第九章 模拟信号的数字传输

【作业】

1、3、8、9、11、12、14、15、16

- 数字化三步骤：抽样、量化、编码

抽样

- 抽样定理：设一个连续模拟信号$m(t)$ 中的最高频率$< f_H$ ，则以间隔时间为$T \leq \frac{1}{2}f_H$的周期性冲激脉冲对它抽样时，$m(t)$将被这些抽样值所完全确定。
- 带通模拟信号最小抽样频率:

$$f_s = 2B(1+\frac{k}{n}) > 2B \tag{1}$$

  - 带通信号带宽 $B = f_H - f_L$
- 低通信号：抽样频率大于奈奎斯特速率

$$f_s \geq 2f_H \tag{2}$$

模拟脉冲调制

- 周期性脉冲抽样：模拟脉冲调制
  - 脉冲振幅调制（PAM）等效于抽样
  - 脉冲宽度调制（PDM）
  - 脉冲相位调制（PPM）
- 振幅调制（PAM）
  - 理想抽样
  - 自然抽样
  - 平顶抽样(理想+保持电路)

抽样信号的量化

均匀量化

- 基本模型：

$$m(kT_s) \quad \rightarrow \quad M\text{级量化器} \quad \rightarrow \quad m_q(q_i) \tag{3}$$

- 量化间隔：

$$\triangle v = \frac{b-a}{M} \qquad m(t) \in [a,b] \tag{4}$$

  取间隔中点为量化值

$$q_i = \frac{m_i + m_{i+1}}{2}, i = 1,2,\ldots,M \tag{5}$$

- 量化误差：

$$\varepsilon = |m_q - m(kT_s)| \tag{6}$$

- 量化噪声功率

$$N_q = \bar{q^2} \tag{7}$$

- 信号功率

$$S_o = \bar{m_q^2} \tag{8}$$

- 量化噪声比

$$S_0/N_q \tag{9}$$

- 信号均匀分布：

$$\begin{cases} \text{信号功率：} & N_q = \dfrac{M^2 \triangle v^2}{12} \\ \text{平均信号量噪比：} & (\dfrac{S_0}{N_q})_{dB} = 20lgM \quad dB \end{cases}$$

非均匀量化

- 量化间隔随着信号抽样值的增大而增大，信号小间隔小

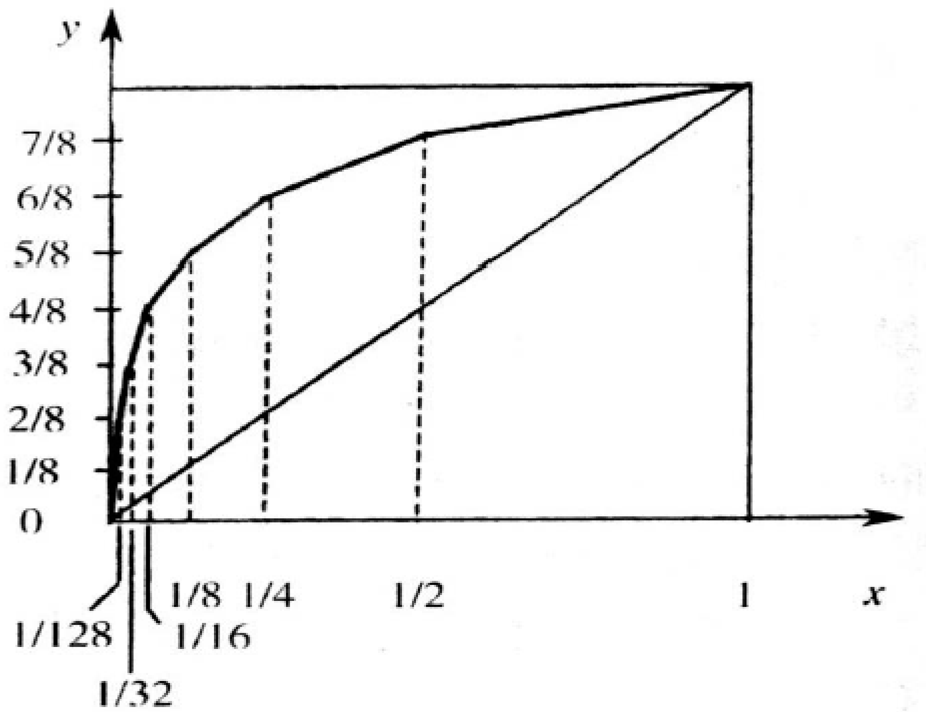
$$\triangle x \propto x \tag{10}$$

- 压缩规律以及近似算法
  - A 压缩律 ——> 13折线法
  - u 压缩率 ——> 15折线法
- A压缩律满足：

$$y = \begin{cases} \dfrac{Ax}{1+lnA} & 0 < x \le \dfrac{1}{A} \\ \dfrac{1+lnAx}{1+lnA} & \dfrac{1}{A} \le x \le 1 \end{cases}$$

  其中x为归一化输入电压、y为归一化输出电压、A为压缩系数

  如图，为A压缩律后8段折线



对称的前面有8段，然后中间四段近似成一段由此对应13折线近似。

- u压缩律满足：

$$y=\frac{ln(1+ux)}{ln(1+u)},0\leq x\leq 1 \tag{11}$$

-

A律13折线编码

编码分类

- 自然编码：0000~1111 对应编码范围$[-1,1]$ (不用)
- 折叠码：先编一位符号位，剩下的000~111编码范围[0,1]

每个抽样值对应8位折叠二进制码 $(c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8)$

- 极性码 c_1 ： 对应不同正负极的编码
- 段落码 $c_2c_3c_4$:对应不同区间范围的编码
- 段内码 $c_5c_6c_7c_8$ ： 对应16个不同的量化级

- 抽样值归一化：

$$X=\frac{m(kT_s)}{m(t)} \quad -1\leq x\leq 1 \tag{12}$$

- 极性码
  - "1" 对应正值
  - “-1”对应负值
- 最小量化间隔

$$(\frac{1}{128}-0)\div 16=\frac{1}{2048}=\triangle \tag{13}$$

- 段内码的编码范围和规则

$$\triangle = \frac{1}{2048} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} -1 \le x \le 1 \\ -2048\triangle \le x \le 2048\triangle \end{aligned}$$

段落编号	区间范围	段落码($c_2c_3c_4$)	间隔范围
1	0△~16 △	000	1△
2	16△~32△	001	1△
3	32△~64△	010	2△
4	64△~128△	011	4△
5	128△~256△	100	8△
6	256△~512△	101	16△
7	512△~1024△	110	32△
8	1024△~2048△	111	64△

- 量化级编码：

电平序号	段内码				电平序号	段内码			
	c_5	c_6	c_7	c_8		c_5	c_6	c_7	c_8
15	1	1	1	1	7	0	1	1	1
14	1	1	1	0	6	0	1	1	0
13	1	1	0	1	5	0	1	0	1
12	1	1	0	0	4	0	1	0	0
11	1	0	1	1	3	0	0	1	1
10	1	0	1	0	2	0	0	1	0
9	1	0	0	1	1	0	0	0	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0

- 上课例题1
  - $X = +635\triangle$

  解：
  - 1. A律13折线编码

$$\begin{cases} \text{段落码} \begin{cases} “+” \rightarrow ”\ 1\ ” \\ \text{查表：}”110“ \end{cases} \\ \text{段内码：} \dfrac{635-512}{32} = 3 \cdots 27\triangle \\ \qquad ”\ 0011\ ” \end{cases}$$

由此可以得到八位："1 110 0011"

- 2. 计算偏差

$$\varepsilon=|\text{余码}-\frac{32}{2}|=|635-m_q|=11(\triangle) \tag{14}$$

- 3. $7\rightarrow 11$:

$$|m_q|=512+(2+1)\times 32+\frac{32}{2}=2^9+2^6+2^5+2^4 \tag{15}$$

由此可以得到十一位：01001110000

- 上课例题2
  - 已知$m(kT_s)=3v, m(t)\in[-5V,+5V]$,求A律13折线编码，偏差，7→11编码

解：

- 1. 归一化

$$X=\frac{m(kT_s)}{m(t)_{max}}\times 2048\triangle= \tag{16}$$

- 2. 误差计算

$$\varepsilon=|-870\triangle-m_q|=|\frac{32}{2}-6|=10(\triangle) \tag{17}$$

- 3. 7-11:

$$|m_q|=2^9+(8+2+1)\cdot 2^5+2^4=2^9+2^8+2^6+2^5+2^4 \tag{18}$$

由此可以得到11位：01101110000

时分复用（TDM）

- 抽样时间

$$T_{\text{帧}}=T_{\text{抽样}}=\frac{1}{f_{\text{抽}}} \tag{19}$$

- E-1 体系 = 基群PCM30/32

  30路语音/2路其他信号（同步码元、信令码元），一共32路

- N信号路数，k=3，f_s 抽样速率，可以得到码元速率

$$f_b=R_B=N\cdot k\cdot f_s \tag{23}$$

- 计算信号带宽

$$B_{\text{信号}}=\frac{1}{\tau}=\text{第一零点带宽}/\text{主瓣带宽} \tag{21}$$

- 基带传输（无ISI）

$$B_{\text{信道}min}=f_N=\frac{R_B}{2} \tag{22}$$

其中R_B 为奈奎斯特带宽。$\text{占空比}=\tau/T_{\text{码}}$ ，其中 τ 为脉冲宽度

【作业】

1、3、8、9、11、12、14、15、16

9-1 已知一低通信号 $m(t)$ 的频谱 $M(f)$ 为

$$M(f)=\begin{cases}1-\dfrac{|f|}{200} & |f|<200\text{Hz}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 假设以 $f_s=300\text{Hz}$ 的速率对 $m(t)$ 进行理想抽样，试画出已抽样信号 $m_s(t)$ 的频谱草图；

(2) 若用 $f_s=400\text{Hz}$ 的速率抽样，重作上题。

解 (1) 由题意知，已抽样信号为 $m_s(t)=m(t)\cdot\delta_T(t)$

其频谱函数为
$$M_s(f)=\frac{1}{T}\left[M(f)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s)\right]=f_s\sum_{-\infty}^{\infty}M(f-nf_s)$$

当抽样速率 $f_s=1/T=300\text{Hz}$ 时，$M_s(f)=300\sum_{-\infty}^{\infty}M(f-300n)$

其频谱图如图 9-16(a) 所示。

(2) 当抽样速率 $f_s=1/T=400\text{Hz}$ 时，$M_s(f)=400\sum_{-\infty}^{\infty}M(f-400n)$

其频谱如图 9-16(b) 所示。

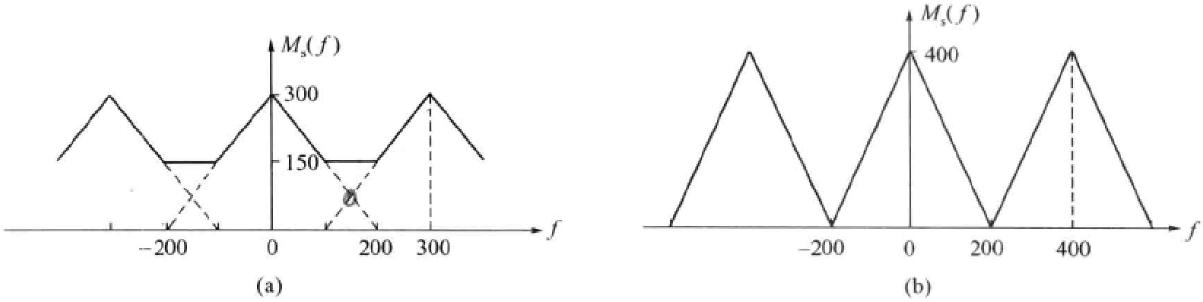


图 9-16 频谱图(一)

9-3 已知某信号 $m(t)$ 的频谱 $M(\omega)$ 如图 P9-1(a) 所示。将它通过传输函数为 $H_1(\omega)$ 的滤波器(图 P9-1(b))后再进行理想抽样。

(1) 试问抽样速率应为多少?

(2) 若抽样速率 $f_s=3f_1$，试画出已抽样信号 $m_s(t)$ 的频谱；

(3) 试问接收端的接收网络应具有怎样的传输函数 $H_2(\omega)$，才能由 $m_s(t)$ 不失真地恢复 $m(t)$?

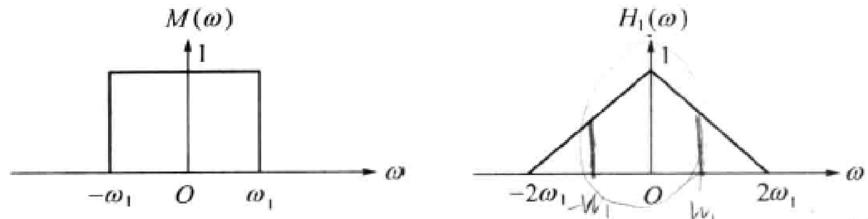
解 (1) $M(\omega)$ 通过 $H_1(\omega)$ 后的最高频率仍为 f_1，故抽样速率 $f_s\geqslant 2f_1$。

(2) 若抽样速率 $f_s=3f_1$，理想抽样信号 $m_s(t)$ 的频谱 $M_s(\omega)$ 如图 9-18 所示。

(3) 根据信号无失真传输原理，接收网络的传输函数 $H_2(\omega)$ 应设计为

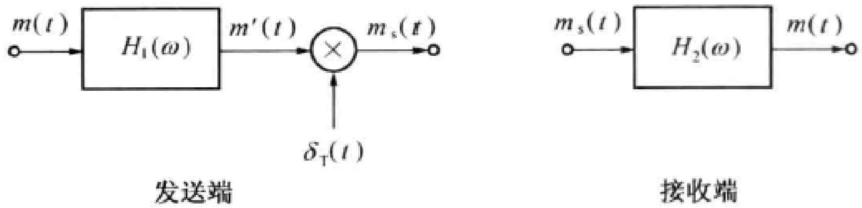
$$H_2(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{H_1(\omega)} & |\omega|\leqslant\omega_1\\ 0 & |\omega|>\omega_1\end{cases}$$

此时能由 $m_s(t)$ 不失真地恢复 $m(t)$。



$f_s=\frac{1}{T}=\frac{w_s}{2\pi}=\frac{w_1}{2\pi}$

(a)



(b)

图 P9 - 1

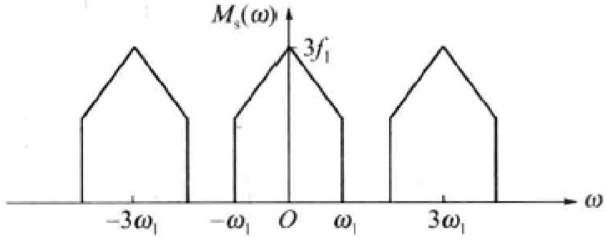


图 9 - 18　频谱图(三)

9-8 已知模拟信号抽样值的概率密度$f(x)$如图 P9-3 所示。若按 4 电平进行均匀量化，试计算信号量化噪声功率比。

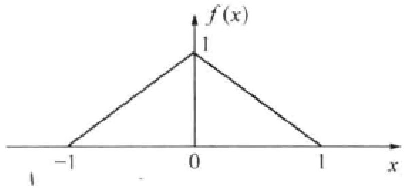


图 P9-3

解 量化间隔 $\Delta s = \frac{2}{4} = 0.5$

$\Delta V = \frac{区间(b-a)}{M} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

量化区间终点依次为：-1，-0.5，0，0.5，1

量化电平值分别为：-0.75，-0.25，0.25，0.75

量化噪声功率：$N_q = \int_{-1}^{1}(x-m_q)^2 f(x)\mathrm{d}x =$

$$2\left[\int_0^{0.5}(x-0.25)^2(1-x)\mathrm{d}x + \int_{0.5}^{1}(x-0.75)^2(1-x)\mathrm{d}x\right] =$$

$$2\left[\int_{0.25}^{0.75}(x-0.5)^2(1.25-x)\mathrm{d}x + \int_{0.25}^{0.75}(x-0.5)^2(0.75-x)\mathrm{d}x\right] =$$

$$4\left[\int_{0.25}^{0.75}(x-0.5)^2(0.5+0.5-x)\mathrm{d}x\right] =$$

$$4\left[\int_{0.25}^{0.75}(x-0.5)^2\cdot 0.5\mathrm{d}x - \int_{0.25}^{0.75}(x-0.5)^3\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{48}$$

信号功率：$S_q = \left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot 2\cdot\int_{0.5}^{1}(1-x)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{4}\right)\cdot 2\cdot\int_0^{0.5}(1-x)\mathrm{d}x = \frac{3}{16}$

所以量化噪声功率比为 $\frac{S_q}{N_q} = 9$

9-9 采用 13 折线 A 律编码，设最小量化间隔为 1 个单位，已知抽样脉冲值为 +635 单位：

（1）试求此时编码器输出码组，并计算量化误差；

（2）写出对应于该 7 位码（不包括极性码）的均匀量化 11 位码。（采用自然二进制码）

解 （1）已知抽样脉冲值：$I_s = +635 = 512 + 3\times 32 + 27$

它位于第 7 段序号为 3 的量化级，因此输出码组为 $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8 = 11100011$，量化误差为 27。

（2）对应的 11 位均匀量化码为 01001100000。

9-11 采用 13 折线 A 律编码，设最小的量化间隔为 1 个量化单位，已知抽样脉冲值为 -95 量化单位：

（1）试求此时编码器输出码组，并计算量化误差；

（2）试写出对应于该 7 位码（不包括极性码）的均匀量化 11 位码。

解 （1）因为样值为负值，所以极性码 $c_1 = 0$，又因 $64 < 95 < 128$，所以码组位于第四段，段落码为 $c_2c_3c_4 = 011$，量化间隔为 4。

由于 $95 = 64 + 7\times 4 + 3$，所以段内码为 $c_5c_6c_7c_8 = 0111$

故编码器输出为 $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8 = 00110111$

量化误差为 3 个单位。

（2）对应的均匀量化 11 位码为 $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_9c_{10}c_{11} = 00001011100$

9-12 对信号 $m(t) = M\sin 2\pi f_0 t$ 进行简单增量调制，若台阶 σ 和抽样频率选择得既保证不过载，又保证不致因信号振幅太小而使增量调制器不能正常编码，试证明此时要求 $f_s > \pi f_0$。

证明 要使增量调制不过载，必须 $\left|\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\max} \leqslant \sigma f_s$

即 $2\pi f_0 M \leqslant \sigma f_s$

又要使增量调制编码正常，应选择 $\sigma \leqslant 2M$

所以 $f_s > \pi f_0$

证毕。

9-14 一单路话音信号的最高频率为4kHz，抽样频率为8kHz，以PCM方式传输。设传输信号的波形为矩形脉冲，其宽度为τ，且占空比为1：

（1）若抽样后信号按8级量化，试求PCM基带信号频谱的第一零点频率；

（2）若抽样后信号按128级量化，则PCM二进制基带信号频谱的第一零点频率又为多少？

解 （1）由抽样频率$f_s=8\text{kHz}$，可知抽样间隔 $T=\dfrac{1}{f_s}=\dfrac{1}{8000}(\text{s})$

对抽样后信号8级量化，故需要3位二进制码编码，每位码元占用时间为

$$T_b=\frac{T}{3}=\frac{1}{3\times 8000}=\frac{1}{24000}(\text{s})$$

又因占空比为1，所以每位码元的矩形脉冲宽度

$$\tau=T_b=\frac{1}{24000}(\text{s})$$

故PCM基带信号频谱的第一零点频率

$$B=\frac{1}{\tau}=24(\text{kHz})$$

（2）若抽样后信号按128级量化，故需要7位二进制码编码，每位码元的矩形脉冲宽度为

$$\tau=T_b=\frac{T}{7}=\frac{1}{7\times 8000}=\frac{1}{56000}(\text{s})$$

故PCM基带信号频谱的第一零点频率

$$B=\frac{1}{\tau}=56(\text{kHz})$$

9-15 若12路话音信号（每路信号的最高频率均为4kHz）进行抽样和时分复用，将所得的脉冲用PCM系统传输，重作上题。

解 12路信号时分复用后传输，所需带宽相应扩大12倍，所以

（1）$B=24\times 12=288(\text{kHz})$

（2）$B=56\times 12=672(\text{kHz})$

9-16 已知话音信号的最高频率$f_m=3400\text{Hz}$，今用PCM系统传输，要求信号量化噪声比S_o/N_q不低于30dB。试求此PCM系统所需的奈奎斯特基带频宽。

解 由题意知，量化信噪比 $\dfrac{S_o}{N_o}=2^{2N}=10^3$

所以二进制码位数$N\approx 5$，故PCM系统所需的最小带宽为

$$B=N\times f_m=5\times 3400=17(\text{kHz})$$