3 例题

例 3 .1 如图 10所示，在半顶角为 ϕ 的倒立固定圆锥面光滑内壁上，一小球在距锥顶 h_0 高度处作水平圆周运动。1. 求圆周运动速率 v_0；2. 若在某时刻，小球的速度不改变方向地从 v_0 增为 $\sqrt{1+\alpha}\,v_0\,(\alpha>0)$，小球随即离开原轨道但不会离开锥面内壁，试问小球是否会在距离锥顶某个 h 高处作水平圆周运动？3. 小球若不再作圆周运动，试求运动过程中相对锥顶能达到的最大高度 h_{max} 和最低高度 h_{min}。

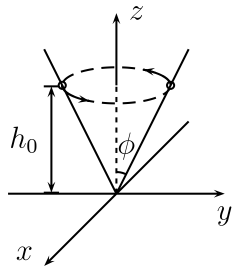

图 10: 示意图

解：如果你恰好有这方面的生活经验 (图 11)，那么你对整个力学过程会有大致的印象——尽管不一定够清晰够精确，但它的确会对你有所帮助。如果你缺乏这方面的感性认识，那也没多大关系；直观的物理图像虽然有用，但我们还得借助于数学推演才能给出精确的答案——有时推演甚至会颠覆起初的直觉。

首先，我们得把物理模型转译成数学模型；为此，必须建立合适的坐标系，如 图 10所示，但对 x-y 平面我们采用极坐标系——即对整个三维空间采用柱坐标系。设 t 时刻小球的位矢和速度分别为 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$，则有：

图 11: 摩托车杂技

$$\boldsymbol{r}(t)=\rho(t)\boldsymbol{e}_\rho+z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{3 .1}$$

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\dot{z}\boldsymbol{e}_z \tag{3 .2}$$

除了重力 $\boldsymbol{G}=-mg\boldsymbol{e}_z$ 作用外，小球还受到光滑锥面对它的作用；记该作用力为 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{f}$ 的方向与锥面在小球所处位置的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 相一致：$\boldsymbol{f}=f\boldsymbol{n}$，而法线落在由 $\boldsymbol{r}$ 和 z 轴决定的平面上，并与 $\boldsymbol{r}$ 垂直。由此可知 $\boldsymbol{n}$ 可表示为：$\boldsymbol{n}=-\cos\phi\boldsymbol{e}_\rho+\sin\phi\boldsymbol{e}_z$，于是小球受到的合外力

$$\boldsymbol{F}=-(f\cos\phi)\boldsymbol{e}_\rho+(f\sin\phi-mg)\boldsymbol{e}_z \tag{3 .3}$$

显然 $\boldsymbol{F}$ 也落在由 $\boldsymbol{r}$ 和 z 轴决定的平面上，因此力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 势必与 z 轴垂直，于是有力矩沿 z 轴的分量 $M_z=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})_z=0$；由角动量守恒定律，有

$$J_z(t)=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_z=m\rho^2\dot{\theta}=J_z(0) \tag{3 .4}$$

即角动量沿 z 轴的分量守恒。另外，由于锥面的作用力 $\boldsymbol{f}$ 对小球不做功，只有重力 $\boldsymbol{G}$ 做功，故机械能守恒定律满足，有

$$E(t)=m(\dot{\rho}^2+(\rho\dot{\theta})^2+\dot{z}^2)/2+mgz=E(0) \tag{3 .5}$$

最后由锥面的几何形状，可知

$$\rho(t)=(\tan\phi)z(t) \tag{3 .6}$$

利用关系(3 .4)和(3 .6)，将方程 (3 .5)中 ρ 和 θ 替换成 z，可得

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\dot{z}^2}{\cos^2\phi}+\frac{J_z^2(0)}{(mz\tan\phi)^2}\right)+mgz-E(0)=0 \tag{3 .7}$$

其中 $J_z(0)$ 和 $E_z(0)$ 由初始速率 $v(0)$ 和初始高度 h_0 决定：

$$\begin{aligned}J_z(0)&=(\boldsymbol{r}(0)\times m\boldsymbol{v}(0))_z\\&=(h_0\tan\phi\boldsymbol{e}_\rho\times mv(0)\boldsymbol{e}_\theta)_z\\&=mh_0v(0)\tan\phi\\E(0)&=mv^2(0)/2+mgh_0\end{aligned}$$

将 $J_z(0)$ 和 $E_z(0)$ 的取值带入方程(3 .7)，经整理可得：

$$\frac{\boxed{(\cos\phi)^{-2}}\dot{z}^2}{2}+\boxed{\frac{v^2(0)(h_0^2-z^2)}{2z^2}+g(z-h_0)}=\frac{m_e\dot{z}^2}{2}+V_e(z)=0 \quad (3\ .8)$$

若方程(3 .8)两端乘以 $(\cos\phi)^2$，那可取 $m_e=1$；若方程(3 .8)两端乘以 -1，那可取 $m_e=-(\cos\phi)^2$ 吗？

如何理解方程(3 .8)呢？这可视作有效质量 m_e 的质点在有效势场 V_e 中作一维运动，并且其机械能为零。由示意 图 12可知，质点只能在势能曲线与 z 轴交点限制的范围内运动。由 $V_e(z)=0$，可得：

$$z_{min}=h_0,\quad z_{max}=\frac{v^2(0)}{4g}\left[1+\sqrt{1+\frac{8gh_0}{v^2(0)}}\right] \quad (3\ .9)$$

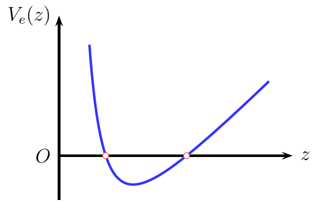

图 12: V_e 曲线示意图

注意 V_e 和 z_{max} 都与 $v(0)$ 的取值有关；根据 $v(0)$ 的取值，V_e 的曲线图不一定恰好如图 12所示，z_{max} 也不一定小于 z_{min}。对第 1. 小问——此时 $v(0)=v_0$，根据曲率半径公式可算出 v_0，但下面我们将给出另一种计算方法——大家可验证结果是否相同。要求小球在 h_0 高处一直做圆周运动，该要求意味着 $z_{min}=z_{max}$——即势能曲线与 z 轴只有一个交点，于是可得 $v(0)=v_0=\sqrt{h_0 g}$。对第 2. 和 3. 小问，将 $v(0)=(1+\alpha)v_0=(1+\alpha)\sqrt{h_0 g}$ 代入方程(3 .9)可得：

$$z_{max}=\frac{(1+\alpha)+\sqrt{\alpha^2+10\alpha+9}}{4}h_0=f(\alpha)h_0$$

显然 $f(0)=1$，当 $\alpha(>0)$ 增加时，$f(\alpha)$ 单调递增——即 $z_{max}\geq z_{min}$，当 $\alpha=0$ 等号才成立。

请大家再把数学结果转译成物理图像，并考虑当 $-1<\alpha<0$ 时情况又如何？最后，请列举一下这道例题的求解过程中都涉及到哪些概念和知识点。

例 3 .2 *质量为 m 的两小球系于一弹簧的两端，弹簧处于自然状态时，长为 a，弹性系数为 k。现两球同时受冲力作用，获得与连线垂直的等值反向的初速度，若在以后运动过程中弹簧的最大长度 $b=2a$，求两球的初速率 v_0（不计重力）。*

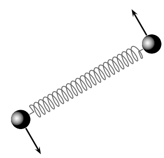

图 13: 题3 .2

解：这两小球（不妨称作球 1 和球 2）构成了质点系，并设在参考系 K 中两球的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$。由于弹力为内力且无外力作用，系统的总动量守恒，故有（鉴于两小球初始速度大小相等方向相反）：

$$\boldsymbol{P}(t)=m(\boldsymbol{v}_1(t)+\boldsymbol{v}_2(t))=\boldsymbol{0}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{v}_1=-\boldsymbol{v}_2 \quad (3\ .10)$$

由(3 .10)可知，其质心（两球连线的中点）是静止的，即质心系是静止参考系。如选参考系 K 为质心系，那么位矢满足：$\boldsymbol{r}_1(t)=-\boldsymbol{r}_2(t)$。

为了后面的数学处理，我们引入辅助量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$；因为弹力为保守力，弹性势能的形式为 $\frac{1}{2}kx^2$——此处的形变量 $x=(r-a)$。由机械能守恒定律可得：

$$E(t)=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_1^2+\boldsymbol{v}_2^2)+\frac{1}{2}k(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|-a)^2=\frac{1}{4}m\boldsymbol{v}^2+\frac{1}{2}k(r-a)^2 \quad (3\ .11)$$

$$=\frac{1}{4}m(\boldsymbol{v}_\perp+\boldsymbol{v}_\parallel)^2+\frac{1}{2}k(r-a)^2=\frac{1}{4}m(v_\perp^2+v_\parallel^2)+\frac{1}{2}k(r-a)^2$$

$$=E(0)=mv_0^2$$

式(3 .11)中 $\boldsymbol{v}_\perp$ 和 $\boldsymbol{v}_\parallel$ 为 $\boldsymbol{v}$ 沿与 $\boldsymbol{r}$ 垂直和平行方向的投影矢量。显然地，$\boldsymbol{v}_\perp$ 和 $\boldsymbol{v}_\parallel$ 决定了 $\boldsymbol{r}$ 的方向和长度的变化——如同法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 和切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 决定了速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向和长度的变化。

由 $r\frac{dr}{dt} = \boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_\parallel$，可得 $\frac{dr}{dt} = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_\parallel}{r}$ 或 $\left|\frac{dr}{dt}\right| = v_\parallel$

由于合外力矩为零，故有角动量守恒：

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{J}(t)| = |\boldsymbol{r}_1\times m\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2\times m\boldsymbol{v}_2| &= \left|(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times\frac{m\boldsymbol{v}}{2}\right| \\ = \frac{1}{2}|m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}|m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_\perp| &= \frac{1}{2}mrv_\perp = mav_0\end{aligned} \tag{3 .12}$$

由(3 .12)可得 $v_\perp = 2av_0/r$，带入(3 .11)可得：

$$\frac{1}{4}mv_\parallel^2 + \left[\frac{ma^2v_0^2}{r^2} + \frac{k(r-a)^2}{2}\right] = mv_0^2 \tag{3 .13}$$

利用 $v_\parallel^2 = \dot{r}^2$，方程(3 .13)可改写为

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{2ma^2v_0^2}{r^2} + k(r-a)^2\right] = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_e(r) = 2mv_0^2 \tag{3 .14}$$

由题意，可知当 $\dot{r}=0$ 时 r 到达最大，即有

$$V_e(2a) = 2mv_0^2 \quad\Rightarrow\quad v_0 = a\sqrt{\frac{2k}{3m}} \tag{3 .15}$$

例 3 .3 图 14中 O 为中心力场的力心，排斥力与距离平方成反比：$f = k/r^2$（k 为常量）。1. 求此力场的势能；2. 一质量为 m 的粒子以速度 v_0、瞄准距离 b 从远处入射，求它能达到的最近距离 d 和此时刻的速率。(P.202:Prob.4-11)

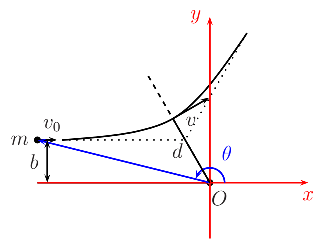

图 14: 题3 .3

解：在中心力场中运动的粒子的角动量守恒，由此可知粒子的运动轨迹对应平面曲线，且落在过力心并与角动量垂直的平面上。因此，该问题可简化为二维平面上的运动，我们建立如图 14所示的极（和直角）坐标系，角动量的方向为 $\boldsymbol{k}$ 方向（垂直纸面指向外）。

由于中心力场为保守力场，可以定义势能：

排斥力意为着力与位矢同向，使得粒子远离力心，即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$；吸引力正相反，有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$。

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' = V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\left[\frac{k\boldsymbol{r}'}{(r')^3}\right]\cdot d\boldsymbol{r}' \\ &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{r_0}^{r}\left[\frac{k}{(r')^2}\right]dr' = V(\boldsymbol{r}_0) + \left[\frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}\right] \\ &\xrightarrow[V(\boldsymbol{r}_0)=0]{r_0=\infty} \frac{k}{r}\end{aligned} \tag{3 .16}$$

最后一步表示选取无穷远处为势能零点，上式表明 $V(\boldsymbol{r})$ 仅依赖于 r，故又常记为 $V(r)$。粒子的初始位置为 $\boldsymbol{r}(0) = x_0\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$（其中 $x_0\approx-\infty$），初始速度为 $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{i}$，于是有角动量：

$$\boldsymbol{J}(0) = \boldsymbol{r}(0)\times\boldsymbol{p}(0) = (x_0\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j})\times(mv_0\boldsymbol{i}) = -mbv_0\boldsymbol{k}$$

和机械能

$$E(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

设 t 时刻，粒子的位矢为$\boldsymbol{r}(t)=r\boldsymbol{e}_r$，其速度 $\boldsymbol{v}(t)=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$。由角动量守恒定律，得

对中心力场，通常采用极（球）坐标系；此处 r 直接表示粒子与力心 O 之间的距离，这正是第二小问关注的量。

$$\boldsymbol{J}(t)=r\boldsymbol{e}_r\times m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)=mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{J}(0)\ \Rightarrow\ r\dot{\theta}=-bv_0/r \tag{3 .17}$$

由机械能守恒定律，得

$$E(t)=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{k}{r}=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{3 .18}$$

将(3 .17)代入(3 .18)，可得：

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\left[\frac{mb^2v_0^2}{2r^2}+\frac{k}{r}\right]=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V_e(r)=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{3 .19}$$

显然有效势 $V_e(r)$ 是关于 $r(>0)$ 的单调递减函数，当 $\dot{r}=0$ 时有 $V_e(r)$ 达到最大——即 r 达到最小。于是

$$V_e(d)=\frac{1}{2}mv_0^2\quad\Rightarrow\quad d=\frac{k+\sqrt{k^2+b^2m^2v_0^4}}{mv_0^2} \tag{3 .20}$$

此时粒子的速率

$$v=|\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta|=|r\dot{\theta}|=bv_0/d \tag{3 .21}$$

上式第三个等号由方程(3 .17)和(3 .20)可得。