

信道

- 数学模型
- 信道特性的影响
- 信道容量
- 第四章作业
- 第四章例题

信道

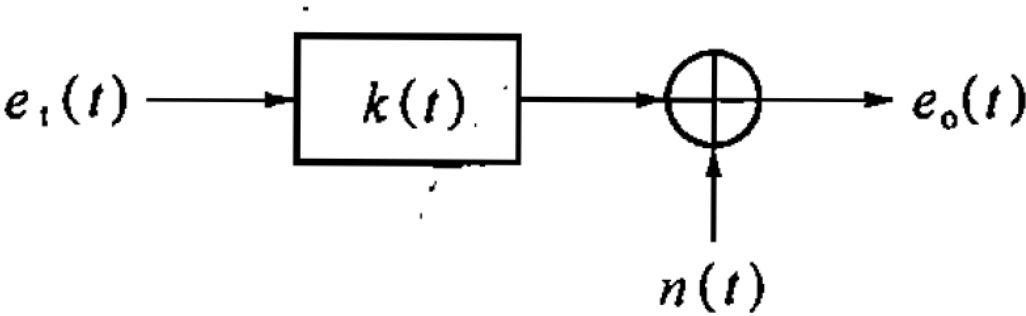
信道主要可以分为有线信道、无线信道，导光的媒质主要有光波导和光纤。

数学模型

- 信道模型主要可以分为：调制信道、编码信道
- 调制信道模型

$$E_o(t) = k(t)E_i(t) + n(t) \tag{1}$$

- 输入端电压和输出端电压的关系
- 其中n(t)为加性噪声、加性干扰，k(t)为乘性干扰
- 随时间变化的信道称为时变信道，根据特性是否随时间随机变化可以分为随参信道、恒参信道。
- 模型原理图如下

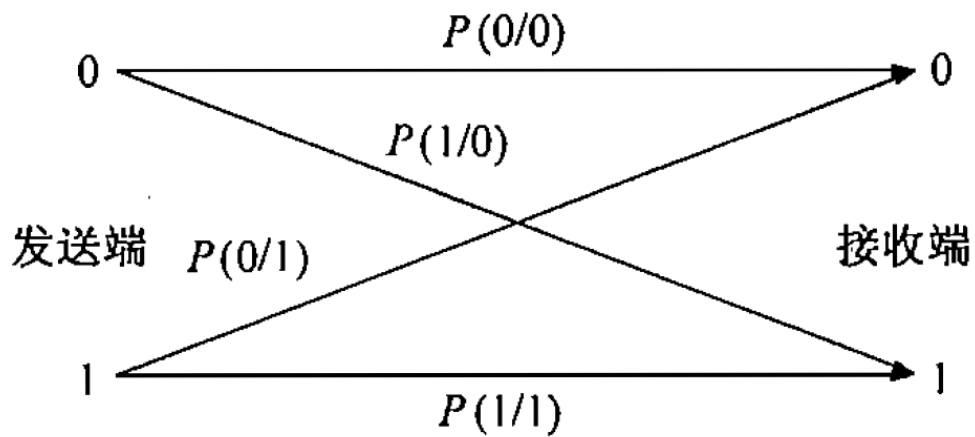


- 编码信道模型

$$P(0/0) = 1 - P(1/0) \tag{2}$$

$$P(1/1) = 1 - P(0/1)$$

- 利用错误概率来描述编码信道的特性 - - 转移概率

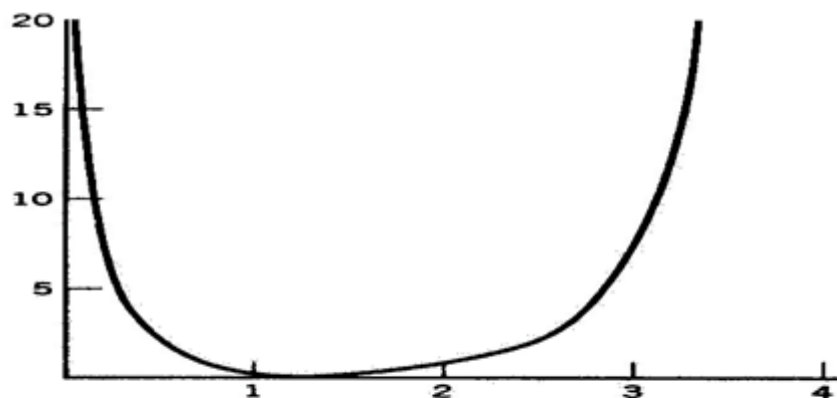


信道特性的影响

- 恒参信道的主要传输特性：幅-频特性、相-频特性

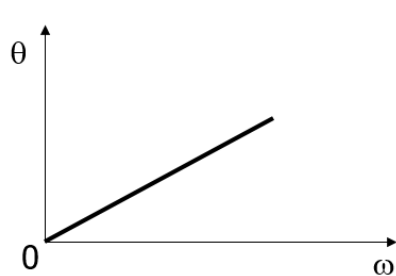
$$R(t) = X_c(t) \cos \omega_0 t - X_s(t) \sin \omega_0 t = V(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (3)$$

- $V(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)}$, 为接受信号的包络
- $\varphi(t) = \arctan \frac{X_s(t)}{X_c(t)}$, 为接受信号的相位
- 幅频特性不理想会导致频率失真

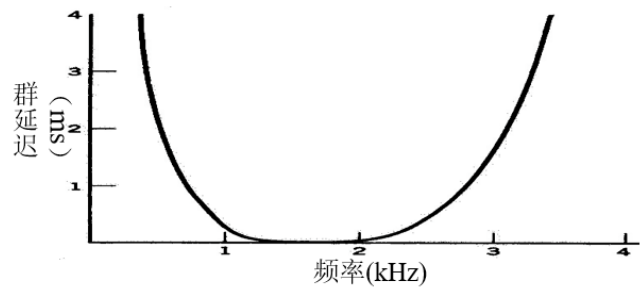


(a) 插入损耗~频率特性

- 相频特性
- 相频特性不理想会导致相位失真

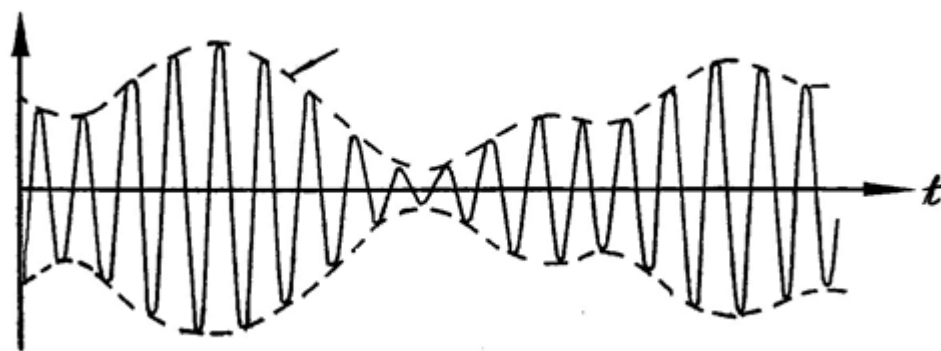


相位~频率特性

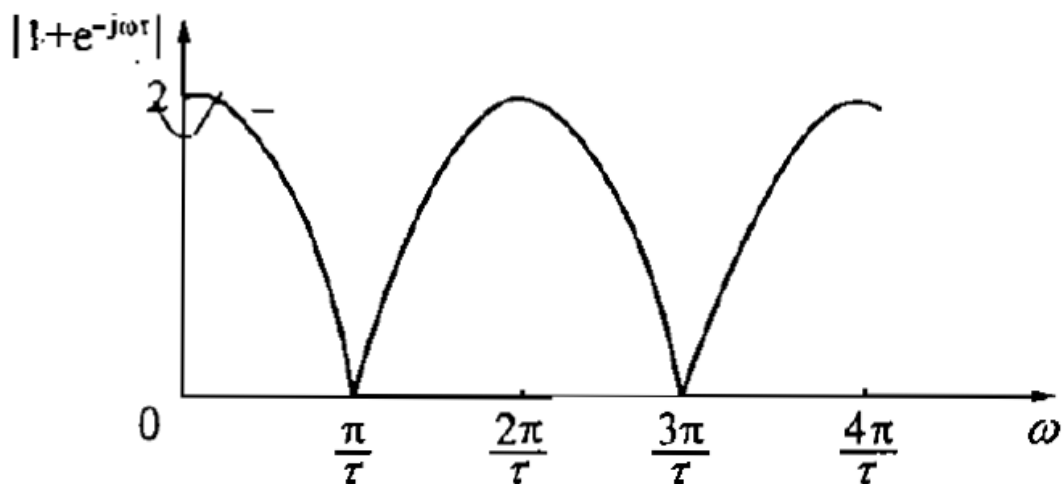


(b) 群延迟~频率特性

- 随参信道特性：信号传输衰减、传输时延、信号经过的路径、路径长度都随时间发生变化
 - 在以上特性下会发生多径传播，引发多径效应（快衰落、频率选择性衰落、频率弥散）。
 - 由多径引发的信号衰落，称为快衰落



- 衰落与频率变化有关，故称为频率选择性衰落



$$B_{\text{相关}} = \left(\frac{3\pi}{\tau} - \frac{\pi}{\tau} \right) \div 2\pi = \frac{1}{\tau} \quad (4)$$

$$B_{\text{信号}} = \left(\frac{1}{3} \sim \frac{1}{5} \right) B_{\text{相关}}$$

信道容量

- 离散信道容量

- 单位时间内传输的平均信息量最大值 C_t
- 考虑信道存在一些传输错误的概率，我们用 $H(x/y)$ 描述已知接收 y_j 后，发送符号 x_i 的平均信息量，单位：bit/符号

$$H(x/y) = - \sum_{j=1}^m P(y_j) \sum_{i=1}^n P(x_i/y_j) \log_2 P(x_i/y_j) \quad (5)$$

- 由此我们可以得到一个符号的平均信息量： $[H(x) - H(x/y)]$ ，由此可以得到每秒传输的平均信息量，其中最大的传输信息量，我们称为信道容量 C ，容量 C_t

$$C = \max_{P(x)} [H(x) - H(x/y)] \quad (b/\text{符号}) \quad (6)$$

$$C_t = \max_{P(x)} \{r[H(x) - H(x/y)]\} \quad (bit/s)$$

- 其中 r 为单位时间传输的符号数，与码元传输速率类似
- 连续信道容量[考试重点]
 - 对于带宽有限、平均功率有限的高斯白噪声连续信道，信道容量

$$C_t = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad (bit/s) \quad (7)$$

- 其中 B 为信道带宽、 S 为信号功率， N 为噪声功率
- 对于单边功率谱密度为 n_0 ，我们可以代入 $N = n_0 B$

第四章作业

4-5 某个信源由 A、B、C 和 D 等 4 个符号组成。设每个符号独立出现，其出现概率分别为 1/4、1/4、3/16、5/16，经过信道传输后，每个符号正确接收的概率为 1021/1024，错为其他符号的条件概率 $P(x_i/y_j)$ 均为 1/1024，试求出该信道的容量 C 等于多少 b/符号。

解 因信道噪声而损失的平均信息量为

$$\begin{aligned} H(x/y) &= - [P(x_1/y_1) \log_2 P(x_1/y_1) + P(x_2/y_1) \log_2 (x_2/y_1) + \\ &\quad P(x_3/y_1) \log_2 P(x_3/y_1) + P(x_4/y_1) \log_2 (x_4/y_1)] = \\ &= - \left[\frac{1021}{1024} \log_2 \left(\frac{1021}{1024} \right) + 3 \times \frac{1}{1024} \log_2 \left(\frac{1}{1024} \right) \right] = \\ &= - \left[\frac{1021}{1024} (-0.004) + 3 \times \left(\frac{1}{1024} \right) (-10) \right] = 0.033 \end{aligned}$$

信源发送的平均信息量(熵)为

$$\begin{aligned} H(x) &= - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) = - \left[\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{3}{16} \log_2 \frac{3}{16} + \frac{5}{16} \log_2 \frac{5}{16} \right] = \\ &= - [-0.5 - 0.5 - 0.45 - 0.53] = 1.98 \end{aligned}$$

所以

$$C = \max [H(x) - H(x/y)] = 1.98 - 0.033 = 1.947 \quad (b/\text{符号})$$

4-7 设一幅黑白数字像片有 400 万个像素,每个像素有 16 个亮度等级。若用 3kHz 带宽的信道传输它,且信号噪声功率比等于 10dB,试问需要传输多少时间?

解 由香农公式可得信道的最大信息速率(每秒内能够传输的平均信息量的最大值)为

$$C_t = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = 3000 \log_2 (1 + 10) =$$

$$3000 \log_2 11 = 3000 \log_2 10 \log_{10} 11 = 3000 \times 3.457 = 10.4 (\text{kb/s})$$

一张图片所含的信息量为

$$I = 4 \times 10^6 \times \log_2 16 = 16 \times 10^6 (\text{bit})$$

所以,需要的传输时间

$$t = I/C_t = (16 \times 10^6) / (10.4 \times 10^3) = 1.54 \times 10^3 (\text{s}) = 25.67 (\text{min})$$

第四章例题

- 【例4.6.1】设信源由两种符号“0”和“1”组成,符号传输速率为1000符号/秒,且这两种符号的出现概率相等,均等于1/2。信道为对称信道,其传输的符号错误概率为1/128。试画出此信道模型,并求此信道的容量 C 和 C_t 。

【解】此信道模型画出如下:

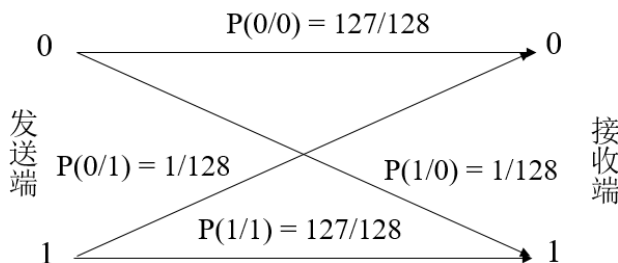


图4-23 对称信道模型

此信源的平均信息量 (熵) 等于:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) = -\left[\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \right] = 1 (\text{比特/符号})$$

而条件信息量可以写为

$$\begin{aligned} H(x/y) &= -\sum_{j=1}^m P(y_j) \sum_{i=1}^n P(x_i/y_j) \log_2 P(x_i/y_j) \\ &= -\{P(y_1)[P(x_1/y_1) \log_2 P(x_1/y_1) + P(x_2/y_1) \log_2 P(x_2/y_1)] \\ &\quad + P(y_2)[P(x_1/y_2) \log_2 P(x_1/y_2) + P(x_2/y_2) \log_2 P(x_2/y_2)]\} \end{aligned}$$

现在 $P(x_1/y_1) = P(x_2/y_2) = 127/128$,

$$P(x_1/y_2) = P(x_2/y_1) = 1/128,$$

并且考虑到 $P(y_1) + P(y_2) = 1$, 所以上式可以改写为



$$\begin{aligned}
 H(x/y) &= -[P(x_1/y_1)\log_2 P(x_1/y_1) + P(x_2/y_1)\log_2 P(x_2/y_1)] \\
 &= -[(127/128)\log_2(127/128) + (1/128)\log_2(1/128)] \\
 &= -[(127/128) \times 0.01 + (1/128) \times (-7)] \approx -[0.01 - 0.055] = 0.045
 \end{aligned}$$

平均信息量 / 符号 = $H(x) - H(x/y) = 1 - 0.045 = 0.955$
(比特 / 符号)

因传输错误每个符号损失的信息量为

$$H(x/y) = 0.045 \text{ (比特/符号)}$$

信道的容量 C 等于:

$$C = \max_{P(x)} [H(x) - H(x/y)] = 0.955 \quad (\text{比特/符号})$$

信道容量 C_t 等于:

$$C_t = \max_{P(x)} \{r[H(x) - H(x/y)]\} = 1000 \times 0.955 = 955 \quad (b/s)$$

例 4-5 已知彩色电视图像由 5×10^5 个像素组成。设每个像素有 64 种彩色度, 每种彩色度有 16 个亮度等级。如果所有彩色度和亮度等级的组合机会均等, 并统计独立。

(1) 试计算每秒传送 100 个画面所需的信道容量;

(2) 如果接收机信噪比为 30dB, 为了传送彩色图像所需信道带宽为多少? [提示: $\log_2 x = 3.32 \lg x$]。

解 (1) 信息量/每个像素 = $\log_2(64 \times 16) = 10 \text{ (bit)}$

信息量/每幅图 = $10 \times 5 \times 10^5 = 5 \times 10^6 \text{ (bit)}$

信息速率 $R_b = 100 \times 5 \times 10^6 = 5 \times 10^8 \text{ (b/s)}$

因为 R_b 必须小于或等于 C , 所以信道容量 $C \geq R_b = 5 \times 10^8 \text{ (b/s)}$ 。

(2) 已知信噪比 $S/N = 1000 \text{ (30dB)}$, 则由香农公式可得

$$B_{\min} = \frac{C}{\log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)} = \frac{C}{3.32 \lg \left(1 + \frac{S}{N}\right)} = \frac{5 \times 10^8}{3.32 \lg 1001} \approx 50 \text{ (MHz)}$$