习题 3 .6 如图 15所示，用细线将一质量为 m 的大圆环悬挂起来。两个质量均为 M 的小圆环套在大圆环上，可以无摩擦地滑动。若两小圆环沿相反方向从大圆环顶部自静止下滑，求在下滑过程中，θ 角取什么值时大圆环刚能升起。(P.146:Prob.3-6)

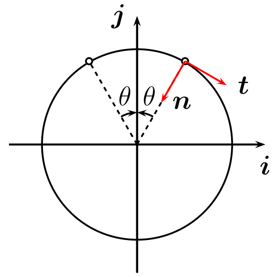

图 15: 习题3 .6

解：因为两小环下滑过程具有左右对称性，所以只考虑右边小环的下滑过程。在起始阶段，小环沿着大环运动，故有（曲率公式）：

$$a_n = |\boldsymbol{a}_n| = \frac{v^2}{R} \tag{3 .7}$$

其中 R 为大环的半径，v 为小环的速率。设 $\boldsymbol{F}_n = f_n\boldsymbol{n}$ 为大环对小环的约束力，其中 $\boldsymbol{n}$ 为单位矢量（图 15）。由牛顿第二定律 $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_n$ 可得沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的运动方程：

$$Ma_n = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n} + f_n \quad \Rightarrow \quad f_n = \frac{Mv^2}{R} - Mg\cos\theta \tag{3 .8}$$

由机械能守恒定律（约束力不做功，选取最高处为重力势能零点）：

$$\frac{1}{2}Mv^2 + MgR(\cos\theta - 1) = 0$$

可以将(3 .8)表示为：$f_n = Mg(2-3\cos\theta)$，由牛顿第三定律可知小环对大环的作用力为 $(-\boldsymbol{F}_n)$，因此当其沿竖直方向的分量满足 $(-2f_n\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{j} = mg$ 时（其中 2 考虑到左边的小环），那么大环将被抬起，即：

$$2Mg(2-3\cos\theta)\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad \theta_\pm = \arccos\left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{3m}{2M}}\right)$$

因为 $\theta_+ < \theta_-$，所以当下滑到角度 θ_+ 时大环刚能升起。不过，前提条件是 $2M > 3m$。

习题 3 .7 如图 16所示，半径为 R 的大圆环固定地挂于顶点 A，质量为 m 的小环套于其上，通过一劲度系数为 k、自然长度为 l（$l < 2R$）的弹簧系于 A 点。分析在不同参数下这装置平衡点的稳定性，并作出相应的势能曲线。(P.150:Prob.3-29)

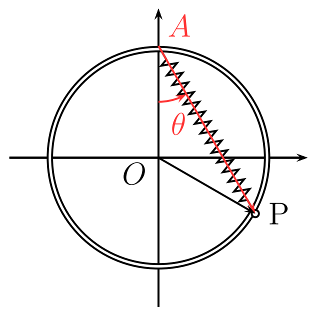

图 16: 习题3 .7

解：如图 16所示，P 表示 t 时刻小环所在位置，对应角度 θ。此时弹簧长度 $l(\theta) = 2R\cos\theta$（其中 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$），形变量为 $\Delta l = |l(\theta) - l|$。总势能为弹性势能与重力势能之和（大圆环对小环的约束力不做功）：

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 - mgl(\theta)\cos\theta \\ &= 2R((kR-mg)\cos^2\theta - kl\cos\theta) + \frac{1}{2}kl^2 \end{aligned} \tag{3 .9}$$

其中 A 处为弹性势能和重力势能的共同的势能零点。由(3 .9)可得 $V(\theta)$ 关于 θ 的一阶和二阶导数：

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= 2R\sin\theta\,[kl - 2(kR-mg)\cos\theta] \\ V''(\theta) &= 2R[kl\cos\theta - 2(kR-mg)\cos 2\theta] \end{aligned}$$

当 $V'(\theta) = 0$，有极值点 $\theta_0 = 0$ 和 $\theta_\pm = \pm\arccos\frac{kl}{2(kR-mg)}$；注意极值点 $\theta_\pm$ 只有当 $\frac{kl}{2(kR-mg)} \le 1$ 才成立。分别计算 $V''(\theta_0)$ 和 $V''(\theta_\pm)$，结果可整理如下：

- $*$ 当 $mg \geq kR - kl/2$ 时，只有一个稳定平衡点 $\theta_0 = 0$；
- $*$ 当 $mg < kR - kl/2$ 时，有稳定平衡点 $\theta_{\pm} = \pm \arccos\left(\frac{kl}{2(kR-mg)}\right)$ 和不稳定平衡点 $\theta_0 = 0$。

习题 3 .8 如图 17所示，劲度系数为 k_1 和 k_2 的两个弹簧与质量为 m 的物体组成一个振动系统。求系统振动的固有角频率。(P.309:Prob.6-6)

解：建立如图 17所示的坐标系，设 x_1^e 和 x_2^e 分别为弹簧 1 和 2 处于原长时物体所在位置。由牛顿第二定律可得运动方程：

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1(x - x_1^e) - k_2(x - x_2^e) \\ &= -(k_1 + k_2)x + (k_1 x_1^e + k_2 x_2^e) \end{aligned} \tag{3 .10}$$

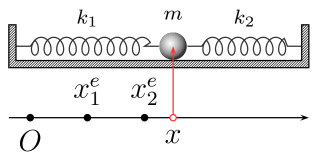

图 17: 习题3 .8

其中 $x = x(t)$；记 $k = k_1 + k_2$ 和 $x_0 = (k_1 x_1^e + k_2 x_2^e)/k$，并作坐标变换 $y = x - x_0$；方程(3 .10)可转换为

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{3 .11}$$

方程(3 .11)表明物体围绕平衡位置 x_0 以固有角频率 ω 做简谐振动。