# 3 例题

**例 3 .1** 如图 10所示，在半顶角为 $\phi$ 的倒立固定圆锥面光滑内壁上，一小球在距锥顶 $h_0$ 高度处作水平圆周运动。1. 求圆周运动速率 $v_0$；2. 若在某时刻，小球的速度不改变方向地从 $v_0$ 增为 $\sqrt{1+\alpha}\,v_0\,(\alpha>0)$，小球随即离开原轨道但不会离开锥面内壁，试问小球是否会在距离锥顶某个 $h$ 高处作水平圆周运动？3. 小球若不再作圆周运动，试求运动过程中相对锥顶能达到的最大高度 $h_{max}$ 和最低高度 $h_{min}$。

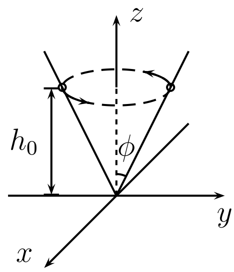

图 10: 示意图

解：如果你恰好有这方面的生活经验（图 11），那么你对整个力学过程会有大致的印象——尽管不一定够清晰够精确，但它的确会对你有所帮助。如果你缺乏这方面的感性认识，那也没多大关系；直观的物理图像虽然有用，但我们还得借助于数学推演才能给出精确的答案——有时推演甚至会颠覆起初的直觉。

首先，我们得把物理模型转译成数学模型；为此，必须建立合适的坐标系，如 图 10所示，但对 x-y 平面我们采用极坐标系——即对整个三维空间采用柱坐标系。设 $t$ 时刻小球的位矢和速度分别为 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$，则有：


图 11: 摩托车杂技

$$\boldsymbol{r}(t)=\rho(t)\boldsymbol{e}_\rho+z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{3 .1}$$

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot\rho\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot\theta\boldsymbol{e}_\theta+\dot z\boldsymbol{e}_z \tag{3 .2}$$

除了重力 $\boldsymbol{G}=-mg\boldsymbol{e}_z$ 作用外，小球还受到光滑锥面对它的作用；记该作用力为 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{f}$ 的方向与锥面在小球所处位置的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 相一致：$\boldsymbol{f}=f\boldsymbol{n}$，而法线落在由 $\boldsymbol{r}$ 和 z 轴决定的平面上，并与 $\boldsymbol{r}$ 垂直。由此可知 $\boldsymbol{n}$ 可表示为：$\boldsymbol{n}=-\cos\phi\boldsymbol{e}_\rho+\sin\phi\boldsymbol{e}_z$，于是小球受到的合外力

$$\boldsymbol{F}=-(f\cos\phi)\boldsymbol{e}_\rho+(f\sin\phi-mg)\boldsymbol{e}_z \tag{3 .3}$$

显然 $\boldsymbol{F}$ 也落在由 $\boldsymbol{r}$ 和 z 轴决定的平面上，因此力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 势必与 z 轴垂直，于是有力矩沿 z 轴的分量 $M_z=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})_z=0$；由角动量守恒定律，有

$$J_z(t)=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_z=m\rho^2\dot\theta=J_z(0) \tag{3 .4}$$

即角动量沿 z 轴的分量守恒。另外，由于锥面的作用力 $\boldsymbol{f}$ 对小球不做功，只有重力 $\boldsymbol{G}$ 做功，故机械能守恒定律满足，有

$$E(t)=m(\dot\rho^2+(\rho\dot\theta)^2+\dot z^2)/2+mgz=E(0) \tag{3 .5}$$

最后由锥面的几何形状，可知

$$\rho(t)=(\tan\phi)z(t) \tag{3 .6}$$

利用关系(3 .4)和(3 .6)，将方程 (3 .5)中 $\rho$ 和 $\theta$ 替换成 $z$，可得

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\dot z^2}{\cos^2\phi}+\frac{J_z^2(0)}{(mz\tan\phi)^2}\right)+mgz-E(0)=0 \tag{3 .7}$$

其中 $J_z(0)$ 和 $E_z(0)$ 由初始速率 $v(0)$ 和初始高度 $h_0$ 决定：

$$\begin{aligned}J_z(0)&=(\boldsymbol{r}(0)\times m\boldsymbol{v}(0))_z\\&=(h_0\tan\phi\boldsymbol{e}_\rho\times mv(0)\boldsymbol{e}_\theta)_z\\&=mh_0v(0)\tan\phi\\E(0)&=mv^2(0)/2+mgh_0\end{aligned}$$

若方程(3 .8)两端乘以 $(\cos\phi)^2$，那可取 $m_e=1$；若方程(3 .8)两端乘以 $-1$，那可取 $m_e=-(\cos\phi)^2$ 吗?

将 $J_z(0)$ 和 $E_z(0)$ 的取值带入方程(3 .7)，经整理可得：

$$\frac{\boxed{(\cos\phi)^{-2}}\dot{z}^2}{2}+\boxed{\frac{v^2(0)(h_0^2-z^2)}{2z^2}+g(z-h_0)}=\frac{m_e\dot{z}^2}{2}+V_e(z)=0 \quad (3\ .8)$$

如何理解方程(3 .8)呢？这可视作有效质量 $m_e$ 的质点在有效势场 $V_e$ 中作一维运动，并且其机械能为零。由示意 图 12可知，质点只能在势能曲线与 z 轴交点限制的范围内运动。由 $V_e(z)=0$，可得：

$$z_{min}=h_0,\quad z_{max}=\frac{v^2(0)}{4g}\left[1+\sqrt{1+\frac{8gh_0}{v^2(0)}}\right] \quad (3\ .9)$$

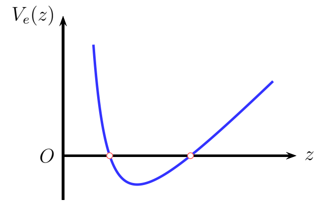


图 12: $V_e$ 曲线示意图

注意 $V_e$ 和 $z_{max}$ 都与 $v(0)$ 的取值有关；根据 $v(0)$ 的取值，$V_e$ 的曲线图不一定恰好如图 12所示，$z_{max}$ 也不一定小于 $z_{min}$。对第 1. 小问——此时 $v(0)=v_0$，根据曲率半径公式可算出 $v_0$，但下面我们将给出另一种计算方法——大家可验证结果是否相同。要求小球在 $h_0$ 高处一直做圆周运动，该要求意味着 $z_{min}=z_{max}$——即势能曲线与 z 轴只有一个交点，于是可得 $v(0)=v_0=\sqrt{h_0g}$。对第 2. 和 3. 小问，将 $v(0)=(1+\alpha)v_0=(1+\alpha)\sqrt{h_0g}$ 代入方程(3 .9)可得：

$$z_{max}=\frac{(1+\alpha)+\sqrt{\alpha^2+10\alpha+9}}{4}h_0=f(\alpha)h_0$$

显然 $f(0)=1$，当 $\alpha(>0)$ 增加时，$f(\alpha)$ 单调递增——即 $z_{max}\geq z_{min}$，当 $\alpha=0$ 等号才成立。

请大家再把数学结果转译成物理图像，并考虑当 $-1<\alpha<0$ 时情况又如何？最后，请列举一下这道例题的求解过程中都涉及到哪些概念和知识点。