1 第一单元

习题 1 .1 一球以初速 v_0 竖直上抛，经过时间 t_0 后在同一地点以同样速率向上抛出另一小球。两球在多高处相遇？(P.39:Prob.1-6)

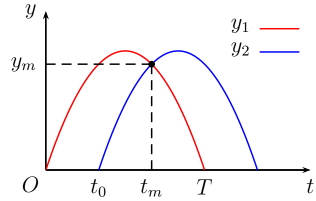

图 1: 习题1 .1

解：设 $y_1(t)$、$y_2(t)$ 分别表示第一、第二小球在 t 时刻到达的高度，于是有

$$\begin{aligned} y_1(t) &= v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad t \geq 0 \\ y_2(t) &= y_1(t-t_0) \\ &= v_0(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2, \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

图 1给出了 y_1 和 y_2 的函数曲线，显然二者的交点 (t_m, y_m) 表示在 t_m 时刻在高度 y_m 处两小球相遇。根据 $y_1(t_m) = y_2(t_m)$，可得

$$t_m = \frac{t_0}{2} + \frac{v_0}{g} \quad \Rightarrow \quad y_m = y_1(t_m) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt_0^2}{8}$$

t_m 还可以用另一种方法获得，图 1中的 T 表示第一个小球由抛起到返回初始位置所经历的时间，其值为 $\frac{2v_0}{g}$，由对称性可知 t_m 处于 t_0 和 T 的中间位置，即 $t_m = (T-t_0)/2 + t_0$。

习题 1 .2 在同一竖直面内的同一水平线上 A、B 两点分别以 $30°$、$60°$ 为发射角同时抛出两个小球，欲使两球在各自轨道的最高点相遇，求 A、B 两点之间的距离。已知小球 A 的初速为 $v_{A0} = 9.8m/s$。(P.39:Prob.1-10)

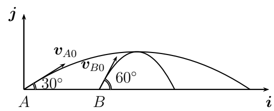

图 2: 习题1 .2

解：建立以 A 点为原点的坐标系，水平向右为 x 轴的指向，竖直向上为 y 轴的指向，并以小球上抛时刻为初始时刻 $t=0$。因此，两小球（分别称作 A 球和 B 球）的运动轨迹为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_A(t) &= x_A(t)\boldsymbol{i} + y_A(t)\boldsymbol{j} = (\cos 30° v_{A0} t)\boldsymbol{i} + (\sin 30° v_{A0} t - \tfrac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{r}_B(t) &= x_B(t)\boldsymbol{i} + y_B(t)\boldsymbol{j} = (d_{AB} + \cos 60° v_{B0} t)\boldsymbol{i} + (\sin 60° v_{B0} t - \tfrac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

其中 d_{AB} 为 A、B 两点之间的距离，v_{B0} 为 B 球的初速。设在最高点相遇的时刻为 t_m，则有：

$$\frac{dy_A(t_m)}{dt} = 0, \quad \boldsymbol{r}_A(t_m) = \boldsymbol{r}_B(t_m)$$

未知量 d_{AB}、v_{B0} 和 t_m 可由上述三个标量方程求得，其中 $d_{AB} = \frac{\sqrt{3}v_{A0}^2}{6g}$。

习题 1 .3 已知炮弹的发射角为 θ，初速为 v_0，求抛物线轨道的曲率半径随高度的变化。(P.40:Prob.1-12)

解：建立以初始位置为原点、水平方向为 x 轴及竖直方向为 y 轴的坐标系。由初速度 $\boldsymbol{v}(0) = v_0\cos\theta\boldsymbol{i} + v_0\sin\theta\boldsymbol{j}$ 和加速度 $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j}$，可得 t 时刻的速度和位矢：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= v_0\cos\theta\boldsymbol{i} + (v_0\sin\theta - gt)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{r}(t) &= x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} = v_0\cos\theta t\boldsymbol{i} + (v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

由此可得曲率半径：

$$\rho=\frac{v^2}{|\boldsymbol{a}_n|}=\frac{v^2}{|\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}|}=\frac{v^2}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})^2}}=\frac{v^3}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2v^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}}$$
$$=\frac{[(v_0\cos\theta)^2+(v_0\sin\theta-gt)^2]^{\frac{3}{2}}}{gv_0\cos\theta}=\frac{[v_0^2-2g(v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2)]^{\frac{3}{2}}}{gv_0\cos\theta}$$
$$=\frac{(v_0^2-2gy)^{\frac{3}{2}}}{v_0g\cos\theta}$$

习题 1 .4 一弹性球自静止竖直地落在斜面上的 A 点，下落高度 $h=0.2m$，斜面与水平夹角 $\theta=30°$。问弹性球第二次碰到斜面的位置 B 距 A 多远。设弹性球与斜面碰撞前后速度数值相等，碰撞时入射角等于反射角。（P.40:Prob.1-13）

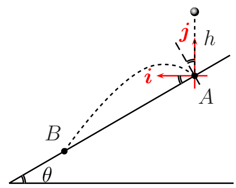

图 3: 习题1 .4

解：建立以 A 点为原点的坐标系，水平向左为 x 轴的指向，竖直向上为 y 轴的指向，并以弹性球第一次碰撞为初始时刻 $t=0$。因此弹性球的运动轨迹可表示为：

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}=(\cos\theta v_0t)\boldsymbol{i}+(\sin\theta v_0t-\tfrac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

其中初速 $v_0=\sqrt{2gh}$。设经历时间 t_m 发生第二次碰撞，则有

$$\boldsymbol{r}(t_m)=\overrightarrow{AB}=d_{AB}(\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j})$$

其中 d_{AB} 为 A、B 两点之间的距离。未知量 t_m 和 d_{AB} 可由上述矢量等式求得，结果为 $d_{AB}=0.8cm$。

习题 1 .5 计算曲线：$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}$ 在 x 处的曲率。

还可以时间 t 为参数。

解法一：该曲线显然是以参数 x 表达的，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x)=x\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}$，因此按参数 x 运动的速度与加速度为：

$$\boldsymbol{v}(x)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}=\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{a}(x)=\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}=e^x\boldsymbol{j}$$

由此可得：

$$\kappa=\frac{|\boldsymbol{a}_n|}{v^2}=\frac{\sqrt{[\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}]^2}}{v^2}=\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}^2v^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}}{v^3}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

解法二：以自然参数 s 表示曲线：$\boldsymbol{r}(s)=x(s)\boldsymbol{i}+e^{x(s)}\boldsymbol{j}$，其中参数 s 与 x 有以下函数关系：

$$s(x)=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+e^{2x'}}dx'\quad\Rightarrow\quad\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+e^{2x}}$$

积分下限 x_0 为起始位置。显然 s 是关于 x 的单调递增函数，二者之间有一一对应关系，因此存在反函数 $x=x(s)$，并且 $\frac{dx}{ds}=(\frac{ds}{dx})^{-1}$。按参数 s 运动的速度与加速度为：

$$\boldsymbol{v}(s)=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}}{\sqrt{1+e^{2x}}},\quad \boldsymbol{a}(s)=\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{e^x\boldsymbol{j}-e^{2x}\boldsymbol{i}}{(1+e^{2x})^2}$$

由此可得：

$$\kappa=|\boldsymbol{a}(s)|=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$