【傅里叶级数】

【三角函数的正交基底】

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin mx\sin nx\,dx = 0 \quad (m\neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx\sin nx\,dx = 0 \quad (m\neq n 或 m=n)$$

$\Longrightarrow$

【周期函数的级数表示】

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx + b_n\sin nx)$$

通过左乘右乘 $\cos mx$ 后积分周期后得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

同理乘 $\sin mx$ 后可得

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

【上述函数收敛性 —— Dirichlet 定理】

Suppose:

(1) $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内除有限点外有定义且单值

(2) $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 外是周期函数，周期为 2π.

(3) $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内分段连续【即 $f(x)$ 分段光滑】

则傅里叶级数收敛于

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = f(x) \quad (连续点)$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \quad (间断点)$$

⇒ [2L为周期(推广)]

$$\begin{cases} f(x+2L)=f(x) \\ f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x\right) \end{cases}$$

⇒

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt \\ a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi}{L}t\,dt \\ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi}{L}t\,dt \end{cases}$$

e.g.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(\pi-x) & (0<x\le 2\pi) \\ f(x+2\pi) & (x\text{在其他点}) \end{cases} \Longrightarrow S_m(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{1}{2}(\pi-x)$$

$(0<x<2\pi)$

[半幅傅里叶级数]

(正弦式) $\phi(x)$在 $0<x<L$ 内分段光滑

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$C_n=\frac{2}{L}\int_0^L\phi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(余弦式)

$$\phi(x)=D_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$D_0=\frac{1}{L}\int_0^L\phi(x)dx$$

$$D_n=\frac{2}{L}\int_0^L\phi(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(正交性)

→ Kronecker delta.

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = L\cdot\frac{\delta_{mn}}{2}$$

$$\int_0^L \cos\frac{m\pi x}{L}\,\cancel{\sin}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = L\cdot\frac{\delta_{mn}}{2}$$

$\Rightarrow$

[半幅傅里叶另一种表述]

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}dx$$

$$D_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}dx$$

[傅里叶积分]

(绝对可积)

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx > \int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx = \text{有限值}$$

(另一方面满足)

$x\to\pm\infty$ 时，$f(x)\to 0$.

$$\begin{cases} f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x \\ f(x+2L)=f(x)\end{cases} \xRightarrow{L\to\infty} \begin{cases} f(x)=\int_0^{\infty}[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx]dw \\ a_0\to 0.\quad \Delta w\to dw\end{cases}$$

$\Rightarrow$ (无限域单边傅里叶变换)

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx]dx$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos wt\,dt$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\sin wt\,dt.$$

$\Rightarrow$

I. $f(x)$ 代表一个"信号"，$A(w)$、$B(w)$ 则为频谱分布函数，$\cos wt$、$\sin wt$ 相当于正交分量。

II. $f(t)$ 为偶函数，$B(w)=0$

$f(t)$ 为奇函数，$A(w)=0$

III. 重要积分公式

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(w\pi/2)}{1-w^2}dw=\frac{\pi}{2}$$

【傅里叶变换】

傅里叶积分 $w\in[0,\infty)$ $\longrightarrow$ 傅里叶变换 $w\in(-\infty,\infty)$

(引入)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{w=0}^{\infty}\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)(\cos wt\cos wx+\sin wt\sin wx)\,dt\,dw$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos w(x-t)\,dt\,dw$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}\cos w(x-t)\,dw\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} f(t)e^{iw(x-t)}\,dw+\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iw(x-t)}\,dw\right]dt$$

(由 $\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iw(x-t)}\,dw = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{iw(x-t)}\,dw$)

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt\,e^{iwx}\,dw$$

$\Longrightarrow$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iw(x-t)}\,dw\right]dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt}_{F(w)}\,e^{iwx}\,dw$$

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwx}\,dw$$

$\Longrightarrow$

$F(w)=\mathcal{F}\{f(x)\}$

$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\{F(w)\}$

$\Longrightarrow$ $F(w)\Longleftrightarrow f(x)$ $\Longrightarrow$

(象函数) (原函数)

$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\,dw$

e.g.

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a \\ 0, & |x|>a\end{cases} \Rightarrow F(w)=2\frac{\sin aw}{w}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin aw \cos wx}{w}dw$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin aw}{w}dw=\mathrm{sgn}(a)\cdot\frac{\pi}{2}$$

【性质】

I. 线性变换

$$\mathcal{F}\{c_1f_1+c_2f_2\}=c_1\mathcal{F}\{f_1\}+c_2\mathcal{F}\{f_2\}$$

II. 微分定理 I

$$\frac{df(x)}{dx}\longleftrightarrow iwF(w) \Rightarrow f^{(n)}(x)\longleftrightarrow(iw)^nF(w)$$

III. 微分定理 II.

$$xf(x)\longleftrightarrow i\frac{d}{dw}F(w)$$

IV. 积分定理

$$\int_{x_0}^{x}f(x)dx\longleftrightarrow\frac{F(w)}{iw}$$ （积分 x_0 取任意值）

V. 位移定理

$$f(x+\xi)\longleftrightarrow e^{iw\xi}F(w)$$

VI. 卷积定义与定理

设函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 均定义在 $(-\infty,\infty)$ 内，则其卷积定义：

$$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$$

(定理)　　$f_1(x) * f_2(x) \longleftrightarrow F_1(w) F_2(w)$

(性质)

$$f_1(x) * f_2(x) = f_2(x) * f_1(x)$$

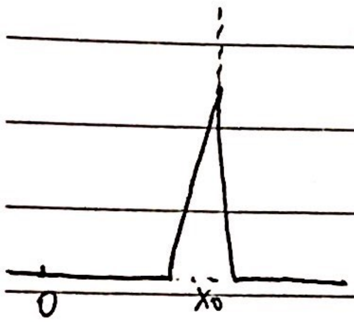
对于偶函数 $f(-x) = f(x)$，满足

$$\begin{cases} f(x) * \cos wx = F(w) \cos wx \\ f(x) * \sin wx = F(w) \sin wx \end{cases}$$

对于奇函数 $h(-x) = -h(x)$

$$\begin{cases} h(x) * \cos wx = iH(w) \sin wx \\ h(x) * \sin wx = -iH(w) \cos wx \end{cases}$$

[δ函数] Dirac delta Function



$$\Rightarrow \delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & (x \neq x_0) \\ \infty & (x = x_0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-x_0)\, dx = f(x_0)$$

⇒物理含义：　　　　量纲：

质点线密度 $m\delta(x-x_0)$　　　　$[\delta(x)] = 1/[x]$

电荷线密度 $q\delta(x-x_0)$

冲量密度 $K\delta(x-x_0)$

[δ函数性质]

① $\delta(-x)=\delta(x)$

② $\delta(x)*f(x)=f(x)$

③ $\delta(x-a)*f(x)=f(x-a)$

④ $\delta(x-a)*\delta(x-b)=\delta[x-(a+b)]$

⑤ $x\delta(x-x_0)=x_0\delta(x-x_0)$

⑥ $x\delta(x)=0$

⑦ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_1)\delta(x-x_2)dx=\delta(x_1-x_2)$

⑧ $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\delta(\xi-x)d\xi$

⑨

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}d\omega$$

⑩

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}dx \Leftarrow \delta(x)=\delta(-x)$$

[δ函数的辅助函数]

(1) $\delta(x)$在$x=0$处为无穷大，其他处为零

(2) $\delta(x)$是归一化分布函数 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$

$\Longrightarrow$ 引入$F_\beta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_\beta(x)dx=1$$

$$\lim_{\beta\to\beta_0}F_\beta(x)=\delta(x)$$

[常见傅氏变换]

①

$\cos kx \longrightarrow \pi[\delta(w+k)+\delta(w-k)]$

$\sin kx \longrightarrow i\pi[\delta(w+k)-\delta(w-k)]$

②

$e^{-a|t|} \longrightarrow 2a/(a^2+w^2)$

③

$\delta(x) \longrightarrow 1$

$1 \longrightarrow 2\pi\delta(w)$

$e^{jw_0t} \longrightarrow 2\pi\delta(w-w_0)$