.2.10)$$

整理后可得

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \left(a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + b_{ij} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + c_{ij} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j$$

$$+ \sum_{i=1}^N \left(a_{i0} \frac{\partial x_i}{\partial t} + b_{i0} \frac{\partial y_i}{\partial t} + c_{i0} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) + d_k = 0$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.2.11)$$

若令

$$A_{kj} = \sum_{i=1}^N \left(a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + b_{ij} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + c_{ij} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

$$B_k = \sum_{i=1}^N \left(a_{i0} \frac{\partial x_i}{\partial t} + b_{i0} \frac{\partial y_i}{\partial t} + c_{i0} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) + d_k \quad (1.2.12)$$

于是 (1.2.11) 式可简记为

$$\sum_{j=1}^n A_{kj} \dot{q}_j + B_k = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.2.13)$$

上式即为用广义坐标表示的一阶线性非完整约束方程。上式也可以记为

$$\sum_{j=1}^n A_{kj} dq_j + B_k dt = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.2.14)$$

1.2.3 坐标变分和自由度

坐标的变分与坐标的微分是两个不同的概念。设某系统运动的微分方程的解是

$$q_1 = q_1(t), \dots, q_n = q_n(t)$$

$$(1.2.15)$$

所谓坐标的微分是指在上式所描述的真实运动中 (图 1-6 中的实线部分) 坐标的无限小变化, 即经过 dt 时间之后发

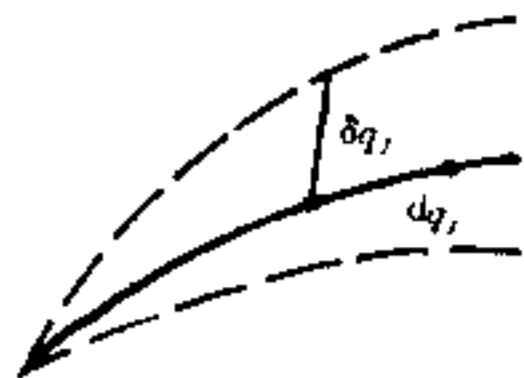


图 1-6 微分和变分

生的坐标变化 dq_j ；而坐标的变分则是指在某一时刻 t ， q_j 本身在约束许可条件下的任意的无限小增量，也就是系统的可能运动（图 1-6 中的虚线所示）与真实运动在某时刻的差，记作 δq_j 。由于都是坐标的无限小变化，故变分也表现出微分的形式，并且和微分具有相同的运算规则。

我们把系统独立的坐标变分数称为系统的自由度。

对于 N 个质点组成的力学系统，如果系统是自由的，则其位形的确定要 $3N$ 个坐标。这些坐标自然相互独立，其变分也相互独立，故自由度为 $3N$ 。如果系统受到 l 个完整约束，那么在 $3N$ 个坐标中，只有 $3N-l$ 个相互独立，并且它们的变分也相互独立，故其自由度为 $3N-l$ 个。如果系统为非完整系统，假设该系统除了 l 个完整约束之外，还受到 k 个非完整约束，该系统独立的坐标数为 $3N-l$ 个，但其独立的坐标变分数由于 k 个微分形式约束的存在只有 $3N-l-k$ 个，故系统的自由度为 $3N-l-k$ 个。

综上所述，若一个系统的广义坐标数为 n ，则：

完整系统： $n = \text{独立的坐标数} = \text{独立的坐标变分数} = \text{系统的自由度}$ 。

非完整系统： $n = \text{独立的坐标数} \neq \text{独立的坐标变分数} = \text{系统的自由度}$ 。

例 1.5 如图 1-7，一平面曲柄连杆机构， A 、 B 两点的位置可确定系统的位形，分析其自由度。

解：这是一个平面机构， A 、 B 共有 $2N=4$ 个坐标，系统要满足 3 个完整约束

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 &= r^2 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 &= l^2 \\ y_B &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

该系统没有非完整约束，因此是一个完整系统，其自由度数为 $4-3=1$ ，独立的坐标数也是 1。若选取 φ 为广义坐标，当 φ 给定时，整个系统的位形也就确定。

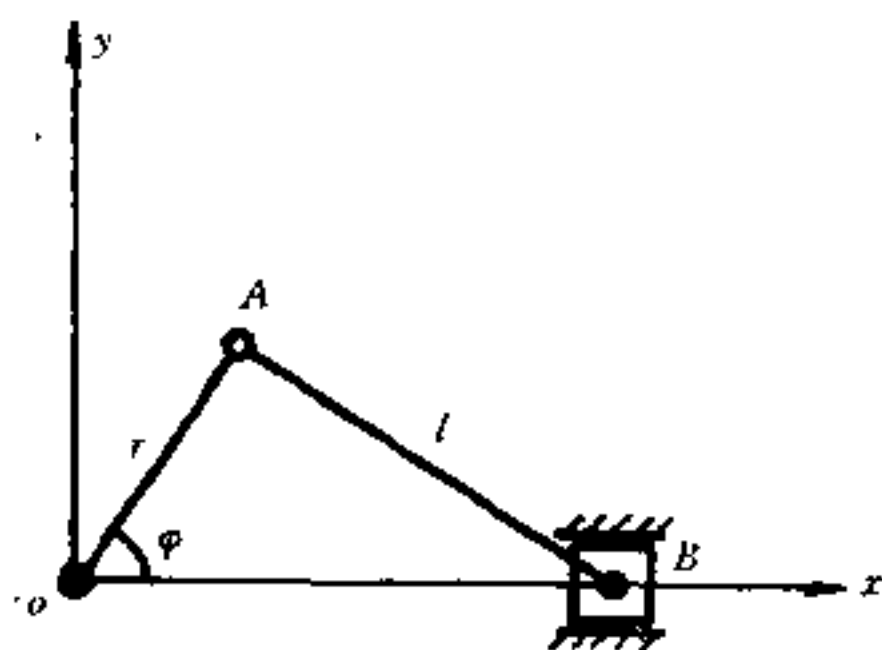


图 1-7 平面曲柄连杆机构

$$\begin{aligned}
 x_A &= r \cos \varphi \\
 y_A &= r \sin \varphi \\
 x_B &= r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \\
 x_B &= 0
 \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

1.3 虚位移原理

1.3.1 虚位移

系统从真实位形过渡到任何相邻近的可能位形的过程中，系统各质点所具有的与真实运动无关的、为约束所容许的无限小位移称为虚位移。位形的这种可能的变化与前面提到的坐标变分的概念是一致的，因此虚位移可以用坐标的变分来表示。

设某一非定常、完整系统，其中任一质点 M_i 的向径（位形）可以记为

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, \dots, N) \tag{1.3.1}$$

对 r_i 取变分就可以得到 M_i 的虚位移，即

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.3.2)$$

其中, 按虚位移的定义, $\delta t = 0$, 故 r_i 变分中项 $\frac{\partial r_i}{\partial t} \delta t = 0$ 。

若把 (1.3.2) 式展开可写作

$$\delta r_i = (\delta r_i)_1 + (\delta r_i)_2 + \dots + (\delta r_i)_n \quad (1.3.3)$$

其中 $(\delta r_i)_j = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.3.4)$

由 (1.3.3) 式可以看出, 完整系统某质点的虚位移由 n 项组成, 每一项都和某一坐标的变分 δq_j 成正比, 即表示在该坐标变分不为零而其余坐标变分均为零时的虚位移。因此, 每一组虚位移相互独立, 质点的虚位移等于 n 组独立虚位移的线性组合。

对于非完整系统, (1.3.2) 式仍然成立, 但 (1.3.3) 式中每一组虚位移并不互相独立, 它们受到 k 个非完整约束方程的制约

$$\sum_{j=1}^n A_{\lambda j} \delta q_j = 0 \quad \lambda = (1, \dots, k) \quad (1.3.5)$$

这里, 独立的虚位移组数等于 $n - k$ 。上式是将式 (1.2.13) 的微分改为变分得到。

1.3.2 理想约束

工程实际中的约束大多可以近似地认为其约束反力在系统的任何虚位移上所作元功之和等于零, 我们把具有此类特性的约束称为理想约束。如刚性联结、滚动接触、光滑接触等。

按理想约束的概念, 如果系统中第 i 个质点所受约束反力用 R_i 表示, 虚位移用 δr_i 表示, 那么对于该系统下式成立

$$\sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta r_i = 0$$

写作投影形式为

$$\sum_{i=1}^N (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0 \quad (1.3.7)$$

1.3.3 虚位移原理

我们都知道, 一个非自由系统处于静力平衡时, 系统中任一

质点应满足条件

$$F_i + R_i = 0 \quad (1.3.8)$$

式中, F_i 表示作用于系统中第 i 个质点的主动动力; R_i 表示该质点的约束反力。如果给 i 质点一个虚位移 δr_i , 则有

$$(F_i + R_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (1.3.9)$$

对整个系统求和可得

$$\sum_{i=1}^N (F_i + R_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (1.3.10)$$

若系统为理想约束系统, 把 (1.3.6) 式代入上式可得

$$\sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (1.3.11)$$

上式说明, 对于一理想约束的质点系, 其静平衡的充要条件是作用于系统上的主动动力在任何虚位移上所做的元功之和为零。这就是虚位移原理。

(1.3.11) 式的投影形式为

$$\sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0 \quad (1.3.12)$$

由 (1.3.2) 式可以得到质点 i 的虚位移的投影形式为

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \\ \delta y_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \\ \delta z_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

将它们代入式 (1.3.12) 后经交换求和顺序并整理可得

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = 0 \quad (1.3.14)$$

令

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (1.3.15)$$

于是, (1.3.14) 式可简记为

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = 0 \quad (1.3.16)$$

式中, Q_j 称为和广义坐标 q_j 相对应的主动力的广义力, 其量纲: 当 q_j 为长度时是力; q_j 是角度时是力矩。

对于完整的力学系统, 由于 n 个广义坐标的虚位移 δq_j 是相互独立的且又具有任意性, 所以要满足 (1.3.16) 式, 只有

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3.17)$$

这就是用广义坐标表示的虚位移原理, 即具有理想约束的完整的力学系统处于平衡的充要条件是: 作用于系统上和每一个广义坐标相对应的主动力的广义力都等于零。

1.3.4 达朗伯-拉格朗日原理

达朗伯-拉格朗日原理是虚位移原理在动力学问题中的推广。

如图 1-8, 研究非自由系统中任一质点 M_i 的运动。设该质点在约束条件下沿某一轨迹运动, 某一时刻所受主动力为 F_i , 约束反力为 R_i , 其加速度为 a_i , 由牛顿第二定律, 有

$$F_i + R_i = m_i a_i \quad (1.3.18)$$

如果将 F_i 分解, 使其一分力等于 $m_i a_i$, 因其改变了质点的运动状态, 称之为有效力; 另一分力设为 R_i' , 有

$$R_i' = F_i - m_i a_i \quad (1.3.19)$$

称之为损失力。不难看出

$$R_i' + R_i = 0 \quad (1.3.20)$$

即约束反力与损失力是一对平衡力。

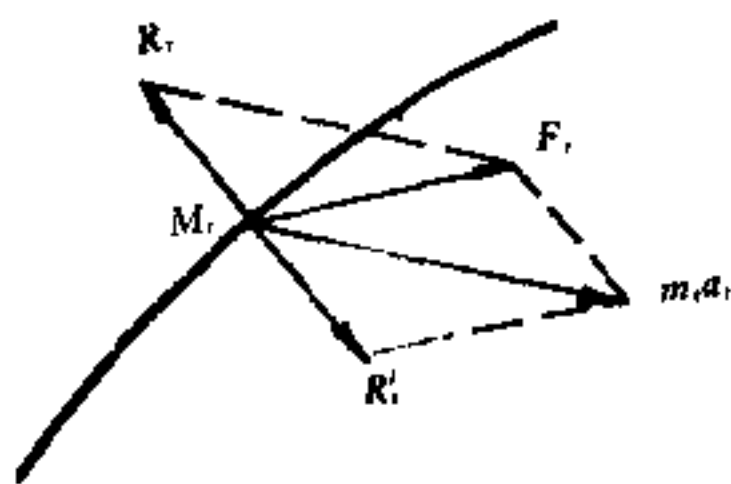


图 1-8 非自由质点的受力

对于整个质点系统则有

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{R}_i' + \mathbf{R}_i) = 0 \quad (1.3.21)$$

若系统为一理想系统, 由 (1.3.6) 式可得

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i' \cdot \delta \mathbf{r}_i' = 0 \quad (1.3.22)$$

亦即

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.3.23)$$

上式即为达朗伯-拉格朗日原理或称为动力学普遍方程。它可以表述为: 在任一时刻, 所有损失力在系统的任何虚位移上的元功之和等于零。也可以说, 在任一时刻, 所有主动力和惯性力 ($-m_i \mathbf{a}_i$) 在系统的任何虚位移上的元功之和等于零。

如果令 $\mathbf{a}_i = 0$, 且限制系统是定常时, 此时系统处于静平衡。由 (1.3.23) 式得

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.3.24)$$

这就是前面提到的虚位移原理。

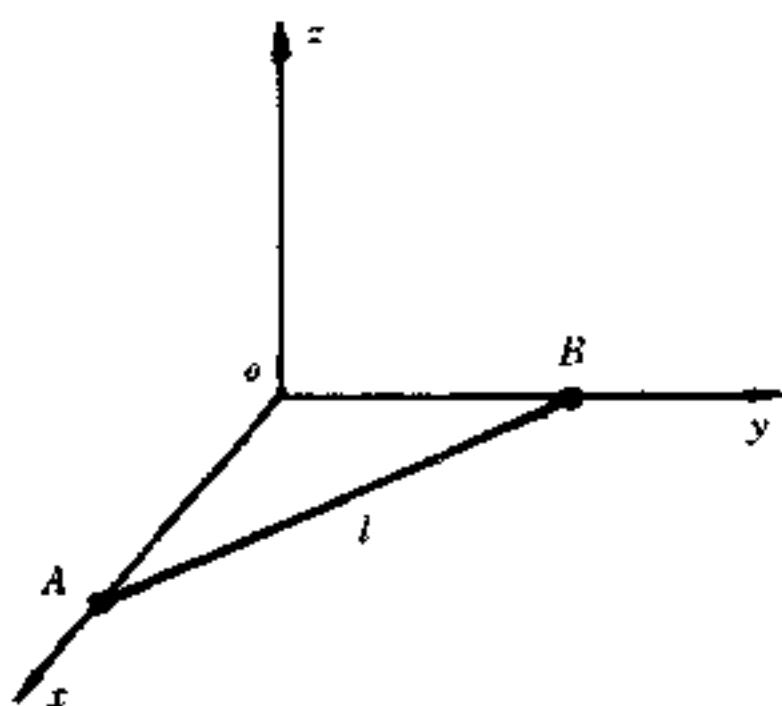
习 题 1

1.1 如习图 1-1 所示, 一匀质细长杆, 质量为 m , 长为 l , 两端点 A 、 B 只能分别沿 x 、 y 轴运动, 问该系统为何种约束系统? 并写出约束方程。

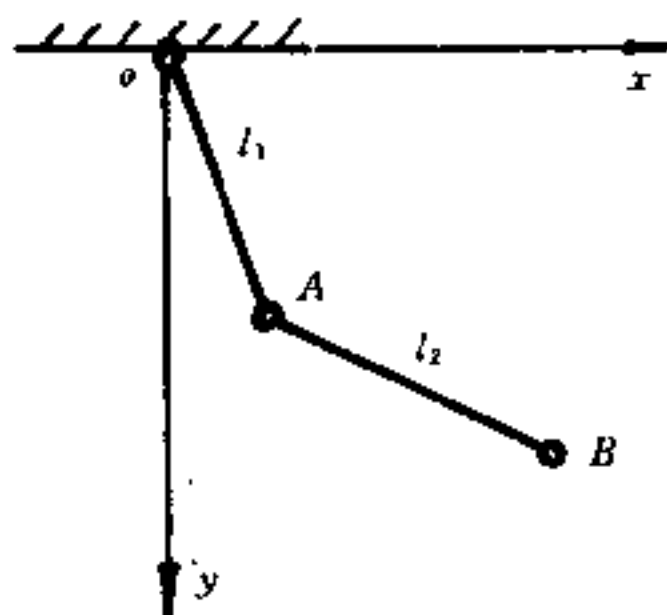
1.2 一平面双摆系统, 见习图 1-2, 讨论其自由度, 并选取一组描述该系统位形的广义坐标。

1.3 习图 1-3 为一平面四联杆机构, 讨论其自由度, 并选取一组描述该系统位形的广义坐标。

1.4 讨论例 1.2 系统的自由度, 并选取一组描述系统的位形



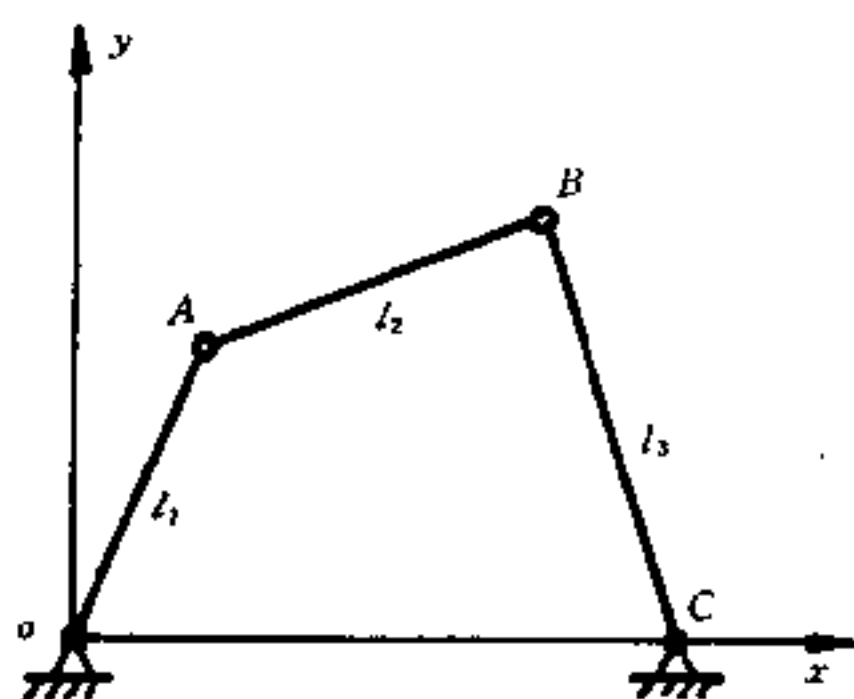
习图 1-1



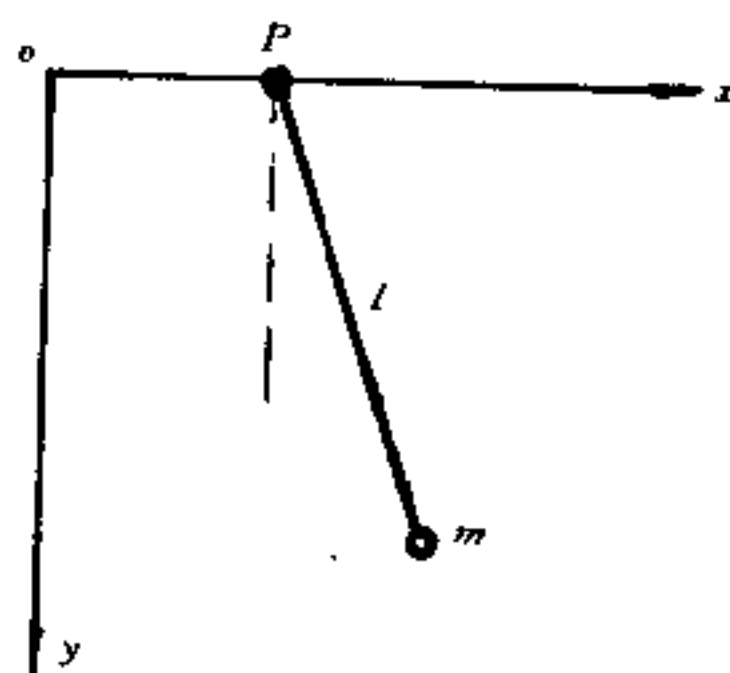
习图 1-2

的广义坐标。

1.5 如习图 1-4 所示一单摆质量为 m ，摆长为 l ，设摆的悬点 P 沿 x 轴按 $x_p = A \sin \omega t$ 运动，讨论系统的自由度，并写出约束方程。



习图 1-3



习图 1-4

2 第二类拉格朗日方程

直接应用动力学普遍方程解决工程问题时,由于方程本身的局限性往往存在一定的困难。于是,人们研究采用各种方法以求得到适用于不同类型问题的动力学普遍方程的变形。第二类拉格朗日方程是以广义坐标表示,以能量形式出现的动力学方程。它是被广泛采用的解决系统动力问题的基本方法之一。

2.1 第二类拉格朗日方程

设某理想、完整的力学系统由 N 个质点组成,自由度为 n , 广义坐标为 $q_j (j=1, \dots, n)$ 。由上一章已知,第 i 个质点的位形可写作

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.1.1)$$

它的变分为

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.1.1)$$

将上式代入动力学普遍方程(1.3.23)式可得

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \quad (2.1.3)$$

改变求和顺序,将 \mathbf{a}_i 写作 $\ddot{\mathbf{r}}_i$, 于是上式可改写为

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (2.1.4)$$

上式左边括号内第一项由第一章可知为广义力,即

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.1.5)$$

括号内第二项中的 $\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j}$ 可写作如下变式

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\end{aligned}\quad (2.1.6)$$

由(1.2.2)式

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (2.1.7)$$

将上式两边对 \dot{q}_j 求偏导, 有

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.1.8)$$

代入(2.1.6)式, 得到

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.1.9)$$

于是, (2.1.4)式左边括号内第二项为

$$\begin{aligned}- \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) &= - \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) \right] \\ &= - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right]\end{aligned}\quad (2.1.10)$$

其中, $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$ 即系统的动能。

将(2.1.5)、(2.1.10)式代入(2.1.4)式得到

$$\sum_{j=1}^n \left[Q_j - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j = 0 \quad (2.1.11)$$

这就是以广义坐标表示的动力学普遍方程。其中 $\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j$ 表示作

用于系统上的主动力虚功之和; $-\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j$ 表示系统

中所有惯性力虚功之和。

对于完整的力学系统,坐标的变分相互独立且具有任意性。因此,我们可以在方程(2.1.11)式中取某一虚位移不等于零,其他 $n-1$ 个虚位移均为零,从而得到 n 个方程。

$$Q_j - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.1.12)$$

或

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.1.13)$$

上式称为第二类拉格朗日方程。这是以 n 个广义坐标为变量的二阶常微分方程组,方程数等于自由度, t 为参变量,如果知道了系统的动能 T 和主动力的广义力 Q_j ,就可以建立该系统的动力学方程。

2.2 第二类拉格朗日方程的讨论

由上一节可知,第二类拉格朗日方程的建立和求解的关键在于确定以广义坐标表示的系统的动能函数 T ,以及与广义坐标相对应的广义力 Q_j 。下面对它们作某些讨论。

2.2.1 系统的动能

N 个质点的力学系统的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

将速度 $\dot{\mathbf{r}}_i$ 用广义坐标表示后代入上式得

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_j + \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (2.2.2)$$

令

$$A_{jk} = A_{kj} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (2.2.3)$$

$$B_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$T_1 = \sum_{j=1}^n B_j \dot{q}_j \quad (2.2.4)$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

这样,系统的动能可简记为

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad (2.2.5)$$

即系统的动能可视为三部分——广义速度的二次齐式(T_2)、广义速度的一次齐式(T_1)和广义速度的零次式(T_0)之和。

2.2.2 广义力的计算

广义力的计算通常采用以下几种方法:

(1) 按广义力的定义,即(1.3.15)式计算

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.2.6)$$

对于多质点或多自由度系统,这种方法将比较繁琐。

(2) 利用系统的虚功计算

由于完整系统广义坐标的变分(虚位移) $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ 彼此独立,所以我们可以给定某一个虚位移 δq_j 而令其余 $n-1$ 个虚位移

为零。这样,作用于系统上的所有主动力(设共有 m 个)对应于该虚位移上的元功之和 $\sum_{k=1}^m \delta A_k(j)$ 应满足

$$\sum_{k=1}^m \delta A_k(j) = Q_j \cdot \delta q_j, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.2.7)$$

于是可求得广义力

$$Q_j = \frac{\sum_{k=1}^m \delta A_k(j)}{\delta q_j} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.2.8)$$

(3) 保守力的广义力

若作用于系统上的主动力为保守力,可通过势能函数 V 求得保守力的广义力 Q_j 。自然,此时势能函数应用广义坐标表示,即 $V = V(q_j, t)$ 。于是有

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.2.9)$$

例 2.1 一平面双摆机构(图 2-1),摆锤 A 、 B 重分别为 P_1 、 P_2 ,杆长为 l_1 、 l_2 。若杆重不计,取 θ_1 、 θ_2 为广义坐标,确定系统的动能。

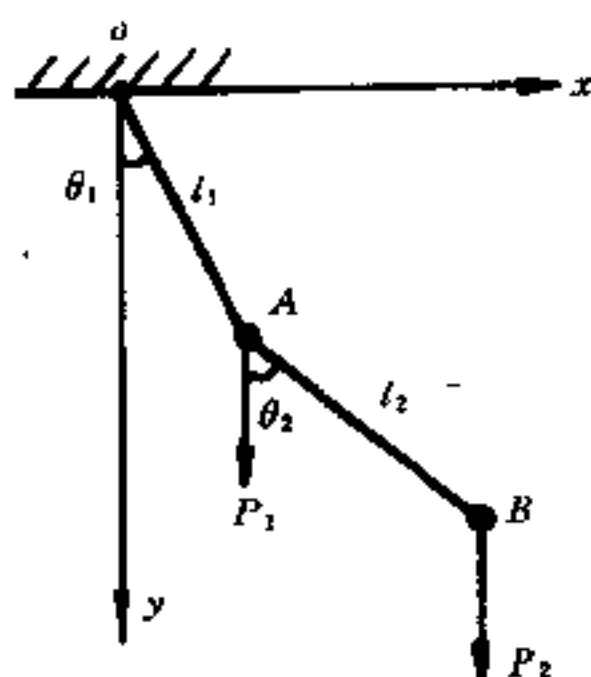


图 2-1 平面双摆机构

解: 设系统的动能为 T , A 、 B 锤的动能分别为 T_A 、 T_B , 则

$$\begin{aligned} T &= T_A + T_B \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

将广义坐标代入,因

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1, & y_1 &= l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, & y_2 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

故 $\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1$, $\dot{y}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \quad \dot{y}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (2.2.12)$$

将上式代入(2.2.10)式可得

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (2.2.13)$$

如果设 $l_1 = l_2 = l, m_1 = m_2 = m$, 则系统的动能为

$$T = ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)) \quad (2.2.14)$$

例 2.2 确定例 2.1 中的广义力。

解: 我们分别用前面讨论的三种方法来确定例 2.1 中的广义力。

① 按广义力定义计算

$$F_{1x} = 0, F_{1y} = P_1, F_{2x} = 0, F_{2y} = P_2 \quad (2.2.15)$$

A、B 两点的位形用广义坐标表示, 在例 2.1 中已经由(2.2.11)式给出, 所以有

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} &= l_2 \cos \theta_1, \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} = -l_1 \sin \theta_1, \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} = l_1 \cos \theta_1, \frac{\partial y_2}{\partial \theta_1} = -l_1 \sin \theta_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} &= 0, \frac{\partial y_1}{\partial \theta_2} = 0, \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} = l_2 \cos \theta_2, \frac{\partial y_2}{\partial \theta_2} = -l_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

将以上结果代入(2.2.6)式可得广义力

$$\begin{aligned} Q(\theta_1) &= -l_1(P_1 + P_2)\sin \theta_1 \\ Q(\theta_2) &= -l_2 P_1 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

② 利用系统的虚功计算

系统所受主动力为 P_1, P_2 , 它们所做的虚功分别为 $P_1 \delta y_1$ 和 $P_2 \delta y_2$ 。

由(2.2.11)可得

$$\delta y_1 = -l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1, \delta y_2 = -l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 - l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 \quad (2.2.18)$$

令 $\delta \theta_1 \neq 0, \delta \theta_2 = 0$, 则

$$\begin{aligned}\Sigma \delta A(\theta_1) &= P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2 \\ &= -l_1 P_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 - l_1 P_2 \sin \theta_1 \delta \theta_1\end{aligned}\quad (2.2.19)$$

故对应于 θ_1 的广义力为

$$Q(\theta_1) = \frac{\Sigma \delta A(\theta_1)}{\delta \theta_1} = -l_1(P_1 + P_2) \sin \theta_1 \quad (2.2.20)$$

同理, 令 $\delta \theta_2 \neq 0, \delta \theta_1 = 0$, 则

$$\begin{aligned}\Sigma \delta A(\theta_2) &= P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2 \\ &= -P_2 l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2\end{aligned}$$

故对应于 θ_2 的广义力为

$$Q(\theta_2) = \frac{\Sigma \delta A(\theta_2)}{\delta \theta_2} = -l_2 P_2 \sin \theta_2 \quad (2.2.21)$$

③ 由于 P_1, P_2 为保守力, 可由势能 V 求广义力
系统的势能用广义坐标表示为

$$V = -P_1 l_1 \cos \theta_1 - P_2 (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (2.2.22)$$

于是利用 (2.2.9) 式可求得对应于广义坐标 θ_1 和 θ_2 的广义力分别为

$$\begin{aligned}Q(\theta_1) &= -\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = -(P_1 + P_2) l_1 \sin \theta_1 \\ Q(\theta_2) &= -\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = -P_2 l_2 \sin \theta_2\end{aligned}\quad (2.2.23)$$

由以上三种方法的计算可以看出, 对于保守力的广义力, 通过势能函数确定较为简单。如果主动力个数很多, 那么按广义力定义来确定广义力是比较繁琐的。

例 2.3 在例 2.1 中, 若假定 $l_1 = l_2 = l, P_1 = P_2 = mg$, 试建立该系统的拉格朗日动力学方程。

解: 利用例 2.1 的结果, 系统的动能为 (2.2.14) 式, 即

$$T = ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)) \quad (2.2.24)$$

广义力由 (2.2.23) 式给出, 可得

$$Q(\theta_1) = -2mgl \sin \theta_1 \quad (2.2.25)$$

$$Q(\theta_2) = -mgl\sin\theta_2 \quad (2.2.26)$$

将动能 T 分别对广义速度、广义坐标偏微分有

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} &= 2ml^2 \dot{\theta}_1 + ml^2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= 2ml^2 \ddot{\theta}_1 + ml^2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &\quad - ml^2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= ml^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} &= ml^2 \dot{\theta}_2 + ml^2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= ml^2 \ddot{\theta}_2 + ml^2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &\quad - ml^2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= -ml^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

将(2.2.25)、(2.2.27)式和(2.2.26)、(2.2.28)式代入(2.1.13)式可得系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} 2ml^2 \ddot{\theta}_1 + ml^2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - ml^2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ = -2mgl\sin\theta_1 \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta}_2 + ml^2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + ml^2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ = -mgl\sin\theta_2 \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

2.2.3 第二类拉格朗日方程的其他形式

第二类拉格朗日方程除了(2.1.13)式所描述的形式之外,根据系统的具体条件和解题的需要,还可以由(2.1.13)式引出其他的表达形式。

(1) 主动力全为保守力

前面已经讨论过,当主动力为保守力时,可以通过势能函数求得广义力,见(2.2.9)式。将该式代入拉格朗日方程可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.2.31)$$

由于势能 V 不显含广义速度 \dot{q}_j , 故

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (2.2.32)$$

所以(2.2.31)式可改写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.2.33)$$

即
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (2.2.34)$$

如令 $L = T - V$, 便可得到拉格朗日方程的如下形式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.2.35)$$

这里, $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ 称为拉格朗日函数。

(2) 非保守系统的拉格朗日方程

设系统所受主动力不全为保守力, 其中非保守力, 如摩擦力、随时间变化的力等为 Q_j' 。这种情况下, 系统的广义力 Q_j 为保守力的广义力和非保守力的广义力之和。即有

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j' \quad (2.2.36)$$

代入(2.1.13)式有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j' \quad (j=1, \dots, n) \quad (2.2.37)$$

同样引入拉格朗日函数 L 之后得到非保守系统的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j' \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.2.38)$$

(3) 第二类拉格朗日方程的展开式

如将(2.1.13)式所示的拉格朗日方程中的动能按(2.2.2)式至(2.2.5)式的结构形式展开, 便可以得到第二类拉格朗日方程的

显性表达式,即展开式如下

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [jk, i] \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial B_i}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2.39)$$

式中, i, j, k 均为广义坐标序号; $[jk, i]$ 称为克利斯托夫符号表达式, 定义为

$$[jk, i] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (2.2.40)$$

而
$$\gamma_{ij} = \frac{\partial B_i}{\partial q_j} - \frac{\partial B_j}{\partial q_i} = -\gamma_{ji} \quad (2.2.41)$$

对于一定常系统, 由于 $T_1 = T_0 = 0, T = T_2$, 在 (2.2.39) 式中, 第三、四、五、六项均为零, 拉格朗日方程的展开式简化为

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [jk, i] \dot{q}_j \dot{q}_k = Q_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2.42)$$

从拉格朗日方程的显性表达式可知, 这些方程对广义加速度 $\ddot{q}_i (i = 1, \dots, n)$ 来讲永远是线性的。按 A_{ij} 的定义, 即 (2.2.3) 式, 可以证明矩阵 A_{ij} 是正定的。因此, 从拉格朗日方程中可以求出 $\ddot{q}_i (i = 1, \dots, n)$

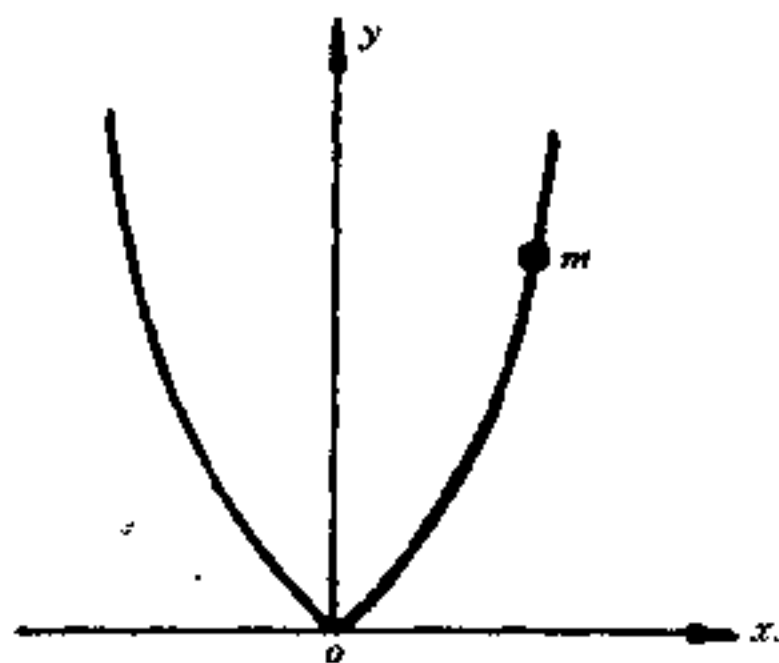
$$\ddot{q}_i + f_i(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (2.2.43)$$

这就是拉格朗日方程在一般情况下展开的显性式。

通过上述分析, 我们可以看出, 第二类拉格朗日方程具有方程易于建立、微分方程的个数等于自由度故方程数少、方程中不含约束反力以及能量函数为标量等这些优点。但是, 一般来讲, 求解 n 个以时间 t 为独立变量的二阶常微分方程组是一件困难的事。因此, 在求解拉格朗日方程时大多采用降阶的方法以降低求解的难度, 如寻求第一积分、采用罗司方程、惠特克方程、哈密尔顿正则方程等。这些方法本文不再一一介绍。

习 题 2

2.1 一质量为 m 的小球沿形状为 $y=bx^2$ 的光滑抛物线自由滑动, 参见习图 2-1。试建立小球的拉格朗日动力学方程。



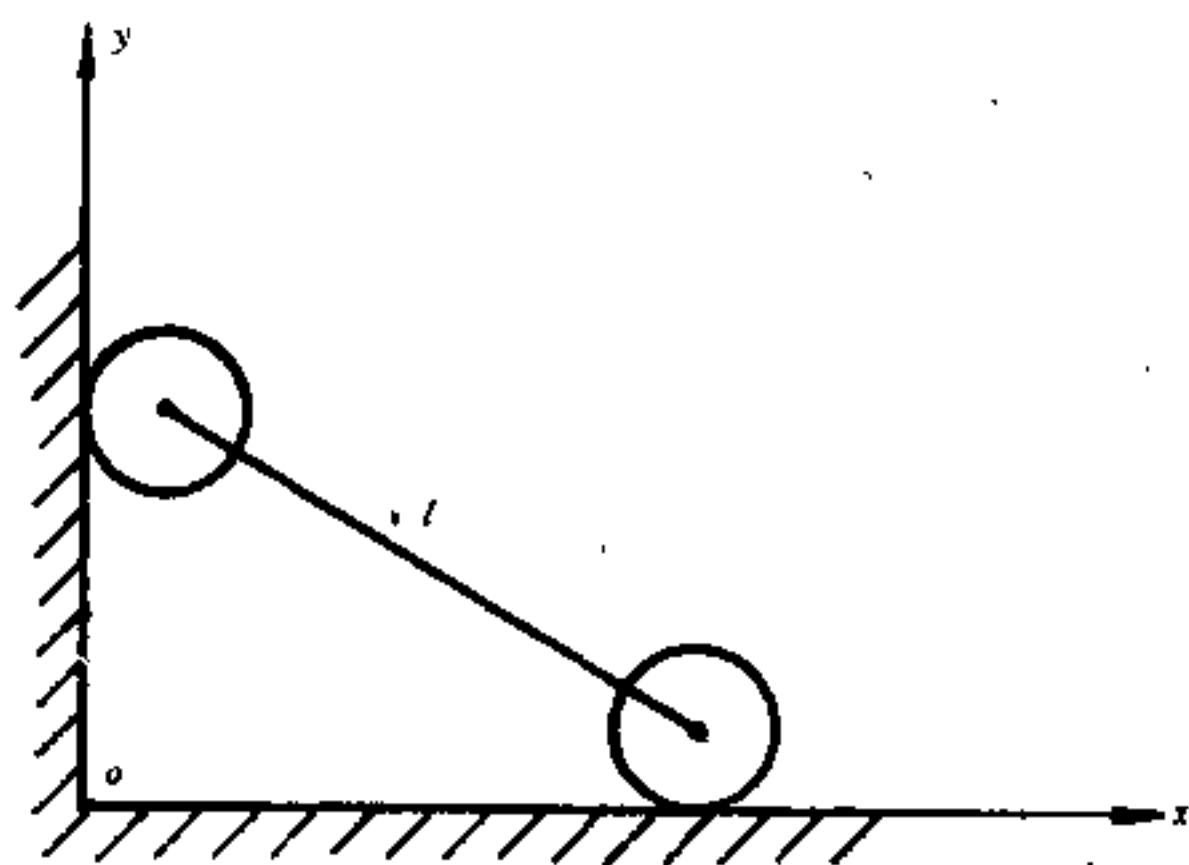
习图 2-1

2.2 试建立习图 1-2 系统的拉格朗日动力学方程。

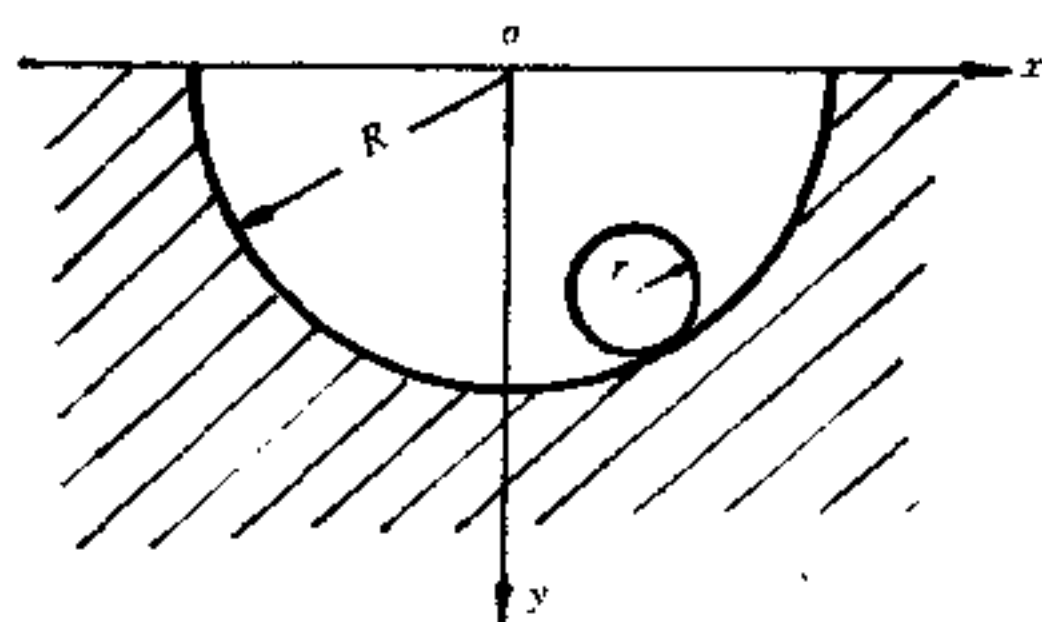
2.3 试建立习图 1-4 系统的拉格朗日动力学方程。

2.4 如习图 2-2 所示, 两个半径均为 r , 质量均为 m 的匀质圆盘, 中心由一长为 l 不计质量的刚性直杆用光滑铰链连接, 两盘靠在一成直角的壁上作滚面不滑的运动, 试建立该系统的拉格朗日动力学方程。

2.5 如习图 2-3 所示, 一质量为 m 、半径为 r 的匀质圆柱体在半径为 R 的圆柱形槽内滚面不滑, 试建立小圆柱体的拉格朗日动力学方程。



习图 2-2



习图 2-3

3 刚体定点转动运动学

在这一章里,将介绍刚体定点转动的三种最基本的解析描述,即方向余弦、欧拉角和广义欧拉角的分析方法。这些方法在多刚体系统运动学被普遍采用,同时为系统的动力学分析打下基础。

3.1 刚体绕定点转动的欧拉定理

具有固定点的刚体由某一方位到另一方位的方位变化永远等价于绕通过固定点的某轴的一个有限(转角)的转动,这就是刚体绕定点转动的欧拉定理。

如图 3-1, 设 o 为刚体的固定点, 刚体上某 $\triangle ABo$ 可完全确定刚体的方位。今 $\triangle ABo$ 转到 $\triangle A'B'o$, 由二者的等分垂直平面的交线得到 oc , 当 oA 绕 oc 转过一 θ 角到达 oA' 时, $\triangle ABo$ 与 $\triangle A'B'o$ 一定完全重合。因此, 整个刚体的方位变化可视为绕 oc 转过 θ 角得到。

这种转动通常称为刚体的一次转动或欧拉转动, oc 即为一次转轴或欧拉转轴。

如果将刚体的转动过程分为若干时间间隔, 每一时刻欧拉转轴的位置显然是不同的。在某一时刻 t_i , 当

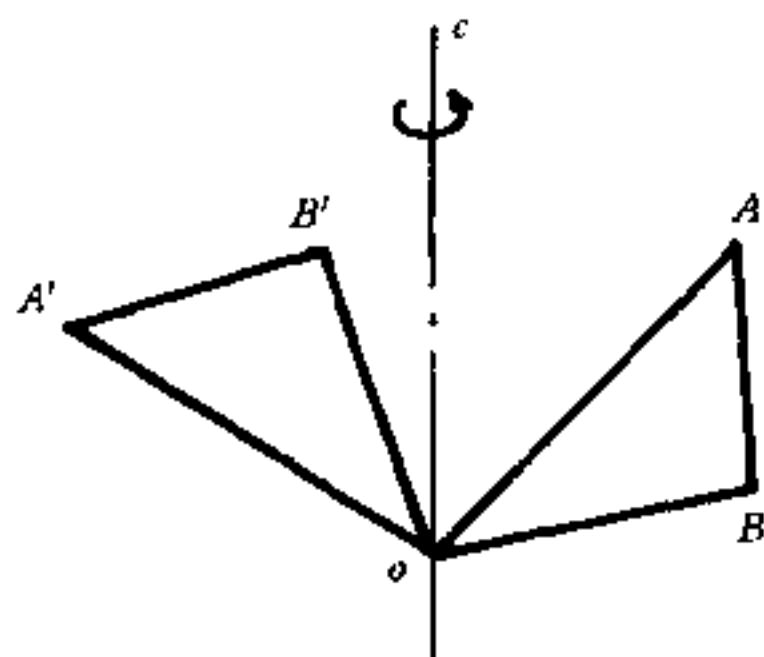


图 3-1 刚体的欧拉转动

时间间隔 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的 oe_i 称为刚体在 t_i 时刻的瞬时转动轴, 平均角速度向量的极值 ω 称为瞬时角速度向量。

因此, 刚体绕定点转动的过程可以看成是一系列以角速度 $\omega(t)$ 绕瞬时转动轴转动的合成。

瞬时转轴位置的不断变化在空间形成了以定点 o 为顶点的锥面, 称之为静

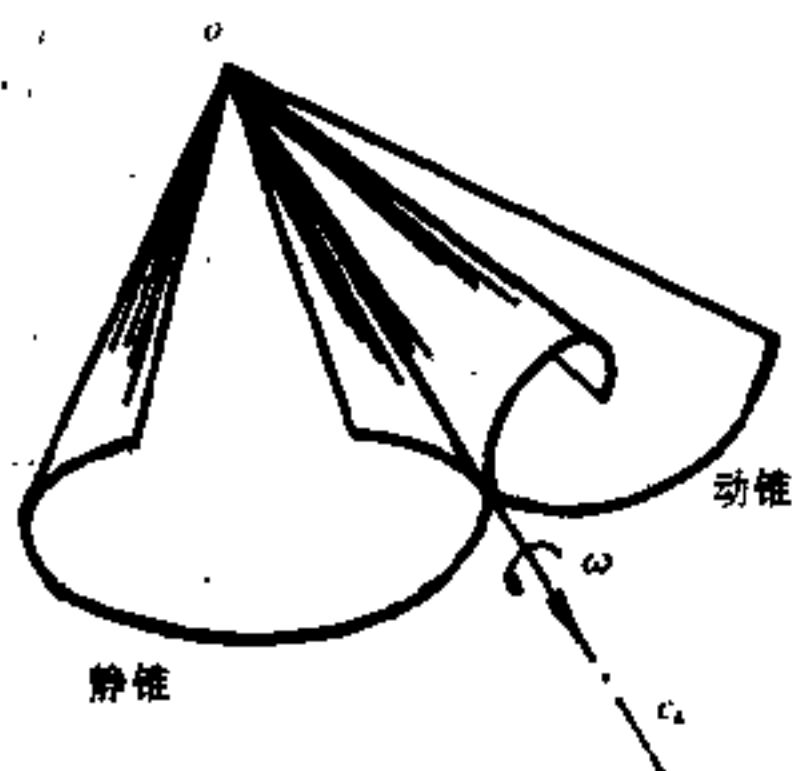


图 3-2 动锥与静锥

瞬时轴面, 简称静锥。同时它在刚体内部留下了轨迹, 构成了动瞬时轴面, 它也是以 o 为顶点的锥面, 简称动锥。因此可以说, 刚体做定点转动时, 动瞬时轴面在静瞬时轴面上以角速度 $\omega(t)$ 作无滑动的滚动, 见图 3-2。

设刚体的瞬时角速度为 ω , 则刚体上相对定点的向径为 r 的点的速度为

$$v = \frac{dv}{dt} = \omega \times r \quad (3.1.1)$$

而该点的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = \epsilon \times r + \omega \times v \quad (3.1.2)$$

其中, $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$ 为刚体的角加速度; $\epsilon \times r = a_t$ 称为转动加速度; $\omega \times v = a_n$ 称为指心加速度。

上述两式若采用矩阵 (有关矢量和张量运算及其矩阵表示参见附录) 表示则为

$$v = \tilde{\omega} r \quad (3.1.3)$$

$$a = \epsilon r + \tilde{\omega} \tilde{\omega} r \quad (3.1.4)$$

当刚体相对某动参考系以 ω_1 转动, 而此动参考系又以 ω_2 相对定参考系转动, 则刚体的运动可以看成绕某个 oc 轴以角速度 $\omega = \omega_1 + \omega_2$ 作转动, oc 轴即为 ω 的方向。这就是说, 刚体绕相交轴转动合成时, 角速度的合成服从向量加法。

以上的讨论实际上是刚体定点转动的一种简单的、几何的、定性的描述, 下一节我们详细介绍刚体定点转动的定量的描述。

3.2 描述刚体定点转动的解析法

3.2.1 刚体定点转动的方向余弦描述

(1) 方向余弦矩阵

如图 3-3, 假设以参考空间某一点 o 为原点有两个笛卡尔直角坐标系—— $ox\eta z$ (简称 i 系) 和 $oxyz$ (简称 j 系), 它们之间的空间关系可以用这两个坐标系各坐标轴之间夹角的余弦值来确定。各坐标轴之间夹角的余弦值构成了一个方向余弦矩阵 A , 若用 A_j 表示 j 系相对 i 系的空间方位, 用 A_i 表示 i 系相对 j 系的空间方位, 则

$$A_i = (e_i \cdot e_j) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.2.1)$$

$$A_j = (e_j \cdot e_i) \quad (j, i = 1, 2, 3) \quad (3.2.2)$$

其中, e_i, e_j 分别表示 i 系和 j 系各坐标轴的单位向量。

如把上面两式展开, 可以写作下面的形式

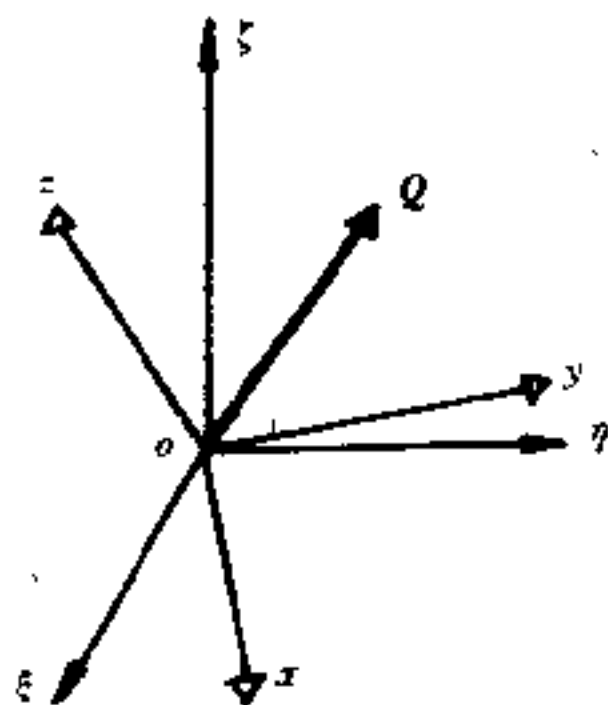


图 3-3

$${}^iA_i = \begin{bmatrix} e_i \cdot e_x & e_i \cdot e_y & e_i \cdot e_z \\ e_j \cdot e_x & e_j \cdot e_y & e_j \cdot e_z \\ e_k \cdot e_x & e_k \cdot e_y & e_k \cdot e_z \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

$${}^iA_j = \begin{bmatrix} e_x \cdot e_i & e_x \cdot e_j & e_x \cdot e_k \\ e_y \cdot e_i & e_y \cdot e_j & e_y \cdot e_k \\ e_z \cdot e_i & e_z \cdot e_j & e_z \cdot e_k \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

显然，方向余弦矩阵是一个正交矩阵，且有

$${}^iA_j = ({}^iA_i)^{-1} = ({}^iA_i)^T \quad (3.2.5)$$

所以，如果令

$${}^iA_j = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

则

$${}^iA_i = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

其中 l_1, m_1, n_1 分别为 j 系的 x 轴与 i 系的 ξ, η, ζ 三个轴夹角的余弦值。其余类推。

今假设在 i 系和 j 系的原点有一空间向量 Q (见图 3-3)。我们用 $Q_i = (Q_\xi, Q_\eta, Q_\zeta)^T$ 表示 Q 在 i 系中的位置，用 $Q_j = (Q_x, Q_y, Q_z)^T$ 表示 Q 在 j 系中的位置，则 Q_i 与 Q_j 的关系为

$$\begin{aligned} Q_x &= l_1 Q_\xi + m_1 Q_\eta + n_1 Q_\zeta \\ Q_y &= l_2 Q_\xi + m_2 Q_\eta + n_2 Q_\zeta \\ Q_z &= l_3 Q_\xi + m_3 Q_\eta + n_3 Q_\zeta \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

写作矩阵运算形式为

$$\begin{aligned} Q_j &= \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_\xi \\ Q_\eta \\ Q_\zeta \end{bmatrix} \\ &= {}^iA_j Q_i \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

同理可得

$$Q_i = {}^iA_j Q_j \quad (3.2.10)$$

例 3.1 设在惯性空间有一固定不动的向量 Q ，在 i 系中的位置为 $r_i = (0, 1, 0)^T$ ，当坐标系 ξ 轴转动 90° 之后得到 j 系 $oxyz$ （见图 3-4），求 Q 在 j 系中的位置 r_j 。

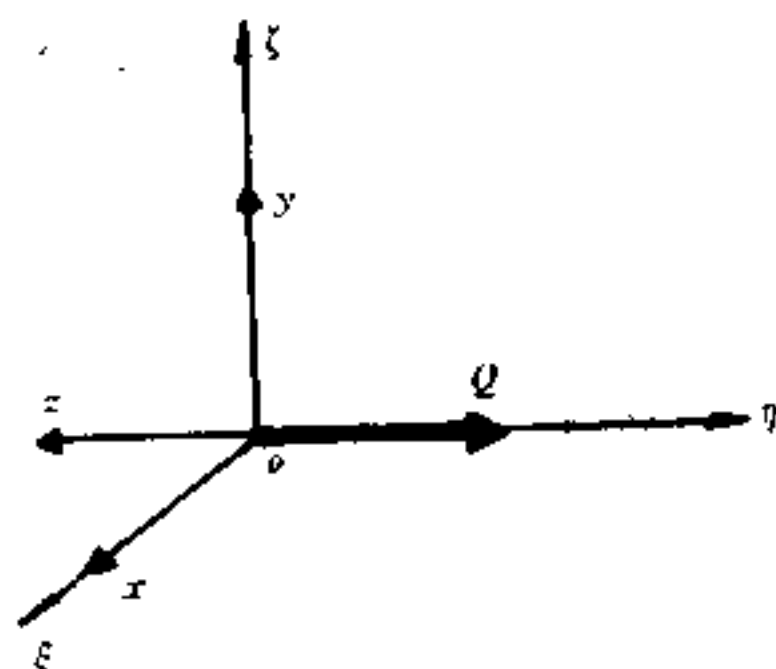


图 3-4

解：因为 j 系相对 i 系的方向余弦矩阵为

$${}^iA_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

由 (3.2.9) 式可得

$$\begin{aligned} r_j &= {}^iA_j r_i \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

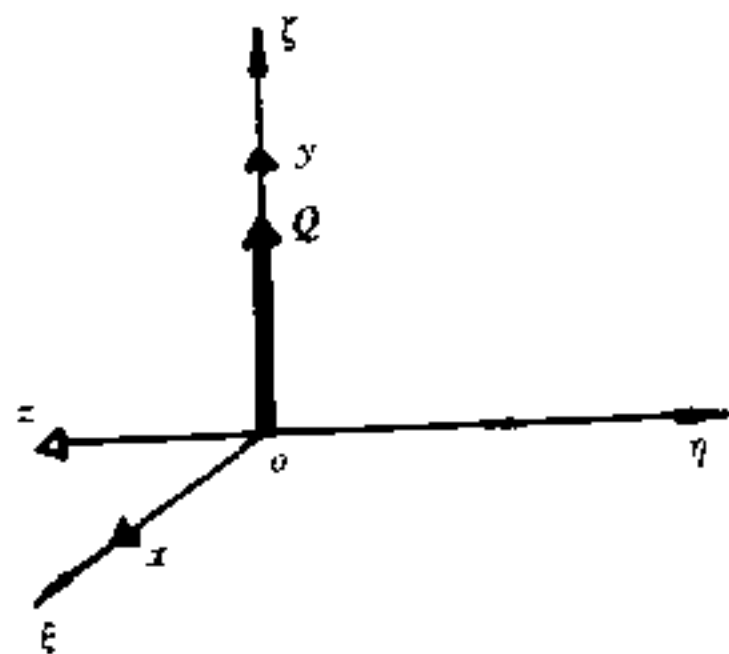


图 3-5

例 3.2 在上例中，若 Q 与 j 系固连，当 j 系从与 i 系重合状态绕 ξ 轴转动 90° 之后，求 Q 在 i 系中的位置 r_i （见图 3-5）。

解：由上例已知， j 系统绕 ξ 轴转动 90° 之后，

$${}^i\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad r_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故

$${}^j\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

由 (3.2.10) 式

$$\begin{aligned} r_i &= {}^j\mathbf{A}_i r_j \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

由上面的例子可以看出, 刚体作定点转动时, 如果我们在定点 o 建立两个坐标系, 参见图 3-6, 一个为惯性参考系即定参考系, 以下简称定系; 另一个为与刚体固连的坐标即动坐标系, 以下简称动系, 那么, 刚体的空间位置可以通过两个坐标之间的方向余弦矩阵来描述。由于方向余弦矩阵 9 个元素中只有 3 个是独

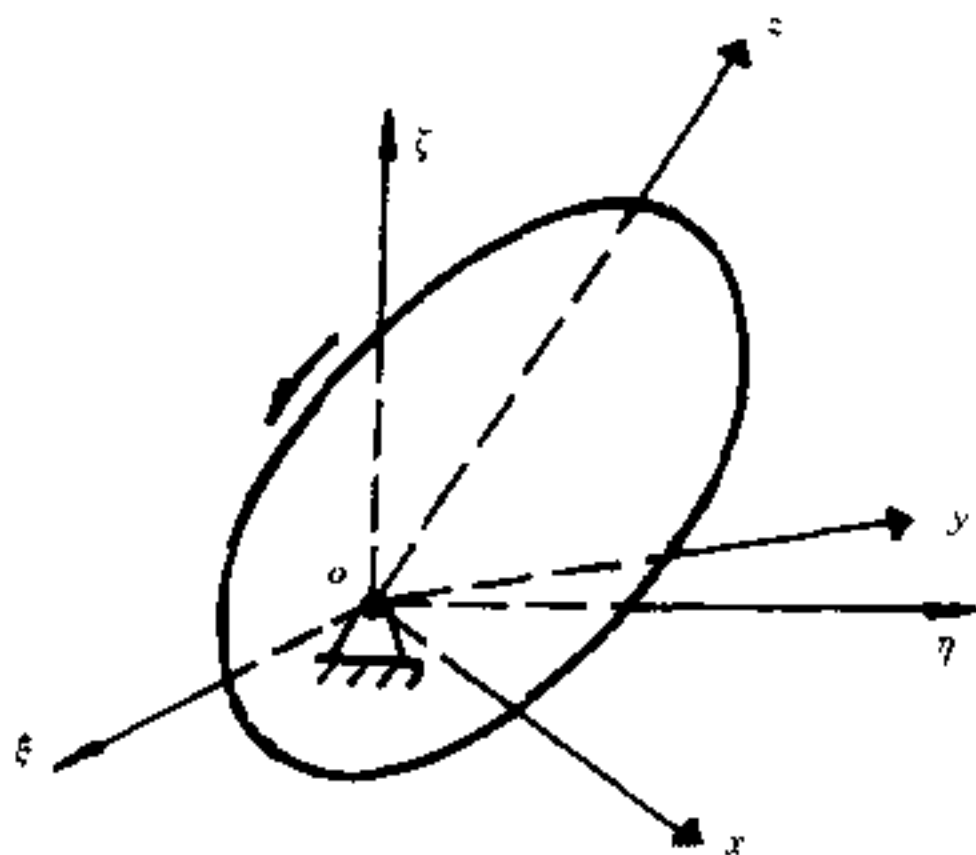


图 3-6 定点转动刚体的坐标系

立的，因此，刚体定点转动具有 3 个自由度。

(2) 连续转动的合成

根据前面的讨论，刚体定点转动时某时刻的空间位置可以由固连于其上的动系与建立于定点的定系之间的方向余弦矩阵 A 来描述。尽管该矩阵有 9 个元素，变量较多，但在处理坐标变换时，利用矩阵运算还是比较方便的，特别是处理刚体连续转动时是这样。因为每次转动都可以用后次相对前次的坐标变换即方向余弦来描述，因此，多次转动的合成实际上是通过方向余弦矩阵的乘法来实现。

如图 3-7，用 Q 表示刚体，假设开始时动系 $oxyz$ 与定系 $o\xi\eta\zeta$ 重合；刚体第一次转动之后动系为 $ox_1y_1z_1$ (1 系)；第二次转动之后动系为 $ox_2y_2z_2$ (2 系)； Q 相对定系为 r_0 ；相对 1 系为 r_1 ；相对 2 系为 r_2 ，1 系相对定系、2 系相对 1 系的方向余弦矩阵分别为 0A_1 和 1A_2 ，由 (3.2.9) 式有

$$r_1 = {}^0A_1 r_0 \quad (3.2.15)$$

$$r_2 = {}^1A_2 r_1 \quad (3.2.16)$$

故有

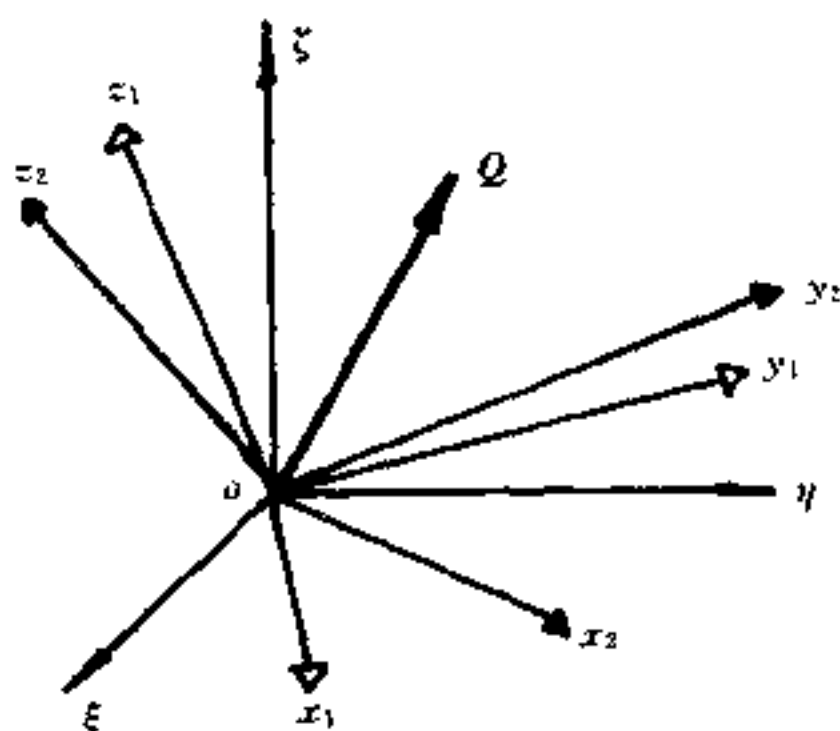


图 3-7 刚体的连续转动

$$r_2 = {}^1A_2 {}^0A_1 r_0 \quad (3.2.17)$$

将上式记为

$$r_2 = {}^0A_2 r_0 \quad (3.2.18)$$

其中

$${}^0A_2 = {}^1A_2 {}^0A_1 \quad (3.2.19)$$

亦有

$${}^2A_0 = {}^1A_0 {}^2A_1 \quad (3.2.20)$$

这里, 0A_2 表示 2 系相对定系的空间关系, 2A_0 表示则表示定系相对 2 系的空间关系。

由此可见, 若把刚体 (动系) 的每次绕定点的有限转动视为动系的一次坐标变换, 则刚体两次有限转动时, 其合成转动的方向余弦矩阵为两次分转动的方向余弦矩阵的顺次乘积。多次转动也具有同样的变换规律。

例 3.3 空间中一固定不动的向量 Q , 在定系 $o\xi\eta\zeta$ 中为 $r_0 = (0, 1, 0)^T$ 。动系 $oxyz$ 开始时与定系重合。第一次绕 ξ 轴转 90° , 得到动系 $ox_1y_1z_1$; 第二次接着绕 y_1 轴转 90° , 得到动系 $ox_2y_2z_2$ 。求合成转动的方向余弦矩阵 0A_2 , 并求 Q 在 $ox_2y_2z_2$ 中的位置 (见图 3-8)。

解: 由两次给定的转动, 可以求得 $ox_1y_1z_1$ 系相对定系和

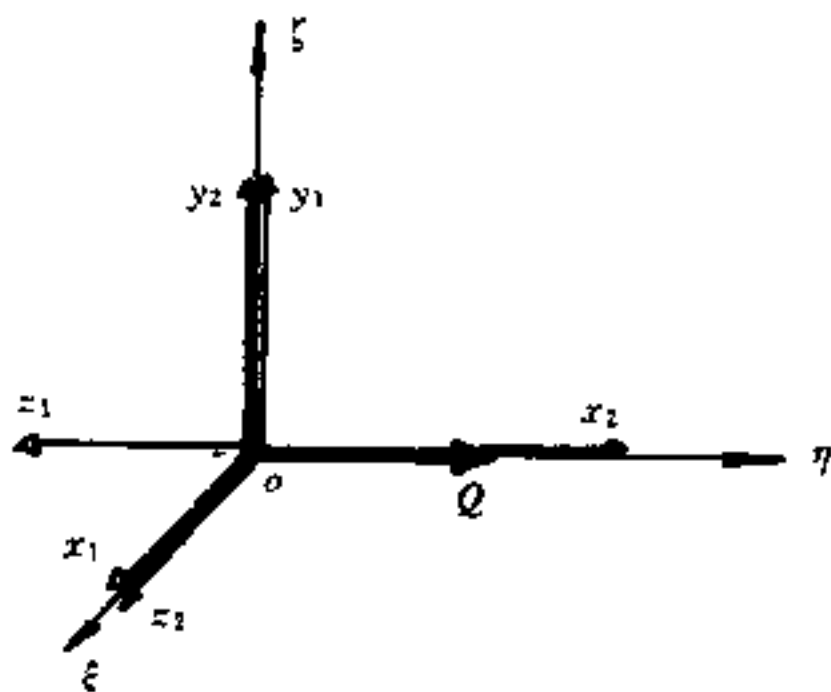


图 3-8

$ox_2y_2z_2$ 系相对 $ox_1y_1z_1$ 系的方向余弦矩阵分别为

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.21)$$

于是, 由 (3.2.19) 式有

$$\begin{aligned} {}^0A_2 &= {}^1A_2 {}^0A_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

由此可求得 Q 在 $ox_2y_2z_2$ 中的位置 r_2

$$\begin{aligned} r_2 &= {}^0A_1 r_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

需要强调的是, 刚体连续转动时, 其方向余弦矩阵的合成与转动的顺序是有关的。也就是说, 在一般情况下, 顺序是不可交换的, 即

$$B_1 B_2 \neq B_2 B_1 \quad (3.2.24)$$

这里, B_1 , B_2 分别表示两次转动时坐标系之间的方向余弦矩阵。

例 3.4 考察与一本书固连的动坐标系 $oxyz$ 两种转动的合成。如图 3-9, 设动系与定系 $o\xi\eta\zeta$ 开始时重合。第一种情况书先绕 z 轴转 90° , 再绕 x_1 轴转 90° (上图); 第二种情况书先绕 x 轴转 90° , 再绕 z_1 轴转 90° (下图), 比较这两种连续转动合成的结果。

解: 第一种连续转动的合成结果是

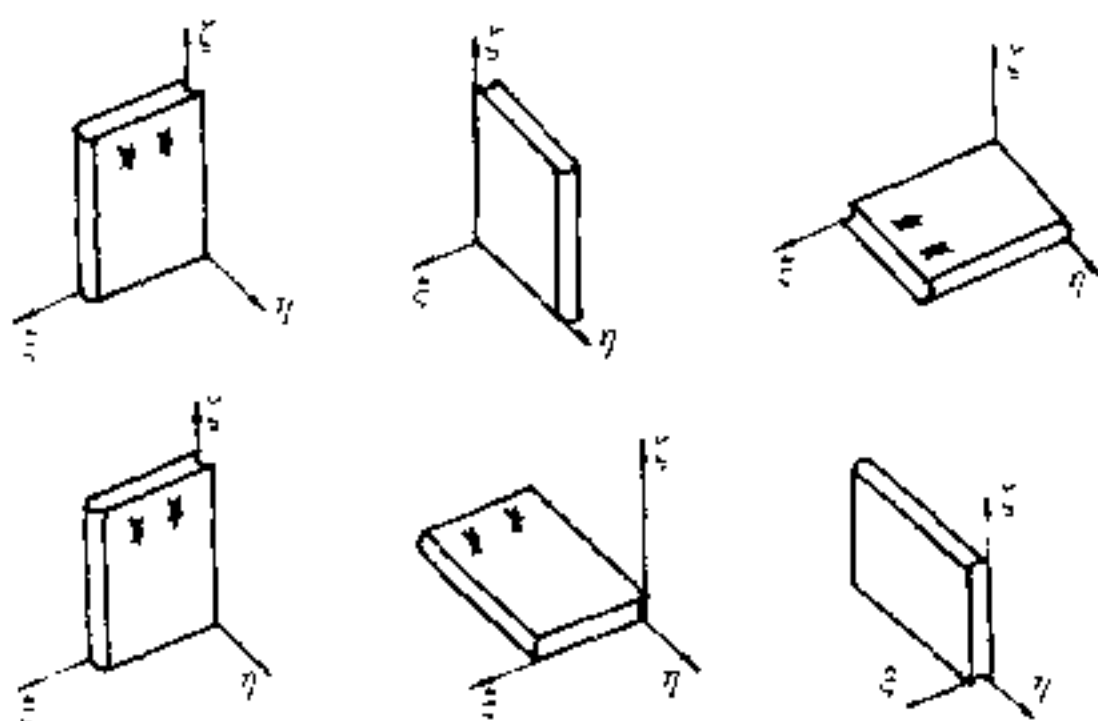


图 3-9 连续转动与顺序有关

$${}^0A_2(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.25)$$

第二种连续转动的合成结果是

$${}^0A_2(II) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.26)$$

可见 ${}^0A_2(I) \neq {}^0A_2(II)$ (3.2.27)

考虑更一般的情况，具有固定点的刚体作三次连续转动，假设第一次绕 x 轴转过 α 角，第二次绕 y_1 轴转过 β 角，第三次绕 z_2 轴转过 γ 角，如图 3-10。这样，我们可以得到每次动系相对前一次动系的变换矩阵 A_x , A_y , A_z 以及三次合成的结果 A 如下：

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & s\alpha \\ 0 & -s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

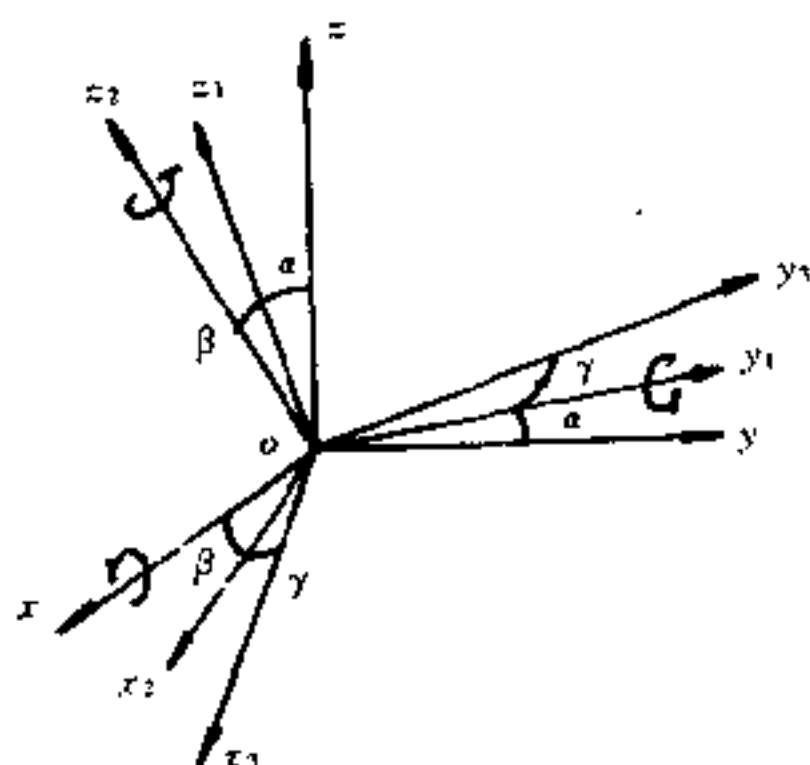


图 3-10 三次连续转动

$$A_{\beta} = \begin{pmatrix} c\beta & 0 & -s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \quad (3.2.28)$$

$$A_{\gamma} = \begin{pmatrix} c\gamma & s\gamma & 0 \\ -s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{aligned} A &= A_{\gamma} A_{\beta} A_{\alpha} \\ &= \begin{pmatrix} c\beta c\gamma & c\alpha s\gamma + s\alpha s\beta c\gamma & s\alpha s\gamma - c\alpha s\beta c\gamma \\ -c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma - s\alpha s\beta s\gamma & s\alpha c\gamma + c\alpha s\beta s\gamma \\ s\beta & -s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

这里，为了矩阵在书写上的简便，本书将角度（如 α 角）的正弦和余弦记为 $s\alpha$ 和 $c\alpha$ （后续章节也是如此）。

以上讨论的三次转动都是绕动系的当时坐标轴即“体轴”进行的。如果转动是绕定系的坐标轴即参考轴进行的，结果会是什么样的呢？为了使讨论简单又能得到明确的结论，仅考虑两次对应的转动，即动系第一次绕 ξ 轴转过 α 角，第二次绕 η 轴转过 β

角。假使这两次转动后动系对定系的方向余弦矩阵分别用 A_1 、 A_2 表示。因为 x 轴与 ξ 轴重合，显然有

$$A_1 = A_x \quad (3.2.30)$$

然而 $A_2 \neq A_\beta \quad (3.2.31)$

所以 $A_2 A_1 \neq A_\beta A_x \quad (3.2.32)$

但是，利用有限转动的交换定理，即所谓相对变换，则有

$$A_1 A_2 = A_\beta A_x \quad (3.2.33)$$

也就是说，动系先绕定系 η 轴转过 β 角，再绕定系 ξ 轴转过 α 角，其结果与动系先绕 x 轴转过 α 角，再绕 y_1 轴转过 β 角所得最终动系相对定系的位置是相同的，见图 3-11。关于相对变换，第六章还会具体讨论。

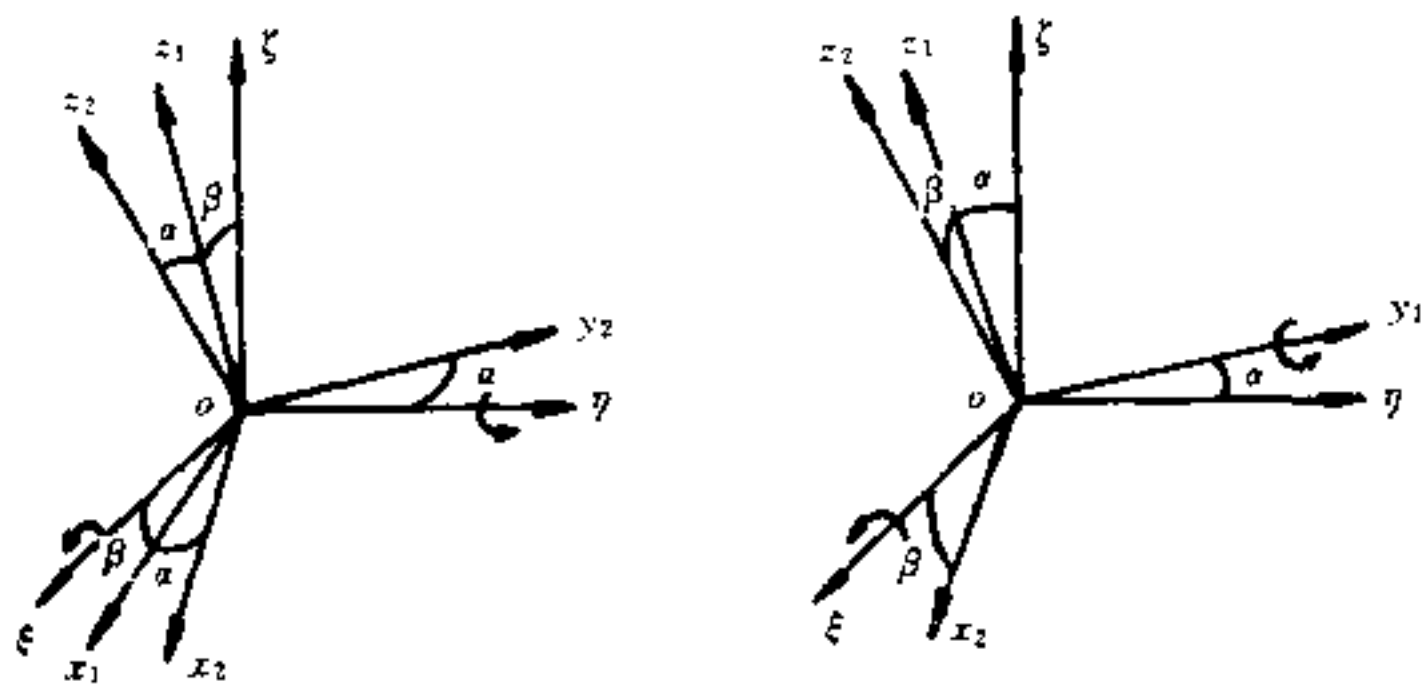


图 3-11 $A_1 A_2 = A_\beta A_x$

(3) 角速度

由前面的讨论可以看到，刚体作定点转动时，坐标系之间的空间关系即方向余弦矩阵是时间的函数，亦即 $A = A(t)$ 。下面，我们把 A 视为一张量，并给用 A 描述的刚体定点转动的运动学规律。

假设 Q 是位于定点转动的刚体上的、由定点发出的一个向量，那么在转动过程中， Q 相对与刚体固连的动系就是一个常矢

量。我们用 r_0 表示 Q 在定系中的位置，用 r 表示 Q 在动系中的位置，按 (3.2.9) 和 (3.2.10) 式有

$$r_1 = {}^0A_1 \cdot r_0 \quad (3.2.34)$$

$$r_0 = {}^1A_0 \cdot r_1 \quad (3.2.35)$$

将上式对时间微分，有

$$\dot{r}_0 = {}^1\dot{A}_0 r_0 + {}^1A_0 \cdot \dot{r}_1 \quad (3.2.36)$$

由于 r_1 是常矢量

$$\text{故} \quad \dot{r}_1 = 0 \quad (3.2.37)$$

于是得

$$\dot{r}_0 = {}^1\dot{A}_0 \cdot r_1 \quad (3.2.38)$$

(3.2.34) 和 (3.2.35) 式实际反映了相对定系和动系的空间向量之间的关系，当然，相对定系和动系的速度向量也应具备这样的关系，即

$$\omega \times r_0 = {}^1A_0 \cdot (\omega' \times r_1) \quad (3.2.39)$$

式中， ω 表示刚体即 Q 在惯性系中的角速度； ω' 表示刚体即 Q 的角速度 ω 在动系中的投影。

比较 (3.2.39) 和 (3.2.38) 两式，可得

$${}^1\dot{A}_0 \cdot r_1 = {}^1A_0 \cdot (\omega' \times r_1) \quad (3.2.40)$$

上式用矩阵表示就是

$${}^1\dot{A}_0 r_1 = {}^1A_0 \tilde{\omega}' \dot{r}_1 \quad (3.2.41)$$

$$\text{即} \quad {}^1\dot{A}_0 = {}^1A_0 \tilde{\omega}' \quad (3.2.42)$$

上式可改写为

$${}^0\dot{A}_1 = -\tilde{\omega}' {}^0A_1 \quad (3.2.43)$$

$$\text{或} \quad \tilde{\omega}' = {}^0A_1 {}^0\dot{A}_1^T \quad (3.2.44)$$

(3.2.44) 式表明，可以由刚体的转动规律求得刚体的角速度。如果要根据刚体的受力求其运动规律（这是常见的），就要对包含 (3.2.43) 式在内的一组微分方程进行积分。(3.2.43) 式展开为

$$\begin{bmatrix} \dot{l}_{11} & \dot{l}_{12} & \dot{l}_{13} \\ \dot{l}_{21} & \dot{l}_{22} & \dot{l}_{23} \\ \dot{l}_{31} & \dot{l}_{32} & \dot{l}_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3' & \omega_2' \\ \omega_3' & 0 & -\omega_1' \\ -\omega_2' & \omega_1' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (3.2.45)$$

这里, l_{ij} 为动系和定系各轴之间夹角的余弦值, 第一个下标为动系, 第二个下标为定系。(3.2.45) 式也可写作

$$\begin{aligned} \dot{l}_{1i} &= -\omega_2' l_{3i} + \omega_3' l_{2i} \\ \dot{l}_{2i} &= -\omega_3' l_{1i} + \omega_1' l_{3i} \quad (i = 1, 2, 3) \\ \dot{l}_{3i} &= -\omega_1' l_{2i} + \omega_2' l_{1i} \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

(3.2.46) 式称为泊松方程, 它是一个运动学方程。因为它是线性微分方程并对称, 所以便于求解。

3.2.2 刚体定点转动的欧拉角描述

如前所述, 刚体定点转动具有 3 个自由度, 用方向余弦矩阵描述时须要 9 个变量。如果采用 3 个互相独立的角度——欧拉角来描述刚体的方位则变量只有 3 个。

在图 3-12 中, 设 $o\xi\eta\zeta$ 为定参考系, $oxyz$ 为与刚体固连的动坐标系。欧拉角的规定是: 初始状态两个坐标系重合, 将刚体先绕 oz 轴转过 ψ 角, 再绕新的 x 轴转过 θ 角, 最后再绕新的 z 轴转一个 φ 角。 ψ 、 θ 、 φ 统称为欧拉角, 其中, ψ 称为进动角, θ 称为章动角, φ 称为自转角。在一定的条件下, 刚体的任一方位均可用一组欧拉角唯一地确定。

按照欧拉角所规定的转动顺序, 若用 A_ψ 、 A_θ 、 A_φ 分别表示每次转动的动系相对该次转动前的动系的方向余弦矩阵, 则三次转动后刚体相对转动前 (定系) 的方向余弦矩阵 A 为

$$A = A_\varphi A_\theta A_\psi \quad (3.2.47)$$

其中

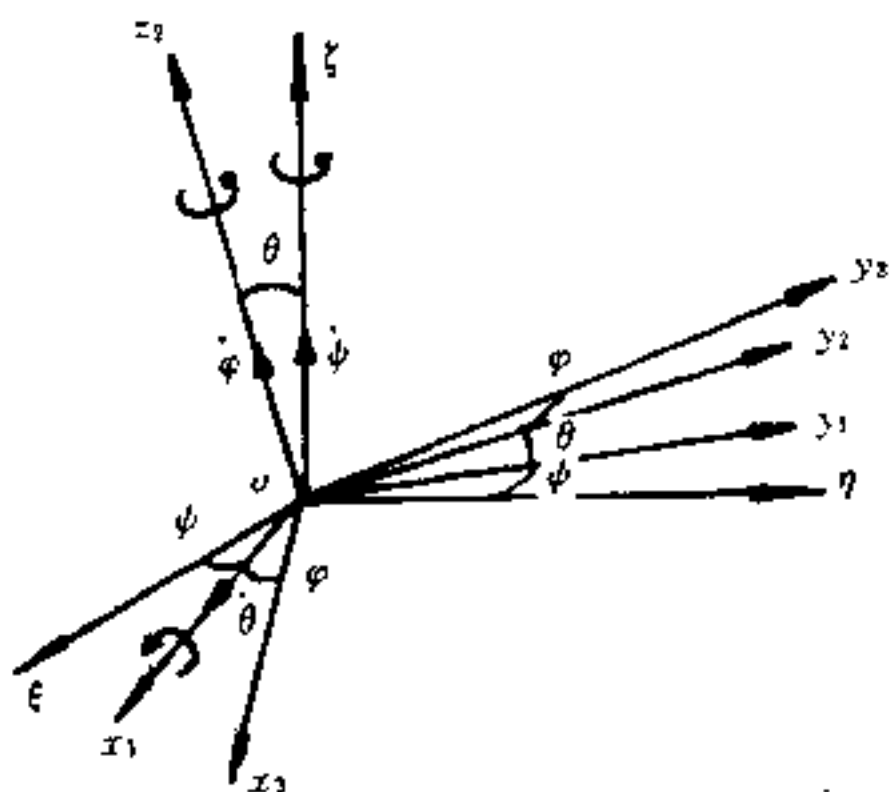


图 3-12 刚体定点转动的欧拉角

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_\varphi &= \begin{bmatrix} c\varphi & s\varphi & 0 \\ -s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_\theta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_\psi &= \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.2.48}$$

于是可得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c\psi c\varphi - s\psi c\theta s\varphi & s\psi c\varphi + c\psi c\theta s\varphi & s\theta s\varphi \\ c\psi s\varphi - s\psi c\theta c\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\theta c\varphi & s\theta c\varphi \\ s\psi s\theta & -c\psi s\theta & c\theta \end{bmatrix} \tag{3.2.49}$$

如果刚体定点转动的三个欧拉角已知，由上式很容易求得总的坐标变换矩阵 \mathbf{A} 。反之，如果已知刚体最终状态相对最初状态的

空间关系 A , 也可以求出相应的三个欧拉角, 只是所得到的角度解不会是唯一的。

下面对角度解的情况进行讨论。把 A 写作方向余弦矩阵的形式

$$A = (l_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.2.50)$$

对照 (3.2.50) 与 (3.2.49) 两式, 当 $|l_{33}| \neq 1$ 时, 有

$$\theta = \cos^{-1} l_{33} \quad (3.2.51)$$

这里, 我们规定 $0 < \theta < \pi$ 。这样, 由 A 中的 (3, 2) 元素可得

$$l_{32} = -\cos\psi \sin\theta \quad (3.2.52)$$

不妨令

$$\alpha = \cos^{-1} \left(-\frac{l_{32}}{\sin\theta} \right) \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (3.2.53)$$

则

$$\psi = \begin{cases} \alpha & (l_{31} \geq 0) \\ 2\pi - \alpha & (l_{31} < 0) \end{cases} \quad (3.2.54)$$

同理再令

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{l_{23}}{\sin\theta} \right) \quad 0 \leq \beta \leq \pi \quad (3.2.55)$$

则

$$\varphi = \begin{cases} \beta & (l_{13} \geq 0) \\ 2\pi - \beta & (l_{13} < 0) \end{cases} \quad (3.2.56)$$

当 $l_{33} = \pm 1$, 即 $\theta = 0$ 或 π 时, 求 ψ 和 φ 将发生困难。因为 $\theta = 0$ 或 π 时, 两坐标平面 (xoy 平面) 重合, 我们只能得到 ψ 与 φ 的和, 这是采用欧拉角描述刚体定点转动所固有的缺点。

用欧拉角描述刚体定点转动时, 欧拉角同样也是时间的函数, 即

$$\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t) \quad (3.2.57)$$

按本章第一节所给的欧拉定理, 刚体绕相交轴转动合成时, 角速度的合成服从向量加法。因此, 刚体的角速度 ω 为

$$\omega = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\varphi} \quad (3.2.58)$$

将 ω 在动系 $oxyz$ 上投影, 可得

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi + \dot{\theta} \sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}\end{aligned} \quad (3.2.59)$$

或写作矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta s\varphi & c\varphi & 0 \\ s\theta c\varphi & -s\varphi & 0 \\ c\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.2.60)$$

上式就是欧拉运动学方程。

如果要确定三次欧拉转动角速度, 由 (3.2.59) 式得到

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= (\omega_x \sin\varphi + \omega_y \cos\varphi) / \sin\theta \\ \dot{\theta} &= \omega_x \cos\varphi - \omega_y \sin\varphi \\ \dot{\varphi} &= \omega_z - (\omega_x \sin\varphi + \omega_y \cos\varphi) \cot\theta\end{aligned} \quad (3.2.61)$$

这是一组关于欧拉角的十分复杂的非线性方程组, 只能借助于计算机求数值解。而且, 当 $\theta=0$ 时, $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\varphi}$ 是不存在的, 于是出现了所谓的“奇点”。这从 (3.2.60) 式也可看出, 当 $\theta=0$ 时, 该等式右边第一个矩阵不可逆, 所以 $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\varphi}$ 是无法确定的。

如果将刚体角速度 ω 在定系 $o\xi\eta\zeta$ 上投影, 可得关系

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_\eta &= -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned} \quad (3.2.62)$$

或写作

$$\begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta s\psi & c\psi & 0 \\ -s\theta c\psi & s\psi & 0 \\ c\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.2.63)$$

3.2.3 刚体定点转动的广义欧拉角描述

三个欧拉角, ψ 、 θ 、 φ , 即进动角、章动角和自转角的定义取自天体力学, 其转动顺序为 $[3-1-3]$ 型, 即其转轴为 $[Z-X-Z]$, 也可以是 $[3-2-3]$ 型, 即转轴为 $[Z-Y-Z]$ 。不管采用那种顺序, 三个转角是互相独立的。基于这一要求, 描述刚体定点转动也可以采用广义欧拉角的方法。所谓广义欧拉角, 即仍然采用三个独立的角变量表示刚体的方位, 只是绕不同的坐标轴、转动的顺序不同而已。常见的广义欧拉角有卡尔丹角 (布莱恩特角) 与姿态角。

卡尔丹角是这样规定的: 开始时, 与刚体固连的动坐标系 $oxyz$ 与定系 $o\xi\eta\zeta$ 重合, 如图 3-13 所示; 刚体先绕 x 轴转动 α 角; 接着绕当前的 y 轴转动 β 角; 最后再绕当前的 z 轴转动 γ 角。因此, 其转动顺序为 $[1-2-3]$ 型。用这一组角来处理刚体定点转动时对于 z 轴与 ζ 轴十分靠近的情况很方便。这时, 不但不发生“奇点”, 而且 α 、 β 均为小量时, 运动学方程式可以进行线性化处理。

卡尔丹角在陀螺仪中有明确的定义。如图 3-14, 若把陀螺转

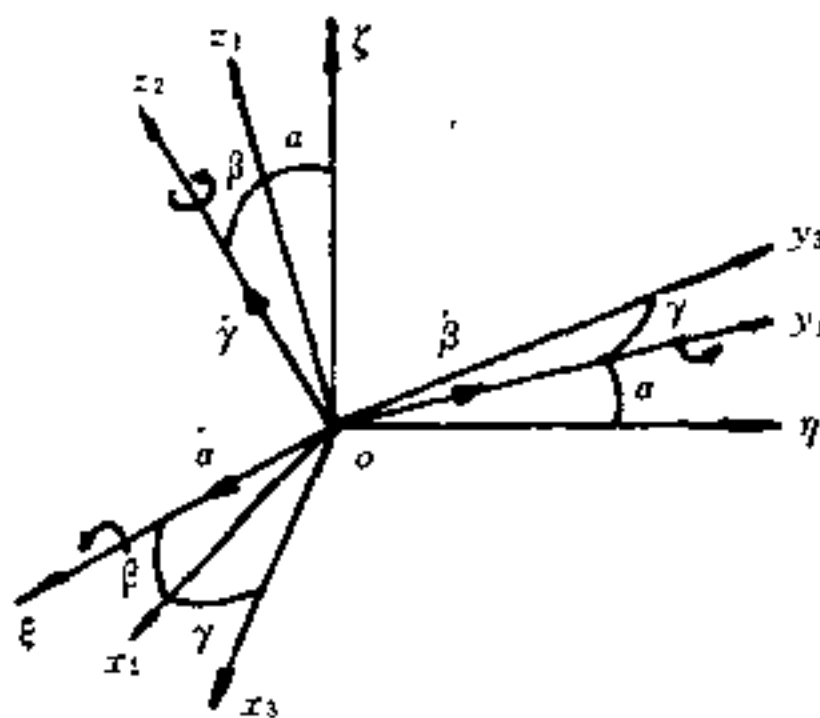


图 3-13 刚体定点转动的广义欧拉角

子视为绕定点 o 转动的刚体, α 为外卡尔丹环相对基座的转角, 称为外环转角; β 为内卡尔丹环相对外卡尔丹环的转角, 称为内环转角; γ 为陀螺转子相对内卡尔丹环的转角, 称为自转角。可见, 各角的变化互不影响, 各自独立。

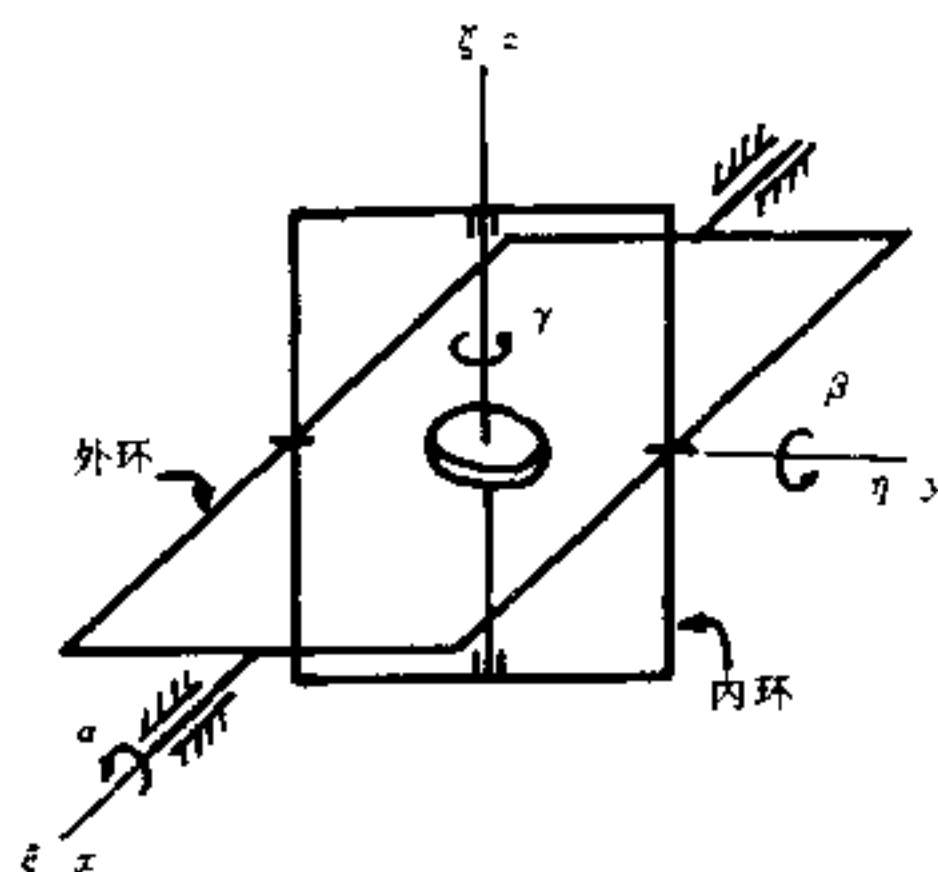


图 3-14 卡尔丹角

同样, 我们设 A_α 、 A_β 、 A_γ 依次为三次顺序转动时动系相对每次转动前动系的方向余弦矩阵, 那么, 刚体最终与最初的空间关系为

$$\begin{aligned}
 A &= A_\gamma A_\beta A_\alpha \\
 &= \begin{bmatrix} c\gamma & s\gamma & 0 \\ -s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & -s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & s\alpha \\ 0 & -s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & c\alpha s\gamma + s\alpha s\beta c\gamma & s\alpha s\gamma - c\alpha s\beta c\gamma \\ -c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma - s\alpha s\beta s\gamma & s\beta c\gamma + c\alpha s\beta s\gamma \\ s\beta & -s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix} \quad (3.2.64)
 \end{aligned}$$

用卡尔丹角描述刚体定点运动时, 角速度的合成也同样服从矢量加法, 即

$$\omega = \dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\gamma} \quad (3.2.65)$$

于是可以得到刚体的运动学方程如下:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ \omega_y &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \omega_z &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (3.2.66)$$

或

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & s\gamma & 0 \\ -c\beta s\gamma & c\gamma & 0 \\ s\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.2.67)$$

由 (3.2.66) 式同样可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= (\omega_x \cos \gamma - \omega_y \sin \gamma) / \cos \beta \\ \dot{\beta} &= \omega_x \sin \gamma + \omega_y \cos \gamma \\ \dot{\gamma} &= \omega_z - \operatorname{tg} \beta (\omega_x \cos \gamma - \omega_y \sin \gamma) \end{aligned} \quad (3.2.68)$$

姿态角多用于表示船舶、飞机、火箭等载体的方位。采用的三次顺序转动也是 [1-2-3] 型的, 即绕铅垂轴的航向角 ψ 、绕横轴的俯仰角 θ 和绕纵轴的倾斜角 φ , 见图 3-15。其运动学分析

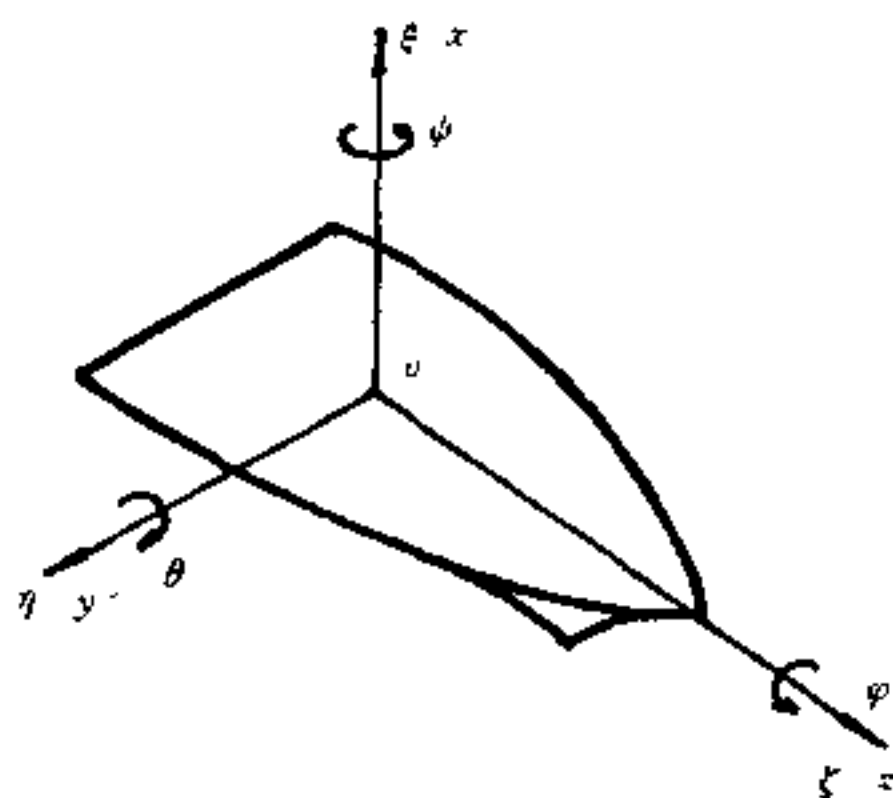


图 3-15 姿态角

与卡尔丹角一样, 这里不再重复。

例 3.5 如图 3-16, 一长方块, 设其上、下面均是边长为 3 的正方形, 高为 4。在 C 点沿棱边方向建立一直角坐标系 $C-e_1e_2e_3$, 现该物块绕 CD 转动 180° 。试分别用方向余弦、欧拉角和广义欧拉角求物块转动后, $C-e_1e_2e_3$ 系的最终状态相对其最初状态的空间关系 A 。

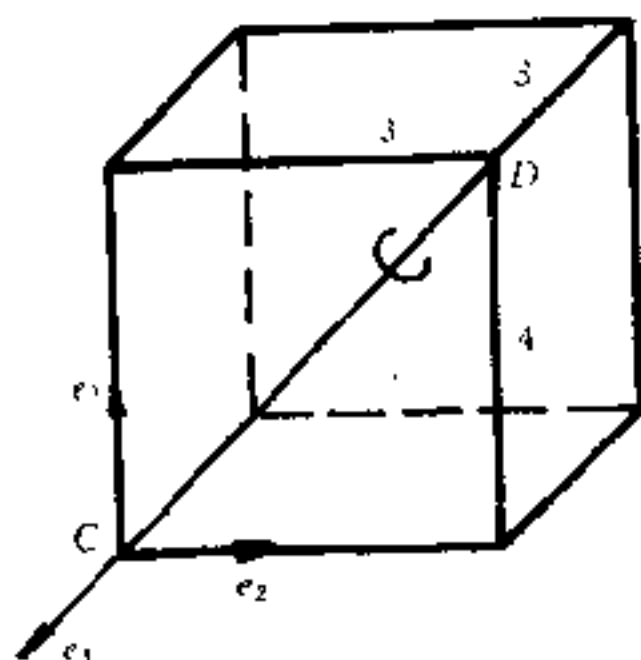


图 3-16

解: ① 方向余弦描述

先将物块绕 e_1 转动 $-\alpha$ 角, 使 e_2 与 CD 重合, 由几何关系可知 $\cos\alpha=3/5$, $\sin\alpha=4/5$; 再将物块绕当前的 e_2 转 180° ; 最后, 将物块绕当前的 e_1 转 $(-\alpha)$ 角。经过这三次转动得到了 $C-e_1e_2e_3$ 的最终位置。设三次转动的方向余弦矩阵为 A_1 、 A_2 、 A_3 , 则

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & s\alpha \\ 0 & -s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \quad (3.2.69)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c180^\circ & 0 & -s180^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ s180^\circ & 0 & c180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.2.70)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \quad (3.2.71)$$

于是得

$$A = A_3 A_2 A_1$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/25 & 24/25 \\ 0 & 24/25 & 7/25 \end{bmatrix} \quad (3.2.72)$$

② 欧拉角描述

将物块先绕 e_1 转 $-\theta$ 角使 e_3 与 CD 重合, 再将物块绕此时的 e_3 转动 180° , 最后再绕当前 e_1 转动 $(-\theta)$ 角, 除最后一个转动外可用欧拉角描述为

$$\psi = 0, \theta = 270^\circ + \alpha, \varphi = 180^\circ \quad (3.2.73)$$

代入式 (3.2.49) 可得

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad (3.2.74)$$

绕 e_1 转 $(-\theta)$ 角可得

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad (3.2.75)$$

于是得

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/25 & 24/25 \\ 0 & 24/25 & 7/25 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.76)$$

③ 广义欧拉角的描述

采用广义欧拉角时先将物块绕 e_1 转 α 角, 再将物块绕此时 e_2 转 180° , 最后还要将物块绕当前的 e_1 转过 $(-\alpha)$ 角才得到 $C-e_1e_2e_3$ 的最终状态。于是有

$$\alpha = \alpha, \beta = 180^\circ, \gamma = 0^\circ \quad (3.2.77)$$

代入式 (3.2.64) 可得

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \quad (3.2.78)$$

绕 e_1 转 $(-\alpha)$ 可得

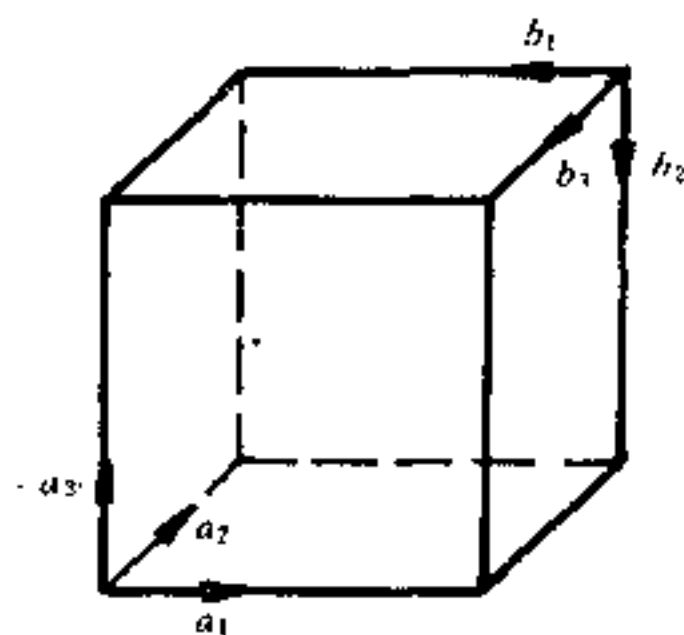
$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \quad (3.2.79)$$

最后可得

$$\begin{aligned} A &= A_2 A_1 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/25 & 24/25 \\ 0 & 24/25 & 7/25 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.80)$$

习 题 3

3.1 写出习图 3-1 所示的两个坐标系的方向余弦矩阵。



习图 3-1

3.2 作定点运动的刚体先后绕自身坐标系的 x 、 y 、 z 轴分别转动 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 角，试写出合成转动的方向余弦矩阵，并用下列三

组数据进行计算： $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$ 取值为 $\left(\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\left(0 \frac{\pi}{2} 0\right)$ 和 $(\pi \pi \pi)$ 。

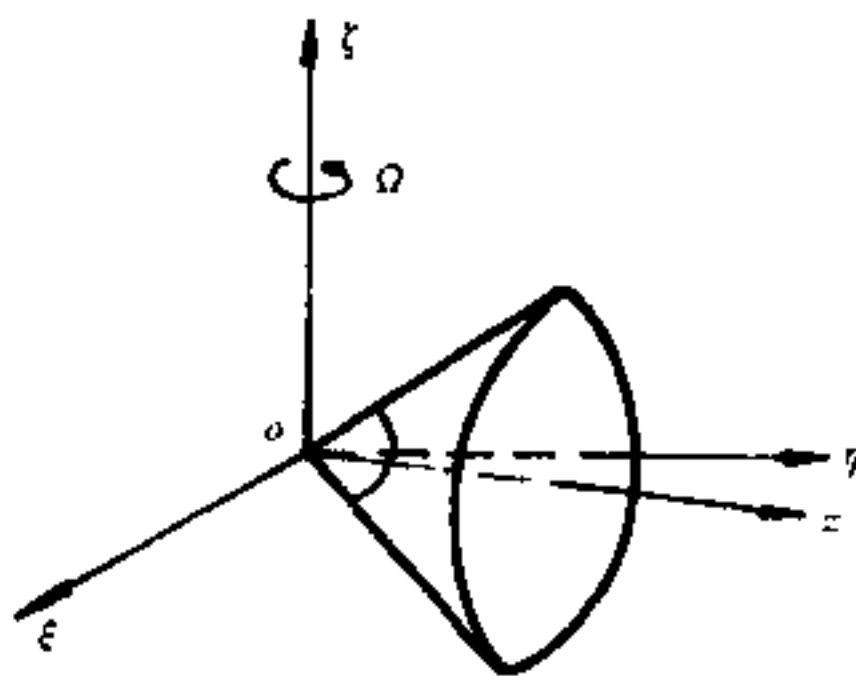
3.3 将上题的转动改为绕惯性系 ξ 、 η 、 ζ 的运动，求其结果。

3.4 已知动系 xyz 开始时与定系 $\xi\eta\zeta$ 重合，若动系先绕 ξ 轴转过 α 角，再绕 ζ 轴转过 γ 角求动系相对定系的方向余弦矩阵。若

$$A = \begin{bmatrix} c\gamma & s\gamma & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}s\gamma & -\frac{1}{2}\sqrt{3}c\gamma & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}s\gamma & -\frac{1}{2}c\gamma & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

求动系的角速度。如采用欧拉角描述，取 $\theta = 30^\circ$ ，求其合转动的 A 矩阵。

3.5 如习图 3-2 所示，一顶角为 60° 的正圆锥体在水平面做纯滚动，试求圆锥体的角速度。设它绕 ζ 轴的角速度为 Ω 。



习图 3-2

4 刚体定点转动的微分方程

这一章将着重讨论进行刚体动力学分析时所必须考虑的重要参数——惯性张量，并且由动量矩定理推得刚体动力学分析又一种被广泛采用的方法牛顿-欧拉动力学方程。

4.1 刚体的质量几何

4.1.1 惯性张量

如图 4-1，一刚体绕定点 o 以角速度 ω 转动；设 m 为刚体上任意一点， r 为该点对定点的向径，如图 G 表示刚体对定点的动量矩，按动量矩的定义，有

$$\begin{aligned} G &= \sum r \times mv \\ &= \sum mr \times (\omega \times r) \\ &= \sum m(r \cdot rE - rr) \cdot \omega \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

将上式简记为

$$G = J \cdot \omega \quad (4.1.2)$$

$$\text{其中 } J = \sum m(r \cdot rE - rr) \quad (4.1.3)$$

J 是一个张量。由上式可知，它与刚体的运动无关，只决定于刚体上各点的质量相对于定点的分布。我们把 J 称为刚体对固定点的惯性张量。其矩阵表达式为

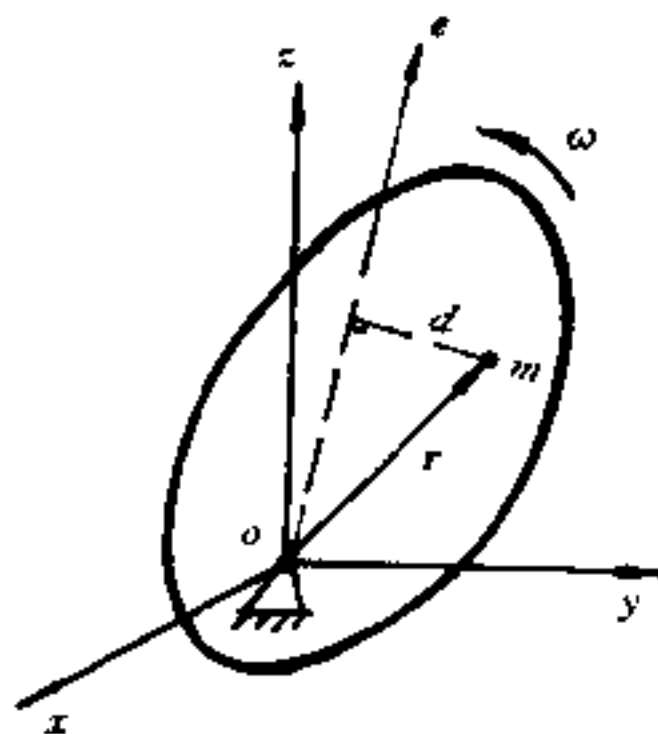


图 4-1

$$\mathbf{J} = \sum m (\mathbf{r}^T \mathbf{r} \mathbf{E} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T) \quad (4.1.4)$$

上式称为惯性矩阵，其中 \mathbf{E} 为 3×3 的单位矩阵。其展开形式为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

式中，

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum m (y^2 + z^2) \\ J_{yy} &= \sum m (z^2 + x^2) \\ J_{zz} &= \sum m (x^2 + y^2) \\ J_{xy} &= - \sum m xy \\ J_{yz} &= - \sum m yz \\ J_{zx} &= - \sum m zx \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

在 (4.1.5) 和 (4.1.6) 式中， \mathbf{J} 的下标 x, y, z 为以定点为原点的笛卡尔直角坐标三个轴，(4.1.6) 式右边的 x, y, z 为 m 点的向径 \mathbf{r} 在 $oxyz$ 坐标系上的投影。显见 \mathbf{J} 为一对称张量。

刚体对定点 o 的惯性张量给定之后，便可求得刚体对通过 o 点的任意轴（设其单位向量为 \mathbf{e} ）的惯性张量 \mathbf{J}_e 。见图 4-1。

$$\mathbf{J}_e = \sum m d^2 \quad (4.1.7)$$

其中 d 为 m 到 \mathbf{e} 轴的距离。

$$\text{由于} \quad d^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^2 \quad (4.1.8)$$

代入 (4.1.7) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_e &= \sum m [\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^2] \\ &= \sum m [\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})] \\ &= \sum m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}] \\ &= \mathbf{e} \cdot \sum m [\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \mathbf{E} - \mathbf{r} \mathbf{r}] \cdot \mathbf{e} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

即有

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{e} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{e} \quad (4.1.10)$$

上式的矩阵形式是

$$J_e = e^T J e \quad (4.1.11)$$

如果设 e 与 $oxyz$ 坐标系三个轴的夹角为 α 、 β 和 γ ，即 $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T$ ，(4.1.11) 式展开为

$$\begin{aligned} J_e &= (\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \\ &= J_{xx} \cos^2\alpha + J_{yy} \cos^2\beta + J_{zz} \cos^2\gamma + 2J_{xy} \cos\alpha \cos\beta \\ &\quad + 2J_{yz} \cos\beta \cos\gamma + 2J_{zx} \cos\gamma \cos\alpha \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

由以上的分析可以看出，刚体的惯性张量与坐标系有关。下面进一步讨论它的计算和其它形式。

4.1.2 移心与转轴

设某刚体上有两点 O 和 P ，该刚体对这两点的惯性张量分别为 J_o 和 J_p ，我们考察二者之间的关系。

由图 4-2 可知，对于刚体上任一点 m ，存在下面的矢量关系

$$r = r' + s \quad (4.1.13)$$

按惯性张量的定义，即 (4.1.3) 式，有

$$\begin{aligned} j_o &= \sum m (r \cdot r E - r r) \\ &= \sum m [(r' + s) \cdot (r' + s) E - (r' + s)(r' + s)] \\ &= \sum m [r' \cdot r' E - r' r'] + 2 \sum m s \cdot r' E - \sum m r' s \\ &\quad - \sum m s r' + \sum m s s E - \sum m s s \\ &= J_p + 2 \sum m s \cdot r' E - \sum m r' s - \sum m s r' + \sum m s s E \\ &\quad - \sum m s s \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

若 P 点恰好位于刚体的质心 C ，则上式可以简化为

$$J_o = J_c + M(ssE - ss) \quad (4.1.15)$$

这里，因为 $\sum m r' = 0$ 且记 $M = \sum m$ 。

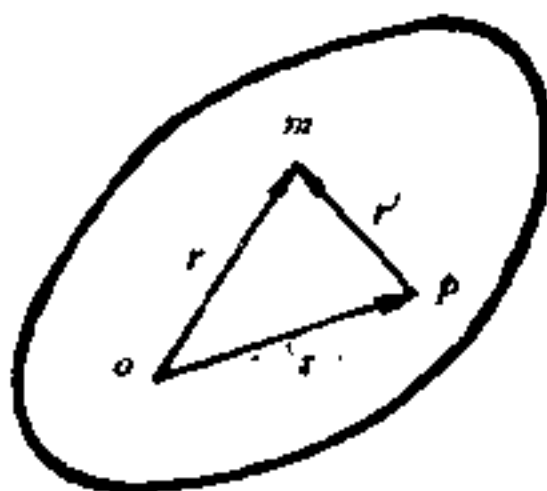


图 4-2

(4.1.15)式称为惯性张量的移心公式。等式右边包含两部分，一是刚体对质心 C 的惯性张量；另一部分是将刚体的全部质量假想地集中在质心时，刚体为 O 点的惯性张量。

如果通过 O 、 C 点作相互平行的直角坐标系，可得到(4.1.15)式的分解式为

$$\begin{aligned} J_{xx}^o &= J_{xx}^c + Ma^2 \\ J_{yy}^o &= J_{yy}^c + Mb^2 \\ J_{zz}^o &= J_{zz}^c + Mc^2 \\ J_{xy}^o &= J_{xy}^c - Ms_x s_y \\ J_{yz}^o &= J_{yz}^c - Ms_y s_z \\ J_{zx}^o &= J_{zx}^c - Ms_z s_x \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

其中， a ， b ， c 分别为通过 O 、 C 两点的两平行坐标系的 x 、 y 、 z 轴之间的距离，而 s_x ， s_y ， s_z 为 C 对 O 点的矢径 s 在 O 点坐标系三个轴的投影。(4.1.16)式又称为移轴公式。

由上式可以得到如下结论：

(1) 刚体对于任意轴的转动惯量等于对通过质心的平行轴的转动惯量加上刚体总的质量与两平行轴之间距离平方的乘积。

(2) 刚体对通过质心轴的转动惯量与对不通过质心各平行轴的转动惯量相比具有极小值。

(3) 如果将质心坐标系的原点沿坐标轴由质心移到另一点，则三个惯性积均不改变；如果新的坐标系原点位于质心坐标系的坐标平面上，则仅改变一个惯性积。

以上讨论的是对于原点不在一起的坐标系的惯性张量之间的关系。对于在同一原点的不同的坐标系，惯性张量自然也具有不同的分量。设以定点 o 为原点存在坐标系 $oxy z$ 和 $ox'y'z'$ ， J 和 J' 分别表示刚体对这两个坐标系的惯性张量。由(4.1.10)式可推得它们之间的关系应满足

$$J' = A^T J A \quad (4.1.17)$$

这就是转轴公式，式中， A 为 $ox'y'z'$ 对 $oxy z$ 的方向余弦矩阵。

在 (4.1.17) 式中, 方向余弦矩阵是一个正交矩阵, 而惯性张量 \mathbf{J} 为一实对称矩阵, 因此, 我们总可以找到一个正交矩阵 \mathbf{A} 使得 $\mathbf{J}' = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{A}$ 成立, 且 \mathbf{J}' 为一对角矩阵, 即有

$$\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.1.18)$$

这说明, 对于以刚体上的定点为原点的所有直角坐标系中, 总存在一个坐标系, 对于该系, 刚体的惯性积为零。也就是说, 该坐标系的三个轴为惯性主轴, 对应的轴惯矩 J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} 称为主惯矩, 相应的, 该坐标系称为主轴坐标系。实际上, 主惯矩就是惯性张量 \mathbf{J} 的特征值。

例 4.1 图 4-3 为一总质量为 M , 边长为 a, b 的均质矩形板, 求其相对于固连其上的坐标系 $oe_1e_2e_3$ 的惯性张量。当 $a=b$ 时, 求正方形板在 o 点的惯性主轴和主惯矩。

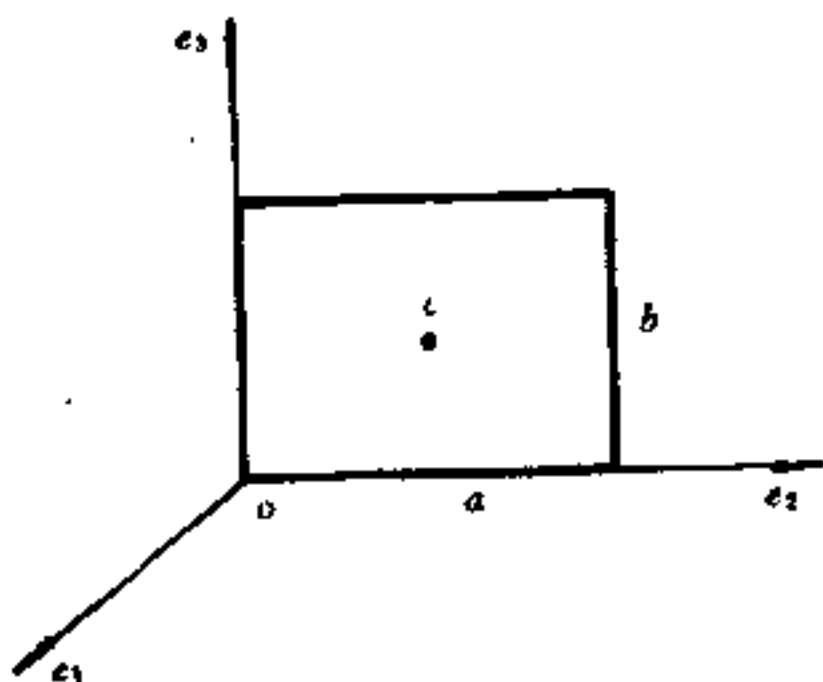


图 4-3

解: 主矩形板质心 c 作一坐标系 $c-n_1n_2n_3$ 与坐标系 $o-e_1e_2e_3$ 平行。由理论力学我们已经知道, $c-n_1n_2n_3$ 为主轴坐标系, 而且有

$$\mathbf{J}_c = \frac{M}{12} \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \quad (4.1.19)$$

因此, 我们不妨利用移心公式 (4.1.15) 来求矩形板对 $o-e_1e_2e_3$ 系的惯性张量 \mathbf{J} 。此时, c 在 $o-e_1e_2e_3$ 中的向径为 $s = (a/2 \ b/2 \ 0)^T$, 于是,

$$\begin{aligned} J &= J_c + M(s \cdot s \mathbf{E} - ss) \\ &= \frac{M}{12} \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} + \frac{M}{4} \begin{bmatrix} b^2 & -ab & 0 \\ -ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{Mb^2}{3} & -\frac{Mab}{4} & 0 \\ -\frac{Mab}{4} & \frac{Ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(a^2 + b^2)}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

当 $a=b$ 时, 简化可得

$$\mathbf{J} = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.1.21)$$

令矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.1.22)$$

可求得三个特征值分别为 8, 1, 7; 相应的特征向量为 $(0 \ 0 \ 1)^T$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \ \frac{1}{2}\sqrt{2} \ 0\right)^T$ 和 $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \ 0\right)^T$ 。须要指出的是, 由于轴向量的三个分量均为角度的余弦值, 因此, 特征方向应正交规范化。这样, 可求得正方形板对 o 点的主惯矩为

$$\mathbf{J} = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (4.1.23)$$

由惯性主轴组成的矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.24)$$

4.2 绕定点转动刚体的动量矩与动能

(4.1.2) 式给出了动量矩 G 的定义，将其写作矩阵形式为

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (4.2.1)$$

展开后可得到其坐标分量如下

$$\begin{aligned} G_x &= J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \\ G_y &= J_{xy}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z \\ G_z &= J_{xz}\omega_x + J_{yz}\omega_y + J_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

如 xyz 为主轴坐标系，则含惯性积的项均为零。这时，可得

$$G^2 = J_{xx}^2\omega_x^2 + J_{yy}^2\omega_y^2 + J_{zz}^2\omega_z^2 \quad (4.2.3)$$

可以看出，这是一个以固定点 o 为中心的椭球，称之为动量矩椭球。三个半轴的长分别为 G/J_{xx} ， G/J_{yy} 和 G/J_{zz} 。

下面分析动能的结构形式。设刚体的动能为 T ，则有

$$\begin{aligned} 2T &= \sum m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \sum m \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \sum m \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \sum (\mathbf{v} \times m \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

这里， \mathbf{r} 为刚体上任一点 m 的向径， \mathbf{v} 为该点速度， $\boldsymbol{\omega}$ 为刚体角速

度。

(4.2.4) 式可改写为

$$2T = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{G} \quad (4.2.5)$$

即

$$2T = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (4.2.6)$$

其矩阵表达式是

$$2T = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (4.2.7)$$

将上式展开可得

$$\begin{aligned} 2T = & J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2 + 2J_{xy}\omega_x\omega_y \\ & + 2J_{yz}\omega_y\omega_z + 2J_{zx}\omega_z\omega_x \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

若 xyz 为惯性主轴, 则

$$2T = J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2 \quad (4.2.9)$$

这同样是一个椭球, 称之为能量椭球。其三个长半轴分别为

$$\sqrt{2T/J_{xx}}, \sqrt{2T/J_{yy}} \text{ 和 } \sqrt{2T/J_{zz}}.$$

4.3 刚体绕定点转动的运动微分方程

4.3.1 刚体定点转动的欧拉动力学方程

设某刚体绕固定点 O 转动, 所受外力对 O 点的矩为 L , 由动量矩定理, 有

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \boldsymbol{L} \quad (4.3.1)$$

这里, \boldsymbol{G} 为刚体的动量。由第一节知道, $\boldsymbol{G} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$ 。 $\boldsymbol{\omega}$ 为刚体角速度, 显而易见是个变量, 如果 \mathbf{J} 也是个变量, 代入 (4.3.1) 式将使求导变得复杂。例如, 刚体的惯性张量 \mathbf{J} 对于设在定点的惯性参考系即定系来讲通常是个变量。为了使求导简化, 我们可以将 \mathbf{J} 用固连于刚体的动坐标系表示。对于动系来讲, \mathbf{J} 是一个常张量。如果我们进一步取动系的三个坐标轴为刚体的三个惯性主轴,

问题将更加简单。此时有

$$\begin{aligned}
 G &= \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \\
 &= \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\
 &= J_{xx}\omega_x i + J_{yy}\omega_y j + J_{zz}\omega_z k \\
 &= G_x i + G_y j + G_z k
 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

式中, x, y, z 为动系三个轴, i, j, k 分别为这三个轴的单位向量。

现在, 我们将 G 对时间求导, J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} 为常量, 而 i, j, k 则是时间的函数。此时 G 的微商可以分为两部分, 即

$$\begin{aligned}
 \frac{dG}{dt} &= \left(\frac{dG_x}{dt}i + \frac{dG_y}{dt}j + \frac{dG_z}{dt}k \right) \\
 &\quad + \left(G_x \frac{di}{dt} + G_y \frac{dj}{dt} + G_z \frac{dk}{dt} \right)
 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

等式右边第一部分称为定位微商, 用 $\frac{d^*G}{dt}$ 表示, 即

$$\begin{aligned}
 \frac{d^*G}{dt} &= \frac{dG_x}{dt}i + \frac{dG_y}{dt}j + \frac{dG_z}{dt}k \\
 &= J_{xx} \frac{d\omega_x}{dt}i + J_{yy} \frac{d\omega_y}{dt}j + J_{zz} \frac{d\omega_z}{dt}k \\
 &= J_{xx}\dot{\omega}_x i + J_{yy}\dot{\omega}_y j + J_{zz}\dot{\omega}_z k
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

第二部分可以写作

$$\begin{aligned}
 G_x \frac{di}{dt} + G_y \frac{dj}{dt} + G_z \frac{dk}{dt} &= G_x(\boldsymbol{\omega} \times i) + G_y(\boldsymbol{\omega} \times j) + G_z(\boldsymbol{\omega} \times k) \\
 &= \boldsymbol{\omega} \times G_x i + \boldsymbol{\omega} \times G_y j + \boldsymbol{\omega} \times G_z k \\
 &= \boldsymbol{\omega} \times G
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

于是 (4.3.3) 式可以简记为

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d^*G}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times G \tag{4.3.6}$$

亦即有

$$\begin{aligned} L &= \frac{dG}{dt} + \omega \times G \\ &= J \cdot \dot{\omega} + \omega \times J \cdot \omega \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

其矩阵表达式为

$$L = J\dot{\omega} + \tilde{\omega}J\omega \quad (4.3.8)$$

展开成投影形式可得

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx}\dot{\omega}_x + (J_{xx} - J_{yy})\omega_y\omega_z \\ L_y &= J_{yy}\dot{\omega}_y + (J_{yy} - J_{xx})\omega_x\omega_z \\ L_z &= J_{zz}\dot{\omega}_z + (J_{yy} - J_{xx})\omega_x\omega_y \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

这就是刚体定点转动的动力学方程，它由欧拉首先得到，故称之为欧拉动力学方程。须要强调的是，使用（4.3.9）式时， x, y, z 为刚体的三个惯性主轴并构成固连于刚体的动系。

由（4.3.9）式看出，欧拉动力学方程实际上只是建立了作用力矩与角速度的关系。为了获得与刚体方位的关系，还须要补充运动学方程，这些方程在第三章已经给出，为了方便阅读，重将这些方程写在下面。

采用方向余弦描述时的泊松方程

$$\begin{aligned} \dot{l}_{1i} &= -\omega_2' l_{3i} + \omega_3' l_{2i} \\ \dot{l}_{2i} &= -\omega_3' l_{1i} + \omega_1' l_{3i} \quad (i = 1, 2, 3) \\ \dot{l}_{3i} &= -\omega_1' l_{2i} + \omega_2' l_{1i} \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

其中 i 表示定系。实际上，泊松方程可以作这样的推广使用，对于某次转动， i 可以表示该次转动前的动系。

采用欧拉角描述时的欧拉运动学方程

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

采用广义欧拉角时的运动学方程

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ \omega_y &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \omega_z &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}\end{aligned}\quad (4.3.12)$$

联立动力学方程和运动学方程，即可求解动力学的两个基本问题：已知运动求力或已知力求运动。

在前面推导欧拉动力学方程时，所设立的动坐标系是与刚体固连的。但是，对于某些具体问题，为了使解题更加方便，我们可以选取另外的动坐标系，该动系并不与刚体固连，但要保证刚体的惯性张量 \mathbf{J} 在该动系中是个常张量。如果设该动系的角速度为 ω' ，按前面相同的方法可以推得动力学方程，称之为变形的欧拉动力学方程

$$L = \frac{d^* \mathbf{G}}{dt} + \omega' \times \mathbf{G} \quad (4.3.13)$$

其中 $\frac{d^* \mathbf{G}}{dt} = \mathbf{J} \frac{d\omega}{dt}$ (4.3.14)

$\frac{d\omega}{dt}$ 表示刚体角速度对新的动坐标系的相对导数；

$$\omega' \times \mathbf{G} = \omega' \times \mathbf{J} \cdot \omega \quad (4.3.15)$$

这里， ω 仍然表示刚体的角速度。

例 4.2 求旋转对称刚体作规则进动时的外力矩。所谓旋转对称刚体即有旋转对称轴的刚体，简单的如圆柱体、正圆锥体等。

解：采用欧拉角描述刚体的方位，若运动中始终存在 $\theta = \text{常量}$ ， $\dot{\psi} = \text{常量}$ 和 $\dot{\varphi} = \text{常量}$ ，则刚体的运动称为规则进动。

如图 4-4，在定点 O 建立一新的动坐标系 $onmp$ ，其中 p 轴为刚体的旋转对称轴。该坐标系与和刚体固连的动坐标系的区别在于新动系不参与刚体的自转，即不参与 $\dot{\varphi}$ 的运动。由于 p 是旋转对称轴，因此 n 、 m 、 p 都是刚体的惯性主轴，且保证刚体对 $onmp$ 坐

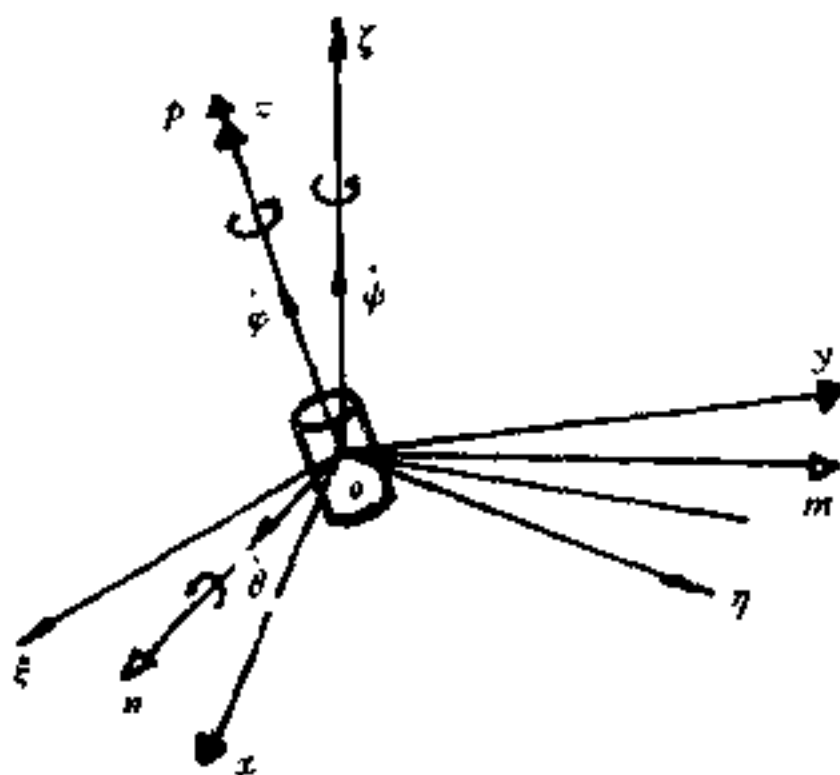


图 4-4 定点转动刚体的新动系

标系的惯性张量是常张量，即有

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & J_{mm} & 0 \\ 0 & 0 & J_{pp} \end{bmatrix} \quad (4.3.16)$$

我们将变形的欧拉动力学方程在新动系 $onmp$ 中展开成矩阵表达式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_n \\ L_m \\ L_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & J_{mm} & 0 \\ 0 & 0 & J_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_n \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\omega}_p \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -\omega_p' & \omega_m' \\ \omega_p' & 0 & -\omega_n' \\ -\omega_m' & \omega_n' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & J_{mm} & 0 \\ 0 & 0 & J_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_n \\ \omega_m \\ \omega_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_{nn}\dot{\omega}_n \\ J_{mm}\dot{\omega}_m \\ J_{pp}\dot{\omega}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_p' & \omega_m' \\ \omega_p' & 0 & -\omega_n' \\ -\omega_m' & \omega_n' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{nn}\omega_n \\ J_{mm}\omega_m \\ J_{pp}\omega_p \end{bmatrix} \quad (4.3.17) \end{aligned}$$

这里, ω 、 ω' 分别表示刚体和新动系 $onmp$ 相对定坐标系 $o\xi\eta\zeta$ 的角速度, 也就是有

$$\omega = \dot{\psi} + \dot{\phi} \quad (4.3.18)$$

$$\omega' = \dot{\psi} \quad (4.3.19)$$

在规则进动情况下, 它们在坐标系 $onmp$ 上的投影均为常量

$$\omega_n = 0, \omega_m = \dot{\psi} \sin\theta, \omega_p = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi} \quad (4.3.20)$$

$$\omega'_n = 0, \omega'_m = \dot{\psi} \sin\theta, \omega'_p = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}$$

将它们代入 (4.3.17) 式得到

$$\begin{aligned} L_n &= (J_{pp} - J_{mm})\dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + J_{pp}\dot{\psi}\dot{\phi} \sin\theta \\ L_m &= 0 \\ L_p &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

可见旋转对称刚体作规则进动时, 外力矩仅沿 n 轴方向。

例 4.3 图 4-5 为一作纯滚动研磨机转子示意图。若主轴 OA 的转动角速度 Ω 为一常值, 转子的半径为 r , 试确定转子对磨盘的压力。

解: 研磨机转子为一旋转对称刚体, 在定点 o 建立动坐标系 $onmp$, 其中 p 沿转子旋转对称轴, m 始终向上, 因此该动系并不参与转子的自转, 但其三个坐标轴为惯性主轴并保证了转子对该动系的惯性张量为常张量。

若采用欧拉角描述转子的方位, 由坐标系的关系可以得到

$$\theta = 90^\circ = \text{常量}, \dot{\psi} = \Omega = \text{常量} \quad (4.3.22)$$

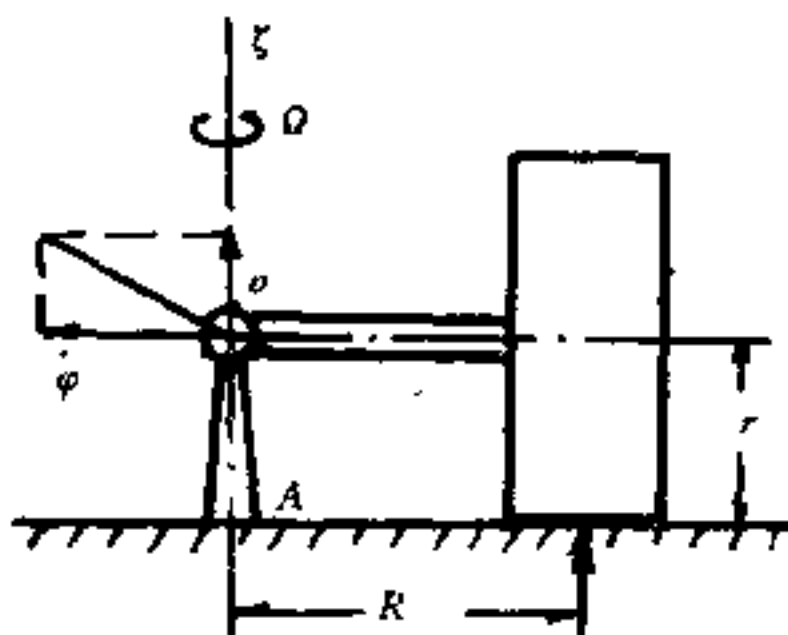


图 4-5 研磨机示意图

又转子作纯滚动, B 点的速度为零, 即有

$$\dot{\varphi}r - \Omega R = 0 \quad (4.3.23)$$

故 $\dot{\varphi} = \frac{R}{r}\Omega = \text{常量} \quad (4.3.24)$

可见, 研磨机转子作的是规则进动。

由上例的结论可知, 转子所受外力矩仅沿 n 轴方向

$$\begin{aligned} L_n &= (J_{pp} - J_{nn})\dot{\psi}^2 \sin 90^\circ \cos 90^\circ + J_{pp}\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin 90^\circ \\ &= J_{pp}\Omega \frac{R}{r}\Omega \\ &= \frac{R}{r}J_{pp}\Omega^2 \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

该外力矩由磨盘对转子的约束反力 F 提供, 即

$$F = \frac{L_n}{R} = \frac{1}{r}J_{pp}\Omega^2 \quad (4.3.26)$$

根据作用与反作用定律, 转子给磨盘的压力 F' 与 F 大小相等, 方向相反, 由此可知该压力与主轴角速度 Ω 的平方成正比, 因此大大提高了研磨机的效率。

4.3.2 用拉格朗日方程列写刚体定点转动的运动微分方程

前面的分析是由动量矩定理推导出刚体定点转动的欧拉动力学方程。刚体的定点转动的动力学分析自然也可以用第二章介绍的第二类拉格朗日方程, 下面给出这种方法的讨论。

第二类拉格朗日方程形如

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.3.27)$$

方程建立的关键在于确定系统的动能和主动力的广义力。

在本章第二节中已经给出刚体定点转动的动能是

$$T = \frac{1}{2}(J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2) \quad (4.3.28)$$

这里, 与刚体固连的动系的三个轴 x 、 y 、 z 为惯性主轴, 若选用欧拉角 ψ 、 θ 和 φ 作为刚体定点转动的广义坐标, 则角速度的广义

坐标表示就是 (3.2.59) 式, 即欧拉运动学方程。将该式代入 (4.3.28) 式可得动能的广义坐标表示为

$$T = \frac{1}{2} [J_{xx}(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + J_{yy}(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + J_{zz}(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2] \quad (4.3.29)$$

在第一章中已经知道, 当采用角度为广义坐标时, 其相应的广义力为力矩, 故采用欧拉角描述刚体定点转动时其相应的广义力分别为产生 ψ 、 θ 和 φ 角的力矩 L_ψ 、 L_θ 和 L_φ 。

把动能 (4.3.29) 式和广义力代入拉格朗日方程就可以建立三个动力学方程。但是, 由 (4.3.27) 式可以看出, 将动能对广义速度求偏导之后再对时间求导以及动能对广义坐标的偏导的过程费力且结果也十分冗长, 因此, 这里不准备给出。我们考察一种特殊情况, 对于对称刚体, 若 $J_{xx} = J_{yy}$, 则其动能可由 (4.3.29) 式简化为

$$T = \frac{1}{2} [J_{xx}(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + J_{zz}(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2] \quad (4.3.30)$$

此时代入拉格朗日方程, 可得如下对称刚体的运动微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(J_{xx} \sin^2 \theta + J_{zz} \cos^2 \theta) \dot{\psi} + J_{zz} \dot{\varphi} \cos \theta] &= L_\psi \\ J_{xx} \ddot{\theta} - (J_{xx} - J_{zz}) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_{zz} \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta &= L_\theta \\ \frac{d}{dt} [J_{zz}(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})] &= L_\varphi \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

例 4.4 用拉格朗日方法求例 4.2 中旋转对称刚体作规则进动时的外力矩。

解: 直接将规则进动的定义, 即 $\theta = \text{常量}$, $\dot{\psi} = \text{常量}$ 和 $\dot{\varphi} = \text{常量}$ 代入 (4.3.31) 式, 可立即得到

$$\begin{aligned} L_\psi &= 0 \\ L_\theta &= (J_{xx} - J_{zz}) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_{zz} \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

$$L_y = 0$$

我们知道，章动角 θ 是在刚体绕 z 轴转过 ϕ 角之后再绕当前的 x 轴所转的角，此时的 x 轴与例 4.2 中的动系中的 n 轴是同一轴，也就是说，(4.3.32) 中的 L_θ 就是例 4.2 中的 L_n ，而 p 轴与 z 轴是同一根轴，可见 (4.3.32) 所表达的结果与例 4.2 的结果完全一样。

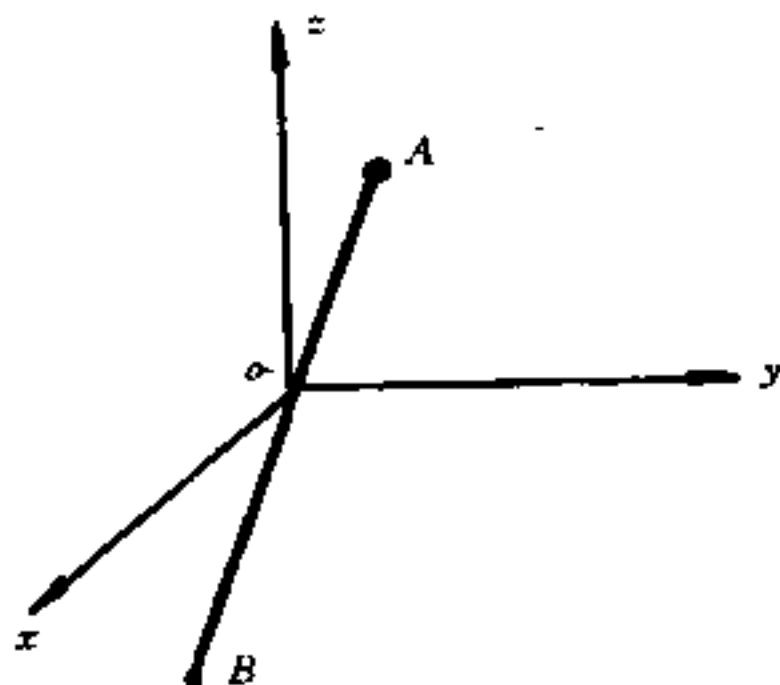
习 题 4

4.1 设一刚性直杆的质量集中于杆端 A 、 B ，分别为 $2m$ 和 m ， A 、 B 的位置为

$$r_A = \left(\frac{3}{2} \sqrt{2} \quad \frac{3}{2} \sqrt{2} \quad 4 \right)^T l$$

$$r_B = \left(-3\sqrt{2} \quad -3\sqrt{2} \quad -8 \right)^T l$$

参见习图 4-1，若杆的惯性张量为

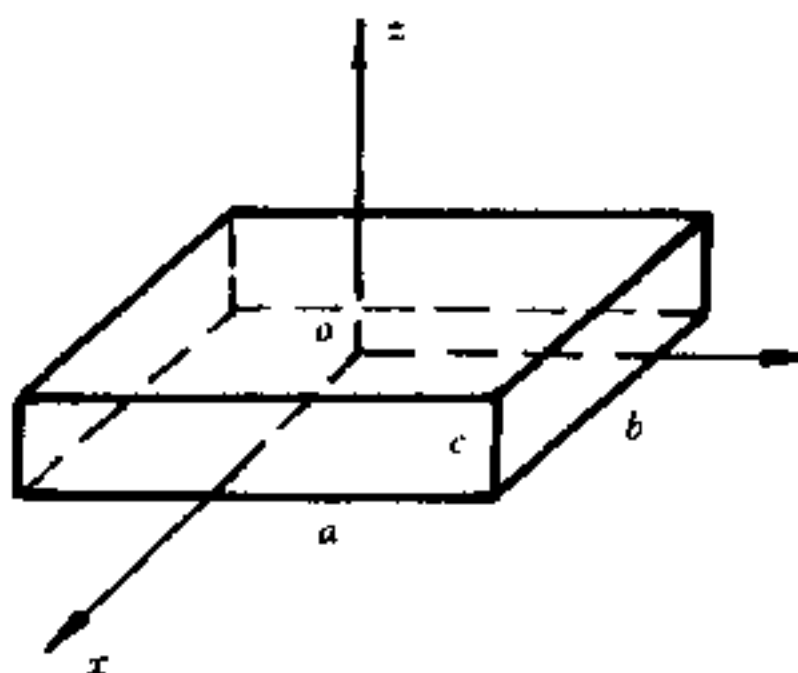


习图 4-1

$$J_0 = \begin{bmatrix} 123 & -27 & -36\sqrt{2} \\ -27 & 123 & -36\sqrt{2} \\ -36\sqrt{2} & -36\sqrt{2} & 54 \end{bmatrix} ml^2$$

试利用转轴公式求杆的主惯矩张量和惯性主轴。

4.2 习图 4-2 所示为一长、宽、高分别为 a 、 b 、 c 的匀质长方体，质量为 m ，试以广义欧拉角写出它绕中心作定点转动的动能和动量矩。

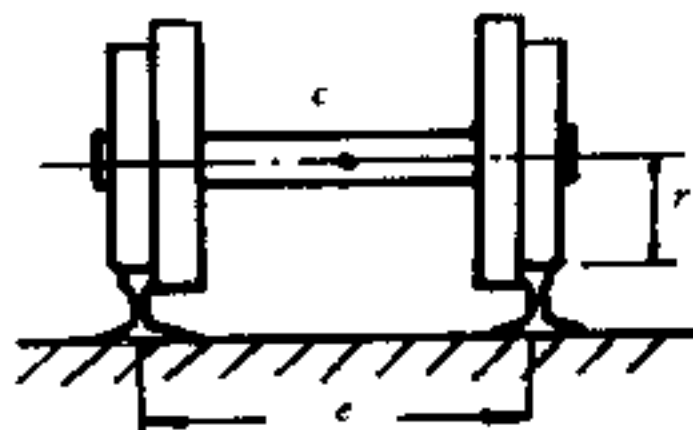


习图 4-2

4.3 写出例 4.3 研磨机转子作规则进动时的功能。

4.4 试建立题 3.5 正圆锥体的欧拉动力学方程。

4.5 习图 4-3 所示为火车轮轴系统，设系统的重量集中于两轮，各轮重为 Q ，半径为 r ，系统相对中心的对称轴的转动惯量为 J ，两轮间距为 e ，今系统的质心 C 以速度 v 作半径为 R 的水平圆周运动，且车轮在铁轨上作纯滚动，求各轮对铁轨的正压力。



习图 4-3

5 多刚体系统动力学概述

本章仅简单地介绍什么是多刚体系统，多刚体系统动力学研究的对象、内容和常规的方法。

5.1 多刚体系统动力学研究的对象

工程中的机械系统大多由许多构件组成，例如自行车、曲柄滑块机构、汽车中的转向机构、飞机的起落架、工业机器人等，甚至人体也可视为由神经系统控制的骨骼肌肉系统。研究这些复杂系统时，往往可以将构成系统的各构件简化为刚体，而刚体之间靠“铰”连接，从而得到“多刚体系统”。这里，需要说明的是，关于刚体的假设是不考虑物体的变形，但是物体总是有变形的，而物体的变形对系统的运动也是有影响的，有时则有决定性的影响，因此，严格地讲，多刚体系统应为多体系统即挠性体系统。目前，国内外已从多刚体系统的研究扩展到多体系统（包括柔体系统）的研究。但是，在某些情况，比如构件的变形很小，且构件的变形对系统的动力学特性影响不大，仍然可以将这类系统视为多刚体系统。在这本书里，我们仅研究多刚体系统并以此作为研究多体系统动力学的基础。

连接构件的“铰”，可以是圆柱铰链（两刚体之间有一个相对转动的自由度），万向联轴节（两个相对自由转动），球铰（三个相对转动的自由度），也可以是其他形式的运动学约束（如棱柱形约束允许一个相对滑动的自由度），甚至没有物理意义上的运动学约束，而只有力的作用（如弹簧连接），即所谓的广义铰。

多刚体系统从结构上可以分为两类：树状结构和非树状结构。两类结构的区分取决于“通路”的概念。

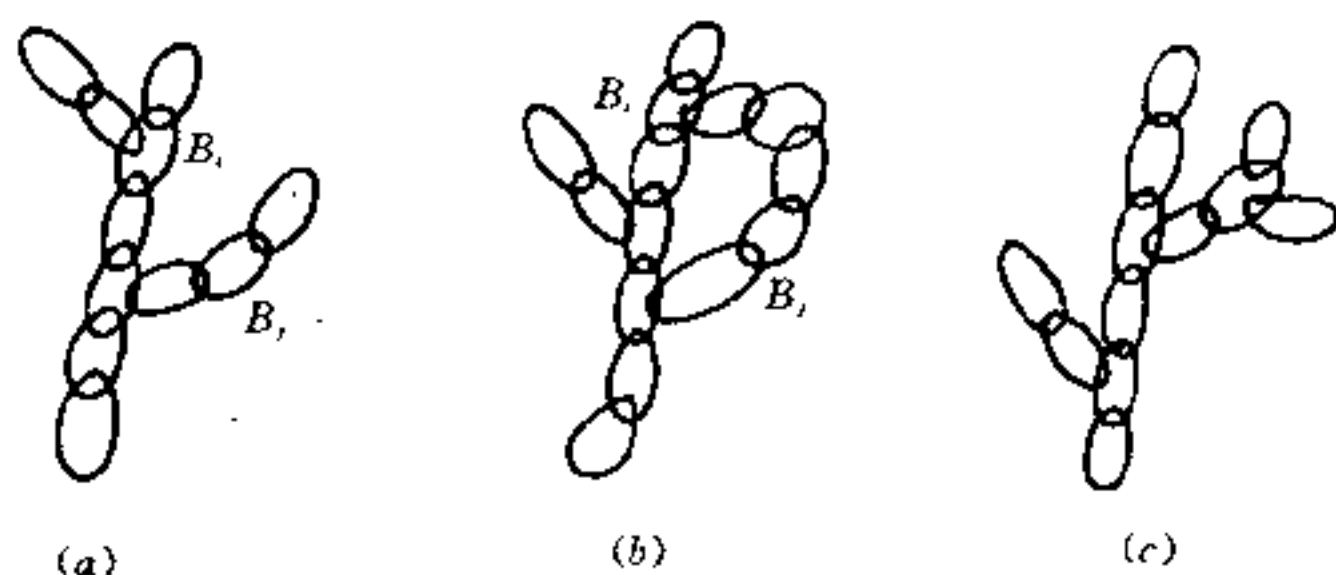


图 5-1 树状结构与非树状结构

(a), (c) 树状结构; (b) 非树状结构

在多刚体系统中，从某一刚体 B_i 出发，经过一系列刚体（和铰）可以到达另一个刚体 B_j ，途中所涉及的每个刚体（和铰）的集合为由 B_i 到 B_j 的一个通路，见图 5-1。

如果系统中任意两刚体之间都只有一个通路存在，则称系统为树状结构，如图 5-1 中的 (a)、(c)。如果系统中至少有两个刚体之间存在两个（或更多的）通路，则称系统为非树状结构，如图 5-1 中的 (b)，这时，从 B_i 到 B_j 的两个通路构成一个闭合链。

机械系统中，机械手，空间飞行器以及人体步行时的摆动相都可以视为树状结构系统。自行车、曲柄滑块机构以及人体站立时的支撑相则可视作非树状结构系统。

树状结构是研究多体系统动力学的基础，因为任何非树状结构均可将其闭合链打开加上某些附加约束而视为树状结构。树状结构又可以分为两类：

① 系统中某刚体（编号为 B_1 ）与一运动已知的刚体（通常称之为基座，编号为 B_0 ）相铰接，此类称为有根树。典型的如工业机械手。

② 系统中任一刚体都不与基座相连, 此类称为悬空树。如卫星、腾空的运动员等。

多刚体动力学的研究内容同样也分为运动学和动力学两部分, 与经典力学的区别之处在于多刚体系统是十分复杂的系统, 其自由度数大, 且各部件的运动一般都有大位移变化, 因此, 不但运动微分方程数多, 且有大量的非线性项, 一般很难求得解析解, 而必须借助计算机作数值计算。因此, 目前多刚体动力学主要在以下几个方面开展研究:

① 寻求建立多刚体系统运动微分方程的解析方法。这种方法应是一种规格化的方法, 能方便、快捷地统一处理各类问题、面向计算机的分析方法。

② 发展与各种分析方法配套的算法, 以实现复杂非线性常微分方程 (ODE) 或微分——代数方程 (DAE) 的数值积分。

③ 根据计算结果提供易于分析的各种输出形式, 如曲线、图象、动画等。

④ 应用以上方法对具体系统进行分析, 并解决力学性能分析、参数优化、寻求最优控制规律等力学问题。

目前, 国内外已研究、发展了若干求解多刚体动力学的通用程序, 有的已得到广泛的应用。

5.2 用常规方法建立多刚体系统 动力学分析数字模型

这里所说的常规方法是指应用第二类拉格朗日方程和牛顿-欧拉方程的动力学分析方法。下面以曲柄滑块机构为例讨论如何采用上述两种方法建立系统的运动微分方程。

图 5-2 为一典型的曲柄滑块机构, 由基座、曲柄、连杆和滑块等四个刚体由铰链连接。主动力矩 L 作用在曲柄上, 各刚体的几何参数图中已经给出, 如果忽略铰链处的摩擦, 要求列写系统

的运动微分方程。

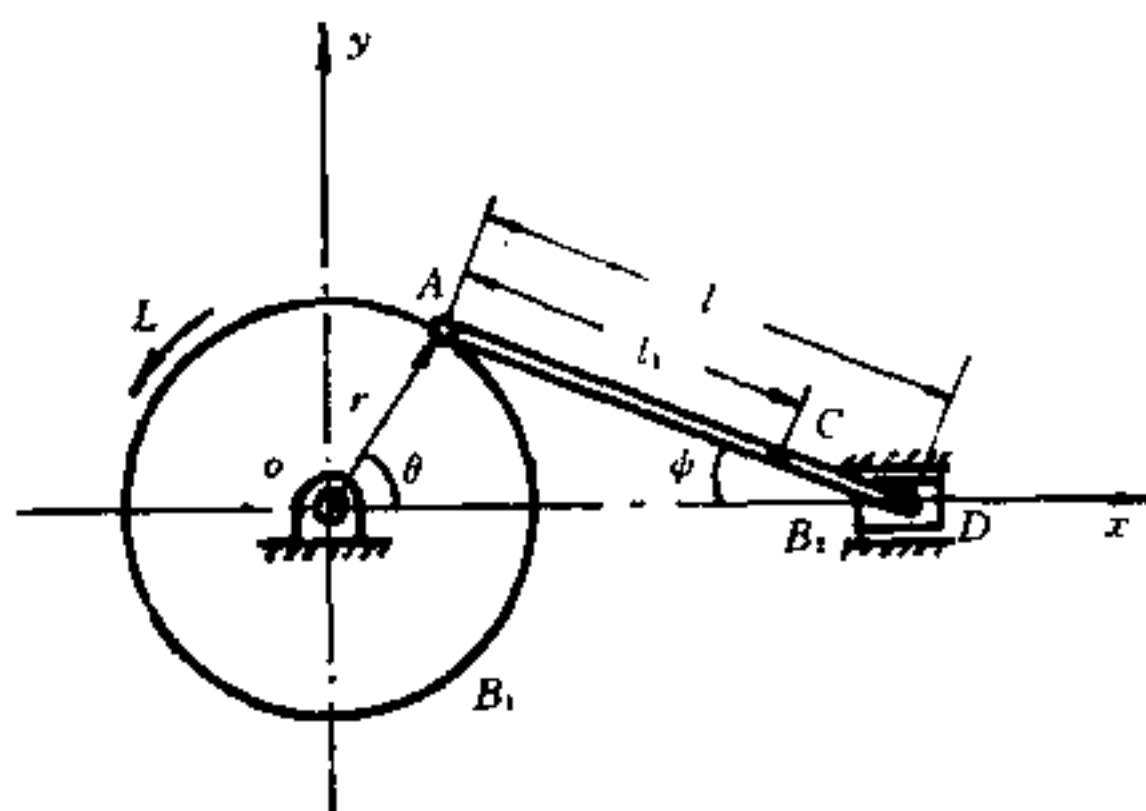


图 5-2 曲柄滑块机构

由第 1 章例 1.5 我们已经知道，这一刚体系统是一理想、完整的约束系统，具有一个自由度。我们先采用拉格朗日方法进行力学分析，该方法是处理完整系统的规格化方法，在理想约束情况下，可以避免未知的约束反力的出现并获得数目最少的运动微分方程。

为了说明问题又使讨论简化，我们视基座固定不动，并将滑块视为一个质点并固定于连杆的右端与连杆共同组成刚体 B_2 ，其质心位于 c 处，另用刚体 B_1 表示曲柄。设 B_1 的转角 θ 为广义坐标，则 B_2 的位置可由下式确定

$$\begin{aligned}\phi &= \arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\theta\right) \\ x_c &= r\cos\theta + l_1\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\ y_c &= \frac{r(l-l_1)}{l}\sin\theta\end{aligned}\quad (5.2.1)$$

于是有

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{l} \cos \theta\right) \dot{\theta} \\ \dot{x}_c &= \left[-r \sin \theta - l_1 \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{r^2}{l^2} \sin \theta \cos \theta\right] \dot{\theta}\end{aligned}\quad (5.2.2)$$

$$\dot{y}_c = \left[r \left(1 - \frac{l_1}{l}\right) \cos \theta\right] \dot{\theta}$$

这样，可以进一步求得系统的动能 T

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ J_1 + J_2 \frac{r^2}{l^2} \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta\right)^{-1} \cos^2 \theta + m_2 r^2 \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)^2 \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + m_2 \left[r + l_1 \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{r^2}{l^2} \cos \theta\right]^2 \cdot \sin^2 \theta \right\} \dot{\theta}^2\end{aligned}\quad (5.2.3)$$

系统的势能 V 为

$$V = m_2 g r \left(1 - \frac{l_1}{l}\right) \sin \theta \quad (5.2.4)$$

对应于广义坐标 θ 的广义力就是外力矩 L 。

在 (5.2.3) 式中， J_1 为 B_1 对 o 的转动惯量， J_2 为 B_2 对质心 c 的转动惯量。把以上结果代入拉格朗日方程的非保守广义力的形式 (2.2.38) 式

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial (T - V)}{\partial \theta} = L \quad (5.2.5)$$

考察动能的表达式可以看出，动能与 $\dot{\theta}$ 的关系虽然较为简单，但它对 $\dot{\theta}$ 求得偏导之后再对时间 t 求导就相当复杂，而动能 T 与 θ 的关系本来就较为复杂。这样，将 (5.2.5) 式展开时将非常冗长。如果一多刚体系统比较复杂，那么虽然运动微分方程的数目不多，但推导过程以及方程的最终建立却十分繁琐，且不易上机计算。

下面讨论如何采用牛顿-欧拉方法对曲柄滑块机构进行动力

学分析。

采用牛顿-欧拉方法的基本步骤是先将系统的约束解除,分割成若干个单个的刚体或质点,然后对每个刚体或质点应用牛顿第二定律和欧拉动力学方程——建立运动微分方程。由于解除了约束,因此约束反力将出现在运动微分方程中,这样,就必须与约束方程联立求解。所以,采用这种方法将使微分-代数方程组中的方程数目增多,但每个方程的建立则要简单得多。

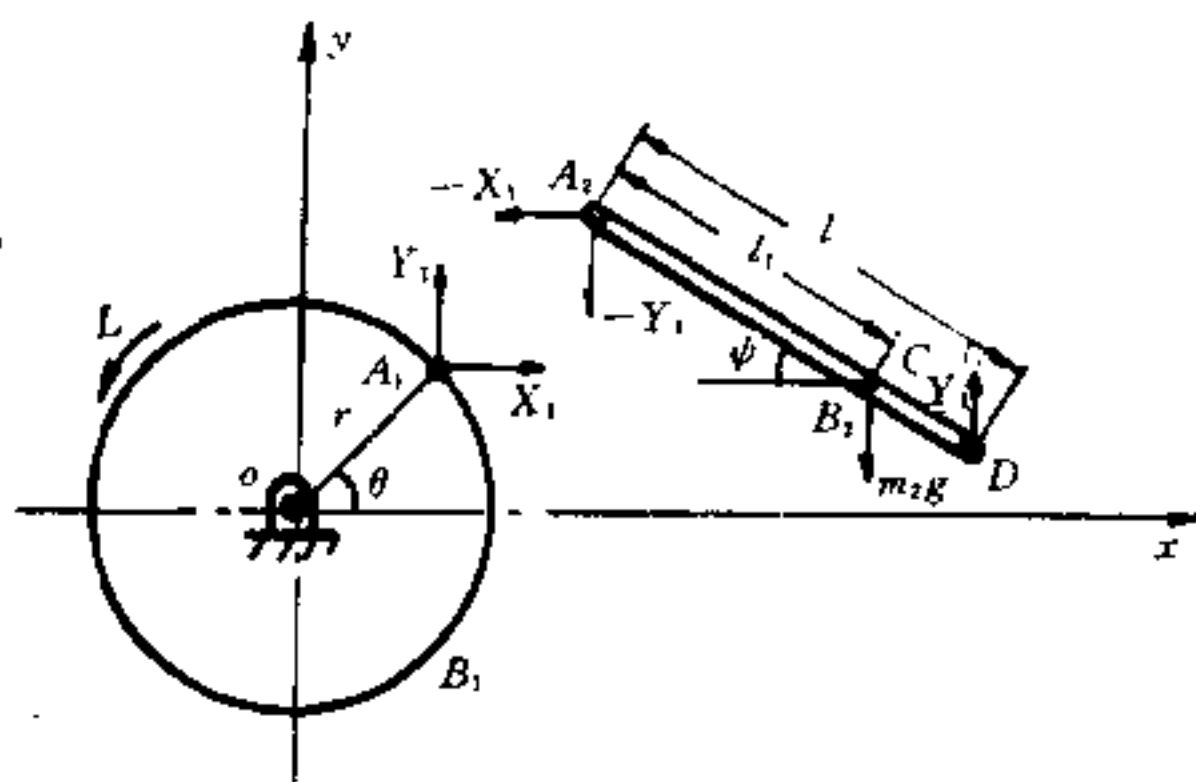


图 5-3 解除约束的曲柄滑块机构

同样将曲柄滑块机构看作由 B_1 和 B_2 组成的系统,先将它们解除约束,如图 5-3 所示, X_1 , Y_1 , $-X_1$, $-Y_1$ 与 Y_2 均为约束反力。下面分别列出 B_1 、 B_2 的运动微分方程。

B_1 只有转动

$$J_1 \ddot{\theta} = L - X_1 r \sin \theta + Y_1 r \cos \theta \quad (5.2.6)$$

B_2 既有移动又有转动

$$m_2 \ddot{x}_c = -X_1 \quad (5.2.7)$$

$$m_2 \ddot{y}_c = Y_2 - Y_1 - m_2 g \quad (5.2.8)$$

$$J_2 \ddot{\psi} = -Y_1 (l - l_1) \cos \psi - X_1 l_1 \sin \psi - Y_1 l_1 \cos \psi \quad (5.2.9)$$

约束条件是 A_1 与 A_2 点重合以及 D 点在 x 轴上, 由此得到约束方程为

$$r\cos\theta - (x_c - l_1\cos\psi) = 0 \quad (5.2.10)$$

$$r\sin\theta - (y_c + l_1\sin\psi) = 0 \quad (5.2.11)$$

$$y_c - (l - l_1)\sin\psi = 0 \quad (5.2.12)$$

从 (5.2.6) 式至 (5.2.12) 式, 前四个为微分方程, 后三个为代数方程, 共七个方程构成一封闭方程, 可求得七个未知量 $\theta, \psi, x_c, y_c, X_1, Y_1, Y_2$ 。

牛顿-欧拉法也是一种规格化的方法, 虽然方程数较多, 但建立方程的过程却十分简单, 而且易于编程上机计算。

6 齐次坐标及其变换

多刚体系统的运动学和动力学分析涉及到各刚体在空间的位置和姿态以及各刚体之间的空间关系。这首先需要一种方便、有效的数学方法来研究单个刚体的位移、速度、加速度和受力情况及整个系统各构件之间参数的关系及传递。齐次坐标及其变换则是目前国内外普遍采用的一种有效的分析方法。

6.1 齐次坐标

我们把不同时等于零的四个数组成的列向量 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 称为三维空间里点的齐次坐标。这四个数与该点在笛卡尔直角坐标系中的坐标值 x, y, z 之间的关系规定为

$$x = x_1/x_4, y = x_2/x_4, z = x_3/x_4 \quad (6.1.1)$$

按照齐次坐标的定义，可以看出它具有如下性质

(1) 齐次坐标不是单值的。如果 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 是某点 P 的齐次坐标，则 $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)^T$ 在 $\lambda \neq 0$ 时也是该点的齐次坐标。

(2) 空间中的一个点必然对应某个齐次坐标 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ，当 $x_4 = 0, \lambda \neq 0$ 时，则为矢量 $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^T$ 方向上无穷远的点。

(3) 点 $(1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T$ 和 $(0, 0, 1, 0)^T$ 分别是轴 ox, oy 和 oz 上无穷远的点，而点 $(0, 0, 0, 1)^T$ 则是坐标原点。

(4) 点和平面的齐次坐标关系

一个平面可以用 4 个数描述的行矩阵表示, 如平面 N 为

$$N = (a_1, a_2, a_3, a_4) \quad (6.1.2)$$

同样, $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4)$ 在 $\lambda \neq 0$ 时表示同一个平面。

如果 P 点位于平面 N 内, 则满足矩阵关系

$$NP = 0 \quad (6.1.3)$$

或展开成

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0 \quad (6.1.4)$$

若我们定义一个常数

$$m = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (6.1.5)$$

将 (6.1.4) 式除以 $m x_4$ 得到

$$\frac{x_1}{x_4} \cdot \frac{a_1}{m} + \frac{x_2}{x_4} \cdot \frac{a_2}{m} + \frac{x_3}{x_4} \cdot \frac{a_3}{m} = -\frac{a_4}{m} \quad (6.1.6)$$

可以看出, 方程的左边是向量 $\left(\frac{x_1}{x_4}\right)i + \left(\frac{x_2}{x_4}\right)j + \left(\frac{x_3}{x_4}\right)k$ 和向量 $\left(\frac{a_1}{m}\right)i + \left(\frac{a_2}{m}\right)j + \left(\frac{a_3}{m}\right)k$ 的点积。它表示点 $\left(\frac{x_1}{x_4}\right)i + \left(\frac{x_2}{x_4}\right)j + \left(\frac{x_3}{x_4}\right)k$ 沿向量 $\left(\frac{a_1}{m}\right)i + \left(\frac{a_2}{m}\right)j + \left(\frac{a_3}{m}\right)k$ 可被理解为是在法线方向上离原点距离为 $-\frac{a_4}{m}$ 的平面的一条外法线, 于是 $N = (0, 0, 0, a_4)$ 给定一个无穷远的平面。

对于 $NP \neq 0$ 的情况, 由于齐次坐标的多值性, 不能简单地由 $-\frac{a_4}{m}$ 的正负来判断点 P 是在平面 N 上方 (外法线离开原点方向) 还是在平面 N 下方 (外法线指向原点方向)。此时, 应把点和平面的表示化为标准式, 其中点的标准式为

$$P = (x_1/x_4, x_2/x_4, x_3/x_4, 1)^T \quad (6.1.7)$$

而平面的标准式为

$$N = (-a_1/a_4, -a_2/a_4, -a_3/a_4, -1)^T \quad (6.1.8)$$

据此, 可给出如下判断

若 $NP > 0$ 则点 P 落在平面 N 上方;

若 $NP < 0$ 则点 P 落在平面 N 下方。

设 $NP = L$, 则 L 的数值表示 P 点到平面的距离为平面到坐标系原点距离的 L 倍。

例 6.1 $N = (0, 0, 1, -1)$

或 $N = (0, 0, 2, -2)$

或 $N = (0, 0, -100, 100)$

等表示同一个平面。它们均与 xy 平面平行、沿 z 向与原点距离为一个单位长的平面。而点 $P = (10, 20, 1, 1)^T$ 将落在上述平面上, 因为有

$$NP = (0, 0, -100, 100) \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.1.9)$$

例 6.2 讨论点 $P_1 = (0, 0, 2, 1)^T$ 与点 $P_2 = (0, 0, 0, 1)^T$ 和例 6.1 中 N 平面的关系。

解: 例 6.1 中 N 平面的标准式为 $(0, 0, 1, -1)$ 由于

$$NP_1 = (0, 0, 1, -1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \quad (6.1.10)$$

可见 P_1 点位于 N 平面上方, 且 P_1 到 N 平面的距离等于 N 平面到坐标原点的距离, 见图 6-1。

如果仅仅根据

$$(0, 0, -100, 100) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -100 \quad (6.1.11)$$

而判定点 P_1 位于 N 平面下方, 或根据

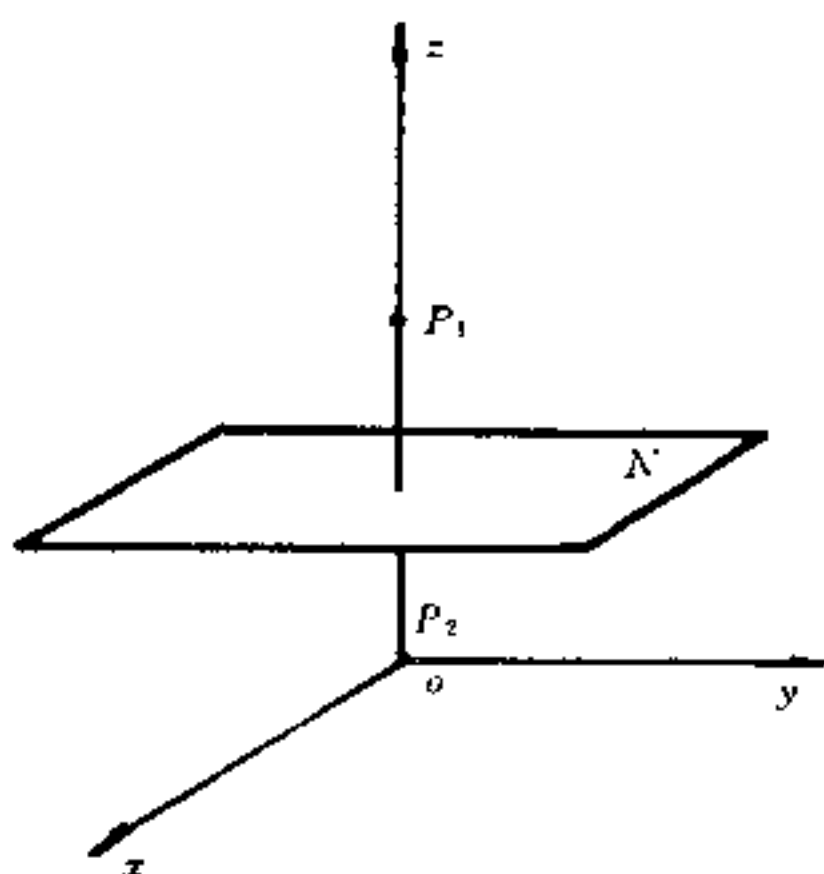


图 6-1

$$(0, 0, 2, -2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \quad (6.1.12)$$

而判定点 P_1 位于 N 平面上方都是不准确的。

由于

$$NP_2 = (0, 0, 1, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \quad (6.1.13)$$

可判定点 P_2 位于 N 平面的下方，且 P_2 与 N 平面的距离等于坐标原点与平面的距离，故 P_2 就是坐标原点，见图 6-1。

齐次坐标的其他性质，这里不再赘述。

齐次坐标的运算规则如下

(1) 矢量 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ 与标量 s 相乘，定义为

$$sA = (a_1, a_2, a_3, a_4/s)^T \quad (6.1.14)$$

(2) 矢量 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ 与矢量 $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ 的和与差为矢量 $R = (r_1, r_2, r_3, r_4)^T$, 其中

$$r_i = \frac{a_i}{a_4} \pm \frac{b_i}{b_4} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.1.15)$$

$$r_4 = 1$$

(3) 两矢量 A 与 B 的数量积 (点积) 为一标量

$$A \cdot B = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) / a_4 b_4 \quad (6.1.16)$$

(4) 两矢量 A 与 B 的矢量积 (叉积) 为一矢量

$$A \times B = R = (r_1, r_2, r_3, r_4)^T \quad (6.1.17)$$

其中 $r_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$, $r_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$

$$r_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$r_4 = a_4 b_4$$

(5) 矢量 A 的长度用 $|A|$ 表示

$$|A| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{\frac{1}{2}} / |a_4| \quad (6.1.18)$$

6.2 齐次坐标的变换矩阵

在第 3 章我们已经讨论过刚体作定点转动时, 它的空间位置可以看作固连于刚体的直角坐标系 (动系) 的共原点的转动。每次转动可分解为三个连续的转动, 每个转动都可以用这个转动前后坐标系的方向余弦矩阵来描述, 因此, 刚体每次转动后的最终状态等于三个方向余弦矩阵的连乘积。

如果刚体并不是作定点转动, 而是空间的一般运动, 此时, 固连于刚体的动系因此也不做共原点的转动。在图 6-2 中, 若某点 P 在直角坐标系 $o'x'y'z'$ 中位置已知, 则 P 点在另一直角坐标系 $oxyz$ 中的位置可由下式求得

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' + r_1$$

$$y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' + r_2$$

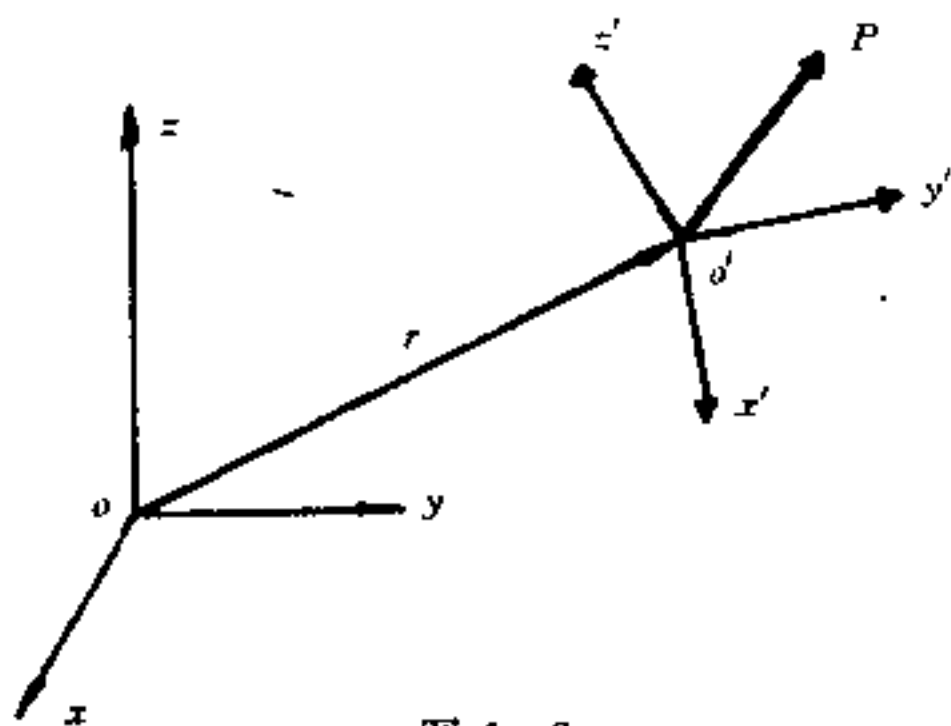


图 6-2

$$z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' + r_3 \quad (6.2.1)$$

其中, $(x', y', z')^T$ 、 $(x, y, z)^T$ 分别为 P 点在 $o'x'y'z'$ 与 $oxyz$ 坐标系中的位置, $(r_1, r_2, r_3)^T$ 为 o' 在 $oxyz$ 坐标系中的位置, $l_1, m_1, n_1, \dots, l_3, m_3, n_3$ 为 $o'x'y'z'$ 系中各轴相对 $oxyz$ 系各轴的方向余弦。

现在, 我们采用齐次坐标表示点的空间位置。设 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 为 P 点在 $oxyz$ 中的齐次坐标, 而用 $(x_1', x_2', x_3', x_4')^T$ 表示该点在 $o'x'y'z'$ 中的齐次坐标。根据齐次坐标的性质, 我们总可以令 $x_4' = x_4$, 于是, (6.2.1) 式可改写为

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 x_1' + l_2 x_2' + l_3 x_3' + r_1 x_4' \\ x_2 &= m_1 x_1' + m_2 x_2' + m_3 x_3' + r_2 x_4' \\ x_3 &= n_1 x_1' + n_2 x_2' + n_3 x_3' + r_3 x_4' \\ x_4 &= x_4' \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

上式以矩阵表示可写作

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & r_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & r_2 \\ n_1 & n_2 & n_3 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

由此可见，点在不同坐标系中的齐次坐标是以线性非奇异的变换矩阵相联系的，该矩阵记作 T ，称为齐次变换矩阵。即

$$T = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & r_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & r_2 \\ n_1 & n_2 & n_3 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.4)$$

将 T 简记为分块形式

$$T = \begin{pmatrix} L & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.5)$$

上式中， L 为 3×3 阶的方向余弦矩阵，它表示两坐标系之间的转动； R 表示坐标系原点之间的位置的列矩阵，它表示坐标系的平移。

因此，在齐次变换矩阵 T 中，包括了坐标系的平移和转动，它也可以分解为转动和平动的组合

$$T = T_r T_s \quad (6.2.6)$$

其中， T_r 为移动变换， T_s 为转动变换，写作矩阵形式为

$$T_r = \begin{pmatrix} E & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.7)$$

$$T_s = \begin{pmatrix} L & O \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.8)$$

(6.2.7) 式中， E 为 3×3 的单位矩阵。

我们将 (6.2.3) 式简记为

$$X = TX' \quad (6.2.9)$$

上式紧凑地描述了复杂空间机构的许多几何关系、运动学关系和动力学关系。

6.3 齐次变换

这一节我们将应用上一节的结果详细分析一个向量或者一个物体运动时如何进行各种形式的齐次坐标变换。

6.3.1 移动变换

相应于用某向量 $ai+bj+ck$ 表示的移动变换记作

$$T = \text{Trans}(a, b, c) \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.1)$$

对于某给定向量 $u = (x, y, z, w)^T$ ，经以上移动变换后为向量 v ，按 (6.2.9) 式，有

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + aw \\ y + bw \\ z + cw \\ w \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{x}{w} + a \\ \frac{y}{w} + b \\ \frac{z}{w} + c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.2)$$

由这一结果，可将移动变换解释为两个向量 $\left(\frac{x}{w}\right) i + \left(\frac{y}{w}\right) j + \left(\frac{z}{w}\right) k$ 与 $ai+bj+ck$ 之和。

按齐次坐标的性质，变换矩阵的每个元素可乘以一非零常数而保持变换不变。

例 6.3 一给定向量 $2i+3j+2k$ 按向量 $4i-3j+7k$ 所表示的移动变换进行的结果为

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.3)$$

今把变换矩阵乘以 (-5) ，则向量 $2i+3j+2k$ 按此变换后得到

$$\begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ -45 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.4)$$

这一结果与 (6.3.3) 式的结果实际上是同一点的向量表示。

设一平面 $\pi = (1 \ 0 \ 0 \ -2)$ ，由于

$$(1 \ 0 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.3.5)$$

说明点 $(2, 3, 2, 1)^T$ 落在 π 平面上。已知该点经上述移动变换后为点 $(6, 0, 9, 1)^T$ ，此时，可将 π 平面按上述移动变换的反向进行，即按变换

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.6)$$

移动，则变换后的 π 平面为

$$(1 \ 0 \ 0 \ -6) = (1 \ 0 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.7)$$

结果，上述新点 $(6, 0, 9, 1)^T$ 还将落在变换的 π 平面上，因为有

$$(1 \ 0 \ 0 \ -6) \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.3.8)$$

6.3.2 转动变换

如第二节所述，转动的齐次变换为

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.9)$$

如此，相应于绕 x, y, z 轴转过 θ 角的变换分别记作

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.10)$$

$$\text{Rot}(y, \theta) = \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.11)$$

$$\text{Rot}(z, \theta) = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.12)$$

例 6.4 给定向量 $u=7i+3j+2k$, 将它绕 z 轴转过 90° 为

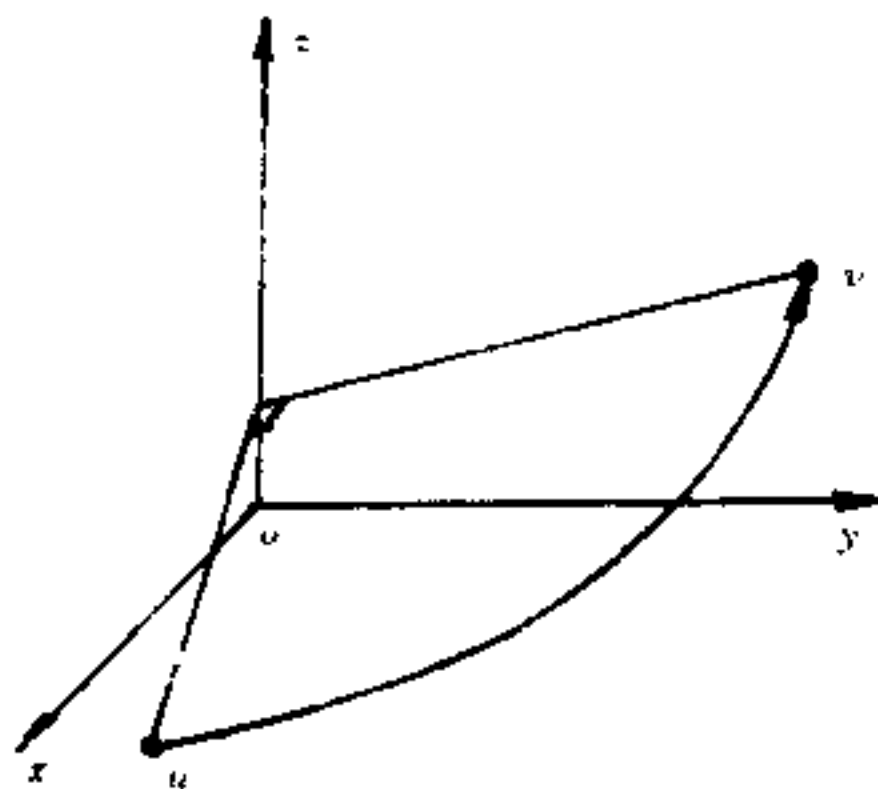


图 6-3 $\text{Rot}(z, 90^\circ)u$

向量 v , 见图 6-3。

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.13)$$

如果接着让 v 绕 y 轴转过 90° , 可以得到向量 w (图 6-4)。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.14)$$

上述两个转动分别为

$$v = \text{Rot}(z, 90^\circ)u \quad (6.3.15)$$

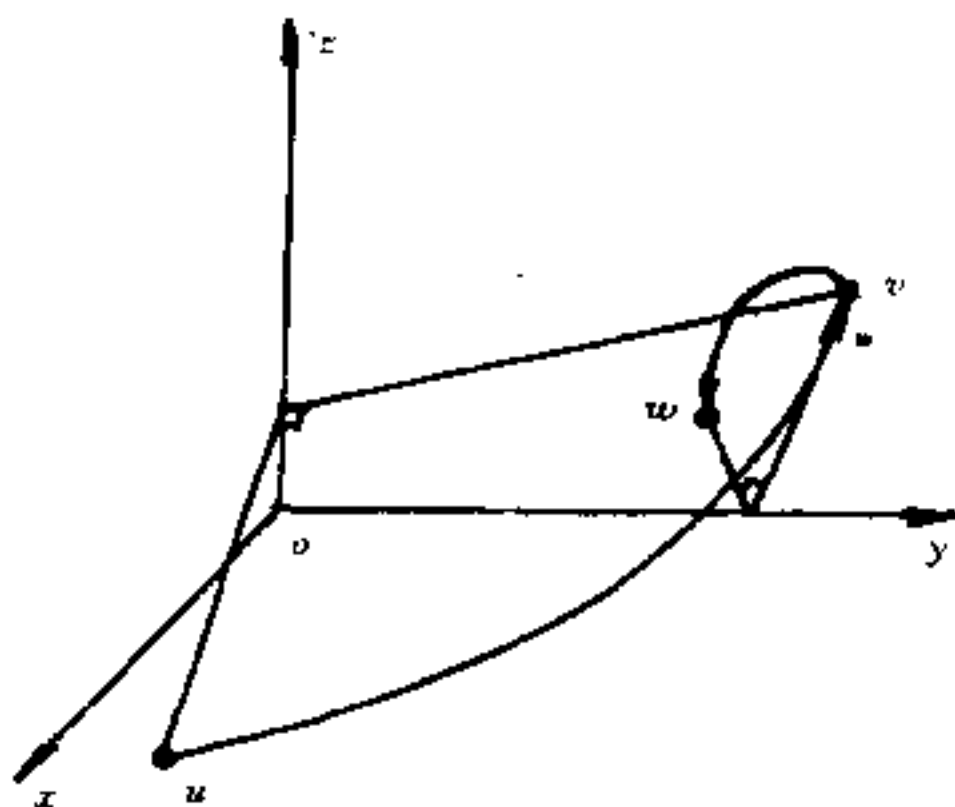


图 6-4 $\text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(z, 90^\circ) u$

和 $w = \text{Rot}(y, 90^\circ) v$ (6.3.16)

将 (6.3.15) 代入 (6.3.16) 式, 得

$$w = \text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(z, 90^\circ) u \quad (6.3.17)$$

其中

$$\begin{aligned} & \text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(z, 90^\circ) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

所以 (6.3.17) 式也可写作

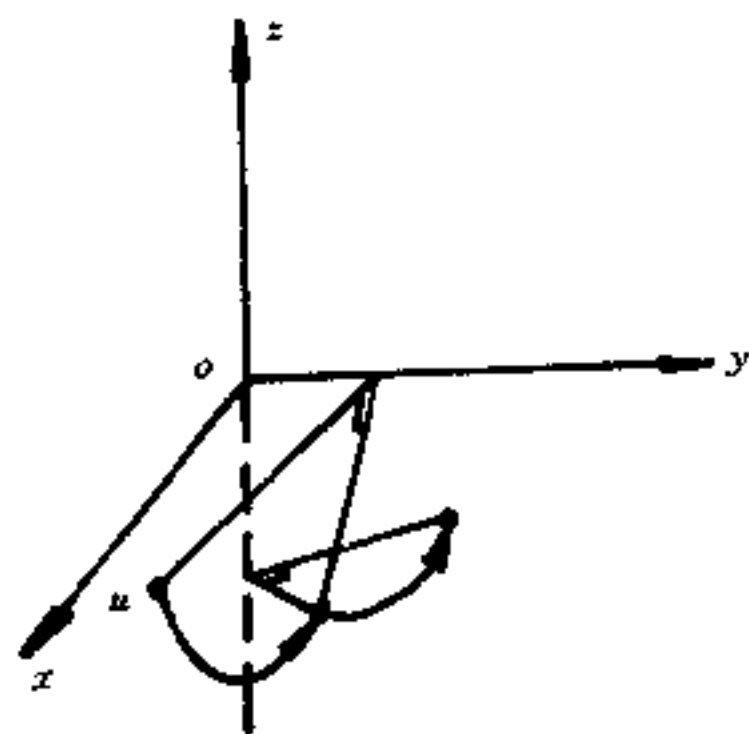
$$w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.19)$$

若将上述向量 u 变换的次序颠倒, 即先绕 y 轴转 90° , 再绕 z 轴转 90° , 结果两次转动的合成变换为

$$\begin{aligned} \text{Rot}(z, 90^\circ)\text{Rot}(y, 90^\circ) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.20) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} w &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.21) \end{aligned}$$



结果与第一种转动不同, 见图 6-5。这与第 3 章分析的相一致, 即转动结果与转动顺序有关。

图 6-5 $\text{Rot}(z, 90^\circ)\text{Rot}(y, 90^\circ)u$

6.3.3 移动与转动同时变换

如果某向量运动中既有转动也有移动, 即转动变换与移动变

换同时存在, 则总的变换 T 如 (6.2.6) 式。

例 6.5 假定例 6.4 中给定的向量 u 绕 z 轴转 90° , 再绕 y 轴转 90° , 同时, u 还按例 6.3 中给出的向量作移动变换, 求 u 的最后结果。

(解) 由 (6.2.6) 式

$$\begin{aligned}
 T &= T_1 T_2 \\
 &= \text{Trans}(4, -3, 7) \text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(z, 90^\circ) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.22)
 \end{aligned}$$

于是, u 的变换结果 (图 6-6) 为

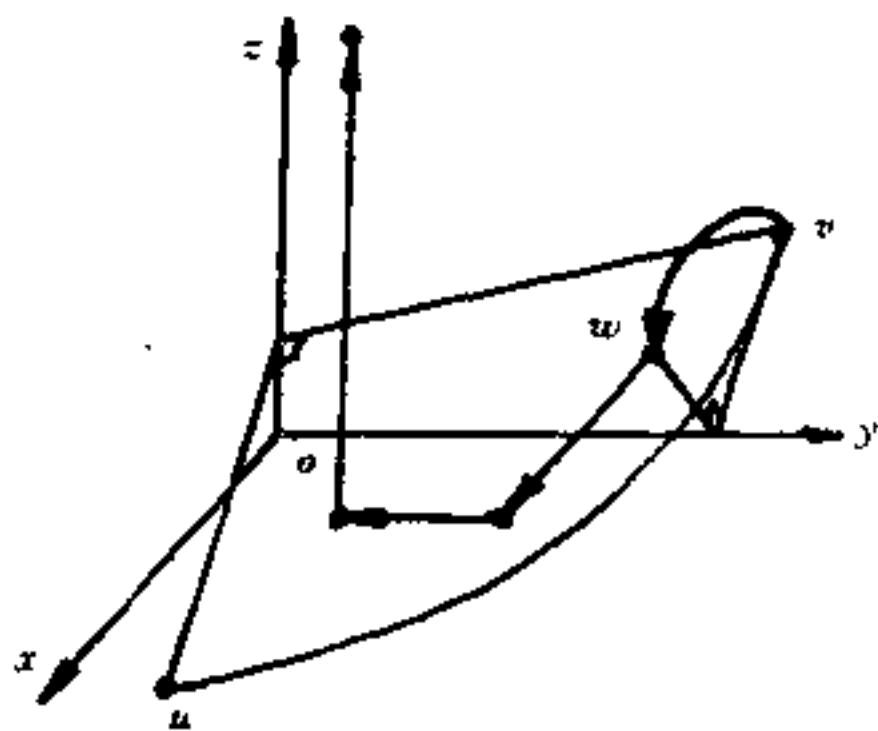


图 6-6 $\text{Trans}(4, -3, 7) \text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(z, 90^\circ)$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.23)$$

6.3.4 坐标系的变换

前面所讨论的移动变换和转动变换都是相对惯性参数即定系进行的。如例 6.5, 我们可以观察到, 按 $\text{Trans}(4, -3, 7) \text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(z, 90^\circ)$ 进行的变换时, 起初与惯性参考系重合的动坐标

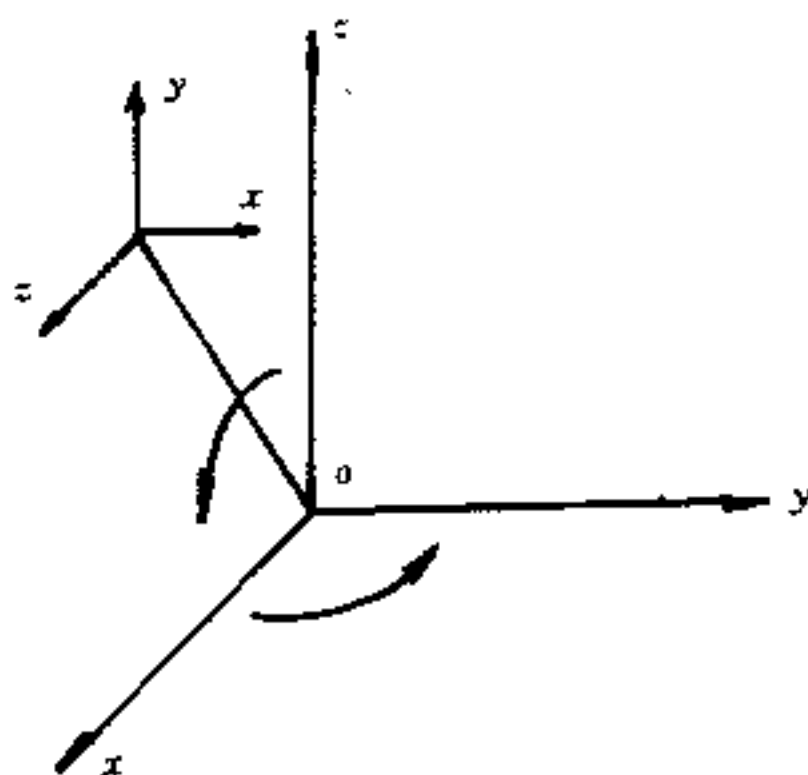


图 6-7 相对惯性系的变换

系先绕定系 z 轴旋转 90° ，再绕定系 y 轴旋转 90° ，最后沿定系 x ， y ， z 轴方向分别移动 4，-3，7 个单位，见图 6-7。

如果上述变换按反方向相对动系自身进行，即起初与定系重合的动系先沿 x ， y ， z 方向移动分别为 4，-3 和 7 个单位，接着绕动系 y 轴转 90° ，再绕动系 z 轴转 90° ，如图 6-8 所示。

比较上面两种变换可以看出，两种变换的结果是一样的，即动系最终相对定系的状态是一样的。这里所指的状态一是指动系的原点的位置即动坐标系的位置；二是指动系的姿态即动系各坐标轴与定系各轴的相对关系方向余弦。

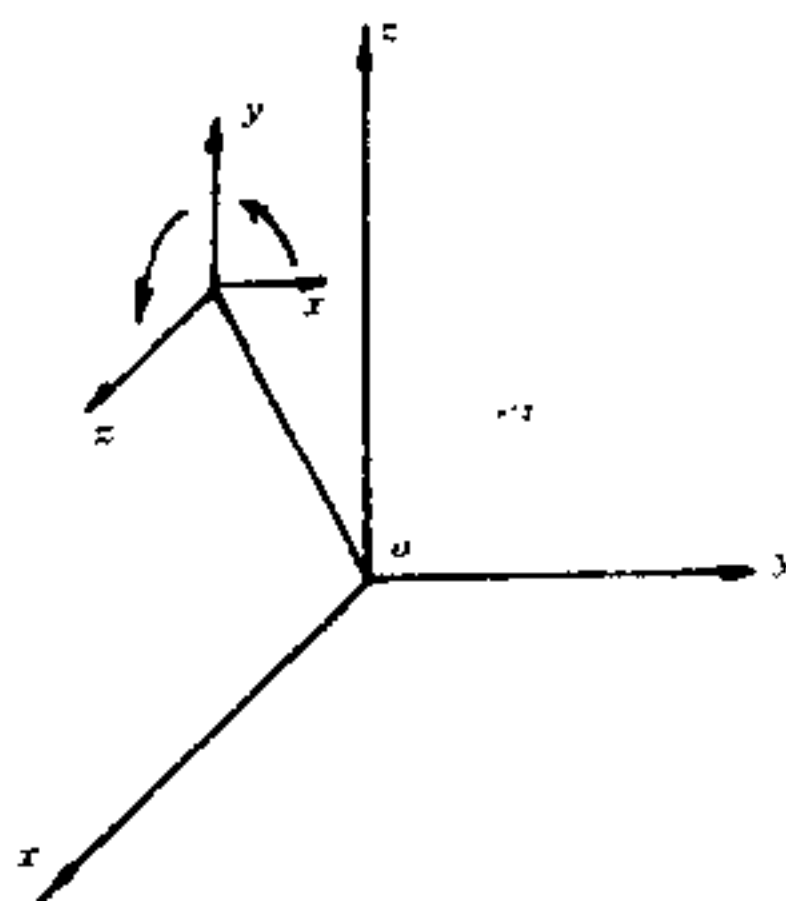


图 6-8 相对自身坐标系的变换

我们把上述两种变换的后者称为相对变换。

通常，若在一个表示坐标系的变换后面乘上移动和（或）转动的第二个变换，则这个变换是相对于第一个变换描述的动坐标系进行的移动和（或）转动；若在坐标系之前乘上一个表示移动和（或）转动的变换，该变换则是相对于惯性参考系即定系的。这两种变换的结果都是相对固定坐标系的。

例 6.6 已知某坐标系 C 在惯性系中的位置和姿态为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

今存在一个绕 z 轴转动 90° 和沿 x 轴方向移动 10 个单位长度的变换 T ，当变换相对惯性系和动系 C 时，分别计算变换后的结果。

解：根据所给变换，可求得

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.24)$$

设 C 相对惯性系进行 T 变换后为 X ，则

$$X = TC$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.25) \end{aligned}$$

当变换 T 是相对 C 系自身进行时，可得 C 系变换后的结果 Y 为

$$Y = CT$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.26)$$

以上两种变换的结果见图 6-9。

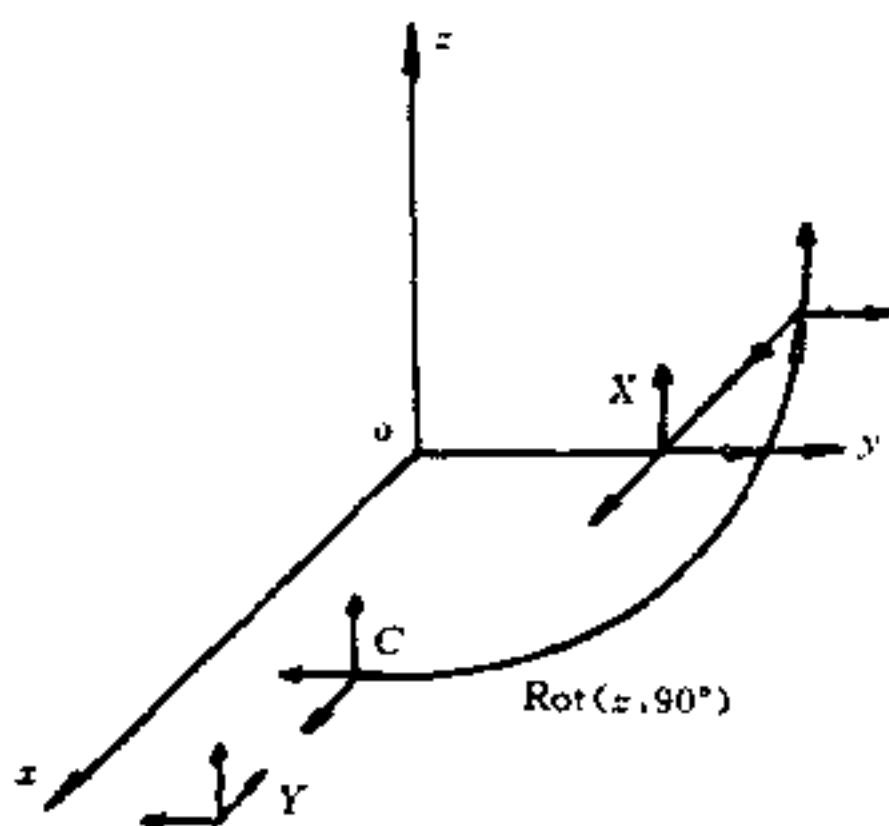


图 6-9 坐标系 C 的两种变换

6.3.5 物体的位置和姿态的变换

一运动物体在惯性参考系中的位置和姿态可以借助一个与物体固连的动坐标系相对定系的状态来描述。因为物体相对动系是固定不变的，它的位置和姿态可由其几何轮廓上某些点在动系中的坐标确定，而动系对定系的位置与姿态前面已经作了讨论。

例 6.7 如图 6-10，一个楔形体在与之固定的动系中的位置

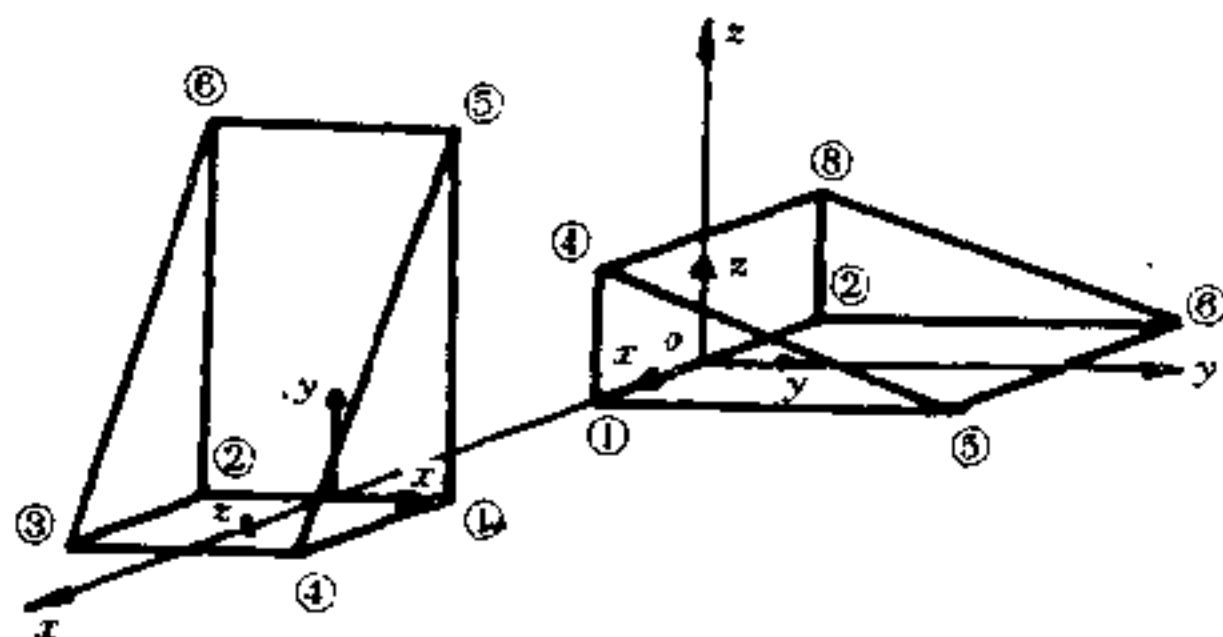


图 6-10 物体的变换

由六个点确定，写为矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B 中，每一列为各点的齐次坐标。现将该物体绕定系 z 轴转 90° ，再绕定系 y 轴转 90° ，同时沿定系 x 轴方向移动 4 个长度单位。设动系初始与定系重合，确定楔形体最终位置。

解：动系相对定系的变换为

$$T = \text{Trans}(4, 0, 0) \text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(z, 90^\circ)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.27)$$

于是，楔形体的最终位置 B' 为

$$B' = TB$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.28)
\end{aligned}$$

由图 6-10 可以看出, 楔形体对惯性参考系的位置发生了变化, 但相对自身的固定坐标系即动系却具有恒定的关系, 可见, 要描述某物体的位置和姿态只要确定动系的变换以及物体对于动系的关键几何点的尺寸和方位就可以了, 而无须变换物体上所有的点。

6.3.6 逆变换

所谓逆变换就是把已经变换了的坐标系再“复原”到原坐标系的变换。如果该坐标系初始时与惯性参考系重合, 那么逆变换也就是定系相对变换后的动坐标系的位置和姿态的简单描述。

以例 6.7 中的楔形体为例, 固定于其上的动系的变换是正变换, 它的逆变换就是将它还原到原先与定系重合的状态的变换, 而这种变换也可以用定系相对当前动系的位置与姿态来确定。从图 6-10 中可以看出, 相对当前的动系, 定系的 x 轴为 $(0, 0, 1, 0)^T$, 定系的 y 、 z 轴分别为 $(1, 0, 0, 0)^T$ 和 $(0, 1, 0, 0)^T$, 而定系原点的位置则是 $(0, 0, -4, 1)^T$, 于是, 逆为换为

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.29)$$

我们可以将 T^{-1} 与 (6.3.27) 所描述的动系的正变换相乘加以检验:

$$\begin{aligned}
 T^{-1}T_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.30)
 \end{aligned}$$

结果为一单位矩阵。说明 T^{-1} 是 T 的逆变换。

如果我们将一个变换写作下面的一般形式

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.31)$$

则其逆变换就是

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.32)$$

式中, \mathbf{n} 、 \mathbf{o} 、 \mathbf{a} 、 \mathbf{p} 为四个列向量。它们的分量分别为 T 中前三行各列。

6.3.7 一般转动变换

前面所讨论的转动均是绕坐标轴 (不管是定系还是动系) 的转动, 因此相应的坐标变换都有一个简单的几何解析。例如绕 z 轴转动时表示位姿矩阵中 z 轴那一系列的元素将保持不变等等。

假如转动不是绕坐标轴而是绕过坐标系原点的任一轴转动, 我们称之为一般转动。一般转动变换将讨论任意一动系统过定系原点的任意向量 Q 转动的变换矩阵。如图 6-11, 我们不妨假设 Q 为某个坐标系 C 的 z 轴的单位向量。这样假设的目的是可以利用

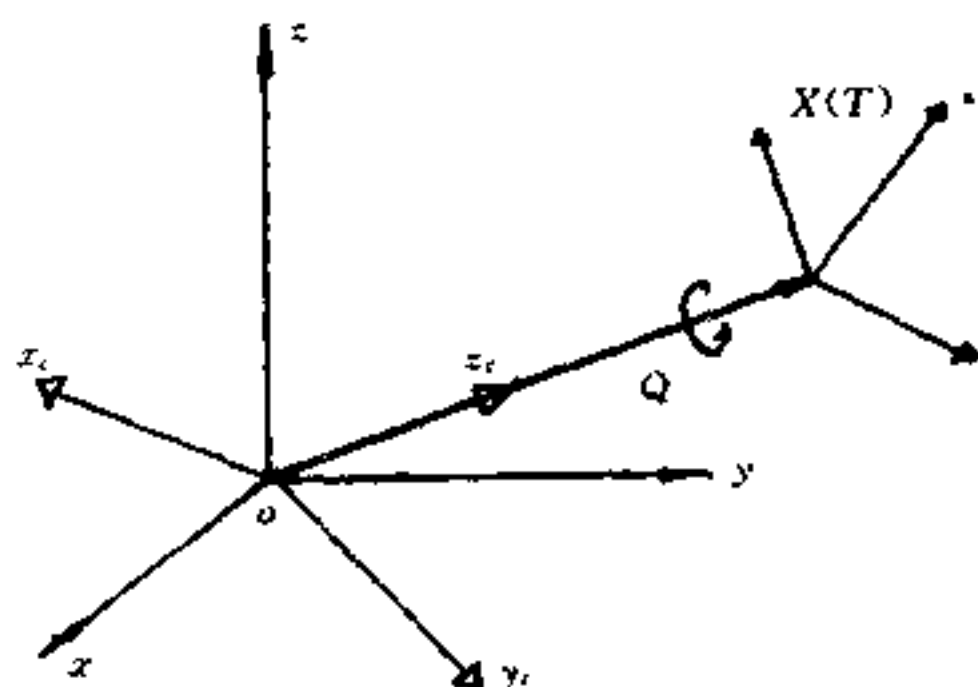


图 6-11 一般转动变换

前面分析的结果。将 C 写作一般齐次坐标形式

$$C = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.33)$$

按上述假设，有

$$Q = a_x i + a_y j + a_z k \quad (6.3.34)$$

式中， i, j, k 分别为 C 坐标系三轴单位向量。于是，一动系 X 绕 Q 转动相当于绕 C 系的 z 轴转动，即有

$$\text{Rot}(Q, \theta) = \text{Rot}(z, \theta) \quad (6.3.35)$$

动系 X 是相对惯性参考系的，但我们可以利用相对变换原理找到它相对 C 坐标系的空间关系。

$$\text{令} \quad X = CT \quad (6.3.36)$$

则 T 描述了 X 相对 C 的位置和姿态

于是有

$$T = C^{-1}X \quad (6.3.37)$$

因此， X 系统绕惯性系 Q 轴的转动等于 T 绕 C 系 z 轴的转动再前乘 C 相对惯性系的变换。这里， T 表示的仅是 X 在 C 中的状态， T

绕 C 系 z 轴转动的结果仅是相对 C 的。

如此可得

$$\text{Rot}(Q, \theta)X = C\text{Rot}(z, \theta)T \quad (6.3.38)$$

将 (6.3.37) 式代入得

$$\text{Rot}(Q, \theta)X = C\text{Rot}(z, \theta)C^{-1}X \quad (6.3.39)$$

即

$$\text{Rot}(Q, \theta) = C\text{Rot}(z, \theta)C^{-1} \quad (6.3.40)$$

因为在 (6.3.40) 式中,

$$\begin{aligned} \text{Rot}(z, \theta)C^{-1} &= \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_x c\theta - o_x s\theta & n_y c\theta - o_y s\theta & n_z c\theta - o_z s\theta & 0 \\ n_x s\theta + o_x c\theta & n_y s\theta + o_y c\theta & n_z s\theta + o_z c\theta & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.3.41)$$

若按 (6.3.40) 式将上式左乘 C 将得到复杂的表达式。为此, 我们利用以下关系对该结果进行简化

(1) 由于 C 为正交矩阵, 其任一行 (列) 与另一行 (列) 的点积为零;

(2) C 中任一行 (列) 为单位向量, 内积为 1;

(3) 由于 $a = n \times o$, 故有

$$a_x = n_y o_z - n_z o_y$$

$$a_y = n_z o_x - n_x o_z$$

$$a_z = n_x o_y - n_y o_x$$

(4) 已知 $Q_x = a_x$, $Q_y = a_y$, $Q_z = a_z$

(5) 令 $\text{vers}\theta = \text{versin}\theta = (1 - \cos\theta)$

于是, 将 (6.3.41) 式左乘 C , 经简化后可得一般转动变换结果如

下

$$\text{Rot}(Q, \theta) = \begin{pmatrix} Q_x^2 \text{vers} \theta + c\theta & Q_y Q_x \text{vers} \theta - Q_z s\theta & Q_x Q_y \text{vers} \theta + Q_z s\theta & 0 \\ Q_x Q_y \text{vers} \theta + Q_z s\theta & Q_y^2 \text{vers} \theta + c\theta & Q_y Q_z \text{vers} \theta - Q_x s\theta & 0 \\ Q_x Q_z \text{vers} \theta - Q_y s\theta & Q_y Q_z \text{vers} \theta + Q_x s\theta & Q_z^2 \text{vers} \theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.42)$$

从这个一般转动变换中可以求得每一个基本转动变换，例如 $\text{Rot}(x, \theta)$ 是当 $Q_x = 1$ 而 $Q_y = Q_z = 0$ 时的 $\text{Rot}(Q, \theta)$ ，代入上式可得

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

结果与前面讨论的一样。

6.3.8 等效的旋转轴和旋转角

对于任意一个给定的转动变换，它可能是经过若干次有限转动、即若干次转动变换后总的变换结果，如果将这个转动的合成视为一次转动的结果，则这一次转动的转角和转轴称为等效转角和转轴。

等效转轴和转角的确定可以直接利用式 (6.3.42) 的结果。设某给定的转动的最后结果已知为 R

$$R = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.43)$$

$$\text{令} \quad R = \text{Rot}(Q, \theta) \quad (6.3.44)$$

代入 (6.3.42) 式, 利用矩阵相对的性质将主对角线元素相加可得

$$n_x + o_y + a_z + 1 = Q_x^2 \text{vers} \theta + Q_y^2 \text{vers} \theta + Q_z^2 \text{vers} \theta + 3 \cos \theta + 1 \quad (6.3.45)$$

于是得

$$n_x + o_y + a_z = 1 + 2 \cos \theta \quad (6.3.46)$$

即有

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (n_x + o_y + a_z - 1) \quad (6.3.47)$$

将 (6.3.44) 式对角线两边元素对称相减, 得到

$$o_z - a_y = 2Q_x \sin \theta \quad (6.3.48)$$

$$a_x - n_z = 2Q_y \sin \theta \quad (6.3.49)$$

$$n_y - o_x = 2Q_z \sin \theta \quad (6.3.50)$$

上三式分别平方再求和有

$$(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2 = 4 \sin^2 \theta \quad (6.3.51)$$

于是可求得

$$\sin \theta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2} \quad (6.3.52)$$

如果规定 $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, 则 $\sin \theta$ 可以取正号, 于是等效旋转角 θ 可唯一确定

$$\text{tg} \theta = \frac{\sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}}{n_x + o_y + a_z - 1} \quad (6.3.53)$$

等效旋转轴 Q 可由 (6.3.48) 至 (6.3.50) 式计算

$$Q_x = (o_z - a_y) / 2 \sin \theta \quad (6.3.54)$$

$$Q_y = (a_x - n_z) / 2 \sin \theta \quad (6.3.55)$$

$$Q_z = (n_y - o_x) / 2 \sin \theta \quad (6.3.56)$$

但是,当旋转角 θ 非常小时,上三式右边的分子、分母都很小,为准确确定旋转轴带来困难,而且所求向量 Q 应重新标准化,以保证 $|Q|=1$ 。当 θ 接近 180° 时,以上三式中同样出现分子、分母均很小的情况, Q 同样不易准定,而且在 $\theta=180^\circ$ 时,则出现 ∞ 形式,使得实际意义明确的旋转轴 Q 得不到任何信息。

在 $\theta > 90^\circ$ 时,我们可以采用另外一种方法而不是由 (6.3.54) 至 (6.3.56) 式来确定 Q 。由 (6.3.44) 式,利用对角线元素对应相等,可以得到以下三式

$$Q_x^2 \text{vers} \theta + \cos \theta = n_x \quad (6.3.57)$$

$$Q_y^2 \text{vers} \theta + \cos \theta = o_y \quad (6.3.58)$$

$$Q_z^2 \text{vers} \theta + \cos \theta = a_z \quad (6.3.59)$$

于是有

$$Q_x = \pm \sqrt{\frac{n_x - \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \quad (6.3.60)$$

$$Q_y = \pm \sqrt{\frac{o_y - \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \quad (6.3.61)$$

$$Q_z = \pm \sqrt{\frac{a_z - \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \quad (6.3.62)$$

由于 $\theta > 90^\circ$, $\cos \theta < 0$, 所以由以上三式可知, Q 的最大分量是与 n_x , o_y , a_z 中最大的正值对应,而正、负号可由 (6.3.48) 至 (6.3.50) 式确定,因为在这三个式子中, $\sin \theta > 0$ 。这样,综合考虑 (6.3.60) 至 (6.3.62) 与 (6.3.48) 至 (6.3.50),可得 Q 轴的确定写为如下形式

$$Q_x = \text{Sign}(o_x - a_y) \sqrt{\frac{n_x - \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \quad (6.3.63)$$

$$Q_y = \text{Sign}(a_z - n_x) \sqrt{\frac{o_y - \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \quad (6.3.64)$$

$$Q_x = \text{Sign}(n_y - o_z) \sqrt{\frac{a_z - \cos\theta}{1 - \cos\theta}} \quad (6.3.65)$$

式中, $\text{Sign}(e)$ 为符号函数, 在算法语言中写作标准函数 $\text{SGN}(e)$, 它的意义是: 若 $e > 0$, 则 $\text{Sign}(e) = 1$, 若 $e = 0$, 则 $\text{Sign}(e) = 0$; 若 $e < 0$, 则 $\text{Sign}(e) = -1$ 。

但是, 如前所述, (6.3.63) 至 (6.3.65) 式仅用于由 n_x , o_y 和 a_z 中的最大值来确定 Q 的最大分量, Q 的另外两个分量则可利用式 (6.3.44) 中矩阵对角线两边相对称的元素相加所形成的下列式子中的两个确定

$$n_y + o_x = 2Q_x Q_y \text{vers}\theta \quad (6.3.66)$$

$$o_z + a_y = 2Q_y Q_z \text{vers}\theta \quad (6.3.67)$$

$$a_x + n_z = 2Q_x Q_z \text{vers}\theta \quad (6.3.68)$$

如果 Q_x 最大, 则由 (6.3.66) 和 (6.3.68) 式得

$$Q_y = \frac{n_y + o_x}{2Q_x \text{vers}\theta} \quad (6.3.69)$$

$$Q_z = \frac{a_x + n_z}{2Q_x \text{vers}\theta} \quad (6.3.70)$$

同理如果 Q_y 最大, 则由 (6.3.66) 和 (6.3.67) 确定 Q_x 和 Q_z 以及如果 Q_z 最大, 可由 (6.3.67) 和 (6.3.68) 式确定 Q_y 和 Q_x 。

例 6.8 确定变换 $\text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(x, 90^\circ)$ 的等效旋转角和等效旋转轴。

解:

$$\begin{aligned} R &= \text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(x, 90^\circ) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.3.71)$$

由 (6.3.47) 式

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(0 + 0 + 0 - 1)$$

$$= -\frac{1}{2} \quad (6.3.72)$$

再由 (6.3.52) 式

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{1}{2} \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \end{aligned} \quad (6.3.73)$$

于是得

$$\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3} \quad (6.3.74)$$

这样, 等效旋转角为

$$\theta = 120^\circ \quad (6.3.75)$$

下面由 n_x , a_y 和 a_z 确定 Q 的最大分量。由于这个例子中 n_x , a_y 和 a_z 均相等, 且等于零, 因此可任意先求 Q 的一个分量, 由 (6.3.63) 式

$$Q_x = + \sqrt{(0 + \frac{1}{2}) / (1 + \frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (6.3.76)$$

再由 (6.3.69) 和 (6.3.70) 两式求得

$$Q_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (6.3.77)$$

和

$$Q_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (6.3.78)$$

综合上述, 有

$$\operatorname{Rot}(y, 90^\circ) \operatorname{Rot}(z, 90^\circ) = \operatorname{rot}(Q, 120^\circ) \quad (6.3.79)$$

其中

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \quad (6.3.80)$$

习 题 6

6.1 试判断点 $P_1 = (2 \ 4 \ -6 \ -2)^T$, $P_2 = (0 \ 0 \ 8 \ -8)^T$, $P_3 = (100 \ 100 \ -100 \ 50)^T$ 与平面 $N = (-3 \ -3 \ -3 \ 3)$ 的关系, 并绘图说明。

6.2 设空间中一点 $P = 3i - 2j + 6k$, 试求它经过以下几种变换后的位置, 并绘图说明变换过程:

(1) $T = \text{Trans}(-1, 4, -4)$;

(2) $T = \text{Trans}(-1, 4, -4) \text{Rot}(z, 90^\circ)$

(3) $T = \text{Trans}(-1, 4, -4) \text{Rot}(z, 90^\circ) \text{Rot}(y, 90^\circ)$

6.3 上题中, 如果在点 P 建立一动坐标系, 开始时与定系姿态相同, 但是三种变换都是相对动系的, 结果将如何?

6.4 设动系 $oxyz$ (j 系) 与定系 $o\xi\eta\zeta$ (i 系) 开始时重合, 若 j 系绕 i 系 ζ 轴转 30° , 然后沿 ξ 轴移动 4 个单位长, 再沿 η 轴移动 3 个单位长, 求 T , 及其逆变换 T^{-1} 。

6.5 试确定 $\text{Rot}(x, -90^\circ) \text{Rot}(y, 90^\circ)$ 的等效旋转角及等效旋转轴。

6.6 试用高级语言编写确定变换 $T = T_1 T_2$ 的计算机程序, 其中 T_2 由绕三个坐标轴的转动合成。并用所编程序给出题 6.2 的结果。

7 机器人运动学

机器人作为典型的机电一体化产品,在发达国家已得到广泛的应用。它的出现,使得人类的生产方式从手工作业、机械化作业进入了自动化、智能化的时代。它不但极大地提高了劳动生产率,而且也大大提高了工作的可靠性和产品质量。机器人集中了自动机械设计技术、计算技术、传感技术以及控制技术于一身,因此,机器人技术是一门综合性技术,是现代高新技术的缩影。

避开机器人的挠性问题,它就是一种典型的多刚体系统。分析机器人的运动学和动力学规律并研究相应的算法是机器人技术的重要组成部分。前面几章将作为这一分析和研究的基础。

操作机器人作为使生产及研究活动自动化的工具有以下特点:不仅机器人的执行机构是构成保证复杂运动的空间机构的一些刚体的综合体,而且机器人本身通常是在这样一种场合下工作,即一些刚体在其机械加工、喷漆、焊接以及装配过程中,需要以单个零件或组件形式作移运的场合工作。因此,机器人操作手的研究涉及到物体之间以及物体与操作手之间的关系,从而各类坐标系、齐次坐标及其变换被广泛地用于机器人的运动学和动力学分析。

7.1 机器人的结构形式与坐标系统

目前,世界各国所研制的工业机器人或机器人操作手在基本的结构形式上并无多大差别,它们都是由基体、连杆、关节以及终端作用器等部分组成。各部分在空间的位置和姿态由平动和转动组成。图 7-1 为一六杆(六关节)机械手的结构示意图。

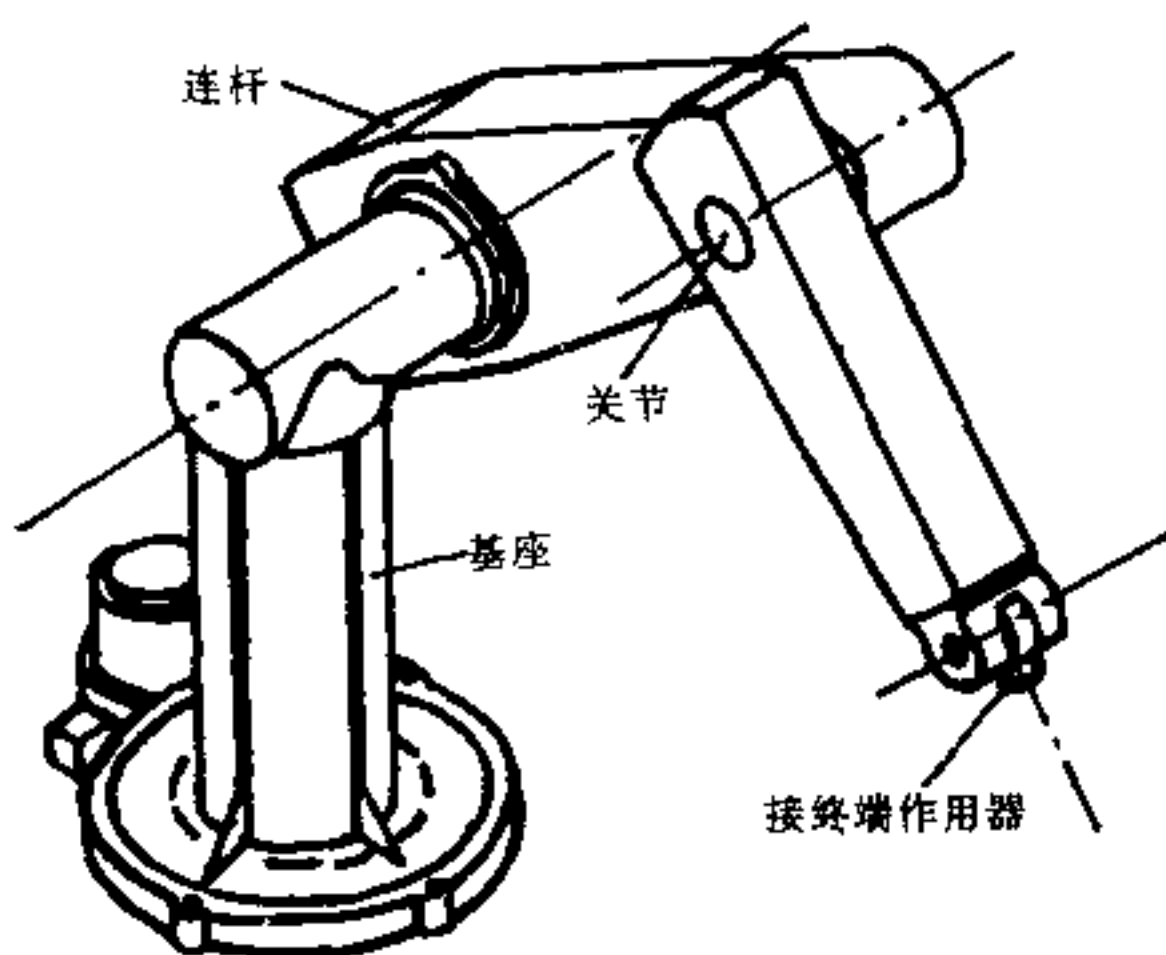


图 7-1 六杆机械手结构

机器人的任务及结构形式决定了空间坐标系的应用是研究机器人运动学的关键,现有的工业机器人的坐标系统按其运动及几何特性可分为四类(图 7-2)。

- (1) 笛卡尔直角坐标系(三个直线轴);
- (2) 圆柱坐标系(两个直线轴,一个旋转轴);
- (3) 球坐标系或极坐标系(一个直线轴、两个旋转轴);
- (4) 全旋转坐标系(全为旋转轴)。

因为我们所讨论的机器人是多刚体系统中的“有根树”,即其基座的运动状态是已知的,因此,我们将把固定于机器人基座上的坐标系(x_0, y_0, z_0)视为定参考系以方便运动学分析。固定于机器人其他构件上的坐标系(x_i, y_i, z_i)我们称之为附体坐标系,或称为杆坐标系,因为机器人的结构,除了基座之外,均称为连杆。它们都是动坐标系。机器人终端作用器或手部的坐标系有专门的规定,该坐标系也是动系,于是,机器人运动学所涉及的问题将是终端作用器即工作部分的坐标系相对机器人其他构件和基座坐标系之间以

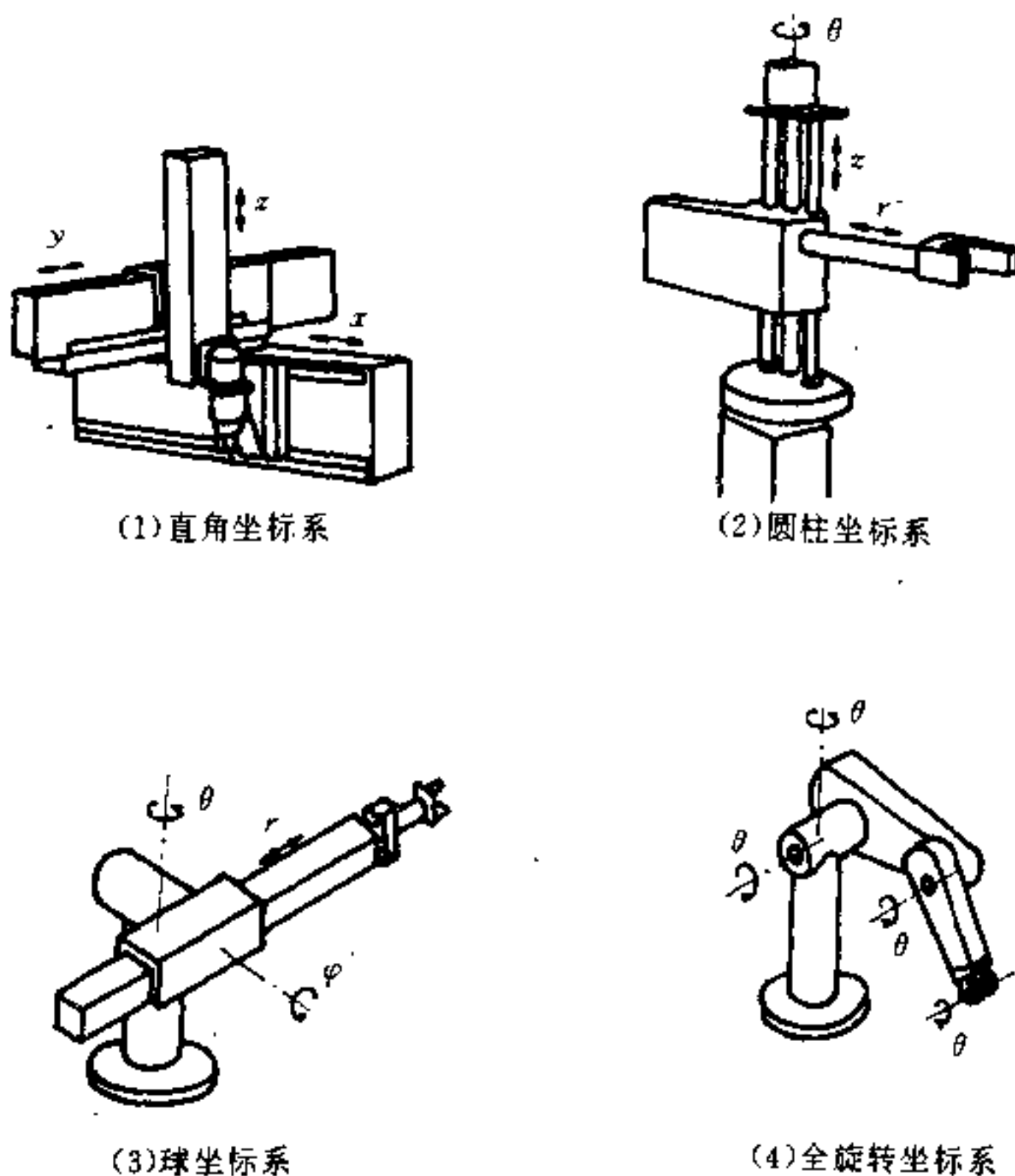


图 7-2 机器人坐标系统

及各构件的坐标系之间的几何运动、速度、加速度的变换关系。这种变换不涉及到引起运动的力或力矩。

机器人的运动学问题可以分为两类：

(1) 运动学正问题。该问题讨论的是已知机器人各关节的平动和转动，求终端作用器相对于基座坐标系(定系)的位置和姿态。

(2) 运动学逆问题。该问题要讨论的是给定了终端作用器相对于基座坐标系的位置和姿态，计算出各种可能的各关节的运动。

由于运动学方程的非线性,逆问题的求解一般来讲是比较困难的,甚至不可能以封闭的形式出现,所求的解往往不是唯一的。运动学解的存在或非存在规定了给定操作器的工作空间,没有解就意味着操作手不能达到所要求的位置和方位。

7.2 机械手系统变换方程和变换图

对机器人进行运动学分析时,首先要在机器人各构件上建立其附体坐标系,而后应用第七章中介绍的齐次坐标及其变换分析各坐标系之间的空间关系。考虑图 7-3 所示的情况,对于机械手系统,假如基座相对惯性参考系用一变换 Z 定位,操作手的终端相对基座用 ZT_6 表示,而终端夹持器(工具)用 T_6E 描述,这是通过机械手系统的描述。另一方面,工作对象(物块)相对惯性参考系用 B 定位,而操作手夹持器也可用其相对物块的变换 BG 来定位,这是通过工作对象的描述。因此,对机械手终端夹持器来讲,存在两

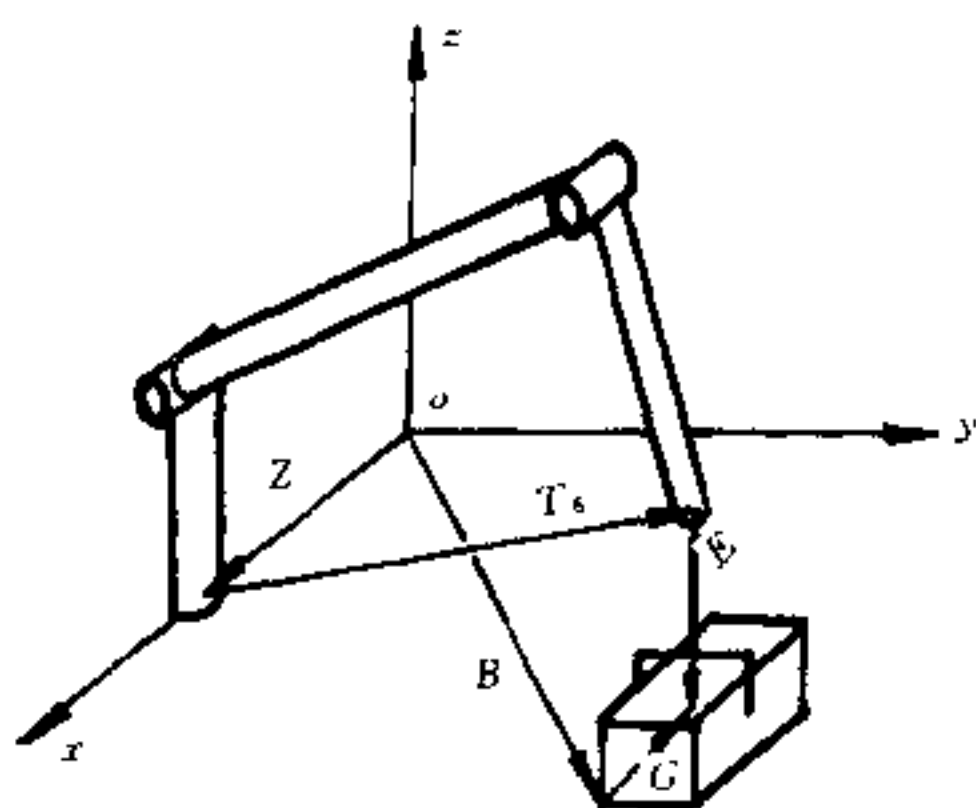


图 7-3 机械手的系统变换

种描述方式,一是相对物体,一是相对操作手基座,其最终都是描述在惯性参考系中的同一位姿,实际上,这种描述可能有多种方式存在。

由以上分析,可以得到总体变换关系

$$Z^Z T_6^T E = B^B G \quad (7.2.1)$$

上式称为变换方程。这种等式也可以用指向变换图表示,在图 7-4 中,每段箭头表示一个变换,它的指向是从所定义坐标系出发的,利用变换图求其中某个变换时,可以从所要求的变换始端开始沿回路到它的终端,若与某段反向则为逆变换。

例如要求变换 T_6 ,可以由

(7.2.1)式直接进行矩阵运算

$$Z^{-1} Z^Z T_6^T E^T E^{-1} = Z^{-1} B^B G^T E^{-1} \quad (7.2.2)$$

于是得

$$T_6 = Z^{-1} B^B G^T E^{-1} \quad (7.2.3)$$

上式也可以由变换图得到,即先经过 Z 的逆变换,再经过变换 $B^B G$,最后经过 $E^T E$ 的逆变换得到。

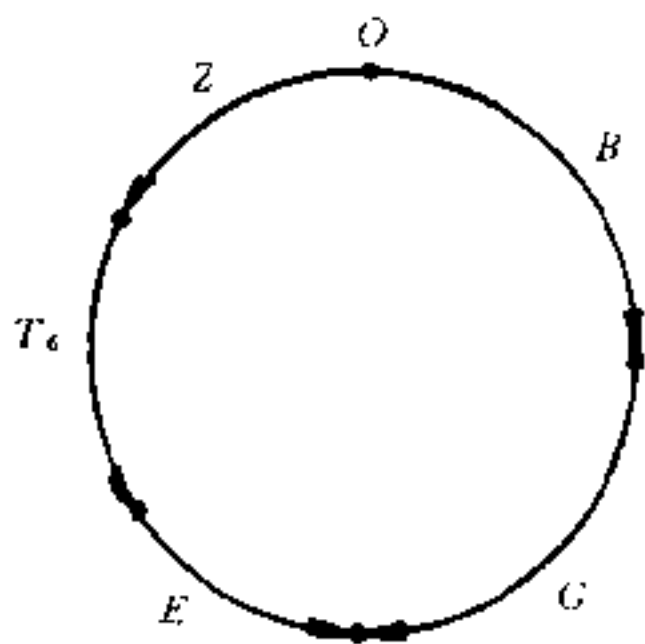


图 7-4 总变换图

再如,若把物块的位置视为未知,由(7.2.1)式可得

$$B = Z^Z T_6^T E^B G^{-1} \quad (7.2.4)$$

在变换图中,由 B 的始端开始,至 B 的终端,同样可以得到上面的结果。

在以上分析中,由于所给的每个变换关系是确定的,为了书写上的方便、简洁,也可以把每个变换左上角的符号省略,例如(7.2.4)式可以写作

$$B = Z T_6 E G^{-1} \quad (7.2.5)$$

等等。在本书以后的内容中不再说明。

利用变换方程和变换图还可以求出一组连续变换,例如

$$ZT_6 = BGE^{-1} \quad (7.2.6)$$

等。

图 7-4 也可以换成图 7-5 的形式。

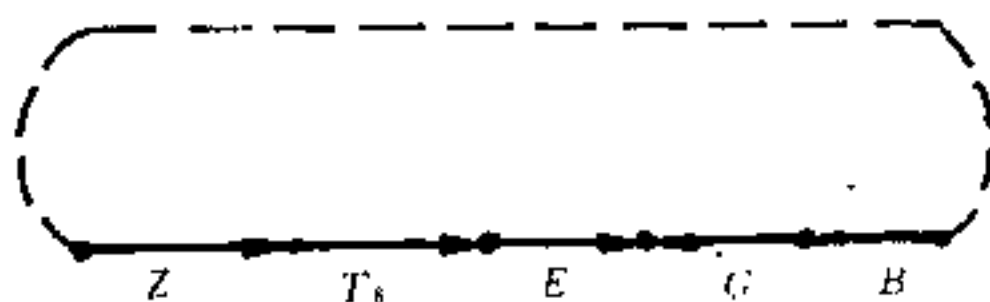


图 7-5 总变换图

例 7.1 如图 7-6 所示,设 $oxyz$ 为惯性参考系,已知变换 Z 、 T_6 、 E 、 B 和 G 中的位置分别为 $(a \ 0 \ 0 \ 1)^T$ 、 $(o \ b \ c \ 1)^T$ 、 $(0 \ 0 \ -d \ 1)^T$ 、 $(e \ f \ 0 \ 1)^T$ 和 $(h_1 \ h_2 \ h_3 \ 1)^T$,假设各变换的姿态均相同,求 h_1 、 h_2 和 h_3 。

解:由变换方程(7.2.1),求得

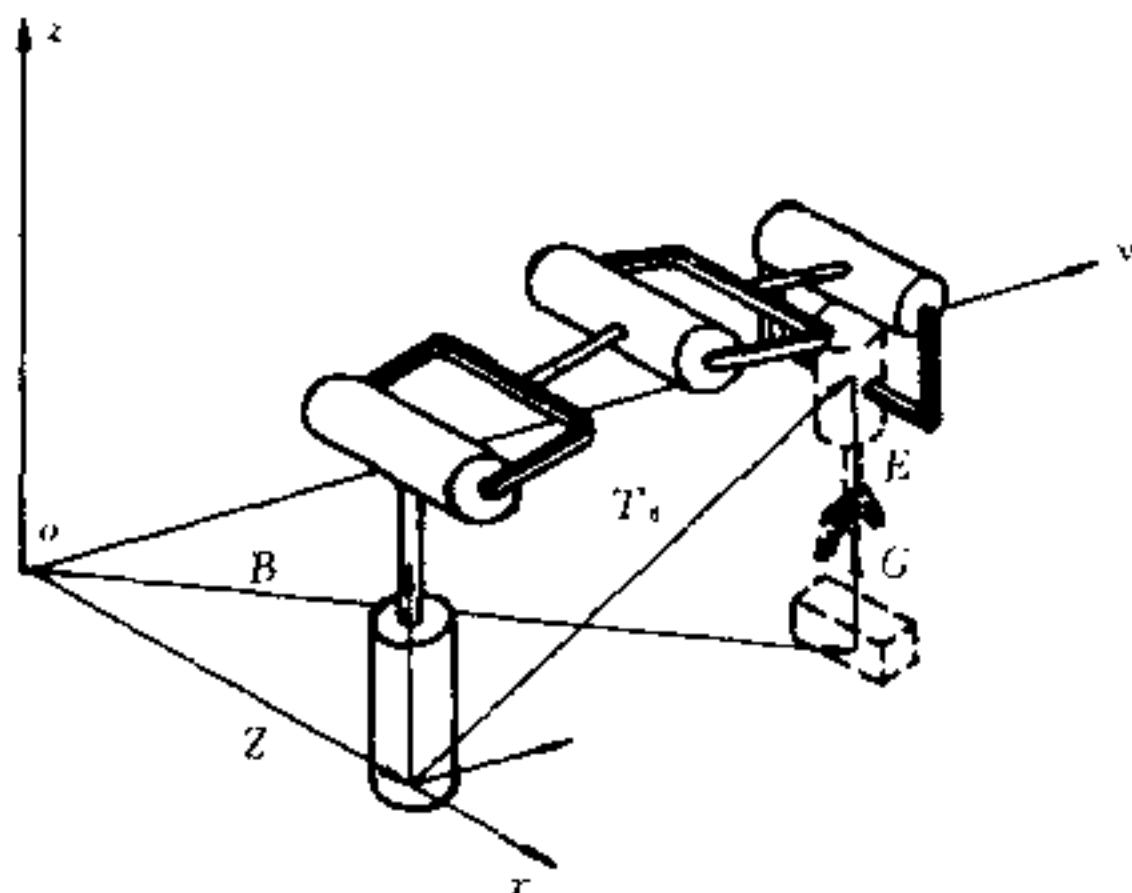


图 7-6

$$\begin{aligned}
G &= B^{-1} Z T_6 E \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 1 & 0 & -f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a-e \\ 0 & 1 & 0 & b-f \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.7)
\end{aligned}$$

于是,由 $(h_1 \ h_2 \ h_3 \ 1)^T = (a-e \ b-f \ c-d \ 1)^T$ 可求得

$$h_1 = a - e, \quad h_2 = b - f, \quad h_3 = c - d \quad (7.2.8)$$

其中, B^{-1} 由式(6.3.32)求得。

7.3 机器人运动学方程

7.3.1 运动副

设两个刚体 I 和 J 的附体坐标系相对于基座坐标系的位姿分别为 T_i 和 T_j , 根据坐标系之间的齐次变换, 它们之间存在关系

$$T_i = T_j {}^j A_i \quad (7.3.1)$$

式中, 4×4 阶矩阵 ${}^j A_i = T_j^{-1} T_i$ 描述于 T_i 相对 T_j 的位姿。它具有与第六章定义的齐次变换矩阵 T 相同的结构形式, 即

$${}^j A_i = \begin{pmatrix} L & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.3.2)$$

其中, L 为 3×3 阶子块, 是由构件 J 和 I 的附体坐标系的方向余弦组成, 子块 R 决定了坐标系原点在 J 坐标系中的位置。

如果构件 I 与 J 在空间中彼此独立地运动, 则矩阵 ${}^j A_i$ 取决于六个独立参数, 具有六个自由度, 即

$${}^I A_i = {}^I A_i(p_1, p_2, \dots, p_k) \quad (7.3.3)$$

而当 I 与 J 组成运动副后, 加在运动副每个构件相对运动上的约束条件数在 1 到 5 的范围内, 换言之, 其完整约束方程为

$$f_s(p_1, \dots, p_k) = 0 \quad (s = 1, \dots, k; 1 \leq k \leq 5) \quad (7.3.4)$$

k 为约束方程数。因此, 决定构件 I 与 J 的相对位置, 亦即决定矩阵 ${}^I A_i$ 的独立参数的个数就减为 $b-k$ 。在一般情况下, 对于 k 类运动副, 有

$${}^I A_i = {}^I A_i(p_1, \dots, p_{b-k}) \quad (1 \leq k \leq 5) \quad (7.3.5)$$

假如约束方程数为 6, 显然构件之间失去了相对活动度, 运动副实际上成了两构件的刚性联接, ${}^I A_i$ 成了常矩阵。在操作机器人执行机构中, 最普遍的是采用五类运动副, 每对构件之间只有一个自由度, 每一个关节仅实现一个相对运动, 或者是相对移动, 或者是相对转动。我们只讨论五类运动副。

图 7-7 为常见的运动副联结(关节)的形式。

在对机器人操作手进行运动学分析时, 因为它是一个复杂的多刚体系统, 自由度较多, 因此, 应对各个构件及各个关节进行编号。一般的规定是, 将机器人的基座编为 0 号, 然后从与基座相连的杆件开始到终端作用器, 依顺序编为 1, 2, \dots , N 号, 相应地, 1 杆与基座间的关节为 1 关节, 2 杆与 1 杆之间为 2 关节, \dots 。按这样的规定, 第 i 杆不仅与第 $i-1$ 杆, 而且与第 $i+1$ 杆均组成运动副。按 (7.3.1) 式, 它们之间的变换关系由逆推公式给出

$$T_i = T_{i-1}^{-1} A_i(q_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (7.3.6)$$

式中, q_i 为广义坐标, 它表示五类运动副 I 相对 J 的位移。由于 ${}^{i-1} A_i$ 的特定含义, (7.3.6) 式可记为

$$T_i = T_{i-1} A_i(q_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (7.3.7)$$

综上所述, 若有 A_1 描述第一杆相对基座的位姿, 用 A_2 描述第二杆相对第一杆的位姿, 则第二杆相对基座的位置和姿态 (T_2) 可由下面的矩阵乘积给出

$$T_2 = A_1 A_2 \quad (7.3.8)$$

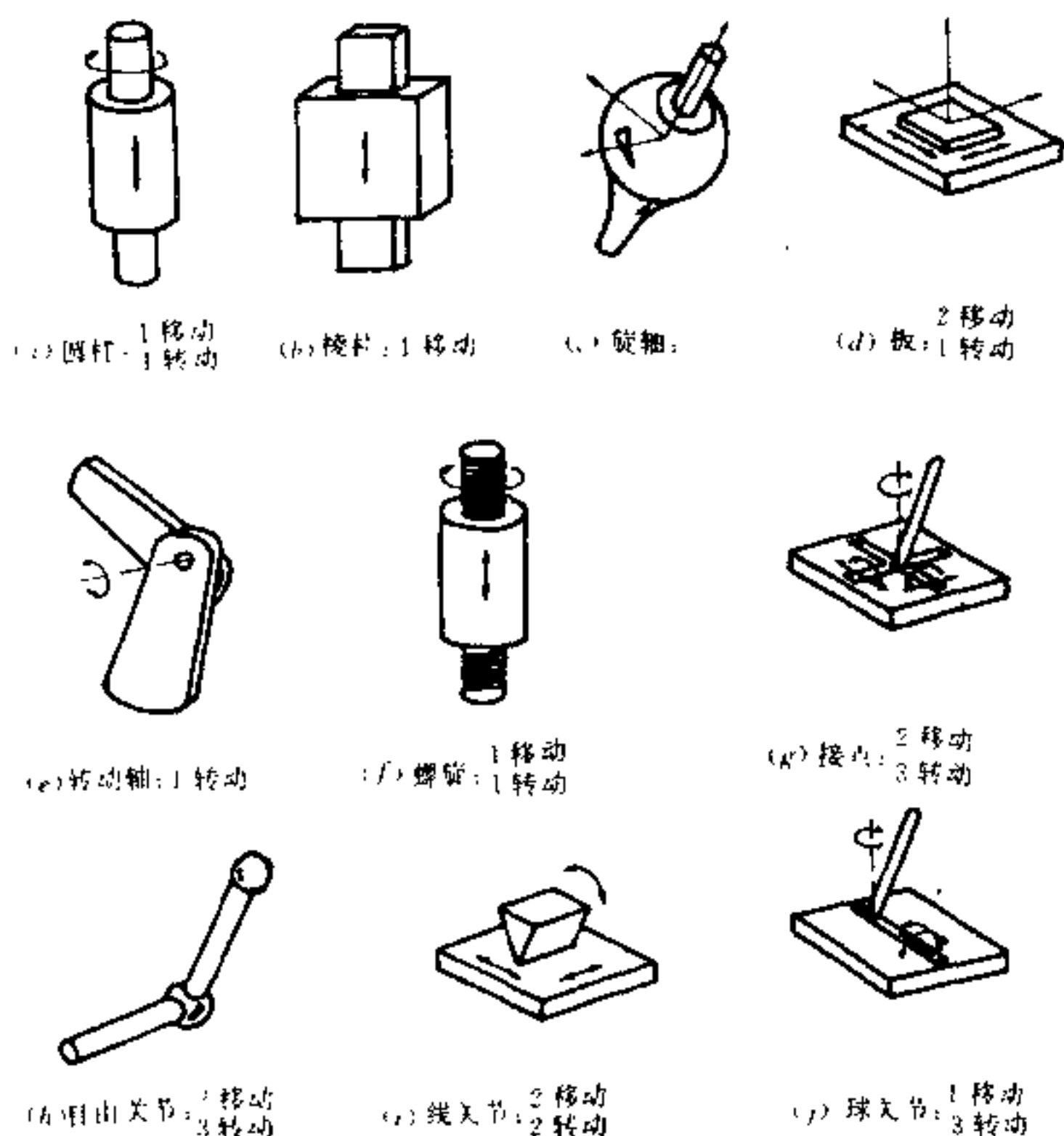


图 7-7 常见的运动副联结

同样,若用 A_3 表示第三杆相对第二杆的变换则有

$$T_3 = A_1 A_2 A_3 \quad (7.3.9)$$

这里, T_3 表示第三杆相对基座的位姿,依此类推,一个六杆机械手的终端(如手爪)相对基座的位姿为

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad (7.3.10)$$

在机器人运动学分析中,对手爪的附体坐标系有专门的规定。图 7-8 表示一手爪及其附体坐标系,该坐标系原点相对基座用向量 p 表示,坐标系的 z 轴设在手部接近物体的方向上,用 a 表示,

称为接近向量, y 轴设为从一个指尖到另一个指尖的方向, 称为姿态向量 o , x 轴的方向称为法向向量 n , 它与 a 、 o 形成一右旋向量系, 即

$$n = o \times a \quad (7.3.11)$$

于是, 手爪附体坐标系在基座坐标系的位置和姿态 T_6 可以记为

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.12)$$

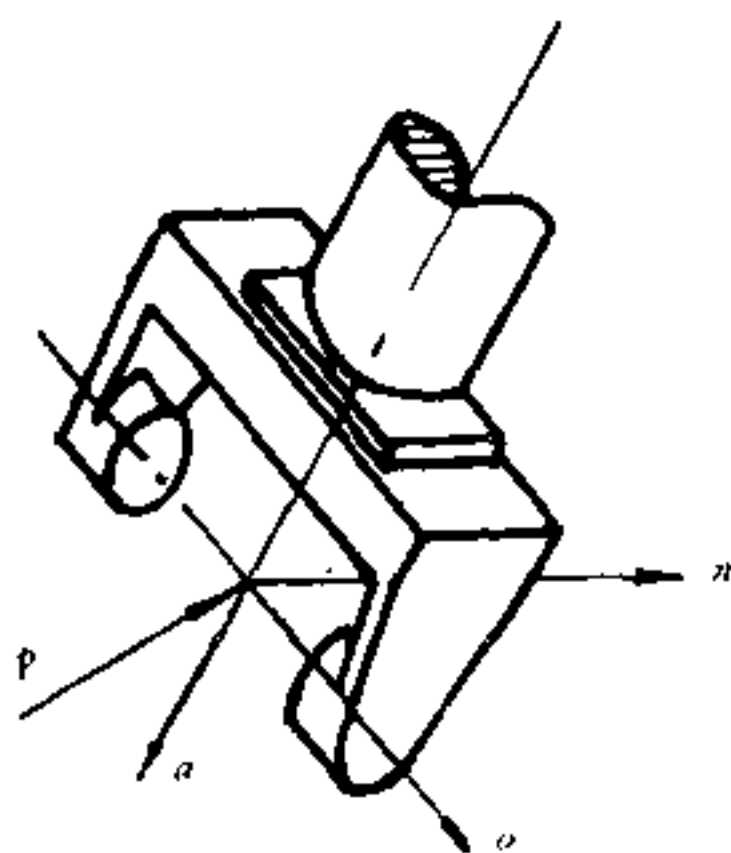


图 7-8 手爪坐标系

其中 n, o, a 是三个正交单位向量, 它们的 9 个分量描述了手部的姿态, 右边列向量 p 表示操作手所达到的位置。

7.3.2 各种坐标系的手部运动学方程

手爪是机器人操作手的工作构件, 因而是个主要构件。在结构上一般设计为三个自由度。它的运动学方程的建立直接取决于采用何种坐标系统对其进行描述。换句话说, 取决于不同坐标系统变换矩阵的建立。

(1) 欧拉变换方程

由刚体运动学知道, 欧拉角是描述刚体定点转动所广泛采用的参数, 它也经常用于描述机器人手部的三个转动自由度。欧拉角通过绕 z 轴(a)转动 ϕ 角、绕 y 轴(o)转动 θ 角, 最后绕 z 轴(a)转动 φ 角来描述手部的任何可能的姿态。见图 7-9。

在整个连续转动过程中, 转动的次序是重要的。上述的转动是绕与手部固连的附体坐标系进行的。整个转动也可以用一连串的相反的转动次序来描述, 即首先绕基座的 z 轴转动 φ 角, 接着绕基

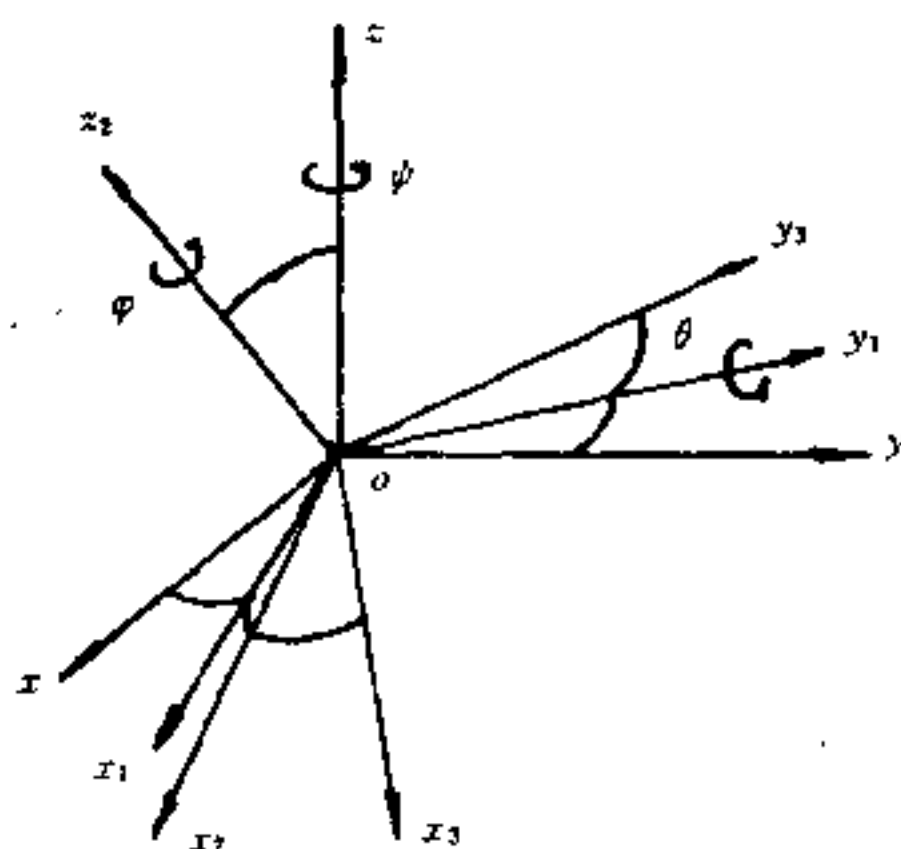


图 7-9 相对自身的欧拉转动

座 y 轴转动 θ 角,最后绕基座 z 轴转动 ψ 角。此时,假定手部原点与基座原点重合,仅研究手的姿态,见图 7-10。因此,用欧拉角描述手部的运动学方程为

$$\text{Euler}(\psi, \theta, \varphi) = \text{Rot}(z, \psi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(z, \varphi) \quad (7.3.13)$$

在上式中,从前向后的变换是相对手部自身坐标系进行的,从后向前的变换每一步都是相对基座坐标系进行的。将该式展开可得

$\text{Euler}(\psi, \theta, \varphi)$

$$= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\psi c\theta c\varphi - s\psi s\varphi & -c\psi c\theta s\varphi - s\psi c\varphi & c\psi s\theta & 0 \\ s\psi c\theta c\varphi + c\psi s\varphi & -s\psi c\theta s\varphi + c\psi c\varphi & s\psi s\theta & 0 \\ -s\theta c\varphi & s\theta s\varphi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.14)$$

(2) PRY 变换方程

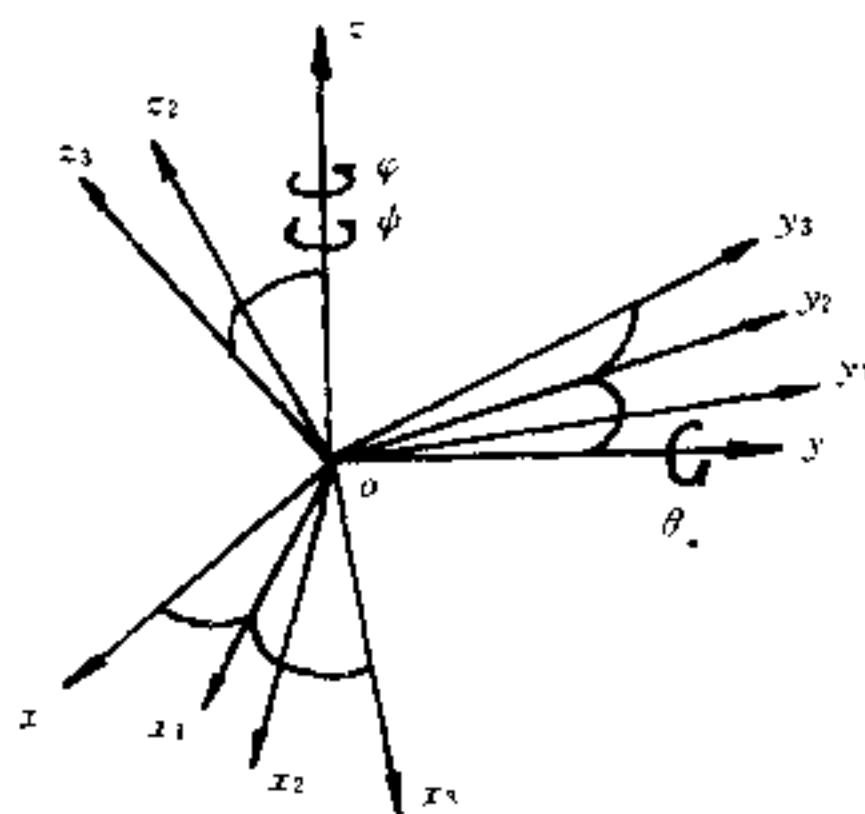


图 7-10 相对基座的欧拉转动

这是利用广义欧拉角来描述的一种旋转变换,同样适用于三个转动自由度的手爪的运动学描述。这种旋转可视为绕 z 轴的滚转(Roll)、绕 y 轴的俯仰(Pitch)和绕 x 轴的侧摆(Yaw)三个转动的合成,转角分别为 φ 、 θ 和 ψ 。操作手末端手爪的 RPY 姿态如图 7-11 所示。

我们将 RPY 变换的顺序规定为

$$\text{RPY}(\varphi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, \varphi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(x, \psi) \quad (7.3.15)$$

上式展开即为

$\text{RPY}(\varphi, \theta, \psi)$

$$= \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi & 0 \\ 0 & s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

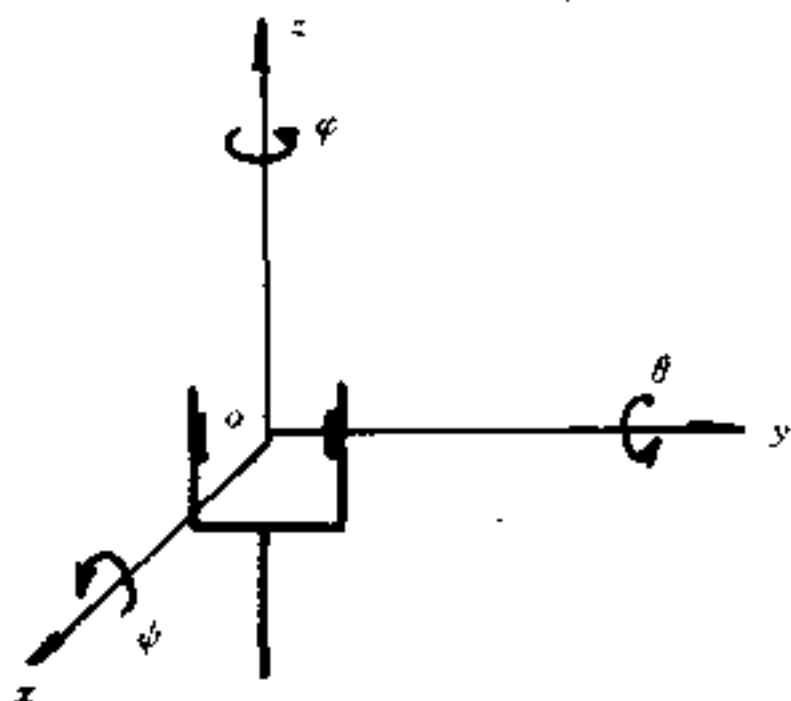


图 7-11 RPY 转动

$$= \begin{bmatrix} c\varphi c\theta & c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\theta c\psi + s\varphi s\psi & 0 \\ s\varphi c\theta & s\varphi s\theta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\theta c\psi - c\varphi s\psi & 0 \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.16)$$

同样,在上述变换中,假定手爪坐标系的原点与基座的原点重合。

采用上述的欧拉变换和 RPY 变换的结果仅仅确定了手部的姿态。一旦手爪的姿态被确定,将该结果前乘一个相应于向量 p 的平移变换,就可以把手部定位于基座坐标系中一个预期的位置。即

$$T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{变换后某种姿态}) \quad (7.3.17)$$

此时, T_6 确定了机器人手部在基座坐标系中的位置和姿态。

(3) 圆柱坐标系变换方程

若采用圆柱坐标系来描述机器人手部的位置和姿态,表明手

部的三个自由度中有两个移动、一个转动。变换过程是：手部的附体坐标系初始状态与基座坐标系重合，变换时，手爪先沿基座 x 轴平移 r ，接着绕基座 z 轴转动 α 角，最后沿基座 z 轴平移 z 。参见图 7-12，其变换方程是

$$\text{Cyl}(z, \alpha, r) = \text{Trans}(0, 0, z) \text{Rot}(z, \alpha) \text{Trans}(r, 0, 0) \quad (7.3.18)$$

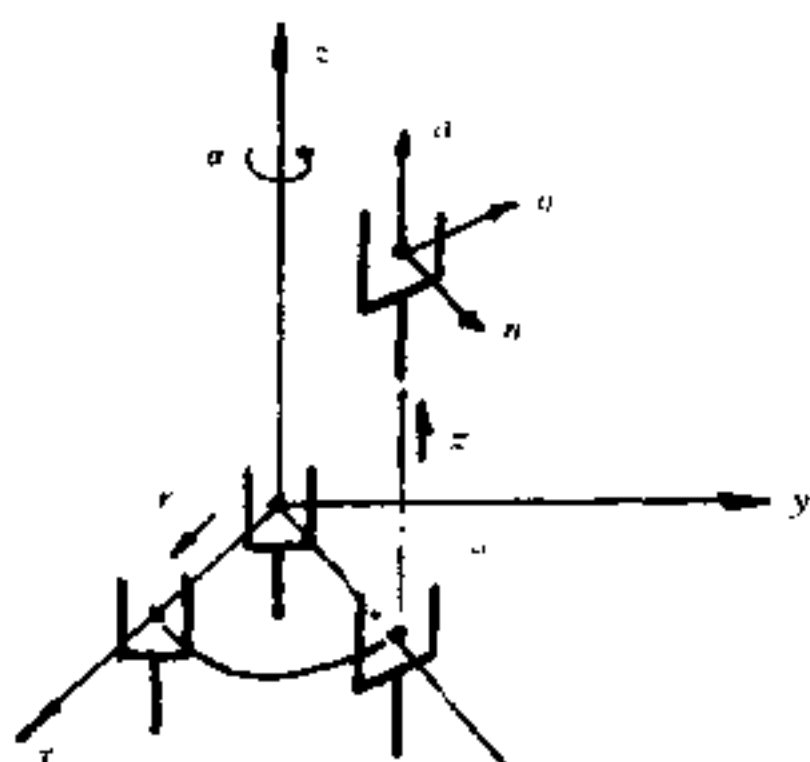


图 7-12 圆柱坐标系

展开可得

$$\begin{aligned} \text{cyl}(z, \alpha, r) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & rc\alpha \\ s\alpha & c\alpha & 0 & rsa \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.19) \end{aligned}$$

经过上述变换之后，手部不但达到了预期位置，而且相对基座坐标

系产生了某种姿态,如果为了使手部的初始状态与基座保持同一姿态,以描述以后的运动,只要让手爪绕自身坐标系的 z 轴(α)转动($-\alpha$)角即可,于是有下列关系

$$T_4 = \text{Cyl}(z, \alpha, r) \text{Rot}(z, -\alpha)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & r c\alpha \\ s\alpha & c\alpha & 0 & r s\alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(-\alpha) & -s(-\alpha) & 0 & 0 \\ s(-\alpha) & c(-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r c\alpha \\ 0 & 1 & 0 & r s\alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.20)$$

这个结果表明,现在手爪相对基座的位置是 $(r c\alpha \quad r s\alpha \quad z \quad 1)^T$,而姿态与基座一致。

(4) 球坐标系变换方程

用球坐标系规定手部的位姿适用于三个自由度手爪中有两个转动、一个移动的情况,其变换顺序是先沿 z 轴移动 r ,接着绕 y 轴转动 β 角,最后绕 z 轴转动 α 角,这三次变换均对基座坐标系而言,如图 7-13 所示。

上述变换的运动方程是

$$\text{Sph}(\alpha, \beta, r) = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Trans}(0, 0, r) \quad (7.3.21)$$

展开则为

$$\text{Sph}(\alpha, \beta, r) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

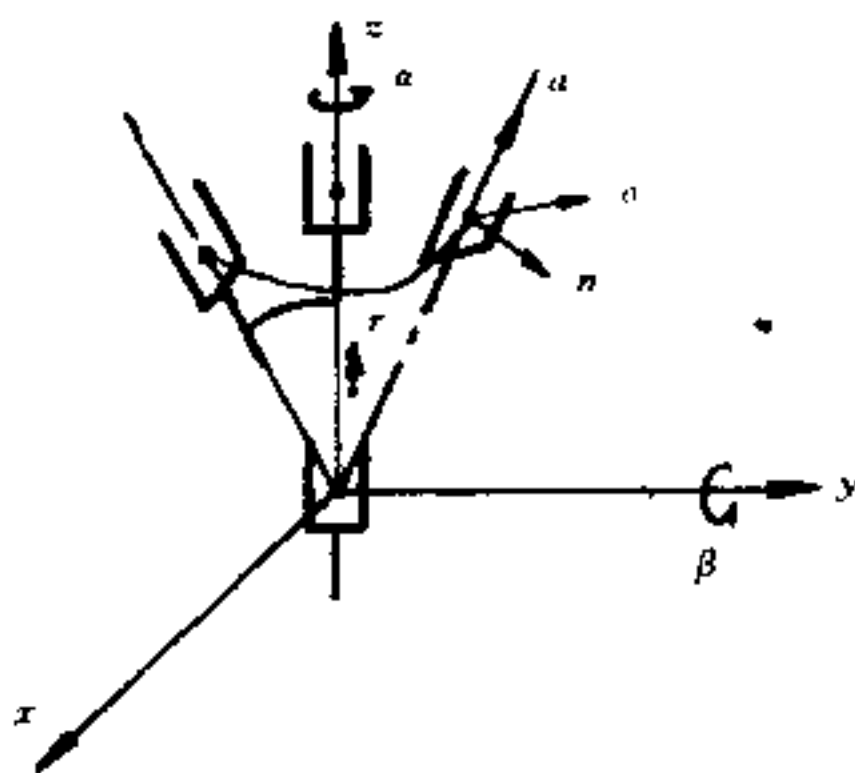


图 7-13 球坐标系

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -s\alpha & c\alpha s\beta & r c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta & c\alpha & s\alpha s\beta & r s\alpha s\beta \\ -s\beta & 0 & c\beta & r c\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.22)$$

同样，若不希望按这种结果所描述的姿态作为初始状态进而描述以后的手部运动，而希望有一个与基座同一姿态的初始状态，我们可以将上述结果连续后乘 $\text{Rot}(y, -\beta)$ 和 $\text{Rot}(z, -\alpha)$ 即得

$$\begin{aligned} T_s &= \text{Sph}(\alpha, \beta, r) \text{Rot}(y, -\beta) \text{Rot}(z, -\alpha) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r c\alpha s\beta \\ 0 & 1 & 0 & r s\alpha s\beta \\ 0 & 0 & 1 & r c\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

式中，矩阵右边一列表明了手部在基座坐标系中的位置，左上角子块为单位矩阵，证明手部与基座保持相同的姿态。

例 7.2 设手爪坐标系 noa 开始时与基座坐标系 xyz 重合，而后手爪先绕 z 轴转动 -90° ，接着绕 o 轴转 180° ，最后绕 n 轴转

-90° , 求手爪的 RPY 变换的结果。见图 7-14。

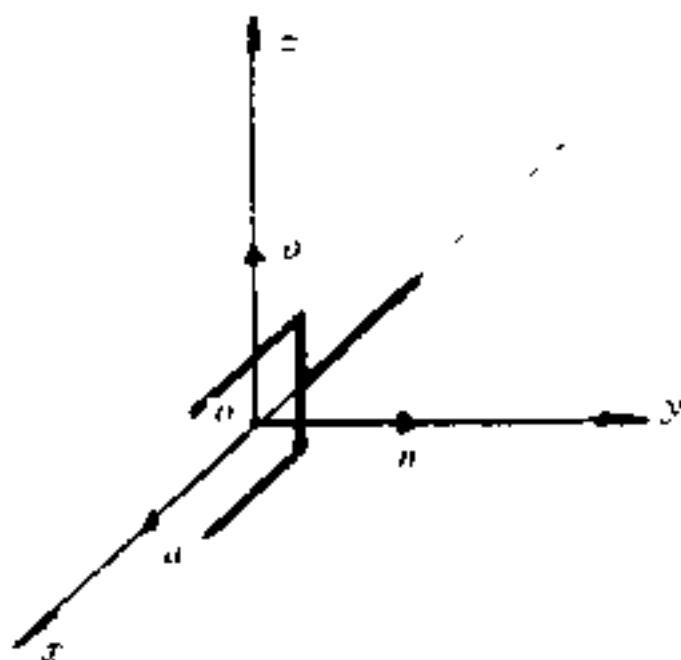


图 7-14

解：按给定的变换顺序，手爪的 RPY 变换方程是

$$\text{RPY}(\varphi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, -90^\circ) \text{Rot}(y, 180^\circ) \text{Rot}(x, -90^\circ) \quad (7.3.24)$$

由 (7.3.16) 式，可得

$$\text{RPY}(-90, 180, -90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.25)$$

例 7.3 如果在上例的转动变换中，转动是相对基座坐标系进行的，且转动顺序依次相对 x 、 y 和 z 轴，所得手爪的 RPY 变换结果是否相同？

解：按相对变换原理，由于变换是相对基座坐标系进行，其 RPY 变换方程为

$$\text{RPY}(\varphi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, -90^\circ) \text{Rot}(y, 180^\circ) \text{Rot}(x, -90^\circ) \quad (7.3.26)$$

代入 (7.3.16) 式所得结果与上例相同。

例 7.4 在例 7.2 中，如果初始状态下，手爪握住一边长为 1

个单位长度的立方块 (图 7-15), 设立方块质心与手爪坐标系原点重合。试求经过例 7.2 的 RPY 变换之后将立方块质心定位于坐标 $(0\ 0\ 3\ 1)^T$ 位置时, 立方体的轮廓矩阵 C_f 。

解: 由已知条件, 立方块初始轮廓矩阵 C_i 为

$$C_i = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.27)$$

手爪经过 RPY 变换之后定位于 $(0\ 0\ 3\ 1)^T$ 所得手爪的位置和姿态 T_s 为

$$\begin{aligned} T_s &= \text{Trans}(0, 0, 3) \text{RPY}(\varphi, \theta, \psi) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.28) \end{aligned}$$

于是, 可求得主方块变换后的轮廓矩阵为

$$C_f = T_s C_i$$

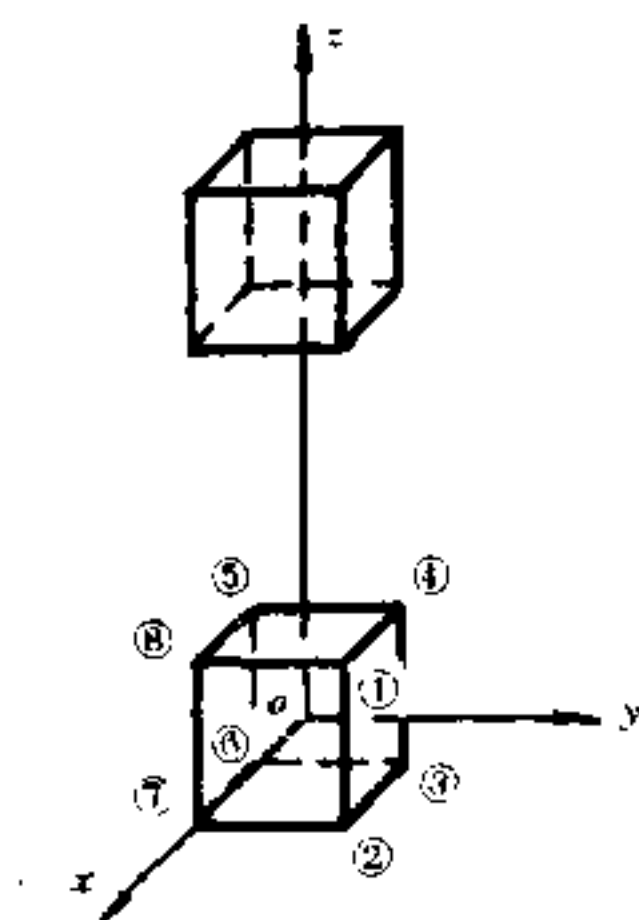


图 7-15

$$= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 3.5 & 2.5 & 2.5 & 3.5 & 3.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ & & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ & & 2.5 & 2.5 & 3.5 \\ & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.3.29)$$

7.3.3 相邻变换 A 矩阵的规定

机器人操作手作为一种多刚体系统，其运动学问题除了前面所讨论的手部相对基座的运动之外，还必须分析手部相对其他杆件，以及其他杆件相对基座和杆件与杆件之间的空间关系与空间关系随时间的变化情况。因此，运动学分析的关键是要确定相邻两杆之间的坐标变换关系 ${}^{i-1}A_i$ 。

(1) 杆的几何参数

一个串联杆件的操作手是由一连串杆件用驱动关节连在一起组成的，对于五类运动副的杆件组成的机械手，具有 n 个自由度即具有 n 个杆件和 n 个关节。如前所述，设操作手的基座为 0 号杆，它实际上并不作为 b 个杆件中的一个来考虑，杆 1 借助关节 1 与基座相连，杆 2 借助关节 2 与杆 1 连结，依次类推，因此在末杆的末端没有关节。杆件的意义在于使杆上各端的操作关节之间保持一个固定的关系。

如图 7-16 所示，如果仅仅从运动学和动力学的角度来考虑，任何杆件都可以用两个尺度来表征：前后两关节轴线之公法线的长度 a_i 和在垂直 a_i 的平面内前后两关节轴线的夹角 α_i 。习惯上称 a_i 为杆长度而称 α_i 为杆的扭角，这里的下标 i 是杆的编号。

通常，每一关节轴线上连结着两根杆件，而每根关节轴线与其前后相邻的关节轴线各有根公法线。两公法线 a_i 和 a_{i-1} 均与 i 关节轴线垂直，在 i 关节轴线上垂足之间的距离，即它们在沿 i 关

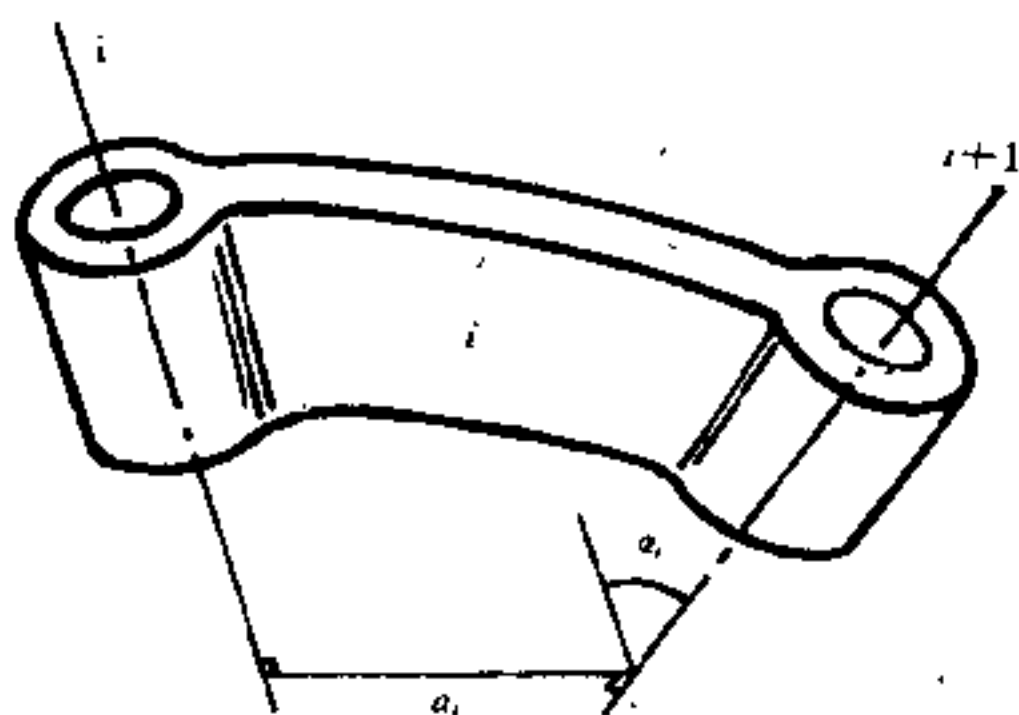


图 7-16 杆的几何参数

节轴线方向的相对位置用 d_i 表示。两公法线 a_i 与 a_{i-1} 在垂直 i 关节轴线平面内的夹角用 θ_i 表示。参见图 7-17。我们把 d_i 和 θ_i 分别称为第 i 杆（相对 $i-1$ 杆）的距离，或称偏置量和第 i 杆与第 $i-1$ 杆的夹角。由 d_i 和 θ_i 的定义可知，当第 i 关节为转动关节时，

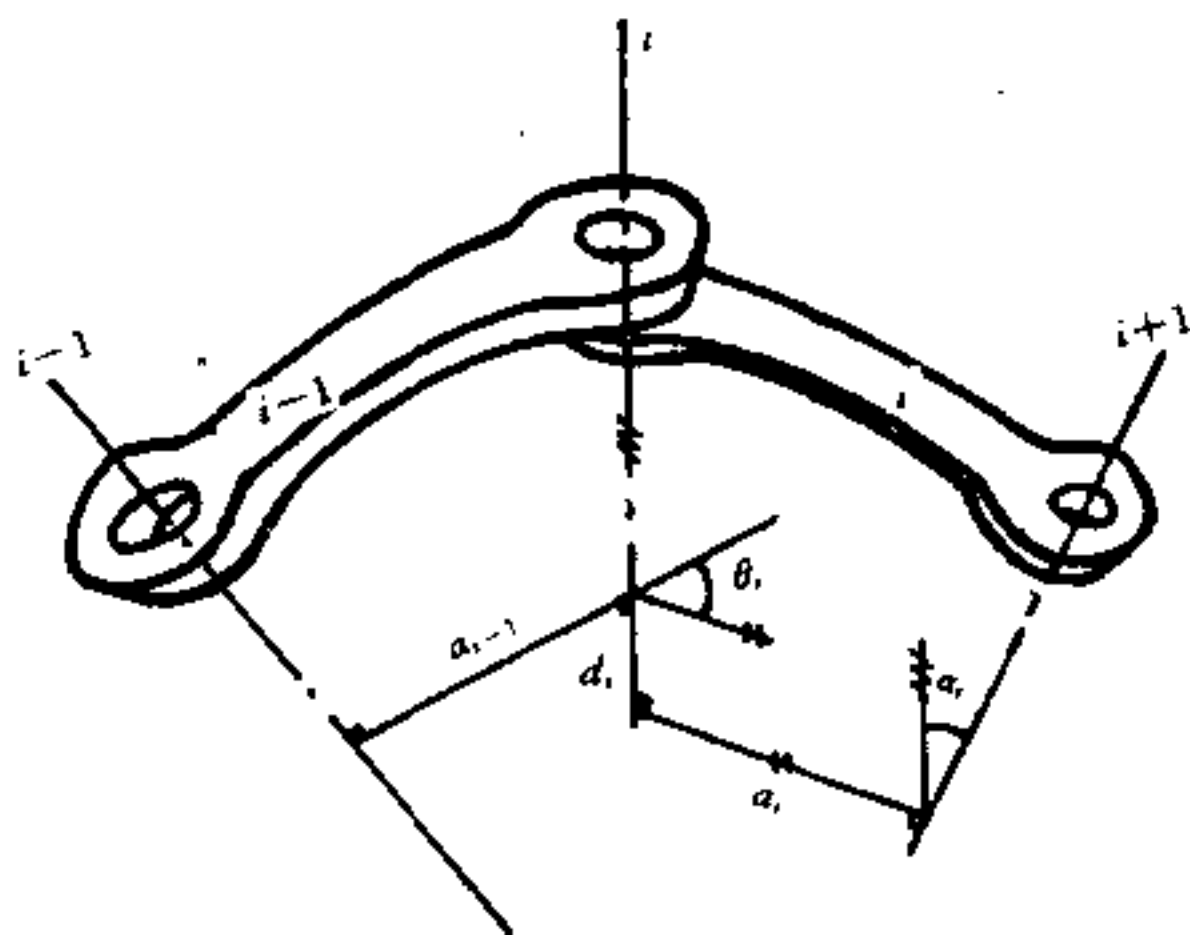


图 7-17 关节变量

θ_i 是一个变量；而当第 i 关节为移动关节时， d_i 则是一个变量。

(2) 杆的附体坐标系的建立

机器人各杆之间的空间关系实际上是固定在各杆上的附体坐标系之间的变换关系。因此，在研究各杆之间的变换关系之前，首先要在各杆建立各自的附体坐标系。附体坐标系的设立，可以有不同的方法，可以在每根杆的前关节（通向手部方向）轴线上，也可以在杆的后关节（通向基座方向）轴线上设立杆的附体坐标系，当然，也可以在各杆的质心上设立附体坐标系。目前，国内外最普遍采用的方法是将附体坐标系建立在前关节轴线上。本书仅介绍这种方法。

下面将附体坐标系的建立按关节类型分为两种情况

① 以 θ_i 为关节变量的回转关节

如图 7-18 所示，第 i 杆与第 $i-1$ 杆的附体坐标系建立的步骤如下：

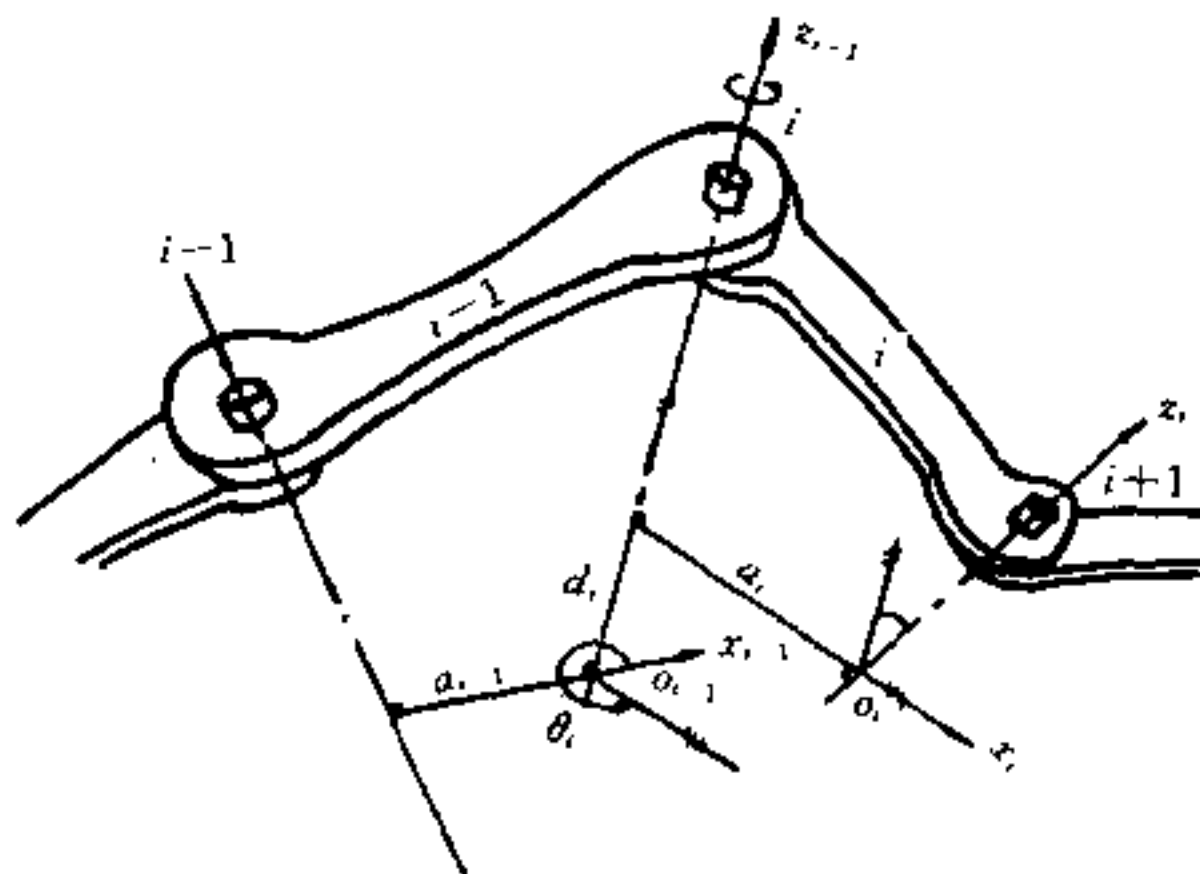


图 7-18 回转关节的附体坐标系

(a) 分别做第 $i-1$ 、 i 和 $i+1$ 关节轴线的公法线 a_{i-1} 和 a_i ；

(b) 以 a_{i-1} 与 i 关节轴线的交点为 $i-1$ 杆附体坐标系的原点

o_{i-1} , z_{i-1} 沿 i 关节轴线方向;

同样, 以 a_i 与 $i+1$ 关节轴线的交点为 o_i , z_i 沿 $i+1$ 关节轴线;

(c) x_{i-1} 沿 a_{i-1} , 其方向指向 $z_{i-2} \times z_{i-1}$ 方向或反向; x_i 沿 a_i , 其方向指向 $z_{i-1} \times z_i$ 方向或反向; y_{i-1} 和 y_i 在 z_{i-1} 、 x_{i-1} 和 z_i 、 x_i 设定之后由右手法则确定;

(d) 关节变量 θ_i 在垂直 i 关节轴线平面内从 x_{i-1} 到 x_i 计算, 与 z_{i-1} 同向为正, 反向为负;

偏置量 d_i 从 a_{i-1} 与 i 关节轴线的垂足到 a_i 与 i 关节轴线的垂足计算, 与 z_{i-1} 同向为正, 反向为负;

扭角 α_i 从 z_{i-1} 到 z_i 与 x_i 同向为正, 反向为负;

(e) 若杆的前后关节轴线相交, 例如 i 关节轴线与 $i+1$ 关节轴线相交, 则第 i 杆的附体坐标系原点 o_i 位于两轴线交点, z_i 仍沿 $i+1$ 关节轴线, x_i 沿 $z_{i-1} \times z_i$ 方向或反向; 此时, 因两关节轴线没有公法线, $a_i = 0$;

(f) 若杆的前后关节轴线平行, 例如 i 关节轴线与 $i+1$ 关节轴线平行, 则两轴线之公法线不是唯一的, 此时, 应按 $d_i = 0$ 的要求确定公法线 a_i 。

② 以 d_i 为关节变量的移动关节

如图 7-19 所示, 设第 i 关节为移动关节, 则第 $i-1$ 杆与第 i 杆的附体坐标系建立步骤如下;

(a) 过 $i+1$ 关节轴线上一点作 i 关节轴线的平行线, 设为 i' 轴线。这一适当的点即为 i 杆附体坐标系的原点 o_i ;

(b) 作 $i-1$ 关节轴线与 i' 轴线的公法线 a_{i-1} , 则在 i' 轴线上的垂足即为 $i-1$ 杆附体坐标系的原点 o_{i-1} , z_{i-1} 沿 i' 轴线 (即 z_{i-1} 平行于 i 关节轴线), x_{i-1} 沿 a_{i-1} 或反向;

(c) $a_i = 0$, z_i 沿 $i+1$ 关节轴线, x_i 沿 $z_{i-1} \times z_i$ 方向或反向;

(d) i' 轴线与 $i+1$ 关节轴线之夹角即为 i 关节轴线与 $i+1$ 关节轴线的夹角, 它就是 z_{i-1} 与 z_i 在垂直 x_i 平面内的夹角扭角 α_i ;

(e) i 杆位于初始状态时, o_{i-1} 沿 i' 轴线到 o_i 距离设为 d_0 , 它

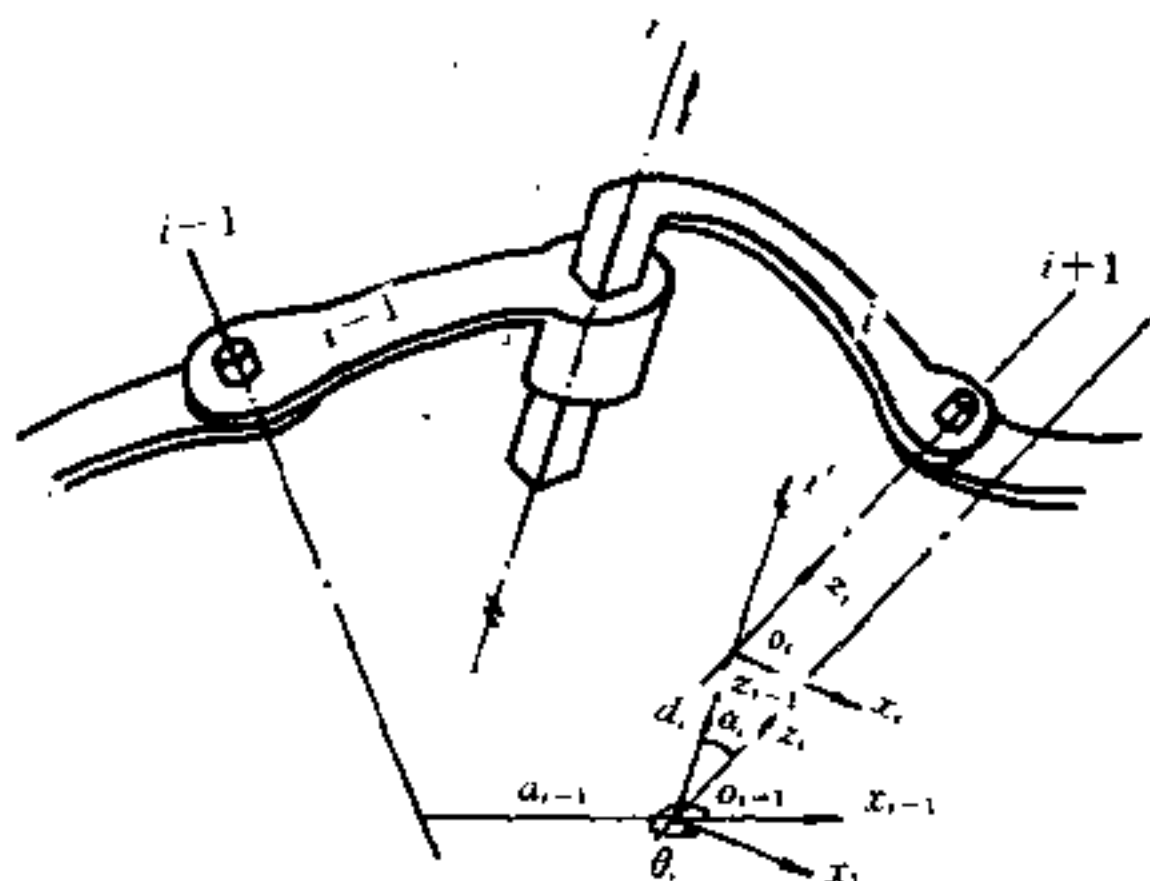


图 7-19 移动关节的附体坐标系

是关节变量 d_i 的初值；合理选取 o_i 点，使之与 o_{i-1} 重合，即使得 $d_0 = 0$ ，对于具体的机械手结构是不难办到的； i 杆移动后， o_i 相对 o_{i-1} 的距离即为关节变量 d_i 。

在建立杆的附体坐标系时，回转关节转动或移动关节移动的正方向，可以通过机械手处于初始位置时确定各坐标系的 z 轴来决定。一般来讲，可设基座坐标系为惯性参考系。对于基座本身参与某种已知运动的机械手，也可以另外设立一参考坐标系，基座与该参考系之间的关系可以用一确定的齐次变换来描述。在操作手的末端，参数 d_0 和 θ_0 是相对 x_0 和 z_0 的，若末端外附加有末端夹持器或工具，而它们的坐标系有特殊的规定，则它们也可以借助一固定的齐次变换与末杆联系起来。

按上述方法及其规定建立起机械手各构件坐标系之后，我们可以借助 $i-1$ 杆附体坐标系相对自身的四次齐次变换最后和 i 杆附体坐标系完全重合建立起相邻杆件的变换关系 ${}^{i-1}A_i$ 。这四次连续变换是： $i-1$ 杆坐标系绕自身 z 轴旋转 θ_i 角；沿自身 z 轴移动 d_i ；沿自身 x 轴移动 a_i ；绕自身 x 轴转动 α_i 。这一变换过程可

用下式表示。

$${}^{i-1}A_i = \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(0, 0, d_i) \text{Trans}(a_i, 0, 0) \text{Rot}(x, \alpha_i) \quad (7.3.30)$$

展开为

$$\begin{aligned} {}^{i-1}A_i &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.31) \end{aligned}$$

当然，上述变换也可以用 i 杆附体坐标系按反方向相对 $i-1$ 杆附体坐标系转动或移动最后与之完全重合得到。有了 A_i ，就可以确定机器人操作手中任意两杆之间的空间关系。

我们已经知道，机器人操作手的末杆相对基座的空间关系为

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad (7.3.32)$$

则末杆相对其他杆的位置和姿态（以 $i-1$ 杆为例）为

$${}^{i-1}T_6 = A_i A_{i+1} \cdots A_6 \quad (7.3.33)$$

7.4 两种典型操作手的运动学方程

7.4.1 斯坦福操作手的运动学方程

图 7-20 为斯坦福机械手 (Stanford Arm) 的示意图。该机械手具有六个关节，包括一个移动、五个转动，其中在第五关节俯仰运动前后各有一个滚转运动。

首先，按上节的方法及规定在各杆的前关节建立附体坐标系，参见图 7-20。

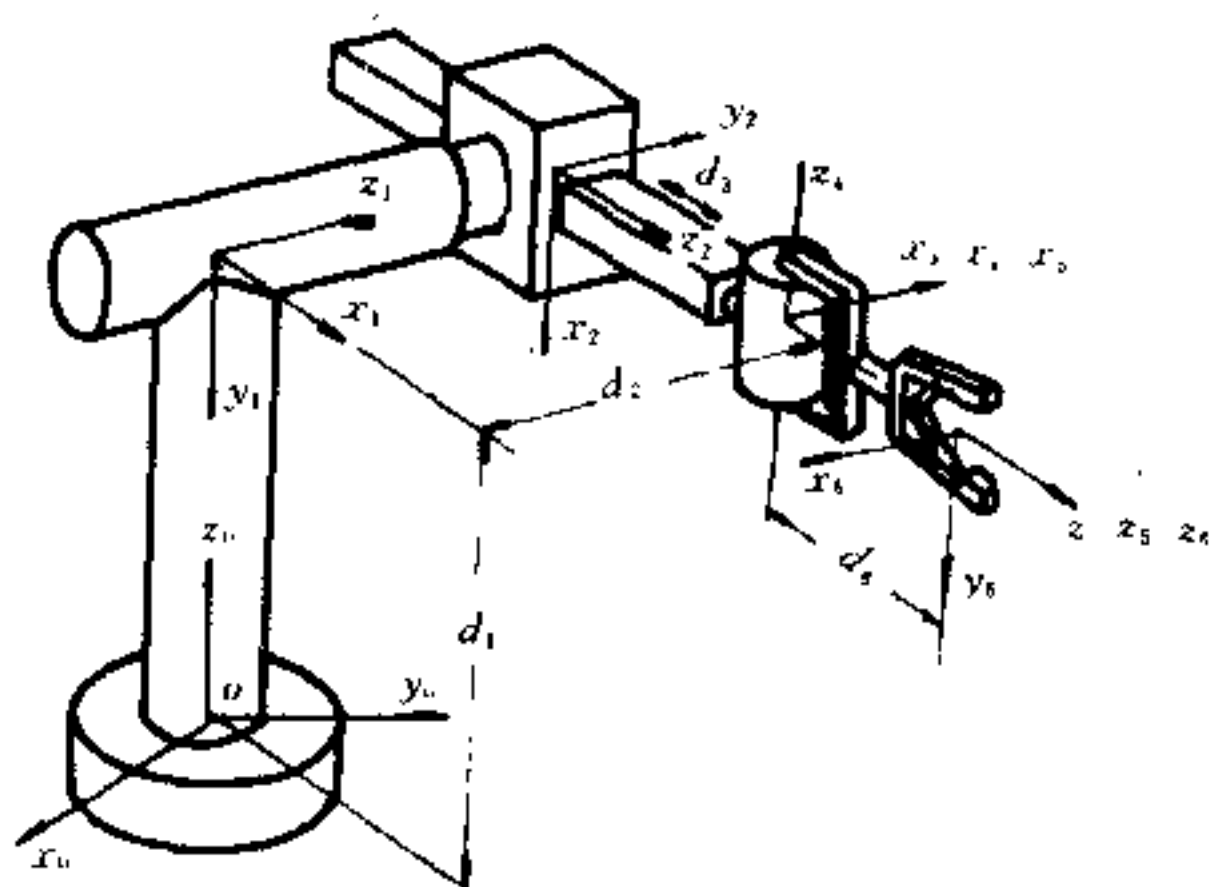


图 7-20 斯坦福机械手

第二步，列出各相邻变换 A_i 中有关的参数表。见表 7-1。

表 7-1 斯坦福机械手杆参数表

杆 序	θ	α	a	d	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
1	θ_1	-90°	0	d_1	-1	0
2	θ_2	90°	0	d_2	1	0
3	0°	0°	0	d_3	0	1
4	θ_4	-90°	0	0	-1	0
5	θ_5	90°	0	0	1	0
6	θ_6	0°	0	d_6	0	1

将各杆有关参数代入式 (7.3.31) 可得：

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_5 &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6 &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

于是，由 (7.3.33) 式可求得斯坦福操作手末杆相对各杆的变换分别为

$${}^3T_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.2)$$

$${}^4T_6 = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & s_5 & d_6s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & -d_6c_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.3)$$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & d_6c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_6s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.4)$$

$${}^2T_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & d_6c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_6s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_6c_5 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.5)$$

$${}^1T_6 = \begin{bmatrix} c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6 & -c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6 \\ s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_2s_5c_6 & -s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - c_2s_5s_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 \\ 0 & 0 \\ c_2c_4s_5 + s_2c_5 & d_6c_2c_4s_5 + s_2(d_6c_5 + d_3) \\ s_2c_4s_5 - c_2c_5 & d_6s_2c_4s_5 - c_2(d_6c_5 + d_3) \\ s_4s_5 & d_4s_4s_5 + d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.6)$$

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.7)$$

其中

$$\begin{aligned} n_x &= c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ n_y &= s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ n_z &= -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \\ o_x &= c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\ o_y &= s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\ o_z &= s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 \\ a_x &= c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 \\ a_y &= s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 \\ a_z &= -s_2c_4s_5 + c_2c_5 \\ p_x &= c_1[d_6c_2c_4s_5 + s_2(d_6c_5 + d_3)] - s_1(d_6s_4s_5 + d_2) \\ p_y &= s_1[d_6c_2c_4s_5 + s_2(d_6c_5 + d_3)] + c_1(d_6s_4s_5 + d_2) \\ p_z &= -d_6s_2c_4s_5 + c_2(d_6c_5 + d_3) + d_1 \end{aligned}$$

7.4.2 普通六转轴机械手的运动学方程

如图 7-21 所示, 六转轴操作手是采用全旋转关节的一种常

见机器人操作手的结构形式，首先按规定在各杆的前关节建立各杆的附体坐标系，然后确定各杆的有关参数列于表 7-2。

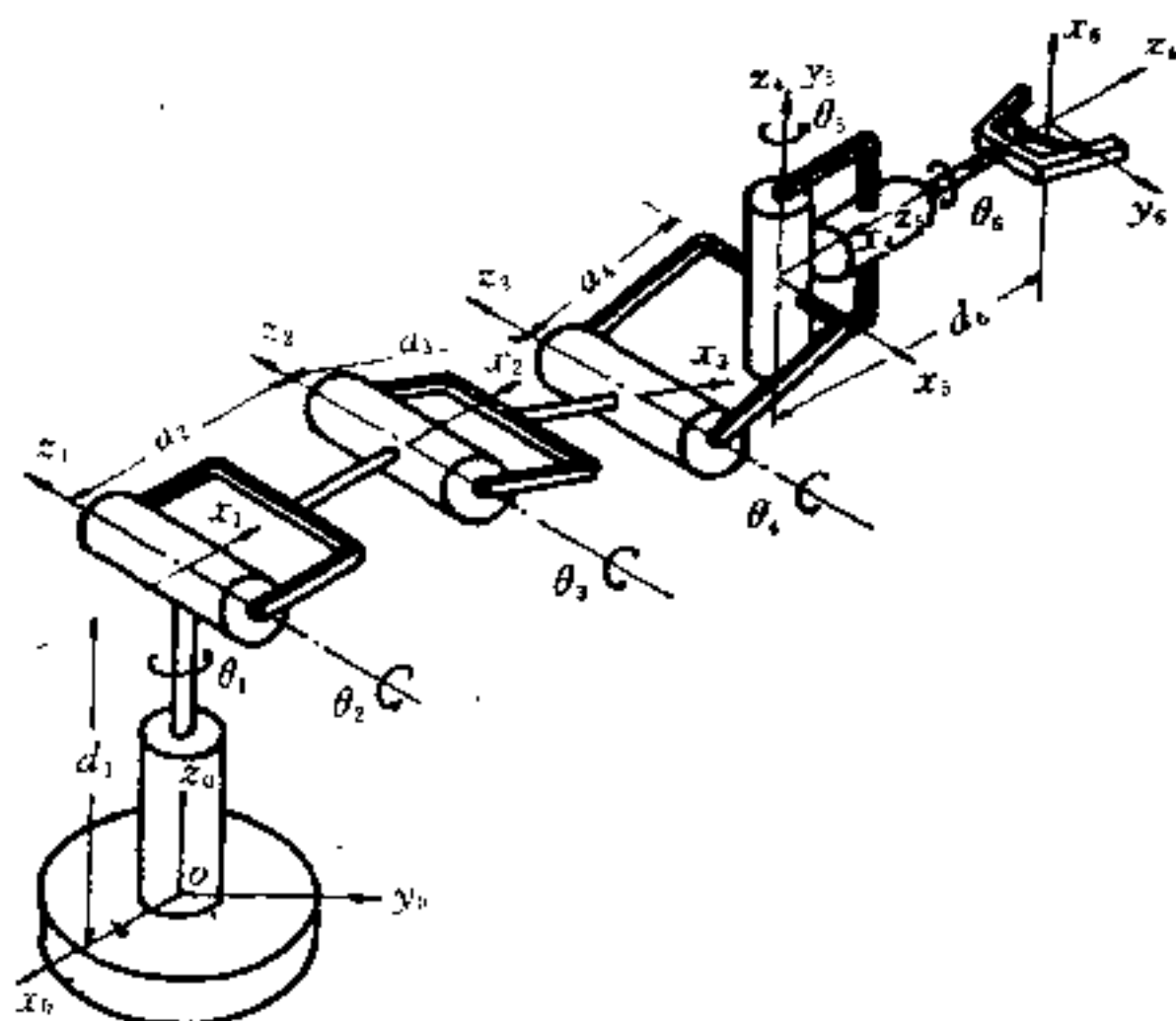


图 7-21 普通六转机械手

表 7-2 普通六转轴机械手杆参数表

杆 序	θ	a	a	b	$\sin a$	$\cos a$
1	θ_1	-90°	0	d_1	-1	0
2	θ_2	0°	a_2	0	0	1
3	θ_3	0°	a_3	0	0	1
4	θ_4	90°	a_4	0	1	0
5	θ_5	-90°	0	0	-1	0
6	θ_6	0°	0	d_6	0	1

由 (7.3.31) 式可求得

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & a_4 c_4 \\ s_4 & 0 & -c_4 & a_4 s_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_5 &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6 &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.4.8}$$

还可以进一步求得末杆相对各杆的变换如下

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\tag{7.4.9}$$

$${}^4T_6 = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 & -d_6 s_5 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_6 c_5 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\tag{7.4.10}$$

$${}^3T_6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & & \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & & \\ & s_5 c_6 & -s_5 s_6 & \\ & 0 & 0 & \\ & -c_4 s_5 & -d_6 c_4 s_5 + a_4 c_4 & \\ & -s_4 s_5 & -d_6 s_4 s_5 + a_4 s_4 & \\ & c_5 & d_6 c_5 & \\ & 0 & 1 & \end{bmatrix}
\tag{7.4.11}$$

$${}^2T_6 = \begin{bmatrix} c_{34}c_5c_6 - s_{34}s_6 & -c_{34}c_5s_6 + s_{34}c_6 \\ s_{34}c_5c_6 + c_{34}s_6 & -s_{34}c_5s_6 + c_{34}c_6 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 \\ 0 & 0 \\ -c_{34}s_5 & -d_6c_{34}s_5 + a_4c_{34} + a_3c_3 \\ -s_{34}s_5 & -d_6s_{34}s_5 + a_4s_{34} + a_3s_3 \\ c_5 & d_5c_5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.12)$$

$${}^1T_6 = \begin{bmatrix} c_{234}c_5c_6 - s_{234}s_6 & -c_{234}c_5s_6 + s_{234}c_6 \\ s_{234}c_5c_6 + c_{234}s_6 & -s_{234}c_5s_6 + c_{234}c_6 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 \\ 0 & 0 \\ -c_{234}s_5 & -d_6c_{234}s_5 + a_4c_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2 \\ -s_{234}s_5 & -d_6s_{234}s_5 + a_4s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2 \\ c_5 & d_5c_5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.13)$$

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.14)$$

其中

$$\begin{aligned} n_x &= c_1(c_{234}c_5c_6 - s_{234}s_6) - s_1s_5c_6 \\ n_y &= s_1(c_{234}c_5c_6 - s_{234}s_6) + c_1s_5c_6 \\ n_z &= -s_{234}c_5c_6 - c_{234}s_6 \\ o_x &= -c_1(c_{234}c_5s_6 + s_{234}c_6) + s_1s_5s_6 \\ o_y &= -s_1(c_{234}c_5s_6 + s_{234}c_6) - c_1s_5s_6 \\ o_z &= s_{234}c_5s_6 - c_{234}c_6 \end{aligned}$$

$$a_x = -c_1 c_{234} s_5 - s_1 c_5$$

$$a_y = -s_1 c_{234} s_5 + c_1 c_5$$

$$p_x = -d_6 c_1 c_{234} s_5 + a_4 c_1 c_{234} + a_3 c_1 c_{23} + a_2 c_1 c_2 - d_6 s_1 c_5$$

$$p_y = -d_6 s_1 c_{234} s_5 + a_4 s_1 c_{234} + a_3 s_1 c_{23} + a_2 s_1 c_2 + d_6 c_1 c_5$$

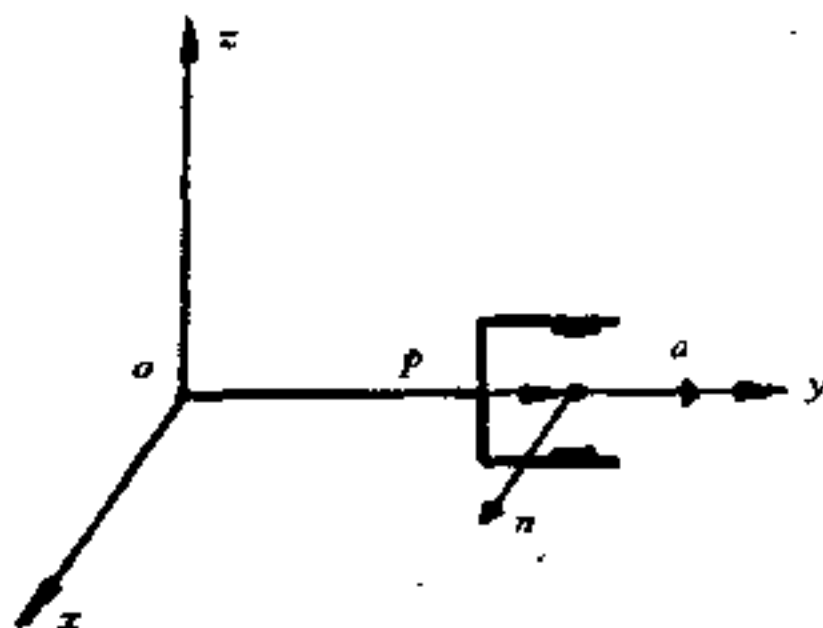
$$p_z = d_4 s_{234} s_5 - a_4 s_{234} - a_3 s_{23} - a_2 s_2 + d_1$$

习 题 7

7.1 设某机械手手爪开始时与惯性系重合, 用广义欧拉角描述其运动为滚转 -90° , 俯仰 180° , 侧摆 -90° , 求其最终的姿态。

7.2 已知手爪的位置为 $p = (0 \ 3 \ 0 \ 1)^T$, 见习图 7-1, 开始时 a 沿 y 轴方向, n 与 x 轴平行, 接着手爪沿 y 轴移动 4 个长度单位, 然后绕 z 轴转 -90° , 再绕 o 转动 150° , 最后绕 n 转 -90° , 试求:

- (1) 总的变换 T ;
- (2) 手爪的最终位置和姿态。

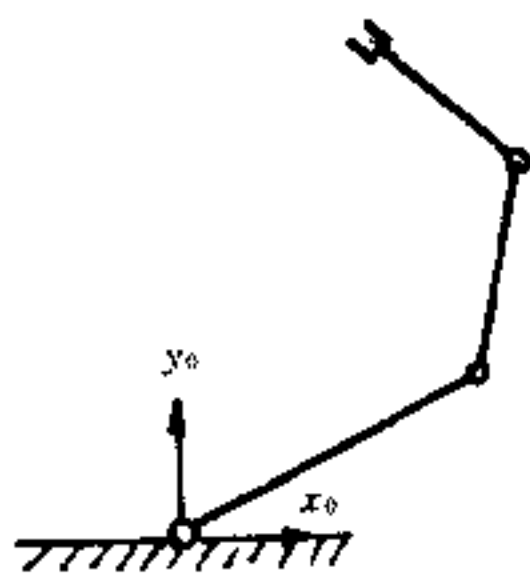


习图 7-1

7.3 习图 7-2 为一平面三关节机械手。

- (1) 建立各杆附体坐标系;

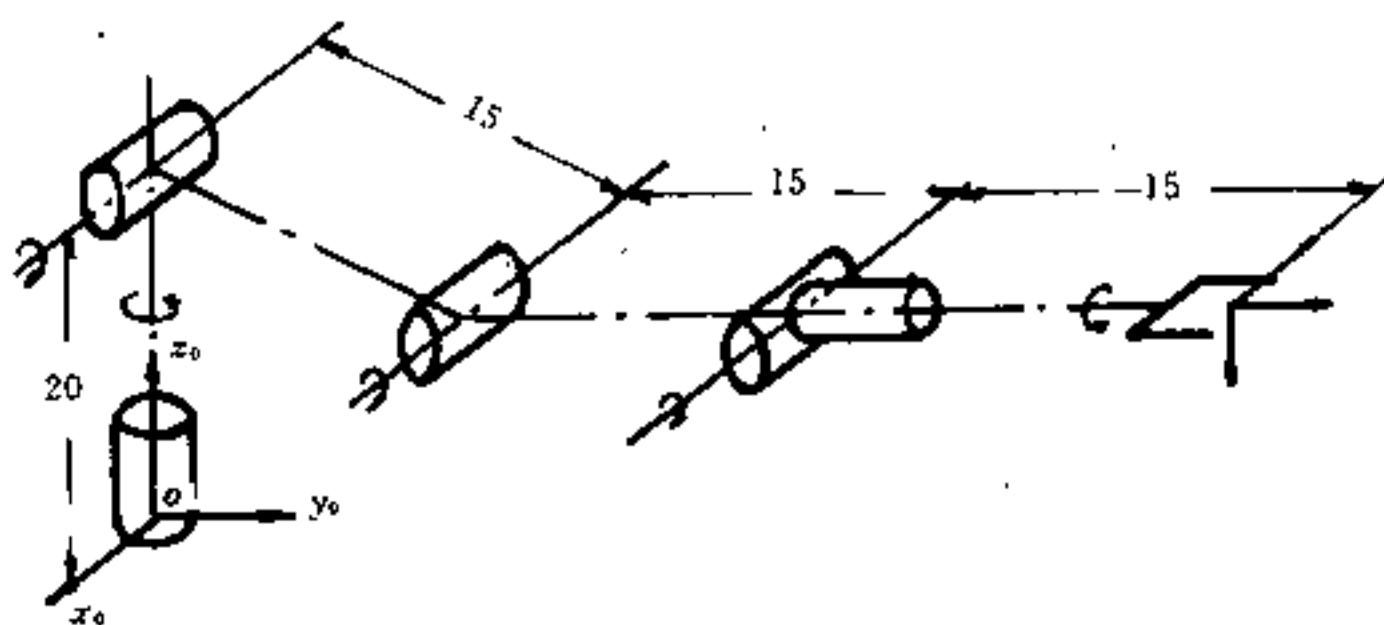
- (2) 列出各杆参数表;
- (3) 求出各相邻变换和末杆相对各杆的变换。



习图 7-2

7.4 习图 7-3 为一个五关节机械手，试完成以下工作：

- (1) 建立各杆附体坐标系;
- (2) 列出各杆参数表;
- (3) 求出各相邻变换。



习图 7-3

- 7.5 试用高级语言编写下列问题的计算机程序：
- (1) 欧拉角描述的运动学方程；
 - (2) RPY 变换的运动学方程；
 - (3) 确定相邻变换 A ，并区分转动关节和移动关节。

8 机器人运动学方程的解

上一章我们讨论了采用不同坐标系统时，机器人操作手末端杆件相对基座以及其他杆件的运动学关系。在这些运动学方程中，均以关节的角位移或线位移为变量，一旦这些关节变量赋予确定的值便可以求得末杆相对各构件的位置和姿态，这就是所谓运动学正问题。

本章涉及的将是上一章中所得到的运动学方程的求解，即由机器人末杆的某种姿态和位置 0T_n 求得各关节可能的位移，这就是所谓的运动学逆问题，在机器人操作手的控制中，获得关节变量的解将是极为重要的，因为，解的存在性、多值性和奇异性对机械手工作空间的确定以及运动轨迹的合理选择将起决定性的作用。但目前在国内还没有一种公认的、规范的、普遍适用于各种结构类型的机器人的求运动学逆解的解析方法与算法。因此，在这一章里，仅仅介绍几种常见的坐标系统和机械手结构形式的运动学逆解的分析方法。

8.1 欧拉变换方程的解

上一章已经给出用欧拉角描述机械手手部三个转动自由度的变换方程（7.3.14）式，设变换的结果为 T ，则有

$$T = \text{Euler}(\phi, \theta, \varphi) \quad (8.1.1)$$

即

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi & -\cos\psi\cos\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta & 0 \\ \sin\psi\cos\theta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\cos\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.1.2)$$

由上式可得以下九个非无效方程

$$n_x = \cos\psi\cos\theta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi \quad (8.1.3)$$

$$n_y = \sin\psi\cos\theta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi \quad (8.1.4)$$

$$n_z = -\sin\theta\cos\varphi \quad (8.1.5)$$

$$o_x = -\cos\psi\cos\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi \quad (8.1.6)$$

$$o_y = -\sin\psi\cos\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi \quad (8.1.7)$$

$$o_z = \sin\theta\sin\varphi \quad (8.1.8)$$

$$a_x = \cos\psi\sin\theta \quad (8.1.9)$$

$$a_y = \sin\psi\sin\theta \quad (8.1.10)$$

$$a_z = \cos\theta \quad (8.1.11)$$

如果仅简单由以上 9 个方程中的 (8.1.11)、(8.1.9) 和 (8.1.5) 三式求得下面的欧拉角的解

$$\theta = \cos^{-1}(a_z) \quad (8.1.12)$$

$$\varphi = \cos^{-1}(a_x/\sin\theta) \quad (8.1.13)$$

$$\psi = \cos^{-1}(-n_z/\sin\theta) \quad (8.1.14)$$

但由于以下理由，这些解是无价值的：

(1) 在试图利用反余弦函数求角度时，不仅角度的正负号不确定，而且求角度时，精度与角度本身有关，即由于

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta), \quad d\cos(\theta)/d\theta|_{0,180^\circ} = 0$$

(2) 在求解 φ 和 ψ 角时，再次利用了反余弦函数，除上述问

题外，用 $\sin\theta$ 做除数，在 $\sin\theta$ 接近零时将导致不精确；

(3) 在 $\theta=0$ 或 $\pm 180^\circ$ 时， φ 和 ψ 是不确定的。

总之，不能直接利用反余弦函数，同样也不能利用反正弦函数求得欧拉角。如果我们考察一正切函数 $\operatorname{tg}\theta=y/x$ ，由于该函数由两个变量 x 和 y 提供，可以通过检查 y 和 x 的正负号很容易在 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 的范围内确定 θ 角所在的象限，而当 x 、 y 两个变量中有一个为零时，仍然可以得到 θ 角的准确值。同时，正切函数的精度在整个定义域内是相同的。因此，相比之下利用正切函数来确定欧拉角较为理想，它的缺点是出现在 $x=y=0$ 时，角度无法确定，这个问题将在下而求逆解时进行分析。

为了得到用欧拉角的正切函数表示的方程，我们可以利用欧拉变换的结果 T 连续前乘末知的逆变换来实现，即由于

$$T = \operatorname{Rot}(z, \psi) \operatorname{Rot}(y, \theta) \operatorname{Rot}(z, \varphi) \quad (8.1.15)$$

则有

$$\operatorname{Rot}(z, \psi)^{-1} T = \operatorname{Rot}(y, \theta) \operatorname{Rot}(z, \varphi) \quad (8.1.16)$$

和

$$\operatorname{Rot}(y, \theta)^{-1} \operatorname{Rot}(z, \psi)^{-1} T = \operatorname{Rot}(z, \varphi) \quad (8.1.17)$$

将式 (8.1.16) 展开，可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\varphi & -c\theta s\varphi & s\theta & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 & 0 \\ -s\theta c\varphi & s\theta s\varphi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.1.18) \end{aligned}$$

因为 T 为已知，即上式左边第 2 个矩阵中的元素为确定的数值，这样上式左边只是 ψ 的函数，我们便可以按矩阵相等的含义在 (8.1.18) 式右边矩阵找到那些为零或常数的元素使之与左边的对

应元素相等以寻得角度的正切函数。

如果将 (8.1.18) 式左边两矩阵的乘积记作

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.1.19)$$

其中

$$f_{11}(k) = k_x \cos \psi + k_y \sin \psi \quad (8.1.20)$$

$$f_{12}(k) = -k_x \sin \psi + k_y \cos \psi \quad (8.1.21)$$

$$f_{13}(k) = k_z \quad (8.1.22)$$

在以上三式中, k 可根据需要分别取 n 、 o 、 a 和 p , 于是, 由 (8.1.18) 式, 可得

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta c\varphi & -c\theta s\varphi & s\theta & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 & 0 \\ -s\theta c\varphi & s\theta s\varphi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.1.23)$$

考察上式, 由于欧拉变换没有提供任何移动, 即 p_x , p_y , p_z 恒为零, 因此矩阵右边一列 3 个元素恒等于零。由上式两个矩阵 (2, 3) 元素对应相等, 可得

$$f_{12}(a) = 0 \quad (8.1.24)$$

利用 (8.1.21) 得

$$-a_x \sin \psi + a_y \cos \psi = 0 \quad (8.1.25)$$

于是有 ψ 角的正切为

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{a_y}{a_x} \quad (8.1.26)$$

利用反正切函数求得 ψ 角

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1}(a_y/a_x) \quad (8.1.27)$$

但是, 这个角不是唯一解, 因为由 (8.1.25) 还可以得到

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{-a_y}{-a_x} \quad (8.1.28)$$

此时有

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1}(-a_y/(-a_x)) \quad (8.1.29)$$

结果, 与 (8.1.27) 的解相差 180° 。

由以上分析可见, 每当得到一个形如 (8.1.25) 那样的方程, 就有两个相隔 180° 的解。若 a_x 和 a_y 同时为零, 则 ψ 角无法确定, 这种情况仅仅在手指向上、向下时发生, 即因此时手部的 a 轴与基座坐标系的 z 轴平行, ψ 与 φ 角对应于同一转动而只能知道这两个角的和。我们将这一现象称为退化, 发生退化时, 可将 φ 角置为零来确定 ψ 。

在 ψ 角确定之后, 公式 (8.1.23) 左边矩阵的所有元素均可确定, 因此, 我们可以继续利用该式求得 θ 角和 φ 角。由 (1, 3) 和 (3, 3) 元素对应相等, 并利用 (8.1.20) 和 (8.1.22) 有

$$\sin\theta = a_x \cos\psi + a_y \sin\psi \quad (8.1.30)$$

$$\cos\theta = a_x \quad (8.1.31)$$

于是, 求得 θ 为

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{a_x \cos\psi + a_y \sin\psi}{a_x}\right) \quad (8.1.32)$$

这时, θ 被唯一确定而不会发生 ψ 角那样的退化现象。

再由 (2, 1)、(2, 2) 两元素对应相等进一步求得 φ 的唯一解

$$\sin\varphi = -n_x \sin\psi + n_y \cos\psi \quad (8.1.33)$$

$$\cos\varphi = -o_x \sin\psi + o_y \cos\psi \quad (8.1.34)$$

故

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-n_x \sin\psi + n_y \cos\psi}{-o_x \sin\psi + o_y \cos\psi}\right) \quad (8.1.35)$$

总之，当给定表示任一旋转的一个齐次变换时，我们就能够确定其等效的欧拉角为

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}(a_y/a_z) \quad (8.1.36)$$

和

$$\psi = \phi + 180^\circ \quad (8.1.37)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{a_x \cos \phi + a_y \sin \phi}{a_z}\right) \quad (8.1.38)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-n_x \sin \phi + n_y \cos \phi}{-o_x \sin \phi + o_y \cos \phi}\right) \quad (8.1.39)$$

8.2 RPY 变换方程的解

对于机械手手部姿态的 RPY 运动学描述，我们可以采用与解欧拉变换相同的方法进行求解。

设手部的姿态为

$$T = \operatorname{RPY}(\varphi, \theta, \psi) \quad (8.2.1)$$

由 (7.3.15) 式，有

$$\operatorname{Rot}(z, \varphi)^{-1} T = \operatorname{Rot}(y, \theta) \operatorname{Rot}(x, \psi) \quad (8.2.2)$$

即有

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & 0 \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & 0 \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\theta & s\theta s\psi & s\theta c\psi & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi & 0 \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

式中

$$f_{11}(k) = k_x \cos \varphi + k_y \sin \varphi \quad (8.2.4)$$

$$f_{12}(k) = -k_x \sin \varphi + k_y \cos \varphi \quad (8.2.5)$$

$$f_{13}(k) = k_z \quad (8.2.6)$$

在 (8.2.3) 式中, 由元素 (2, 1) 对应相等, 可得

$$-n_x \sin \varphi + n_y \cos \varphi = 0 \quad (8.2.7)$$

于是有

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1}(n_y/n_x) \quad (8.2.8)$$

和

$$\varphi = \varphi + 180^\circ \quad (8.2.9)$$

再由 (1, 1) 和 (3, 1) 元素对应相等, 可得

$$\cos \theta = n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi \quad (8.2.10)$$

和

$$-\sin \theta = n_z \quad (8.2.11)$$

于是求得

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-n_z}{n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi} \right) \quad (8.2.12)$$

进一步由 (2, 2) 和 (2, 3) 元素对应相等可得

$$-\sin \psi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi \quad (8.2.13)$$

$$\cos \psi = -o_x \sin \varphi + o_y \cos \varphi \quad (8.2.14)$$

于是有

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{a_x \sin \varphi - a_y \cos \varphi}{-o_x \sin \varphi + o_y \cos \varphi} \right) \quad (8.2.15)$$

8.3 Sph 变换方程的解

上两节所讨论的方法同样适用于求解球坐标系的手部运动。同样, 设

$$T = \operatorname{Sph}(\alpha, \beta, r) \quad (8.3.1)$$

其中 Sph (α, β, r) 由 (7.3.21) 式给出, 于是有

$$\text{Rot}(z, \alpha)^{-1}T = \text{Rot}(y, \beta)\text{Trans}(0, 0, r) \quad (8.3.2)$$

根据 Sph 变换的特殊性, 我们仅需要利用上式两边矩阵积的最右边一列就可以得到问题的解, 第四列关系为

$$\begin{bmatrix} p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha \\ -p_x \sin \alpha + p_y \cos \alpha \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \beta \\ 0 \\ r \cos \beta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.3.3)$$

由第二行元素相等, 有

$$-p_x \sin \alpha + p_y \cos \alpha = 0 \quad (8.3.4)$$

可求得

$$\alpha = \text{tg}^{-1}(p_y/p_x) \quad (8.3.5)$$

和

$$\alpha = \alpha + 180^\circ \quad (8.3.6)$$

又由第一行和第三行对应元素相等得到

$$p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha = r \sin \beta \quad (8.3.7)$$

$$p_z = r \cos \beta \quad (8.3.8)$$

按定义, $r > 0$, 故求得

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha}{p_z} \right) \quad (8.3.9)$$

为了求 r , 可将 (8.3.2) 式两边前乘 $\text{Rot}(y, \beta)^{-1}$, 即

$$\text{Rot}(y, \beta)^{-1} \text{Rot}(z, \alpha)^{-1}T = \text{Trans}(0, 0, r) \quad (8.3.10)$$

上式矩阵积第四列关系为

$$\begin{bmatrix} (p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha) \cos \beta - p_z \sin \beta \\ -p_x \sin \alpha + p_y \cos \alpha \\ (p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha) \sin \beta + p_z \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.3.11)$$

于是得

$$r = (p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha) \sin \beta + p_z \cos \beta \quad (8.3.12)$$

8.4 机器人运动学方程解的实例

这一节将利用前几节对运动学逆解的分析给出两个具体的机器人操作手的实例,讨论如何由已知的手部的位置和姿态 T_6 求得各关节的位移。

8.4.1 斯坦福操作手运动学逆解

上一章,我们已经建立了斯坦福操作手的运动学方程。现在假设操作手末杆的位置和姿态 T_6 已经给定,而

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad (8.4.1)$$

上式右边矩阵乘积的结果已由 (7.4.7) 式给出。但是无法直接由 (7.4.7) 式求得它所含的六个关节位移。此时,如果将 T_6 左乘 A_1^{-1} , 便可得到下面的关系式

$$A_1^{-1} T_6 = {}^1T_6 \quad (8.4.2)$$

上式左边乘积的结果只含变量 θ_1 , 我们可以利用矩阵相等的性质从右边矩阵找到零元素或常量元素以求得 θ_1 。类似地,还可以得到另外 4 个关系式

$$A_2^{-1} A_1^{-1} T_6 = {}^2T_6 \quad (8.4.3)$$

$$A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1} T_6 = {}^3T_6 \quad (8.4.4)$$

$$A_4^{-1} A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1} T_6 = {}^4T_6 \quad (8.4.5)$$

$$A_5^{-1} A_4^{-1} A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1} T_6 = {}^5T_6 \quad (8.4.6)$$

在以上 4 个式中,在后关节变量确定之后,等式左边都只含一个未知的变量,它们可以利用等式右边的元素进行求解。在上述关系式中,除了矩阵第 4 行恒定之外,共有 12 个可供利用的非无效方程。

在 (8.4.2) 式中,左边矩阵积为

$$A_1 {}^1T_6 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) + d_1 \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.4.7)$$

其中

$$f_{11}(k) = k_x c_1 + k_y s_1 \quad (8.4.8)$$

$$f_{12}(k) = -k_z \quad (8.4.9)$$

$$f_{13}(k) = -k_x s_1 + k_y c_1 \quad (8.4.10)$$

这里, 简记 $s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$; 后文中简记 $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$, $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$, $s_{ijk} = \sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$, $c_{ijk} = \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$ 等等。

在 (8.4.2) 式右边, 1T_6 已经由 (7.3.39) 式给出, 为了便于讨论, 重新写在下面

$${}^1T_6 = \begin{bmatrix} c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6 & -c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6 \\ s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_2s_5c_6 & -s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - c_2s_5s_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 \\ 0 & 0 \\ c_2c_4s_5 + s_2c_5 & d_6(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + d_3s_2 \\ s_2c_4s_5 - c_2c_5 & d_6(s_2c_4s_5 - c_2c_5) - d_3c_2 \\ s_4s_5 & d_6s_4s_5 + d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.4.11)$$

由 (8.4.2) 式, (8.4.7) 式和 (8.4.11) 矩阵中对应元素相等, 在矩阵 (8.4.11) 中, 元素 (3, 4) 等于元素 (3, 3) 乘上 d_6 加 d_2 , 故有

$$f_{13}(p) = f_{13}(a) \times d_6 + d_2 \quad (8.1.12)$$

将 (8.4.10) 代入上式得

$$-p_x s_1 + p_y c_1 = (-a_x s_1 + a_y c_1) \cdot d_6 + d_2 \quad (8.4.13)$$

即

$$-(p_x - d_6 a_x) s_1 + (p_y - d_6 a_y) c_1 = d_2 \quad (8.4.14)$$

为了得到正切函数, 做下面的三角代换, 令

$$(p_x - d_6 a_x) = r \cos \varphi \quad (8.4.15)$$

$$(p_y - d_6 a_y) = r \sin \varphi \quad (8.4.16)$$

这里, r 是第 5 杆坐标系原点在基座坐标系 $x_0 o y_0$ 平面上的投影, 参见图 8-1。故而在存在

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{p_y - d_6 a_y}{p_x - d_6 a_x} \right) \quad (8.4.17)$$

于是, (8.4.14) 式可以写作

$$\sin \varphi c_1 - \cos \varphi s_1 = d_2 / r$$

即

$$\sin(\varphi - \theta_1) = d_2 / r \quad (8.4.18)$$

因为 $r \geq d_2$, 故

$$0 < d_2 / r \leq 1 \quad (8.4.19)$$

于是可得

$$0 < \varphi - \theta_1 < \pi \quad (8.4.20)$$

由 (8.4.18) 进一步求得

$$\cos(\varphi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - (d_2 / r)^2} \quad (8.4.21)$$

如果把斯坦福机械手的第一杆视为“肩部”, 则上式中取负值时与操作手的左肩部即 $x_1 o_1 y_1$ 平面的第二象限相对应, 而取正号则与操作手的右肩部即 $x_1 o_1 y_1$ 平面的第一象限相对应。由 (8.4.18) 和 (8.4.21) 可得

$$\varphi - \theta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{d_2}{\pm \sqrt{r^2 - d_2^2}} \right] \quad (8.4.22)$$

最后可求得第一个关节变量为

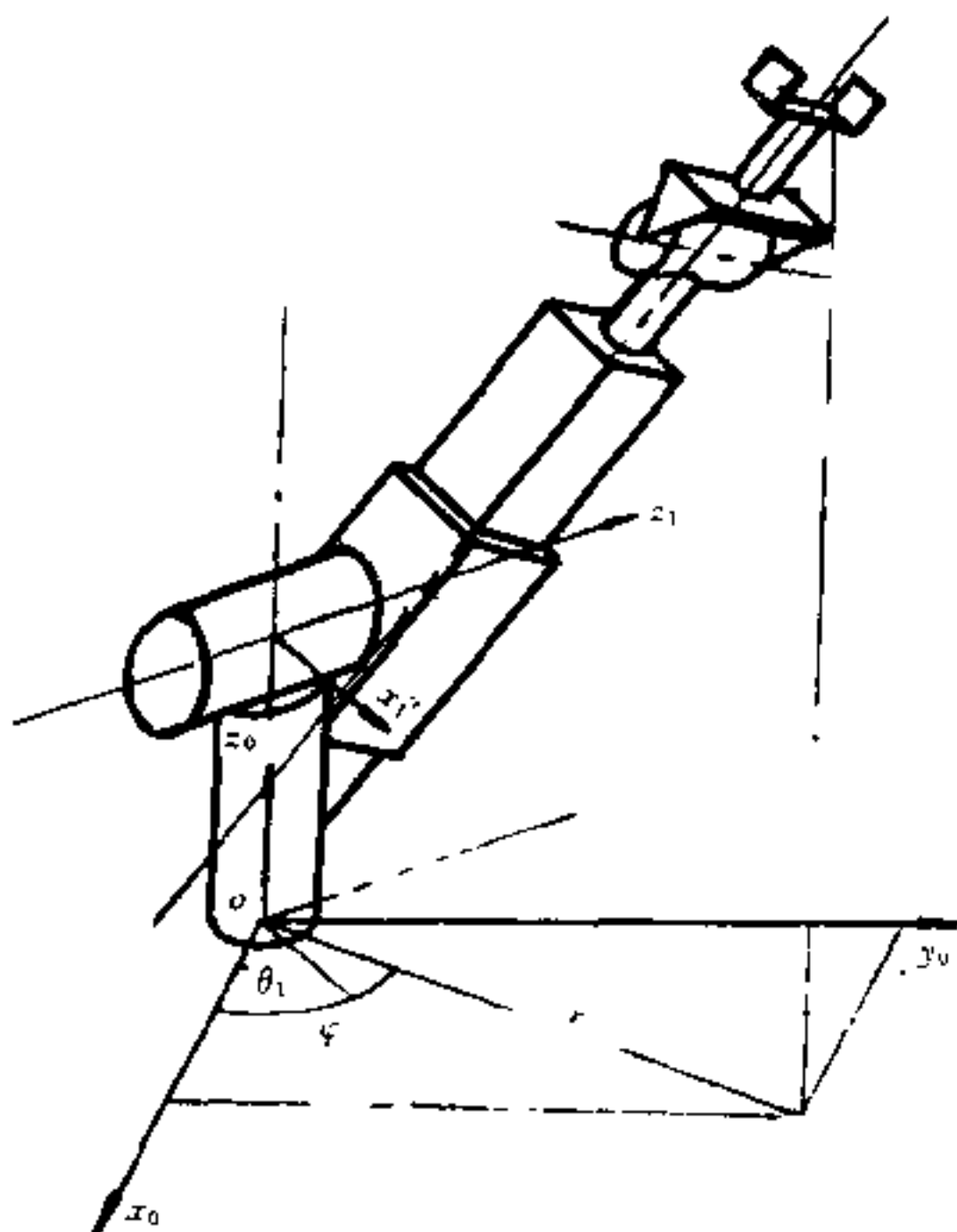


图 8-1

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{p_y - d_6 a_y}{p_x - d_6 a_x} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{d^2}{\pm \sqrt{r^2 - d_2^2}} \right) \quad (8.4.23)$$

θ_1 确定之后, (8.4.2) 式左边矩阵积内的元素均为确定的值。这时, 我们可以在等式右边的矩阵 1T_6 中连续寻找求解其他关节变量的可能性, 在后面的求解中同样这样做。

在 1T_6 , 即 (8.4.11) 式中可以发现, (1, 4) 元素是 (1, 3) 元素乘 d_6 加 $d_3 s_2$ 得到, 同样 (2, 4) 元素是 (2, 3) 元素乘 d_6 加 $(-d_3 c_2)$ 得到, 利用对应元素相等的性质, 我们可以得到

$$f_{11}(p) = f_{11}(a) \times d_6 + d_3 s_2 \quad (8.4.24)$$

$$\text{和} \quad f_{12}(p) = f_{12}(a) \times d_6 - d_3 c_2 - d_1 \quad (8.4.25)$$

将 (8.4.8) 和 (8.4.9) 式代入上面二式得

$$p_x c_1 + p_y s_1 = d_6 a_x c_1 + d_6 a_y s_1 + d_3 s_2 \quad (8.4.26)$$

$$\text{和} \quad -p_x = -d_6 a_x - d_3 c_2 - d_1 \quad (8.4.27)$$

整理可得

$$d_3 s_2 = (p_x - d_6 a_x) c_1 - (p_y + d_6 a_y) s_1 \quad (8.4.28)$$

$$d_3 c_2 = p_x - d_6 a_x - d_1 \quad (8.4.29)$$

由于总有 $d_3 > 0$, 故可求得第二个关节变量为

$$\theta_2 = \text{tg}^{-1} \left[\frac{(p_x - d_6 a_x) c_1 + (p_y - d_6 a_y) s_1}{p_x - d_6 a_x - d_1} \right] \quad (8.4.30)$$

显然, 在 θ_1 被确定之后, θ_2 被唯一确定。

对 (8.4.11) 式进一步考察的结果是, 已无法利用变换关系 (8.4.2) 继续求出其他关节变量, 因此, 我们分析变换关系 (8.4.3) 式, 将该式展开, 有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) + d_1 s_2 \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) - d_2 \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) - d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & d_6 c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & d_6 s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & d_6 c_5 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.4.31)$$

式中

$$f_{21}(k) = c_2 f_{11}(k) + s_2 f_{12}(k) \quad (8.4.32)$$

$$f_{22}(k) = f_{13}(k) \quad (8.4.33)$$

$$f_{23}(k) = s_2 f_{11}(k) - c_2 f_{12}(k) \quad (8.4.34)$$

将 (8.4.8) 至 (8.4.10) 代入上面三式得到

$$f_{21}(k) = (k_x c_1 + k_y s_1) c_2 - k_z s_2 \quad (8.4.35)$$

$$f_{22}(k) = -k_x s_1 + k_y c_1 \quad (8.4.36)$$

$$f_{23}(k) = (k_x c_1 + k_y s_1) s_2 + k_z c_2 \quad (8.4.37)$$

于是, 在 (8.4.31) 式中, 存在

$$f_{23}(p) = f_{23}(a) \times d_6 + d_3 + d_2 c_2 \quad (8.4.38)$$

因此, 可求得第三个关节变量为

$$\begin{aligned} d_3 = & [(p_x - d_6 a_x) c_1 + (p_y - d_6 a_y) s_1] s_2 \\ & + (p_z - d_6 a_z) c_2 - d_1 c_2 \end{aligned} \quad (8.4.39)$$

考察表明, 在 (8.4.31) 式中已无法进一步求得其他关节变量。而在变换关系 (8.4.4) 中, 由于第三关节为移动关节, 故³ T_6 与² T_6 仅在 (3, 4) 元素上有区别 (差一个 d_3), 这样, 利用 (8.4.4) 也无法进一步求得 θ_4 、 θ_5 和 θ_6 , 因此, 我们讨论变换关系 (8.4.5) 式, 该式展开后可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} f_{41}(n) & f_{41}(o) & f_{41}(a) & f_{41}(p) + d_4 s_2 c_4 - d_1 s_4 \\ f_{42}(n) & f_{42}(o) & f_{42}(a) & f_{42}(p) + d_3 + d_2 \\ f_{43}(n) & f_{43}(o) & f_{43}(a) & f_{43}(p) - d_1 s_2 s_4 - d_7 c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 & d_6 s_5 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 & -d_6 c_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.4.40)$$

这里,

$$f_{41}(k) = c_4 [(k_x c_1 + k_y s_1) c_2 - k_z s_2] - s_4 (k_x s_1 - k_y c_1) \quad (8.4.41)$$

$$f_{42}(k) = - (k_x c_1 + k_y s_1) s_2 - k_z c_2 \quad (8.4.42)$$

$$f_{43}(k) = -s_4 [(k_x c_1 + k_y s_1) c_2 - k_z s_2] - c_4 (k_x s_1 - k_y c_1) \quad (8.4.43)$$

我们由 (8.4.40) 式 (3, 3) 元素相等可得到有关第四个关节变

量 θ_4 的信息

$$-s_4[(a_x c_1 + a_y s_1)c_2 - a_x s_2] - c_4(a_x s_1 - a_y c_1) = 0 \quad (8.4.44)$$

由此可求得 θ_4 的两个解

$$\theta_4 = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{-a_x s_1 + a_y c_1}{(a_x c_1 + a_y s_1)c_2 - a_x s_2} \right] \quad (8.4.45)$$

$$\text{和} \quad \theta_4 = \theta_4 + 180^\circ \quad (8.4.46)$$

需要指出的是，在解 (8.4.45) 中，如分子、分母同时为零，此时 θ_4 自然无法确定，这一现象称为操作手出现退化。让我们考察 (8.4.31) 等式右边的矩阵，其中 (1, 3) 和 (2, 3) 元素就是 (8.4.45) 式中的分母和分子，即

$$c_4 s_5 = (a_x c_1 + a_y s_1)c_2 - a_x s_2 \quad (8.4.47)$$

$$s_4 s_5 = -a_x s_1 + a_y c_1 \quad (8.4.48)$$

从上面二式可以看出，如 $s_5 > 0$ ，则可得 θ_4 的解如 (8.4.45)，否则如果 $s_5 < 0$ ，则可得 θ_4 的解如 (8.4.46) 式。而如果出现 $s_5 = 0$ ，则 (8.4.45) 中出现了分子、分母同时为零的情况。此时，由于 $\theta_5 = 0$ ，关节 4 和关节 6 的轴线重合，只能得到 $\theta_4 + \theta_6$ 的结果而无法分别求得 θ_4 和 θ_6 。这种情况就是所谓的操作手出现退化。在这种情况下， θ_4 原则上可以任选，其当前值常加以指定。

对子第五个关节变量 θ_5 ，可以由 (8.4.40) 式继续求得，由该式 (1, 3) 和 (2, 3) 元素对应相等，可得

$$s_5 = [(a_x c_1 + a_y s_1)c_2 - a_x s_2]c_4 - (a_x s_1 - a_y c_1)s_4 \quad (8.4.49)$$

$$c_5 = (a_x c_1 + a_y s_1)s_2 + a_x c_2 \quad (8.4.50)$$

于是得

$$\theta_5 = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{[(a_x c_1 + a_y s_1)c_2 - a_x s_2]c_4 - (a_x s_1 - a_y c_1)s_4}{(a_x c_1 + a_y s_1)s_2 + a_x c_2} \right\} \quad (8.4.51)$$

在 (8.4.40) 式中，尽管可以由 (3, 1) 和 (3, 2) 两个元

素得到第六个关节变量 θ_6 的正弦和余弦值, 即 s_6 和 c_6 , 但机械手手部的结构形式决定了其坐标系的接近向量 a 和姿态向量 o 是确定其位置和姿态的两个向量, 而法向量 n 仅是由它们叉乘得到, 因此, 在确定 θ_6 时, 我们应直接由 o 向量或 a 向量求得其结果。将最后一个变换关系 (8.4.6) 展开, 有

$$\begin{bmatrix} f_{51}(n) & f_{51}(o) & 0 & 0 \\ f_{52}(n) & f_{52}(o) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.4.52)$$

式中

$$f_{51}(k) = c_5 \{ c_4 [(a_x c_1 + a_y s_1) c_2 - a_x s_2] - s_4 (a_x s_1 - a_y c_1) \} \\ + s_5 [- (a_x c_1 + a_y s_1) s_2 - a_x c_2] \quad (8.4.53)$$

$$f_{52}(k) = -s_4 [(a_x c_1 + a_y s_1) c_2 - a_x s_2] - c_4 (a_x s_1 - a_y c_1) \quad (8.4.54)$$

在 (8.4.52) 中, 由 (1, 2) 和 (2, 2) 元素对应相等, 可得

$$s_6 = -f_{51}(o) \quad (8.4.55)$$

$$c_6 = f_{52}(o) \quad (8.4.56)$$

于是, 第六个关节变量为

$$\theta_6 = \text{tg}^{-1} \left[\frac{-f_{51}(o)}{f_{52}(o)} \right] \quad (8.4.57)$$

其中, $f_{51}(o)$, $f_{52}(o)$ 只要将 (8.4.53) 和 (8.4.54) 式中的 k 换成 o 就可以得到。

8.4.2 普通六转轴机械手运动学逆解

普通六转轴机械手的运动学方程已经由式 (7.4.14) 给出, 直接由该式无法求得各关节变量, 这是显而易见, 对于该机械手的运动学逆解, 可以采用求斯坦福机械手逆解的方法进行, 即逐个前乘相邻逆变换求得各关节变量。

由变换关系

$$A_1^{-1}T_6 = {}^1T_6 \quad (8.4.56)$$

可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) + d_1 \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{234}c_5c_6 - s_{234}s_6 & -c_{234}c_5s_6 - s_{234}c_6 & -c_{234}s_5 \\ s_{234}c_5c_6 + c_{234}s_6 & -s_{234}c_5s_6 + c_{234}c_6 & -s_{234}s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -d_6c_{234}s_5 + a_4c_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2 & & \\ -d_6s_{234}s_5 + a_4s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2 & & \\ d_6c_5 & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \quad (8.4.57) \end{aligned}$$

式中

$$f_{11}(k) = k_x c_1 + k_y s_1 \quad (8.4.58)$$

$$f_{12}(k) = -k_z \quad (8.4.59)$$

$$f_{13}(k) = -k_x s_1 + k_y c_1 \quad (8.4.60)$$

由于

$$f_{13}(p) = f_{13}(a) \times d_6 \quad (8.4.61)$$

即有

$$-(p_x - d_6 a_x) s_1 + (p_y - d_6 a_y) c_1 = 0 \quad (8.4.62)$$

于是可得第一关节变量

$$\theta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{p_y - d_6 a_y}{-p_x + d_6 a_x} \right) \quad (8.4.63)$$

和

$$\theta_1 = \theta_1 + 180^\circ \quad (8.4.64)$$

在 (8.4.57) 式中, 无法利用等式两边矩阵的对应元素相等进一步求得其他关节变量。继续考察 (7.4.12) 和 (7.4.11) 式

可以看出, 由于第 2、3、4 关节轴线互相平行, 从这两式子中也无法找到求得 θ_2 、 θ_3 和 θ_4 的信息。这也可以从 (7.4.8) 式中得到证明, 在 (7.4.8) 中, A_2 , A_3 和 A_4 具有相同的形式, 因此, 在 (8.4.56) 式基础上用前乘 A 矩阵逆阵的方法要一直到第四杆被约束时才能得出结果。而这个结果只是第 2、3、4 关节变量的和。由

$$A_4^{-1}A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}T_1 = {}^4T_6 \quad (8.4.65)$$

展开之后为

$$\begin{bmatrix} f_{41}(n) & f_{41}(o) & f_{41}(a) & f_{41}(p) + d_1s_{234} - a_2c_{34} - a_3c_4 - a_4 \\ f_{42}(n) & f_{42}(o) & f_{42}(a) & f_{42}(p) \\ f_{43}(n) & f_{43}(o) & f_{43}(a) & f_{43}(p) - d_1c_{234} - a_2s_{34} - a_3s_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & -d_6s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_5c_5 \\ s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.4.66)$$

式中

$$f_{41}(k) = c_{234}(k_xc_1 + k_ys_1) + s_{234}(-k_z) \quad (8.4.67)$$

$$f_{42}(k) = -k_xs_1 + k_yc_1 \quad (8.4.68)$$

$$f_{43}(k) = s_{234}(k_xc_1 + k_ys_1) + c_{234}k_z \quad (8.4.69)$$

由 (2, 3) 元素可得

$$c_5 = -a_xs_1 + a_yc_1 \quad (8.4.70)$$

于是有

$$s_5 = \pm \sqrt{1 - (a_yc_1 - a_xs_1)^2} \quad (8.4.71)$$

由 (2, 4) 元素相对, 可得

$$d_6c_5 = -p_xs_1 + p_yc_1 \quad (8.4.72)$$

于是有

$$\operatorname{tg}\theta_5 = \frac{d_6s_5}{d_6c_5}$$

$$= \frac{\pm d_6 \sqrt{1 - (a_y c_1 - a_x s_1)^2}}{-p_x s_1 + p_y c_1} \quad (8.4.73)$$

即可求得第五关节变量为

$$\theta_5 = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{\pm d_6 [1 - (a_y c_1 - a_x s_1)^2]^{\frac{1}{2}}}{-p_x s_1 + p_y c_1} \right\} \quad (8.4.74)$$

由 (3, 3) 元素对应相等, 可得下式

$$s_{234}(a_x c_1 + a_y s_1) + c_{234} a_x = 0 \quad (8.4.75)$$

于是得到

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-a_x}{a_x c_1 + a_y s_1} \right) = \theta_{234} \quad (8.4.76)$$

此时 $s_5 > 0$, 这可由 (8.4.57) 式看出; 当 $s_5 < 0$ 时,

$$\theta_{234} = \theta_{234} + 180^\circ \quad (8.4.77)$$

以上两式仅给出关节 2、3、4 的关节变量之和, 我们还要分别求出 θ_2 、 θ_3 和 θ_4 , 在 (8.4.57) 式中, 由 (1, 4)、(2, 4) 元素可得

$$p_x c_1 + p_y s_1 = -d_6 c_{234} s_5 + a_4 c_{234} + a_3 c_{23} + a_2 c_2 \quad (8.4.78)$$

$$-p_z = -d_6 s_{234} s_5 + a_4 s_{234} + a_3 s_{23} + a_2 s_2 \quad (8.4.79)$$

上两式可改写为

$$u = a_2 c_{23} + a_2 c_2 \quad (8.4.80)$$

$$t = a_3 s_{23} + a_2 s_2 \quad (8.4.81)$$

其中还有

$$u = p_x c_1 + p_y s_1 + d_6 c_{234} s_5 - a_4 c_{234} \quad (8.4.82)$$

$$t = -p_z + d_6 s_{234} s_5 - a_4 s_{234} \quad (8.4.83)$$

在 θ_1 和 θ_5 确定之后, (8.4.82) 和 (8.4.83) 两式右边均为确定的值, 再由 (8.4.80) 和 (8.4.81) 求平方和

$$c_3 = \frac{u^2 + t^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} = w \quad (8.4.84)$$

进一步求得

$$s_3 = \pm \sqrt{1 - w^2} \quad (8.4.85)$$

于是, 可求得第三关节变量为

$$\theta_3 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\pm \sqrt{1 - w^2}}{w} \right) \quad (8.4.86)$$

θ_3 的两个解相当于肘向上和向下两个位形。

联立求解 (8.4.80) 和 (8.4.81) 两式, 可求得

$$s_2 = \frac{t(a_3 c_3 + a_2) - u a_3 s_3}{t^2 + u^2} \quad (8.4.87)$$

$$c_2 = \frac{u(a_3 c_3 + a_2) + t a_3 s_3}{t^2 + u^2} \quad (8.4.88)$$

于是, 可求得第二关节变量为

$$\theta_2 = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{t(a_3 c_3 + a_2) - u a_3 s_3}{u(a_3 c_3 + a_2) + t a_3 s_3} \right] \quad (8.4.89)$$

这样, 可进一步得到第四关节变量为

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3 \quad (8.4.90)$$

对于第六个关节变量 θ_6 , 由 (8.4.66) 式无法求得, 因此, 可将式 (8.4.65) 左乘 A_5^{-1} 即有

$$A_5^{-1} A_4^{-1} A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1} T_6 = {}^5T_6 \quad (8.4.91)$$

展开可得

$$\begin{bmatrix} f_{51}(n) & f_{51}(o) & 0 & 0 \\ f_{52}(n) & f_{52}(o) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.4.92)$$

式中

$$f_{51}(k) = c_5 [c_{234}(k_x c_1 + k_y s_1) + s_{234}(-k_z)] + s_5(-k_x s_1 + k_y c_1) \quad (8.4.93)$$

$$f_{52}(k) = -s_{234}(k_x c_1 + k_y s_1) - c_{234} k_z \quad (8.4.94)$$

利用 (8.4.92) 式中 (1, 2)、(2, 2) 对应元素相等可得下面的

关系式

$$-s_6 = c_5 [c_{234}(o_x c_1 + o_y s_1) + s_{234}(-o_z)] + s_5(-o_x s_1 + o_y c_1) \quad (8.4.95)$$

和
$$c_6 = -s_{234}(o_x c_1 + o_y s_1) - c_{234}o_z \quad (8.4.96)$$

于是最后求得

$$\theta_6 = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{c_5 [c_{234}(o_x c_1 + o_y s_1) + s_{234}(-o_z)] + s_5(-o_x s_1 + o_y c_1)}{s_{234}(o_x c_1 + o_y s_1) + c_{234}o_z} \right\} \quad (8.4.97)$$

在这一章机器人操作手运动学逆解的讨论中，我们遇到四种带有各自运动学意义的方程式。第一种形如 (8.1.25) 式

$$-a_x \sin \psi + a_y \cos \psi = 0$$

这一方程具有两个相邻 180° 的解答，相应于操作手的两种位形。 a_x 、 a_y 同时为零时，表示操作手失去一个自由度而产生退化。

第二种形如 (8.4.14) 式

$$-(p_x - d_6 a_x)s_1 + (p_y - d_6 a_y)c_1 = d_2$$

这类方程同样具有两个解答，每个解均小于 180° ，角位移正切值也会出现 $0/0$ 的情况，即也可能产生退化。

第三种形式形如 (8.4.28) 和 (8.4.29)

$$d_3 s_2 = (p_x - d_6 a_x)c_1 + (p_y - d_6 a_y)s_1$$

$$d_3 c_2 = p_z - d_6 a_z$$

这种形式分别给出关节角变量的正弦、余弦的表达式或乘上关节伸长量或乘以被认为大于零的偏置量。这类形式可得唯一解。

最后一种形式是出现在具有两个或更多个平行关节轴线的操作手中，得到的是几个关节角位移的和，如实例 2 中的 θ_{234} ，须求得其中两个角，才能由角度之和求得最后一个关节变量。

综合上述分析，关于机器人操作手的运动学逆解，可以归纳以下几点：

(1) 一般来讲，解是存在的，具有旋转和棱柱关节的机械手，在一个单一的串联链中是可解的；

(2) 一般来讲, 运动学逆解具有多值性, 通常, 非零的杆长 a , 愈多, 可能的解就愈多;

(3) 多关节机械手运动学逆解的求解方法, 通常可采用分离变量的方法, 如将 T_0 从第一杆开始逐个前乘相邻杆件的逆变换, 使得运动学方程的左边只含一个关节变量而加以逐步求解;

(4) 在求关节变量时, 充分利用矩阵相等的含义, 寻找零元素或常值元素, 对于角关节变量, 寻求其正切值。

习 题 8

8.1 已知手部坐标系为

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试确定采用欧拉变换描述时 ψ 、 θ 和 φ 。

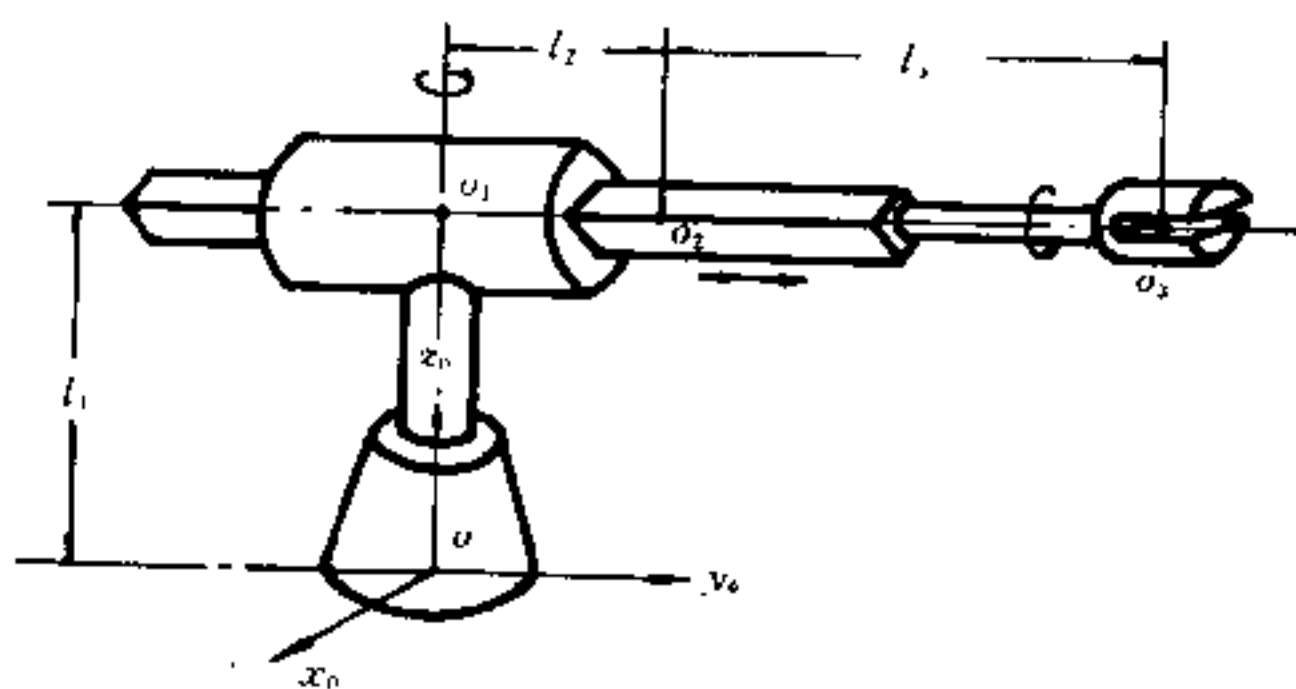
8.2 已知手部坐标系为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 4 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试确定 RPY 变换的 ψ 、 θ 和 φ 。

8.3 求题 7.4 平面三连杆机械手运动学逆解。

8.4 求习图 8-1 所示的三关节机械手关节变量 θ_1 、 d_2 、 θ_3 。



习图 8-1

- 8.5 试求题 7.5 的运动学逆解。
- 8.6 试用高级语言编写题 8.3 和题 8.4 的计算机程序。

9 微分变换关系

机器人操作手的运动学方程是通过机械手各杆之间的空间变换关系来建立的。这种变换关系仅仅涉及到杆的位置和姿态，换句话说，仅仅是几何位移的变换关系。但是，机器人操作手的运动学问题仅分析大位移的变换关系是不够的。其一是因为相邻两杆之间的变换关系 A 矩阵是时间的函数，即在机械手动作过程中， $A=A(t)$ ；其二在机械手各种工况下的调整、测量、观察以及误差分析均涉及到杆件的微小的移动与转动以及这些微小位移在其他构件上产生的位置和姿态的变化。也就是说，机械手的运动学问题与微分移动和微分转动以及变换中的微分关系有关。而在机器人操作手的动力学分析中，讨论力与运动的关系也将涉及到各构件运动的速度、加速度以及这些参数的变换关系。因此，机械手的动力学分析也与微分移动、微分转动以及变换中的微分关系有关。

这一章我们将介绍坐标的微移动和微转动，讨论各杆变换的微分关系，并着重分析用于解决微分变换问题的雅可比矩阵。该矩阵在机械手动力学分析中具有重要的作用。

9.1 微移动和微转动

9.1.1 变换的导数

给定一个变换 T ，设变换 T 中的元素均为某一变量 x 的函数，则 T 的导数为

$$dT = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{11}}{\partial x} & \frac{\partial t_{12}}{\partial x} & \frac{\partial t_{13}}{\partial x} & \frac{\partial t_{14}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial x} & \frac{\partial t_{22}}{\partial x} & \frac{\partial t_{23}}{\partial x} & \frac{\partial t_{24}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{31}}{\partial x} & \frac{\partial t_{32}}{\partial x} & \frac{\partial t_{33}}{\partial x} & \frac{\partial t_{34}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{41}}{\partial x} & \frac{\partial t_{42}}{\partial x} & \frac{\partial t_{43}}{\partial x} & \frac{\partial t_{44}}{\partial x} \end{bmatrix} dx \quad (9.1.1)$$

我们以操作手相邻杆件之间的变换 A 为例，第七章已经给出

$$A = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta ca & s\theta sa & ac\theta \\ s\theta & c\theta ca & -c\theta sa & as\theta \\ 0 & sa & ca & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.1.2)$$

如果两杆之间为回转关节，则变换 A 是 θ 的函数，于是 A 的导数通过 A 中每个元素对 θ 的微分得到，结果为

$$dA = \begin{bmatrix} -s\theta & -c\theta ca & c\theta sa & -as\theta \\ c\theta & -s\theta ca & s\theta sa & ac\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\theta \quad (9.1.3)$$

如果两杆之间为移动关节，则 A 是 d 的函数，此时，有

$$dA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dd \quad (9.1.4)$$

9.1.2 微移动与微转动变换

在我们所讨论的操作机器人中，仅限于五类运动副，即两杆之间或是移动或是转动，因此，我们所分析的微分变换仅局限于微分移动变换和微分转动变换。同样，微分变换也有相对惯性参考系和相对杆自身坐标系两种情况。

对于一给定的坐标系（或变换），可将 $T+dT$ 表示为

$$T + dT = \text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(Q, d\theta) T \quad (9.1.5)$$

式中 $\text{Trans}(dx, dy, dz)$ 表示相对基座坐标系作 dx, dy, dz 移动的变换; $\text{Rot}(Q, d\theta)$ 表示绕基座坐标系中过原点的某轴 Q 作角度为 $d\theta$ 的转动变换。

(9.1.5) 式也改写为如下形式

$$dT = [\text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(Q, d\theta) - E] T \quad (9.1.6)$$

这里, E 表示单位矩阵。

如果上述变换按反方向进行, 也就是说, 变换是相对 T 自身进行, 则微变化可以写作如下形式

$$T + dT = T \text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(Q, d\theta) \quad (9.1.7)$$

于是有

$$dT = T [\text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(Q, d\theta) - E] \quad (9.1.8)$$

我们采用记号 Δ 表示在 (9.1.6) 和 (9.1.7) 式中所出现的共同形式, 称之为微变换

$$\Delta = \text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(Q, d\theta) - E \quad (9.1.9)$$

同时, 我们用左上标表示微变换所相对的坐标系, 用右下标表示产生微变换的变量。如 ${}^i\Delta_j$ 表示第 i 关节变量产生相对第 j 杆坐标系的微分变换。按以上规定, (9.1.6) 式可写作

$$dT = \Delta T \quad (9.1.10)$$

此时, Δ 相对基座坐标系, 左上标省去, 而式 (9.1.8) 可写作

$$dT = T {}^T\Delta \quad (9.1.11)$$

此时, Δ 相对给定的坐标系 T 进行。上两式中 Δ 均未给出右下标是因为在 (9.1.6) 和 (9.1.8) 式中并没有说明在哪个关节产生微分变化。

第 6 章中, 我们曾讨论过齐次变换的移动变换, 其中, 移动变换记为

$$\text{Trans}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1.12)$$

而一般的转动变换记为

$$\text{Rot}(Q, \theta) = \begin{pmatrix} Q_z^2 \text{vers} \theta + c\theta & Q_y Q_x \text{vers} \theta - Q_x s\theta & & \\ Q_x Q_y \text{vers} \theta + Q_x s\theta & Q_y^2 \text{vers} \theta + c\theta & & \\ Q_x Q_z \text{vers} \theta - Q_y s\theta & Q_y Q_z \text{vers} \theta + Q_x s\theta & & \\ 0 & 0 & & \\ Q_x Q_z \text{vers} \theta + Q_y s\theta & 0 & & \\ Q_x Q_y \text{vers} \theta - Q_x s\theta & 0 & & \\ Q_z^2 \text{vers} \theta + c\theta & 0 & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1.13)$$

则微移动变换可记作

$$\text{Trans}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1.14)$$

此时，自变量为一个以微变化 $dx i + dy j + dz k$ 表示的微向量 d 。

对于微转动，由于在 (9.1.13) 式描述的一般转动变换中， θ 为有限值，对于微分变化 $d\theta$ ，有

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta &= d\theta \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta &= 1 \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \text{vers} \theta &= 0 \end{aligned} \quad (9.1.15)$$

代入 (9.1.13) 式可得微转动变换为

$$\text{Rot}(Q, d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -Q_z d\theta & Q_y d\theta & 0 \\ Q_z d\theta & 1 & -Q_x d\theta & 0 \\ -Q_y d\theta & Q_x d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.1.16)$$

于是, 将 (9.1.14) 和 (9.1.16) 式代入 (9.1.9) 式可得

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -Q_z d\theta & Q_y d\theta & 0 \\ Q_z d\theta & 1 & -Q_x d\theta & 0 \\ -Q_y d\theta & Q_x d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Q_z d\theta & Q_y d\theta & dx \\ Q_z d\theta & 0 & -Q_x d\theta & dy \\ -Q_y d\theta & Q_x d\theta & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1.17)$$

9.1.3 等效微转动

由 (9.1.16) 式所描述的微转动属于欧拉微转动或一次微转动。为了讨论方便, 我们将绕过坐标系原点的某向量 Q 所作 $d\theta$ 的一次微转动分解为分别绕坐标系的 x 、 y 和 z 轴作 δ_x 、 δ_y 和 δ_z 的三个微转动的合成。因此, 这两种形式的微转动是等效的, 我们称之为等效微转动。下面讨论二者之间的关系。

第 6 章中已经给出, 相应于绕 x 、 y 和 z 轴的转动变换分别为

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.1.18)$$

$$\text{Rot}(y, \theta) = \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1.19)$$

和

$$\text{Rot}(z, \theta) = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1.20)$$

在微变化 $d\theta$ 条件下, $\sin\theta \rightarrow d\theta$, $\cos\theta \rightarrow 1$, 故相应的三个微转动变换为

$$\text{Rot}(x, \delta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_x & 0 \\ 0 & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1.21)$$

$$\text{Rot}(y, \delta_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1.22)$$

和

$$\text{Rot}(z, \delta_z) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta_z & 0 & 0 \\ \delta_z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1.23)$$

在第3章分析连续转动的合成曾给出一个结论, 即一般情况, 转动的合成与分转动的顺序有关。现在我们来考察连续微转动的合成。设两次微转动的合成为

$$\begin{aligned}
 \text{Rot}(x, \delta_x) \text{Rot}(y, \delta_y) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_x & 0 \\ 0 & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_x & 0 \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.1.24)
 \end{aligned}$$

在上式计算过程中，对于诸如 $\delta_x \delta_y$ 这样的二阶小量作零处理。如果两次微转动的顺序相反，其合成结果为

$$\begin{aligned}
 \text{Rot}(y, \delta_y) \text{Rot}(x, \delta_x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_x & 0 \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad (9.1.25)
 \end{aligned}$$

式中，同样略去高阶小量 $\delta_x \delta_y$ 。比较 (9.1.24) 和 (9.1.25) 可知，结果完全相同。两次微转动的合成如此，三次微转动的合成也是如此，因此，我们可以得出这样的结论：微转动的合成与每次分转动的顺序无关。这样，对于绕三个坐标轴的微转动，无论转动次序如何，其合成的结果都可以写作

$$\begin{aligned}
 &\text{Rot}(x, \delta_x) \text{Rot}(y, \delta_y) \text{Rot}(z, \delta_z) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -\delta_x & \delta_y & 0 \\ \delta_x & 1 & -\delta_z & 0 \\ -\delta_y & \delta_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.1.26)
 \end{aligned}$$

将这个结果与 (9.1.16) 式所表示的一次微转动的结果进行比较可知，只要存在关系

$$\begin{aligned}
 \delta_x &= Q_x d\theta \\
 \delta_y &= Q_y d\theta
 \end{aligned} \quad (9.1.27)$$

$$\delta_z = Q_z d\theta$$

那么, 绕 Q 轴的微转动 $d\theta$ 就等效于分别绕 x 、 y 、 z 轴的三个微转动 δ_x 、 δ_y 、 δ_z 的合成, 而不管它们的转动顺序如何。因此, 微变换 Δ 也可以记作

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_x & \delta_y & dx \\ \delta_x & 0 & -\delta_z & dy \\ -\delta_y & \delta_z & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.1.28)$$

(9.1.28) 式与 (9.1.17) 式是等效的。此时, Δ 可以视为由分别称为微移动向量 d 和微转动向量 δ 组成的微变换。

$$d = dx i + dy j + dz k \quad (9.1.29)$$

$$\delta = \delta_x i + \delta_y j + \delta_z k \quad (9.1.30)$$

有时, 我们也把描述坐标系微变化特征的上述两个向量 d 和 δ 合并在一起写作称之为微运动向量的列矩阵形式, 记作 D , 即

$$D = (dx \ dy \ dz \ \delta_x \ \delta_y \ \delta_z)^T \quad (9.1.31)$$

前面提到的左上标和右下标的含义同样适用于向量 d 、 δ 和 D 。比如 ${}^T\Delta$ 由并称为 ${}^T D$ 的 ${}^T d$ 和 ${}^T \delta$ 两向量组成等等。

例 9.1 给定一个坐标系 A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

若存在相对基座坐标系的微移动 $d = 1i + 0j + 0.5k$ 和微转动 $\delta = 0i + 0.1j + 0k$, 求相应的微变换 dA 。

解: 由已知条件, 有

$$\begin{aligned} dx &= 1, & dy &= 0 & dz &= 0.5 \\ \delta_x &= 0 & \delta_y &= 0.1 & \delta_z &= 0 \end{aligned} \quad (9.1.32)$$

代入微变换表达式 (9.1.28) 得

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1.33)$$

因为变换是相对基座坐标系的，故由 (9.1.10) 式有

$$dA = \Delta A$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1.34) \end{aligned}$$

9.2 相对于杆坐标系的微变换

第一节中我们讨论了如果由相对于基座坐标系的微移动 d 和微转动 δ 来构造微变换 Δ 。这一节将讨论，若给定一个相对基座坐标系的微变换 Δ ，如何确定相对于某杆坐标系的微变换 ${}^T\Delta$ 。

由 (9.1.10) 式和 9.1.11) 式可得

$$\Delta T = T {}^T\Delta \quad (9.2.1)$$

于是有

$${}^T\Delta = T^{-1}\Delta T \quad (9.2.2)$$

上式表达了相对于各杆坐标系的微变换与相对基座坐标系微变换之间的关系， T 为所讨论的杆的位置和姿态，等式右边的量均是相对基座坐标系的。

现在把 (9.2.2) 式右边展开，如前所述， T 写作一般形式为

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.2.3)$$

则

$$\begin{aligned} \Delta T &= \begin{bmatrix} 0 & -\delta_x & \delta_y & dx \\ \delta_x & 0 & -\delta_z & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\delta \times n)_x & (\delta \times o)_x & (\delta \times a)_x & ((\delta \times p) + d)_x \\ (\delta \times n)_y & (\delta \times o)_y & (\delta \times a)_y & ((\delta \times p) + d)_y \\ (\delta \times n)_z & (\delta \times o)_z & (\delta \times a)_z & ((\delta \times p) + d)_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

于是可得

$$\begin{aligned} T^{-1} \Delta T &= \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p \cdot n \\ o_x & o_y & o_z & -p \cdot o \\ p_x & p_y & p_z & -p \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta T \\ &= \begin{bmatrix} n \cdot (\delta \times n) & n \cdot (\delta \times o) & n \cdot (\delta \times a) & n \cdot ((\delta \times p) + d) \\ o \cdot (\delta \times n) & o \cdot (\delta \times o) & o \cdot (\delta \times a) & o \cdot ((\delta \times p) + d) \\ a \cdot (\delta \times n) & a \cdot (\delta \times o) & a \cdot (\delta \times a) & a \cdot ((\delta \times p) + d) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

由上述结果看出，矩阵中各元素表现出向量的三重积（混积）的形式。向量的三重积具有轮换性，即

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) \quad (9.2.6)$$

故有

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = -b \cdot (a \times c) \quad (9.2.7)$$

和 $a \cdot (a \times c) = 0 \quad (9.2.8)$

因此, (9.2.5) 式右边矩阵内对角线元素均为零, 进一步整理后代入 (9.2.2) 式, 得到

$${}^T\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \cdot (n \times o) & \delta \cdot (a \times n) \\ \delta \cdot (n \times o) & 0 & -\delta \cdot (o \times a) \\ -\delta \cdot (a \times n) & \delta \cdot (o \times a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta \cdot (p \times n) + d \cdot n \\ \delta \cdot (p \times o) + d \cdot o \\ \delta \cdot (p \times a) + d \cdot a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.2.9)$$

由于向量 n 、 o 和 a 之间存在关系

$$n \times o = a, \quad a \times n = o, \quad o \times a = n \quad (9.2.10)$$

故 (9.2.9) 式可改写为

$${}^T\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -o \cdot a & \delta \cdot o & \delta \cdot (p \times n) + d \cdot n \\ \delta \cdot a & 0 & -\delta \cdot n & \delta \cdot (p \times o) + d \cdot o \\ -\delta \cdot o & \delta \cdot n & 0 & \delta \cdot (p \times a) + d \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.2.11)$$

参照 Δ 的结构形式, 将 ${}^T\Delta$ 记为

$${}^T\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -{}^T\delta_x & {}^T\delta_y & {}^Tdx \\ {}^T\delta_x & 0 & -{}^T\delta_z & {}^Tdy \\ -{}^T\delta_y & {}^T\delta_z & 0 & {}^Tdz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.2.12)$$

对比 (9.2.11) 式与 (9.2.12) 式可得如下关系

$$\begin{aligned} {}^Tdx &= \delta \cdot (p \times n) + d \cdot n \\ {}^Tdy &= \delta \cdot (p \times o) + d \cdot o \\ {}^Tdz &= \delta \cdot (p \times a) + d \cdot a \end{aligned} \quad (9.2.13)$$

$$\begin{aligned}
{}^T\delta_x &= \delta \cdot n \\
{}^T\delta_y &= \delta \cdot o \\
{}^T\delta_z &= \delta \cdot a
\end{aligned} \tag{9.2.14}$$

以上各式右边的向量均相对基座坐标系, 其中 o 和 d 为相对基座坐标系的微转动和微移动, n 、 o 、 a 和 p 均为 T 坐标系中的向量。由这些关系表明, 可以用相对基座坐标系的微变换来获得相对某确定坐标系的微变换 (Td 和 To)。 (9.2.13) 和 (9.2.14) 式合起来也可以记为矩阵运算

$$\begin{bmatrix} {}^Td_x \\ {}^Td_y \\ {}^Td_z \\ {}^T\delta_x \\ {}^T\delta_y \\ {}^T\delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (p \times n)_x & (p \times n)_y & (p \times n)_z \\ o_x & o_y & o_z & (p \times o)_x & (p \times o)_y & (p \times o)_z \\ a_x & a_y & a_z & (p \times a)_x & (p \times a)_y & (p \times a)_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \tag{9.2.15}$$

在由 Δ 推算 ${}^T\Delta$ 时, 若利用 (9.2.13) 和 (9.2.14) 两式的如下变式将更为简便。

$$\begin{aligned}
{}^Td_x &= n \cdot ((\delta \times p) + d) \\
{}^Td_y &= o \cdot ((\delta \times p) + d) \\
{}^Td_z &= a \cdot ((\delta \times p) + d)
\end{aligned} \tag{9.2.16}$$

$$\begin{aligned}
{}^T\delta_x &= n \cdot \delta \\
{}^T\delta_y &= o \cdot \delta \\
{}^T\delta_z &= a \cdot \delta
\end{aligned} \tag{9.2.17}$$

例 9.2 给出与例 9.1 相同的坐标系 A 和微移动、微转动, 即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$d = 1i + 0j + 0.5k$$

$$\delta = 0i + 0.1j + 0k$$

求在坐标 A 中引起的微移动和微转动

解: 由 A 可知

$$n = 0i + 1i + 0k$$

$$o = 0i + 0j + 1k \quad (9.2.18)$$

$$a = 1i + 0j + 0k$$

和

$$p = 10i + 5j + 0k$$

故

$$\begin{aligned} o \times p &= \tilde{\delta} p \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.2.19)$$

于是有

$$\begin{aligned} \delta \times p + d &= 0i + 0j - 1k + 1i + 0j + 0.5k \\ &= 1i + 0j - 0.5k \end{aligned} \quad (9.2.20)$$

利用 (9.2.16) 可求得

$$\begin{aligned} {}^A dx &= n \cdot (\delta \times p + d) = 0 \\ {}^A dy &= o \cdot (\delta \times p + d) = -0.5 \\ {}^A dz &= a \cdot (\delta \times p + d) = 1 \end{aligned} \quad (9.2.21)$$

再利用 (9.2.17) 求得

$$\begin{aligned} {}^A \delta_x &= n \cdot \delta = 0.1 \\ {}^A \delta_y &= o \cdot \delta = 0 \\ {}^A \delta_z &= a \cdot \delta = 0 \end{aligned} \quad (9.2.22)$$

因此，构造相对 A 坐标系的微变换为

$${}^A\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2.23)$$

最后可求得 A 系引起的微分变换为

$$\begin{aligned} dA = A^A\Delta &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2.24) \end{aligned}$$

结果与前例相同，例 9.1 是直接由相对基座坐标系的微变换求得在 A 坐标系产生的微分变化，而例 9.2 则是由相对基座坐标系的微变换先求得相对 A 坐标系的微变换，再由后者求得在 A 系中产生的微分变化。

9.3 各杆坐标系微变换的变换关系

这一节我们将讨论由相对某杆的微变换求得相对另一杆的微变换。

9.3.1 由 ${}^T\Delta$ 求 Δ

在上一节中，公式 (9.2.16) 和 (9.2.17) 是利用相对于基座坐标系的微变换 Δ 求得相对某杆坐标系的微变换 ${}^T\Delta$ 。如果给出的是 ${}^T\Delta$ ，应该怎样确定 Δ ？

由 (9.2.1) 式不难得到

$$\Delta = T^{-1} \Delta T^{-1} \quad (9.3.1)$$

将上式写作类似 (9.2.2) 式的形式, 即

$$\Delta = (T^{-1})^{-1} \Delta (T^{-1}) \quad (9.3.2)$$

这样, 如果把这里的 T^{-1} 视为 (9.2.2) 式中的 T , 则 (9.3.2) 与 (9.2.2) 式具有相同的结构形式。因为

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_x & \delta_y & dx \\ \delta_x & 0 & -\delta_z & dy \\ -\delta_y & \delta_z & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.3.3)$$

参照 (9.2.16) 式和 (9.2.17) 式, 有

$$\begin{aligned} dx &= n \cdot ((^T\delta \times p) + ^Td) \\ dy &= o \cdot ((^T\delta \times p) + ^Td) \\ dz &= a \cdot ((^T\delta \times p) + ^Td) \end{aligned} \quad (9.3.4)$$

和

$$\begin{aligned} \delta_x &= n \cdot ^T\delta \\ \delta_y &= o \cdot ^T\delta \\ \delta_z &= a \cdot ^T\delta \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

其中, Td 和 $^T\delta$ 为 $^T\Delta$ 中的微移动向量和微转动向量, 而 n, o, a, p 则为 T^{-1} 中的四个列向量。(9.3.4) 式和 (9.3.5) 式描述了如何由 $^T\Delta$ 求得 Δ 。

9.3.2 由 $^T\Delta$ 求对任一个坐标系的微变换 $^X\Delta$

由 $^T\Delta$ 求 $^X\Delta$ 就是要建立二者类似于 (9.2.2) 式所示的变换关系。为此, 假设今有一相对基座坐标系的坐标系 A 和相对 A 的坐标系 B , 而某一微变换相对基座为 Δ , 相对 B 系为 $^B\Delta$, 那么, 参照 (9.2.1) 式有如下关系

$$\Delta AB = AB^B\Delta \quad (9.3.6)$$

该变换关系如图 9-1 所示。于是可得

$$\Delta = AB {}^B\Delta B^{-1}A^{-1} \quad (9.3.7)$$

或写作类似 (9.2.2) 式的形式

$$\Delta = (B^{-1}A^{-1})^{-1} {}^B\Delta (B^{-1}A^{-1}) \quad (9.3.8)$$

简记为

$$\Delta = C^{-1} {}^B\Delta C \quad (9.3.9)$$

式中, $C = B^{-1}A^{-1}$, 反映了从微变换 ${}^B\Delta$ 到微变换 Δ 之间的变换关系。在图 9-1 中, C 变换是从 ${}^B\Delta$ 的起点到 Δ 的起点, 或从 ${}^B\Delta$ 的终点到 Δ 的终点的变换。

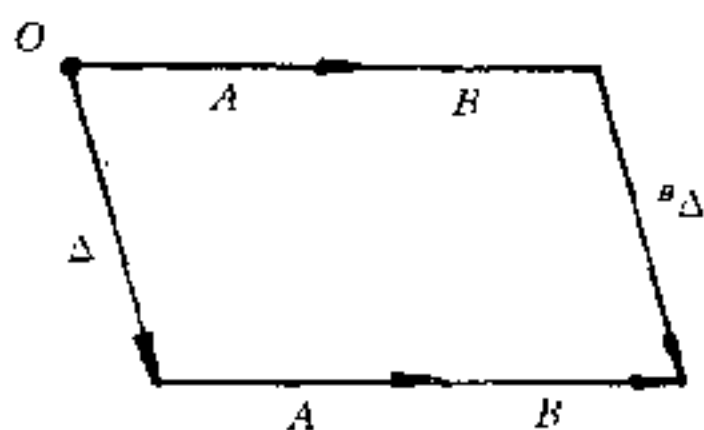


图 9-1

图 9-2 为机械手的总微分变换图。它既可以表达变换方程

$$ZT_6E = BG \quad (9.2.10)$$

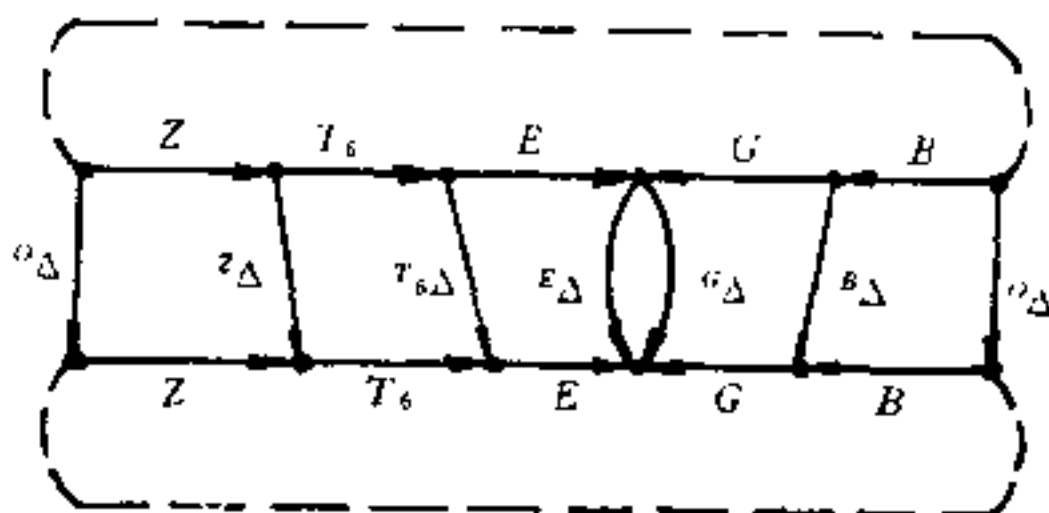


图 9-2 总微分变换图

而且所有微变换之间的关系也可由图中找到

$${}^I\Delta = ({}^IT_J)^{-1} {}^J\Delta ({}^IT_J) \quad (9.3.11)$$

上式表明, 由 J 坐标的微变换求得对 I 系所产生的微变换, 只要找到 J 系相对 I 系的变换 IT_J 就可以了。例如由于微变换 ${}^B\Delta$ 而引起的微变换 ${}^T_6\Delta$, 可以由变换 GE^{-1} 直接得到。当然, 也可以通过变换 $B^{-1}ZT_6$ 来实现。二者等效, 这可以由图 9-2 清楚地看出。写成表达式就是

$${}^T_6\Delta = (GE^{-1})^{-1} {}^B\Delta (GE^{-1}) \quad (9.3.12)$$

或

$${}^T_6\Delta = (B^{-1}ZT_6)^{-1} {}^B\Delta (B^{-1}ZT_6) \quad (9.3.13)$$

例 9.3 某机械手第 5 杆上安装有摄象机，它们之间的联结为

$${}^T_5CAM = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设操作手处于当前位置时，它的末杆被描述为

$${}^6T_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为了将末端夹持器引至与目标物接触，在 CAM 坐标中给出微变化为

$${}^{CAM}d = -1i + 0j + 0k$$

$${}^{CAM}\delta = 0i + 0j + 0.1k$$

问此时在末杆坐标系 T_6 中要求的微变化是什么？见图 9-4。

解：该问题总的变换图为 9-3，变换方程为

$$T_5A_6EX = T_5CAMO \quad (9.3.14)$$

其中， X 为目标物对末端夹持器的未知变换； O 为用摄象机描述的目标物，即 ${}^{CAM}O$ ， E 为末端夹持器对末杆的描述。

由变换图和变换方程均可求得由 ${}^{CAM}\Delta$ 到 ${}^T_6\Delta$ 之间变换关系为

$$T_1 = CAM^{-1}A_6 \quad (9.3.15)$$

因

$$CAM^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.3.16)$$

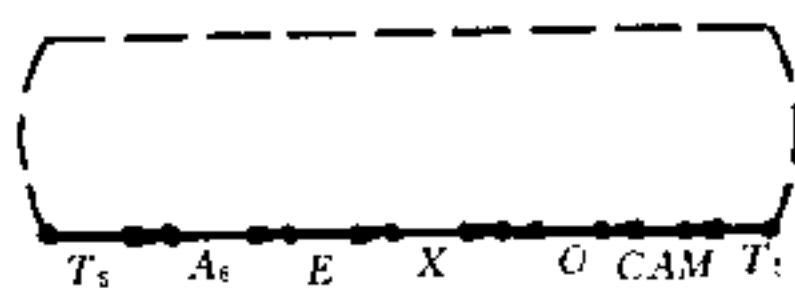


图 9-3

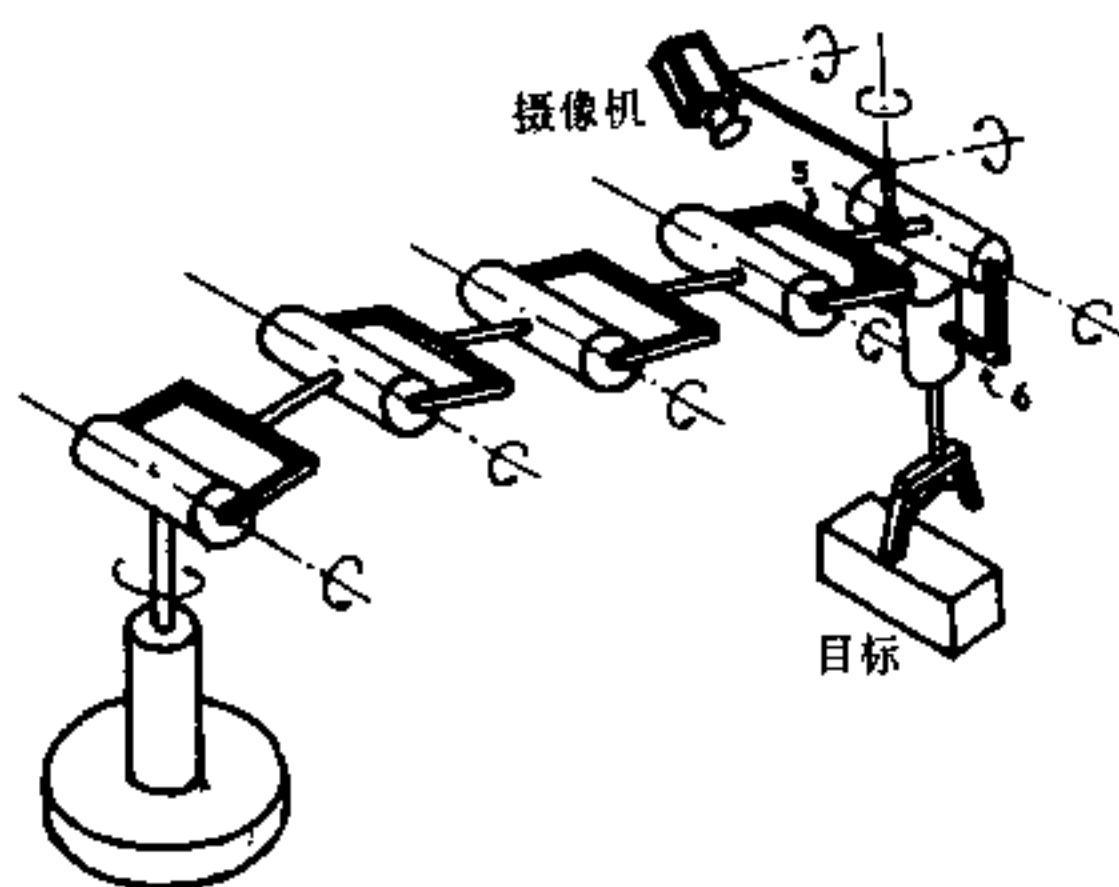


图 9-4

故有

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.3.17)
 \end{aligned}$$

根据 (9.3.11) 式可得

$${}^{T_0}\Delta = T^{-1} {}^{CAM}\Delta T \quad (9.3.18)$$

在 T 中, 有

$$\begin{aligned}
 n &= 0i - 1j + 0k \\
 o &= 0i + 0j + 1k \\
 a &= -1i + 0j + 0k \\
 p &= 2i + 0j + 5k
 \end{aligned} \quad (9.3.19)$$

利用 (9.2.16) 式和 (9.2.17) 式的形式, 可得

$${}^{CAM}\delta \times p = 0i + 0.2j + 0k \quad (9.3.20)$$

$${}^{CAM}\delta \times p + d = -1i + 0.2j + 0k \quad (9.3.21)$$

最后有

$${}^{T_0}d = -0.2i + 0j + 1k \quad (9.3.22)$$

$${}^{T_0}\delta = 0i + 0.1j + 0k \quad (9.3.23)$$

9.4 操作手的雅可比矩阵

在前面几节的讨论中, 我们仅仅分析了各坐标系所发生微变换的变换关系, 而没有涉及到所发生微分变化的变量。这一节我们将引入微变化的变量。

对于操作手来讲, T_0 的位置和姿态的微变化是由各关节变量

的微小变化 dq_i 所产生的。对于回转关节, dq_i 相应为微转动 $d\theta_i$; 对于移动关节, dq_i 则相应为微移动 dd_i 。我们已经知道, 操作手末端的位姿为

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad (9.4.1)$$

按照规定, 变换 A 对于回转关节是绕其内侧杆的 z 轴转动 θ 角, 而对于移动关节则沿其内侧杆的 z 轴移动位移 d 。我们用 ${}^{i-1}\Delta_i$ 表示 i 杆坐标系相对 $i-1$ 杆坐标系 (z 轴) 的微变换, 显然这是相邻微变换。而机械手的每个相邻微变换都会在机械手的手部产生一个微变化 ${}^T\Delta_i$ 。这里, 右下标 i 表示第 i 杆发生微变化的变量, 或是 θ_i , 或是 d_i 。于是, 由 (9.1.11) 式, 有

$$(dT_6)_i = T_6 {}^T\Delta_i dq_i \quad (9.4.2)$$

按第三节所给出的结论, 由 ${}^{i-1}\Delta_i$ 求 ${}^T\Delta_i$ 时, 它们之间的变换关系是从 $i-1$ 杆到第 6 杆的变换, 见图 9-5。若用 T 描述二者之间的变换, 应有

$$\begin{aligned} T &= A_i A_{i+1} \cdots A_6 \\ &= {}^{i-1}T_6 \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

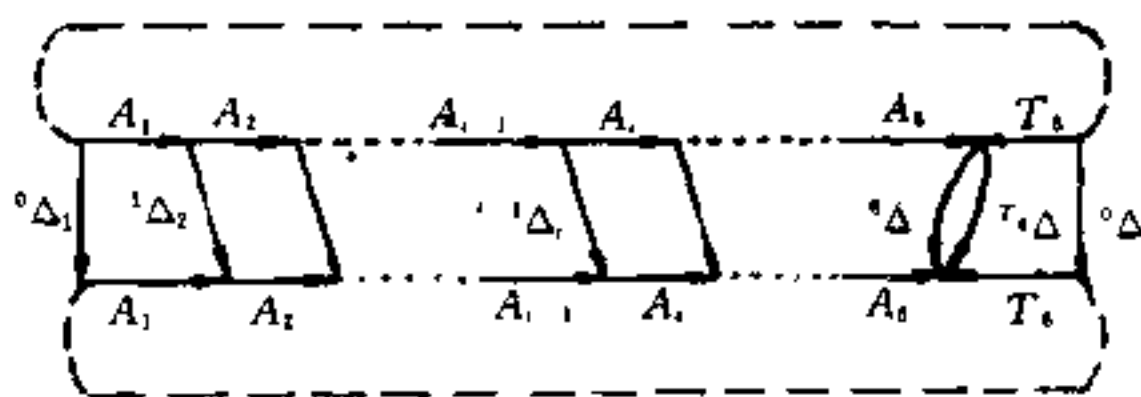


图 9-5

于是, 按 (9.3.11) 式, 可得

$${}^T\Delta_i = (A_i A_{i+1} \cdots A_6)^{-1} {}^{i-1}\Delta_i (A_i A_{i+1} \cdots A_6) \quad (9.4.4)$$

或简记为

$${}^T\Delta_i = ({}^{i-1}T_6)^{-1} {}^{i-1}\Delta_i ({}^{i-1}T_6) \quad (9.4.5)$$

考察 ${}^{i-1}\Delta_i$, 若设 ${}^{i-1}\Delta_i$ 为单位微分变换, 则对于回转关节有

$$\begin{aligned} {}^{i-1}d_i &= 0 \\ {}^{i-1}\delta_i &= 0i + 0j + 1k \end{aligned} \quad (9.4.6)$$

代入 (9.2.16) 和 (9.2.17) 式, 可得

$$\begin{aligned} {}^T_6d_{ix} &= n \cdot ({}^{i-1}\delta \times p) \\ {}^T_6d_{iy} &= o \cdot ({}^{i-1}\delta \times p) \\ {}^T_6d_{iz} &= a \cdot ({}^{i-1}\delta \times p) \end{aligned} \quad (9.4.7)$$

$$\begin{aligned} {}^T_6\delta_{ix} &= n \cdot {}^{i-1}\delta \\ {}^T_6\delta_{iy} &= o \cdot {}^{i-1}\delta \\ {}^T_6\delta_{iz} &= a \cdot {}^{i-1}\delta \end{aligned} \quad (9.4.8)$$

最后可得

$$\begin{aligned} {}^T_6d_i &= (-n_x p_y + n_y p_x)i + (-o_x p_y + o_y p_x)j \\ &\quad + (-a_x p_y + a_y p_x)k \end{aligned} \quad (9.4.9)$$

$${}^T_6\delta_i = n_x i + o_x j + a_x k \quad (9.4.10)$$

若 i 关节为移动关节, 则有

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\delta_i &= 0 \\ {}^{i-1}d_i &= 0i + 0j + 1k \end{aligned} \quad (9.4.11)$$

代入 (9.2.16) 和 (9.2.17) 式可得由于 i 关节产生一个单位微移动在 T_6 中引起的微变化为

$${}^T_6d_i = n_x i + o_x j + a_x k \quad (9.4.12)$$

$${}^T_6\delta_i = 0i + 0j + 0k \quad (9.4.13)$$

需要指出的是, 在最后得到 (9.4.9)、(9.4.10) 和 (9.4.12)、(9.4.13) 式的过程中, n 、 o 、 a 和 p 四个列向量均为变换 ${}^{i-1}T_6$ 中的列向量。

根据以上分析, 由于 i 杆的微移动或微转动可以求得在手部产生的微变换 ${}^T_6\Delta_i$, 由此引起手部的微分变化为

$$(dT_6)_i = T_6 {}^T_6\Delta_i dq_i \quad (9.4.14)$$

对于一个六杆串联式机械手, 所有六个关节的微变换都会引起手部的微分变化, 即有

$$\begin{aligned}
 dT_6 &= \sum_{i=1}^6 (dT_6)_i \\
 &= \sum_{i=1}^6 T_6^T \Delta_i dq_i
 \end{aligned} \quad (9.4.15)$$

由式 (9.1.11) 可知

$$dT_6 = T_6^T \Delta \quad (9.4.16)$$

于是可得

$$T_6^T \Delta = \sum_{i=1}^6 T_6^T \Delta_i dq_i \quad (9.4.17)$$

将构成微变换 Δ 的微移动和微转动向量写作微运动向量的形式, 则上式可写作

$${}^T_6 \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = {}^T_6 \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{2x} & d_{3x} & d_{4x} & d_{5x} & d_{6x} \\ d_{1y} & d_{2y} & d_{3y} & d_{4y} & d_{5y} & d_{6y} \\ d_{1z} & d_{2z} & d_{3z} & d_{4z} & d_{5z} & d_{6z} \\ \delta_{1x} & \delta_{2x} & \delta_{3x} & \delta_{4x} & \delta_{5x} & \delta_{6x} \\ \delta_{1y} & \delta_{2y} & \delta_{3y} & \delta_{4y} & \delta_{5y} & \delta_{6y} \\ \delta_{1z} & \delta_{2z} & \delta_{3z} & \delta_{4z} & \delta_{5z} & \delta_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{bmatrix} \quad (9.4.18)$$

上式可以简记为

$${}^T_6 D = J(q) dq \quad (9.4.19)$$

其中

$$J(q) = \frac{\partial {}^T_6 D}{\partial q} \quad (9.4.20)$$

即 (9.4.18) 式右边的 6×6 矩阵, 称为雅可比矩阵。它由六个列向量组成, 每个列向量就是对应的关节变量的微分变化所引起的手部的微分运动向量。

这里须要指出的是, 若机械手不是六杆, 即 $N \neq 6$, 那么它所对应的雅可比矩阵将是 $6 \times N$ 阶矩阵, 雅可比矩阵不仅反映了各杆的微变换引起的手部的微分变化, 而且也反映出手部与各杆间

运动速度的关系。

例 9.4 求斯坦福操作手的雅可比矩阵。

解：斯坦福操作手各相邻杆之间的变换关系已由 (7.3.34) 式给出；手部与各杆之间的变换关系也已由 (7.3.35) 至 (7.3.40) 式给出。我们将利用 (9.4.9)、(9.4.10) 或 (9.4.12)、(9.4.13) 式分别确定雅可比矩阵中每一列微运动向量。

对于第一列微运动向量，计算中的 n 、 o 、 a 、 p 均为 T_6 中的列向量，第一关节为转动关节，故利用 (9.4.9) 式，有

$$\begin{aligned} {}^T_6d_{1x} &= -n_x p_y + n_y p_x \\ &= -\{c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)\} \\ &\quad \times \{s_1[d_6c_2c_4s_5 + s_2(d_6c_5 + d_3)] + c_1(d_6s_4s_5 + d_2)\} \\ &\quad + \{s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)\} \\ &\quad \times \{c_1[d_6c_2c_4s_5 + s_2(d_6c_5 + d_3)] - s_1(d_6s_4s_5 + d_2)\} \end{aligned} \quad (9.4.21)$$

$$\begin{aligned} {}^T_6d_{1y} &= -o_x p_y + o_y p_x \\ &= -\{c_1[-c_2(c_4c_5s_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6)\} \\ &\quad \times \{s_1[d_6c_2c_4s_5 + s_2(d_6c_5 + d_3)] + c_1(d_6s_4s_5 + d_2)\} \\ &\quad + \{s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6)\} \\ &\quad \times \{c_1[d_6c_2c_4s_5 + s_2(d_6c_5 + d_3)] - s_1(d_6s_4s_5 + d_2)\} \end{aligned} \quad (9.4.22)$$

$$\begin{aligned} {}^T_6d_{1z} &= -a_x p_y + a_y p_x \\ &= -\{c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5\} \times \{s_1[d_6c_2c_4s_5 + s_2(d_6c_5 \\ &\quad + d_3)] + c_1(d_6s_4s_5 + d_2)\} + \{s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) \\ &\quad + c_1s_4s_5\} \times \{c_1[d_6c_2c_4s_5 + s_2(d_6c_5 + d_3)] \\ &\quad - s_1(d_6s_4s_5 + d_2)\} \end{aligned} \quad (9.4.23)$$

再利用 (9.4.10) 式，有

$$\begin{aligned} {}^T_6\delta_{1x} &= n_x \\ &= -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \end{aligned} \quad (9.4.24)$$

$$\begin{aligned} r_6 \delta_{1y} &= o_z \\ &= s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 \end{aligned} \quad (9.4.25)$$

$$\begin{aligned} r_6 \delta_{1z} &= a_x \\ &= -s_2c_4s_5 + c_2c_5 \end{aligned} \quad (9.4.26)$$

前三式经过简化后，可得雅可比矩阵第一列为

$$\frac{\partial D}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -d_2[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + d_3s_2(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ \quad + d_6(s_2c_4c_5s_6 + c_2s_5s_6 + s_2s_4c_6) \\ d_2[c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - s_2s_5s_6] + d_3s_2(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\ \quad + d_6(s_2c_4c_5c_6 + c_2s_5c_6 - s_2s_4s_6) \\ -d_2(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + d_3s_2s_4s_5 \\ \quad - s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \\ \quad s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 \\ \quad - s_2c_4s_5 + c_2c_5 \end{bmatrix} \quad (9.4.27)$$

同理，可得第二列的结果为

$$\frac{\partial D}{\partial \theta_2} = \begin{bmatrix} d_3(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + d_6(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\ -d_3(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - d_6(c_4s_6 + s_4c_5c_6) \\ d_3c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6d_3c_4s_5 \\ -s_4c_5s_6 + c_4c_6 \\ s_4s_5 \end{bmatrix} \quad (9.4.28)$$

第三列微运动向量相应于移动关节，利用 (9.4.12) 和 (9.4.13) 式计算，结果为

$$\frac{\mathcal{F}_6 D}{\partial d_3} = \begin{bmatrix} -s_5 c_6 \\ s_5 s_6 \\ c_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.4.29)$$

第四列的结果为

$$\frac{\mathcal{F}_6 D}{\partial \theta_4} = \begin{bmatrix} d_6 s_5 s_6 \\ d_6 s_5 c_6 \\ 0 \\ -s_5 c_6 \\ s_5 s_6 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad (9.4.30)$$

第五列、第六列的结果分别为

$$\frac{\mathcal{F}_6 D}{\partial \theta_5} = \begin{bmatrix} d_6 c_6 \\ -d_6 s_6 \\ 0 \\ s_6 \\ c_6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.4.31)$$

$$\frac{\mathcal{F}_6 D}{\partial \theta_6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.4.32)$$

下面，我们设定斯坦福机械手处于某一具体状态，其手部的位姿为

$$T_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 20.0 \\ 1 & 0 & 0 & 6.0 \\ 0 & 0 & -1 & 10.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.4.33)$$

各关节变量在该时刻的取值列于表 9-1。

表 9-1 斯坦福机械手某状态杆参数表

杆 序	θ	α	a	d	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
1	0°	-90°	0	15.0	0	1	-1	0
2	90°	90°	0	6.0	1	0	1	0
3	0°	0°	0	d_3	0	1	0	1
4	0°	-90°	0	0	0	1	-1	0
5	90°	90°	0	0	1	0	1	0
6	90°	0°	0	5.0	1	0	0	1

如果各关节变量的微变化为

$$dq_i = (0.1 \quad -0.1 \quad 2.0 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1)^T \quad (9.4.34)$$

现在确定其雅可比矩阵，并求在 T_6 所发生的微分变化 dT_6 。

利用 (9.4.27) 至 (9.4.32) 式，分别计算雅可比矩阵各列后，可得雅可比矩阵为

$$\frac{\partial T_6}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} 20.0 & 0.0 & 0.0 & 5.0 & 0.0 & 0.0 \\ -6.0 & -5.0 & 1.0 & 0.0 & -5.0 & 0.0 \\ 0.0 & 20.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (9.4.35)$$

于是利用 (9.4.19) 可求得此刻手部的微运动向量为

$${}^T_0 \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \frac{\partial {}^T_0 D}{\partial q} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 2.0 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.4 \\ -2.0 \\ 0.0 \\ 0.1 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (9.4.36)$$

故手部的微移动向量和微转动向量分别为

$${}^T_0 d = 2.5i + 1.4j + 2.0k \quad (9.4.37)$$

$${}^T_0 \delta = 0.0i + 0.1j + 0.0k \quad (9.4.38)$$

这样，可以构造 ${}^T_0 \Delta$ 如下

$${}^T_0 \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4 \\ -0.1 & 0 & 0 & -2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.4.39)$$

最后利用 (9.1.11) 式可求得手部发生的微变化为

$$\begin{aligned} dT_6 &= T_6 {}^T_0 \Delta \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 20.0 \\ 1 & 0 & 0 & 6.0 \\ 0 & 0 & -1 & 10.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4 \\ -0.1 & 0 & 0 & -2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.4 \\ 0 & 0 & 0.1 & 2.5 \\ 0.1 & 0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.4.40) \end{aligned}$$

9.5 逆雅可比矩阵

通过前面的分析，我们可以看出，雅可比矩阵将机械手各关

节变量的微分变化映射到手部，从这个意义上讲，雅可比矩阵是一个变换矩阵。现在的问题是，操作手工作时，有时会给出预期的位置和姿态的微小变化 T_6dx 、 T_6dy 、 T_6dz 和 ${}^T_6\delta_x$ 、 ${}^T_6\delta_y$ 、 ${}^T_6\delta_z$ ，以期求得各关节变量的微小变化。换句话说，就是要求对方程(9.4.18)求逆解。假设其逆解为

$$\begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{bmatrix} = {}^T_6 \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{2x} & \cdots & d_{6x} \\ d_{1y} & d_{2y} & \cdots & d_{6y} \\ d_{1z} & d_{2z} & \cdots & d_{6z} \\ \delta_{1x} & \delta_{2x} & \cdots & \delta_{6x} \\ \delta_{1y} & \delta_{2y} & \cdots & \delta_{6y} \\ \delta_{1z} & \delta_{2z} & \cdots & \delta_{6z} \end{bmatrix}^{-1} {}^T_6 \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \quad (9.5.1)$$

从形式上看，似乎只要对雅可比矩阵求逆就可以了，但是，考虑到：

① 在某种情况下，一个六关节串联机械手的雅可比矩阵的逆阵不存在，如机械手发生退化而出现奇异时；

② 一个 6×6 阶矩阵的逆阵即便存在，其逆的求解也较困难，尤其雅可比矩阵比较复杂时；

③ 对于非六杆机械手，其雅可比矩阵非方阵，无逆阵可言。

基于以上原因，要求我们寻求其他求(9.4.18)式逆解的方法，而不是仅仅寻求逆雅可比矩阵。

下面介绍的方法是对运动学逆解所得的关节变量直接微分的方法。这一方法能导出与所得关节变量有相同顺序的微变化表达式，它们均是手部微运动向量 T_6D 中各分量的函数，也是各关节变量微变化的函数，而且，这一方法往往导出较为简单的微变化表达式。采用这一方法时，如果出现某个关节受到约束限制，可置其变化为零，从而得出后续关节的解。

应用这一方法求解的步骤是，利用给定的微移动向量 T_6d 和微转动向量 ${}^T_6\delta$ 构造微变换 ${}^T_6\Delta$ ，再利用(9.4.16)式求得 dT_6 ，从而

得到 dT_0 中各元素的微分，代入各关节变量的微分便可求得由于手部的微变化而引起的各关节变量的微分变化。

例 9.5 讨论斯坦福机械手手部微变化的逆解。

解：在 8.4 节中已经分析过斯坦福机械手的运动学逆解。先从第一个关节变量 θ_1 开始，对 (8.4.14) 式直接微分，即对

$$-(p_x - d_6 a_x)s_1 + (p_y - d_6 a_y)c_1 = d_z \quad (9.5.2)$$

直接微分可得

$$d\theta_1 = \frac{(dp_y - d_6 da_y)c_1 - (dp_x - d_6 da_x)s_1}{(p_x - d_6 a_x)c_1 + (p_y - d_6 a_y)s_1} \quad (9.5.3)$$

自然，此时 $\theta_1 + d\theta_1$ 不应超出第一关节的运动范围，对于其他关节，计算微变化后均应进行这样的检查。如果超出，对 dq_i 应进行如下处理。

$$dq_i = i \text{ 关节运动范围} - q_i \quad (9.5.4)$$

第二关节变量 θ_2 的解由 (8.4.30) 给出，即

$$\theta_2 = \text{tg}^{-1} \left[\frac{(p_x - d_6 a_x)c_1 + (p_y - d_6 a_y)s_1}{p_x - d_6 a_x - d_1} \right] \quad (9.5.5)$$

为了对反正切函数进行微分，我们令

$$\text{tg}\theta_i = \frac{Ns_i}{Nc_i} \quad (9.5.6)$$

则

$$d\theta_i = \frac{Nc_i d(Ns_i) - Ns_i d(Nc_i)}{(Ns_i)^2 + (Nc_i)^2} \quad (9.5.7)$$

回到 (9.5.5) 式，联合 (8.4.28) 和 (8.4.29) 式，有

$$Ns_2 = d_3 s_2 = (p_x - d_6 a_x)c_1 + (p_y + d_6 a_y)s_1 \quad (9.5.8)$$

$$Nc_2 = d_3 c_2 = p_x - d_6 a_x - d_1 \quad (9.5.9)$$

于是得

$$\begin{aligned} d(Ns_2) &= (dp_x - d_6 da_x)c_1 + (p_x - d_6 a_x)dc_1 \\ &\quad + (dp_y + d_6 da_y)s_1 + (p_y + d_6 a_y)ds_1 \end{aligned} \quad (9.5.10)$$

$$d(Nc_2) = dp_z - d_6 da_z \quad (9.5.11)$$

代入 (9.5.7) 式, 可得

$$d\theta_2 = \frac{c_2 d(Ns_2) - s_2 d(Nc_2)}{d_3} \quad (9.5.12)$$

第三个关节变量 d_3 由式 (8.4.39) 给出, 即

$$d_3 = [(p_x - d_6 a_x)c_1 + (p_y - d_6 a_y)s_1]s_2 + (p_z - d_6 a_z)c_2 - d_1 c_2 \quad (9.5.13)$$

将 (9.5.8) 式代入上式, 改写为

$$d_3 = (Ns_2)s_2 + (p_z - d_6 a_z)c_2 - d_1 c_2 \quad (9.5.14)$$

于是有

$$\begin{aligned} dd_3 &= (Ns_2)ds_2 + d(Ns_2)s_2 + (dp_z - d_6 da_z)c_2 \\ &\quad + (p_z - d_6 a_z)dc_2 - d_1 dc_2 \end{aligned} \quad (9.5.15)$$

第四个关节变量 θ_4 的有关信息由 (8.4.47) 和 (8.4.48) 式给出, 即

$$Ns_4 = -a_x s_1 + a_y c_1 \quad (9.5.16)$$

$$Nc_4 = M_{41}c_2 - a_z s_2 \quad (9.5.17)$$

其中,

$$M_{41} = a_x c_1 + a_y s_1 \quad (9.5.18)$$

于是有

$$dM_{41} = c_1 da_x + a_x dc_1 + s_1 da_y + a_y ds_1 \quad (9.5.19)$$

$$d(Ns_4) = -a_x ds_1 - s_1 da_x + a_y dc_1 + c_1 da_y \quad (9.5.20)$$

$$d(Nc_4) = c_2 dM_{41} + M_{41} dc_2 - a_z ds_2 - s_2 da_z \quad (9.5.21)$$

代入 (9.5.7) 式可得 $d\theta_4$

$$d\theta_4 = \frac{c_4 d(Ns_4) - s_4 d(Nc_4)}{s_5} \quad (9.5.22)$$

第五个关节变量的信息由 (8.4.49) 式和 (8.4.50) 式给出, 即

$$s_5 = (Nc_4)c_4 + (Ns_4)s_4 \quad (9.5.23)$$

$$c_5 = M_{41}s_2 + a_z c_2 \quad (9.5.24)$$

以上二式分别给出 θ_5 的正弦与余弦, 因此, 我们可以将表达式 (9.5.7) 简化为如下形式:

$$d\theta_5 = c_5 ds_5 - s_5 dc_5 \quad (9.5.25)$$

由 (9.5.23) 式可求得

$$ds_5 = (Nc_4)dc_4 + c_4 d(Nc_4) + (Ns_4)ds_4 + s_4 d(Ns_4) \quad (9.5.26)$$

$$dc_5 = M_{41}ds_2 + s_2 dM_{41} + a_2 dc_2 + c_2 da_2 \quad (9.5.27)$$

代入 (9.5.25) 式可得

$$d\theta_5 = c_5 ds_5 - s_5 dc_5 \quad (9.5.28)$$

最后, 第六个关节变量的正弦和余弦由式 (8.4.55) 和 (8.4.56) 给出, 即

$$s_6 = -M_{61}c_5 - M_{612}s_5 \quad (9.5.29)$$

$$c_6 = -M_{611}s_5 + M_{612}c_5 \quad (9.5.30)$$

式中,

$$M_{6111} = o_x c_1 + o_y s_1 \quad (9.5.31)$$

$$dM_{6111} = o_x dc_1 + c_1 do_x + o_y ds_1 + s_1 do_y \quad (9.5.32)$$

$$M_{6112} = -o_x s_1 + o_y c_1 \quad (9.5.33)$$

$$dM_{6112} = -o_x ds_1 - s_1 do_x + o_y dc_1 + c_1 do_y \quad (9.5.34)$$

$$M_{611} = M_{6111}c_2 - o_x s_2 \quad (9.5.35)$$

$$dM_{611} = M_{6111}dc_2 + c_2 dM_{6111} - o_x ds_2 - s_2 do_x \quad (9.5.36)$$

$$M_{612} = -M_{6112}s_2 - o_x c_2 \quad (9.5.37)$$

$$dM_{612} = -M_{6112}ds_2 - s_2 dM_{6112} - o_x dc_2 - c_2 do_x \quad (9.5.38)$$

$$M_{61} = M_{611}c_4 + M_{612}s_4 \quad (9.5.39)$$

$$dM_{61} = M_{611}dc_4 + c_4 dM_{611} + M_{612}ds_4 + s_4 dM_{612} \quad (9.5.40)$$

于是,

$$ds_6 = -M_{61}dc_5 - c_5 dM_{61} - M_{612}ds_5 - s_5 dM_{612} \quad (9.5.41)$$

$$dc_6 = -M_{611}ds_4 - s_4 dM_{611} + M_{6112}dc_4 + c_4 dM_{6112} \quad (9.5.42)$$

最后, 可求得

$$d\theta_6 = c_6 ds_6 - s_6 dc_6 \quad (9.5.43)$$

下面假定斯坦福机械手手部的微运动向量由例 9.4 的结果给出, 即

$${}^{T_0}d = 2.5i + 1.4j - 2.0k \quad (9.5.44)$$

$${}^{T_0}\delta = 0i + 0.1j + 0k \quad (9.5.45)$$

而且

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 20.0 \\ 1 & 0 & 0 & 6.0 \\ 0 & 0 & -1 & 10.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.5.46)$$

操作手此刻各关节变量的状态见表 9-1, 即 T_0 与关节状态与例 9.4 相同, 现在利用上述方法求各关节变量的微分变化。

由 ${}^{T_0}d$ 和 ${}^{T_0}\delta$ 构造 ${}^{T_0}\Delta$ 如下

$${}^{T_0}\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4 \\ -0.1 & 0 & 0 & -2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.5.47)$$

于是有

$$dT_0 = T_0 {}^{T_0}\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.4 \\ 0 & 0 & 0.1 & 2.5 \\ 0.1 & 0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.5.48)$$

从中可以得到

$$\begin{aligned} dn_x &= 0.0, & dn_y &= 0.0, & dn_z &= 0.1; \\ do_x &= 0.0, & do_y &= 0.0, & do_z &= 0.0; \\ da_x &= 0.0, & da_y &= 0.1, & da_z &= 0.0; \\ dp_x &= 1.4, & dp_y &= 2.5, & dp_z &= 2.0. \end{aligned} \quad (9.5.49)$$

将上述结果及表 9.4.1 的有关数据分别代入 $d\theta_i$ 的计算公式, 可

得

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= \frac{(dp_y - d_6 da_y)c_1 - (dp_x - d_6 da_x)s_1}{(p_x - d_6 a_x)c_1 + (p_y - d_6 a_y)s_1} \\ &= \frac{(2.5 - 0.5) \times 1 - 0.0}{20 \times 1 + 0.0} \\ &= 0.1 \end{aligned} \quad (9.5.50)$$

又

$$ds_1 = c_1 d\theta_1 = 0.1 \quad (9.5.51)$$

$$dc_1 = -s_1 d\theta_1 = 0.0$$

$$Ns_2 = 20.0 \quad (9.5.52)$$

$$Nc_2 = 0.0$$

$$d(Ns_2) = 2.0 \quad (9.5.53)$$

$$d(Nc_2) = 2.0$$

由 (9.5.12) 得

$$\begin{aligned} d\theta_2 &= \frac{-2.0}{20.0} \\ &= -0.1 \end{aligned} \quad (9.5.54)$$

又

$$ds_2 = c_2 d\theta_2 = 0.0 \quad (9.5.55)$$

$$dc_2 = -s_2 d\theta_2 = 0.1$$

由 (9.5.15) 式可得

$$dd_3 = 2.0 \quad (9.5.56)$$

又因

$$\begin{aligned} Ns_4 &= 0.0 & d(Ns_4) &= 0.1 \\ M_{41} &= 0.0 & d(M_{41}) &= 0.0 \end{aligned} \quad (9.5.57)$$

$$Nc_4 = 1.0 \quad d(Nc_4) = 0.0$$

故由 (9.5.22) 式可得

$$d\theta_4 = \frac{0.1}{1} = 0.1 \quad (9.5.58)$$

又

$$\begin{aligned} ds_5 &= 0.0 \\ dc_5 &= -0.1 \end{aligned} \quad (9.5.59)$$

故由 (9.5.28) 式可得

$$d\theta_5 = 0.1 \quad (9.5.60)$$

最后, 由于

$$\begin{aligned} M_{611} &= 1.0, & dM_{611} &= 0.0 \\ M_{612} &= 0.0, & dM_{612} &= -0.1 \\ M_{611} &= 0.0, & dM_{611} &= 0.0 \\ M_{612} &= -1.0, & dM_{612} &= 0.0 \\ M_{61} &= 0.0, & dM_{61} &= 0.0 \end{aligned} \quad (9.5.61)$$

$$\begin{aligned} ds_6 &= 0.0 \\ dc_6 &= -0.1 \end{aligned} \quad (9.5.62)$$

由式 (9.5.43) 可得

$$d\theta_6 = 0.1 \quad (9.5.63)$$

于是, 各关节的微分变换为

$$dq = (0.1 \quad -0.1 \quad 2.0 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1)^T \quad (9.5.64)$$

与例 9.4 所给的已知条件吻合。

习 题 9

9.1 设机械手某杆坐标系为

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

今有相对基座坐标系的微变换为

$$d = 0.1i + 0.2j + 0.3k$$

$$\delta = 0.1i + 0.2j + 0.3k$$

试确定 Δ 、 ${}^T\Delta$ 和 dT 。

9.2 设机械手某杆坐标系为

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

今有相对基座坐标系的微变换为

$$d = 0.5i + 0j + 1k$$

$$\delta = 0i + 0.1j + 0k$$

试确定 Δ 、 ${}^T\Delta$ 和 dT 。

9.3 某六杆机械手第五杆上装有一台摄象机，假设摄象机相对五杆坐标系为

$${}^{T_5}CAM = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

又

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

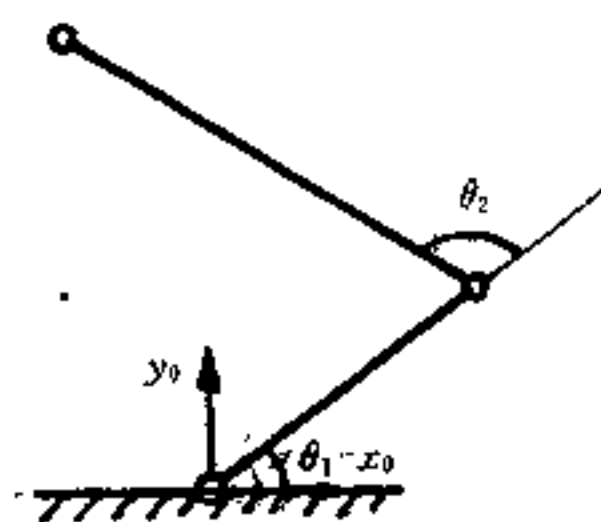
在引导终端夹持器与目标接触过程中，摄象机产生微小变化为

$${}^{CAM}d = -1i + 1j + 0k$$

$${}^{CAM}\delta = 0i + 0j + 0.1k$$

试确定机械手第六杆中引起的微变化。

9.4 试确定习图 9-1 所示的平面双连杆机械手的雅可比矩阵。



习图 9-1

10 机器人动力学

目前,国内外在机器人动力学分析中所普遍采用的基本方法有拉格朗日方法、牛顿-欧拉法、凯恩法、高斯法,以及图论分析等等。这些方法在方程是否容易建立,是否含约束力,是否便于计算机编程计算以及是否节省计算时间等诸方面各有其利弊。本书仅介绍前两种方法。

机器人动力学分析包含两个方面的问题,一是在给定轨迹点、关节位移、关节速度和关节加速度情况下,希望找出各关节的驱动力矩,它将为机器人的控制分析提供依据;二是计算机械手在各关节力矩作用下如何运动,即由关节力矩计算关节位移、速度和加速度,涉及到机械手的仿真。我们仅讨论第一个问题。

10.1 机器人的牛顿-欧拉法

机器人动力学的牛顿-欧拉法的基本思想就是将构件之间解除约束,将每个连杆的运动视为随质心的平动和绕质心作定点转动的合成,且分别用牛顿第二定律和欧拉动力学方程加以描述。同时,各杆的运动学、动力学参数将利用齐次变换建立它们的递推关系。

10.1.1 速度和静力

(1) 刚体的线速度和旋转速度

设某刚体相对 B 坐标系用向量 Q 表示, B 坐标系在 A 坐标中的位置为 r , B 系相对 A 系的姿态为 ${}^A R_B$, 显然, ${}^A R_B$ 是一个方向余弦矩阵。下面分析刚体相对 A 系的运动。

① B 系与 A 系原点不重合，但方位不变

如图 10-1，设 Q 相对 A 系的角速度、线速度分别用 ${}^A\Omega_Q$ 和 ${}^A v_Q$ 表示，则有

$$\begin{aligned} {}^A\Omega_Q &= {}^A\Omega_B + {}^A R_B^B \Omega_Q \\ &= {}^A R_B^B \Omega_Q \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

$${}^A v_Q = {}^A v_B + {}^A R_B^B v_Q + {}^A R_B^B \Omega_Q \times {}^A R_B^B Q \quad (10.1.2)$$

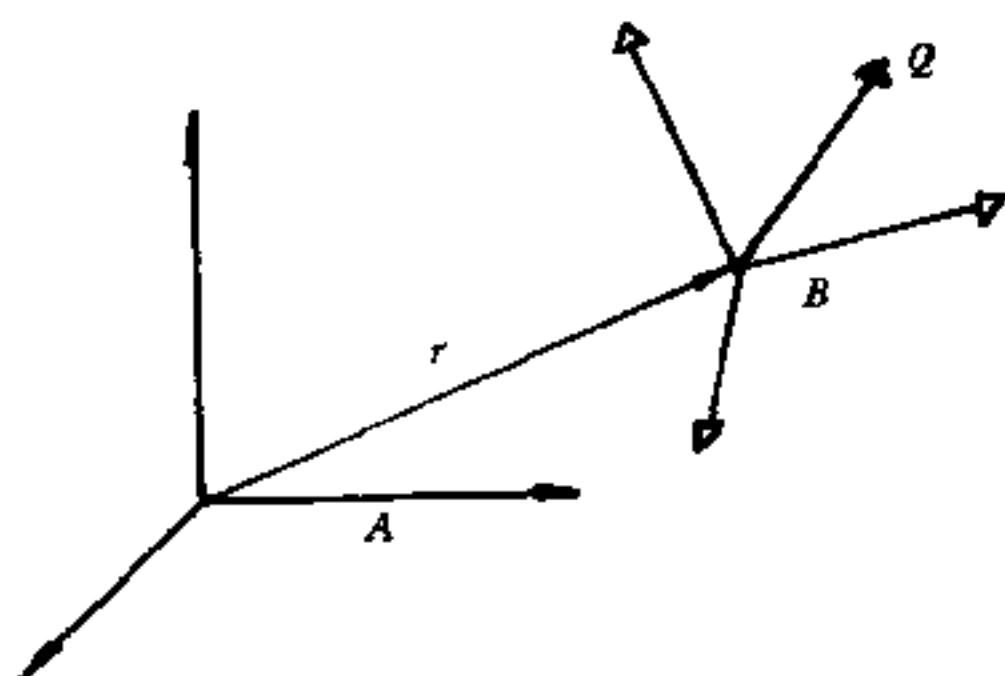


图 10-1

这里，由于角速度与线速度均为自由矢量，与平移变换无关，故只须用到坐标变换中的转动变换。在以下的分析中，理由相同。

② B 系与 A 系原点重合，但方位变化

如图 10-2， ${}^A\Omega_Q$ 和 ${}^A v_Q$ 分别为

$${}^A\Omega_Q = {}^A\Omega_B + {}^A R_B^B \Omega_Q \quad (10.1.3)$$

$$\begin{aligned} {}^A v_Q &= {}^A R_B^B v_Q + {}^A\Omega_B \times {}^A R_B^B Q + {}^A R_B^B \Omega_Q \times {}^A R_B^B Q \\ &= {}^A R_B^B v_Q + {}^A\Omega_Q \times {}^A R_B^B Q \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

③ B 系与 A 系原点不重合，且方位变化

此时，刚体相对 A 的速度为

$${}^A\Omega_Q = {}^A\Omega_B + {}^A R_B^B \Omega_Q \quad (10.1.5)$$

$${}^A v_Q = {}^A v_B + {}^A R_B^B v_Q + {}^A\Omega_Q \times {}^A R_B^B Q \quad (10.1.6)$$

(2) 机器人连杆的运动

正如在运动学分析中所规定的, 以 (x_0, y_0, z_0) 表示基座坐标系, 各杆附体坐标系均建于上关节轴线上。图 10-3 中, $i-1$ 杆和 i 坐标系分别位于 i 和 $i+1$ 关节轴线上。利用前面刚体运动分析的结论可求得第 i 杆相对基座坐标系的角速度和线速度分别为

$$\omega_i = \omega_{i-1} + Z_{i-1} (\dot{q}_i) \quad (10.1.7)$$

$$v_i = v_{i-1} + \omega_i \times R_{i-1}^{i-1} s_i \quad (10.1.8)$$

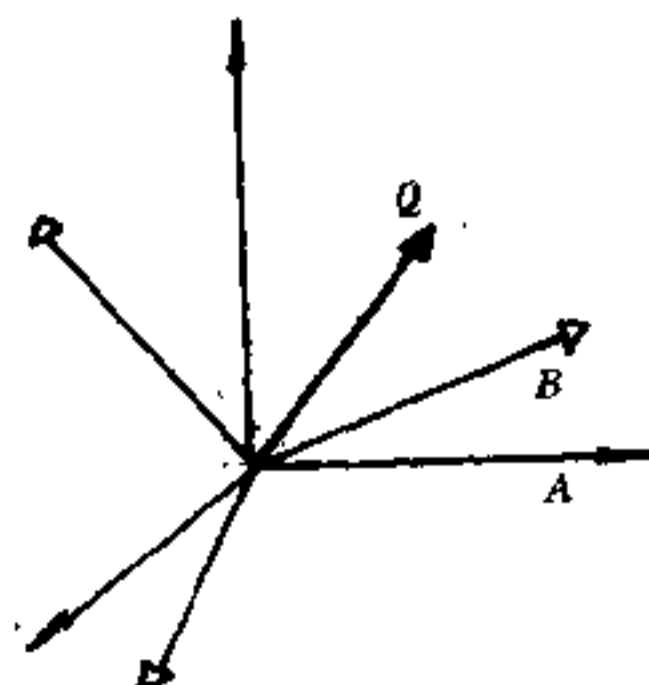


图 10-2

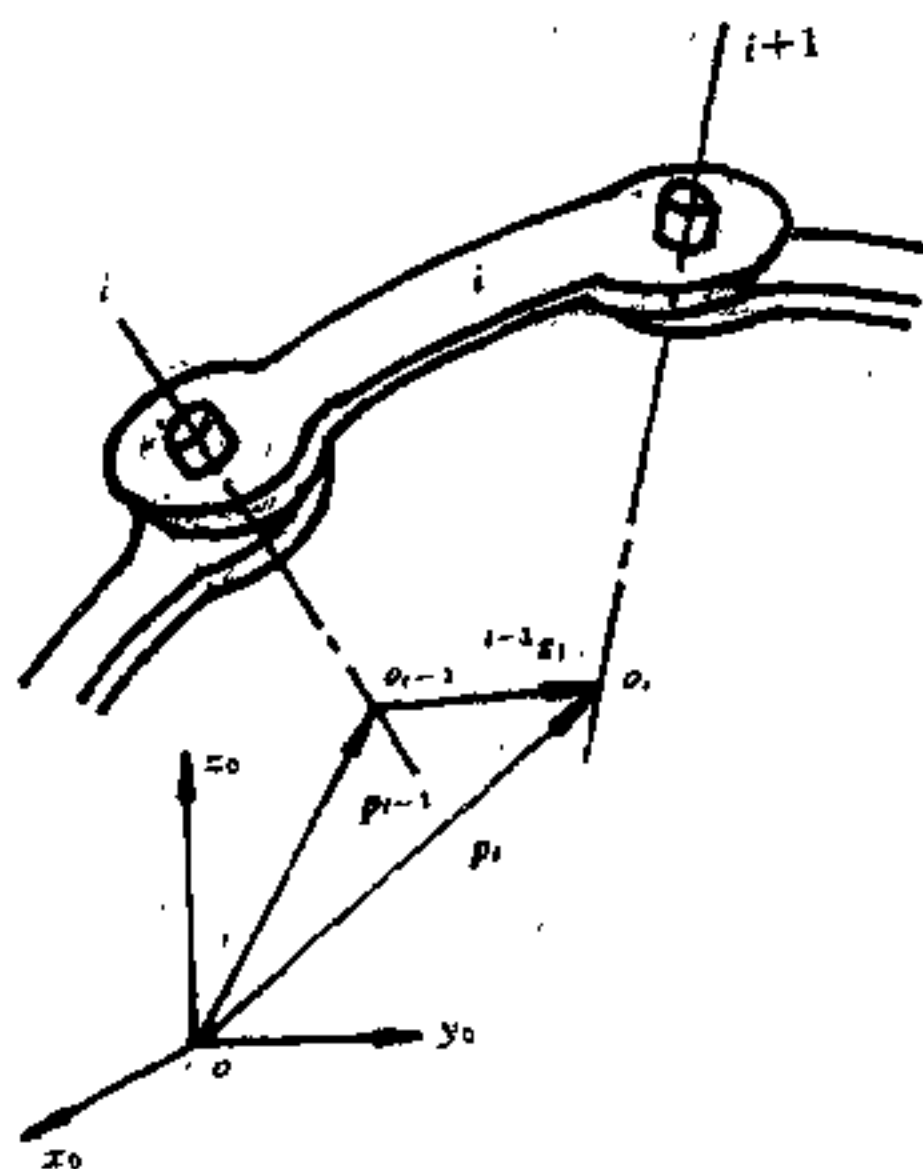


图 10-3

这里, q_i 为关节变量; 未标出左上标的矢量、张量均表示该参量是相对基座坐标系的。

以上两式适用于 i 关节为转动关节。若 i 关节为移动关节, 应为

$$\omega_i = \omega_{i-1} \quad (10.1.9)$$

$$v_i = v_{i-1} + \omega_i \times R_{i-1}^{i-1} s_i + z_{i-1}(\dot{q}_i) \quad (10.1.10)$$

从以上两组速度公式可以看出, 各杆相对基座的角速度和线速度从基座到手部具有连续递推关系。

(3) 操作手的静力分析

考虑操作手的静力时, 可以先将各个关节锁定, 使整个操作手变为一个整体构架。然后从手部开始逐个解除杆之间的约束, 对每个连杆进行力-力矩的静平衡分析, 以计算出需要多大静态扭矩作用于各个关节来保持操作手的静平衡。利用这种方法, 可以解出对作用于终端执行器的静载荷加以支持时各个关节所需的一组扭矩。

图 10-4 为第 i 杆的受力状态。我们用 $f_{i-1,i}$ 表示第 $i-1$ 杆对 i 杆的作用力, 用 $n_{i-1,i}$ 表示第 $i-1$ 杆对第 i 杆的作用力矩。它们均相对基座坐标系, 其余类推。如不考虑重力作用, 它们应该满足下列静力平衡条件

$$f_{i-1,i} + f_{i+1,i} = 0 \quad (10.1.11)$$

$$n_{i-1,i} + n_{i+1,i} + p_{i-1} \times f_{i-1,i} + p_i \times f_{i+1,i} = 0 \quad (10.1.12)$$

由于作用力与反作用力等值反向, 即

$$f_{i+1,i} = -f_{i,i+1} \quad (10.1.13)$$

故 (10.1.11) 式可改写为

$$f_{i-1,i} = f_{i,i+1} \quad (10.1.14)$$

同理, 由于

$$n_{i+1,i} = n_{i,i+1} \quad (10.1.15)$$

所以 (10.1.12) 式可改写为

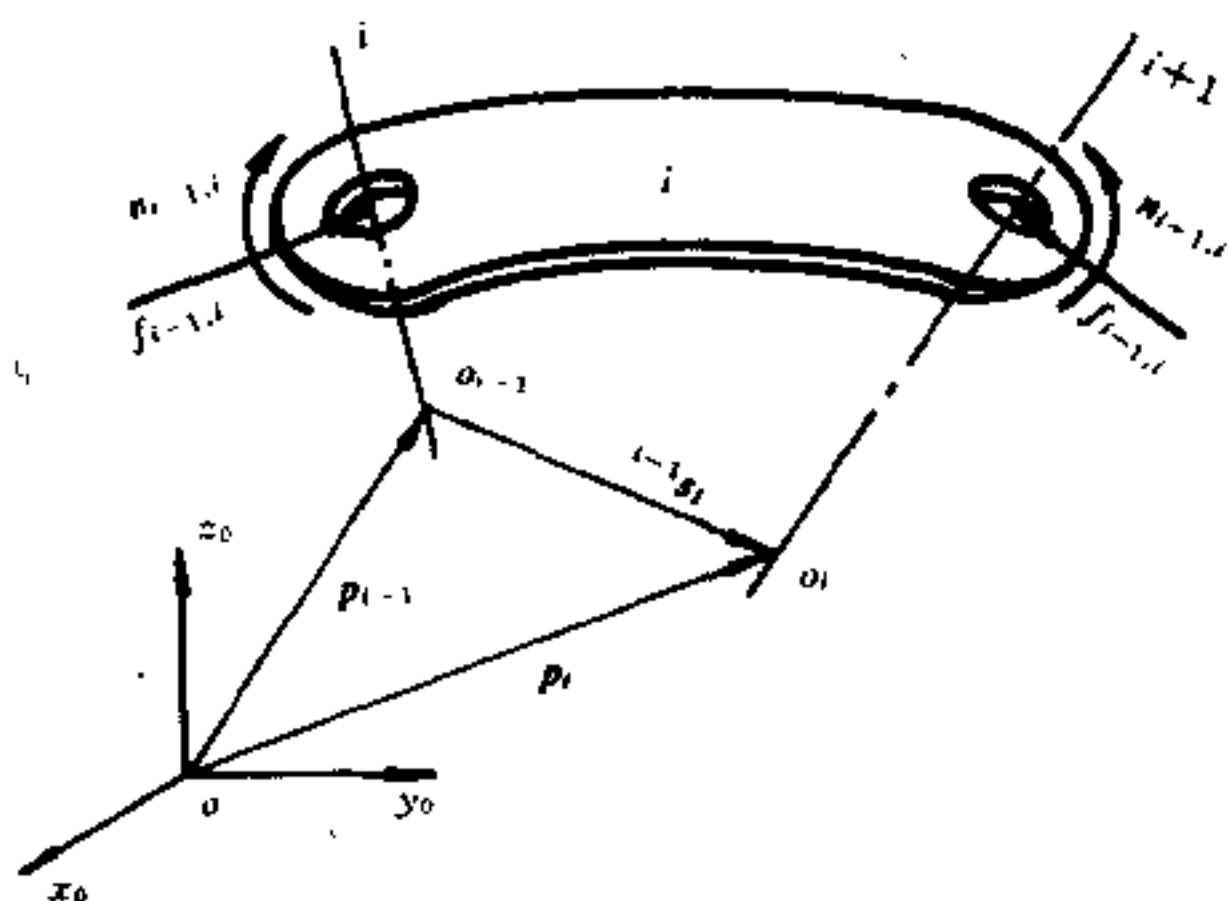


图 10-4 第 i 杆的静力分析

$$n_{i-1,i} - n_{i,i+1} + p_{i-1} \times f_{i,i+1} - (p_{i-1} + R_{i-1}^{i-1}s_i) \times f_{i,i+1} = 0 \quad (10.1.16)$$

即

$$n_{i-1,i} = n_{i,i+1} + R_{i-1}^{i-1}s_i \times f_{i,i+1} \quad (10.1.17)$$

(10.1.14) 式和 (10.1.17) 式是从机械手的手部向基座进行静力(矩)计算的迭代公式。但是这些参数都是相对基座坐标系的,若把它们与杆自身的坐标系联系起来,在计算上会更加方便。由于力和力矩在不同坐标系中的投影仅与坐标系间的方位有关,因此,只要将上述力和力矩左乘一基座相对该坐标系的转动变换即可。于是有

$${}^iR_0 f_{i-1,i} = {}^iR_0 f_{i,i+1} \quad (10.1.18)$$

即

$${}^i f_{i-1,i} = {}^iR_{i+1}^{i+1} f_{i,i+1} \quad (10.1.19)$$

同理可得

$${}^i n_{i-1,i} = {}^iR_{i+1}^{i+1} n_{i,i+1} + {}^iR_{i-1}^{i-1}s_i \times {}^iR_{i+1}^{i+1} f_{i,i+1} \quad (10.1.20)$$

这里，我们用左上标表示该参数所对应的坐标系。

以上给出的是机械手每个连杆所承受的静力（矩）。这些力、力矩的一部分应由各关节扭矩加以平衡，而其余部分则由机械手的构件承受。其中关节扭矩应等于力或力矩在关节轴线上的投影。即对于转动关节

$${}^i\tau_i = {}^i n_{i-1,i} \cdot Z_0 \quad (10.1.21)$$

这里， ${}^i\tau_i$ 表示关节扭矩； $Z_0 = (0 \ 0 \ 1)^T$ 。

上式的矩阵形式为

$${}^i\tau_i = ({}^i n_{i-1,i})^T Z_0 \quad (10.1.22)$$

对于移动关节，则为

$${}^i\tau_i = ({}^i f_{i-1,i})^T Z_0 \quad (10.1.23)$$

例 10.1 一平面双连杆机构，其终端执行器上承受载荷 F ，见图 10-5。试求各关节的扭矩，设两杆的几何长度分别为 l_1 和 l_2 。

解：根据第七章的规定，在各杆建立附体坐标系。其中假设载荷的坐标系与第 2 杆坐标系重合。

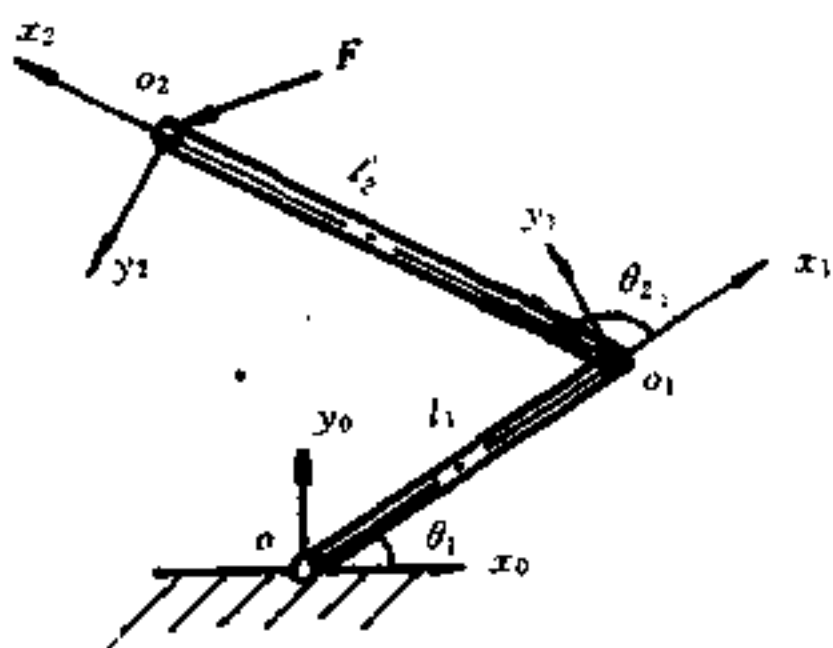


图 10-5

由已知条件，有

$${}^3F_{2,3} = (F_x, F_y, 0)^T \quad (10.1.24)$$

利用公式 (10.1.19) 和 (10.1.20) 进行迭计算, 求得

$$\begin{aligned} {}^2f_{1,2} &= {}^2R_3 {}^3f_{2,3} \\ &= {}^3f_{2,3} \\ &= (F_x, F_y, 0)^T \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

$$\begin{aligned} {}^2n_{1,2} &= {}^2R_3 {}^3n_{2,3} + {}^2R_1 {}^1s_2 \times {}^2R_3 {}^3f_{2,3} \\ &= {}^2R_1 {}^1s_2 \times {}^2R_3 {}^3f_{2,3} \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 c_2 \\ l_2 s_2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_2 \\ 0 & l_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 F_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.1.26)$$

又

$$\begin{aligned} {}^1f_{0,1} &= {}^1R_2 {}^2f_{1,2} \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x c_2 - F_y s_2 \\ F_x s_2 + F_y c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.1.27)$$

$$\begin{aligned} {}^1n_{0,1} &= {}^1R_2 {}^2n_{1,2} + {}^1R_0 {}^0s_1 \times {}^1R_2 {}^2f_{1,2} \\ &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 F_y \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_x l_1 s_2 + F_y l_1 c_2 + F_z l_2 \end{bmatrix} \quad (10.1.28)$$

由于都是转动关节，代入 (10.1.22) 可得两关节所需的静力矩分别为

$${}^1\tau_1 = F_x l_1 s_2 + F_y l_1 c_2 + F_z l_2 \quad (10.1.29)$$

$${}^2\tau_2 = F_z l_2 \quad (10.1.30)$$

10.1.2 机器人连杆的加速度

(1) 刚体的角加速度

如图 10-1，设 B 系以 ${}^A\Omega_B$ 相对 A 系转动，刚体 Q 以 ${}^B\Omega_Q$ 相对 B 系转动，显然

$${}^A\Omega_Q = {}^A\Omega_B + {}^A R_B {}^B\Omega_Q \quad (10.1.31)$$

对上式微分，可得刚体相对 A 系的角加速度为

$${}^A\dot{\Omega}_Q = {}^A\dot{\Omega}_B + {}^A R_B \dot{\Omega}_Q + {}^Q\Omega_B {}^A R_B \Omega_Q \quad (10.1.32)$$

(2) 刚体的线加速度

在前面的速度分析已经知道，当 A 系和 B 系原点重合时，有

$${}^A v_Q = {}^A R_B {}^B v_Q + {}^A\Omega_Q \times {}^A R_B {}^B Q \quad (10.1.33)$$

上式改写为

$$\frac{d}{dt}({}^A R_B {}^B Q) = {}^A R_B {}^B v_Q + {}^A\Omega_Q \times {}^A R_B {}^B Q \quad (10.1.34)$$

于是，有

$$\begin{aligned} {}^A \dot{v}_Q &= \frac{d}{dt}({}^A R_B {}^B v_Q) + {}^A \dot{\Omega}_Q \times {}^A R_B {}^B Q + {}^A \Omega_Q \times \frac{d}{dt}({}^A R_B {}^B Q) \\ &= {}^A R_B {}^B \dot{v}_Q + {}^A \Omega_Q \times {}^A R_B {}^B v_Q + {}^A \dot{\Omega}_Q \times {}^A R_B {}^B Q \\ &\quad + {}^A \Omega_Q \times ({}^A R_B {}^B v_Q + {}^A \Omega_Q \times {}^A R_B {}^B Q) \\ &= {}^A R_B {}^B \dot{v}_Q + 2 {}^A \Omega_Q \times {}^A R_B {}^B v_Q + {}^A \dot{\Omega}_Q \times {}^A R_B {}^B Q \end{aligned} \quad (10.1.35)$$

参考 (10.1.34) 的形式，上式进一步写作

$$\begin{aligned} {}^A \dot{v}_Q &= {}^A R_B {}^B \dot{v}_Q + {}^A \Omega_Q \times {}^A R_B {}^B v_Q + {}^A \dot{\Omega}_Q \times {}^A R_B {}^B Q \\ &\quad + {}^A \Omega_Q \times ({}^A R_B {}^B v_Q + {}^A \Omega_Q \times {}^A R_B {}^B Q) \\ &= {}^A R_B {}^B \dot{v}_Q + 2 {}^A \Omega_Q \times {}^A R_B {}^B v_Q + {}^A \dot{\Omega}_Q \times {}^A R_B {}^B Q \end{aligned}$$

$$+{}^A\Omega_Q \times ({}^A\Omega_Q \times {}^AR_B{}^BQ) \quad (10.1.36)$$

而当 A 系与 B 系不重合时, 可得一般情况下的刚体 Q 相对 A 系的线加速度表达式为

$$\begin{aligned} A\dot{v}_Q = & {}^A\dot{v}_B + {}^AR_B{}^B\dot{v}_Q + 2{}^A\Omega_Q \times {}^AR_B{}^Bv_Q + {}^A\dot{\Omega}_Q \times {}^AR_B{}^BQ \\ & + {}^A\Omega_Q \times ({}^A\Omega_Q \times {}^AR_B{}^BQ) \end{aligned} \quad (10.1.37)$$

如果刚体 Q 相对 B 系为常矢量, 因

$${}^Bv_Q = {}^B\dot{v}_Q = 0 \quad (10.1.38)$$

于是有

$${}^A\dot{v}_Q = {}^A\dot{v}_B + {}^A\dot{\Omega}_Q \times {}^AR_B{}^BQ + {}^A\Omega_Q \times ({}^A\Omega_Q \times {}^AR_B{}^BQ) \quad (10.1.39)$$

显然, 对于机器人操作手, 式 (10.1.37) 式适用于移动关节, 而 (10.1.39) 则适用转动关节。

(3) 机器人连杆的加速度

我们仍然用 q_i 表示第 i 杆的关节变量, 用 ${}^{i-1}s_i$ 表示 i 杆坐标系原点在 $i-1$ 杆坐标系中的位置。由 (10.1.32) 式和 (10.1.39) 式可直接写出第 i 关节为转动关节时, i 杆的角加速度和线加速度分别为

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + Z_{i-1}(\ddot{q}_i) + \omega_{i-1} \times Z_{i-1}(\dot{q}_i) \quad (10.1.40)$$

和

$$\dot{v}_i = \dot{v}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times R_{i-1}{}^{i-1}s_i + \omega_i \times (\omega_i \times R_{i-1}{}^{i-1}s_i) \quad (10.1.41)$$

若 i 关节为移动关节, 则 i 杆的角加速度和线加速度应为

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} \quad (10.1.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_i = & \dot{v}_{i-1} + Z_{i-1}(\ddot{q}_i) + \dot{\omega}_i \times R_{i-1}{}^{i-1}s_i + 2\omega_i \times Z_{i-1}(\dot{q}_i) \\ & + \omega_i \times (\omega_i \times R_{i-1}{}^{i-1}s_i) \end{aligned} \quad (10.1.43)$$

10.1.3 机器人的牛顿-欧拉动力学方程

机器人作为一种典型的多刚体系统, 我们把每一连杆视为一

个刚体，其运动为随质心的平动与绕质心的转动的合成。移动连杆所需的力是连杆的质量分布和所需加速度的函数，绕质心的转动则同样取决于杆的质量几何（惯性张量）与转动角速度及角加速度。写作关系式即为

$$F_i = m_i a_{ci} \quad (10.1.44)$$

和

$$\tau_i = J_{ci} \cdot \dot{\omega}_i + \omega_i \times (J_{ci} \cdot \omega_i) \quad (10.1.45)$$

式中，下标 i 为杆序号， ci 表示第 i 杆质心， F_i 、 τ_i 分别表示作用于第 i 杆质心的主矢和主矩。

下面对第 i 杆进行受力分析。如图 10-6 所示， C_i 为质心， F_i 为作用于质心的合外力， τ_i 为合力矩。其他物理和几何参数见图。设第 i 杆处于平衡状态，应满足下面的条件。

$$F_i = f_{i-1,i} + f_{i+1,i} + m_i g \quad (10.1.46)$$

$$\tau_i = n_{i-1,i} + n_{i+1,i} + (p_{i-1} - r_i) \times f_{i-1,i} + (p_i - r_i) \times f_{i+1,i} \quad (10.1.47)$$

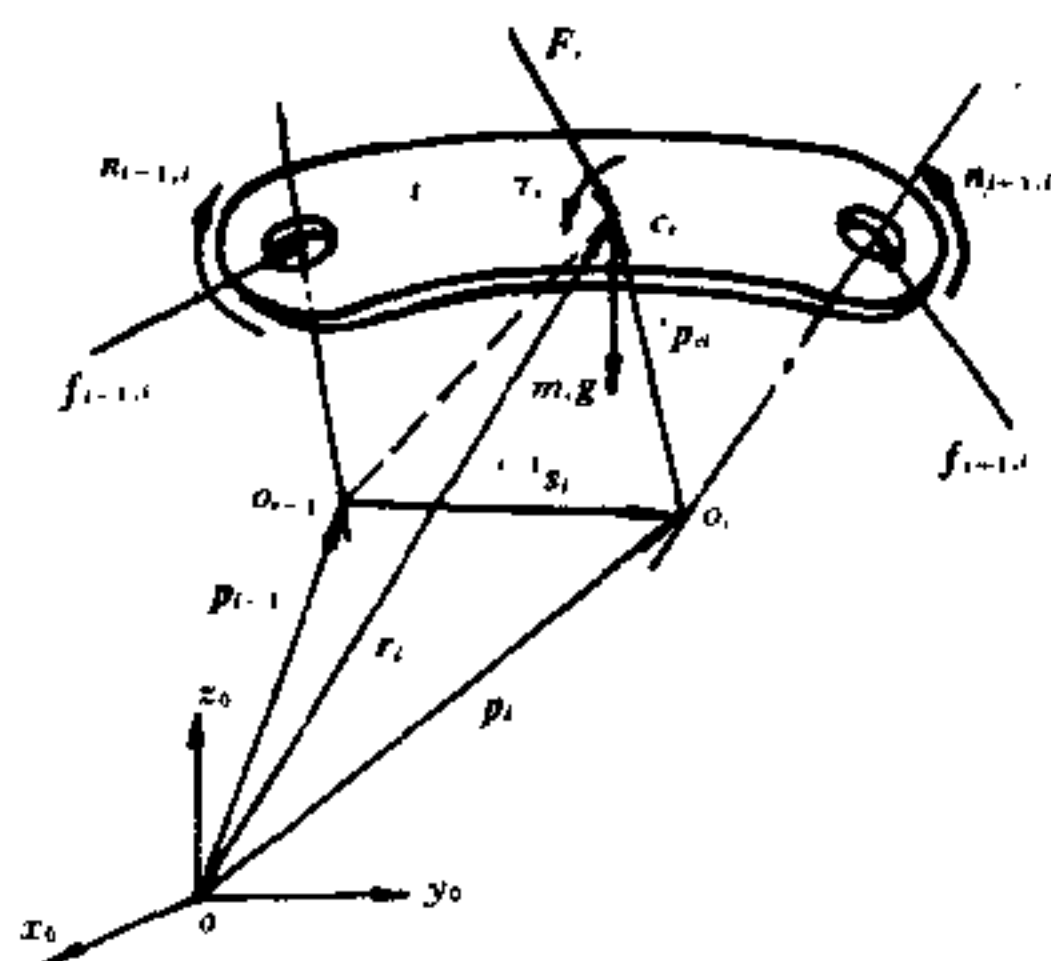


图 10-6 第 i 杆的受力分析

由于

$$f_{i,i+1} = -f_{i+1,i} \quad (10.1.48)$$

代入 (10.1.46) 式可得

$$f_{i-1,i} = f_{i,i+1} - m_i g + F_i \quad (10.1.49)$$

又由于

$$n_{i,i+1} = -n_{i+1,i} \quad (10.1.50)$$

$$r_i - p_{i-1} = R_{i-1}^{i-1} s_i + R_i^i p_{ci}, \quad p_i - r_i = -R_i^i p_{ci} \quad (10.1.51)$$

代入 (10.1.47) 式可得

$$n_{i-1,i} = n_{i,i+1} + R_{i-1}^{i-1} s_i \times f_{i-1,i} + R_i^i p_{ci} \times (F_i - m_i g) + \tau_i \quad (10.1.52)$$

根据以上讨论的结果, 我们可以建立一组求得各杆速度、加速度, 以及关节力、力矩的向前 (通向手部) 和向后 (通向基座) 的递推方程。

向前方程为

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + Z_{i-1} (\dot{q}_i) & (10.1.53) \\ \omega_{i-1} & (10.1.54) \end{cases}$$

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + Z_{i-1} (\ddot{q}_i) + \omega_{i-1} \times Z_{i-1} (\dot{q}_i) & (10.1.55) \\ \dot{\omega}_{i-1} & (10.1.56) \end{cases}$$

$$v_i = \begin{cases} \omega_i \times R_{i-1}^{i-1} s_i + v_{i-1} & (10.1.57) \\ \omega_i \times R_{i-1}^{i-1} s_i + Z_{i-1} (\dot{q}_i) + v_{i-1} & (10.1.58) \end{cases}$$

$$\dot{v}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_i \times R_{i-1}^{i-1} s_i + \omega_i \times (\omega_i \times R_{i-1}^{i-1} s_i) + \dot{v}_{i-1} & (10.1.59) \\ \dot{\omega}_i \times R_{i-1}^{i-1} s_i + \omega_i \times (\omega_i \times R_{i-1}^{i-1} s_i) & \end{cases}$$

$$+ 2\omega_i \times Z_{i-1} (\dot{q}_i) + Z_{i-1} (\ddot{q}_i) + \dot{v}_{i-1} \quad (10.1.60)$$

以上各组公式中, 第一式对应转动关节, 第二式对应移动关节。向前方程还有

$$a_{ci} = \dot{\omega}_i \times R_i^i p_{ci} + \omega_i \times (\omega_i \times R_i^i p_{ci}) + \dot{v}_i \quad (10.1.61)$$

$$F_i = m_i a_{ci} \quad (10.1.62)$$

$$\tau_i = J_{ci} \cdot \dot{\omega}_i + \omega_i \times (J_{ci} \cdot \omega_i) \quad (10.1.63)$$

向后方程为

$$f_{i-1,i} = f_{i,i-1} - m_i g + F_i \quad (10.1.64)$$

$$n_{i-1,i} = n_{i,i+1} + R_{i-1}^{i-1} s_i \times f_{i-1,i} + R_i^i p_{ci} \times (F_i - m_i g) + \tau_i \quad (10.1.65)$$

在上述递推关系中, 设基座固定不动, 即有

$$\omega_0 = \dot{\omega}_0 = v_0 = \dot{v}_0 = 0 \quad (10.1.66)$$

10.1.4 相对杆自身坐标系的牛顿-欧拉动力学递推方程

前面给出的一组向前、向后递推方程都是相对基座坐标系的。但在计算中, 采用相对自身坐标系的参数运算往往更加方便。这只要在各方程两边前乘上 ${}^i R_0$ 就可以得到下面一组相对杆自身坐标系的牛顿-欧拉动力学递推方程。

向前方程

$${}^i \omega_i = \begin{cases} {}^i R_{i-1} [{}^{i-1} \omega_{i-1} + Z_0 (\dot{q}_i)] & (10.1.67) \\ {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \omega_{i-1} & (10.1.68) \end{cases}$$

$${}^i \dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^i R_{i-1} [{}^{i-1} \dot{\omega}_{i-1} + Z_0 (\ddot{q}_i) + {}^{i-1} \omega_{i-1} \times Z_0 (\dot{q}_i)] & (10.1.69) \\ {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \dot{\omega}_{i-1} & (10.1.70) \end{cases}$$

$${}^i v_i = \begin{cases} i \omega_i \times {}^i R_{i-1} {}^{i-1} s_i + {}^i R_{i-1} {}^{i-1} v_{i-1} & (10.1.71) \\ {}^i \omega_i \times {}^i R_{i-1} {}^{i-1} s_i + {}^i R_{i-1} [Z_0 (\dot{q}_i) + {}^{i-1} v_{i-1}] & (10.1.72) \end{cases}$$

$${}^i \dot{v}_i = \begin{cases} {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i R_{i-1} {}^{i-1} s_i + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i R_{i-1} {}^{i-1} s_i) + {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \dot{v}_{i-1} & (10.1.73) \\ {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i R_{i-1} {}^{i-1} s_i + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i R_{i-1} {}^{i-1} s_i) - 2 {}^i \omega_i \\ \quad \times {}^i R_{i-1} [Z_0 (\dot{q}_i)] + {}^i R_{i-1} [Z_0 (\ddot{q}_i)] + {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \dot{v}_{i-1} & (10.1.74) \end{cases}$$

$${}^i a_{ci} = {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i p_{ci} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i p_{ci}) + {}^i \dot{v}_i \quad (10.1.75)$$

$${}^i F_i = m_i {}^i a_{ci} \quad (10.1.76)$$

$$\begin{aligned} {}^i \tau_i &= ({}^i R_0 J_{ci} {}^0 R_i) \cdot {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times [({}^i R_0 J_{ci} {}^0 R_i) \cdot {}^i \omega_i] \\ &= {}^i J_{ci} \cdot {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times {}^i J_{ci} \cdot {}^i \omega_i \end{aligned} \quad (10.1.77)$$

向后方程

$${}^i f_{i-1,i} = {}^i R_{i-1} {}^{i+1} f_{i,i+1} + {}^i F_i \quad (10.1.78)$$

$$\begin{aligned} {}^i n_{i-1,i} &= {}^i R_{i-1} {}^{i+1} n_{i,i+1} + {}^i R_{i-1} {}^{i-1} s_i \times {}^i f_{i-1,i} \\ &\quad + {}^i p_{ci} \times {}^i F_i + {}^i \tau_i \end{aligned} \quad (10.1.79)$$

在以上相对自身坐标系的递推公式中, 基座的条件为

$$\omega_0 = \dot{\omega}_0 = v_0 = 0, \dot{v}_0 = (-g_x, -g_y, -g_z)^T = -g \quad (10.1.80)$$

且

$$Z_0 = (0, 0, 1)^T \quad (10.1.81)$$

例 10.2 不考虑静载时, 建立图 10-5 所示平面双连杆操作器的动力学方程。设各杆质量均集中于杆的末端。

解: (1) 仿例 10.1, 建立各杆附体坐标系

(2) 确定递推方程中的有关参数

$$\textcircled{1} \quad {}^1 p_{c1} = (0, 0, 0)^T, \quad {}^2 p_{c2} = (0, 0, 0)^T \quad (10.1.82)$$

$$\textcircled{2} \quad {}^0 s_1 = (l_1 c_1, l_1 s_1, 0)^T, \quad {}^1 s_2 = (l_2 c_2, l_2 s_2, 0)^T \quad (10.1.83)$$

$$\textcircled{3} \quad {}^1 J_{c1} = 0, \quad {}^2 J_{c2} = 0 \quad (10.1.84)$$

$$\textcircled{4} \quad {}^3 f_{2,3} = 0, \quad {}^3 n_{2,3} = 0 \quad (10.1.85)$$

$$\textcircled{5} \quad \dot{v}_0 = (0, g, 0)^T \quad (10.1.86)$$

$$\textcircled{6} \quad {}^{i-1} R_i = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 \\ s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^i R_{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & s_i & 0 \\ -s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.1.87)$$

(3) 由基座向外迭代计算

第一杆:

$${}^1\omega_1 = {}^1R_0({}^0\omega_0 + Z_0\dot{\theta}_1) = (0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1)^T \quad (10.1.88)$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}^1R_0({}^0\dot{\omega}_0 + Z_0\ddot{\theta}_1 + {}^0\omega_0 \times Z_0\dot{\theta}_1) = (0 \quad 0 \quad \ddot{\theta}_1)^T \quad (10.1.89)$$

$$\begin{aligned} {}^1\dot{v}_1 &= {}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1R_0{}^0s_1 + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1R_0{}^0s_1) + {}^1R_0{}^0\dot{v}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_1 & 0 \\ \ddot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1a_{c1} &= {}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1p_{c1} + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1p_{c1}) + {}^1\dot{v}_1 \\ &= {}^1\dot{v}_1 \end{aligned} \quad (10.1.91)$$

$$\begin{aligned} {}^1F_1 &= m_1 {}^1a_{c1} \\ &= \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.1.92)$$

$${}^1\tau_1 = 0 \quad (10.1.93)$$

第二杆:

$${}^2\omega_2 = {}^2R_1({}^1\omega_1 + Z_0\dot{\theta}_2) = (0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^T \quad (10.1.94)$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = {}^2R_1({}^1\dot{\omega}_1 + Z_0\ddot{\theta}_2 + {}^1\omega_1 \times Z_0\dot{\theta}_2) = (0 \quad 0 \quad \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)^T \quad (10.1.95)$$

$${}^2\dot{v}_2 = {}^2\dot{\omega}_2 \times {}^2R_1{}^1s_2 + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2R_1{}^1s_2) + {}^2R_1{}^1\dot{v}_1$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & -(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) & 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - l_1c_2\dot{\theta}_1^2 + l_1s_1\ddot{\theta}_1 + gs_{12} \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + l_1s_2\ddot{\theta}_1^2 + l_1c_2\ddot{\theta}_1 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.1.96)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{c2} &= {}^2\dot{\omega}_2 \times {}^2p_{c2} + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2p_{c2}) \times {}^2\dot{v}_2 \\
&= {}^2\dot{v}_2 \quad (10.1.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^2F_2 &= m_2 a_{c2} \\
&= m_2 \begin{bmatrix} -l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - l_1c_2\dot{\theta}_1^2 + l_1s_2\ddot{\theta}_1 + gs_{12} \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + l_1s_2\ddot{\theta}_1^2 + l_1c_2\ddot{\theta}_1 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.1.98)
\end{aligned}$$

$${}^2\tau_2 = 0 \quad (10.1.99)$$

(4) 由手部向基座迭代计算

第二杆:

$$\begin{aligned}
{}^2f_{1,2} &= {}^2R_3^3 f_{2,3} + {}^2F_2 \\
&= {}^2F_2 \quad (10.1.100)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^2n_{1,2} &= {}^2R_3^3 n_{2,3} + {}^2R_1^1 s_2 \times {}^2f_{1,2} + {}^2p_{c2} \times {}^2F_2 + {}^2\tau_2 \\
&= {}^2R_1^1 s_2 \times {}^2f_{1,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_2 \\ 0 & l_2 & 0 \end{bmatrix} {}^2F_2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix} \\
&\quad (10.1.101)
\end{aligned}$$

第一杆:

$$\begin{aligned}
{}^1f_{0,1} &= {}^1R_2 {}^2f_{1,2} + {}^1F_1 \\
&= \begin{bmatrix} -m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_2 - (m_1 + m_2) l_1 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s_2 \\ \quad + (m_1 + m_2) g s_1 \\ -m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s_2 + (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c_2 \\ \quad + (m_1 + m_2) g c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad (10.1.102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^1n_{0,1} &= {}^1R_2 {}^2n_{1,2} + {}^1R_0 s_1 \times {}^1f_{0,1} + {}^1p_{c1} \times {}^1F_1 + {}^1\tau_1 \\
&= {}^1R_2 {}^2n_{1,2} + {}^1R_0 s_1 \times {}^1f_{0,1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 c_2) \ddot{\theta}_1 \\ \quad + (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2) \ddot{\theta}_2 \\ -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 c_1 + m_2 g l_2 c_{12} \end{bmatrix} \\
&\quad (10.1.103)
\end{aligned}$$

最后可得关节力矩分别为

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 c_2) \ddot{\theta}_1 \\
&\quad + (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$

$$- 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 c_1 + m_2 g l_2 c_{12} \quad (10.1.104)$$

和

$$\tau_2 = (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} \quad (10.1.105)$$

10.2 机器人的拉格朗日方法

机器人系统可以视为一理想、完整的多刚体系统，采用拉格朗日方法进行系统的动力学分析的基本步骤是设立广义坐标、确定系统的动能和势能，最后代入拉格朗日方程，建立关节力矩与广义坐标、广义速度和广义加速度之间的关系。为了说明拉格朗日方程如何应用于解决机器人机构的动力学问题，先讨论一个具体的例子。

10.2.1 平面两杆机械手的拉格朗日分析

如图 10-7 所示，一平面两杆机械手的两杆质量分别为 m_1 和 m_2 ，且集中于各杆末端，两杆长分别为 l_1 和 l_2 。我们利用拉格朗日方法建立其动力学方程。

(1) 设立广义坐标

该机械手为完整系统，共有两个自由度，设关节变量 θ_1 ， θ_2 为广义坐标。见图 10-7。

(2) 系统的动能和势能

第一杆的动能和势能分别为

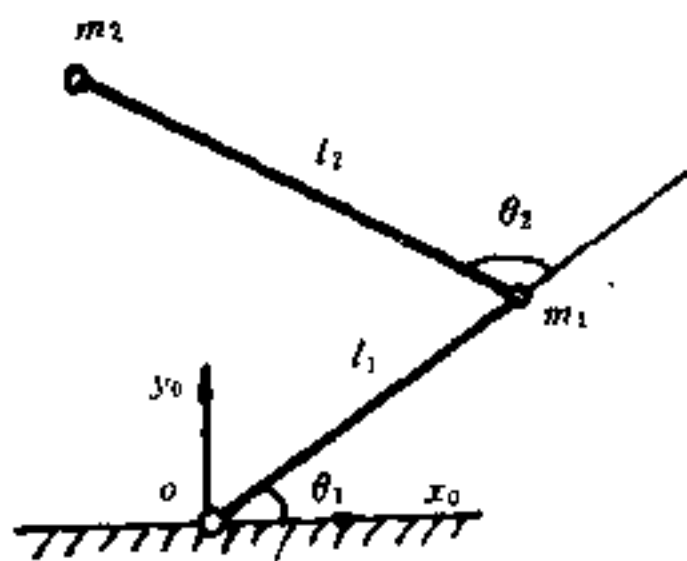


图 10-7 平面两杆机械手

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (10.2.1)$$

$$V_1 = m_1 g l_1 \sin \theta_1 \quad (10.2.2)$$

对于第二杆, 设其质心坐标为 (x_2, y_2) , 则

$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (10.2.3)$$

$$y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (10.2.4)$$

于是有

$$\dot{x}_2 = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (10.2.5)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

因此, 第二杆的动能为

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

势能则为

$$V_2 = m_2 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (10.2.7)$$

(3) 拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= (T_1 + T_2) - (V_1 + V_2) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \\ &\quad - m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

(4) 动力学方程

对于具有 n 个自由度的机械手, 设第 i 关节的关节变量为 q_i , 关节力矩为 τ_i , 其拉格朗日动力学方程的形式为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (10.2.9)$$

在平面两杆机械手中, 对于关节变量 θ_1 ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_2^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \\ &\quad + 2m_2l_1l_2\cos\theta_2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2\end{aligned}\quad (10.2.10)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= [(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 \\ &\quad + (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_2 - 2m_2l_1l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ &\quad - m_2l_1l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2\end{aligned}\quad (10.2.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -(m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}\quad (10.2.12)$$

于是，可得第一关节力矩为

$$\begin{aligned}\tau_1 &= [(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 + (m_2l_2^2 \\ &\quad + m_2l_1l_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_2 - 2m_2l_1l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2l_1l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + (m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}\quad (10.2.13)$$

对于第二关节变量 θ_2 ，有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2l_2^2\dot{\theta}_1 + m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_1\quad (10.2.14)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) &= (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - m_2l_1l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ &\quad - m_2l_1l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2\end{aligned}\quad (10.2.15)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -m_2l_1l_2\sin\theta_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - m_2gl_2\cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}\quad (10.2.16)$$

于是，可求得第二关节力矩为

$$\begin{aligned}\tau_2 &= (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + m_2gl_2\cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}\quad (10.2.17)$$

如果我们将 (10.2.13) 和 (10.2.16) 两式简记为如下形式

$$\tau_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$+ D_{121} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + D_1 \quad (10.2.18)$$

和

$$\begin{aligned} \tau_2 = & D_{21} \ddot{\theta}_1 + D_{22} \ddot{\theta}_2 + D_{211} \dot{\theta}_1^2 + D_{222} \dot{\theta}_2^2 \\ & + D_{212} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + D_{221} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + D_2 \end{aligned} \quad (10.2.19)$$

这里, 形式为 D_{ii} 的系数称为关节 i 的等效惯量, 它表明, 因为关节 i 的加速度可在关节 i 产生力矩 $D_{ii} \ddot{\theta}_i$;

形式为 D_{ij} 的系数称为关节 i 与关节 j 的耦合惯量, 它表明, 因为关节 i (或 j) 的加速度 $\ddot{\theta}_i$ (或 $\ddot{\theta}_j$) 可使关节 j (或) i 分别产生力矩 $D_{ij} \ddot{\theta}_i$ (或 $D_{ij} \ddot{\theta}_j$);

形式为 $D_{iij} \dot{\theta}_j^2$ 的项是由于关节 j 的速度引起关节 i 上的向心力;

形式为 $D_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + D_{ikj} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j$ 的组合项, 称为作用于关节 i 上的哥氏力, 它是由于关节 j 和关节 k 的速度引起的;

形式为 D_i 的项, 表示作用于 i 杆上的重力。

将 (10.2.13)、(10.2.16) 式与 (10.2.18)、(10.2.19) 式作一比较, 可得平面两杆机械手各项系数的值为:

等效惯量项系数

$$D_{11} = [(m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2] \quad (10.2.20)$$

$$D_{22} = m_2 l_2^2 \quad (10.2.21)$$

耦合惯量项系数

$$\begin{aligned} D_{12} &= D_{21} \\ &= m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (10.2.22)$$

向心力项系数

$$D_{111} = 0 \quad (10.2.23)$$

$$D_{122} = -m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \quad (10.2.24)$$

$$D_{211} = m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \quad (10.2.25)$$

$$D_{222} = 0 \quad (10.2.26)$$

哥氏力项系数

$$D_{112} = -2m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \quad (10.2.27)$$

$$D_{212} = 0 \quad (10.2.28)$$

重力项

$$D_1 = (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \quad (10.2.29)$$

$$D_2 = m_2 g l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \quad (10.2.30)$$

(5) 简化条件的惯量项讨论

我们可以给定的数值，对平面双连杆机械手的状态进行简化，具体讨论惯量项在动力学分析中的地位。比如，设定机械手处于静止和无重力环境，并于两种状态，一是关节 2 锁定状态 ($\ddot{\theta}_2 = 0$)，二是关节 2 处于自由状态 ($\tau_2 = 0$)。

在第一种状态下，方程 (10.2.18) 和 (10.2.19) 可简化为

$$\tau_1 = D_{11} \ddot{\theta}_1 \quad (10.2.31)$$

$$\tau_2 = D_{21} \ddot{\theta}_1 \quad (10.2.32)$$

在第二种状态下，由于 $\tau_2 = 0$ ，由方程 (10.2.19) 解得

$$D_{21} \ddot{\theta}_1 + D_{22} \ddot{\theta}_2 = 0 \quad (10.2.33)$$

故有

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{D_{21}}{D_{22}} \ddot{\theta}_1 \quad (10.2.34)$$

代入 (10.2.18) 式，得到

$$\tau_1 = \left(D_{11} - \frac{D_{21}^2}{D_{22}} \right) \ddot{\theta}_1 \quad (10.2.35)$$

为了使讨论简明，我们不妨设 $l_1 = l_2 = 1$ ； $m_1 = 2$ ； m_2 取三个不同的值； $m_2 = 1$ 时表示机械手无负载， $m_2 = 4$ 时表示机械手有一定负载， $m_2 = 100$ 时表示位于外部空间一个有负载的机械手（外部空间没有重力负载，可以允许有非常大的工作负载）。由 (10.2.20) 至 (10.2.22) 式分别计算出 D_{11} 、 D_{21} 、 D_{22} 代入 (10.2.31) 和 (10.2.35) 式求出分别对应于关节 2 锁定状态和自由状态时关节 1 的等效惯量，分别记为 I_L 和 I_f ，列于表 10-1 至

表 10-3 中。

在表 10-1 至表 10-3 中, 靠右边两列表示关节 1 的等效惯量。表 10-1 说明, 对于无负载机械手, θ_2 从 0° 到 180° 变化时, I_t 与 I_f 的比值变化为 3:1, 最大比值位于 $\theta_2=0^\circ$ 时。从表 10-2 中可以看出, 对于加载机械手, 同样 θ_2 从 0° 变化到 180° , I_t 与 I_f 的比值变化为 9:1, 最大比值同样在 $\theta_2=0$ 。而对于处在外部空间的机械手, I_t 与 I_f 之比的变化达到 201:1。这些惯量的变化对于机械手完成不同场合、不同状态下的工作所进行的控制设计无疑将有重要的影响。

表 10-1

θ_2	$\cos\theta_2$	D_{11}	D_{21}	D_{22}	I_t	I_f
0°	1	6	2	1	6	2
90°	0	4	1	1	4	3
180°	-1	2	0	1	2	2
270°	0	4	1	1	4	3

$$m_1=2 \quad m_2=1 \quad l_1=1 \quad l_2=1$$

表 10-2

θ_2	$\cos\theta_2$	D_{11}	D_{21}	D_{22}	I_t	I_f
0°	1	18	6	4	18	2
90°	0	10	4	4	10	6
180°	-1	2	0	4	2	2
270°	0	10	4	4	10	6

$$m_1=2 \quad m_2=4 \quad l_1=1 \quad l_2=1$$

表 10-3

θ_2	$\cos\theta_2$	D_{11}	D_{21}	D_{22}	I_t	I_f
0°	1	402	200	100	402	2
90°	0	202	100	100	202	102
180°	-1	2	0	100	2	2
270°	0	202	100	100	202	102

$$m_1=2 \quad m_2=100 \quad l_1=1 \quad l_2=1$$

10.2.2 机器人的拉格朗日动力学方程

图 10-8 为一多关节机械手, 各杆的附体坐标系按第七章的

规定建立在上关节上，我们讨论系统的拉格朗日动力学方程的建立。

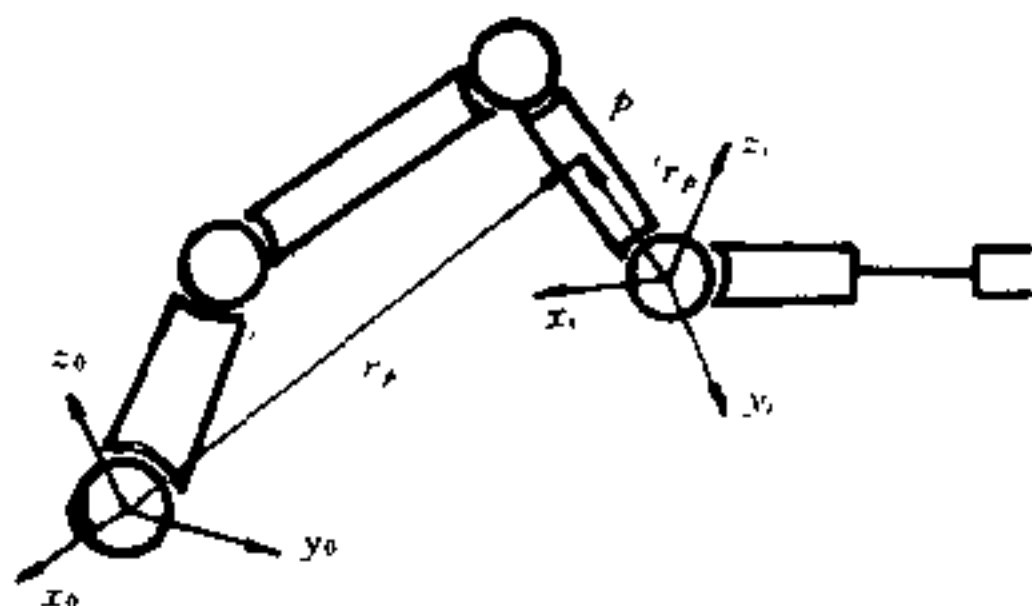


图 10-8

(1) 第 i 杆的动能

设 p 为第 i 杆上任一点，质量为 dm 。该点相对基座坐标系为 r_p ，相对自身坐标系为 ${}^i r_p$ ，于是存在关系

$$r_p = T_i {}^i r_p \quad (10.2.36)$$

式中， T_i 为第 i 杆相对基座坐标系的位置和姿态矩阵。

p 点的速度为

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{d}{dt}(r_p) \\ &= \frac{d}{dt}(T_i {}^i r_p) \\ &= \frac{d}{dt}(T_i) \cdot {}^i r_p \end{aligned} \quad (10.2.37)$$

由于

$$T_i = A_1 \cdots A_i \quad (10.2.38)$$

故有

$$\frac{d}{dt}(T_i) {}^i r_p = \left(\sum_{j=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) {}^i r_p \quad (10.2.39)$$

而

$$\frac{\partial T_i}{\partial q_i} = A_1 \cdots \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \cdots A_n \quad (10.2.40)$$

由第 9 章已经知道, 对于转动关节

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial q_i} &= \begin{bmatrix} -s\theta_i & -c\alpha_i c\theta_i & s\alpha_i c\theta_i & -a_i s\theta_i \\ c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (A_i) \end{aligned} \quad (10.2.41)$$

简记为

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_i} = Q_R A_i \quad (10.2.42)$$

其中

$$Q_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.2.43)$$

对于移动关节, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial q_i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (A_i) \end{aligned} \quad (10.2.44)$$

简记为

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_j} = Q_T A_i \quad (10.2.45)$$

其中

$$Q_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.2.46)$$

于是, 式 (10.2.40) 可改写为

$$\frac{\partial T_i}{\partial q_j} = A_1 \cdots A_{j-1} (Q_j A_j) A_{j+1} \cdots A_i \quad (10.2.47)$$

式中, 由于 $j > i$ 时 $\partial T_i / \partial q_j = 0$, 故有 $j \leq i$. 对于转动关节 $Q_j = Q_R$, 对于移动关节 $Q_j = Q_T$. 上式还可以简记为

$$\frac{\partial T_i}{\partial q_j} = T_{j-1} Q_j^{-1} T_i \quad (10.2.47)$$

为方便讨论, 我们不妨定义

$$W_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial q_j} = \begin{cases} T_{j-1} Q_j^{-1} T_i & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases} \quad (10.2.48)$$

同理, 我们还可以定义对 T_i 的高阶微分

$$\begin{aligned} W_{ijk} &= \frac{\partial W_{ij}}{\partial q_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_j} \right) \\ &= \begin{cases} T_{j-1} Q_j^{-1} T_{k-1} Q_k^{-1} T_i & j \leq k \leq i \\ T_{k-1} Q_k^{-1} T_{j-1} Q_j^{-1} T_i & k \leq j \leq i \\ 0 & i < j \text{ 或 } i < k \end{cases} \end{aligned} \quad (10.2.49)$$

这里, 对于转动关节, 同样取 $Q_j (Q_k) = Q_R$, 而对于移动关节, 同样取 $Q_j (Q_k) = Q_T$.

通过以上讨论, i 杆上 p 点的速度, 即式 (10.2.37) 可改写为

$$\mathbf{v}_p = \left(\sum_{j=1}^i W_{ij} \dot{q}_j \right) {}^i \mathbf{r}_p \quad (10.2.50)$$

这样, p 点的动能为

$$dk_p = \frac{1}{2} \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p \cdot dm \quad (10.2.51)$$

写作矩阵形式为

$$dk_p = \frac{1}{2} \mathbf{v}_p^T \mathbf{v}_p dm \quad (10.2.52)$$

也可以写作

$$dk_p = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{v}_p \mathbf{v}_p^T) dm \quad (10.2.53)$$

在上式中, Tr 是求矩阵的迹的记号, 即求矩阵对角线元素之和, 如 $\text{Tr}(B)$ 即求方阵 B 对角线元素之和。而 $\mathbf{v}_p = (v_{px} \ v_{py} \ v_{pz} \ 0)^T$ 。

将 (10.2.50) 式代入 (10.2.53) 式, 可得

$$\begin{aligned} dk_p &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\sum_{j=1}^i W_{ij} \dot{q}_j \right) {}^i \mathbf{r}_p \left(\left(\sum_{r=1}^i W_{ir} \dot{q}_r \right) {}^i \mathbf{r}_p \right)^T \right] dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{r=1}^i \sum_{j=1}^i W_{ij} ({}^i \mathbf{r}_p dm {}^i \mathbf{r}_p^T) W_{ir}^T \dot{q}_j \dot{q}_r \right] \end{aligned} \quad (10.2.54)$$

于是, 第 i 杆的动能应为

$$\begin{aligned} K_i &= \int_i dk_p \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{r=1}^i \sum_{j=1}^i W_{ij} \left(\int {}^i \mathbf{r}_p dm {}^i \mathbf{r}_p^T \right) W_{ir}^T \dot{q}_j \dot{q}_r \right] \end{aligned} \quad (10.2.55)$$

其中

$$\int {}^i \mathbf{r}_p dm {}^i \mathbf{r}_p^T = \int {}^i \mathbf{r}_p {}^i \mathbf{r}_p^T dm \quad (10.2.56)$$

我们已经由第 3 章知道, 积分结果为第 i 杆相对自身坐标系的惯性张量。若设 ${}^i \mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p, 1)^T$, 则有

$${}^i J = \int {}^i \mathbf{r}_p {}^i \mathbf{r}_p^T dm$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \int x_p^2 dm & \int x_p y_p dm & \int x_p z_p dm & \int x_p dm \\ & \int y_p^2 dm & \int y_p z_p dm & \int y_p dm \\ & & \int z_p^2 dm & \int z_p dm \\ \text{对称} & & & \int dm \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} & mx_c \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} & my_c \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} & mz_c \\ mx_c & my_c & mz_c & m \end{bmatrix} \quad (10.2.57)
\end{aligned}$$

式中, x_c 、 y_c 、 z_c 为 i 杆质心相对自身坐标系的位置; m 为 i 杆质量。

(2) 系统的动能

设整个机械手系统的动能 (仅讨论连杆) 为 K , 则

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{i=1}^N K_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^i \sum_{r=1}^i [\text{Tr}(W_{ii}^T J W_{ii}) \dot{q}_i \dot{q}_r] \quad (10.2.58)
\end{aligned}$$

(3) 系统的势能

系统的势能为各连杆势能之代数和, 即

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{i=1}^N V_i \\
&= \sum_{i=1}^N [-m_i g \cdot (T_i^T r_{ci})] \quad (10.2.59)
\end{aligned}$$

式中, r_{ci} 表示 i 杆质心相对自身坐标系的位置, 上式写作矩阵形式为

$$V = \sum_{i=1}^N [-m_i g^T T_i^T r_{ci}] \quad (10.2.60)$$

(4) 拉格朗日函数

$$L = K - V$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^i \sum_{s=1}^i [\text{Tr}(W_{ir}^i J W_{rs}^T) \dot{q}_i \dot{q}_s] + \sum_{i=1}^N [m_i g^T T_i^T r_{ci}] \quad (10.2.61)$$

(5) 拉格朗日动力学方程

设第 i 关节的关节力矩为 T_i , i 关节的关节变量为 q_i , 则拉格朗日方程一般式为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = T_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (10.2.62)$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^i [\text{Tr}(W_{ik}^i J W_{rr}^T) \dot{q}_r] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^i [\text{Tr}(W_{is}^i J W_{ik}^T) \dot{q}_s] \\ &= \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i [\text{Tr}(W_{is}^i J W_{ik}^T)] \dot{q}_s \end{aligned} \quad (10.2.63)$$

又

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i [\text{Tr}(W_{is}^i J W_{ik}^T)] \ddot{q}_s \\ &\quad + \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i \left[\text{Tr} \left(\left(\sum_{m=1}^i \frac{\partial W_{is}^i}{\partial q_m} \dot{q}_m \right)^T J W_{ik}^T \right) \right] \dot{q}_s \\ &\quad + \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i \left[\text{Tr} \left(W_{is}^i J \left(\sum_{m=1}^i \frac{\partial W_{ik}^T}{\partial q_m} \dot{q}_m \right) \right) \right] \dot{q}_s \\ &= \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i [\text{Tr}(W_{is}^i J W_{ik}^T)] \ddot{q}_s \\ &\quad + \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i \sum_{m=1}^i [\text{Tr}(W_{im}^i J W_{ik}^T)] \dot{q}_s \dot{q}_m \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i \sum_{m=1}^i [\text{Tr}(W_{is}^i J W_{im}^T)] \dot{q}_s \dot{q}_m \quad (10.2.64)$$

由于矩阵的迹与其转置矩阵的迹相等, 即有

$$\begin{aligned} \text{Tr}(W_{is}^i J W_{im}^T) &= \text{Tr}(W_{is}^i J W_{im}^T)^T \\ &= \text{Tr}(W_{im}^i J W_{is}^T) \end{aligned} \quad (10.2.65)$$

代入 (10.2.64) 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i [\text{Tr}(W_{is}^i J W_{is}^T)] \ddot{q}_i \\ &+ \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i \sum_{m=1}^i [\text{Tr}(W_{im}^i J W_{ik}^T)] \dot{q}_s \dot{q}_m \\ &+ \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i \sum_{m=1}^i [\text{Tr}(W_{ikm}^i J W_{is}^T)] \dot{q}_s \dot{q}_m \end{aligned} \quad (10.2.66)$$

又

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} &= \frac{1}{2} \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i \sum_{r=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial W_{is}}{\partial q_k} J W_{ir}^T \right) \right] \dot{q}_s \dot{q}_r \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i \sum_{r=1}^i \left[\text{Tr} \left(W_{is}^i J \frac{\partial W_{ir}^T}{\partial q_k} \right) \right] \dot{q}_s \dot{q}_r \\ &+ \sum_{i=k}^N \left[m_i g^T \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial q_k} \right) r_{ci} \right] \end{aligned} \quad (10.2.67)$$

整理可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} &= \frac{1}{2} \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i \sum_{r=1}^i [\text{Tr}(W_{ik}^i J W_{ir}^T)] \dot{q}_s \dot{q}_r \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=k}^N \sum_{s=1}^i \sum_{r=1}^i [\text{Tr}(W_{ik}^i J W_{is}^T)] \dot{q}_s \dot{q}_r \\ &+ \sum_{i=k}^N [m_i g^T W_{ik}^i r_{ci}] \end{aligned} \quad (10.2.68)$$

在 (10.2.66) 式和 (10.2.68) 式中, 统一求和序号将 k 换成 i , 将 s 换成 k , 将 r 换成 m 。代入 (10.2.62) 式, 将结果简记为

$$\tau_i = \sum_{k=1}^N M_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N M_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + M_i \quad (10.2.69)$$

其中

$$M_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^N [\text{Tr}(W_{jk}^T J W_{ji})] \quad (10.2.70)$$

$$M_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^N [\text{Tr}(W_{jk}^T J W_{ji})] \quad (10.2.71)$$

$$M_i = \sum_{j=i}^N (-m_j g^T W_{ji} r_{cj}) \quad (10.2.72)$$

$$g = (g_x, g_y, g_z, 0)^T \quad (10.2.73)$$

(6) 惯量项系数和重力项的简化

① 惯量项系数 M_{ik} 的简化

在第九章微分变换中已经知道

$$\begin{aligned} (dT_6)_i &= T_6^T \Delta_i dq_i \\ &= \frac{\partial T_6}{\partial q_i} dq_i \end{aligned} \quad (10.2.74)$$

因而有

$$\frac{\partial T_6}{\partial q_i} = T_6^T \Delta_i \quad (10.2.75)$$

对于机器人第 p 杆, 则有

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_i} = T_p^T \Delta_i \quad (10.2.76)$$

由 (10.2.48) 式, 可得

$$W_{ji} = T_p^T \Delta_i = T_p^p \Delta_i \quad (10.2.77)$$

由 (9.4.15) 式, 有

$${}^p \Delta_i = ({}^{i-1} T_p)^{-1} {}^{i-1} \Delta_i {}^{i-1} T_p \quad (10.2.78)$$

式中, ${}^{i-1} \Delta_i$ 表示第 i 关节变量的微变化;

${}^p \Delta_i$ 表示第 i 关节微变化引起的 p 杆的微变化。

${}^{i-1} T_p$ 表示由 ${}^{i-1} \Delta_i$ 到 ${}^p \Delta_i$ 之间的变换关系。

上式采用微移动向量和微转动向量表示时, 参照 (9.4.9)、(9.4.10) 式和 (9.4.12)、(9.4.13) 式, 对于转动关节, 有

$${}^p d_i = (-n_x p_y + n_y p_x) i + (-o_x p_y + o_y p_x) j \\ + (-a_x p_y + a_y p_x) k \quad (10.2.79)$$

$${}^p \delta_i = n_x i + o_x j + a_x k \quad (10.2.80)$$

而对于移动关节, 则有

$${}^p d_i = n_x i + o_x j + a_x k \quad (10.2.81)$$

$${}^p \delta_i = 0i + 0j + 0k \quad (10.2.82)$$

须要强调的是, 以上四个式子中的 n 、 o 、 a 、 p 是 ${}^{i-1}T_i$ 中的四个向量。

将 (10.2.78)、(10.2.77) 式代入 (10.2.70) 式, 可得

$$M_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^N \text{Tr}(W_{jk} {}^j J W_{ji}^T) \\ = \sum_{j=\max(i,k)}^N \text{Tr}(T_j {}^j \Delta_k {}^j J {}^j \Delta_i^T T_j^T) \\ = \sum_{j=\max(i,k)}^N \text{Tr} \left\{ T_j \begin{bmatrix} j & 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^j J \right. \\ \left. \cdot \begin{bmatrix} j & 0 & \delta_z & -\delta_y & 0 \\ -\delta_z & 0 & -\delta_x & 0 \\ -\delta_y & -\delta_x & 0 & 0 \\ dx & dy & dz & 0 \end{bmatrix} T_j^T \right\} \quad (10.2.83)$$

令

$$C = \begin{bmatrix} j & 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^j J$$

$$^j \begin{pmatrix} 0 & \delta_z & -\delta_y & 0 \\ -\delta_z & 0 & \delta_x & 0 \\ \delta_y & -\delta_x & 0 & 0 \\ dx & dy & dz & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.2.84)$$

考察上式右边三个矩阵可知, C 的最后一行和最后一列均为零。将 C 代入 (10.2.83) 得

$$M_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^N \text{Tr}(T_j C T_j^T) \quad (10.2.85)$$

此时, 用 T_j 及其转置左、右乘 C 仅仅利用了 T_j 与 T_j^T 中的转动部分。转动部分是一方向余弦矩阵, 由其正交性可知, 有

$$\text{Tr}(T_j C T_j^T) = \text{Tr}(C) \quad (10.2.86)$$

故而可得

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \sum_{j=\max(i,k)}^N \text{Tr}(C) \\ &= \sum_{j=\max(i,k)}^N [\delta_k^j J^j \delta_i^j + m_j (^j d_k \cdot ^j d_i) \\ &\quad + m_j ^j r_{cj} \cdot (^j d_k \times ^j \delta_i + ^j d_i \times ^j \delta_k)] \end{aligned} \quad (10.2.87)$$

若第 j 杆坐标系为主轴坐标系, 则由于惯性张量 $^j J$ 的非对角线元素均为 0, 可将 M_{ik} 进一步简化为

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \sum_{j=\max(i,k)}^N \{ [\delta_{ix}^j J_{xx}^j \delta_{ix}^j + \delta_{iy}^j J_{yy}^j \delta_{iy}^j + \delta_{iz}^j J_{zz}^j \delta_{iz}^j] \\ &\quad + m_j ^j [d_i \cdot d_i] + m_j ^j [r_{cj} \cdot (d_i \times \delta_i + d_i \times \delta_k)] \} \end{aligned} \quad (10.2.88)$$

由上式可以看出, 构成 M_{ik} 总和的每一部分由三项组成。第一项表明 j 杆质量分布的影响; 第二项表明第 j 杆质量偏高的影响; 最后一项则说明由于 j 杆质心不在 j 杆坐标系原点时所产生的影响。可见, 如果机械手各杆质心间距离较大时, 第二项影响将会比较明显。

特别地, 当 $k=i$ 时, M_{ik} 成了等效惯量 M_{ii} , 即

$$M_{ii} = \sum_{j=i}^N \{ {}^j[\delta_{ix}^2 J_{xx} + \delta_{iy}^2 J_{yy} + \delta_{iz}^2 J_{zz}] + m_j ({}^j\mathbf{d}_i \cdot {}^j\mathbf{d}_i) + m_j [2{}^j\mathbf{r}_{cj} \cdot ({}^j\mathbf{d}_i \times \delta_i)] \} \quad (10.2.89)$$

对于转动关节、

$$M_{ii} = \sum_{j=i}^N \{ [n_x^2 {}^jJ_{xx} + o_x^2 {}^jJ_{yy} + a_x^2 {}^jJ_{zz}] + m_j \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) + m_j [2{}^j\mathbf{r}_{cj} \cdot ((\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{i} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{o})\mathbf{j} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\mathbf{k})] \} \quad (10.2.90)$$

这里的 \mathbf{n} 、 \mathbf{o} 、 \mathbf{a} 、 \mathbf{p} 均为 ${}^{i-1}T_i$ 中的四个列向量。而对于移动关节，由于

$${}^i\delta_i = 0, \quad {}^i\mathbf{d}_i \cdot {}^i\mathbf{d}_i = 1 \quad (10.2.91)$$

于是，有

$$M_{ii} = \sum_{j=i}^N m_j \quad (10.2.92)$$

② 重力项 M_i 的简化

由 (10.2.72) 式，重力项为

$$M_i = \sum_{j=i}^N (-m_j \mathbf{g}^T W_{ji} {}^j\mathbf{r}_{cj}) \quad (10.2.93)$$

而

$$\begin{aligned} W_{ji} &= \frac{\partial T_j}{\partial q_i} \\ &= T_j {}^j\Delta_i \\ &= T_j ({}^{i-1}T_j)^{-1} {}^{i-1}\Delta_i ({}^{i-1}T_j) \end{aligned} \quad (10.2.94)$$

代入 (10.2.93) 式，有

$$\begin{aligned} M_i &= \sum_{j=i}^N [-m_j \mathbf{g}^T T_j ({}^{i-1}T_j)^{-1} {}^{i-1}\Delta_i ({}^{i-1}T_j) {}^j\mathbf{r}_{cj}] \\ &= \sum_{j=i}^N [-m_j \mathbf{g}^T T_{i-1} {}^{i-1}\Delta_i {}^{i-1}\mathbf{r}_{cj}] \\ &= -\mathbf{g}^T T_{i-1} {}^{i-1}\Delta_i \sum_{j=i}^N m_j {}^{i-1}\mathbf{r}_{cj} \end{aligned} \quad (10.2.95)$$

令

$${}^{i-1}g = -g^T T_{i-1} {}^{i-1}\Delta_i \quad (10.2.96)$$

即

$${}^{i-1}g = - (g_x \ g_y \ g_z \ 0) \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.2.97)$$

对于转动关节，有

$${}^{i-1}g = - (g_x \ g_y \ g_z \ 0) \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = (-g \cdot o \ g \cdot n \ 0 \ 0) \quad (10.2.98)$$

式中， n 、 o 、为 T_{i-1} 中的头两个向量。

对于移动关节，则有

$${}^{i-1}g = - (g_x \ g_y \ g_z \ 0) \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = (0 \ 0 \ 0 \ -g \cdot a) \quad (10.2.99)$$

这里， a 为 T_{i-1} 中第三个列向量。

于是，重力项为

$$M_i = {}^{i-1}g \sum_{j=i}^N m_j {}^{i-1}r_{cj} \quad (10.2.100)$$

下面仍以图 10-7 所示的平面双连杆机械手为例。计算其等

效惯量项、耦合惯量项系数和重力项。由于该机械手均为转动关节，所以分别用 (10.2.90)、(10.2.88) 式及 (10.2.79)、(10.2.80) 和 (10.2.100) 计算 M_{ii} 、 M_{ij} 和 M_i 。

首先确定与计算有关的参数，表 10-4 列出了各杆参数表。由该参数表可确定各相邻变换为

表 10-4 平面两杆机械手杆参数表

杆 序	θ	α	a	d	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
1	θ_1	0°	l_1	0	0	1
2	θ_2	0°	l_2	0	0	1

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.2.101)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.2.102)$$

于是有

$$T_1 = A_1 \quad (10.2.103)$$

$${}^1T_2 = A_2 \quad (10.2.104)$$

和

$$\begin{aligned} T_2 &= A_1 A_2 \\ &= \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.2.105)$$

利用 (10.2.79) 式和 (10.2.80) 式，各有关 d 和 δ 分别为：

对于第一关节 ($i=1$) 的微变化, 引起第一杆和第二杆微变化的变换关系分别为 T_1 和 T_2 于是, 可求得

$${}^1d_1 = 0i + l_1j + 0k \quad (10.2.106)$$

$${}^1\delta_1 = 0i + 0j + 1k \quad (10.2.107)$$

和

$${}^2d_1 = l_1s_2i + (l_1c_2 + l_2)j + 0k \quad (10.2.108)$$

$${}^2\delta_1 = 0i + 0j + 1k \quad (10.2.109)$$

对于第 2 关节 ($i=2$) 的微变化, 引起第二杆的微变化之变换关系为 1T_2 , 于是, 有

$${}^2d_2 = 0i + l_2j + 0k \quad (10.2.110)$$

$${}^2\delta_2 = 0i + 0j + 1k \quad (10.2.111)$$

又各杆质量集中于杆末端, 即位于各杆坐标系的原点, 故有

$${}^1r_{c1} = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \quad {}^2r_{c2} = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T \quad (10.2.112)$$

$${}^0r_{c1} = (l_1c_1 \ l_2s_1 \ 0 \ 1)^T \quad (10.2.113)$$

$${}^1r_{c2} = (l_2c_2 \ l_2s_2 \ 0 \ 1)^T \quad (10.2.114)$$

$${}^0r_{c2} = (l_1c_1 + l_2c_{12} \ l_1s_1 + l_2s_{12} \ 0 \ 1)^T \quad (10.2.115)$$

利用 (10.2.98) 式, 可计算得

$${}^0g = (g \ g \ 0 \ 0) \quad (i=1) \quad (10.2.116)$$

$${}^1g = (gc_1 \ gs_1 \ 0 \ 0) \quad (i=2) \quad (10.2.117)$$

最后可计算如下

$i=1$ 时

$$\begin{aligned} M_{11} &= \sum_{j=1}^2 m_j (p \cdot p) \\ &= m_1 (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)_1 + m_2 (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)_2 \\ &= m_1 l_1^2 + m_2 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2) \end{aligned} \quad (10.2.118)$$

$i=2$ 时

$$M_{22} = \sum_{j=2}^2 m_j (p \cdot p)$$

$$\begin{aligned}
&= m_2^1(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)_2 \\
&= m_2 l_1^2
\end{aligned}
\tag{10.2.119}$$

又耦合惯量系数

$$\begin{aligned}
M_{12} &= M_{21} \\
&= \sum_{j=2}^2 m_2^j (d_j \cdot d_1) \\
&= m_2 (l_1 l_2 c_2 + l_2^2)
\end{aligned}
\tag{10.2.120}$$

再计算重力项

$$\begin{aligned}
M_1 &= {}^0g(M_1^0 r_{c1} + m_2^0 r_{c2}) \\
&= m_1 g l_1 c_1 + m_2 g (l_1 c_1 + l_2 c_{12})
\end{aligned}
\tag{10.2.121}$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= {}^1g m_2^1 r_{c2} \\
&= m_2 g l_2 c_{12}
\end{aligned}
\tag{10.2.122}$$

习 题 10

10.1 习图 10-1 所示为一两杆机械手，试用递推算法求终端手爪的速度，分别用基座坐标系与自身坐标系表示。

10.2 上题中，如在手爪上作用一静力，用承载物坐标系表示为 ${}^3F = (f_x, 0, f_z)^T$ ，设载荷坐标系与手爪坐标系重合，试确定各关节力矩。

10.3 试建立习图 10-2 所示平面全旋转三关节机械手的牛顿-欧拉递推方程。

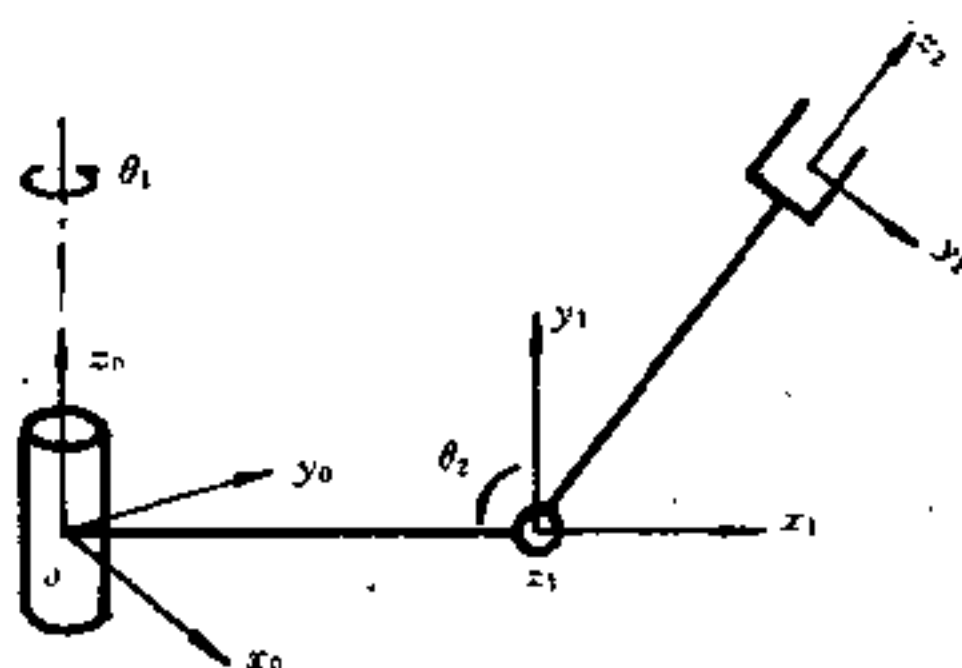
10.4 试用拉格朗日方法建立题 10.1 机械手的动力学方程。

10.5 试建立题 10.3 三关节机械手的拉格朗日动力学方程。

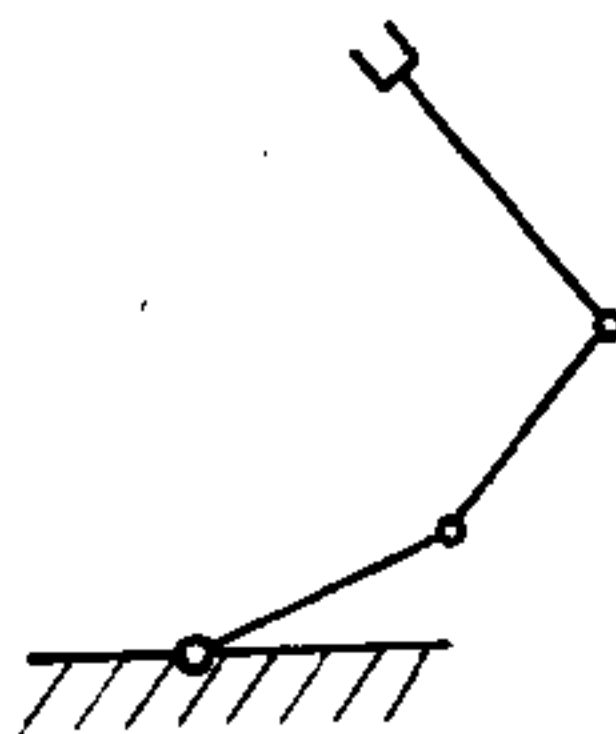
10.6 试用高级语言编写牛顿-欧拉递推方程（相对杆自身坐标系）的计算机程序。

10.7 试用高级语言编写拉格朗日方法的惯量项系数和重力

项简化计算的计算机程序。



习图 10 - 1



习图 10 - 2

附录 向量和张量的运算

1. 向量的乘积

设向量 a 、 b 均为三维列向量，即

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

(1) a 与 b 的点积为一标量

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.2)$$

其矩阵形式为

$$a^T b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.3)$$

(2) a 与 b 的叉积为一 3 维列向量

$$a \times b = c$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \quad (1.4)$$

其中， e_1, e_2, e_3 为笛卡尔直角坐标轴的单位向量，其矩阵形式为

$$\tilde{a} b = c \quad (1.5)$$

式中

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

\tilde{a} 是一反对称矩阵，且有

$$\tilde{a}^T = -\tilde{a} \quad (1.7)$$

(3) a 与 b 的并矢积为一张量

$$ab = P \quad (1.8)$$

这里， P 为张量，它有九个分量 p_{ij} ($i, j=1, 2, 3$)，且

$$p_{ij} = a_i b_j \quad (1.9)$$

其矩阵形式为

$$\begin{aligned} ab^T &= \mathbf{P} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.10)$$

2. 张量及其运算

设 \mathbf{P} 为一张量, 可将其按如下展开

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \\ &= e_1 p_1^T + e_2 p_2^T + e_3 p_3^T \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中

$$p_1 = (p_{11} \quad p_{12} \quad p_{13})^T, p_2 = (p_{21} \quad p_{22} \quad p_{23})^T, p_3 = (p_{31} \quad p_{32} \quad p_{33})^T \quad (2.2)$$

$$e_1 = (1 \ 0 \ 0)^T, e_2 = (0 \ 1 \ 0)^T, e_3 = (0 \ 0 \ 1)^T \quad (2.3)$$

于是, 张量 \mathbf{P} 可写作

$$\mathbf{P} = e^T \mathbf{P} e \quad (2.4)$$

式中

$$e = (e_1 \ e_2 \ e_3)^T \quad (2.5)$$

张量 \mathbf{P} 还可以写作并矢的形式

$$\mathbf{P} = e_1 p_1 + e_2 p_2 + e_3 p_3 \quad (2.6)$$

设 P 、 Q 、 R 均为张量，其运算规则如下

(1) 张量加法

$$P + Q = R \quad (2.7)$$

其矩阵形式为

$$P + Q = R \quad (2.8)$$

(2) 张量与标量相乘

$$\lambda P = Q \quad (2.9)$$

其矩阵形式为

$$\lambda P = Q \quad (2.10)$$

这里， λ 为标量

(3) 向量与张量的点积

向量 a 左乘张量 P ，结果为一新向量 b

$$a \cdot P = b \quad (2.11)$$

其矩阵形式为

$$P^T a = b \quad (2.12)$$

或

$$b^T = a^T P \quad (2.13)$$

向量 a 右乘张量 P ，结果为一新向量 c

$$Pa = c \quad (2.14)$$

其矩阵形式为

$$Pa = c \quad (2.15)$$

(4) 向量与张量的叉积

向量 a 左乘张量 P ，结果为一新张量 Φ

$$a \times P = \Phi \quad (2.16)$$

其矩阵形式为

$$\tilde{a} P = \Phi \quad (2.17)$$

向量 a 右乘张量 P ，结果为一新张量 R

$$P \times a = R \quad (2.18)$$

其矩阵形式为

$$\mathbf{P}\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{R} \quad (2.19)$$

3. 张量与张量的乘积

张量与张量相乘与矩阵乘法相同。

3. 常见的矢量、张量运算

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{a} \mathbf{b} \times \mathbf{d} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \mathbf{E} - \mathbf{c} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \quad (3.5)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \mathbf{E} - \mathbf{b} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a} \quad (3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{a} = 0 \quad (3.8)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{E} \quad (3.9)$$

4. 向量分析

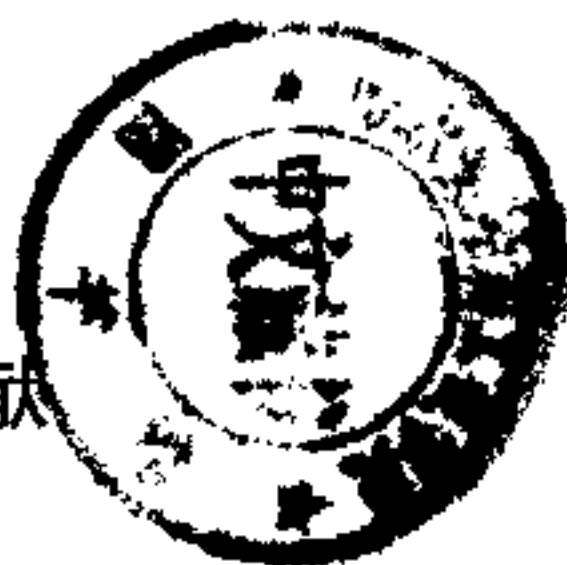
在定参考系和动参考系中观察某向量 $\mathbf{r}(t)$ 的变化是不一样的。称相对定参考系的导数为绝对导数，以 $d\mathbf{r}/dt$ 表示；称相对动参考系的导数为相对导数，以 $\tilde{d}\mathbf{r}/dt$ 表示。则它们之间存在如下关系

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (4.1)$$

上式称为科里奥利公式。 $\boldsymbol{\omega}$ 为动参考系相对定参考系的角速度。

379881

参考文献



1. 谈开孚等编. 分析力学. 哈尔滨工业大学出版社, 1985.
2. 贾书惠编. 刚体动力学. 北京: 高等教育出版社, 1987.
3. 吴广玉, 姜复兴等编. 机器人工程导论. 哈尔滨工业大学出版社, 1988.
4. 王庭树编. 机器人运动学及动力学. 西安电子科技大学出版社, 1990.
5. 波波夫 EИ 编. 操作机器人动力学与算法. 北京: 机械工业出版社, 1983.
6. Richard P Paul. Robot manipulators: mathematic, programming and control. The MIT press. 1981.
7. John J. Craing Introduction to Roboties, Mechanics and Control, Stanford University, Addison Wesley Inc. 1986.