习题 1 .6 设有笛卡尔坐标系 1 和 2，$t=0$ 时两者重合（即有相同的原点、x 轴和 y 轴）。随后，坐标系 2 原点相对坐标系 1 原点以速度 (v_x, v_y) 作匀速平移运动，同时坐标系 2 还围绕其原点以角速度 $\omega_2(>0)$ 作逆时针旋转运动。如一质点在坐标系 1 中的运动轨迹为：$x_1(t)=r\cos(\omega_1 t)$，$y_1(t)=r\sin(\omega_1 t)$，请问其在坐标系 2 中的运动轨迹（即确定 $x_2(t)$ 和 $y_2(t)$）。

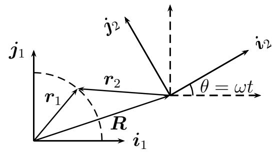

图 4: 习题1 .6

解：如图 4所示，质点在坐标系 1 中对应位矢 $\boldsymbol{r}_1(t)=x_1(t)\boldsymbol{i}_1+y_1(t)\boldsymbol{j}_1$，在坐标系 2 中对应位矢 $\boldsymbol{r}_2(t)=x_2(t)\boldsymbol{i}_2+y_2(t)\boldsymbol{j}_2$，坐标系 2 原点在坐标系 1 中的观察者看来对应位矢 $\boldsymbol{R}(t)=(v_x t)\boldsymbol{i}_1+(v_y t)\boldsymbol{j}_1$，并且三者满足关系：

$$\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{r}_2(t)+\boldsymbol{R}(t)$$

在 t 时刻，基矢量 $\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{j}_2$ 与 $\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{j}_1$ 有以下关系：

$$\boldsymbol{i}_2=\cos\theta\boldsymbol{i}_1+\sin\theta\boldsymbol{j}_1,\quad \boldsymbol{j}_2=-\sin\theta\boldsymbol{i}_1+\cos\theta\boldsymbol{j}_1$$

因此可得：

$$\begin{aligned}x_2(t)&=\boldsymbol{i}_2\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{R})=r\cos((\omega_1-\omega_2)t)-vt\cos(\omega_2 t-\varphi)\\ y_2(t)&=\boldsymbol{j}_2\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{R})=r\sin((\omega_1-\omega_2)t)+vt\sin(\omega_2 t-\varphi)\end{aligned}$$

其中 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ 和 $\varphi=\arccos(v_x/v)$。

习题 1 .7 极坐标系中的对数螺线可表示为 $r=r_0e^{\alpha\theta}$，试求出曲率半径分布 $\rho(r)$。

解：在极坐标系中，该对数螺线以参数 θ 可表示为 $\boldsymbol{r}(\theta)=r_0e^{\alpha\theta}\boldsymbol{e}_r$，由此可得按参数 θ 运动的速度和加速度：

$$\boldsymbol{v}(\theta)=\frac{d\boldsymbol{r}(\theta)}{d\theta}=r_0e^{\alpha\theta}(\alpha\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{e}_\theta) \tag{1 .1}$$

$$\boldsymbol{a}(\theta)=\frac{d\boldsymbol{v}(\theta)}{d\theta}=\alpha r_0e^{\alpha\theta}(\alpha\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{e}_\theta)+r_0e^{\alpha\theta}(\alpha\boldsymbol{e}_\theta-\boldsymbol{e}_r) \tag{1 .2}$$

比较式(1 .1)和(1 .2)可知，(1 .2)等号右端第一项与 $\boldsymbol{v}(\theta)$ 共线而第二项则与 $\boldsymbol{v}(\theta)$ 垂直，因而法向加速度为 $\boldsymbol{a}_n(\theta)=r_0e^{\alpha\theta}(\alpha\boldsymbol{e}_\theta-\boldsymbol{e}_r)$，因此有：

$$\rho(r)=\frac{v^2(\theta)}{|\boldsymbol{a}_n(\theta)|}=r_0e^{\alpha\theta}\sqrt{1+\alpha^2}=r\sqrt{1+\alpha^2}$$

习题 1 .8 极坐标系中的方程 $r=A(1-\cos\theta)$，对应一条心脏线。如图 5所示，试求心底 P 处曲率半径 ρ。

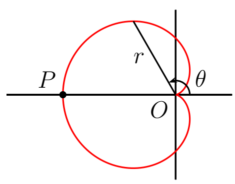

图 5: 心脏线

解：在极坐标系中，该心脏线以参数 θ 的表示为：$\boldsymbol{r}(\theta)=A(1-\cos\theta)\boldsymbol{e}_r$，由此可得按参数 θ 运动的速度和加速度

$$\boldsymbol{v}(\theta)=\frac{d\boldsymbol{r}(\theta)}{d\theta}=A\sin\theta\boldsymbol{e}_r+A(1-\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a}(\theta)=\frac{d\boldsymbol{v}(\theta)}{d\theta}=A(2\cos\theta-1)\boldsymbol{e}_r+2A\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

心底 P 对应 $\theta=\pi$，有 $\boldsymbol{v}(\pi)=2A\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{a}(\pi)=-3A\boldsymbol{e}_r$，显然二者垂直。因此

$$\rho(P)=\frac{\boldsymbol{v}^2}{|\boldsymbol{a}_n|}=\frac{\boldsymbol{v}^2}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{4A}{3}$$

习题 1 .9 小球从同一位置以相同的初速率 v_0，在同一竖直平面上朝着不同方向斜抛出去，如果抛射角 θ 可在 0 到 π 范围内连续变化，试问各轨道最高点连成的曲线是什么类型的曲线?

解：对给定抛射角 θ 的抛体运动，小球的运动轨迹为一抛物线，具有唯一确定的最高点 $\boldsymbol{r}_m$，即最高点 $\boldsymbol{r}_m$ 与抛射角 θ 有一对一的函数关系。为此，我们首先要给出该函数关系：$\boldsymbol{r}_m(\theta)$。

在以初始位置为原点、以水平方向为 x 轴、以竖直方向为 y 轴的笛卡尔坐标系，小球的运动轨迹关于时间 t 的参数表示为：

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} = v_0 t\cos\theta\boldsymbol{i} + (v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

设 t_m 表示小球达到最高点 $\boldsymbol{r}(t_m)$ 所需的时间，由 $y'(t_m) = 0$ 可知

$$t_m = \sin\theta v_0/g \tag{1 .3}$$

因此

$$\boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{r}(t_m) = \frac{1}{g}v_0^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{i} + \frac{1}{2g}v_0^2\sin^2\theta\boldsymbol{j} = x_m(\theta)\boldsymbol{i} + y_m(\theta)\boldsymbol{j}$$

然后把以参数 θ 表示的曲线 $\boldsymbol{r}_m(\theta)$ 转换为等高线（即所谓的轨迹方程）。注意到 $\frac{x_m}{a} = \sin\theta\cos\theta$ 和 $\frac{y_m}{b} = \sin^2\theta$，其中 $a = v_0^2/g$ 和 $b = v_0^2/(2g)$，可得

$$\frac{x_m^2}{a^2} = \frac{y_m}{b} - \frac{y_m^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_m^2}{(a/2)^2} + \frac{(y_m - b/2)^2}{(b/2)^2} = 1$$

由此可知各轨道最高点连成的曲线为一椭圆。