1 第一单元

习题 1 .1 一球以初速 v_0 竖直上抛，经过时间 t_0 后在同一地点以同样速率向上抛出另一小球。两球在多高处相遇？（P.39:Prob.1-6）

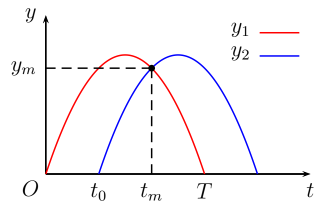

图 1: 习题1 .1

解：设 $y_1(t)$、$y_2(t)$ 分别表示第一、第二小球在 t 时刻到达的高度，于是有

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad t \geq 0 \\
y_2(t) &= y_1(t - t_0) \\
&= v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2, \quad t \geq t_0
\end{aligned}
$$

图 1给出了 y_1 和 y_2 的函数曲线，显然二者的交点 (t_m, y_m) 表示在 t_m 时刻在高度 y_m 处两小球相遇。根据 $y_1(t_m) = y_2(t_m)$，可得

$$
t_m = \frac{t_0}{2} + \frac{v_0}{g} \quad \Rightarrow \quad y_m = y_1(t_m) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt_0^2}{8}
$$

t_m 还可以用另一种方法获得，图 1中的 T 表示第一个小球由抛起到返回初始位置所经历的时间，其值为 $\frac{2v_0}{g}$，由对称性可知 t_m 处于 t_0 和 T 的中间位置，即 $t_m = (T - t_0)/2 + t_0$。

习题 1 .2 在同一竖直面内的同一水平线上 A、B 两点分别以 $30°$、$60°$ 为发射角同时抛出两个小球，欲使两球在各自轨道的最高点相遇，求 A、B 两点之间的距离。已知小球 A 的初速为 $v_{A0} = 9.8m/s$。（P.39:Prob.1-10）

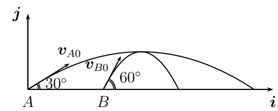

图 2: 习题1 .2

解：建立以 A 点为原点的坐标系，水平向右为 x 轴的指向，竖直向上为 y 轴的指向，并以小球上抛时刻为初始时刻 $t = 0$。因此，两小球（分别称作 A 球和 B 球）的运动轨迹为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_A(t) &= x_A(t)\boldsymbol{i} + y_A(t)\boldsymbol{j} = (\cos 30° v_{A0} t)\boldsymbol{i} + (\sin 30° v_{A0} t - \tfrac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{r}_B(t) &= x_B(t)\boldsymbol{i} + y_B(t)\boldsymbol{j} = (d_{AB} + \cos 60° v_{B0} t)\boldsymbol{i} + (\sin 60° v_{B0} t - \tfrac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

其中 d_{AB} 为 A、B 两点之间的距离，v_{B0} 为 B 球的初速。设在最高点相遇的时刻为 t_m，则有：

$$
\frac{dy_A(t_m)}{dt} = 0, \quad \boldsymbol{r}_A(t_m) = \boldsymbol{r}_B(t_m)
$$

未知量 d_{AB}、v_{B0} 和 t_m 可由上述三个标量方程求得，其中 $d_{AB} = \frac{\sqrt{3}v_{A0}^2}{6g}$。

习题 1 .3 已知炮弹的发射角为 θ，初速为 v_0，求抛物线轨道的曲率半径随高度的变化。（P.40:Prob.1-12）

解：建立以初始位置为原点、水平方向为 x 轴及竖直方向为 y 轴的坐标系。由初速度 $\boldsymbol{v}(0) = v_0 \cos\theta \boldsymbol{i} + v_0 \sin\theta \boldsymbol{j}$ 和加速度 $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j}$，可得 t 时刻的速度和位矢：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= v_0 \cos\theta \boldsymbol{i} + (v_0 \sin\theta - gt)\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{r}(t) &= x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} = v_0 \cos\theta t \boldsymbol{i} + (v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

由此可得曲率半径：

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{v^2}{|\boldsymbol{a}_n|} = \frac{v^2}{|\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}|} = \frac{v^2}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})^2}} = \frac{v^3}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2v^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}}\\ &= \frac{[(v_0\cos\theta)^2+(v_0\sin\theta-gt)^2]^{\frac{3}{2}}}{gv_0\cos\theta} = \frac{[v_0^2-2g(v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2)]^{\frac{3}{2}}}{gv_0\cos\theta}\\ &= \frac{(v_0^2-2gy)^{\frac{3}{2}}}{v_0g\cos\theta}\end{aligned}$$

习题 1 .4 一弹性球自静止竖直地落在斜面上的 A 点，下落高度 $h=0.2m$，斜面与水平夹角 $\theta=30°$。问弹性球第二次碰到斜面的位置 B 距 A 多远。设弹性球与斜面碰撞前后速度数值相等，碰撞时入射角等于反射角。（P.40:Prob.1-13）

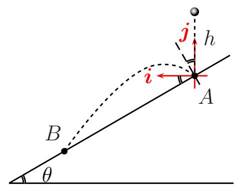

图 3: 习题1 .4

解：建立以 A 点为原点的坐标系，水平向左为 x 轴的指向，竖直向上为 y 轴的指向，并以弹性球第一次碰撞为初始时刻 $t=0$。因此弹性球的运动轨迹可表示为：

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j} = (\cos\theta v_0 t)\boldsymbol{i}+(\sin\theta v_0 t-\tfrac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

其中初速 $v_0=\sqrt{2gh}$。设经历时间 t_m 发生第二次碰撞，则有

$$\boldsymbol{r}(t_m) = \overrightarrow{AB} = d_{AB}(\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j})$$

其中 d_{AB} 为 A、B 两点之间的距离。未知量 t_m 和 d_{AB} 可由上述矢量等式求得，结果为 $d_{AB}=0.8cm$。

习题 1 .5 计算曲线：$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}$ 在 x 处的曲率。

还可以时间 t 为参数。

解法一：该曲线显然是以参数 x 表达的，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x)=x\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}$，因此按参数 x 运动的速度与加速度为：

$$\boldsymbol{v}(x)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}=\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{a}(x)=\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}=e^x\boldsymbol{j}$$

由此可得：

$$\kappa=\frac{|\boldsymbol{a}_n|}{v^2}=\frac{\sqrt{[\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}]^2}}{v^2}=\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}^2v^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}}{v^3}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

解法二：以自然参数 s 表示曲线：$\boldsymbol{r}(s)=x(s)\boldsymbol{i}+e^{x(s)}\boldsymbol{j}$，其中参数 s 与 x 有以下函数关系：

$$s(x)=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+e^{2x'}}dx' \quad\Rightarrow\quad \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+e^{2x}}$$

积分下限 x_0 为起始位置。显然 s 是关于 x 的单调递增函数，二者之间有一一对应关系，因此存在反函数 $x=x(s)$，并且 $\frac{dx}{ds}=(\frac{ds}{dx})^{-1}$。按参数 s 运动的速度与加速度为：

$$\boldsymbol{v}(s)=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}}{\sqrt{1+e^{2x}}},\quad \boldsymbol{a}(s)=\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{e^x\boldsymbol{j}-e^{2x}\boldsymbol{i}}{(1+e^{2x})^2}$$

由此可得：

$$\kappa=|\boldsymbol{a}(s)|=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

习题 1 .6 设有笛卡尔坐标系 1 和 2，$t=0$ 时两者重合（即有相同的原点、x 轴和 y 轴）。随后，坐标系 2 原点相对坐标系 1 原点以速度 (v_x, v_y) 作匀速平移运动，同时坐标系 2 还围绕其原点以角速度 $\omega_2(>0)$ 作逆时针旋转运动。如一质点在坐标系 1 中的运动轨迹为：$x_1(t)=r\cos(\omega_1 t)$，$y_1(t)=r\sin(\omega_1 t)$，请问其在坐标系 2 中的运动轨迹（即确定 $x_2(t)$ 和 $y_2(t)$）。

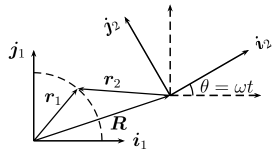

图 4: 习题1 .6

解：如图 4所示，质点在坐标系 1 中对应位矢 $\boldsymbol{r}_1(t)=x_1(t)\boldsymbol{i}_1+y_1(t)\boldsymbol{j}_1$，在坐标系 2 中对应位矢 $\boldsymbol{r}_2(t)=x_2(t)\boldsymbol{i}_2+y_2(t)\boldsymbol{j}_2$，坐标系 2 原点在坐标系 1 中的观察者看来对应位矢 $\boldsymbol{R}(t)=(v_x t)\boldsymbol{i}_1+(v_y t)\boldsymbol{j}_1$，并且三者满足关系：

$$\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{r}_2(t)+\boldsymbol{R}(t)$$

在 t 时刻，基矢量 $\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{j}_2$ 与 $\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{j}_1$ 有以下关系：

$$\boldsymbol{i}_2=\cos\theta\boldsymbol{i}_1+\sin\theta\boldsymbol{j}_1,\quad \boldsymbol{j}_2=-\sin\theta\boldsymbol{i}_1+\cos\theta\boldsymbol{j}_1$$

因此可得：

$$x_2(t)=\boldsymbol{i}_2\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{R})=r\cos((\omega_1-\omega_2)t)-vt\cos(\omega_2 t-\varphi)$$
$$y_2(t)=\boldsymbol{j}_2\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{R})=r\sin((\omega_1-\omega_2)t)+vt\sin(\omega_2 t-\varphi)$$

其中 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ 和 $\varphi=\arccos(v_x/v)$。

习题 1 .7 极坐标系中的对数螺线可表示为 $r=r_0e^{\alpha\theta}$，试求出曲率半径分布 $\rho(r)$。

解：在极坐标系中，该对数螺线以参数 θ 可表示为 $\boldsymbol{r}(\theta)=r_0e^{\alpha\theta}\boldsymbol{e}_r$，由此可得按参数 θ 运动的速度和加速度：

$$\boldsymbol{v}(\theta)=\frac{d\boldsymbol{r}(\theta)}{d\theta}=r_0e^{\alpha\theta}(\alpha\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{e}_\theta) \tag{1 .1}$$

$$\boldsymbol{a}(\theta)=\frac{d\boldsymbol{v}(\theta)}{d\theta}=\alpha r_0e^{\alpha\theta}(\alpha\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{e}_\theta)+r_0e^{\alpha\theta}(\alpha\boldsymbol{e}_\theta-\boldsymbol{e}_r) \tag{1 .2}$$

比较式(1 .1)和(1 .2)可知，(1 .2)等号右端第一项与 $\boldsymbol{v}(\theta)$ 共线而第二项则与 $\boldsymbol{v}(\theta)$ 垂直，因而法向加速度为 $\boldsymbol{a}_n(\theta)=r_0e^{\alpha\theta}(\alpha\boldsymbol{e}_\theta-\boldsymbol{e}_r)$，因此有：

$$\rho(r)=\frac{v^2(\theta)}{|\boldsymbol{a}_n(\theta)|}=r_0e^{\alpha\theta}\sqrt{1+\alpha^2}=r\sqrt{1+\alpha^2}$$

习题 1 .8 极坐标系中的方程 $r=A(1-\cos\theta)$，对应一条心脏线。如图 5所示，试求心底 P 处曲率半径 ρ。

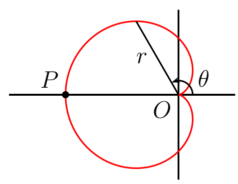

图 5: 心脏线

解：在极坐标系中，该心脏线以参数 θ 的表示为：$\boldsymbol{r}(\theta)=A(1-\cos\theta)\boldsymbol{e}_r$，由此可得按参数 θ 运动的速度和加速度

$$\boldsymbol{v}(\theta)=\frac{d\boldsymbol{r}(\theta)}{d\theta}=A\sin\theta\boldsymbol{e}_r+A(1-\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a}(\theta)=\frac{d\boldsymbol{v}(\theta)}{d\theta}=A(2\cos\theta-1)\boldsymbol{e}_r+2A\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

心底 P 对应 $\theta=\pi$，有 $\boldsymbol{v}(\pi)=2A\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{a}(\pi)=-3A\boldsymbol{e}_r$，显然二者垂直。因此

$$\rho(P)=\frac{\boldsymbol{v}^2}{|\boldsymbol{a}_n|}=\frac{\boldsymbol{v}^2}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{4A}{3}$$

习题 1 .9 小球从同一位置以相同的初速率 v_0，在同一竖直平面上朝着不同方向斜抛出去，如果抛射角 θ 可在 0 到 π 范围内连续变化，试问各轨道最高点连成的曲线是什么类型的曲线？

解：对给定抛射角 θ 的抛体运动，小球的运动轨迹为一抛物线，具有唯一确定的最高点 $\boldsymbol{r}_m$，即最高点 $\boldsymbol{r}_m$ 与抛射角 θ 有一对一的函数关系。为此，我们首先要给出该函数关系：$\boldsymbol{r}_m(\theta)$。

在以初始位置为原点、以水平方向为 x 轴、以竖直方向为 y 轴的笛卡尔坐标系，小球的运动轨迹关于时间 t 的参数表示为：

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} = v_0 t\cos\theta\boldsymbol{i} + (v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

设 t_m 表示小球达到最高点 $\boldsymbol{r}(t_m)$ 所需的时间，由 $y'(t_m) = 0$ 可知

$$t_m = \sin\theta v_0/g \tag{1 .3}$$

因此

$$\boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{r}(t_m) = \frac{1}{g}v_0^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{i} + \frac{1}{2g}v_0^2\sin^2\theta\boldsymbol{j} = x_m(\theta)\boldsymbol{i} + y_m(\theta)\boldsymbol{j}$$

然后把以参数 θ 表示的曲线 $\boldsymbol{r}_m(\theta)$ 转换为等高线（即所谓的轨迹方程）。注意到 $\frac{x_m}{a} = \sin\theta\cos\theta$ 和 $\frac{y_m}{b} = \sin^2\theta$，其中 $a = v_0^2/g$ 和 $b = v_0^2/(2g)$，可得

$$\frac{x_m^2}{a^2} = \frac{y_m}{b} - \frac{y_m^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_m^2}{(a/2)^2} + \frac{(y_m - b/2)^2}{(b/2)^2} = 1$$

由此可知各轨道最高点连成的曲线为一椭圆。

2 非惯性系及惯性力

例 2 .1 质量为 m 的小环套在半径为 R 的光滑大圆环上，后者在水平面内以匀角速 ω 绕其上一点 O 转动。试分析小环在大环上运动时的切向加速度和水平面内所受约束力（教材第 84 页例题 16）。

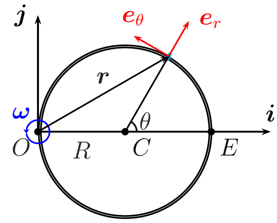

图 9: 习题2 .1

解：建立如图 9所示的以 O 为原点的转动坐标系，以便于分析小环的运动，还建立了以圆心 C 为原点随大环一起转动的极坐标系。位矢 $\boldsymbol{r}$ 可表示为 $\boldsymbol{r}=R\boldsymbol{i}+R\boldsymbol{e}_r$，对在转动坐标系里的观测者而言，只有 $\boldsymbol{e}_r$ 随小环的运动而变化，因此小环的速度与加速度为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=R\dot{\boldsymbol{e}}_r=R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \quad , \quad \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=R\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta-R(\dot{\theta})^2\boldsymbol{e}_r$$

因为小环只在水平面内运动，竖直方向的力不予考虑（大环对小环沿竖直方向的约束力与小环受到的重力相抵消）。小环受到大环（水平方向的）约束力 $\boldsymbol{N}$（方向与 $\boldsymbol{e}_r$ 共线）、离心力 $\boldsymbol{F}_c$ 和科利奥力 $\boldsymbol{F}_{cor}$ 分别为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}&=n\boldsymbol{e}_r\\
\boldsymbol{F}_c&=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=m\omega^2\boldsymbol{r}\\
&=m\omega^2R[(1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta]\\
\boldsymbol{F}_{cor}&=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=2m\omega R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r
\end{aligned}$$

其中角速度 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$，而 n 是一待定量。根据 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_c+\boldsymbol{F}_{cor}$，可得切（横）向加速度

$$\boldsymbol{a}_t=R\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta=-\omega^2R\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0 \qquad (2\ .1)$$

微分方程(2 .1)在 $\theta\approx 0$ 时可转化为 $\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$，此即谐振子的运动方程，这表明小环围绕其平衡位置 E（图 9）来回振动。注意此时 θ 的取值限于 $(-\pi,\pi)$，以便于在 $\theta=0$ 处（即 x 的正半轴上）可进行微分运算。

及约束力

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}&=[-mR\omega^2(1+\cos\theta)-2m\omega R\dot{\theta}-mR(\dot{\theta})^2]\boldsymbol{e}_r\\
&=[-mR\omega^2(1+\cos\theta)-2m\omega v-mv^2/R]\boldsymbol{e}_r
\end{aligned}$$

其中 $v=R\dot{\theta}$ 为速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的投影分量。

2 第二单元

习题 2 .1 质点以恒定速率 v 沿任意的一固定轨道运动，请证明质点的速度与加速度始终垂直。

证：由于速率 v 恒定可知 $\frac{dv}{dt}=0$，于是

$$\frac{dv^2}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}^2}{dt}=2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

证毕。

习题 2 .2 设有曲线 $y=f(x)$，请证明在 x 处的曲率半径 $\rho(x)=\frac{[1+(f')^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''|}$，其中 $f'(x)=\frac{df}{dx}$，$f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2}$。

证明：以 x 为参数，该曲线有参数化表示 $\boldsymbol{r}(x)=x\boldsymbol{i}+f(x)\boldsymbol{j}$。于是按参数 x 移动的速度和加速度

$$\boldsymbol{v}(x)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}=\boldsymbol{i}+f'(x)\boldsymbol{j}\quad,\quad\boldsymbol{a}(x)=\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}=f''(x)\boldsymbol{j}$$

根据法向加速度 $\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_t$（其中切向加速度 $\boldsymbol{a}_t=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^2}$），可得

由 $\boldsymbol{a}_t=c\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}_t\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$ 可知 $c=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})}{\boldsymbol{v}^2}$。

$$|\boldsymbol{a}_n|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_t)^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}{\boldsymbol{v}^2}}=\frac{|f''|}{\sqrt{1+(f')^2}}$$

因此

$$\rho(x)=\frac{\boldsymbol{v}^2}{|\boldsymbol{a}_n|}=\frac{[1+(f')^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

习题 2 .3 抛物线形弯管的表面光滑，可绕铅直轴以匀角速率转动。抛物线方程为 $y=ax^2$，a 为常数。小环套于弯管上。(1) 求弯管角速率多大，小环可在管上任意位置相对弯管静止；(2) 若为圆形光滑弯管，情形如何？(P.96:Prob.2-30)

解：(1) 建立如图 6所示与弯管固连的转动坐标系 K，因为小环被限制于弯管上运动，所以有位矢 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+ax^2\boldsymbol{j}$。对于 K 系的观测者，小环受到重力 $\boldsymbol{G}$、弯管的支持力 $\boldsymbol{N}$ 和离心力 $\boldsymbol{F}_c$，它们分别为

$$\boldsymbol{G}=-mg\boldsymbol{j},\quad\boldsymbol{N}=f\boldsymbol{n},\quad\boldsymbol{F}_c=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=m\omega^2x\boldsymbol{i}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 指向弯管在 $\boldsymbol{r}$ 处的法向，它与弯管在该处的切向 $\boldsymbol{t}$ 垂直，而 $\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}=\boldsymbol{i}+2ax\boldsymbol{j}$，故有 $\boldsymbol{n}=-2ax\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$。因为小环相对弯管静止，所以 $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_c=\boldsymbol{0}$，于是可得：

$$(m\omega^2-2af)x=0,\quad f=mg$$

当 $x\neq0$ 时，有 $\omega=\sqrt{\frac{2af}{m}}=\sqrt{2ag}$；当 $x=0$ 时，ω 则可取任意值。

(2) 同样地，对于 K 系的观测者，小环受到重力 $\boldsymbol{G}=-mg\boldsymbol{j}$、弯管的支持力 $\boldsymbol{N}=f\boldsymbol{n}$ 和离心力 $\boldsymbol{F}_c=m\omega^2x\boldsymbol{i}$，其中法向 $\boldsymbol{n}$ 可直接选为 $\boldsymbol{r}$，即 $\boldsymbol{n}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$。由于合力为零：$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_c=\boldsymbol{0}$，于是可得

$$(m\omega^2+f)x=0,\quad fy=mg$$

当 $x\neq0$ 时，可得 $\omega=\sqrt{\frac{g}{-y}}$，其中要求 $y<0$；当 $x=0$ 时，即在大圆环最低、最高点时，ω 可取任意值，小圆环均可静止。

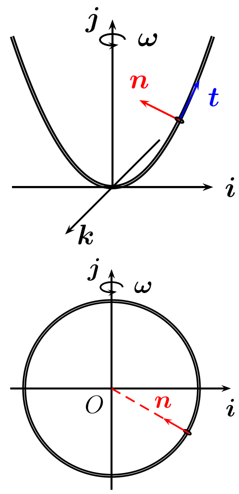

图 6: 习题2 .3(1)&(2)

习题 2 .4 一圆盘绕过其圆心并与盘面垂直的转动轴以恒定的角速率 ω 转动，在圆盘上沿径向开有一光滑小槽，槽内一质量为 m 的质点以 v_0 的初速从圆心开始向外运动（图 7），试求：1. 质点到达 $r_0(>0)$ 处时的速率；2. 质点到达该处所需的时间 t；3. 质点在该处所受到的槽壁对它的侧向作用力。

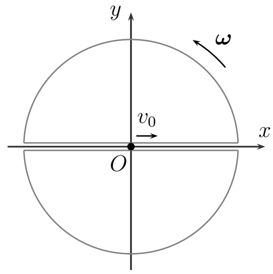

图 7: 转动坐标系 K

解：如图 5所示，建立与圆盘固连的转动坐标系 K，其中 z 轴垂直纸面指向外，角速度 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$；对于 K 系的观测者而言，质点的位矢 $\boldsymbol{r}(t)$、速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 和加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ 分别为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{v}(t)=\dot{x}(t)\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{a}(t)=\ddot{x}(t)\boldsymbol{i}$$

因为圆盘——其圆心固定——仅涉及转动，并且角速度恒定，所以惯性力只有离心力 $\boldsymbol{F}_c$ 和科里奥力 $\boldsymbol{F}_{cor}$：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_c &= -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=-m\omega^2x\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})=m\omega^2x\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{F}_{cor} &= -2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=-2m\omega\dot{x}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-2m\omega\dot{x}\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

真实力有重力和槽底的作用力——都沿 z 轴方向，但二者抵消；而槽壁的作用力 $\boldsymbol{F}_w$——与 y 轴平行——可表示为 $f\boldsymbol{j}$，其中 f 待定。于是，质点在 K 系的运动方程为

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}_c+\boldsymbol{F}_{cor}+\boldsymbol{F}_w=m\omega^2x\boldsymbol{i}+(f-2m\omega\dot{x})\boldsymbol{j} \qquad (2\ .1)$$

方程(2 .1)为矢量等式，它等价于两个标量等式：$f=2m\omega\dot{x}$ 和 $\ddot{x}=\omega^2x$；结合初始条件，可得关于 $x(t)$ 的初始值问题：

$$\ddot{x}-\omega^2x=0 \quad ; \quad x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v_0 \qquad (2\ .2)$$

关于初始值问题(2 .2)，先解得方程的通解 $x(t)=\alpha e^{\omega t}+\beta e^{-\omega t}$；将通解带入初始条件，可得关于 α 和 β 的线性方程组，最后解得 α 和 β。

可解得

$$x(t)=\tfrac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$$

由 $x(t)=r$，可求得相遇时间

$$t=\tfrac{1}{\omega}\ln\tfrac{\omega r+\sqrt{v_0^2+(\omega r)^2}}{v_0}$$

此时的速率

$$v=\dot{x}(t)=\sqrt{v_0^2+(\omega r)^2}$$

以及槽壁的作用力

$$\boldsymbol{F}_w=2m\omega v\boldsymbol{j}$$

习题 2 .5 如所示，将质量为 m 的小球用细线挂在倾角为 θ 的光滑斜面上。求（1）若斜面以加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿图示方向运动时，细线的张力及小球对斜面的正压力；（2）当加速度 a 取何值时，小球刚可以离开斜面？(P.95:Prob.2-23)

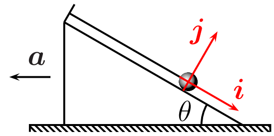

图 8: 习题2 .5

解：建立如图 8所示与斜面固连的动坐标系，小球受到重力 $\boldsymbol{G}$、来自斜面的支持力 $\boldsymbol{N}$、来自细线的张力 $\boldsymbol{T}$ 和平移的惯性力 $\boldsymbol{F}_t$，分别有

$$\boldsymbol{G} = mg(\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{N} = N\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{F}_t = -m\boldsymbol{a} = ma(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})$$

对于合力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_t$ 有 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} = 0$ 和 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j} = 0$，即

$$T = mg\sin\theta + ma\cos\theta, \quad N = mg\cos\theta - ma\sin\theta$$

当 $N = 0$ 时，即 $a = g/\tan\theta$，小球刚可以离开斜面。

习题 2 .6 一辆汽车驶入曲率半径为 R 的弯道。弯道倾斜一角度 θ，轮胎与路面之间的摩擦系数为 μ。求汽车在路面上不作侧向滑动时的最大和最小速率。(P.96:Prob.2-24)

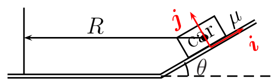

图 9: 习题2 .6

解：由题意可知法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$、重力 $\boldsymbol{G}$、路面对汽车的支持力 $\boldsymbol{N}$ 及摩擦力 $\boldsymbol{F}_m$ 分别为

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{R}(-\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{N} = N\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{G} = -mg(\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{F}_m = f\boldsymbol{i}$$

其中 v 为汽车的速率。由 $m\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_m$ 可得：

$$N = m\frac{v^2}{R}\sin\theta + mg\cos\theta$$
$$f = mg\sin\theta - m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

根据 $|f| \le \mu N$（即小于等于最大静摩擦力），可得：

$$\sqrt{\frac{gR(\tan\theta - \mu)}{1 + \mu\tan\theta}} \le v \le \sqrt{\frac{gR(\tan\theta + \mu)}{1 - \mu\tan\theta}}$$

习题 2 .7 一条均匀的绳子，质量为 m，长度为 l，将它拴在转轴上，以角速率 ω 旋转，试证明：略去重力时，绳中的张力分布为

$$T(r) = \frac{m\omega^2}{2l}(l^2 - r^2)$$

式中 r 为到转轴的距离。(P.96:Prob.2-28)

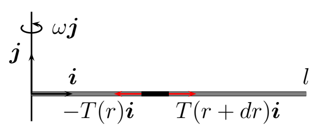

图 10: 习题2 .7

解：建立如图 10所示的旋转坐标系，使得绳子落在 $\boldsymbol{i}$ 轴上。现考虑处于 r 与 $r + dr$ 之间长度为 dr 的一段绳子，显然其质量为 $dm = \rho dr$，其中线密度 $\rho = \frac{m}{l}$。该段绳子受到左边的和右边的绳子的拉力，它们分别为 $-T(r)\boldsymbol{i}$ 和 $T(r + dr)\boldsymbol{i}$（绳子的张力如同压强，是一个强度量，无方向。），

故合拉力为 $\boldsymbol{F}_s = [T(r+dr) - T(r)]\boldsymbol{i}$。因为绳子相对于旋转坐标系静止，所以离心力 $\boldsymbol{F}_c = (dm)\omega^2 r\boldsymbol{i}$ 与绳子的张力抵消，即 $\boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{F}_c = 0$，于是有

$$\frac{dT(r)}{dr} + \frac{m}{l}\omega^2 r = 0 \quad \Rightarrow \quad T(r) = -\frac{m\omega^2}{2l}r^2 + c$$

最后，由初始条件 $T(l) = 0$ 可得积分常数 $c = \frac{m\omega^2 l}{2}$。

习题 2 .8 在顶角为 2α 的光滑圆锥面的顶点上系一劲度系数为 k 的轻弹簧，原长 l_0，下坠一质量为 m 的物体，绕锥面的轴线旋转。试求使物体离开锥面的角速率 ω 和此时弹簧的伸长。(P.96:Prob.2-29)

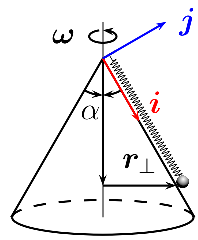

图 11: 习题2 .8

解：建立如图 11所示的转动坐标系 K，它以同样的角速率 ω 随物体一起绕锥面的轴线旋转。图 11只展示了 K 系的基矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，第三个基矢量 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}$ 此刻是垂直于纸面向外的。角速度可用 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j})$$

物体在 K 系的位置对应位矢 $\boldsymbol{r} = l\boldsymbol{i}$（$l$ 为弹簧拉伸的长度），在 K 系的观测者看来，物体受到重力 $\boldsymbol{G}$、弹力 $\boldsymbol{F}_k$、锥面的支持力 $\boldsymbol{N}$ 和离心力 $\boldsymbol{F}_c$ 的作用，它们分别为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G} &= mg(\cos\alpha\boldsymbol{i} - \sin\alpha\boldsymbol{j}) \\
\boldsymbol{F}_k &= -k(l-l_0)\boldsymbol{i} \\
\boldsymbol{N} &= n\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{F}_c &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = m\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp \\
&= m\omega^2 l \sin\alpha(\sin\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{j})
\end{aligned}$$

因为它们的合力 $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{0}$，所以有

$$\begin{aligned}
n &= mg\sin\alpha - m\omega^2 l \sin\alpha\cos\alpha \\
k(l-l_0) &= mg\cos\alpha + m\omega^2 l(\sin\alpha)^2
\end{aligned}$$

当锥面对物体存在支持力意味着 $n \geq 0$，即 $\omega \leq \omega_c (= \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}})$，否则意味着物体离开了锥面。当角速率为临界值 ω_c 时——这意味着物体即将离开锥面，弹簧拉伸的长度为

$$\Delta l = (l - l_0) = \frac{mg\cos\alpha + m\omega_c^2 l(\sin\alpha)^2}{k} = \frac{mg}{k\cos\alpha}$$

临界角速率为

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{(l_0 + \Delta l)\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{kg}{l_0 k\cos\alpha + mg}}$$

习题 2 .9 质点以恒定速率 v 沿轨道 $r = k(1+\cos\theta)$ 运动，请计算 1) 加速度 $\boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ 沿径向的分量 a_r；2) 加速度的大小 a；3) 角速率 $\dot\theta$。

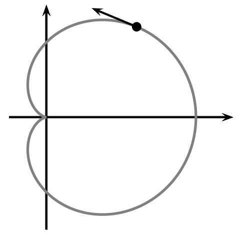

图 12: 心脏线，注意原点（对应 $\theta=\pi$）为奇点。

解：在极坐标系，该曲线关于时间 t 的表示为 $\boldsymbol{r}(t) = k(1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_r$，其中 $\theta = \theta(t)$ 和 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\theta)$。于是有速度

$$\boldsymbol{v}(t) = k\dot\theta[-\sin\theta\boldsymbol{e}_r + (1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta] \tag{2 .3}$$

由式2 .3和 $|\boldsymbol{v}(t)| = v$，可得：

$$2(k\dot\theta)^2(1+\cos\theta) = v^2 \quad\Rightarrow\quad \dot\theta = \frac{v}{2k|\cos(\theta/2)|} \tag{2 .4}$$

此处假定质点按逆时针运动（如图 12所示），即 $\dot\theta > 0$。式2 .4两端对时间 t 求导，可得：

$$2\ddot\theta(1+\cos\theta) - \dot\theta^2\sin\theta = 0 \tag{2 .5}$$

由式2 .3，并结合式2 .4和 2 .5可得加速度

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(t) &= -k[\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2(1+2\cos\theta)]\boldsymbol{e}_r + k[\ddot\theta(1+\cos\theta) - 2\dot\theta^2\sin\theta]\boldsymbol{e}_\theta \\
&= -\frac{3}{2}k\dot\theta^2[(1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta] \\
&= -\frac{3v^2}{4k}[\boldsymbol{e}_r + \tan(\theta/2)\boldsymbol{e}_\theta]
\end{aligned}$$

因此，有

$$a_r = -\frac{3v^2}{4k}, \quad a = \frac{3v^2}{4k|\cos(\theta/2)|}$$

习题 2 .10 对保守力场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x-1)\boldsymbol{i} + (y-2)\boldsymbol{j}$，求其势能函数 $V(\boldsymbol{r})$，并给出势能零点的位置。

解: 设 γ 为由 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}$ 的任一路径: $\gamma = \{\boldsymbol{r}'(t)|\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t_2), \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}'(t_1), t_1 \le t \le t_2\}$，其中 $\boldsymbol{r}'$ 为关于 t 的连续（矢量）函数。由势能定义可知

$$\begin{aligned}
V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{t_1}^{t_2} (x'(t)-1)dx'(t) + (y'(t)-2)dy'(t) \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) - \left[\frac{(x'(t)-1)^2 + (y'(t)-2)^2}{2}\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) + \left[\frac{(x'(t_1)-1)^2 + (y'(t_1)-2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(x'(t_2)-1)^2 + (y'(t_2)-2)^2}{2}\right] \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) + \left[\frac{(x_0-1)^2 + (y_0-2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{2}\right] \\
&\xrightarrow[\boldsymbol{r}_0=(1,2)]{V(\boldsymbol{r}_0)=0} -\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{2}
\end{aligned}$$

其中 $(1,2)$ 为势能零点。一旦熟悉概念及符号，上述计算过程也可表示为

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (x'-1)dx' + (y'-2)dy' \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) - \left[\frac{(x'-1)^2 + (y'-2)^2}{2}\right]_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) + \left[\frac{(x_0-1)^2 + (y_0-2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{2}\right] \\
&\xrightarrow[\boldsymbol{r}_0=(1,2)]{V(\boldsymbol{r}_0)=0} -\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{2}
\end{aligned}
$$

3 例题

例 3 .1 如图 10所示，在半顶角为 ϕ 的倒立固定圆锥面光滑内壁上，一小球在距锥顶 h_0 高度处作水平圆周运动。1. 求圆周运动速率 v_0；2. 若在某时刻，小球的速度不改变方向地从 v_0 增为 $\sqrt{1+\alpha}\, v_0\,(\alpha>0)$，小球随即离开原轨道但不会离开锥面内壁，试问小球是否会在距离锥顶某个 h 高处作水平圆周运动？3. 小球若不再作圆周运动，试求运动过程中相对锥顶能达到的最大高度 h_{max} 和最低高度 h_{min}。

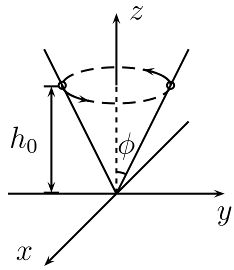

图 10: 示意图

解：如果你恰好有这方面的生活经验（图 11），那么你对整个力学过程会有大致的印象——尽管不一定够清晰够精确，但它的确会对你有所帮助。如果你缺乏这方面的感性认识，那也没多大关系；直观的物理图像虽然有用，但我们还得借助于数学推演才能给出精确的答案——有时推演甚至会颠覆起初的直觉。


图 11: 摩托车杂技

首先，我们得把物理模型转译成数学模型；为此，必须建立合适的坐标系，如 图 10所示，但对 x-y 平面我们采用极坐标系——即对整个三维空间采用柱坐标系。设 t 时刻小球的位矢和速度分别为 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$，则有：

$$\boldsymbol{r}(t)=\rho(t)\boldsymbol{e}_\rho+z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{3 .1}$$

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot\rho\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot\theta\boldsymbol{e}_\theta+\dot z\boldsymbol{e}_z \tag{3 .2}$$

除了重力 $\boldsymbol{G}=-mg\boldsymbol{e}_z$ 作用外，小球还受到光滑锥面对它的作用；记该作用力为 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{f}$ 的方向与锥面在小球所处位置的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 相一致：$\boldsymbol{f}=f\boldsymbol{n}$，而法线落在由 $\boldsymbol{r}$ 和 z 轴决定的平面上，并与 $\boldsymbol{r}$ 垂直。由此可知 $\boldsymbol{n}$ 可表示为：$\boldsymbol{n}=-\cos\phi\boldsymbol{e}_\rho+\sin\phi\boldsymbol{e}_z$，于是小球受到的合外力

$$\boldsymbol{F}=-(f\cos\phi)\boldsymbol{e}_\rho+(f\sin\phi-mg)\boldsymbol{e}_z \tag{3 .3}$$

显然 $\boldsymbol{F}$ 也落在由 $\boldsymbol{r}$ 和 z 轴决定的平面上，因此力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 势必与 z 轴垂直，于是有力矩沿 z 轴的分量 $M_z=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})_z=0$；由角动量守恒定律，有

$$J_z(t)=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_z=m\rho^2\dot\theta=J_z(0) \tag{3 .4}$$

即角动量沿 z 轴的分量守恒。另外，由于锥面的作用力 $\boldsymbol{f}$ 对小球不做功，只有重力 $\boldsymbol{G}$ 做功，故机械能守恒定律满足，有

$$E(t)=m(\dot\rho^2+(\rho\dot\theta)^2+\dot z^2)/2+mgz=E(0) \tag{3 .5}$$

最后由锥面的几何形状，可知

$$\rho(t)=(\tan\phi)z(t) \tag{3 .6}$$

利用关系(3 .4)和(3 .6)，将方程 (3 .5)中 ρ 和 θ 替换成 z，可得

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\dot z^2}{\cos^2\phi}+\frac{J_z^2(0)}{(mz\tan\phi)^2}\right)+mgz-E(0)=0 \tag{3 .7}$$

其中 $J_z(0)$ 和 $E_z(0)$ 由初始速率 $v(0)$ 和初始高度 h_0 决定：

$$\begin{aligned}J_z(0)&=(\boldsymbol{r}(0)\times m\boldsymbol{v}(0))_z\\&=(h_0\tan\phi\boldsymbol{e}_\rho\times mv(0)\boldsymbol{e}_\theta)_z\\&=mh_0v(0)\tan\phi\\E(0)&=mv^2(0)/2+mgh_0\end{aligned}$$

将 $J_z(0)$ 和 $E_z(0)$ 的取值带入方程(3 .7)，经整理可得：

若方程(3 .8)两端乘以 $(\cos\phi)^2$，那可取 $m_e=1$；若方程(3 .8)两端乘以 -1，那可取 $m_e=-(\cos\phi)^2$ 吗？

$$\frac{\boxed{(\cos\phi)^{-2}}\dot{z}^2}{2}+\boxed{\frac{v^2(0)(h_0^2-z^2)}{2z^2}+g(z-h_0)}=\frac{m_e\dot{z}^2}{2}+V_e(z)=0 \quad (3\ .8)$$

如何理解方程(3 .8)呢？这可视作有效质量 m_e 的质点在有效势场 V_e 中作一维运动，并且其机械能为零。由示意 图 12可知，质点只能在势能曲线与 z 轴交点限制的范围内运动。由 $V_e(z)=0$，可得：

$$z_{min}=h_0,\quad z_{max}=\frac{v^2(0)}{4g}\left[1+\sqrt{1+\frac{8gh_0}{v^2(0)}}\right] \quad (3\ .9)$$

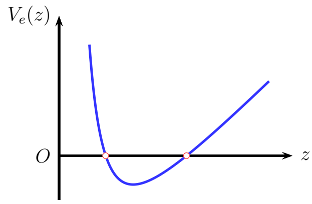

图 12: V_e 曲线示意图

注意 V_e 和 z_{max} 都与 $v(0)$ 的取值有关；根据 $v(0)$ 的取值，V_e 的曲线图不一定恰好如图 12所示，z_{max} 也不一定小于 z_{min}。对第 1. 小问——此时 $v(0)=v_0$，根据曲率半径公式可算出 v_0，但下面我们将给出另一种计算方法——大家可验证结果是否相同。要求小球在 h_0 高处一直做圆周运动，该要求意味着 $z_{min}=z_{max}$——即势能曲线与 z 轴只有一个交点，于是可得 $v(0)=v_0=\sqrt{h_0g}$。对第 2. 和 3. 小问，将 $v(0)=(1+\alpha)v_0=(1+\alpha)\sqrt{h_0g}$ 代入方程(3 .9)可得：

$$z_{max}=\frac{(1+\alpha)+\sqrt{\alpha^2+10\alpha+9}}{4}h_0=f(\alpha)h_0$$

显然 $f(0)=1$，当 $\alpha(>0)$ 增加时，$f(\alpha)$ 单调递增——即 $z_{max}\geq z_{min}$，当 $\alpha=0$ 等号才成立。

请大家再把数学结果转译成物理图像，并考虑当 $-1<\alpha<0$ 时情况又如何？最后，请列举一下这道例题的求解过程中都涉及到哪些概念和知识点。

例 3 .2 *质量为 m 的两小球系于一弹簧的两端，弹簧处于自然状态时，长为 a，弹性系数为 k。现两球同时受冲力作用，获得与连线垂直的等值反向的初速度，若在以后运动过程中弹簧的最大长度 $b=2a$，求两球的初速率 v_0（不计重力）。*

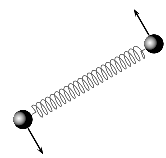

图 13: 题3 .2

解：这两小球（不妨称作球 1 和球 2）构成了质点系，并设在参考系 K 中两球的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$。由于弹力为内力且无外力作用，系统的总动量守恒，故有（鉴于两小球初始速度大小相等方向相反）：

$$\boldsymbol{P}(t)=m(\boldsymbol{v}_1(t)+\boldsymbol{v}_2(t))=\boldsymbol{0}\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{v}_1=-\boldsymbol{v}_2 \quad (3\ .10)$$

由(3 .10)可知，其质心（两球连线的中点）是静止的，即质心系是静止参考系。如选参考系 K 为质心系，那么位矢满足：$\boldsymbol{r}_1(t)=-\boldsymbol{r}_2(t)$。

为了后面的数学处理，我们引入辅助量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$；因为弹力为保守力，弹性势能的形式为 $\frac{1}{2}kx^2$——此处的形变量 $x=(r-a)$。由机械能守恒定律可得：

$$E(t)=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_1^2+\boldsymbol{v}_2^2)+\frac{1}{2}k(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|-a)^2=\frac{1}{4}m\boldsymbol{v}^2+\frac{1}{2}k(r-a)^2 \quad (3\ .11)$$

$$=\frac{1}{4}m(\boldsymbol{v}_\perp+\boldsymbol{v}_\parallel)^2+\frac{1}{2}k(r-a)^2=\frac{1}{4}m(v_\perp^2+v_\parallel^2)+\frac{1}{2}k(r-a)^2$$
$$=E(0)=mv_0^2$$

式(3 .11)中 $\boldsymbol{v}_\perp$ 和 $\boldsymbol{v}_\parallel$ 为 $\boldsymbol{v}$ 沿与 $\boldsymbol{r}$ 垂直和平行方向的投影矢量。显然地，$\boldsymbol{v}_\perp$ 和 $\boldsymbol{v}_\parallel$ 决定了 $\boldsymbol{r}$ 的方向和长度的变化——如同法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 和切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 决定了速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向和长度的变化。

由 $r\frac{dr}{dt} = \boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_\parallel$，可得 $\frac{dr}{dt} = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_\parallel}{r}$ 或 $\left|\frac{dr}{dt}\right| = v_\parallel$

由于合外力矩为零，故有角动量守恒：

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{J}(t)| &= |\boldsymbol{r}_1\times m\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2\times m\boldsymbol{v}_2| = \left|(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times\frac{m\boldsymbol{v}}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}|m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}|m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_\perp| = \frac{1}{2}mrv_\perp = mav_0\end{aligned} \tag{3 .12}$$

由(3 .12)可得 $v_\perp = 2av_0/r$，带入(3 .11)可得：

$$\frac{1}{4}mv_\parallel^2 + \left[\frac{ma^2v_0^2}{r^2} + \frac{k(r-a)^2}{2}\right] = mv_0^2 \tag{3 .13}$$

利用 $v_\parallel^2 = \dot{r}^2$，方程(3 .13)可改写为

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{2ma^2v_0^2}{r^2} + k(r-a)^2\right] = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_e(r) = 2mv_0^2 \tag{3 .14}$$

由题意，可知当 $\dot{r}=0$ 时 r 到达最大，即有

$$V_e(2a) = 2mv_0^2 \quad\Rightarrow\quad v_0 = a\sqrt{\frac{2k}{3m}} \tag{3 .15}$$

例 3 .3 图 14中 O 为中心力场的力心，排斥力与距离平方成反比：$f = k/r^2$（k 为常量）。1. 求此力场的势能；2. 一质量为 m 的粒子以速度 v_0、瞄准距离 b 从远处入射，求它能达到的最近距离 d 和此时刻的速率。(P.202:Prob.4-11)

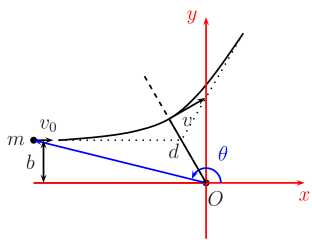

图 14: 题3 .3

解：在中心力场中运动的粒子的角动量守恒，由此可知粒子的运动轨迹对应平面曲线，且落在过力心并与角动量垂直的平面上。因此，该问题可简化为二维平面上的运动，我们建立如图 14所示的极（和直角）坐标系，角动量的方向为 $\boldsymbol{k}$ 方向（垂直纸面指向外）。

由于中心力场为保守力场，可以定义势能：

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' = V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\left[\frac{k\boldsymbol{r}'}{(r')^3}\right]\cdot d\boldsymbol{r}' \\ &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{r_0}^{r}\left[\frac{k}{(r')^2}\right]dr' = V(\boldsymbol{r}_0) + \left[\frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}\right] \\ &\xrightarrow[V(\boldsymbol{r}_0)=0]{r_0=\infty} \frac{k}{r}\end{aligned} \tag{3 .16}$$

排斥力意为着力与位矢同向，使得粒子远离力心，即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$；吸引力正相反，有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$。

最后一步表示选取无穷远处为势能零点，上式表明 $V(\boldsymbol{r})$ 仅依赖于 r，故又常记为 $V(r)$。粒子的初始位置为 $\boldsymbol{r}(0) = x_0\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$（其中 $x_0 \approx -\infty$），初始速度为 $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{i}$，于是有角动量：

$$\boldsymbol{J}(0) = \boldsymbol{r}(0)\times\boldsymbol{p}(0) = (x_0\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j})\times(mv_0\boldsymbol{i}) = -mbv_0\boldsymbol{k}$$

和机械能

$$E(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

设 t 时刻，粒子的位矢为$\boldsymbol{r}(t)=r\boldsymbol{e}_r$，其速度 $\boldsymbol{v}(t)=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$。由角动量守恒定律，得

对中心力场，通常采用极（球）坐标系；此处 r 直接表示粒子与力心 O 之间的距离，这正是第二小问关注的量。

$$\boldsymbol{J}(t)=r\boldsymbol{e}_r\times m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)=mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{J}(0)\ \Rightarrow\ r\dot{\theta}=-bv_0/r \quad (3\ .17)$$

由机械能守恒定律，得

$$E(t)=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{k}{r}=\frac{1}{2}mv_0^2 \quad (3\ .18)$$

将(3 .17)代入(3 .18)，可得：

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\left[\frac{mb^2v_0^2}{2r^2}+\frac{k}{r}\right]=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V_e(r)=\frac{1}{2}mv_0^2 \quad (3\ .19)$$

显然有效势 $V_e(r)$ 是关于 $r(>0)$ 的单调递减函数，当 $\dot{r}=0$ 时有 $V_e(r)$ 达到最大——即 r 达到最小。于是

$$V_e(d)=\frac{1}{2}mv_0^2 \quad\Rightarrow\quad d=\frac{k+\sqrt{k^2+b^2m^2v_0^4}}{mv_0^2} \quad (3\ .20)$$

此时粒子的速率

$$v=|\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta|=|r\dot{\theta}|=bv_0/d \quad (3\ .21)$$

上式第三个等号由方程(3 .17)和(3 .20)可得。

3　第三单元

习题 3 .1 如图 13所示，在劲度系数为 k 的弹簧下挂质量分别为 m_1 和 m_2 的两个物体，开始时处于静止。若把 m_1 和 m_2 之间的连线烧断，求 m_1 的最大速度。(P.147:Prob.3.7)

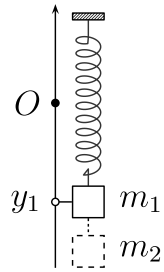

图 13: 习题3 .1

解：如图 13所示，以弹簧处于原长时 m_1 所在位置为坐标系的原点 O，因此当 $t=0$ 时有 $y_1(0)=-(m_1+m_2)g/k$ 和 $\dot{y}_1(0)=0$。以 O 为弹性和重力势能的零点，则总势能为

$$V(y_1)=\frac{1}{2}ky_1^2+m_1gy_1$$

从而，初始时刻的机械能 $E=V(y_1(0))=(m_2^2-m_1^2)g^2/(2k)$。显然，当势能达到极小值时，动能达到极大值。由 $\frac{dV}{dy_1}=0$，可知当 $y_1=y_m=-\frac{m_1g}{k}$ 时势能有极小值 $V_m=V(y_m)$；设此时最大速率为 v_m，由机械能守恒定律可知

$$\frac{1}{2}m_1v_m^2+V_m=E$$

可求得 $v_m=m_2g/\sqrt{m_1k}$。

习题 3 .2 如本题图，劲度系数为 k 的弹簧一端固定在墙上，另一端系一质量为 m_A 的物体。当把弹簧的长度压短 x_0 后，在它旁边紧贴着放一质量为 m_B 的物体。撤去外力后，求（1）A、B 离开时，B 以多大速率运动；（2）A 距起始点移动的最大距离。设下面是光滑的水平面。(P.147:Prob.3.8)

解：见教材图示，显然分离发生在弹力方向发生反转的那一时刻——即弹簧达到原长，推力变成拉力——在此之前，两物体一直具有相同速度。设分离瞬间的速率为 v，由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2=\frac{1}{2}kx_0^2$$

可得 $v=|x_0|\sqrt{\frac{k}{m_A+m_B}}$。随后，物体 A 继续向前运动，达到最远处 x_m 是其动能完全转换为弹性势能，即有 $\frac{1}{2}kx_m^2=\frac{1}{2}m_Av^2$。于是，物体 A 距离起点最大距离为 $(|x_0|+x_m)$。

习题 3 .3 一质点在保守力场中沿 x 轴（在 $x>0$ 范围内）运动，其势能为 $V(x)=kx/(x^2+a^2)$，其中 k、a 均为大于零的常数。试求（1）质点所受到的力的表示式；（2）质点的平衡位置。

解：由 $F(x)=-\frac{dV(x)}{dx}$ 可得

$$F(x)=\frac{k(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^2}$$

由 $F(x)=0$ 及 $x>0$ 可知平衡位置 $x_0=a$。

习题 3 .4 一质量为 m 的质点在保守力场中沿 x 轴（在 $x>0$ 范围内）运动，其势能为 $V(x)=A/x^3-B/x$，其中 A、B 均为大于零的常数。（1）找出质点运动中受到沿 x 负方向最大力的位置；（2）若质点的总能量 $E=0$, 试确定质点的运动范围。

解：分别计算 $F(x)$ 及其一阶导数

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = \frac{3A}{x^4} - \frac{B}{x^2}$$
$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{12A}{x^5} + \frac{2B}{x^3}$$

由 $F'(x) = 0$ 及 $x > 0$，可知极值位置 $x_m = \sqrt{\frac{6A}{B}}$，在 x_m 处的力 $F(x_m) = -\frac{B^2}{12A}$。下面我们要分析 x_m 是否就是沿 x 负方向最大力的位置——仅根据极值无法判断其是否是最大值，当 $0 < x < x_m$ 时有 $F'(x) < 0$，这意味着 F 为单调递减函数，即 $F(x) > F(x_m)$，当 $x > 0$ 时有 $F'(x) > 0$，这意味着 F 为单调递增函数，即 $F(x) > F(x_m)$，故 x_m 是沿 x 负方向最大力的位置。

由 $V(x) \leq 0$，可解得 $x \geq \sqrt{\frac{A}{B}}$，所以质点的运动范围为 $[\sqrt{\frac{A}{B}}, +\infty)$。

习题 3 .5 一质量为 m 的质点在半径为 R 的竖直圆轨道内运动，设没有摩擦力，当质点在最低点时，其速率为 v_0，如图 14所示。(1) v_0 的最小值 v_{min} 为多大时，质点还能沿着圆形轨道运动而不脱离轨道？(2) 假定 $v_0 = 0.775v_{min}$，则质点将在某点 P 处脱离轨道而沿图 14中虚线所示的路径运动，试求 P 的角位置 θ。

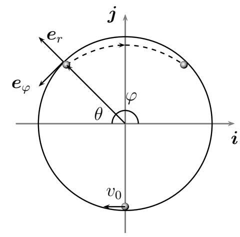

图 14: 习题3 .5

解：(1) 质点受到重力 $\boldsymbol{G} = -mg\boldsymbol{j}$ 和轨道的法向支持力 $\boldsymbol{N} = -f\boldsymbol{e}_r$（没有摩擦力），由牛顿定律可知

$$-ma_n\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{N} + (\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r \quad \Rightarrow \quad f = ma_n - mg\sin\varphi \tag{3 .1}$$

因为轨道是半径为 R 的圆，所以

$$a_n = \frac{v^2}{R} \tag{3 .2}$$

由于支持力 $\boldsymbol{N}$ 不做功，而重力为保守力，故有机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin\varphi = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \tag{3 .3}$$

结合(3 .1)、(3 .2)和(3 .3)，可得：

$$f = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2 + 3\sin\varphi) \tag{3 .4}$$

“不脱离轨道”意味着不论质点处于轨道哪个位置始终有 $f \geq 0$，故有

$$\frac{mv_0^2}{R} \geq mg(2 + 3\sin\varphi) \quad \forall\varphi \in [0, 2\pi) \tag{3 .5}$$

当 $\varphi = \pi/2$（最高位置）时，式(3 .3)中不等号右端为 $5mg$，因此 $v_{min} = \sqrt{5Rg}$。

(2) 当 $v_0 = 0.775v_{min}$ 时，由 $f = 0$ 可得

$$\sin\varphi = \frac{0.775^2 \times 5 - 2}{3} = 0.334375 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi - \arcsin(0.334375) \tag{3 .6}$$

即角位置 $\theta = \arcsin(0.334375)$。

习题 3 .6 如图 15所示，用细线将一质量为 m 的大圆环悬挂起来。两个质量均为 M 的小圆环套在大圆环上，可以无摩擦地滑动。若两小圆环沿相反方向从大圆环顶部自静止下滑，求在下滑过程中，θ 角取什么值时大圆环刚能升起。(P.146:Prob.3-6)

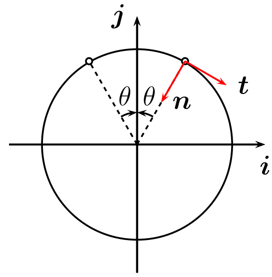

图 15: 习题3 .6

解：因为两小环下滑过程具有左右对称性，所以只考虑右边小环的下滑过程。在起始阶段，小环沿着大环运动，故有（曲率公式）：

$$a_n = |\boldsymbol{a}_n| = \frac{v^2}{R} \tag{3 .7}$$

其中 R 为大环的半径，v 为小环的速率。设 $\boldsymbol{F}_n = f_n\boldsymbol{n}$ 为大环对小环的约束力，其中 $\boldsymbol{n}$ 为单位矢量（图 15）。由牛顿第二定律 $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_n$ 可得沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的运动方程：

$$Ma_n = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n} + f_n \quad \Rightarrow \quad f_n = \frac{Mv^2}{R} - Mg\cos\theta \tag{3 .8}$$

由机械能守恒定律（约束力不做功，选取最高处为重力势能零点）：

$$\frac{1}{2}Mv^2 + MgR(\cos\theta - 1) = 0$$

可以将(3 .8)表示为：$f_n = Mg(2-3\cos\theta)$，由牛顿第三定律可知小环对大环的作用力为 $(-\boldsymbol{F}_n)$，因此当其沿竖直方向的分量满足 $(-2f_n\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{j} = mg$ 时（其中 2 考虑到左边的小环），那么大环将被抬起，即：

$$2Mg(2-3\cos\theta)\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad \theta_\pm = \arccos\left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3m}{2M}}\right)$$

因为 $\theta_+ < \theta_-$，所以当下滑到角度 θ_+ 时大环刚能升起。不过，前提条件是 $2M > 3m$。

习题 3 .7 如图 16所示，半径为 R 的大圆环固定地挂于顶点 A，质量为 m 的小环套于其上，通过一劲度系数为 k、自然长度为 l（$l < 2R$）的弹簧系于 A 点。分析在不同参数下这装置平衡点的稳定性，并作出相应的势能曲线。(P.150:Prob.3-29)

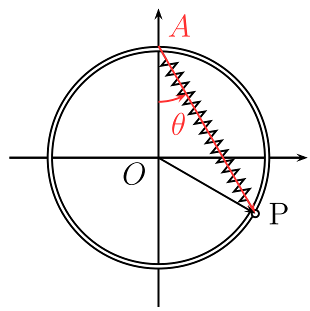

图 16: 习题3 .7

解：如图 16所示，P 表示 t 时刻小环所在位置，对应角度 θ。此时弹簧长度 $l(\theta) = 2R\cos\theta$（其中 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$），形变量为 $\Delta l = |l(\theta) - l|$。总势能为弹性势能与重力势能之和（大圆环对小环的约束力不做功）：

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 - mgl(\theta)\cos\theta \qquad (3\ .9)\\ &= 2R((kR - mg)\cos^2\theta - kl\cos\theta) + \frac{1}{2}kl^2 \end{aligned}$$

其中 A 处为弹性势能和重力势能的共同的势能零点。由(3 .9)可得 $V(\theta)$ 关于 θ 的一阶和二阶导数：

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= 2R\sin\theta\,[kl - 2(kR - mg)\cos\theta] \\ V''(\theta) &= 2R[kl\cos\theta - 2(kR - mg)\cos 2\theta] \end{aligned}$$

当 $V'(\theta) = 0$，有极值点 $\theta_0 = 0$ 和 $\theta_\pm = \pm\arccos\frac{kl}{2(kR-mg)}$；注意极值点 $\theta_\pm$ 只有当 $\frac{kl}{2(kR-mg)} \le 1$ 才成立。分别计算 $V''(\theta_0)$ 和 $V''(\theta_\pm)$，结果可整理如下：

* 当 $mg \geq kR - kl/2$ 时，只有一个稳定平衡点 $\theta_0 = 0$；
* 当 $mg < kR - kl/2$ 时，有稳定平衡点 $\theta_{\pm} = \pm \arccos\left(\frac{kl}{2(kR-mg)}\right)$ 和不稳定平衡点 $\theta_0 = 0$。

习题 3.8 如图 17所示，劲度系数为 k_1 和 k_2 的两个弹簧与质量为 m 的物体组成一个振动系统。求系统振动的固有角频率。(P.309:Prob.6-6)

解：建立如图 17所示的坐标系，设 x_1^e 和 x_2^e 分别为弹簧 1 和 2 处于原长时物体所在位置。由牛顿第二定律可得运动方程：

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1(x - x_1^e) - k_2(x - x_2^e) \\ &= -(k_1 + k_2)x + (k_1 x_1^e + k_2 x_2^e) \end{aligned} \tag{3.10}$$

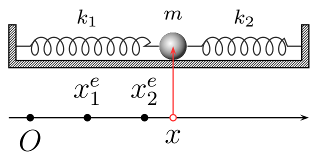

图 17: 习题3.8

其中 $x = x(t)$；记 $k = k_1 + k_2$ 和 $x_0 = (k_1 x_1^e + k_2 x_2^e)/k$，并作坐标变换 $y = x - x_0$；方程(3.10)可转换为

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{3.11}$$

方程(3.11)表明物体围绕平衡位置 x_0 以固有角频率 ω 做简谐振动。

4 第四单元

习题 4 .1 质量 $70kg$ 的渔人站在小船上，设船和渔人的总质量为 $200kg$。若渔人在船上向船头走 $4.0m$ 后停止。试问：以岸为参考系，渔人走了多远？

解：如图 18所示，O 和 O' 分别代表岸上的和船上的观测者。因为 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{R}(t)+\boldsymbol{r}'(t)$，所以 $\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{V}(t)+\boldsymbol{v}'(t)$。对观测者 O 而言，小船和渔夫的总动量守恒，即

$$M\boldsymbol{V}+m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{V}=-m\boldsymbol{v}/M$$

其中 M 和 m 分别为小船和渔夫的质量。于是，可得

$$\boldsymbol{v}=\frac{M\boldsymbol{v}'}{M+m} \quad\Rightarrow\quad |\Delta\boldsymbol{r}|=\frac{M}{M+m}|\Delta\boldsymbol{r}'|=\frac{130kg}{200kg}4m=2.6m$$

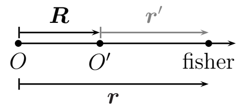

图 18: 渔夫与船

习题 4 .2 一炮弹以速率 v_0 和仰角 θ_0 发射，到达弹道的最高点时炸为质量相等的两块（图 19），其中一块以速率 v_1 垂直下落，求另一块的速率 v_2 及速度与水平方向的夹角（忽略空气阻力）。

解：炮弹到达最高点需经历的时间为 $t=v_0\sin\theta_0/g$，由动量定理可知此时的动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=m\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{G}t\\&=mv_0(\cos\theta_0\boldsymbol{i}+\sin\theta_0\boldsymbol{j})-mv_0\sin\theta_0\boldsymbol{j}\\&=mv_0\cos\theta_0\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

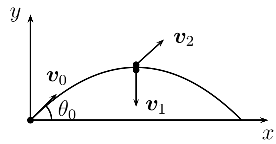

图 19: 炮弹

由于爆炸是瞬间的，而爆炸力为内力，故有总动量守恒，即

$$\boldsymbol{p}=-\frac{m}{2}v_1\boldsymbol{j}+\frac{m}{2}\boldsymbol{v}_2 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{v}_2=2v_0\cos\theta_0\boldsymbol{i}+v_1\boldsymbol{j}$$

由此可知速率 $v_2=\sqrt{v_1^2+4v_0^2\cos^2\theta_0}$ 和夹角 $\theta=\arctan\frac{v_1}{2v_0\cos\theta_0}$。

习题 4 .3 图 20中 O 为中心力场的力心，排斥力与距离平方成反比：$f=k/r^2$（k 为常量）。1. 求此力场的势能；2. 一质量为 m 的粒子以速度 v_0、瞄准距离 b 从远处入射，求它能达到的最近距离 d 和此时刻的速率。(P.202:Prob.4-11)

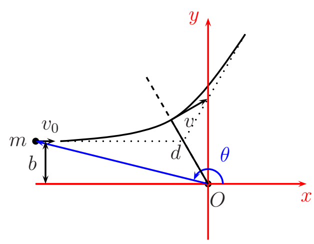

图 20: 题4 .3

解：在中心力场中运动的粒子的角动量守恒，由此可知粒子的运动轨迹对应平面曲线，且落在过力心并与角动量垂直的平面上。因此，该问题可简化为二维平面上的运动，我们建立如图 20所示的极（和直角）坐标系，角动量的方向为 $\boldsymbol{k}$ 方向（垂直纸面指向外）。

由于中心力场为保守力场，可以定义势能：

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{r})&=V(\boldsymbol{r}_0)-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}'=V(\boldsymbol{r}_0)-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\left[\frac{k\boldsymbol{r}'}{(r')^3}\right]\cdot d\boldsymbol{r}' \qquad (4\ .1)\\&=V(\boldsymbol{r}_0)-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\left[\frac{k}{(r')^2}\right]dr'=V(\boldsymbol{r}_0)+\left[\frac{k}{r}-\frac{k}{r_0}\right]\\&\xrightarrow[V(\boldsymbol{r}_0)=0]{r_0=\infty}\frac{k}{r}\end{aligned}$$

排斥力意为着力与位矢同向，使得粒子远离力心，即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$；吸引力正相反，有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$。

最后一步表示选取无穷远处为势能零点，上式表明 $V(\boldsymbol{r})$ 仅依赖于 r，故又常记为 $V(r)$。粒子的初始位置为 $\boldsymbol{r}(0)=x_0\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$（其中 $x_0\approx-\infty$），初始速度为 $\boldsymbol{v}(0)=v_0\boldsymbol{i}$，于是有角动量：

$$\boldsymbol{J}(0)=\boldsymbol{r}(0)\times\boldsymbol{p}(0)=(x_0\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j})\times(mv_0\boldsymbol{i})=-mbv_0\boldsymbol{k}$$

和机械能

$$E(0)=\frac{1}{2}mv_0^2$$

设 t 时刻，粒子的位矢为$\boldsymbol{r}(t)=r\boldsymbol{e}_r$，其速度 $\boldsymbol{v}(t)=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$。由角动量守恒定律，得

对中心力场，通常采用极（球）坐标系；此处 r 直接表示粒子与力心 O 之间的距离，这正是第二小问关注的量。

$$\boldsymbol{J}(t)=r\boldsymbol{e}_r\times m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)=mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{J}(0)\ \Rightarrow\ r\dot{\theta}=-bv_0/r \tag{4 .2}$$

由机械能守恒定律，得

$$E(t)=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{k}{r}=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{4 .3}$$

将(4 .2)代入(4 .3)，可得：

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\left[\frac{mb^2v_0^2}{2r^2}+\frac{k}{r}\right]=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V_e(r)=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{4 .4}$$

显然有效势 $V_e(r)$ 是关于 $r(>0)$ 的单调递减函数，当 $\dot{r}=0$ 时有 $V_e(r)$ 达到最大——即 r 达到最小。于是

$$V_e(d)=\frac{1}{2}mv_0^2\quad\Rightarrow\quad d=\frac{k+\sqrt{k^2+b^2m^2v_0^4}}{mv_0^2} \tag{4 .5}$$

此时粒子的速率

$$v=|\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta|=|r\dot{\theta}|=bv_0/d \tag{4 .6}$$

上式第三个等号由方程(4 .2)和(4 .5)可得。

6 第五单元

习题 6 .1 一细杆两端装有质量相同的质点 A 和 B，可绕水平轴 O 自由摆动，已知参量如 图 25所示。求小幅摆动的周期和等值摆长。(P.203:Prob.4-26)

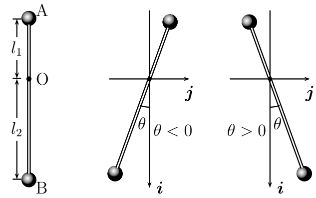

图 25: 习题6 .1

解法一：如图 25所示，系统的角动量、重力力矩分别为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_z &= I\omega\boldsymbol{k} = m(l_1^2+l_2^2)\omega\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{M}_z &= (\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_B)\times(mg\boldsymbol{i}) = (l_2-l_1)\frac{\boldsymbol{r}_B}{r_B}\times(mg\boldsymbol{i})\\ &= -(l_2-l_1)mg\sin\theta\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由角动量定理 $\dot{\boldsymbol{J}}_z = \boldsymbol{M}_z$ 和 $\omega=\dot\theta$ 可知

$$I\ddot\theta = -(l_2-l_1)mg\sin\theta \tag{6 .1}$$

由于是小幅摆动，故有 $\sin\theta\approx\theta$；于是方程 (6 .1)可近似为

$$\ddot\theta+\omega_a^2\theta=0,\quad \omega_a=\sqrt{\frac{(l_2-l_1)mg}{I}}=\sqrt{\frac{(l_2-l_1)g}{l_1^2+l_2^2}} \tag{6 .2}$$

因此 $T=\frac{2\pi}{\omega_a}=2\pi\sqrt{\frac{l_1^2+l_2^2}{(l_2-l_1)g}}$；由单摆的角频率公式 $\omega_{单摆}=\sqrt{\frac{g}{l}}$ 和 w_a 可知等值摆长 $l=\frac{l_1^2+l_2^2}{(l_2-l_1)}$。

解法二：系统的总动能为：

$$E_k=\frac{1}{2}m(\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_A)^2+\frac{1}{2}m(\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_B)^2=\frac{1}{2}m(l_1^2+l_2^2)\omega^2=\frac{1}{2}I\omega^2$$

以 O 处为重力势能零点并应用简谐近似，则系统的重力势能为：

$$U_G=-mg(l_2-l_1)\cos\theta\approx -mg(l_2-l_1)(1-\frac{1}{2}\theta^2)$$

由机械能守恒定律可知：

$$\frac{1}{2}I\omega^2-mg(l_2-l_1)(1-\frac{1}{2}\theta^2)=\text{Const.} \tag{6 .3}$$

方程(6 .3)两端对时间求导则可得方程(6 .2)，余下步骤相同。

习题 6 .2 如图 26所示，复摆周期原为 $T_1 = 0.5s$，在 O 轴下 $l = 10cm$ 处（联线过质心 C）加质量 $m = 50g$ 后，周期变为 $T_2 = 0.6s$。求复摆对 O 轴原来的转动惯量。(P.203:Prob.4-27)

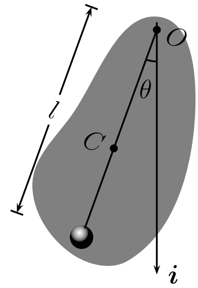

图 26: 习题6 .2

解法一：如图 26所示，复摆沿 O 轴的角动量 $\boldsymbol{J}_z = I\omega\boldsymbol{k}$，沿 O 轴的重力力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_z &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (\Delta m_i g\boldsymbol{i}) = \left(\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i\right) \times g\boldsymbol{i} \\ &= M\boldsymbol{r}_c \times g\boldsymbol{i} = -Mgr_c \sin\theta\boldsymbol{k} \approx -Mgr_c\theta\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

其中 M 为复摆的总质量，位矢 $\boldsymbol{r}_c$ 为其质心所在位置，θ 为 $\boldsymbol{r}_c$ 与 $\boldsymbol{i}$ 之间的夹角，最后一步利用了 $\theta \approx 0$。由角动量定律 $\frac{d\boldsymbol{J}_z}{dt} = \boldsymbol{M}_z$ 可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgr_c}{I}\right)\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr_c}} \tag{6 .4}$$

当加质量 m 后，系统的总角动量为 $\boldsymbol{J}'_z = (I + ml^2)\omega\boldsymbol{k}$，重力力矩为

$$\boldsymbol{M}'_z = \boldsymbol{M}_z + \boldsymbol{r}_m \times mg\boldsymbol{i} = \boldsymbol{M}_z - mgl\sin\theta\boldsymbol{k} \approx -(Mgr_c + mgl)\theta\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{r}_m$ 为 m 所对应的位矢，第二个等号利用了 $\boldsymbol{r}_c$ 和 $\boldsymbol{r}_m$ 共线。同理可得

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I + ml^2}{Mgr_c + mlg}} \tag{6 .5}$$

方程(6 .4)和(6 .5)只含有两个未知量 I 和 Mgr_c，由此可解得 I。

解法二：复摆的动能为 $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$，重力势能为 $U_G = -Mgr_c\cos\theta$，根据机械能守恒定律可知

$$\frac{d(E_k + U_G)}{dt} = 0 \quad \xrightarrow[\sin\theta\approx\theta]{\frac{d\theta}{dt}\neq 0} \quad I\frac{d^2\theta}{dt} + Mgr_c\theta = 0 \tag{6 .6}$$

当加质量 m 后，系统的动能变为 $E'_k = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}ml^2(\frac{d\theta}{dt})^2$，重力势能为 $U_G = -(Mgr_c + mgl)\cos\theta$，同理可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgr_c + mgl}{I + ml^2}\right)\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I + ml^2}{Mgr_c + mlg}} \tag{6 .7}$$

由方程(6 .6)和(6 .6)可解得 I。

7 第六单元

习题 7 .1 在惯性系 K 中观察到两事件同时发生，空间距离相隔 $1m$。惯性系 K' 沿两事件联线的方向相对于 K 运动，在 K' 系中观测到两事件之间的距离为 $3m$。求 K' 系相对于 K 系的速度和在其中测得两事件之间的时间间隔。(P.415:Prob.8-4)

解：以与两事件联线的共线为 x 轴，记 K' 系相对于 K 系的运动速度为 v，并设两事件的时空间隔在 K 系和 K' 系分别为 Δx、Δt 和 Δx、$\Delta t'$。由题意可知 $\Delta x = 1m$、$\Delta t = 0$ 和 $\Delta x' = 3m$，则由 Lorentz 变换可知：

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{8}}{3}c$$

和

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{\sqrt{8}m}{c} \approx -0.94 \times 10^{-8}s.$$

习题 7 .2 斜放的直尺以速度 V 相对于惯性系 K 沿 x 方向运动，它的固有长度为 l_0，在与之共动的惯性系 K' 中它与 x' 轴的夹角为 θ'。试证明：对于 K 系的观察者来说，其长度 l 和与 x 轴的夹角 θ 分别为 (P.415:Prob.8-6)

$$l = l_0\sqrt{\left(\cos\theta'\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)^2 + \sin^2\theta'}, \quad \tan\theta = \frac{\tan\theta'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

解：由题意可知，K 系的观察者测得长度为运动长度，为此观察者得在直尺两端制造两个同时事件，记它们的时空间隔为 Δx、Δy 和 Δt，其中 $\Delta t = 0$；在 K' 系，该事件的空间间隔 $\Delta x' = l_0\cos\theta'$ 和 $\Delta y' = l_0\sin\theta'$。由 Lorentz 变换可知 $\Delta y' = \Delta y$ 和

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \Delta x'\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

由此可知

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = l_0\sqrt{\left(\cos\theta'\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)^2 + \sin^2\theta'}$$

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\tan\theta'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

习题 7 .3 惯性系 K' 相对于惯性系 K 以速度 V 沿 x 方向运动，在 K' 系观测，一质点的速度矢量 $\boldsymbol{v}'$ 在 $x'y'$ 面内与 x' 轴成 θ' 角。试证明：对于 K 系，质点速度与 x 轴的夹角为 (P.415:Prob.8-7)

$$\tan\theta = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{V + v'\cos\theta'}$$

解：由题意可知 $v'_x = v'\cos\theta'$ 和 $v'_y = v'\sin\theta'$，由速度（逆）变换公式可知

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2}$$

由此可证得

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v'\cos\theta'}$$

习题 7 .4 两宇宙飞船相对于某遥远的恒星以 $0.8c$ 的速率朝相反的方向离开。试求两飞船的相对速度。(P.415:Prob.8-9)

解：以恒星为 K 系，其中一艘飞船为 K' 系，并取其飞行方向为 x 轴的方向，于是 K' 系相对于 K 系的速度为 $u = 0.8c$；对于 K 系的观察者而言，另一艘飞船的速度则为 $v = -0.8c$。求两飞船的相对速度，即求在 K' 系中测得另一艘飞船的速度 v'。由速度变换公式可得

$$v' = \frac{v-u}{1-uv/c^2} = \frac{-0.8c-0.8c}{1+0.64} = -\frac{1.6c}{1.64}$$

作业

June 22, 2016

Contents

1 第一次作业

习题 1.1 一球以初速 v_0 竖直上抛，经过时间 t_0 后在同一地点以同样速率向上抛出另一小球。两球在多高处相遇？（P.39:Prob.1-6）

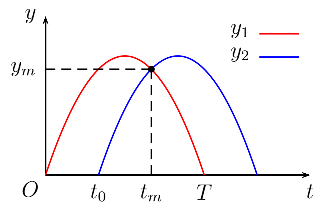

图 1: 习题1.1

解：设 $y_1(t)$、$y_2(t)$ 分别表示第一、第二小球在 t 时刻到达的高度，于是有

$$\begin{aligned} y_1(t) &= v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad t \geq 0 \\ y_2(t) &= y_1(t-t_0) \\ &= v_0(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2, \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

图 1给出了 y_1 和 y_2 的函数曲线，显然二者的交点 (t_m, y_m) 表示在 t_m 时刻在高度 y_m 处两小球相遇。根据 $y_1(t_m) = y_2(t_m)$，可得

$$t_m = \frac{t_0}{2} + \frac{v_0}{g} \quad \Rightarrow \quad y_m = y_1(t_m) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt_0^2}{8}$$

t_m 还可以用另一种方法获得，图 1中的 T 表示第一个小球由抛起到返回初始位置所经历的时间，其值为 $\frac{2v_0}{2}$，由对称性可知 t_m 处于 t_0 和 T 的中间位置。

习题 1.2 已知炮弹的发射角为 θ，初速为 v_0，求抛物线轨道的曲率半径随高度的变化。（P.40:Prob.1-12）

解：建立以初始位置为原点、水平方向为 x 轴及竖直方向为 y 轴的坐标系。由初速度 $\boldsymbol{v}(0) = v_0\cos\theta\boldsymbol{i} + v_0\sin\theta\boldsymbol{j}$ 和加速度 $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j}$，可得 t 时刻的速度

$$\boldsymbol{v}(t) = v_0\cos\theta\boldsymbol{i} + (v_0\sin\theta - gt)\boldsymbol{j}$$

和位矢

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} = v_0\cos\theta t\boldsymbol{i} + (v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

由此可得曲率半径

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{v^2}{|\boldsymbol{a}_n|} = \frac{v^2}{|\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}|} = \frac{v^2}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})^2}} = \frac{v^3}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2v^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}} \\
&= \frac{[(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2]^{\frac{3}{2}}}{gv_0\cos\theta} \\
&= \frac{[v_0^2 - 2g(v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2)]^{\frac{3}{2}}}{gv_0\cos\theta} \\
&= \frac{(v_0^2 - 2gy)^{\frac{3}{2}}}{v_0 g\cos\theta}
\end{aligned}$$

2 第二次作业

习题 2.1 极坐标系中的对数螺线可表示为 $r = r_0 e^{\alpha\theta}$，试求出曲率半径分布 $\rho(r)$。

解：在极坐标系，该对数螺线以参数 θ 可表示为

$$\boldsymbol{r}(\theta) = r_0 e^{\alpha\theta} \boldsymbol{e}_r$$

由此可得按参数 θ 运动的速度

$$\boldsymbol{v}(\theta) = \frac{d\boldsymbol{r}(\theta)}{d\theta} = r_0 e^{\alpha\theta}(\alpha \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_\theta) \tag{2.1}$$

和加速度

$$\boldsymbol{a}(\theta) = \frac{d\boldsymbol{v}(\theta)}{d\theta} = \alpha r_0 e^{\alpha\theta}(\alpha \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_\theta) + r_0 e^{\alpha\theta}(\alpha \boldsymbol{e}_\theta - \boldsymbol{e}_r) \tag{2.2}$$

比较式(2.1)和(2.2)可知，(2.2)等号右端第一项与 $\boldsymbol{v}(\theta)$ 共线而第二项则与 $\boldsymbol{v}(\theta)$ 垂直，因而法向加速度为

$$\boldsymbol{a}_n(\theta) = r_0 e^{\alpha\theta}(\alpha \boldsymbol{e}_\theta - \boldsymbol{e}_r)$$

于是

$$\rho(r) = \frac{v^2(\theta)}{|\boldsymbol{a}_n(\theta)|} = r_0 e^{\alpha\theta}\sqrt{1+\alpha^2} = r\sqrt{1+\alpha^2}$$

习题 2.2 极坐标系中的方程 $r = A(1-\cos\theta)$，对应一条心脏线。如图 2所示，试求心底 P 处曲率半径 ρ。

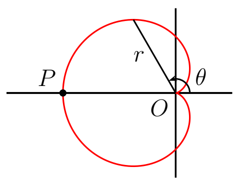

图 2: 心脏线

解：在极坐标系，该心脏线以参数 θ 的表示为

$$\boldsymbol{r}(\theta) = A(1-\cos\theta)\boldsymbol{e}_r$$

由此可得按参数 θ 运动的速度和加速度

$$\boldsymbol{v}(\theta) = \frac{d\boldsymbol{r}(\theta)}{d\theta} = A\sin\theta \boldsymbol{e}_r + A(1-\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a}(\theta) = \frac{d\boldsymbol{v}(\theta)}{d\theta} = A(2\cos\theta - 1)\boldsymbol{e}_r + 2A\sin\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

心底 P 对应 $\theta = \pi$，有 $\boldsymbol{v}(\pi) = 2A\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{a}(\pi) = -3A\boldsymbol{e}_r$，显然二者垂直。因此

$$\rho(P) = \frac{\boldsymbol{v}^2}{|\boldsymbol{a}_n|} = \frac{\boldsymbol{v}^2}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{4A}{3}$$

习题 2.3 小球从同一位置以相同的初速率 v_0，在同一竖直平面上朝着不同方向斜抛出去，如果抛射角 θ 可在 0 到 π 范围内连续变化，试问各轨道最高点连成的曲线是什么类型的曲线？

解：对给定抛射角 θ 的抛体运动，小球的运动轨迹为一抛物线，具有唯一确定的最高点 $\boldsymbol{r}_m$，即最高点 $\boldsymbol{r}_m$ 与抛射角 θ 有一对一的函数关系。为此，我们首先要给出该函数关系：$\boldsymbol{r}_m(\theta)$。

在以初始位置为原点、以水平方向为 x 轴、以竖直方向为 y 轴的笛卡尔坐标系，小球的运动轨迹关于时间 t 的参数表示为：

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}=v_0t\cos\theta\boldsymbol{i}+(v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

设 t_m 表示小球达到最高点 $\boldsymbol{r}(t_m)$ 所需的时间，由 $y'(t_m)=0$ 可知

$$t_m=\sin\theta v_0/g \tag{2.3}$$

因此

$$\boldsymbol{r}_m=\boldsymbol{r}(t_m)=\frac{1}{g}v_0^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{i}+\frac{1}{2g}v_0^2\sin^2\theta\boldsymbol{j}=x_m(\theta)\boldsymbol{i}+y_m(\theta)\boldsymbol{j}$$

然后把以参数 θ 表示的曲线 $\boldsymbol{r}_m(\theta)$ 转换为等高线（即所谓的轨迹方程）。注意到 $\frac{x_m}{a}=\sin\theta\cos\theta$ 和 $\frac{y_m}{b}=\sin^2\theta$，其中 $a=v_0^2/g$ 和 $b=v_0^2/(2g)$，可得

$$\frac{x_m^2}{a^2}=\frac{y_m}{b}-\frac{y_m^2}{b^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{x_m^2}{(a/2)^2}+\frac{(y_m-b/2)^2}{(b/2)^2}=1$$

由此可知各轨道最高点连成的曲线为一椭圆。

习题 2.4 一圆盘绕过其圆心并与盘面垂直的转动轴以恒定的角速率 ω 转动，在圆盘上沿径向开有一光滑小槽，槽内一质量为 m 的质点以 v_0 的初速从圆心开始向外运动（图 3），试求：1. 质点到达 $r_0(>0)$ 处时的速率；2. 质点到达该处所需的时间 t；3. 质点在该处所受到的槽壁对它的侧向作用力。

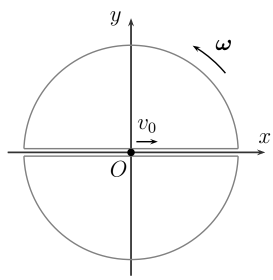

图 3: 转动坐标系 K

解：如图 2所示，建立与圆盘固连的转动坐标系 K，其中 z 轴垂直纸面指向外——则角速度 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$；相对于 K 系，质点的位矢 $\boldsymbol{r}(t)$、速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 和加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ 分别为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{v}(t)=\dot{x}(t)\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{a}(t)=\ddot{x}(t)\boldsymbol{i}$$

因为圆盘——其圆心固定——仅涉及转动无平动，并且角速率恒定，所以惯性力只有离心力 $\boldsymbol{F}_c$ 和科里奥力 $\boldsymbol{F}_{cor}$：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_c&=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=-m\omega^2x\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})=m\omega^2x\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{F}_{cor}&=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=-2m\omega\dot{x}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-2m\omega\dot{x}\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

真实力有重力和槽底的作用力——都沿 z 轴方向，但二者抵消；而槽壁的作用力 $\boldsymbol{F}_w$——与 y 轴平行——可表示为 $f\boldsymbol{j}$，其中 f 待定。于是，质点在 K 系的运动方程为

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}_c+\boldsymbol{F}_{cor}+\boldsymbol{F}_w=m\omega^2x\boldsymbol{i}+(f-2m\omega\dot{x})\boldsymbol{j} \tag{2.4}$$

方程(2.4)为矢量等式，它等价于两个标量等式：$f=2m\omega\dot{x}$ 和 $\ddot{x}=\omega^2x$；结合初始条件，可得关于 $x(t)$ 的初始值问题：

$$\ddot{x}-\omega^2x=0\quad;\quad x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v_0 \tag{2.5}$$

可解得

$$x(t)=\tfrac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$$

关于初始值问题(2.5)，先解得方程的通解 $x(t)=\alpha e^{\omega t}+\beta e^{-\omega t}$；将通解带入初始条件，可得关于 α 和 β 的线性方程组，最后解得 α 和 β。

由 $x(t)=r$，可求得相遇时间

$$t=\frac{1}{\omega}\ln\frac{\omega r+\sqrt{v_0^2+(\omega r)^2}}{v_0}$$

此时的速率

$$v=\dot{x}(t)=\sqrt{v_0^2+(\omega r)^2}$$

以及槽壁的作用力

$$\boldsymbol{F}_w=2m\omega v\boldsymbol{j}$$

习题 2.5 设有曲线 $y=f(x)$，请证明在 x 处的曲率半径 $\rho(x)=\frac{[1+(f')^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''|}$，其中 $f'(x)=\frac{df}{dx}$，$f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2}$。

证明：以 x 为参数，该曲线有参数化表示 $\boldsymbol{r}(x)=x\boldsymbol{i}+f(x)\boldsymbol{j}$。于是按参数 x 移动的速度和加速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(x)&=\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}=\boldsymbol{i}+f'(x)\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{a}(x)&=\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}=f''(x)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

根据法向加速度 $\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_t$（其中切向加速度 $\boldsymbol{a}_t=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^2}$），可得

由 $\boldsymbol{a}_t=c\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}_t\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$ 可知 $c=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})}{\boldsymbol{v}^2}$。

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_n|&=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_t)^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}{\boldsymbol{v}^2}}\\ &=\sqrt{(f'')^2-\frac{(f''f')^2}{1+(f')^2}}=\frac{|f''|}{\sqrt{1+(f')^2}}\end{aligned}$$

因此

$$\rho(x)=\frac{\boldsymbol{v}^2}{|\boldsymbol{a}_n|}=\frac{[1+(f')^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

3　第三次作业

习题 3.1 如所示，将质量为 m 的小球用细线挂在倾角为 θ 的光滑斜面上。求（1）若斜面以加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿图示方向运动时，细线的张力及小球对斜面的正压力；（2）当加速度 a 取何值时，小球刚可以离开斜面？(P.95:Prob.2-23)

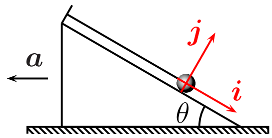

图 4: 习题3.1

解：建立如图4所示与斜面固连的动坐标系，小球受到重力 $\boldsymbol{G}$、来自斜面的支持力 $\boldsymbol{N}$、来自细线的张力 $\boldsymbol{T}$ 和平移的惯性力 $\boldsymbol{F}_t$，分别有

$$\boldsymbol{G} = mg(\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{N} = N\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{F}_t = -m\boldsymbol{a} = ma(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})$$

对于合力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_t$ 有 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} = 0$ 和 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j} = 0$，即

$$T = mg\sin\theta + ma\cos\theta, \quad N = mg\cos\theta - ma\sin\theta$$

当 $N = 0$ 时，即 $a = g/\tan\theta$，小球刚可以离开斜面。

习题 3.2 一辆汽车驶入曲率半径为 R 的弯道。弯道倾斜一角度 θ，轮胎与路面之间的摩擦系数为 μ。求汽车在路面上不作侧向滑动时的最大和最小速率。(P.96:Prob.2-24)

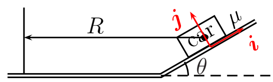

图 5: 习题3.2

解：由题意可知法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$、重力 $\boldsymbol{G}$、路面对汽车的支持力 $\boldsymbol{N}$ 及摩擦力 $\boldsymbol{F}_m$ 分别为

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{R}(-\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{N} = N\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{G} = -mg(\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{F}_m = f\boldsymbol{i}$$

其中 v 为汽车的速率。由 $m\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_m$ 可得：

$$N = m\frac{v^2}{R}\sin\theta + mg\cos\theta$$
$$f = mg\sin\theta - m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

根据 $|f| \le \mu N$（即小于等于最大静摩擦力），可得：

$$\sqrt{\frac{gR(\tan\theta - \mu)}{1 + \mu\tan\theta}} \le v \le \sqrt{\frac{gR(\tan\theta + \mu)}{1 - \mu\tan\theta}}$$

习题 3.3 一条均匀的绳子，质量为 m，长度为 l，将它拴在转轴上，以角速率 ω 旋转，试证明：略去重力时，绳中的张力分布为

$$T(r) = \frac{m\omega^2}{2l}(l^2 - r^2)$$

式中 r 为到转轴的距离。(P.96:Prob.2-28)

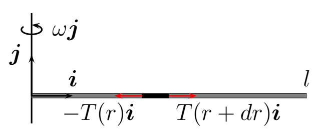

图 6: 习题3.3

解：建立如图6所示的旋转坐标系，使得绳子落在 $\boldsymbol{i}$ 轴上。现考虑处于 r 与 $r + dr$ 之间长度为 dr 的一段绳子，显然其质量为 $dm = \rho dr$，其中线密度 $\rho = \frac{m}{l}$。该段绳子受到左边的和右边的绳子的拉力，它们分别为 $-T(r)\boldsymbol{i}$

和 $T(r+dr)\boldsymbol{i}$（绳子的张力如同压强，是一个强度量，无方向。），故合拉力为 $\boldsymbol{F}_s=[T(r+dr)-T(r)]\boldsymbol{i}$。因为绳子相对于旋转坐标系静止，所以离心力 $\boldsymbol{F}_c=(dm)\omega^2r\boldsymbol{i}$ 与绳子的张力抵消，即 $\boldsymbol{F}_s+\boldsymbol{F}_c=0$，于是有

$$\frac{dT(r)}{dr}+\frac{m}{l}\omega^2r=0 \quad\Rightarrow\quad T(r)=-\frac{m\omega^2}{2l}r^2+c$$

最后，由初始条件 $T(l)=0$ 可得积分常数 $c=\frac{m\omega^2l}{2}$。

习题 3.4 在顶角为 2α 的光滑圆锥面的顶点上系一劲度系数为 k 的轻弹簧，原长 l_0，下坠一质量为 m 的物体，绕锥面的轴线旋转。试求使物体离开锥面的角速率 ω 和此时弹簧的伸长。(P.96:Prob.2-29)

解：建立如图 7所示的转动坐标系 K，它以同样的角速率 ω 随物体一起绕锥面的轴线旋转。图 7只展示了 K 系的基矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，第三个基矢量 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ 此刻是垂直于纸面向外的。角速度可用 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 表示为

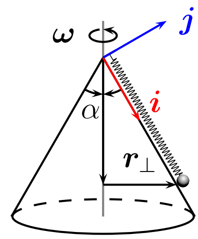

图 7: 习题3.4

$$\boldsymbol{\omega}=\omega(-\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j})$$

物体在 K 系的位置对应位矢 $\boldsymbol{r}=l\boldsymbol{i}$（$l$ 为弹簧拉伸的长度），在 K 系的观测者看来，物体受到重力 $\boldsymbol{G}$、弹力 $\boldsymbol{F}_k$、锥面的支持力 $\boldsymbol{N}$ 和离心力 $\boldsymbol{F}_c$ 的作用，它们分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}&=mg(\cos\alpha\boldsymbol{i}-\sin\alpha\boldsymbol{j})\\ \boldsymbol{F}_k&=-k(l-l_0)\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{N}&=n\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{F}_c&=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp\\ &=m\omega^2l\sin\alpha(\sin\alpha\boldsymbol{i}+\cos\alpha\boldsymbol{j})\end{aligned}$$

因为它们的合力 $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_c=\boldsymbol{0}$，所以有

$$\begin{aligned}n&=mg\sin\alpha-m\omega^2l\sin\alpha\cos\alpha\\ k(l-l_0)&=mg\cos\alpha+m\omega^2l(\sin\alpha)^2\end{aligned}$$

当锥面对物体存在支持力意味着 $n\geq0$，即 $\omega\leq\omega_c(=\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}})$，否则意味着物体离开了锥面。当角速率为临界值 ω_c 时——这意味着物体即将离开锥面，弹簧拉伸的长度为

$$\Delta l=(l-l_0)=\frac{mg\cos\alpha+m\omega_c^2l(\sin\alpha)^2}{k}=\frac{mg}{k\cos\alpha}$$

临界角速率为

$$\omega_c=\sqrt{\frac{g}{(l_0+\Delta l)\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{kg}{l_0k\cos\alpha+mg}}$$

习题 3.5 抛物线形弯管的表面光滑，可绕铅直轴以匀角速率转动。抛物线方程为 $y=ax^2$，a 为常数。小环套于弯管上。(1) 求弯管角速率多大，小环可在管上任意位置相对弯管静止；(2) 若为圆形光滑弯管，情形如何？(P.96:Prob.2-30)

解：(1) 建立如图 8所示与弯管固连的转动坐标系 K，因为小环被限制于弯管上运动，所以有位矢 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+ax^2\boldsymbol{j}$。对于 K 系的观测者，小环受到重力 $\boldsymbol{G}$、弯管的支持力 $\boldsymbol{N}$ 和离心力 $\boldsymbol{F}_c$，它们分别为

$$\boldsymbol{G}=-mg\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{N}=f\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{F}_c=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=m\omega^2x\boldsymbol{i}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 指向弯管在 $\boldsymbol{r}$ 处的法向，它与弯管在该处的切向 $\boldsymbol{t}$ 垂直，而 $\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}=\boldsymbol{i}+2ax\boldsymbol{j}$，故有 $\boldsymbol{n}=-2ax\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$。因为小环相对弯管静止，所以 $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_c=\boldsymbol{0}$，于是可得：

$$(m\omega^2-2af)x=0,\quad f=mg$$

当 $x\neq 0$ 时，有 $\omega=\sqrt{\frac{2af}{m}}=\sqrt{2ag}$；当 $x=0$ 时，ω 则可取任意值。

(2) 同样地，对于 K 系的观测者，小环受到重力 $\boldsymbol{G}=-mg\boldsymbol{i}$、弯管的支持力 $\boldsymbol{N}=f\boldsymbol{n}$ 和离心力 $\boldsymbol{F}_c=m\omega^2x\boldsymbol{i}$，其中法向 $\boldsymbol{n}$ 可直接选为 $\boldsymbol{r}$，即 $\boldsymbol{n}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$。由于合力为零：$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_c=\boldsymbol{0}$，于是可得

$$(m\omega^2+f)x=0,\quad fy=mg$$

当 $x\neq 0$ 时，可得 $\omega=\sqrt{\frac{g}{-y}}$，其中要求 $y<0$；当 $x=0$ 时，即在大圆环最低、最高点时，ω 可取任意值，小圆环均可静止。

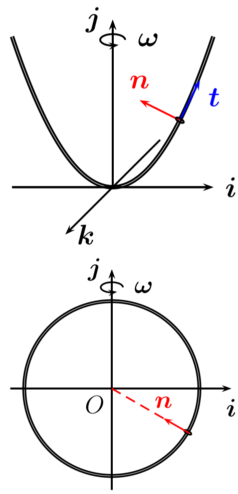

图 8: 习题3.5(1)&(2)

习题 3.6 质量为 m 的小环套在半径为 R 的光滑大圆环上，后者在水平面内以匀角速 ω 绕其上一点 O 转动。试分析小环在大环上运动时的切向加速度和水平面内所受约束力（教材第 84 页例题 16。)。

解：建立如图 9所示的以 O 为原点的转动的笛卡尔坐标系，以及以大圆的圆心 C 为原点的一起转动的极坐标系。位矢 $\boldsymbol{r}$ 可表示为 $\boldsymbol{r}=R\boldsymbol{i}+R\boldsymbol{e}_r$，对于转动坐标系里的观测者而言，只有 $\boldsymbol{e}_r$ 是随小环的运动而变化，相应的速度与加速度为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=R\dot{\boldsymbol{e}}_r=R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$
$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=R\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta-R(\dot{\theta})^2\boldsymbol{e}_r$$

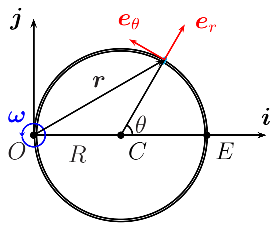

图 9: 习题3.6

因为小环只在水平面内运动，竖直方向的力不予考虑。(重力与大圆环的约束力沿竖直的力相抵消。）小环受到大圆环（水平方向的）约束力 $\boldsymbol{N}$、离心力 $\boldsymbol{F}_c$ 和科利奥力 $\boldsymbol{F}_{cor}$，利用角速度 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$，可知它们分别是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}&=n\boldsymbol{e}_r\\ \boldsymbol{F}_c&=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=m\omega^2\boldsymbol{r}\\ &=m\omega^2R[(1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta]\\ \boldsymbol{F}_{cor}&=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=2m\omega R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r\end{aligned}$$

其中 n 是一待定量。根据 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_c+\boldsymbol{F}_{cor}$，可得切向加速度

$$\boldsymbol{a}_t=R\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta=-\omega^2R\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\quad\Rightarrow\quad\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0\tag{3.1}$$

及约束力

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}&=[-mR\omega^2(1+\cos\theta)-2m\omega R\dot{\theta}-mR(\dot{\theta})^2]\boldsymbol{e}_r\\ &=[-mR\omega^2(1+\cos\theta)-2m\omega v-mv^2/R]\boldsymbol{e}_r\end{aligned}$$

微分方程(3.1)在 $\theta\approx 0$ 时可转化为 $\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$，此即谐振子的运动方程，这表明小环围绕其平衡位置 E（图 9）来回振动。注意此时 θ 的取值限于 $(-\pi,\pi)$，以便于在 $\theta=0$ 处（即 x 的正半轴上）可进行微分运算。

4 第四次作业

习题 4 .1 质点以恒定速率 v 沿轨道 $r = k(1+\cos\theta)$ 运动，请计算 1) 加速度 $\boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ 沿径向的分量 a_r；2) 加速度的大小 a；3) 角速率 $\dot{\theta}$。

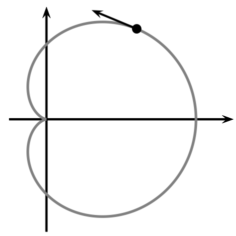

图 10: 心脏线，注意原点（对应 $\theta = \pi$）为奇点。

解：在极坐标系，该曲线关于时间 t 的表示为 $\boldsymbol{r}(t) = k(1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_r$，其中 $\theta = \theta(t)$ 和 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\theta)$。于是有速度

$$\boldsymbol{v}(t) = k\dot{\theta}[-\sin\theta\boldsymbol{e}_r + (1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta] \tag{4 .1}$$

由式4 .1和 $|\boldsymbol{v}(t)| = v$，可得：

$$2(k\dot{\theta})^2(1+\cos\theta) = v^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{v}{2k|\cos(\theta/2)|} \tag{4 .2}$$

此处假定质点按逆时针运动（如图 10所示），即 $\dot{\theta} > 0$。式4 .2两端对时间 t 求导，可得：

$$2\ddot{\theta}(1+\cos\theta) - \dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \tag{4 .3}$$

由式4 .1，并结合式4 .2和 4 .3可得加速度

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(t) &= -k[\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2(1+2\cos\theta)]\boldsymbol{e}_r + k[\ddot{\theta}(1+\cos\theta) - 2\dot{\theta}^2\sin\theta]\boldsymbol{e}_\theta \\
&= -\frac{3}{2}k\dot{\theta}^2[(1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta] \\
&= -\frac{3v^2}{4k}[\boldsymbol{e}_r + \tan(\theta/2)\boldsymbol{e}_\theta]
\end{aligned}$$

因此，有

$$a_r = -\frac{3v^2}{4k}, \quad a = \frac{3v^2}{4k|\cos(\theta/2)|}$$

习题 4 .2 质点以恒定速率 v 沿任意的一固定轨道运动，请证明质点的速度与加速度始终垂直。

证：由于速率 v 恒定可知 $\frac{dv}{dt} = 0$，于是

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}^2}{dt} = 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 0$$

证毕。

习题 4 .3 求曲线 $y = e^x$ 的曲率半径随 x 的分布 $\rho(x)$。

解:该曲线以 x 为参数的表示为 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}$,在参数 x 下有速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}$ 和加速度 $\boldsymbol{a} = e^x\boldsymbol{j}$。因此，法向加速度

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{v^2}$$

由此可得

$$\rho(x) = \frac{v^2}{|\boldsymbol{a}_n|} = \frac{v^2}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}{v^2}}} = \frac{v^3}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2v^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}} = \frac{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{e^x}$$

习题 4.4 质量 $70kg$ 的渔人站在小船上，设船和渔人的总质量为 $200kg$。若渔人在船上向船头走 $4.0m$ 后停止。试问：以岸为参考系，渔人走了多远？

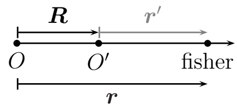

图 11: 渔夫与船

解：如图 11所示，O 和 O' 分别代表岸上的和船上的观测者。因为 $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{r}'(t)$，所以 $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{V}(t) + \boldsymbol{v}'(t)$。对观测者 O 而言，小船和渔夫的总动量守恒，即

$$M\boldsymbol{V} + m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V} = -m\boldsymbol{v}/M$$

其中 M 和 m 分别为小船和渔夫的质量。于是，可得

$$\boldsymbol{v} = \frac{M\boldsymbol{v}'}{M+m} \quad \Rightarrow \quad |\Delta\boldsymbol{r}| = \frac{M}{M+m}|\Delta\boldsymbol{r}'| = \frac{130kg}{200kg}4m = 2.6m$$

习题 4.5 一炮弹以速率 v_0 和仰角 θ_0 发射，到达弹道的最高点时炸为质量相等的两块（图 12），其中一块以速率 v_1 垂直下落，求另一块的速率 v_2 及速度与水平方向的夹角（忽略空气阻力）。

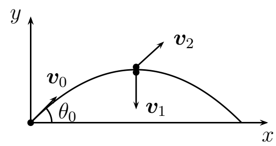

图 12: 炮弹

解：炮弹到达最高点需经历的时间为 $t = v_0 \sin\theta_0/g$，由动量定理可知此时的动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{G}t \\ &= mv_0(\cos\theta_0\boldsymbol{i} + \sin\theta_0\boldsymbol{j}) - mv_0\sin\theta_0\boldsymbol{j} \\ &= mv_0\cos\theta_0\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

由于爆炸是瞬间的，而爆炸力为内力，故有总动量守恒，即

$$\boldsymbol{p} = -\frac{m}{2}v_1\boldsymbol{j} + \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = 2v_0\cos\theta_0\boldsymbol{i} + v_1\boldsymbol{j}$$

由此可知速率 $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 4v_0^2\cos^2\theta_0}$ 和夹角 $\theta = \arctan\frac{v_1}{2v_0\cos\theta_0}$。

5 第五次作业

习题 5.1 如图 13所示，用细线将一质量为 m 的大圆环悬挂起来。两个质量均为 M 的小圆环套在大圆环上，可以无摩擦地滑动。若两小圆环沿相反方向从大圆环顶部自静止下滑，求在下滑过程中，θ 角取什么值时大圆环刚能升起。

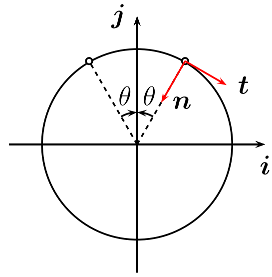

图 13: 习题5.1

解：因为两小圆环下滑过程具有左右对称性，所以只考虑右边小圆环的下滑过程。在起始阶段，小圆环是沿着大圆环运动，故有

$$a_n = |\boldsymbol{a}_n| = \frac{v^2}{R} \tag{5.1}$$

其中 R 为大圆环的半径，v 为小圆环的速率。设大圆环对小圆环的约束力为 $\boldsymbol{F}_n = f_n \boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为如图 13所示的单位矢量。于是，有

$$Ma_n = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n} + f_n = Mg\cos\theta + f_n \tag{5.2}$$

结合(5.1)和(5.2)可得

$$f_n = \frac{Mv^2}{R} - Mg\cos\theta \tag{5.3}$$

在起始阶段 v 和 θ 均较小，因此 $f_n < 0$，这意味小圆环对大圆环的作用力 $(-\boldsymbol{F}_n)$（牛顿第三定律）是与 $\boldsymbol{n}$ 方向一致——也就是沿竖直方向的力是向下的，随着 v 和 θ 的增大，沿竖直方向的力的方向可能反转，从而有可能抬起大圆环。由于约束力不做功，因此有机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}Mv^2 + MgR(\cos\theta - 1) = 0 \tag{5.4}$$

结合(5.3)和(5.4)可得

$$f_n = Mg(2 - 3\cos\theta) \tag{5.5}$$

如果 $(-2f_n\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{j} = mg$（其中 2 考虑到左边的小圆环），那么大圆环即将被抬起，即

$$2Mg(2-3\cos\theta)\cos\theta = mg \;\Rightarrow\; \theta_\pm = \arccos\left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{3m}{2M}}\right) \tag{5.6}$$

因为 $\theta_+ < \theta_-$，所以当下滑到角度 θ_+ 时大圆环刚能升起。不过，前提条件是 $2M > 3m$。

习题 5.2 如图 14所示，在劲度系数为 k 的弹簧下挂质量分别为 m_1 和 m_2 的两个物体，开始时处于静止。若把 m_1 和 m_2 之间的连线烧断，求 m_1 的最大速度。

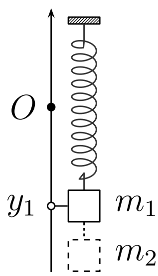

图 14: 习题5.2

解：如图 14所示，以弹簧处于原长时 m_1 所在位置为坐标系的原点 O，因此当 $t=0$ 时有 $y_1(0) = -(m_1+m_2)g/k$ 和 $\dot{y}_1(0) = 0$。以 O 为弹性和重力势能的零点，则总势能为

$$V(y_1) = \frac{1}{2}ky_1^2 + m_1 g y_1$$

从而，初始时刻的机械能 $E = V(y_1(0)) = (m_2^2 - m_1^2)g^2/(2k)$。显然，当势能达到极小值时，动能达到极大值。由 $\frac{dV}{dy_1} = 0$，可知当 $y_1 = y_m = -\frac{m_1 g}{k}$ 时势能有极小值 $V_m = V(y_m)$；设此时最大速率为 v_m，由机械能守恒定律可知

$$\frac{1}{2}m_1 v_m^2 + V_m = E$$

可求得 $v_m = m_2 g/\sqrt{m_1 k}$。

习题 5.3 如本题图，劲度系数为 k 的弹簧一端固定在墙上，另一端系一质量为 m_A 的物体。当把弹簧的长度压短 x_0 后，在它旁边紧贴着放一质量为 m_B 的物体。撤去外力后，求（1）A、B 离开时，B 以多大速率运动；（2）A 距起始点移动的最大距离。设下面是光滑的水平面。

解：见教材图示，显然分离发生在弹力方向发生反转的那一时刻——即弹簧达到原长，推力变成拉力——在此之前，两物体一直具有相同速度。设分离瞬间的速率为 v，由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$$

可得 $v = |x_0|\sqrt{\frac{k}{m_A+m_B}}$。随后，物体 A 继续向前运动，达到最远处 x_m 是其动能完全转换为弹性势能，即有 $\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}m_A v^2$。于是，物体 A 距离起点最大距离为 $(|x_0| + x_m)$。

习题 5.4 如图 15所示，半径为 R 的大圆环固定地挂于顶点 A，质量为 m 的小环套于其上，通过一劲度系数为 k、自然长度为 l（$l < 2R$）的弹簧系于 A 点。分析在不同参数下这装置平衡点的稳定性，并作出相应的势能曲线。

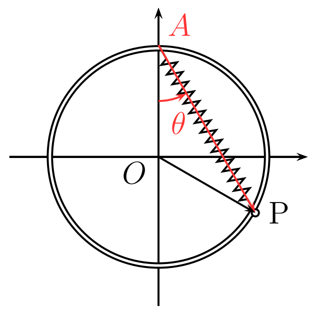

图 15: 习题5.4

解：如图 15所示，P 表示 t 时刻小环所在位置，对应角度 θ。此时弹簧长度 $l(\theta) = 2R\cos\theta$（其中 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$），形变量为 $\Delta l = |l(\theta) - l|$。从而有弹性势能与重力势能之和（大圆环对小环的作用力不做功）：

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 - mgl(\theta)\cos\theta \qquad (5.7) \\ &= 2R((kR - mg)\cos^2\theta - kl\cos\theta) + \frac{1}{2}kl^2 \end{aligned}$$

其中 A 处为弹性势能和重力势能的共同的势能零点。由(5.7)可得 $V(\theta)$ 关于 θ 的一阶导数：

$$V'(\theta) = 2R\sin\theta\,[kl - 2(kR - mg)\cos\theta] \qquad (5.8)$$

和二阶导数：

$$V''(\theta) = 2R[kl\cos\theta - 2(kR - mg)\cos 2\theta] \qquad (5.9)$$

当 $V'(\theta) = 0$，有极值点 $\theta_0 = 0$ 和 $\theta_\pm = \pm\arccos\frac{kl}{2(kR-mg)}$；注意极值点 $\theta_\pm$ 只有当 $\frac{kl}{2(kR-mg)} \leq 1$ 才成立。分别计算 $V''(\theta_0)$ 和 $V''(\theta_\pm)$，结果可整理如下：

* 当 $mg \geq kR - kl/2$ 时，只有一个稳定平衡点 $\theta_0 = 0$；
* 当 $mg < kR - kl/2$ 时，有：稳定平衡点 $\theta_\pm = \pm\arccos\left(\frac{kl}{2(kR-mg)}\right)$ 和不稳定平衡点 $\theta_0 = 0$。

6 第六次作业

习题 6.1 对保守力场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=(x-1)\boldsymbol{i}+(y-2)\boldsymbol{j}$，求其势能函数 $V(\boldsymbol{r})$，并给出势能零点的位置。

解：设 γ 为由 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}$ 的任一路径：$\gamma=\{\boldsymbol{r}'(t)|\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'(t_2),\,\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}'(t_1),\,t_1\le t\le t_2\}$，其中 $\boldsymbol{r}'$ 为关于 t 的连续（矢量）函数。由势能定义可知

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0)-\int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' \\
&= V(\boldsymbol{r}_0)-\int_{t_1}^{t_2}(x'(t)-1)dx'(t)+(y'(t)-2)dy'(t) \\
&= V(\boldsymbol{r}_0)-\left[\frac{(x'(t)-1)^2+(y'(t)-2)^2}{2}\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= V(\boldsymbol{r}_0)+\left[\frac{(x'(t_1)-1)^2+(y'(t_1)-2)^2}{2}\right]-\left[\frac{(x'(t_2)-1)^2+(y'(t_2)-2)^2}{2}\right] \\
&= V(\boldsymbol{r}_0)+\left[\frac{(x_0-1)^2+(y_0-2)^2}{2}\right]-\left[\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{2}\right] \\
&\xrightarrow[\boldsymbol{r}_0=(1,2)]{V(\boldsymbol{r}_0)=0} -\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{2}
\end{aligned}
$$

其中 $(1,2)$ 为势能零点。一旦熟悉概念及符号，上述计算过程也可表示为

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0)-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(x'-1)dx'+(y'-2)dy' \\
&= V(\boldsymbol{r}_0)-\left[\frac{(x'-1)^2+(y'-2)^2}{2}\right]_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \\
&= V(\boldsymbol{r}_0)+\left[\frac{(x_0-1)^2+(y_0-2)^2}{2}\right]-\left[\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{2}\right] \\
&\xrightarrow[\boldsymbol{r}_0=(1,2)]{V(\boldsymbol{r}_0)=0} -\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{2}
\end{aligned}
$$

习题 6.2 一质点在保守力场中沿 x 轴（在 $x>0$ 范围内）运动，其势能为 $V(x)=kx/(x^2+a^2)$，其中 k、a 均为大于零的常数。试求（1）质点所受到的力的表示式；（2）质点的平衡位置。

解：由 $F(x)=-\frac{dV(x)}{dx}$ 可得

$$F(x)=\frac{k(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^2}$$

由 $F(x)=0$ 及 $x>0$ 可知平衡位置 $x_0=a$。

习题 6.3 一质量为 m 的质点在保守力场中沿 x 轴（在 $x>0$ 范围内）运动，其势能为 $V(x)=A/x^3-B/x$，其中 A、B 均为大于零的常数。（1）找出质点运动中受到沿 x 负方向最大力的位置；（2）若质点的总能量 $E=0$, 试确定质点的运动范围。

解：分别计算 $F(x)$ 及其一阶导数

$$F(x) = \frac{3A}{x^4} - \frac{B}{x^2}$$
$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{12A}{x^5} + \frac{2B}{x^3}$$

由 $F'(x) = 0$ 及 $x > 0$，可知极值位置 $x_m = \sqrt{\frac{6A}{B}}$，在 x_m 处的力 $F(x_m) = -\frac{B^2}{12A}$。下面我们要分析 x_m 是否就是沿 x 负方向最大力的位置——仅根据极值无法判断其是否是最大值，由 $F(x) = 0$ 可知平衡位置 $x_0 = \sqrt{\frac{3A}{B}}$，当 $x \leq x_0$ 时 $F(x) \geq 0$，而当 $x \geq x_0$ 时 $F(x) \leq 0$。因为 $x_m \in (x_0, +\infty)$，并且 $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$，所以 x_m 是沿 x 负方向最大力的位置。

由 $V(x) = 0$，可解得 $x = \sqrt{\frac{A}{B}}$，并注意到 $\lim\limits_{x \to +\infty} V(x) = 0$，所以质点的运动范围为 $[\sqrt{\frac{A}{B}}, +\infty)$。

习题 6.4 一质量为 m 的质点在半径为 R 的竖直圆轨道内运动，设没有摩擦力，当质点在最低点时，其速率为 v_0，如图 16所示。（1）v_0 的最小值 v_{min} 为多大时，质点还能沿着圆形轨道运动而不脱离轨道？（2）假定 $v_0 = 0.775 v_{min}$，则质点将在某点 P 处脱离轨道而沿图 16中虚线所示的路径运动，试求 P 的角位置 θ。

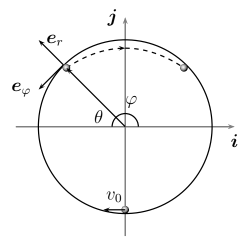

图 16: 习题6.4

解：（1）质点受到重力 $\boldsymbol{G} = -mg\boldsymbol{j}$ 和轨道的法向支持力 $\boldsymbol{N} = -f\boldsymbol{e}_r$（没有摩擦力），由牛顿定律可知

$$-ma_n\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{N} + (\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r \quad \Rightarrow \quad f = ma_n - mg\sin\varphi \tag{6.1}$$

因为轨道是半径为 R 的圆，所以

$$a_n = \frac{v^2}{R} \tag{6.2}$$

由于支持力 $\boldsymbol{N}$ 不做功，而重力为保守力，故有机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin\varphi = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \tag{6.3}$$

结合(6.1)、(6.2)和(6.3)，可得：

$$f = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2 + 3\sin\varphi) \tag{6.4}$$

“不脱离轨道”意味着不论质点处于轨道哪个位置始终有 $f \geq 0$，故有

$$\frac{mv_0^2}{R} \geq mg(2 + 3\sin\varphi) \quad \forall\varphi \in [0, 2\pi) \tag{6.5}$$

当 $\varphi = \pi/2$（最高位置）时，式(6.3)中不等号右端为 $5mg$，因此 $v_{min} = \sqrt{5Rg}$。

（2）当 $v_0 = 0.775 v_{min}$ 时，由 $f = 0$ 可得

$$\sin\varphi = \frac{0.775^2 \times 5 - 2}{3} = 0.334375 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi - \arcsin(0.334375) \tag{6.6}$$

即角位置 $\theta = \arcsin(0.334375)$。

7 第七次作业

习题 7.1 图 17中 O 为中心力场的力心，排斥力与距离平方成反比：$f = k/r^2$（k 为常量）。1. 求此力场的势能；2. 一质量为 m 的粒子以速度 v_0、瞄准距离 b 从远处入射，求它能达到的最近距离 d 和此时刻的速率。(P.202:Prob.4-11)

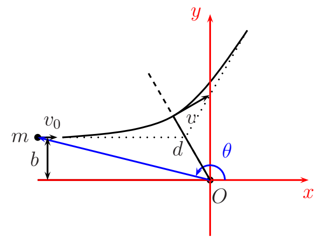

图 17: 题7.1

解：以下的推导略显冗长，为的是展示相关知识点和数学处理的细节；一旦对过程熟悉了，过程的表达显然可以简化。

首先，我们将展示中心力为保守力——即功不依赖于路径，仅依赖于起点和终点。为此，设 $\boldsymbol{c}(\tau)$ 为连接起点 $\boldsymbol{r}_0$ 和终点 $\boldsymbol{r}$ 的任意一条路径，即 $\boldsymbol{c}(\tau)$ 为 τ 的连续矢量函数——不同的函数形式意味着不同的路径，并满足 $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{c}(0)$ 和 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}(t)$，其中 $0 \le \tau \le t$。当质点由起点 $\boldsymbol{r}_0$ 沿路径 $\boldsymbol{c}(\tau)$ 运动到终点 $\boldsymbol{r}$ 时，力做的功 W 为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(\tau)) \cdot d\boldsymbol{c}(\tau) = \int_0^t \frac{k}{c^2(\tau)} \frac{\boldsymbol{c}(\tau) \cdot d\boldsymbol{c}(\tau)}{c(\tau)} \\ &= \int_0^t \frac{k}{c^2(\tau)} dc(\tau) = -\left[\frac{k}{c(t)} - \frac{k}{c(0)}\right] = -\left[\frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}\right] \end{aligned} \tag{7.1}$$

排斥力表示力与位矢同向—$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$—使得粒子远离力心；吸引力正相反，有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$。

式(7.1)表明，W 只依赖于路径 $\boldsymbol{c}(\tau)$ 所连接的起点与终点，而与中间过程无关——即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 为保守力。于是，定义关于空间位置 $\boldsymbol{r}$ 的函数 $V(\boldsymbol{r})$，使其满足对任意两个位置 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 有

$$V(\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r}_0) = -W \quad \text{or} \quad V(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}_0) - W \tag{7.2}$$

成立。当 $\boldsymbol{r}_0$ 固定，并且 $V(\boldsymbol{r}_0)$ 取值给定，则等式 (7.2)视作 $V(\boldsymbol{r})$——即势能——的定义式。因为力学关注的是物体的运动而不是静止——其实静止只是相对的，所以力学上用到的是势能差 $\Delta V = V(\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r}_0)$ 而不是 $V(\boldsymbol{r})$——也就是势能差 ΔV 才有物理意义；如果让 $V(\boldsymbol{r}_0) = 0$——即选取 $\boldsymbol{r}_0$ 为势能零点，那么 $V(\boldsymbol{r})(=\Delta V)$ 此时就具有了与势能差 ΔV 相同的物理意义。

此处关于势能的物理意义的讨论，可与位矢的物理意义比较；其实，位矢是指位移——即质点相对于参考点 O 的“位置差”，在没指定参考点 O 时它不能用来确定质点的空间位置——即没有物理意义。

当选定 $\boldsymbol{r}_0$ 为势能零点时，在此例子中有 $V(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}\right)$；为了让势能的函数形式简化，我们选取无穷远处为势能零点——即 $r_0 = \infty$，于是

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{r}$$

此式表明 $V(\boldsymbol{r})$ 仅依赖于 r——对所有的中心力场，其势能都只依赖于 r，故又常记为 $V(r)$。

在中心力场中运动的粒子的角动量守恒，从而有粒子的运动轨迹落在过力心并与角动量垂直的平面上；利用这一结论，我们建立如 图 17所示的坐标系——以与粒子的角动量平行的方向为 $\boldsymbol{e}_z$ 方向（垂直纸面指向外），以初始时的位矢和速度所在平面为 x-y 平面——可使问题的处理得以简化。粒子的初始位置为 $\boldsymbol{r}(0) = x_0\boldsymbol{e}_x + b\boldsymbol{e}_y$（其中 $x_0 \approx -\infty$），初始速度为 $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_x$，于是有角动量

$$\boldsymbol{J}(0) = \boldsymbol{r}(0) \times \boldsymbol{p}(0) = (x_0\boldsymbol{e}_x + b\boldsymbol{e}_y) \times (mv_0\boldsymbol{e}_x) = -mbv_0\boldsymbol{e}_z$$

和机械能

$$E(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

设 t 时刻，粒子的位矢为$\boldsymbol{r}(t)=r\boldsymbol{e}_r$，其速度则 $\boldsymbol{v}(t)=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$。由角动量守恒定律，得

对中心力场，通常采用极（球）坐标系；此处 r 直接表示粒子与力心 O 之间的距离，这正是第二小问关注的量。

$$\boldsymbol{J}(t)=r\boldsymbol{e}_r\times m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)=mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{J}(0)\quad\Rightarrow\quad r\dot{\theta}=-bv_0/r \tag{7.3}$$

由机械能守恒定律，得

$$E(t)=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{k}{r}=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{7.4}$$

将(7.3)代入(7.4)，可得：

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\left[\frac{mb^2v_0^2}{2r^2}+\frac{k}{r}\right]=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V_e(r)=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{7.5}$$

显然有效势 $V_e(r)$ 是关于 $r(>0)$ 的单调递减函数，当 $\dot{r}=0$ 时有 $V_e(r)$ 达到最大——即 r 达到最小。于是

$$V_e(d)=\frac{1}{2}mv_0^2\quad\Rightarrow\quad d=\frac{k+\sqrt{k^2+b^2m^2v_0^4}}{mv_0^2} \tag{7.6}$$

此时粒子的速率

$$v=|\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta|=|r\dot{\theta}|=bv_0/d \tag{7.7}$$

上式第三个等号由方程(7.3)和(7.6)可得。

习题 7.2 质量为 m 的两小球系于一弹簧的两端，弹簧处于自然状态时，长为 a，弹性系数为 k。现两球同时受冲力作用，获得与连线垂直的等值反向的初速度，若在以后运动过程中弹簧的最大长度 $b=2a$，求两球的初速率 v_0（不计重力）。

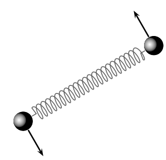

图 18: 题7.2

解：我们将运用矢量分析——不必建立特定的坐标系——以求得结果。同样地，在推导过程中对涉及到的知识点，会驻留片刻作适度的介绍——至于我嘛，就是这道题目的导游。

这两小球——不妨称作球 1 和球 2——构成了质点系，彼此间的弹力作用为内力。由于无外力作用，系统的（总）动量守恒；鉴于两小球初始速度大小相等方向相反，于是

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{p}_1(t)+\boldsymbol{p}_2(t)=m(\boldsymbol{v}_1(t)+\boldsymbol{v}_2(t))=\boldsymbol{0} \tag{7.8}$$

因为力学关注的是物体的运动过程，而彼此相对静止的观测者对动力学量（如速度和加速度）的观测结果是一样的，所以我们说他（她）们所处的是同一个参考系——换句话说，一个参考系其实有众多观测者——尽管质点的位置所对应的位矢对同一个参考系中的不同的观测者是不一样的。

由(7.8)可知，其质心——两球连线的中点——是静止的，即静止参考系就是质心系或零动量系。如要建立坐标系，可以选质心为原点，那么位矢满足：$\boldsymbol{r}_1(t)=-\boldsymbol{r}_2(t)$。好了，我们去下个景点——机械能守恒定律。

为了后面的数学处理，我们引入辅助量 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$；因为只有内力——弹簧的作用力——做功，所以系统的势能为弹性势能 $\frac{1}{2}kx^2$——此处的形变量 $x=(r-a)$。机械能守恒定律到了

$$\begin{aligned}E(t)&=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_1^2+\boldsymbol{v}_2^2)+\frac{1}{2}k(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|-a)^2 \qquad (7.9)\\&=m\boldsymbol{v}^2+\frac{1}{2}k(r-a)^2\\&=m(\boldsymbol{v}_\perp+\boldsymbol{v}_\parallel)^2+\frac{1}{2}k(r-a)^2\\&=m(v_\perp^2+v_\parallel^2)+\frac{1}{2}k(r-a)^2\\&=E(0)=mv_0^2\end{aligned}$$

式(7.9)中 $\boldsymbol{v}_\perp$ 和 $\boldsymbol{v}_\parallel$ 为 $\boldsymbol{v}$ 沿与 $\boldsymbol{r}$ 垂直和平行方向的投影矢量。如果选取球 2 为参考点，则 $\boldsymbol{r}$ 和 $2\boldsymbol{v}$ 为球 1 的位矢和速度；显然地，$2\boldsymbol{v}_\perp$ 和 $2\boldsymbol{v}_\parallel$ 决定了 $\boldsymbol{r}$ 的方向和长度的变化[1]。而角动量与 $\boldsymbol{r}$ 的方向的旋转有关，所以我们得去一下大转盘——角动量守恒定律：

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{J}(t)| &= |\boldsymbol{r}_1 \times m\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times m\boldsymbol{v}_2| = |(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times m\boldsymbol{v}| \\ &= |m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| = |m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\perp| = mrv_\perp = mav_0\end{aligned} \tag{7.10}$$

将(7.10)带入(7.9)，可得：

$$\frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \left[\frac{ma^2v_0^2}{2r^2} + \frac{k(r-a)^2}{4}\right] = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{7.11}$$

利用 $v_\parallel = \dot{r}/2$，方程(7.11)可改写为

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{2ma^2v_0^2}{r^2} + k(r-a)^2\right] = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_e(r) = 2mv_0^2 \tag{7.12}$$

方程(7.11)和(7.12)之所以表达成这样的形式，我是故意地！关于有效势 $V_e(r)$ 的函数行为，显然有 $\boxed{\lim\limits_{r\to 0} V_e(r) = +\infty}$ 和 $\boxed{\lim\limits_{r\to +\infty} V_e(r) = +\infty}$。由题意，我们可粗略地知道当 $\dot{r} = 0$ 时 r 到达最大，即有

$$V_e(2a) = 2mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = a\sqrt{\frac{2k}{3m}} \tag{7.13}$$

但是，喜欢钻牛角尖的同学会问有没有可能题目错了。因为初始时速度是垂直于两球连线的——即有 $\dot{r}(0) = 0$，那么小球间的距离是不会变的——或者 r 为何会增大，仅仅围绕质心做圆周运动呢？这个问题大家先思考下，我累了，先休息一会儿，不要着急。

[1]由 $r\frac{dr}{dt} = \boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}\cdot 2\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_\parallel$，可得 $\frac{dr}{dt} = \frac{2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_\parallel}{r}$ 或 $\left|\frac{dr}{dt}\right| = 2v_\parallel$

8 第八次作业

习题 8 .1 一细杆两端装有质量相同的质点 A 和 B，可绕水平轴 O 自由摆动，已知参量如 图 19所示。求小幅摆动的周期和等值摆长。(P.203:Prob.4-26)

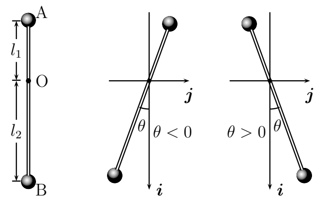

图 19: 习题8 .1

解法一：如图 19所示，系统沿水平轴 O 的角动量为 $\boldsymbol{J}_z = I\omega\boldsymbol{k} = m(l_1^2 + l_2^2)\omega\boldsymbol{k}$，沿水平轴 O 的重力力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_z &= \boldsymbol{r}_A \times (mg\boldsymbol{i}) + \boldsymbol{r}_B \times (mg\boldsymbol{i}) \\ &= (\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B) \times (mg\boldsymbol{i}) \\ &= (l_2 - l_1)\frac{\boldsymbol{r}_B}{r_B} \times (mg\boldsymbol{i}) \\ &= -(l_2 - l_1)mg\sin\theta\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由角动量定理 $\frac{d\boldsymbol{J}_z}{dt} = \boldsymbol{M}_z$ 和 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 可知

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(l_2 - l_1)mg\sin\theta \tag{8 .1}$$

由于是小幅摆动，故有 $\sin\theta \approx \theta$；于是方程 (8 .1)可近似为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_a^2\theta = 0, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{(l_2 - l_1)mg}{I}} = \sqrt{\frac{(l_2 - l_1)g}{l_1^2 + l_2^2}} \tag{8 .2}$$

因此 $T = \frac{2\pi}{\omega_a} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1^2+l_2^2}{(l_2-l_1)g}}$；由单摆的角频率公式 $\omega_{\text{单摆}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 和 w_a 可知，等值摆长 $l = \frac{l_1^2+l_2^2}{(l_2-l_1)}$。

解法二：系统的总动能为

$$\begin{aligned}E_k &= \frac{1}{2}m(\omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}_A)^2 + \frac{1}{2}m(\omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}_B)^2 \\ &= \frac{1}{2}m(l_1^2 + l_2^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2\end{aligned}$$

以 O 处为重力势能零点并应用简谐近似，则系统的重力势能为

$$\begin{aligned}E_p &= -mgx_A - mgx_B = -mg(x_A + x_B) \\ &= -mg(-l_1\cos\theta + l_2\cos\theta) = -mg(l_2 - l_1)\cos\theta \\ &\approx -mg(l_2 - l_1)(1 - \frac{1}{2}\theta^2)\end{aligned}$$

注意，按图 19所示的坐标系，重力势能函数为 $-mgx$。

由机械能守恒定律可知：

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - mg(l_2 - l_1)(1 - \frac{1}{2}\theta^2) = \text{Const.} \tag{8 .3}$$

方程(8 .3)两端对时间求导则可得方程(8 .2)，余下步骤相同。

习题 8.2 如图 20所示，复摆周期原为 $T_1 = 0.5s$，在 O 轴下 $l = 10cm$ 处（联线过质心 C）加质量 $m = 50g$ 后，周期变为 $T_2 = 0.6s$。求复摆对 O 轴原来的转动惯量。(P.203:Prob.4-27)

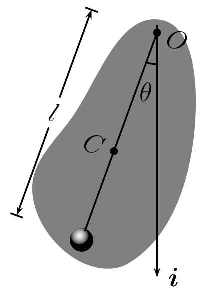

图 20: 习题8 .2

解法一：如图 20所示，复摆沿 O 轴的角动量 $\boldsymbol{J}_z = I\omega\boldsymbol{k}$，沿 O 轴的重力力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_z &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (\Delta m_i g\boldsymbol{i}) = \left(\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i\right) \times g\boldsymbol{i} \\ &= M\boldsymbol{r}_c \times g\boldsymbol{i} = -Mgr_c \sin\theta\boldsymbol{k} \approx -Mgr_c\theta\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

其中 M 为复摆的总质量，位矢 $\boldsymbol{r}_c$ 为其质心所在位置，θ 为 $\boldsymbol{r}_c$ 与 $\boldsymbol{i}$ 之间的夹角，最后一步利用了 $\theta \approx 0$。由角动量定律 $\frac{d\boldsymbol{J}_z}{dt} = \boldsymbol{M}_z$ 可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgr_c}{I}\right)\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr_c}} \tag{8 .4}$$

当加质量 m 后，系统的总角动量为 $\boldsymbol{J}'_z = (I + ml^2)\omega\boldsymbol{k}$，重力力矩为

$$\boldsymbol{M}'_z = \boldsymbol{M}_z + \boldsymbol{r}_m \times mg\boldsymbol{i} = \boldsymbol{M}_z - mgl\sin\theta\boldsymbol{k} \approx -(Mgr_c + mgl)\theta\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{r}_m$ 为 m 所对应的位矢，第二个等号利用了 $\boldsymbol{r}_c$ 和 $\boldsymbol{r}_m$ 共线。同理可得

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I + ml^2}{Mgr_c + mlg}} \tag{8 .5}$$

方程(8 .4)和(8 .5)只含有两个未知量 I 和 Mgr_c，由此可解得 I。

解法二：复摆的动能为 $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$，重力势能为 $U_G = -Mgr_c\cos\theta$，根据机械能守恒定律可知

$$\frac{d(E_k + U_G)}{dt} = 0 \quad \xrightarrow[\sin\theta\approx\theta]{\frac{d\theta}{dt}\neq 0} \quad I\frac{d^2\theta}{dt} + Mgr_c\theta = 0 \tag{8 .6}$$

当加质量 m 后，系统的动能变为 $E'_k = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}ml^2(\frac{d\theta}{dt})^2$，重力势能为 $U_G = -(Mgr_c + mgl)\cos\theta$，同理可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgr_c + mgl}{I + ml^2}\right)\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I + ml^2}{Mgr_c + mlg}} \tag{8 .7}$$

由方程(8 .6)和(8 .6)可解得 I。

9 第九次作业

习题 9.1 如图 22所示，劲度系数为 k_1 和 k_2 的两个弹簧与质量为 m 的物体组成一个振动系统。求系统振动的固有角频率。(P.309:Prob.6-6)

解：建立如图 22所示的坐标系，设 x_1^e 和 x_2^e 分别为弹簧 1 和 2 处于原长时物体所在位置。由牛顿第二定律可得

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -k_1(x(t)-x_1^e) - k_2(x(t)-x_2^e) \\ &= -(k_1+k_2)x(t) + (k_1x_1^e + k_2x_2^e) \end{aligned} \tag{9.1}$$

记 $k = k_1 + k_2$ 和 $x_0 = (k_1x_1^e + k_2x_2^e)/k$，并作坐标变换 $y = x - x_0$；由方程 (10.1)转换为

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{9.2}$$

方程(10.2)表明物体围绕平衡位置 x_0 以固有角频率 ω 做简谐振动。

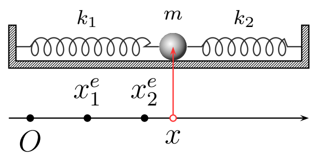

图 21: 习题10.1

10　第十次作业

习题 10.1 如图 22所示，劲度系数为 k_1 和 k_2 的两个弹簧与质量为 m 的物体组成一个振动系统。求系统振动的固有角频率。(P.309:Prob.6-6)

解：建立如图 22所示的坐标系，设 x_1^e 和 x_2^e 分别为弹簧 1 和 2 处于原长时物体所在位置。由牛顿第二定律可得

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -k_1(x(t)-x_1^e) - k_2(x(t)-x_2^e) \\ &= -(k_1+k_2)x(t) + (k_1x_1^e + k_2x_2^e) \end{aligned} \tag{10.1}$$

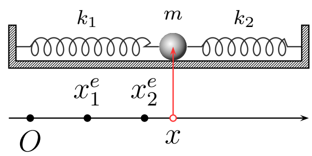

图 22: 习题10 .1

记 $k = k_1 + k_2$ 和 $x_0 = (k_1x_1^e + k_2x_2^e)/k$，并作坐标变换 $y = x - x_0$；由方程 (10 .1)转换为

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{10.2}$$

方程(10 .2)表明物体围绕平衡位置 x_0 以固有角频率 ω 做简谐振动。

11 第十一次作业

习题 11 .1 在惯性系 K 中观察到两事件同时发生，空间距离相隔 $1m$。惯性系 K' 沿两事件联线的方向相对于 K 运动，在 K' 系中观测到两事件之间的距离为 $3m$。求 K' 系相对于 K 系的速度和在其中测得两事件之间的时间间隔。(P.415:Prob.8-4)

解：以与两事件联线的共线为 x 轴，记 K' 系相对于 K 系的运动速度为 v，并设两事件的时空间隔在 K 系和 K' 系分别为 Δx、Δt 和 Δx、$\Delta t'$。由题意可知 $\Delta x = 1m$、$\Delta t = 0$ 和 $\Delta x' = 3m$，则由 Lorentz 变换可知：

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{8}}{3}c$$

和

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{\sqrt{8}m}{c} \approx -0.94 \times 10^{-8}s.$$

习题 11 .2 斜放的直尺以速度 V 相对于惯性系 K 沿 x 方向运动，它的固有长度为 l_0，在与之共动的惯性系 K' 中它与 x' 轴的夹角为 θ'。试证明：对于 K 系的观察者来说，其长度 l 和与 x 轴的夹角 θ 分别为 (P.415:Prob.8-6)

$$l = l_0\sqrt{\left(\cos\theta'\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)^2 + \sin^2\theta'}, \quad \tan\theta = \frac{\tan\theta'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

解：由题意可知，K 系的观察者测得长度为运动长度，为此观察者得在直尺两端制造两个同时事件，记它们的时空间隔为 Δx、Δy 和 Δt，其中 $\Delta t = 0$；在 K' 系，该事件的空间间隔 $\Delta x' = l_0\cos\theta'$ 和 $\Delta y' = l_0\sin\theta'$。由 Lorentz 变换可知 $\Delta y' = \Delta y$ 和

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \Delta x'\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

由此可知

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\cos\theta'\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)^2 + \sin^2\theta'}$$

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\tan\theta'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

习题 11 .3 惯性系 K' 相对于惯性系 K 以速度 V 沿 x 方向运动，在 K' 系观测，一质点的速度矢量 $\boldsymbol{v}'$ 在 $x'y'$ 面内与 x' 轴成 θ' 角。试证明：对于 K 系，质点速度与 x 轴的夹角为 (P.415:Prob.8-7)

$$\tan\theta = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{V + v'\cos\theta'}$$

解：由题意可知 $v'_x = v'\cos\theta'$ 和 $v'_y = v'\sin\theta'$，由速度（逆）变换公式可知

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2}$$

由此可证得

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v'\cos\theta'}$$

习题 11.4 两宇宙飞船相对于某遥远的恒星以 $0.8c$ 的速率朝相反的方向离开。试求两飞船的相对速度。(P.415:Prob.8-9)

解：以恒星为 K 系，其中一艘飞船为 K' 系，并取其飞行方向为 x 轴的方向，于是 K' 系相对于 K 系的速度为 $u = 0.8c$；对于 K 系的观察者而言，另一艘飞船的速度则为 $v = -0.8c$。求两飞船的相对速度，即求在 K' 系中测得另一艘飞船的速度 v'。由速度变换公式可得

$$v' = \frac{v-u}{1-uv/c^2} = \frac{-0.8c-0.8c}{1+0.64} = -\frac{1.6c}{1.64}$$