4 第四单元

习题 4 .1 质量 $70kg$ 的渔人站在小船上，设船和渔人的总质量为 $200kg$。若渔人在船上向船头走 $4.0m$ 后停止。试问：以岸为参考系，渔人走了多远？

解：如图 18所示，O 和 O' 分别代表岸上的和船上的观测者。因为 $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{r}'(t)$，所以 $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{V}(t) + \boldsymbol{v}'(t)$。对观测者 O 而言，小船和渔夫的总动量守恒，即

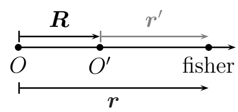

图 18: 渔夫与船

$$M\boldsymbol{V} + m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V} = -m\boldsymbol{v}/M$$

其中 M 和 m 分别为小船和渔夫的质量。于是，可得

$$\boldsymbol{v} = \frac{M\boldsymbol{v}'}{M+m} \quad \Rightarrow \quad |\Delta\boldsymbol{r}| = \frac{M}{M+m}|\Delta\boldsymbol{r}'| = \frac{130kg}{200kg}4m = 2.6m$$

习题 4 .2 一炮弹以速率 v_0 和仰角 θ_0 发射，到达弹道的最高点时炸为质量相等的两块（图 19），其中一块以速率 v_1 垂直下落，求另一块的速率 v_2 及速度与水平方向的夹角（忽略空气阻力）。

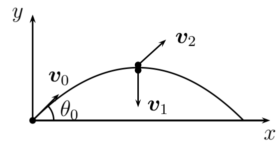

图 19: 炮弹

解：炮弹到达最高点需经历的时间为 $t = v_0 \sin\theta_0/g$，由动量定理可知此时的动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{G}t \\ &= mv_0(\cos\theta_0\boldsymbol{i} + \sin\theta_0\boldsymbol{j}) - mv_0\sin\theta_0\boldsymbol{j} \\ &= mv_0\cos\theta_0\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

由于爆炸是瞬间的，而爆炸力为内力，故有总动量守恒，即

$$\boldsymbol{p} = -\frac{m}{2}v_1\boldsymbol{j} + \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = 2v_0\cos\theta_0\boldsymbol{i} + v_1\boldsymbol{j}$$

由此可知速率 $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 4v_0^2\cos^2\theta_0}$ 和夹角 $\theta = \arctan\frac{v_1}{2v_0\cos\theta_0}$。

习题 4 .3 图 20中 O 为中心力场的力心，排斥力与距离平方成反比：$f = k/r^2$（k 为常量）。1. 求此力场的势能；2. 一质量为 m 的粒子以速度 v_0、瞄准距离 b 从远处入射，求它能达到的最近距离 d 和此时刻的速率。(P.202:Prob.4-11)

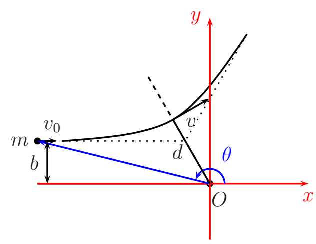

图 20: 题4 .3

解：在中心力场中运动的粒子的角动量守恒，由此可知粒子的运动轨迹对应平面曲线，且落在过力心并与角动量垂直的平面上。因此，该问题可简化为二维平面上的运动，我们建立如图 20所示的极（和直角）坐标系，角动量的方向为 $\boldsymbol{k}$ 方向（垂直纸面指向外）。

由于中心力场为保守力场，可以定义势能：

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' = V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \left[\frac{k\boldsymbol{r}'}{(r')^3}\right]\cdot d\boldsymbol{r}' \qquad (4\ .1)\\ &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \left[\frac{k}{(r')^2}\right] dr' = V(\boldsymbol{r}_0) + \left[\frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}\right] \\ &\xrightarrow[V(\boldsymbol{r}_0)=0]{r_0=\infty} \frac{k}{r}\end{aligned}$$

排斥力意为着力与位矢同向，使得粒子远离力心，即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$；吸引力正相反，有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$。

最后一步表示选取无穷远处为势能零点，上式表明 $V(\boldsymbol{r})$ 仅依赖于 r，故又常记为 $V(r)$。粒子的初始位置为 $\boldsymbol{r}(0)=x_0\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$（其中 $x_0\approx-\infty$），初始速度为 $\boldsymbol{v}(0)=v_0\boldsymbol{i}$，于是有角动量：

$$\boldsymbol{J}(0)=\boldsymbol{r}(0)\times\boldsymbol{p}(0)=(x_0\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j})\times(mv_0\boldsymbol{i})=-mbv_0\boldsymbol{k}$$

和机械能

$$E(0)=\frac{1}{2}mv_0^2$$

设 t 时刻，粒子的位矢为$\boldsymbol{r}(t)=r\boldsymbol{e}_r$，其速度 $\boldsymbol{v}(t)=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$。由角动量守恒定律，得

对中心力场，通常采用极（球）坐标系；此处 r 直接表示粒子与力心 O 之间的距离，这正是第二小问关注的量。

$$\boldsymbol{J}(t)=r\boldsymbol{e}_r\times m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)=mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{J}(0)\ \Rightarrow\ r\dot{\theta}=-bv_0/r \tag{4 .2}$$

由机械能守恒定律，得

$$E(t)=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{k}{r}=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{4 .3}$$

将(4 .2)代入(4 .3)，可得：

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\left[\frac{mb^2v_0^2}{2r^2}+\frac{k}{r}\right]=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V_e(r)=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{4 .4}$$

显然有效势 $V_e(r)$ 是关于 $r(>0)$ 的单调递减函数，当 $\dot{r}=0$ 时有 $V_e(r)$ 达到最大——即 r 达到最小。于是

$$V_e(d)=\frac{1}{2}mv_0^2\quad\Rightarrow\quad d=\frac{k+\sqrt{k^2+b^2m^2v_0^4}}{mv_0^2} \tag{4 .5}$$

此时粒子的速率

$$v=|\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta|=|r\dot{\theta}|=bv_0/d \tag{4 .6}$$

上式第三个等号由方程(4 .2)和(4 .5)可得。