通信原理

第2章 确知信号

第2章 确知信号

2.1 确知信号的类型

- 按照周期性区分：
  - 周期信号：$s(t) = s(t + T_0), \qquad -\infty < t < +\infty$

    T_0 - 信号的周期， $T_0 > 0$
  - 非周期信号
- 按照能量区分：
  - 能量信号：能量有限， $0 < E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt < \infty$
  - 功率信号：
    - 归一化功率：$P = V^2 / R = I^2 R = V^2 = I^2$
    - 平均功率P为有限正值：$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt$
- 能量信号的功率趋于0，功率信号的能量趋于∞

第2章 确知信号

2.2 确知信号的频域性质

2.2.1 功率信号的频谱

- 周期性功率信号频谱（函数）的定义

$$C_n = C(nf_0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{-j2\pi nf_0 t}dt \qquad (2.2-1)$$

式中，$f_0 = 1/T_0$，n为整数，$-\infty < n < +\infty$。

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi nt/T_0} \qquad (2.2-2)$$

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)dt \qquad (2.2-3)$$

$C_n = |C_n|e^{j\theta_n}$ - 双边谱，复振幅 (2.2 - 4)

$|C_n|$ - 振幅， θ_n - 相位

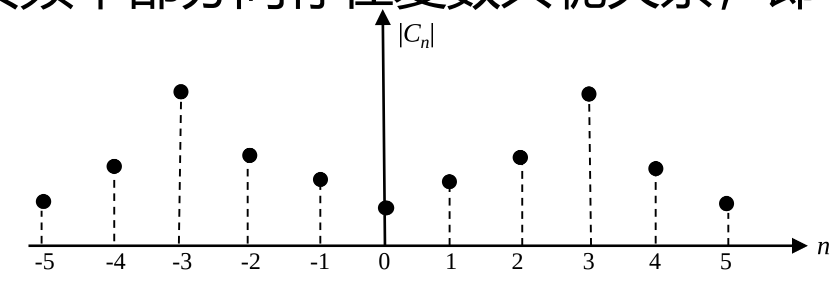
第2章 确知信号

- 周期性功率信号频谱的性质
  - 对于物理可实现的实信号，由式(2.2 - 1)有

$$C_{-n}=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)e^{+j2\pi nf_0t}dt=\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt\right]^*=C_n^* \qquad (2.2-5)$$

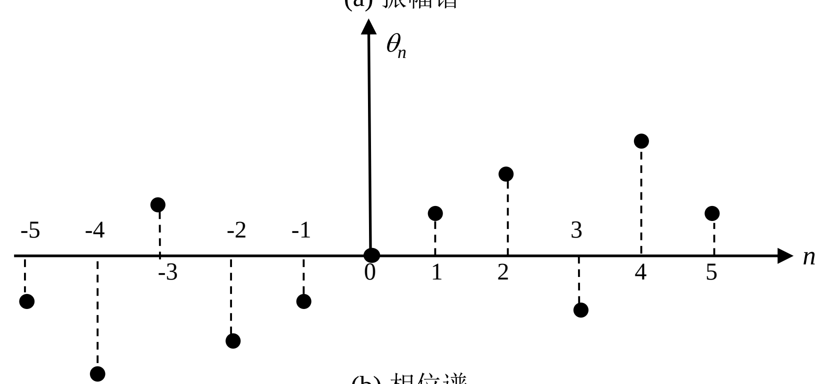
正频率部分和负频率部分间存在复数共轭关系，即

C_n的模偶对称



(a) 振幅谱

C_n的相位奇对称



(b) 相位谱

将式(2.2 - 5)代入式(2.2 - 2)，得到

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{j2\pi nt/T_0}=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(2\pi nt/T_0)+b_n\sin(2\pi nt/T_0)\right]$$

$$=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(2\pi nt/T_0+\theta)\right] \qquad (2.2-8)$$

式中 $\theta=\tan^{-1}(b_n/a_n)$ $\quad |C_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

式(2.2 - 8)表明:

1. 实信号可以表示成包含直流分量C_0、基波(n = 1时)和各次谐波(n = 1, 2, 3, …)。

2. 实信号$s(t)$的各次谐波的振幅等于 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

3. 实信号$s(t)$的各次谐波的相位等于θ

（2、3）称为单边谱。

4. 频谱函数C_n又称为双边谱，$|C_n|$的值是单边谱的振幅之半。

第2章 确知信号

- 若$s(t)$是实偶信号，则 C_n为实函数。 因为

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{-j2\pi nf_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)[\cos(2\pi nf_0 t) - j\sin(2\pi nf_0 t)]dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\cos(2\pi nf_0 t)dt - j\frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\sin(2\pi nf_0 t)dt = \mathrm{Re}(C_n) - j\,\mathrm{Im}(C_n)$$

而 $$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\sin(2\pi nf_0 t)dt = 0$$

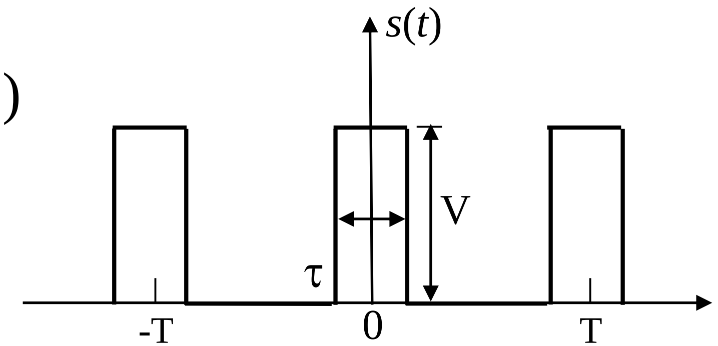
所以C_n为实函数。

第2章 确知信号

- 【例2.1】 试求图2-2(a)所示周期性方波的频谱。

$$s(t)=\begin{cases} V, & -\tau/2 \le t \le \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < t < (T-\tau/2) \end{cases}$$

$$s(t)=s(t-T), \qquad -\infty < t < \infty$$

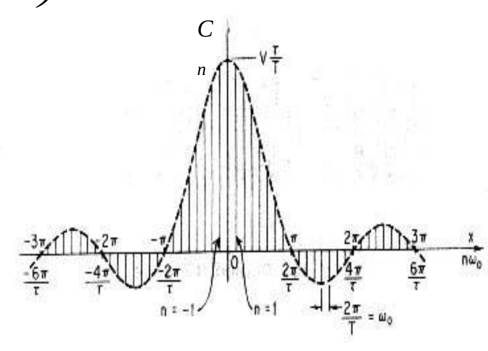


由式(2.2-1)：

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{V}{j2\pi n f_0}e^{-j2\pi n f_0 t}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$=\frac{V}{T}\frac{e^{j2\pi n f_0 \tau/2}-e^{-j2\pi n f_0 \tau/2}}{j2\pi n f_0}=\frac{V}{\pi n f_0 T}\sin \pi n f_0 \tau=\frac{V\tau}{T}\sin c\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{V\tau}{T}\sin c\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)e^{j2\pi n f_0 t}$$

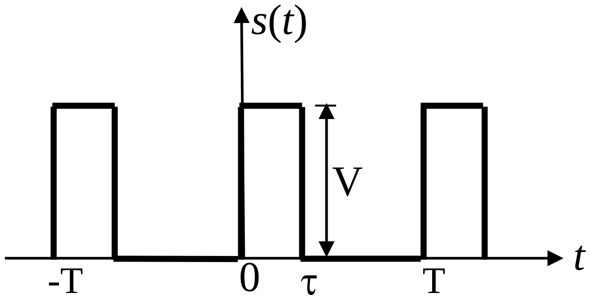


第2章 确知信号

- 【例2.2】试求图2-3所示周期性方波的频谱。

$$s(t)=\begin{cases}V, & 0\le t\le\tau\\ 0, & \tau<t<T\end{cases}$$

$$s(t)=s(t-T), \qquad -\infty<t<\infty$$



由式(2.2-1)：

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^{\tau}Ve^{-j2\pi nf_0t}dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{V}{j2\pi nf_0}e^{-j2\pi nf_0t}\right]_0^{\tau}$$

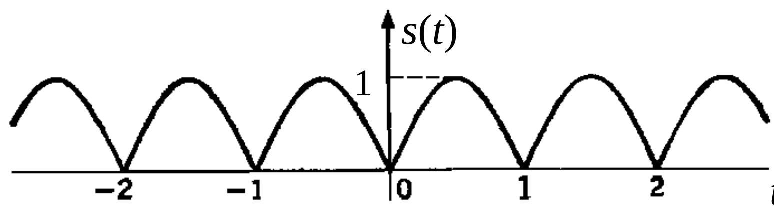
$$=\frac{V}{T}\frac{1-e^{-j2\pi nf_0\tau}}{j2\pi nf_0}=\frac{V}{j2\pi n}\left(1-e^{-j2\pi n\tau/T}\right)$$

因为此信号不是偶函数，其频谱C_n是复函数。

- 【例2.3】试求图2-4中周期波形的频谱。

$$s(t) = \sin(\pi t) \qquad 0 < t \le 1$$

$$s(t) = f(t-1) \qquad -\infty < t < +\infty$$



由式(2.2-1)：

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt = \int_0^1 \sin(\pi t)e^{-j2\pi n t}dt = \frac{-2}{\pi(4n^2-1)}$$

$$s(t) = \frac{-2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{j2\pi n t}$$

由于此波形为偶函数，故其频谱为实函数。

第2章 确知信号

- 2.2.2 能量信号的频谱密度
  - 频谱密度的定义：

    能量信号$s(t)$ 的傅里叶变换：$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j2\pi ft}dt$
  - $S(f)$的逆傅里叶变换为原信号：$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)e^{j2\pi ft}df$
  - $S(f)$和C_n的主要区别：
    - $S(f)$是连续谱，C_n是离散谱；
    - $S(f)$的单位是V/Hz，而C_n的单位是V。
  - 注意：在针对能量信号讨论问题时，也常把频谱密度简称为频谱。
  - 实能量信号：负频谱和正频谱的模偶对称，相位奇对称，即复数共轭，因

$$\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j2\pi ft}dt=\left[\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{+j2\pi ft}dt\right]^{*}, \qquad S(f)=\left[S(-f)\right]^{*}$$

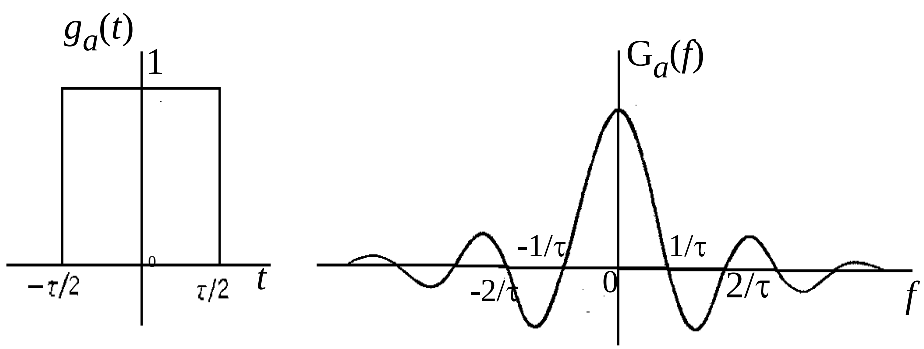
第2章 确知信号

- 【例2.4】试求一个矩形脉冲的频谱密度。

设 $g_a(t)=\begin{cases}1 & |t|\le \tau/2 \\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$ - 单位门函数

它的傅里叶变换为

$$G_a(f)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi ft}dt=\frac{1}{j2\pi f}(e^{j\pi f\tau}-e^{-j\pi f\tau})=\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}=\tau\sin c(\pi f\tau)$$



(a) $g_a(t)$　(b) $G_a(f)$

图2-5 单位门函数

矩形脉冲的带宽等于其脉冲持续时间的倒数，在这里它等于$(1/\tau)$ Hz。

第2章 确知信号

- 【例2.5】试求单位冲激函数(δ函数)的频谱密度。
  - δ函数的定义：
    $$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \end{cases}$$
  - δ函数的频谱密度：
    $$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$
  - δ函数的物理意义：

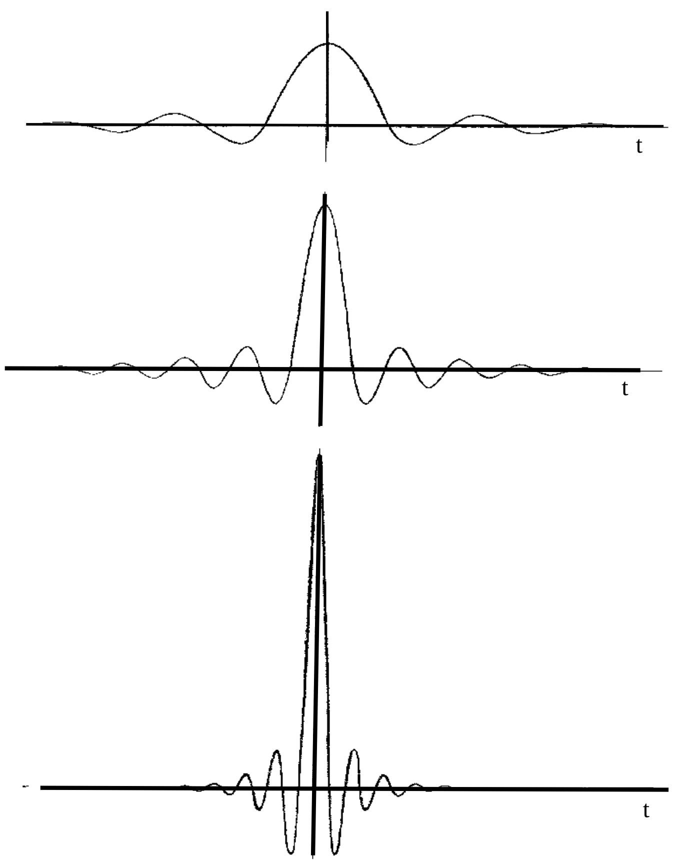
    一个高度为无穷大、宽度为无穷小、面积为1的脉冲。

第2章 确知信号

- δ函数的性质1： δ函数可以用抽样函数的极限表示：

$$\delta(t) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\pi} \sin c(kt)$$

因为，可以证明 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi} \sin c(kt) dt = 1$



式中k越大、振幅越大、波形零点的间隔越小、波形振荡的衰减越快，但积分等于1。（见左图）

和下式比较：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \qquad (2.2\text{-}26)$$

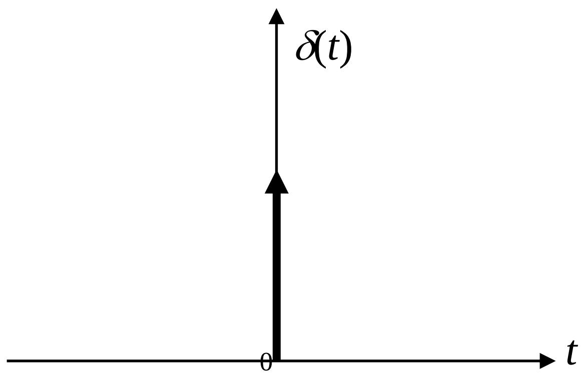
可见 $\delta(t) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\pi} \sin c(kt)$

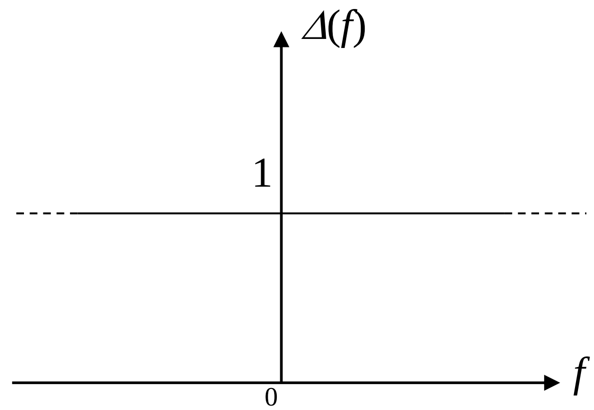
(2.2-28)

即抽样函数的极限就是δ函数。

- δ函数的性质2：单位冲激函数$\delta(t)$的频谱密度

$$\Delta(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j2\pi ft}dt=1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$





- δ函数的性质3：

$$f(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt \qquad (2.2\text{-}30)$$

【证】因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

物理意义：可以看作是用δ函数在 $t = t_0$时刻对$f(t)$抽样。

由于单位冲激函数是偶函数，即有$\delta(t) = \delta(-t)$，所以式(2.2-30)可以改写成：

$$f(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t_0-t)dt \qquad (2.2\text{-}31)$$

第2章 确知信号

- δ函数的性质4： δ函数也可以看作是单位阶跃函数 的导数。

  单位阶跃函数的定义：

$$u(t)=\begin{cases}0, & 当t<0,\\ 1, & 当t\geq 0\end{cases}$$

即 $u'(t)=\delta(t)$

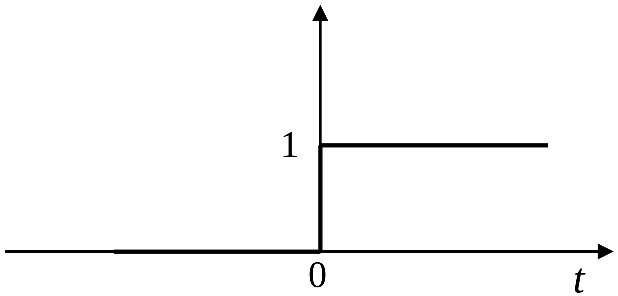


图2-8 单位阶跃函数

- 用δ函数可以表示功率信号的频谱密度，见下例。

- 【例2.6】试求无限长余弦波的频谱密度。

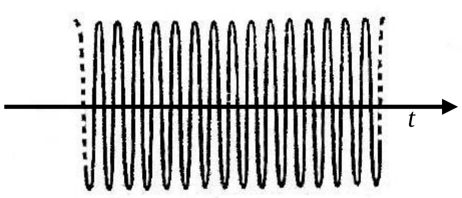
设一个余弦波的表示式为$s(t)=\cos 2\pi f_0 t$，则其频谱密度$S(f)$按式(2.2-21)计算，可以写为

$$S(f)=\lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos 2\pi f_0 t e^{-j2\pi f t}dt=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2}\left\{\frac{\sin[\pi(f-f_0)\tau]}{\pi(f-f_0)\tau}+\frac{\sin[\pi(f+f_0)\tau]}{\pi(f+f_0)\tau}\right\}$$

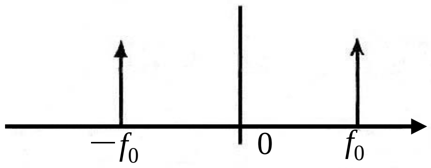
$$=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2}\{\sin c[\pi\tau(f-f_0)]+\sin c[\pi\tau(f+f_0)]\}$$

参照式(2.2-28)，上式可以改写为

$$S(f)=\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$



(a) 波形



(b) 频谱密度

引用了冲激函数就能把频谱密度的概念推广到功率信号上。

- 2.2.3 能量信号的能量谱密度
  - 定义：由巴塞伐尔(Parseval)定理

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \qquad (2.2\text{-}37)$$

将$|S(f)|^2$定义为能量谱密度。

式(2.2-37)可以改写为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)df \qquad (2.2\text{-}38)$$

式中 $G(f) = |S(f)|^2$ - 能量谱密度

  - 由于信号$s(t)$是一个实函数，所以$|S(f)|$是一个偶函数，因此上式可以改写成

$$E = 2\int_{0}^{\infty} G(f)df \qquad (2.2\text{-}40)$$

第2章 确知信号

- 【例2.7】试求例2.4中矩形脉冲的能量谱密度

在例2.4中，已经求出其频谱密度：

$$S(f) = G_a(f) = \tau \sin c(\pi f \tau)$$

故由式(2.2-39)得出

$$G(f) = |S(f)|^2 = |\tau \sin c(\pi f \tau)|^2 = \tau^2 |\sin c(\pi f \tau)|^2$$

第2章 确知信号

- 2.2.4 功率信号的功率谱密度
  - 定义：首先将信号$s(t)$截短为$s_T(t)$，$-T/2 < t < T/2$

$s_T(t)$是一个能量信号，可以用傅里叶变换求出其能量谱密度 $|S_T(t)|^2$，由巴塞伐尔定理有

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df \qquad (2.2\text{-}41)$$

将

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |S_T(f)|^2$$

定义为信号的功率谱密度$P(f)$，即

$$P(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |S_T(f)|^2$$

第2章 确知信号

- 周期信号的功率谱密度：

令T等于信号的周期T_0，于是有

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s^2(t)dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s^2(t)dt \qquad (2.2\text{-}45)$$

由周期函数的巴塞伐尔(Parseval)定理:

$$P=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C_n\right|^2 \qquad (2.2\text{-}46)$$

式中 $|C_n|^2$ - 第n次谐波的功率

利用δ函数可将上式表示为

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}\left|C(f)\right|^2\delta(f-nf_0)df \qquad (2.2\text{-}47)$$

式中

$$C(f)=\begin{cases}C_n & f=nf_0\\ 0 & \text{其他处}\end{cases}$$

上式中的被积因子就是此信号的功率谱密度$P(f)$，即

$$P(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C(f)\right|^2\delta(f-nf_0) \qquad (2.2\text{-}48)$$

- 【例2.8】试求例2.1中周期性信号的功率谱密度。

  该例中信号的频谱已经求出，它等于式(2.2-14)：

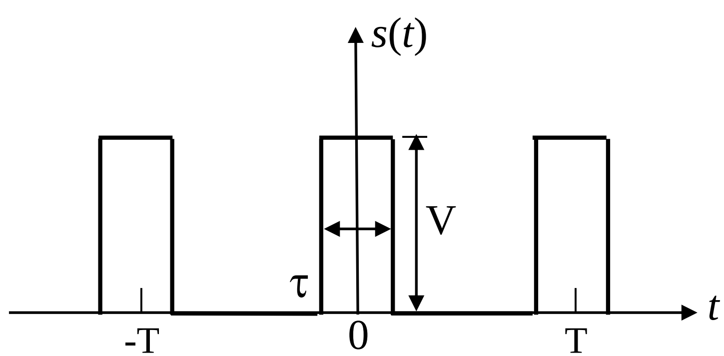
$$C_n = \frac{V\tau}{T}\sin c\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

所以由式(2.2-48)：$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C(f)|^2 \delta(f - nf_0)$

得出

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C(f)|^2 \delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{V\tau}{T}\right)^2 \sin c^2(\pi\tau f)\delta(f - nf_0)$$

(2.2-50)



2.3 确知信号的时域性质

2.3.1 能量信号的自相关函数

- 定义：

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty < \tau < \infty \qquad (2.3\text{-}1)$$

- 性质：
  - 自相关函数$R(\tau)$和时间t无关，只和时间差τ有关。
  - 当$\tau = 0$时，$R(0)$等于信号的能量：

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E \qquad (2.3\text{-}2)$$

  - $R(\tau)$是τ的偶函数

$$R(\tau) = R(-\tau) \qquad (2.3\text{-}3)$$

  - 自相关函数$R(\tau)$和其能量谱密度$|S(f)|^2$是一对傅里叶变换：

$$|S(f)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \qquad R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}df$$

2.3.2 功率信号的自相关函数

- 定义：

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty < \tau < \infty \qquad (2.3\text{-}10)$$

- 性质：
  - 当$\tau = 0$时，自相关函数$R(0)$等于信号的平均功率：

$$R(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = P \qquad (2.3\text{-}11)$$

  - 功率信号的自相关函数也是偶函数。

- 周期性功率信号：
  - 自相关函数定义：

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty < \tau < \infty \qquad (2.3\text{-}12)$$

  - $R(\tau)$和功率谱密度$P(f)$之间是傅里叶变换关系：

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)e^{j2\pi f\tau}df \qquad P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

第2章 确知信号

- 【例2.9】试求周期性信号$s(t) = A\cos(t+\theta)$的自相关函数。

【解】先求功率谱密度，然后对功率谱密度作傅里叶变换，即可求出其自相关函数。

- 求功率谱密度：结果为

$$P(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C(f)\right|^2\delta(f-nf_0)=\frac{A^2}{4}\delta(f-f_0)+\frac{A^2}{4}\delta(f+f_0)$$

- 求自相关函数：

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P(f)e^{j2\pi f\tau}df=\frac{A^2}{4}[e^{j\tau}+e^{-j\tau}]=\frac{A^2}{2}\cos\tau$$

2.3.3 能量信号的互相关函数

- 定义： $R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \qquad -\infty<\tau<\infty$
- 性质：
  - $R_{12}(\tau)$和时间 t 无关，只和时间差τ有关。
  - $R_{12}(\tau)$和两个信号相乘的前后次序有关：$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)$

    【证】令$x=t+\tau$，则

$$R_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s_2(t)s_1(t+\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty}s_2(x-\tau)s_1(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}s_1(x)s_2[x+(-\tau)]dx=R_{12}(-\tau) \qquad (2.3\text{-}23)$$

  - 互相关函数$R_{12}(\tau)$和互能量谱密度$S_{12}(f)$是一对傅里叶变换

互能量谱密度的定义为：$S_{12}(f)=S_1^*(f)S_2(f)$

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{12}(f)e^{j2\pi f\tau}df \qquad S_{12}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{12}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

第2章 确知信号

- 2.3.4 功率信号的互相关函数
  - 定义：$R_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \qquad -\infty < \tau < \infty$
  - 性质：
    - $R_{12}(\tau)$和时间t无关，只和时间差τ有关。
    - $R_{12}(\tau)$和两个信号相乘的前后次序有关：$R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$
    - 若两个周期性功率信号的周期相同，则其互相关函数的定义可以写为

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \qquad -\infty < \tau < \infty$$

式中 T_0 - 信号的周期

    - $R_{12}(\tau)$和其互功率谱C_{12}之间也有傅里叶变换关系：

互功率谱定义：$C_{12} = (C_n)_1^*(C_n)_2$

$$R_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[C_{12}]e^{j2\pi nf_0\tau} \qquad R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{12}(f)\delta(f - nf_0)e^{j2\pi nf_0}df$$

第2章 确知信号

- 小结

本章集中讨论确知信号的特性。确知信号按照其强度可以分为能量信号和功率信号。功率信号按照其有无功率性划分，又可以分为周期信号和非周期信号。能量信号的振幅和持续时间都是有限的，其能量有限（在无限长的时间上）平均功率为零。功率信号的持续时间无限，故其能量为无穷大。确知信号的性质可以从频域和时域两方面研究。

确知信号在频域中的性质有四种，即频谱、频率密度、能量谱密度和功率谱密度。周期性功率信号的波形可以用傅立叶级数表示，级数的各项构成信号的离散频谱，其单位是V。能量信号的波形可以用傅立叶变换表示，波形变换得出的函数是信号的频谱密度，其单位是V/hz。只要引入冲激函数，我们同样可以对于一个功率信号求出其频谱密度。能量谱密度是能量信号的能量在频域中的分布，其单位是J/Hz。功率谱密度则是功率信号的功率在频域中的分布，其单位是W/Hz。周期性信号的功率谱密度是由离散谱线组成的，这些谱线就是信号在各次谐波上的功率分量|Cn|2，称为功率谱，其单位为W。但是，若用ð函数表示此谱线，则它可以写成功率谱密度|C（f）|2ð（f-fo）的形式。

确知信号在时域中的特性主要有自相关函数和互相关函数。自相关函数反映一个信号在不同时间上取值的关联程度。能量信号的自相关R(0)等于信号的能量；而功率信号的自相关函数R(0)等于信号的平均功率。互相关函数反映两个信号的相关程度，它和时间无关，只和时间差有关，只和时间差有关，并且互相关函数和两个信号相乘的前后次序有关。能量信号的自相关函数和其能量谱密度构成一对傅里叶变换。周期性信号的自相关函数和其互能量谱密度构成一对傅里叶变换。周期性功率信号的互相关函数和其功率谱构成一对傅里叶变换。