

3 第三单元

习题 3.1 如图 13 所示, 在劲度系数为 k 的弹簧下挂质量分别为 m_1 和 m_2 的两个物体, 开始时处于静止。若把 m_1 和 m_2 之间的连线烧断, 求 m_1 的最大速度。

解: 如图 13 所示, 以弹簧处于原长时 m_1 所在位置为坐标系的原点 O , 因此当 $t = 0$ 时有 $y_1(0) = -(m_1 + m_2)g/k$ 和 $\dot{y}_1(0) = 0$ 。以 O 为弹性和重力势能的零点, 则总势能为

$$V(y_1) = \frac{1}{2}ky_1^2 + m_1gy_1$$

从而, 初始时刻的机械能 $E = V(y_1(0)) = (m_2^2 - m_1^2)g^2/(2k)$ 。显然, 当势能达到极小值时, 动能达到极大值。由 $\frac{dV}{dy_1} = 0$, 可知当 $y_1 = y_m = -\frac{m_1g}{k}$ 时势能有极小值 $V_m = V(y_m)$; 设此时最大速率为 v_m , 由机械能守恒定律可知

$$\frac{1}{2}m_1v_m^2 + V_m = E$$

可求得 $v_m = m_2g/\sqrt{m_1k}$ 。

习题 3.2 如本题图, 劲度系数为 k 的弹簧一端固定在墙上, 另一端系一质量为 m_A 的物体。当把弹簧的长度压短 x_0 后, 在它旁边紧贴着放一质量为 m_B 的物体。撤去外力后, 求 (1) A、B 离开时, B 以多大速率运动; (2) A 距起始点移动的最大距离。设下面是光滑的水平面。

解: 见教材图示, 显然分离发生在弹力方向发生反转的那一时刻——即弹簧达到原长, 推力变成拉力——在此之前, 两物体一直具有相同速度。设分离瞬间的速率为 v , 由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$$

可得 $v = |x_0|\sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}}$ 。随后, 物体 A 继续向前运动, 达到最远处 x_m 是其动能完全转换为弹性势能, 即有 $\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}m_Av^2$ 。于是, 物体 A 距离起点最大距离为 $(|x_0| + x_m)$ 。

习题 3.3 一质点在保守力场中沿 x 轴 (在 $x > 0$ 范围内) 运动, 其势能为 $V(x) = kx/(x^2 + a^2)$, 其中 k 、 a 均为大于零的常数。试求 (1) 质点所受到的力的表示式; (2) 质点的平衡位置。

解: 由 $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$ 可得

$$F(x) = \frac{k(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2}$$

由 $F(x) = 0$ 及 $x > 0$ 可知平衡位置 $x_0 = a$ 。

习题 3.4 一质量为 m 的质点在保守力场中沿 x 轴 (在 $x > 0$ 范围内) 运动, 其势能为 $V(x) = A/x^3 - B/x$, 其中 A 、 B 均为大于零的常数。(1) 找出质点运动中受到沿 x 负方向最大力的位置; (2) 若质点的总能量 $E = 0$, 试确定质点的运动范围。

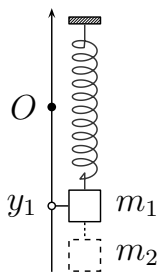


图 13: 习题 3.1

解：分别计算 $F(x)$ 及其一阶导数

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = \frac{3A}{x^4} - \frac{B}{x^2}$$

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{12A}{x^5} + \frac{2B}{x^3}$$

由 $F'(x) = 0$ 及 $x > 0$ ，可知极值位置 $x_m = \sqrt{\frac{6A}{B}}$ ，在 x_m 处的力 $F(x_m) = -\frac{B^2}{12A}$ 。下面我们要分析 x_m 是否就是沿 x 负方向最大力的位置——仅根据极值无法判断其是否是最大值，由 $F(x) = 0$ 可知平衡位置 $x_0 = \sqrt{\frac{3A}{B}}$ ，当 $x \leq x_0$ 时 $F(x) \geq 0$ ，而当 $x \geq x_0$ 时 $F(x) \leq 0$ 。因为 $x_m \in (x_0, +\infty)$ ，并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ ，所以 x_m 是沿 x 负方向最大力的位置。

由 $V(x) = 0$ ，可解得 $x = \sqrt{\frac{A}{B}}$ ，并注意到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 0$ ，所以质点的运动范围为 $[\sqrt{\frac{A}{B}}, +\infty)$ 。

习题 3.5 一质量为 m 的质点在半径为 R 的竖直圆轨道内运动，设没有摩擦力，当质点在最低点时，其速率为 v_0 ，如图 14 所示。(1) v_0 的最小值 v_{min} 为多大时，质点还能沿着圆形轨道运动而不脱离轨道？(2) 假定 $v_0 = 0.775v_{min}$ ，则质点将在某点 P 处脱离轨道而沿图 14 中虚线所示的路径运动，试求 P 的角位置 θ 。

解：(1) 质点受到重力 $\mathbf{G} = -mg\mathbf{j}$ 和轨道的法向支持力 $\mathbf{N} = -f\mathbf{e}_r$ （没有摩擦力），由牛顿定律可知

$$-ma_n\mathbf{e}_r = \mathbf{N} + (\mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r \Rightarrow f = ma_n - mg \sin \varphi \quad (3.1)$$

因为轨道是半径为 R 的圆，所以

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (3.2)$$

由于支持力 \mathbf{N} 不做功，而重力为保守力，故有机能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR \sin \varphi = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \quad (3.3)$$

结合(3.1)、(3.2)和(3.3)，可得：

$$f = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2 + 3 \sin \varphi) \quad (3.4)$$

“不脱离轨道”意味着不论质点处于轨道哪个位置始终有 $f \geq 0$ ，故有

$$\frac{mv_0^2}{R} \geq mg(2 + 3 \sin \varphi) \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi) \quad (3.5)$$

当 $\varphi = \pi/2$ （最高位置）时，式(3.3)中不等号右端为 $5mg$ ，因此 $v_{min} = \sqrt{5Rg}$ 。

(2) 当 $v_0 = 0.775v_{min}$ 时，由 $f = 0$ 可得

$$\sin \varphi = \frac{0.775^2 \times 5 - 2}{3} = 0.334375 \Rightarrow \varphi = \pi - \arcsin(0.334375) \quad (3.6)$$

即角位置 $\theta = \arcsin(0.334375)$ 。

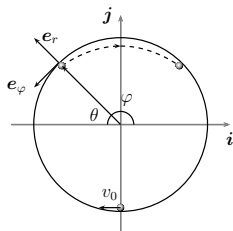


图 14: 习题 3.5