2 第二单元

习题 2 .1 质点以恒定速率 v 沿任意的一固定轨道运动，请证明质点的速度与加速度始终垂直。

证：由于速率 v 恒定可知 $\frac{dv}{dt}=0$，于是

$$\frac{dv^2}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}^2}{dt}=2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

证毕。

习题 2 .2 设有曲线 $y=f(x)$，请证明在 x 处的曲率半径 $\rho(x)=\frac{[1+(f')^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''|}$，其中 $f'(x)=\frac{df}{dx}$，$f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2}$。

证明：以 x 为参数，该曲线有参数化表示 $\boldsymbol{r}(x)=x\boldsymbol{i}+f(x)\boldsymbol{j}$。于是按参数 x 移动的速度和加速度

$$\boldsymbol{v}(x)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}=\boldsymbol{i}+f'(x)\boldsymbol{j}\quad,\quad \boldsymbol{a}(x)=\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}=f''(x)\boldsymbol{j}$$

根据法向加速度 $\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_t$（其中切向加速度 $\boldsymbol{a}_t=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^2}$），可得

由 $\boldsymbol{a}_t=c\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}_t\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$ 可知 $c=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})}{\boldsymbol{v}^2}$。

$$|\boldsymbol{a}_n|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_t)^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}{\boldsymbol{v}^2}}=\frac{|f''|}{\sqrt{1+(f')^2}}$$

因此

$$\rho(x)=\frac{\boldsymbol{v}^2}{|\boldsymbol{a}_n|}=\frac{[1+(f')^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

习题 2 .3 抛物线形弯管的表面光滑，可绕铅直轴以匀角速率转动。抛物线方程为 $y=ax^2$，a 为常数。小环套于弯管上。(1) 求弯管角速率多大，小环可在管上任意位置相对弯管静止；(2) 若为圆形光滑弯管，情形如何？(P.96:Prob.2-30)

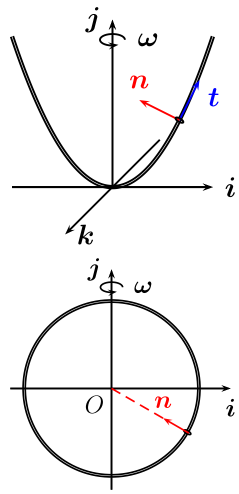

图 6: 习题2 .3(1)&(2)

解：(1) 建立如图 6所示与弯管固连的转动坐标系 K，因为小环被限制于弯管上运动，所以有位矢 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+ax^2\boldsymbol{j}$。对于 K 系的观测者，小环受到重力 $\boldsymbol{G}$、弯管的支持力 $\boldsymbol{N}$ 和离心力 $\boldsymbol{F}_c$，它们分别为

$$\boldsymbol{G}=-mg\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{N}=f\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{F}_c=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=m\omega^2x\boldsymbol{i}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 指向弯管在 $\boldsymbol{r}$ 处的法向，它与弯管在该处的切向 $\boldsymbol{t}$ 垂直，而 $\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}=\boldsymbol{i}+2ax\boldsymbol{j}$，故有 $\boldsymbol{n}=-2ax\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$。因为小环相对弯管静止，所以 $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_c=\boldsymbol{0}$，于是可得：

$$(m\omega^2-2af)x=0,\quad f=mg$$

当 $x\neq0$ 时，有 $\omega=\sqrt{\frac{2af}{m}}=\sqrt{2ag}$；当 $x=0$ 时，ω 则可取任意值。

(2) 同样地，对于 K 系的观测者，小环受到重力 $\boldsymbol{G}=-mg\boldsymbol{j}$、弯管的支持力 $\boldsymbol{N}=f\boldsymbol{n}$ 和离心力 $\boldsymbol{F}_c=m\omega^2x\boldsymbol{i}$，其中法向 $\boldsymbol{n}$ 可直接选为 $\boldsymbol{r}$，即 $\boldsymbol{n}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$。由于合力为零：$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_c=\boldsymbol{0}$，于是可得

$$(m\omega^2+f)x=0,\quad fy=mg$$

当 $x\neq0$ 时，可得 $\omega=\sqrt{\frac{g}{-y}}$，其中要求 $y<0$；当 $x=0$ 时，即在大圆环最低、最高点时，ω 可取任意值，小圆环均可静止。

习题 2 .4 一圆盘绕过其圆心并与盘面垂直的转动轴以恒定的角速率 ω 转动，在圆盘上沿径向开有一光滑小槽，槽内一质量为 m 的质点以 v_0 的初速从圆心开始向外运动（图 7），试求：1. 质点到达 $r_0(>0)$ 处时的速率；2. 质点到达该处所需的时间 t；3. 质点在该处所受到的槽壁对它的侧向作用力。

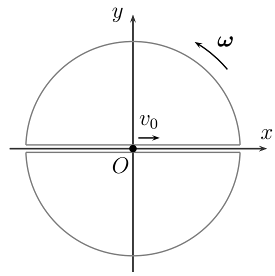

图 7: 转动坐标系 K

解：如图 5所示，建立与圆盘固连的转动坐标系 K，其中 z 轴垂直纸面指向外，角速度 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$；对于 K 系的观测者而言，质点的位矢 $\boldsymbol{r}(t)$、速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 和加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ 分别为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{v}(t)=\dot{x}(t)\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{a}(t)=\ddot{x}(t)\boldsymbol{i}$$

因为圆盘——其圆心固定——仅涉及转动，并且角速度恒定，所以惯性力只有离心力 $\boldsymbol{F}_c$ 和科里奥力 $\boldsymbol{F}_{cor}$：

$$\boldsymbol{F}_c=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=-m\omega^2x\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})=m\omega^2x\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{F}_{cor}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=-2m\omega\dot{x}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-2m\omega\dot{x}\boldsymbol{j}$$

真实力有重力和槽底的作用力——都沿 z 轴方向，但二者抵消；而槽壁的作用力 $\boldsymbol{F}_w$——与 y 轴平行——可表示为 $f\boldsymbol{j}$，其中 f 待定。于是，质点在 K 系的运动方程为

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}_c+\boldsymbol{F}_{cor}+\boldsymbol{F}_w=m\omega^2x\boldsymbol{i}+(f-2m\omega\dot{x})\boldsymbol{j} \tag{2 .1}$$

方程(2 .1)为矢量等式，它等价于两个标量等式：$f=2m\omega\dot{x}$ 和 $\ddot{x}=\omega^2x$；结合初始条件，可得关于 $x(t)$ 的初始值问题：

$$\ddot{x}-\omega^2x=0\quad;\quad x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v_0 \tag{2 .2}$$

关于初始值问题(2 .2)，先解得方程的通解 $x(t)=\alpha e^{\omega t}+\beta e^{-\omega t}$；将通解带入初始条件，可得关于 α 和 β 的线性方程组，最后解得 α 和 β。

可解得

$$x(t)=\tfrac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$$

由 $x(t)=r$，可求得相遇时间

$$t=\tfrac{1}{\omega}\ln\tfrac{\omega r+\sqrt{v_0^2+(\omega r)^2}}{v_0}$$

此时的速率

$$v=\dot{x}(t)=\sqrt{v_0^2+(\omega r)^2}$$

以及槽壁的作用力

$$\boldsymbol{F}_w=2m\omega v\boldsymbol{j}$$