16.00元

《概率论与数理统计》

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分								

试卷备用数据：$\Phi(2)=0.977, \Phi(1)=0.841, \chi^2_{0.025}(19)=32.85, \chi^2_{0.975}(19)=8.91$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

一、填空题（共45分，每空3分）

1. 设A、B、C是三个事件，则事件“A、B、C至少有一个发生”可表示为 $A\cup B\cup C$

2. 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一枚骰子接连抛掷两次先后出现的点数，则该方程有重根的概率为 $\frac{1}{18}$

$B^2-4C=0$ $B^2=4C$ $B=2\sqrt{C}$

2 1

4 4

3. 设A、B相互独立，且 $P(A)=0.5, P(A-B)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$ 0.7

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ $=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A-B)=P(A)-P(AB)$ $P(AB)=0.2$ $A=0.5$ $B=0.4$

4. 已知 $Y\sim\pi(3.72)$，要使得 $P(Y=k)$ 最大，则 $k=$ 3

$X\sim\pi(\lambda)$ $k=[\lambda]$ $P(X=k)$ 取最大

5. 设 X 是服从参数为1的指数分布，a 为大于零的常数，则 $P(X\le a+1\mid X>a)=$ $1-e^{-1}$

$$\frac{P(a<X\le a+1)}{P(X>a)} = \frac{\int_a^{a+1} e^{-x}dx}{\int_a^{+\infty} e^{-x}dx} = \frac{-e^{-x}\big|_a^{a+1}}{-e^{-x}\big|_a^{+\infty}}$$

6. 设 $X\sim B(2,0.2), Y\sim B(3,0.2)$，且 X、Y 相互独立，则 $P(X+Y=1)=$ 0.84

$Y+X\sim B(5,0.2)$

7. 设 $X\sim U(0,2)$，记 $Y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，则 $E(Y)=$ 0.2385

$E(Y)=\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx$ $=\frac{1}{2}[\Phi(2)-\Phi(0)]$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}b}e^{-\frac{(x-a)^2}{2b}}$ $E(X)=3, D(X)=6$ $E(X)=\frac{3+3}{2}$ $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

8. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim\chi^2(3)$，$Y\sim U(-3,3)$，则 $E(X-2Y+1)=$ ~~6~~ 4；又由切比雪夫不等式知：$P(|X-3|\ge12)\le$ $\frac{1}{24}$

$E(X)-2E(Y)+1=3$ $=3-2\times\frac{3+(-3)}{2}+1=4$

$P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ $\frac{1}{144}$ $\frac{2\times3}{12^2}=\frac{1}{24}$

9. 设 n_A 表示 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\ge\varepsilon\right\}=$ 0

10. 已知 $X\sim F(1,9)$，则 $\frac{1}{X}\sim$ $F(9,1)$；又若 $Y\sim t(9), P(Y>c)=0.2$，其中 c 为一常数，则 $P(X>c^2)=$ 0.4

$P(Y>c)=P(Y<-c)=0.2$

$P(X>c^2)=P(Y^2>c^2)$

$=P(Y>c)+P(Y<-c)$

$=0.2+0.2$

$=0.4$

11. 设总体 $X \sim B(1,p)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的样本，则 $E(\overline{X})=$ p，$E(S^2)=$ $p(1-p)$

12. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，则参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为（ $\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ ）

$P(A|B$

得 分

二（8分）、设有200件相同的产品，其中120件是甲厂生产的；60件是乙厂生产的；20件是丙厂生产的．已知这三个厂的产品不合格率依次为0.1,0.2,0.3，现从中任取一件，（1）问取到不合格品的概率是多少？

$P(A|B_3)=\frac{P(AB_3)}{P(B_3)}$

（2）设取到的是不合格品，问它是由丙厂生产的概率是多少？

(1) 设 A 不合格产品

$P(B_1)=0.6$　B_1 甲，B_2 乙，B_3 丙

$P(B_2)=0.3$

$P(B_3)=0.1$　$P(A|B_1)=0.1$　$P(A|B_2)=0.2$

$P(A|B_3)=0.3$

0.15　　0.2

(2) $P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}$

$=\frac{0.1\times0.3}{0.15}=0.2$

$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+\cdots$

$=0.1\times0.6+0.2\times0.3+0.1\times0.3$

$=0.15$

得 分

三(10分)、(1) 已知 $X \sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度；

（2）设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，求 $P(0<\overline{X}<\frac{1}{4})$.

$y \geq 0$

(2) $\bar{x} \sim N(0,\frac{1}{16})$

$P(0<\bar{x}<\frac{1}{4})$

$=\Phi(\frac{\frac{1}{4}-0}{\frac{1}{4}})-\Phi(0)$

$=\Phi(1)-\Phi(0)$

$=0.341$

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}$

1′ $y<0$　$F_Y(y)=0$

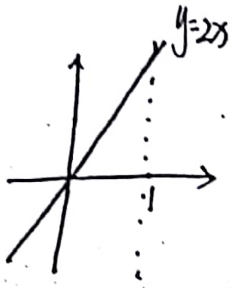
2′ $y \geq 0$　$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\}$

$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})-(-\frac{1}{2\sqrt{y}})f_X(-\sqrt{y})$

$=\frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y}))$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})) & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$



得 分

四(10 分)、设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

1）求$f_X(x), f_Y(y)$；2）试说明X,Y是否独立？ 3）求在$X=x\ (0<x<1)$条件下的$f_{Y|X}(y|x)$.

$f(x|y)\ (x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

(1) $f(x)=\int_0^{2x} 1\,dy = y\Big|_0^{2x} = 2x \quad 0<x<1$

$f(y)=\int_{\frac{y}{2}}^{1} 1\,dx = 1-\frac{y}{2} \quad 0<y<2x$

$f(y|x)\ (y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$=\begin{cases}\frac{1}{2x} & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

(2) $f_X(x)\cdot f_Y(y)=2x(1-\frac{y}{2})\neq f(x,y)=1$

∴不独立

$E(X)=\mu \quad D(X)=\delta^2$

得 分
-

五(10 分)、已知$X\sim N(1,9), Y\sim N(0,16)$，且$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，记$Z=X+\frac{Y}{2}$.

1）求$E(Z),D(Z)$；2）求$Cov(X,Z)$.

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DY}\sqrt{DX}}$

$D(X)=E[X-E(X)]^2$ (1)

$E(Z)=E(X+\frac{Y}{2})=EX+\frac{1}{2}EY=1$

$Cov(X,Y)=\sqrt{DX}\sqrt{DY}\cdot\rho_{XY}$

$=-6$

$E(X)=1 \quad E(Y)=0$

$D(X)=9 \quad D(Y)=16$

$D(Z)=D(X+\frac{Y}{2})=DX+\frac{1}{4}DY+Cov(X,Y)$

$=9+4+(-6)$

$=7$

$Cov(X,Z)$

$=Cov(X, X+\frac{Y}{2})=\cancel{Cov(X,X)}+\cancel{Cov(X,Y)}$

$=Cov(X,X)+Cov(X,\frac{Y}{2})$

$=D(X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$

$=9-3$

$=6$

3

得 分

六(10 分)、设总体 $X \sim U(\theta,1)$，其中参数 θ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

解: $\frac{1}{(1-\theta)^n}$ $\theta\uparrow$

$\hat{\theta} = \min\limits_{1\le i\le n} x_i$

①. $x \sim U(\theta,1)$

$E(x) = \frac{\theta+1}{2}$

$E(x) = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

$\hat{\theta} = 2\bar{x} - 1$

② $f_x = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta} & \theta<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$L(\theta) = (\frac{1}{1-\theta})^n \uparrow \le \frac{1}{(x_{max}-x_{min})^n}$

$\theta \le \min\limits_{1\le i\le n} x_i$

$L(\theta)$ 在 $\theta = x_{min}$ 时, $x_{max}=1$ 取最大

$\hat{\theta} = \min x \quad 1\le i\le n$

得 分

七(7 分)、测定某种溶液中的某种元素的含量，由它的 20 个测定值计算出 $s^2 = 0.09^2$，设测定值总体服从正态分布，总体方差 σ^2 未知，试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验 $H_0: \sigma^2 = 0.11^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \ne 0.11^2$.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(20-1)\times 0.09^2}{0.11^2} = 12.719 < \chi^2_{0.025}(19)$$

∴ 接受原假设

装订线内不要答题

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

《 概率论与数理统计 》

院(系)__________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得分								

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得 分

一、填空题（每空3分，共42分）

1．设A,B,C为三个事件，则A,B,C都不发生可以表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

2．设 A，B，C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=0.25$， $P(BC)=0$，

$P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$P(AB)=P(AC)=0.125$，则$P(A\cup B\cup C)=$ ~~0.25~~ 0.5

$P(ABC)=0$

正态

3．设随机变量$X\sim N(0,1)$，则$Y=4X+1$的概率密度函数$f_Y(y)=$ $\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}$

$E(Y)=0\times4+1=1$ $D(Y)=16$ $Y(1,16)$

4．已知X服从参数为$\lambda=1$的指数分布，则$P(X\geq EX)=$ e^{-1}

指数 $E(X)=1$ 二项 $P(X\geq1)=1-P(X<1)$ $E(X)-2EY+1$

5．设$X\sim U(1,13)$，$Y\sim B(100,0.1)$，且X、Y相互独立，则 $E(X-2Y+1)=$ ~~13~~ -12

n p

$D(X-2Y+1)=$ 48 $D(X)+4DY-2cov(X,Y)=48$

$E(X)=\frac{1+13}{2}=7$

$D(X)=\frac{(13-1)^2}{12}=12$

$E(Y)=10$

$D(Y)=10(1-0.1)=9$

6．已知$X\sim\pi(1)$，$Y\sim\pi(2)$，且X与Y相互独立，则$P(X+Y=0)=$ e^{-3}

$X+Y\sim\pi(3)$ $\lambda=3$ $\frac{3^0e^{-3}}{0!}$

7．设X,Y为相互独立的随机变量，其分布函数分别为$F_X(x),F_Y(y)$，则$Z=\max(X,Y)$

的分布函数$F_Z(z)=$ ~~1-[1-F_X(z)](1-F_Y(z))~~ $F_X(z)F_Y(z)$

8．设随机变量$X\sim\chi^2(3)$，则$P(|X-3|\geq12)\leq$ $\frac{1}{24}$ $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=\frac{6}{12^2}=\frac{1}{12\times2}$

$E(X)=3$ $D(X)=6$

9．设n_A表示n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生

的概率，则对任意的$\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\}=$ 0

10．已知$X\sim t(5)$，则$X^2\sim$ $F(1,5)$

11. 设X_1，X_2,⋯，X_n是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，σ^2已知，$\overline{X}$是样本均值，S^2是样本方差，则均值μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为（ $\bar{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ ）

12. 设X_1，X_2,⋯，X_{16}是来自总体$X\sim B(10,0.2)$的一个简单随机样本，$\overline{X}$与S^2分别为样本均值与样本方差，则$D(\overline{X})=$ 0.1 ，$E(S^2)=$ 1.6

得 分

二、设有100件相同的产品，其中50件是甲厂生产的；30件是乙厂生产的；20件是丙厂生产的．已知这三个厂的产品不合格率依次为0.2,0.3,0.1，现从中任取一件，（1）问取到不合格品的概率是多少？（2）如果取到的是不合格品，则它是由丙厂生产的概率是多少？（10分）

(1) $P=\frac{50\times0.2+30\times0.3+20\times0.1}{100}=0.21$

(1) $PA=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$

$=0.5\times0.2+0.3\times0.3+0.2\times0.1$

$=0.21$

(2) 设A是不合格，B是丙生产

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.2}{0.21}=$ ...

(2) $P(B_3|A)=\frac{P(AB_3)}{P(A)}=\frac{P(B_3)\cdot P(A|B_3)}{0.21}=$

得 分

三、1）设随机变量X在$(0,1)$上服从均匀分布，求$Y=e^X$的概率密度．

2）设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0\le x\le\pi\\ 0 & 其它\end{cases}$，对$X$独立地重复观察4次，用$Y$表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，求随机变量$Y^2$的数学期望．（10分）

$x\sim U(0,1)$

$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

1. $F_Y(y)=P(Y\le y)$

$=P(e^x\le y)$

$=P(x\le\ln y)$

$=F(\ln y)$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{e^x\le y\}$

$F_Y(y)=0$

$F_Y(y)=1$

$F_Y(y)=\{$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y} & 1<y<e\\ 0 & 其他\end{cases}$

~~$y\in(1,e)$~~

2. $P(x>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

$=\sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$=\frac{1}{2}$

$Y\sim B(4,\frac{1}{2})$

$EY=4EY=\frac{1}{2}\times4=2$

$DY=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$

$DY=E(Y^2)-(EY)^2$

$1=E(Y^2)-4$

$E(Y^2)=5$

Scanned by CamScanner

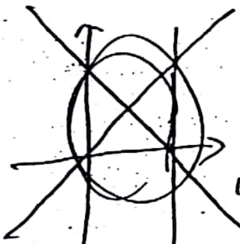
$f_Y(y)=\int_0^1 1dx \quad -x<y<x$

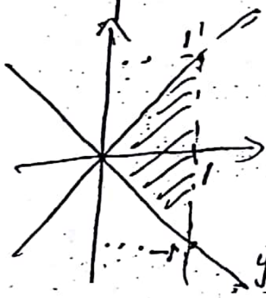
$=1$

得 分

四、已知随机变量(X,Y)在区域$D:0<x<1,-x<y<x$内服从均匀分布.

1）求$f_X(x)$；2）计算EX；3)求$Cov(X,Y)$，并判断X与Y是否相关？





$y=x$

$y=-x$

(1) $f(x,y)=\begin{cases}1\\0\end{cases}$

$f_X(x)=\int_{-x}^{x} 1dy=2x$

$f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\0 & 其他\end{cases}$

(2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dxdy$

$=\int_0^1 2x^2dx\int_{-1}^{1}dy$

$\frac{2}{3}x^3$

$=\frac{2}{3}$

$E(Y)=\int_{-x}^{x} ydy=\int_0^1 dx=0$

(3) $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$E(XY)=\iint xyf(x,y)dxdy$

$\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xydy$

$\frac{1}{2}\int_0^1 dx\, xy^2\Big|_{-x}^{x}=0$

$cov(X,Y)=0-0=0$

得 分

五、设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是来自正态总体$X\sim N(0,0.3^2)$的一个简单随机样本，

1）求$P(\overline{X}\geq 0)$；2）求$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}$.　　$(\chi^2_{0.1}(10)=16)$　　（10分）

(1) $\bar{x}\sim N(0,\frac{0.3^2}{10})$

$P(\bar{x}\geq 0)$

$=P(x<0)$

$=0.5$

$x\sim N(0,0.3^2)$

$\frac{x_i}{0.3}\sim N(0,1)$

$\chi^2=\sum_{i=1}^{10}(\frac{x_i}{0.3})^2\sim\chi^2(1$

$\sum_{i=1}^{10}(\frac{x_i}{0.3})^2\cdot 0.3^2>1.44$

$0.09\chi^2(10)>1.44$

$P\{\sum_{i=1}^{10}x_i^2>1.44\}=P\{\sum_{i=1}^{10}(\frac{x_i}{0.3})^2>16\}$

$=P\{\chi^2(10)>16\}=0.1$

得 分

六、测定某种溶液中的某种元素的含量，它的 23 个测定值给出 $s^2=0.09^2$，设测定值总体服从正态分布，总体方差 σ^2 未知，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验方差是否是 0.11^2：（$\chi^2_{0.025}(22)=36.781$ $\chi^2_{0.975}(22)=10.982$） （8 分）

得 分

七、设总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)}, & x>1 \\ 0, & 其它\end{cases}$，其中未知参数 $\theta>1$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量. （10 分）

$\hat{\theta}_{矩}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$

$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

$EX=\int$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

《概率论与数理统计》

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分								

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

试卷备用数据：$\Phi(1)=0.84$，$\chi^2_{0.1}(10)=16$，$t_{0.025}(15)=2.13$

一、填空题（共 45 分，每空 3 分）

1. 设 A、B、C 是三个事件，则事件"A 发生，而 B、C 不发生"可表示为 $A\bar{B}\bar{C}$

2. 设 $P(\bar{A})=0.4, P(B)=0.3$，且 A、B 有包含关系，则 $P(A\bar{B})=$ 0.3

3. 把 10 本不同的书任意放在书架上，则其中指定的 3 本书放在一起的概率是 $\frac{1}{15}$

$k=[(n+1)p]$ 时

4. 已知 $X\sim B(10,0.32)$，要使得 $P(X=k)$ 最大，则 $k=$ 3

5. 设 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim\pi(1)$，$Y\sim\pi(2)$，$Z=X+Y$，则 $P(X+Y=1)=$ $3e^{-3}$

6. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ e^{-1}

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布，已知 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)=$ $[F(z)]^2$

8. 设 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,5)$，则 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)=$ $\cancel{N(-1,9)}$ $=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z+1)^2}{18}}$

9. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，$Y\sim U(-2,2)$，则 $E(2X-\sqrt{3}Y+3)=$ 5，又由切比雪夫不等式知：$P(|X-1|<3)\geq$ $\frac{8}{9}$

10. 设 $X\sim B(100,0.2)$，则由中心极限定理 $P(X\leq16)\approx$ 0.16

$X\sim N(np,np(1-p))=N(20,16)$

11. 设 X_1,X_2,X_3 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的随机样本，则统计量 $S=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ $\sim t(1)$

$\phi(-1)=1-\phi(1)$

$P(X\leq16)$

$=P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq\frac{16-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$

$=\phi\left(\frac{16-100\times0.2}{}\right)$

$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

9

12. 设总体 $X \sim \chi^2(5)$，$X_1, X_2 \cdots, X_{10}$ 是取自 X 的样本，则 $E(\overline{X}) =$ 5，$D(\overline{X}) =$ 1

13. 设总体 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$，μ 未知，样本容量为 n，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则总体方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$.

得分

二(8 分)、已知男子有 5%是色盲患者，女子有 0.25%是色盲患者．今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人．(1) 求此人是色盲患者的概率；(2) 若此人恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少?

解 设此人是男人为事件 B_1 为女人是事件 B_2，$B_1 B_2$ 构成一个划分

~~则~~ 是色盲为事件 A

$P(A|B_1) = 0.05 \quad P(A|B_2) = 0.0025 \quad P(B_1) = P(B_2) = 0.5$

(1) $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = 0.5 \times 0.05 + 0.5 \times 0.0025$

$= 0.02625$

(2) $P(A) \cdot P(B_1|A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) \quad P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.05 \times 0.5}{0.02625}$

$= 0.952$

得分

三(12 分)、(1) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求随机变量 $Y = |X|$ 的概率密度；

(2) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自正态总体 $X \sim N(0, 0.3^2)$ 的一个简单随机样本，求概率 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\}$.

解 (1) $X \sim N(0,1) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ① $y < 0 \quad F_Y(y) = 0$

② $y > 0$ 时 ~~则~~ $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y)$

$= \Phi(y) - \Phi(-y)$

$= 2\Phi(y) - 1$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = 2\varphi(y)$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & y > 0 \end{cases}$

(2) $\frac{X-0}{0.3} \sim N(0,1)$

$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{X_i - 0}{0.3}\right)^2 \sim \chi^2(10)$

$P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\}$

$= P\{\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{X_i - 0}{0.3}\right)^2 > \frac{1.44}{0.3^2}\} = P\{\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{X_i - 0}{0.3}\right)^2 > 16\} = 0.1$

四(10 分)、设二维连续型随机变量(X,Y)在区域D：$0<x<1, -x<y<x$内服从均匀分布. (1) 求$f_X(x)$? (2) 试判断X与Y是否相关?

解 (1) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{S_D}=1 & 0<x<1, -x<y<x \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$f_X(x)=\begin{cases} \int_{-x}^{x} 1dy=2x & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

(2) $f_Y(y)=\begin{cases} \int_{|y|}^{1} 1\cdot dx=1-|y| & (-1<y<1) \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xy\,dy$

$=0$

$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\frac{2}{3}$

$E(Y)=\int_{-1}^{1}(1-|y|)\cdot y\,dy$

$=\int_{-1}^{0}(1+y)y\,dy+\int_0^1(1-y)y\,dy$

$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$=0-0=0$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0$

五(8 分)、已知$D(X)=4, D(Y)=9, D(X-Y)=17$，试求：

(1) 相关系数ρ_{XY}；(2) 协方差$Cov(X-Y, X+2Y)$.

解：(1) $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y)=\frac{D(X)+D(Y)-D(X-Y)}{2}$

$=\frac{4+9-17}{2}=-2$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{1}{3}$

(2) $Cov(X-Y, X+2Y)=D(X)+Cov(X,Y)-2D(Y)$

$=4+(-2)-2\times 9=-16$

11

$$\begin{cases} E(X)=\overline{X}=A_1 \\ E(X^2)=A_2 \\ \quad =D(X)+E(X)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_1= \\ \hat{\theta}_2= \end{cases}$$

$\theta^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{\theta}x_1^{\sqrt{\theta}-1}\cdot\sqrt{\theta}x_2^{\sqrt{\theta}-1}\cdots\sqrt{\theta}$

得 分

六(10 分)、设总体 X 的概率密度是 $f(x,\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，设来自总体 X 的简单随机样本为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$．（1）求参数 θ 的矩估计量；（2）求参数 θ 的最大似然估计量．

$\prod_{i=1}^{n}x_i = x_1x_2\cdots x_n$

解：1，……

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}x^{\sqrt{\theta}+1}\Big|_0^1$

$\hat{\theta}=\left(\frac{1}{\frac{1}{\overline{X}}-1}\right)^2=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$ ．$=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\overline{X}$

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x_i<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

当 $0<x_i<1$ 时：$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)$.

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\theta^{-\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)=0$

$\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得 分

七(7 分)、设矿石中某种元素含量服从正态分布，但均值和方差均未知．现测定容量为 16 的样本，计算得 $\bar{x}=0.4, s^2=0.18^2$，试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，检验 $H_0:\mu=0.49$．

解：① 提出假设：$H_0: \mu=0.49$. $H_1: \mu\neq0.49$.

② 检验统计量：$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$.

③ 拒绝域 $|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.13$

④ 实测量：$|t|=\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}}=\frac{|0.4-0.49|}{0.18/\sqrt{16}}=2$

⑤ 判断 $2<2.13$，未落入拒绝域，接受 H_0 原假设．即：$\mu=0.49$

得 分

四(10 分)、设二维连续型随机变量(X,Y)在区域D: $0<x<1, -x<y<x$内服从均匀分布. (1) 求$f_X(x)$? (2) 试判断X与Y是否相关?

解: (1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}=1 & 0<x<1, -x<y<x\\ 0 & 其他\end{cases}$

$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{x} 1dy=2x & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}\int_{|y|}^{1} 1\cdot dx=1-|y| & (-1<y<1)\\ 0 & 其他\end{cases}$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xy\,dy$

$=0$

$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\frac{2}{3}$

$E(Y)=\int_{-1}^{1}(1-|y|)y\,dy$

$=\int_{-1}^{0}(1+y)y\,dy+\int_0^1(1-y)y\,dy$

$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$=0-0=0$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0$

得 分

五(8 分)、已知$D(X)=4, D(Y)=9, D(X-Y)=17$，试求:

(1) 相关系数ρ_{XY}; (2) 协方差$Cov(X-Y, X+2Y)$.

解: (1) $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y)=\frac{D(X)+D(Y)-D(X-Y)}{2}$

$=\frac{4+9-17}{2}=-2$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{1}{3}$

(2) $Cov(X-Y, X+2Y)=D(X)+Cov(X,Y)-2D(Y)$

$=4+(-2)-2\times 9=-16$

11