3 机械能守恒定律

在本节中，我们首先介绍力场的概念及其功的计算；对保守力场，给出势能的定义；最后，我们导出机械能守恒定律并讨论其实际应用。

3 .1 力场与功、动能定理

一般而言，我们把物理量的空间分布（关于空间位置的函数）称作场，通常对场还加上相应物理量的名称，比如温度的空间分布就称之为温度场。依赖于物理量是标量还是矢量，场有标量场和矢量场之分。常见的标量场有温度场、密度场和电势场等，而矢量场有速度场、力场等。其中，力场是本节要关注的矢量场。

后面将介绍的势能也是空间位置的函数，故又称为势场。

在数学上，标量场对应映射 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，其中 n 表示空间的维度，如三维空间上的温度分布可表示为

$$T=T(\boldsymbol{r})=T(x,y,z)$$

而矢量场则对应映射 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，如三维空间上的力场可表示为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=F_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+F_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+F_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

其中 F_x、F_y 和 F_z 分别表示力 $\boldsymbol{F}$ 沿 x、y 和 z 轴的三个分量。

牛顿第二定律给出了质点的动量的变化率与力的关系，而其动能 $E_k=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ 的改变则与力场对其做的功有关。由牛顿定律可知

$$\frac{dE_k}{dt}=m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\quad\Rightarrow\quad dE_k=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dt=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\tag{3 .1}$$

其中 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 表示质点在所在位置 $\boldsymbol{r}$ 处受到的力。假设质点于 t_1 时刻由起点 $\boldsymbol{r}_1$ 出发，沿一路径 γ 于 t_2 时刻到达终点 $\boldsymbol{r}_2$，即 $\gamma=\{\boldsymbol{r}(t)\,|\,\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(t_1),\,\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}(t_2),\,t_1\le t\le t_2\}$，则我们定义力场对质点做的功 W 为

$$W=\int_\gamma\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{v}(t)dt\tag{3 .2}$$

式3 .2中 $\int_\gamma\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ 常称作为路径积分（或线积分）。

例 3 .1 已知二维空间上的力场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$，质点由起点 $\boldsymbol{r}_1=-a\boldsymbol{i}$ 分别沿路径 $\gamma_1:\boldsymbol{r}(t)=(2t/\tau-1)a\boldsymbol{i}$ 和 $\gamma_2:\boldsymbol{r}(t)=-\cos(\pi t/\tau)\boldsymbol{i}+\sin(\pi t/\tau)\boldsymbol{j}$ 运动到终点 $\boldsymbol{r}_2=a\boldsymbol{i}$，其中 $0\le t\le\tau$；由3 .2可知，沿路径 γ_1 做的功

$$W_1=\int_{\gamma_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^\tau-(2t/\tau-1)a\boldsymbol{j}\cdot 2a\boldsymbol{i}/\tau dt=0$$

而沿路径 γ_2 做的功

$$W_2=\int_{\gamma_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^\tau[\sin^2(\pi t/\tau)+\cos^2(\pi t/\tau)]\pi/\tau dt=\pi$$

利用功的定义，对(3 .1)积分可得

(3 .1)和(3 .3)分别为动能定理的微分形式和积分形式。

$$E_{k2}-E_{k1}=\int_\gamma\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=W\tag{3 .3}$$

其中 E_{k1} 和 E_{k2} 分别为 t_1 和 t_2 时刻的动能。

关于功的几点说明：功 W 的定义式为路径积分，其值一般依赖于路径的起点与终点以及连接两点的曲线（即依赖路径），而不依赖于路径的参数表示，但依赖于路径的走向，有正负之分。

3 .2 保守力及其势能、中心力场

定义 3 .1 (保守力) 如果质点在力场 $\boldsymbol{F}$ 中由起点 P_1 沿任何一条路径运动到终点 P_2 (图 10)，$\boldsymbol{F}$ 对 M 做的功 W 均是一样的。则称该力场 $\boldsymbol{F}$ 为保守力场，简称保守力。

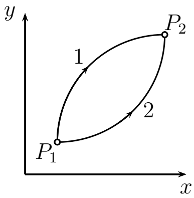

图 10: 分别沿路径 1 和 2 由起点到终点，保守力场做的功 $W_1 = W_2$

定义 3 .2 (势能函数) 对于保守力场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 引入一标量场 $V(\boldsymbol{r})$ 以满足

$$V(\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r}_0) = -\int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}' = -W \tag{3 .4}$$

其中 γ 为由 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}$ 的任一路径。该标量场 $V(\boldsymbol{r})$ 称作势能函数，简称势能。

习惯上，对势能的称谓会加上相应力场的名称，比如重力势能、弹性势能。定义式(3 .4)给出的其实是点 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 之间的势能差 ΔV，为了得到 $V(\boldsymbol{r})$ 的表达式，通常选取空间一固定点 $\boldsymbol{r}_0$，并规定 $V(\boldsymbol{r}_0) = 0$，即选取 $\boldsymbol{r}_0$ 为势能零点。按照如此方法得到的 $V(\boldsymbol{r})$ 其实是 $\boldsymbol{r}$ 和势能零点 $\boldsymbol{r}_0$ 之间的势能差。力学上要用到的是势能差，换句话说，势能差才具有物理意义。

关于势能的定义，可比较位矢的定义；其实，位矢是指位移——即质点相对于参考点 O 的“位置差”或位移，它给出的是质点的相对位置而不是绝对位置。

定义 3 .3 (中心力场) 中心力场具有如图 11所示的属性：沿空间每个点上力的方向的延长线均交汇于一共同点，该点称作力心；并且与力心等距离的点上的力大小相等。如果以力心为坐标系的原点，那么中心力场可表示为：$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{e}_r$[1]。

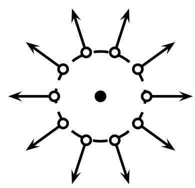

图 11: 中心力场

定律 3 .1 中心力场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{e}_r$ 是保守力场，其势能只依赖于到力心的距离：$V(\boldsymbol{r}) = V(r)$。

证明：设 γ 为由 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}$ 的任一路径，即 $\gamma = \{\boldsymbol{r}'(t) \,|\, \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}'(t_1), \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t_2), t_1 \le t \le t_2\}$。由(3 .4)可得

$$\begin{aligned}
V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}' = V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{f(r'(t))}{r'(t)} \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{t}) \cdot d\boldsymbol{r}'(t) \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{t_1}^{t_2} f(r'(t)) dr'(t) = V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{r_0}^{r} f(r') dr' \\
&\xrightarrow{V(\boldsymbol{r}_0)=0} -\int_{r_0}^{r} f(r') dr' = V(r)
\end{aligned}$$

例 3 .2 对万有引力 $\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$，有势能

$$\begin{aligned}
V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}' = V(\boldsymbol{r}_0) + \int_{t_1}^{t_2} G\frac{Mm}{(r'(t))^2} dr'(t) \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) + \int_{r_0}^{r} G\frac{Mm}{r'^2} dr' = V(\boldsymbol{r}_0) + GMm\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \\
&\xrightarrow{V(\boldsymbol{r}_0)=0} GMm\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \xrightarrow{r_0=+\infty} -\frac{GMm}{r}
\end{aligned}$$

注意，为了让势能函数的表达式简洁，通常选取特定的空间位置为势能零点，此例中的势能零点为无穷远处。

[1]其中 $\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$，$|f(r)|$ 表示力的大小——仅是距离 r 的函数；或者 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{r}$，不过此时 $|rf(r)|$ 表示力的大小。

3.3 机械能守恒定律

对于保守力场 $\boldsymbol{F}$，定义机械能 $E = E_k + V$。由动能定理 (3.3)和势能的定义(3.4)，可知

$$E_{k2} - E_{k1} = \int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -(V(\boldsymbol{r}_2) - V(\boldsymbol{r}_1)) \tag{3.5}$$

其中运动轨迹 $\gamma = \{\boldsymbol{r}(t) \,|\, \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1), \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}(t_2), t_1 \le t \le t_2\}$。由 (3.5)可知

$$E_{k2} + V(\boldsymbol{r}_2) = E_{k1} + V(\boldsymbol{r}_1) \tag{3.6}$$

等式(3.6)意味在保守力场中运动的质点，其机械能不随时间变化，此即机械能守恒定律。

3.4 一维势能曲线、简谐近似

由势能定义(3.4)可知

$$\Delta V = V(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r}) = -\int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}'$$

γ 为由起点 $\boldsymbol{r}$ 到终点 $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ 的任一路径，由于对于保守力场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 积分不依赖于路径，因此我们可以选取 $\gamma = \{\boldsymbol{r}'(t) \,|\, \boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r} + t\Delta\boldsymbol{r}, 0 \le t \le 1\}$，即 γ 为由 $\boldsymbol{r}$ 到 $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ 的一段直线。由此可得

$$\Delta V = -\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r} + t\Delta\boldsymbol{r}) \cdot \Delta\boldsymbol{r} dt = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r} + \tau\Delta\boldsymbol{r}) \cdot \Delta\boldsymbol{r}$$

其中 $\tau \in [0, 1]$，最后的等式利用了积分中值定理。当位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 趋于无穷小时，有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r} + \tau\Delta\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) + o(\Delta\boldsymbol{r})$，可得 $dV(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$。因为

$$\begin{aligned} dV(\boldsymbol{r}) &= V_x(\boldsymbol{r})dx + V_y(\boldsymbol{r})dy + V_z(\boldsymbol{r})dz \\ &= [V_x(\boldsymbol{r})\boldsymbol{i} + V_y(\boldsymbol{r})\boldsymbol{j} + V_z(\boldsymbol{r})\boldsymbol{k}] \cdot (dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}) \\ &= \nabla V(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

所以 $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) + \nabla V(\boldsymbol{r})) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$。鉴于 $d\boldsymbol{r}$ 为沿任意方向的矢量，故有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r}) \tag{3.7}$$

式(3.4)和 (3.7)可视作给出了势能与力场二者之间的转换。

我们知道梯度 ∇V 是指向 V 上升最快的方向，而力 $\boldsymbol{F}$ 的方向与其相反，指向势能下降最快的方向。

关于在保守力场中质点的运动特征，与力比较起来，势能更容易给出直观的物理图像。以一维情形为例，图 12给出了势能 $V(x)$ 的函数曲线；由该势能曲线可以直观地知道，对于机械能为 E 的质点，其运动范围限于 $[x_1, x_2]$（一旦超过该区域，其动能为负值）。位置 x_e^u、x_e^s 为 $V(x)$ 的极值点，当质点处于这些位置时受力为零（$\boldsymbol{F}(x) = -\frac{dV(x)}{dx}\boldsymbol{i}$），故把它们称作平衡位置。不同的是，$x_e^u$ 对应不稳定平衡，而 x_e^s 则对应稳定平衡。因为力会驱使质点向势能减小的方向运动，所以一旦质点偏离平衡位置，对于 x_e^u 则会远离，而对于 x_e^s 则会回归。图 13展示了三种类型的平衡，分别对应于小球处于山坡、山谷与平地时在重力作用下的运动方式。（为何有这样直观的对应，请大家思考一下。）

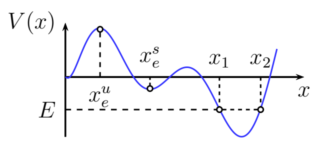

图 12: 势能曲线

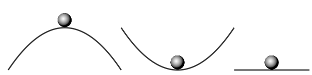

图 13: 不稳定、稳定及随遇平衡（从左至右）

当质点在稳定平衡位置 x_0 附近运动时，力的作用如同弹簧的恢复力，驱使质点围绕 x_0 做往返运动；当运动的区域足够小时——这由机械能的大小所决定，质点的运动与弹簧振子的运动可能具有相似性，这一点可以通过所谓的简谐近似加以验证。首先，将势能 $V(x)$ 在 x_0 处进行局部泰勒展开到二阶项，并利用 $V'(x_0)=0$，可得

$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

当 x 与 x_0 之间的距离足够小时，该展开式很好地逼近 $V(x)$。平衡位置 x_0 的稳定性依赖于 $V''(x_0)$ 取值，$V''(x_0)<0$ 对应不稳定平衡，$V''(x_0)>0$ 则对应稳定平衡。如果 x_0 为稳定平衡位置时，那么由牛顿第二定律和(3 .7)可得质点的运动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \approx -V''(x_0)(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{V''(x_0)}{m}(x-x_0) = 0 \qquad (3\ .8)$$

然后进行坐标变换 $y(t)=x(t)-x_0$（即 y 为在以 x_0 为原点的新坐标系中的坐标），并记 $\omega=\sqrt{V''(x_0)/m}$，方程(3 .8)转换为

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad (3\ .9)$$

方程(3 .9)与弹簧振子的运动方程在数学形式上是完全一致的。简谐近似拓宽了弹簧振子（或谐振子）模型的应用范围，以后当提到“围绕平衡位置作微小振动”，即意味着要进行简谐近似。