Lecture 1 | Classical Mechanics: Kinetics of Particles

Yan-li Tang

School of Sciences

2015-2-4

基本概念

- 参考系与坐标系：前者是物理上的实体，而后者是数学上的实体；同一个参考系上可以定义多个坐标系。
- 位矢、基矢及坐标表示

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

- 位移、速度（瞬时及平均）和速率、加速度 (法向及切向)

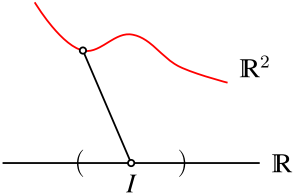
运动轨迹的数学表示

质点在 n 维参考空间中的运动轨迹可看成一系列点构成的一维连续体，一旦选定空间某点作为参考点，并以该点为原点建立坐标系，则参考空间中的点与 n 维实线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点一一对应，运动轨迹就对应 $\mathbb{R}^n$ 中的一条曲线。

运动轨迹的数学表示

曲线的定义

- 质点在 n 维参考空间中的运动轨迹可看成一系列点构成的一维连续体，一旦选定空间某点作为参考点，并以该点为原点建立坐标系，则参考空间中的点与 n 维实线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点一一对应，运动轨迹就对应 $\mathbb{R}^n$ 中的一条曲线。
- $\mathbb{R}^n$ 中的曲线：为一连续映射 $\boldsymbol{r}: I \to \mathbb{R}^n$；其中，$I$ 为 $\mathbb{R}$ 上的区域。该定义又称为曲线的参数表示。



例子

曲线的维度体现在哪儿？

- 抛体运动：$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t$, $y(t) = (v_0 \sin\alpha)t - 0.5gt^2$
- $\mathbb{R}^2$ 中的椭圆：$x(t) = a\cos(\omega t)$, $y(t) = b\sin(\omega t)$
- $\mathbb{R}^3$ 中的螺旋线：$x(t) = r\cos(\omega t)$, $y(t) = r\sin(\omega t)$, $z(t) = ut$

如参数 t 与另一参数 θ 之间有一一映射，则可得到上述曲线的 θ 表示，对后两个例子令 $\theta = \omega t$ 则有：

- $\mathbb{R}^2$ 中的椭圆：$x(\theta) = a\cos(\theta)$, $y(\theta) = b\sin(\theta)$
- $\mathbb{R}^3$ 中的螺旋线：$x(\theta) = r\cos(\theta)$, $y(\theta) = r\sin(\theta), z(\theta) = (u\theta/\omega)$

曲线的自然参数表示[1]

Definition

以曲线的弧长 $s(t) := \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{v_x^2(\tau) + v_y^2(\tau)}\,d\tau$ 作为参数来表示曲线，称为曲线的自然参数表示；其中 $s(t)$ 称为自然参数。

1. 定义速度 $\boldsymbol{v}(s) \equiv \dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$，加速度 $\boldsymbol{a}(s) \equiv \dfrac{d\boldsymbol{v}(s)}{ds}$。
2. 结论：$|\boldsymbol{v}(s)| = 1,\ (\boldsymbol{v}(s), \boldsymbol{a}(s)) = 0$。
3. 曲率 $\kappa = |\boldsymbol{a}(s)|$，曲率半径 $\rho = \kappa^{-1}$。
4. 以 $\boldsymbol{v}(s)$ 和 $\boldsymbol{a}(s)$ 为基底的活动坐标系称为自然坐标系。

[1]Frenet Curve，此处我们只考虑二维情形。

例子：匀速圆周运动

- 以时间 t 为参数：$\boldsymbol{r}(t) = r\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + r\sin(\omega t)\boldsymbol{j}, 0 \le t \le T$；其中 r 为半径，$\omega = 2\pi/T$ 为角速率，T 为时间周期。
- 自然参数表示：

$$
\begin{aligned}
s(t) &= r\omega t \\
\boldsymbol{r}(s) &= r\cos(r^{-1}s)\boldsymbol{i} + r\sin(r^{-1}s)\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{v}(s) &= -\sin(r^{-1}s)\boldsymbol{i} + \cos(r^{-1}s)\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{a}(s) &= -r^{-1}\cos(r^{-1}s)\boldsymbol{i} - r^{-1}\sin(r^{-1}s)\boldsymbol{j} \\
\kappa &= |\boldsymbol{a}(s)| = r^{-1} \\
\rho &= r
\end{aligned}
$$

例：计算曲线：$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + e^x\boldsymbol{j}$ 在 x 处的曲率

$$s(x) = s_0 + \int_0^x \sqrt{1+e^{2x'}}dx'$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+e^{2x}}$$

$$\boldsymbol{v}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$\boldsymbol{a}(s) = \frac{d\boldsymbol{v}(s)}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{e^x\boldsymbol{j} - e^{2x}\boldsymbol{i}}{(1+e^{2x})^2}$$

$$\kappa(s) = |\boldsymbol{a}(s)| = e^x(1+e^{2x})^{-\frac{3}{2}}$$

$$\rho(s) = \kappa^{-1}(s) = (1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}/e^x$$

$$\boldsymbol{v}(x) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dx} = \boldsymbol{i} + e^x\boldsymbol{j}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}(x) = \frac{\boldsymbol{v}(x)}{|\boldsymbol{v}(x)|} = \frac{\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$\boldsymbol{a}(x) = \frac{d\boldsymbol{v}(x)}{dx} = e^x\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}_t(x) = (\boldsymbol{a}(x)\cdot\hat{\boldsymbol{v}}(x))\hat{\boldsymbol{v}}(x)$$

$$\boldsymbol{a}_n(x) = \boldsymbol{a}(x) - \boldsymbol{a}^t(x) = \frac{\boldsymbol{j} - e^x\boldsymbol{i}}{e^{-x}+e^x}$$

$$\kappa(x) = \frac{|\boldsymbol{a}^n(x)|}{\boldsymbol{v}^2(x)} = e^x(1+e^{2x})^{-\frac{3}{2}}$$

$$\rho(x) = \kappa^{-1}(x) = (1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}/e^x$$

参数 t： $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} = x(t)\boldsymbol{i} + e^{x(t)}\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)e_y \;\Rightarrow\; \hat{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}}{(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = a_x(t)\boldsymbol{i} + a_y(t)\boldsymbol{j} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a}_t(t) = (\boldsymbol{a}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{v}}(t))\hat{\boldsymbol{v}}(t)$$

$$\boldsymbol{a}_n(t) = \boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{a}_t(t) = \frac{a_x v_y - a_y v_x}{v_x^2 + v_y^2}(v_y\boldsymbol{i} - v_x\boldsymbol{j})$$

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{a}^n(t)|}{\boldsymbol{v}^2(t)} = \frac{|a_x v_y - a_y v_x|}{(v_x^2 + v_y^2)^{3/2}} \xrightarrow[a_y = e^x v_x^2 + e^x a_x]{v_y = e^x v_x} e^x(1 + e^{2x})^{-3/2}$$

$$\rho(t) = \kappa^{-1}(t) = e^{-x}(1 + e^{2x})^{3/2}$$

习题 1-12 (P.40)

质点的位矢：$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$；加速度：$\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j}$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (v_0\cos\theta)t \\ y(t) &= y_0 + (v_0\sin\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} v_x(t) &= v_0\cos\theta \\ v_y(t) &= v_0\sin\theta - gt \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_n &= \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}/v^2 \\ &= -g\boldsymbol{j} + gv_y(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j})/v^2 \\ &= gv_x(v_y\boldsymbol{i} - v_x\boldsymbol{j})/v^2 \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{v^2}{|a_n|} \xrightarrow{|a_n|=g|v_x|/v} \frac{v^3}{g|v_x|} = \frac{(v_0^2 - 2g(y-y_0))^{3/2}}{v_0 g\cos\theta}$$

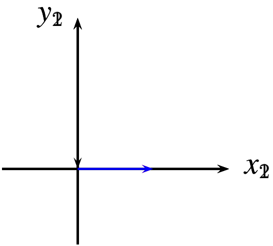
作业

设有笛卡尔坐标系1和2，$t=0$时两者重合（即有相同的原点、x轴和y轴）。随后，坐标系2原点相对坐标系1原点以速度(v_x, v_y)作匀速平移运动，同时坐标系2还围绕其原点以角速度$\omega_2(>0)$作逆时针旋转运动。如一质点在坐标系1中的运动轨迹为：$x_1(t)=r\cos(\omega_1 t), y_1(t)=r\sin(\omega_1 t)$，请问其在坐标系2中的运动轨迹（即确定$x_2(t)$和$y_2(t)$）。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1(t) &= x_1(t)\boldsymbol{i}+y_1(t)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{r}_2(t) &= x_2(t)\boldsymbol{i}'(t)+y_2(t)\boldsymbol{j}'(t) \\ \boldsymbol{R}(t) &= (v_x t)\boldsymbol{i}+(v_y t)\boldsymbol{j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_2(t) &= \boldsymbol{i}'(t)\cdot(\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{R}(t)) \\ y_2(t) &= \boldsymbol{j}'(t), \cdot(\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{R}(t)) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{i}) = \cos(\omega_2 t) & , & (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}) = \sin(\omega_2 t) \\ (\boldsymbol{j}'(t), \boldsymbol{i}) = -\sin(\omega_2 t) & , & (\boldsymbol{j}'(t), \boldsymbol{j}) = \cos(\omega_2 t) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_2(t) &= r\cos((\omega_1-\omega_2)t) - vt\cos(\omega_2 t-\varphi) \\ y_2(t) &= r\sin((\omega_1-\omega_2)t) + vt\sin(\omega_2 t-\varphi) \end{aligned}\right.$$


y_2
x_2

Lecture 2 | Classical Mechanics: Newton's Laws of Motion

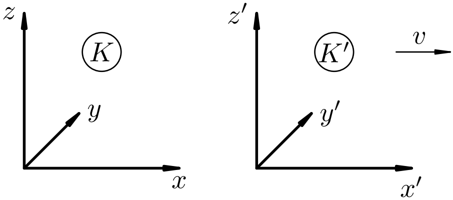
Yan-li Tang

School of Sciences

牛顿定律[1]

1. 任何物体都保持静止的或匀速直线运动的状态，除非外力改变其状态。
   "Every body persists in its state of being at rest or of moving uniformly straight forward, except insofar as it is compelled to change its state by force impressed."
2. 运动的变化与外力成正比，并且发生在此力所沿的方向线上。
   "The change of momentum of a body is proportional to the impulse impressed on the body, and happens along the straight line on which that impulse is impressed."
3. 对每个作用总有一个反作用与之对应，或者说，两物体之间的相互作用力大小相等、方向相反。
   "To every action there is always an equal and opposite reaction: or the forces of two bodies on each other are always equal and are directed in opposite directions."

伽利略相对性原理[2]



- 伽利略变换: 某理想事件在惯性参考系 K 和 K' 中的时空坐标分别为：(t, x, y, z) 和 (t', x', y', z').

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- 伽利略不变性：如力学量或力学定律在伽利略变换下保持不变，则称其具有伽利略不变性。
  1. 变化量：速度 $v_x = v + v'_x$
  2. 不变量：质量、时间间隔、长度[3]

$$\begin{cases} m' &= m \\ \Delta t' &= \Delta t \\ \Delta l' &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2} = \Delta l \end{cases}$$

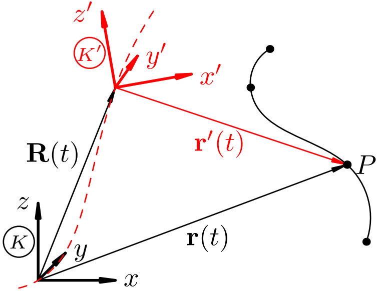
  3. 相对性原理：在所有惯性系中，力学定律具有相同的（数学）表述形式。

$$\boxed{\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m'\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}'}$$

- 我们为何要关注不变性？

非惯性参考系与惯性力

所有变速运动的和旋转的参考系均是非惯性参考系，此时牛顿定律不再适用，而物体所受到的“力”则包含真实力和惯性力。设 K、K' 分别为惯性、非惯性参考系中的笛卡尔坐标系，相应的标准基为 $\{\boldsymbol{e}_i\}$、$\{\boldsymbol{e}'_i(t)\}$；P 点在 K 和 K' 分别对应位矢 $\boldsymbol{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{r}'(t) = \sum_{i=1}^{3} x'_i(t)\boldsymbol{e}'_i(t)$，$K'$ 的原点 O' 在 K 中对应位矢 $\boldsymbol{R}(t) = \sum_{i=1}^{3} X_i(t)\boldsymbol{e}_i$。

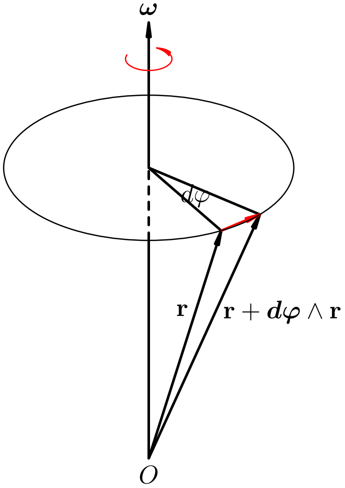


- 无限小转动（此处 $\wedge$ 代表叉乘 $\times$）

$$\Delta \boldsymbol{r} \simeq \Delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$



- K 系：$''\,\dot{}\,''$ 代表牛顿的求导符号。

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(t) = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i(t)\boldsymbol{e}_i, & \boldsymbol{a}(t) = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i(t)\boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{V}(t) = \sum_{i=1}^{3} \dot{X}_i(t)\boldsymbol{e}_i, & \boldsymbol{A}(t) = \sum_{i=1}^{3} \ddot{X}_i(t)\boldsymbol{e}_i \end{cases}$$

- K' 系：

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}'(t) &= \sum_{i=1}^{3}\left[\dot{x}_i'(t)\boldsymbol{e}_i'(t)+x_i'(t)\dot{\boldsymbol{e}}_i'(t)\right] \\
&= \boldsymbol{v}_r'(t)+\boldsymbol{\omega}(t)\wedge\boldsymbol{r}'(t) \\
\ddot{\boldsymbol{r}}'(t) &= \dot{\boldsymbol{v}}_r'(t)+\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\wedge\boldsymbol{r}'(t)+\boldsymbol{\omega}(t)\wedge\dot{\boldsymbol{r}}'(t) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[\ddot{x}_i'(t)\boldsymbol{e}_i'(t)+\dot{x}_i'(t)\dot{\boldsymbol{e}}_i'(t)\right]+\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\wedge\boldsymbol{r}'(t) \\
&\quad +\boldsymbol{\omega}(t)\wedge(\boldsymbol{v}_r'(t)+\boldsymbol{\omega}(t)\wedge\boldsymbol{r}'(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\ddot{x}_i'(t)\boldsymbol{e}_i'(t)+\boldsymbol{\omega}(t)\wedge\boldsymbol{v}_r'(t)+\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\wedge\boldsymbol{r}'(t) \\
&\quad +\boldsymbol{\omega}(t)\wedge(\boldsymbol{v}_r'(t)+\boldsymbol{\omega}(t)\wedge\boldsymbol{r}'(t)) \\
&= \boldsymbol{a}_r'(t)+2\boldsymbol{\omega}(t)\wedge\boldsymbol{v}_r'(t)+\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\wedge\boldsymbol{r}'(t) \\
&\quad +\boldsymbol{\omega}(t)\wedge(\boldsymbol{\omega}(t)\wedge\boldsymbol{r}'(t))
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{v}_r' = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i'(t)\boldsymbol{e}_i'$ 和$\boldsymbol{a}_r' = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i'(t)\boldsymbol{e}_i'$ 的物理意义：它们分别代表相对于坐标架 K' 的相对速度和相对加速度。

- 惯性力的引入使得非惯性系的运动规律与惯性系形式上一致。

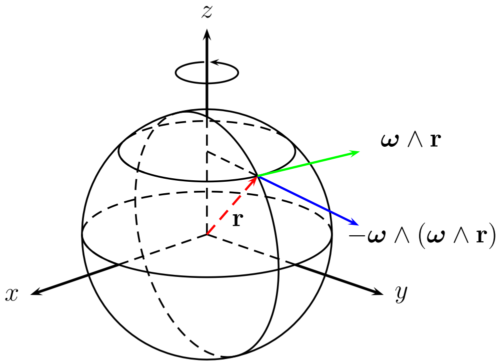
$$\xrightarrow[m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{F},\, m\ddot{\boldsymbol{R}}(t)=m\boldsymbol{A}]{\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{R}(t)} \quad m\ddot{\boldsymbol{r}}'(t) = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{A}$$

$$m\boldsymbol{a}_r' = \boldsymbol{F} - \underbrace{m\boldsymbol{A}}_{\text{平移}} - \underbrace{m[2\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}_r' + \dot{\boldsymbol{\omega}}\wedge\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{r}')]}_{\text{旋转}}$$

$$= \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_i$$

- 旋转：$\boldsymbol{R} = 0$, $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{F}_c = -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}'(t))$$
$$\boldsymbol{F}_{cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_r'(t)$$



问题集

(2) 解：$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta$

$$\boldsymbol{r}(t) = x\boldsymbol{i}(t) + y\boldsymbol{j} \xrightarrow{\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{j}} \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -x\omega^2\boldsymbol{i}(t)$$

$$\xrightarrow[m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{F}-mg\boldsymbol{j}]{\boldsymbol{F}=f\boldsymbol{r}(t)} -m\omega^2 x = fx,\ fy = mg$$

问题集

当物体以抛射角为 θ、初速率 v_0 作抛体运动，求运动轨迹在最高处的曲率半径。

- 以时间 t 为参数：

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} = \cos\theta v_0 t\boldsymbol{i} + (\sin\theta v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \cos\theta v_0\boldsymbol{i} + (\sin\theta v_0 - gt)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = -g\boldsymbol{j}$$

$$y'(t_m) = \sin\theta v_0 - gt_m = 0 \;\Rightarrow\; t_m = \sin\theta v_0/g$$

$$\boldsymbol{v}(t_m) = \cos\theta v_0\boldsymbol{i} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}(t_m)\cdot\boldsymbol{a}(t_m) = 0$$

$$\rho(t_m) = \frac{\boldsymbol{v}^2(t_m)}{|\boldsymbol{a}(t_m)|} = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$$

问题集

- 以时间 x 为参数：

$$\boldsymbol{r}(x) = x\boldsymbol{i} + y(x)\boldsymbol{j} = x\boldsymbol{i} + (\tan\theta x - gx^2/(2v_0^2\cos^2\theta))\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{i} + y'(x)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} + (\tan\theta - gx/(v_0^2\cos^2\theta))\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(x) = -g/(v_0^2\cos^2\theta)\boldsymbol{j}$$

$$y'(x_m) = \tan\theta - gx/(v_0^2\cos^2\theta) = 0$$

$$x_m = v_0^2\sin(2\theta)/(2g)$$

$$\boldsymbol{v}(x_m) = \boldsymbol{i} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}(x_m)\cdot\boldsymbol{a}(x_m) = 0$$

$$\rho(x_m) = \frac{\boldsymbol{v}^2(x_m)}{|\boldsymbol{a}(x_m)|} = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$$

Lecture 3 | Classical Mechanics: Theorems about Mechanical Energy

Yan-li Tang

School of Sciences

- 关于功的几点说明：功 W 的定义式为路径积分，其值一般依赖于路径的起点与终点以及连接两点的曲线（即依赖路径），而不依赖于路径的参数表示，但依赖于路径的走向（或取向），有正负之分。

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1 \xrightarrow{l} \boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \xrightarrow[\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(t_1),\, \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}(t_2)]{\boldsymbol{r}(t)} \int_{t_1}^{t_2} [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{v}(t)]dt$$

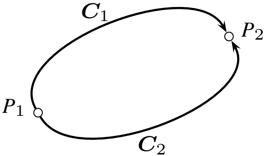
$$\xrightarrow[\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(s_1),\, \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}(s_2)]{\boldsymbol{r}(s)} \int_{s_1}^{s_2} [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{v}(s)]ds$$

- 动能定理：

$$E_k = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \xrightarrow{\text{2nd law}} \begin{cases} \dot{E}_k = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} & \text{微分形式} \\ E_{k2} - E_{k1} = \int_l \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = W & \text{积分形式} \end{cases}$$

保守力、势能

- 定义：如果质点 $\boldsymbol{M}$ 在力场 $\boldsymbol{F}$ 中沿任何一条路径由点 P_1 运动到 P_2，$\boldsymbol{F}$ 对 $\boldsymbol{M}$ 做的功 W 均是一样的。则称该力场 $\boldsymbol{F}$ 为保守力场，简称保守力。



- 势能函数 $V(\boldsymbol{r})$（简称势能）：为何只对保守力场才定义势能？

$$V(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}' \xrightarrow{V(\boldsymbol{r}_0)=0} - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}'$$

$$dV(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}$$

机械能守恒定律、中心力场

- 机械能守恒定律：$E = E_k + V(\boldsymbol{r})$

$$\boxed{E = E_{k1} + V(\boldsymbol{r}_1) = E_{k2} + V(\boldsymbol{r}_2)}$$

- 定理：中心力场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{e}_r$ 是保守力场[1]，其势能只依赖于到中心的距离，即：$V(\boldsymbol{r}) = V(r)$。

$$V(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0 \xrightarrow{l} \boldsymbol{r}} f(r')\boldsymbol{e}_{r'} \cdot d\boldsymbol{r}' = V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0 \xrightarrow{l} \boldsymbol{r}} f(r')\frac{\boldsymbol{r}'}{r'} \cdot d\boldsymbol{r}'$$

$$= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{r_0}^{r} f(r')dr' \xrightarrow{V(\boldsymbol{r}_0)=0} -\int_{r_0}^{r} f(r')dr' = V(r)$$

[1] 中心力场又称为有心力场，即力的指向有一共同的交汇点（力心）；并且与力心等距离处的力大小相等。

例子：

思考以下势能零点 $\boldsymbol{r}_0$ 是如何选取的？

1. 万有引力：$\boldsymbol{F} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad \Rightarrow \quad V(\boldsymbol{r}) = -G\dfrac{Mm}{r}$

2. 重力：$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z \quad \Rightarrow \quad V(\boldsymbol{r}) = mgz$

3. 库仑力：$\boldsymbol{F} = k\dfrac{Qq}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad \Rightarrow \quad V(\boldsymbol{r}) = k\dfrac{Qq}{r}$

4. 弹性力（一维）：$\boldsymbol{F} = -kx\boldsymbol{e}_x \quad \Rightarrow \quad V(x) = kx^2/2$

- 等价定义：假设力场 $\boldsymbol{F}$ 所在的区域是单连通的（直观地说，单连通区域中所有闭曲线都能连续地收缩至一点）。

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\boxed{\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = 0} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})}
\end{tikzcd}$$

转动参考系、离心势能

- 转动参考系：假定以恒定角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \boldsymbol{e}_i \quad ; \quad \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i \boldsymbol{e}_i \\
m\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Cor} + \boldsymbol{F}_C \\
&= \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

- 离心势能：$E_k = m \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2/2 = m\boldsymbol{v}^2/2$

$$
\begin{aligned}
\dot{E}_k &= m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} \xrightarrow{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}_{Cor}=0} \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_C) \\
E_{k2} - E_{k1} &= \int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_C \cdot \boldsymbol{v}) dt \\
&= [V(t_1) - V(t_2)] + [V_C(t_1) - V_C(t_2)]
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{F}_c$ 是保守力吗？可以引入势能吗？

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \omega \boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{r}(t) &= x(t)\boldsymbol{i}(t) + y(t)\boldsymbol{j}(t) + z(t)\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v}(t) &= \dot{x}(t)\boldsymbol{i}(t) + \dot{y}(t)\boldsymbol{j}(t) + \dot{z}(t)\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{F}_C &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = m\omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \\
dW &= (\boldsymbol{F}_C \cdot \boldsymbol{v})dt = \tfrac{1}{2}m\omega^2 d(x^2 + y^2) \\
V_C(\boldsymbol{r}) &= V_C(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} dW \\
&= V_C(\boldsymbol{r}_0) - \tfrac{1}{2}m\omega^2((x^2 + y^2) - (x_0^2 + y_0^2)) \\
&\xrightarrow[\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}]{V(\boldsymbol{r}_0)=0} -\tfrac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)
\end{aligned}
$$

两体系统 (a)

- 互作用力:

- 例子：$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$, $\hat{\boldsymbol{r}}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij}/r_{ij}$; $i, j = 1, 2$

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{-k(r_{ij}-r_0)\hat{\boldsymbol{r}}_{ij}} \arrow[r] & \boxed{k(r_{ij}-r_0)^2/2} \\
\boldsymbol{F}_{ij} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{kq_iq_j\hat{\boldsymbol{r}}_{ij}/r_{ij}^2} \arrow[r] & \boxed{kq_iq_j/r_{ij}} \\
 & \boxed{-Gm_im_j\hat{\boldsymbol{r}}_{ij}/r_{ij}^2} \arrow[r] & \boxed{-Gm_im_j/r_{ij}}
\end{tikzcd}
$$

两体系统 (b)

- 动能定理：$E_{k,i} = m_i \boldsymbol{v}_i^2/2$, $E_k = E_{k,1} + E_{k,2}$

$$
\begin{aligned}
dE_k &= \boldsymbol{F}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{F}_{12} \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_{21} \cdot d\boldsymbol{r}_2 \\
&= \boldsymbol{F}_{21} \cdot d\boldsymbol{r}_{21} = f(r_{21})\hat{\boldsymbol{r}}_{21} \cdot d\boldsymbol{r}_{21} = f(r_{21}) dr_{21} \\
&= f(r) dr
\end{aligned}
$$

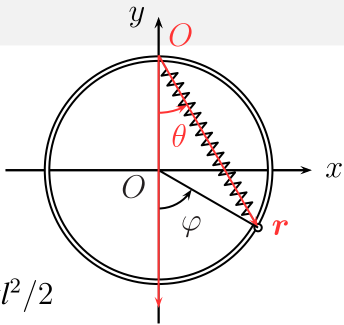
$$
E_k(t_b) - E_k(t_a) = \int_{t_a}^{t_b} f(r) dr = V(t_a) - V(t_b)
$$

- 机械能守恒定律：

$$
E_k(t_b) + V(t_b) = E_k(t_a) + V(t_a)
$$

问题集

Prob.3-29 (P.150)



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(\theta) &= (2R\cos\theta)\boldsymbol{e}_r, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \\
E_k &= \tfrac{1}{2}m(R\dot{\varphi})^2 = 2mR^2\dot{\theta}^2 \\
V(\theta) &= \tfrac{1}{2}k(2R\cos\theta - l)^2 - mg2R\cos^2\theta \\
&= 2R(kR-mg)\cos^2\theta - 2kRl\cos\theta + kl^2/2 \\
&\xrightarrow{kR=mg} -2kRl\cos\theta + kl^2/2 \\
&\xrightarrow{kR\neq mg} 2R(kR-mg)\left(\cos\theta - \tfrac{kl}{2(kR-mg)}\right)^2 + V_0 \\
E &= E_k + V(\theta) = Const. \\
\frac{dE}{dt} &= \dot{\theta}\left(4mR^2\ddot{\theta} + \frac{dV}{d\theta}\right) = 0 \;\Rightarrow\; 4mR^2\ddot{\theta} + \frac{dV}{d\theta} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V'(\theta) &= \frac{dV}{d\theta} = -2R\sin\theta\left[2(kR-mg)\cos\theta - kl\right] \\
V'(\theta) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 0,\ \theta_\pm = \pm\arccos\left(\frac{kl}{2(kR-mg)}\right) \\
V''(\theta) &= \frac{d^2V}{d\theta^2} = -2R\left[2(kR-mg)\cos 2\theta - kl\cos\theta\right] \\
V''(\theta_0) &= 2R\left[kl - 2(kR-mg)\right] = 4R(kR-mg)\left[\frac{kl}{2(kR-mg)} - 1\right] \\
V''(\theta_\pm) &= -R[(kl)^2 - (2(kR-mg))^2]/(kR-mg) \\
&= -4R(kR-mg)\left[\left(\frac{kl}{2(kR-mg)}\right)^2 - 1\right]
\end{aligned}
$$

结论：

- 当 $mg \geq kR - kl/2$ 时，只有一个稳定平衡点 $\theta_0 = 0$；
- 当 $mg < kR - kl/2$ 时，有：稳定平衡点 $\theta_\pm = \pm\arccos\left(\frac{kl}{2(kR-mg)}\right)$ 和不稳定平衡点 $\theta_0 = 0$。

Lecture 4 | Classical Mechanics: Momentum, Angular Momentum and Mechanics of Rigid Bodies

Yan-li Tang

School of Sciences

动量一质点

- 定义：动量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$，冲量 $\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{f} dt$
- 动量定理:

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f} & \text{微分形式} \\ \Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{I} & \text{积分形式} \end{cases}$$

- 守恒定律: $\boxed{f_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\alpha = \text{Const.} \quad \alpha = x, y, z}$

动量—质点系

- 定义：总动量 $\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i$
- 动量定理：下式中上标"E"和"I"表示外力与内力。

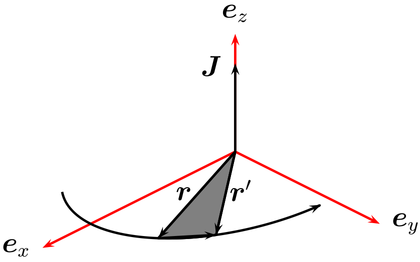
$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{f}_i^E+\boldsymbol{f}_i^I)\\&=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i^E+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\boldsymbol{f}_{ij}^I=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i^E=\boldsymbol{F}^E\end{aligned}$$

- 守恒定律: $\boxed{F_\alpha^E=0 \quad\Rightarrow\quad P_\alpha=\text{Const.}\quad \alpha=x,\,y,\,z}$

角动量–质点

- 定义：角动量 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$，力矩 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
- 角动量定理: $\boxed{\dfrac{d\boldsymbol{J}}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}}$
- 守恒定律: $\boxed{M_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad J_\alpha = \text{Const.} \quad \alpha = x,\, y,\, z}$

注意: 角动量依赖于参考点（坐标系的原点）。



图：几何意义：掠面速度 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J}/2m$

角动量—质点系

- 质点系角动量: $\boldsymbol{J} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i$
- 角动量定理:

$$\frac{d\boldsymbol{J}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\boldsymbol{J}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{f}_i^I + \boldsymbol{f}_i^E\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{M}_i^I + \boldsymbol{M}_i^E\right) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i^E = \boldsymbol{M}^E$$

$$\boxed{\boldsymbol{M}^I = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i^I = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \sum_{j\neq i} \boldsymbol{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j}^{n} \boldsymbol{r}_{ij} \times \boldsymbol{f}_{ij} = \boldsymbol{0}}$$

- 守恒定律:

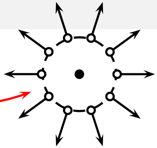
$$M_\alpha^E = 0 \quad \Rightarrow \quad J_\alpha = \text{Const.} \quad \alpha = x, y, z$$

- 固有角动量 $\boldsymbol{J}_s$ 和轨道角动量 $\boldsymbol{J}_o$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_c &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i \quad \left(M = \sum_{i=1}^{n} m_i\right) \\
\boldsymbol{r}_i &= \boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_c, \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{v}_c, \quad \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_i' + m_i \boldsymbol{v}_c \\
\boldsymbol{J} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_c) \times (\boldsymbol{p}_i' + m_i \boldsymbol{v}_c) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i' + \boldsymbol{r}_c \times (M \boldsymbol{v}_c) = \boldsymbol{J}_s + \boldsymbol{J}_o \\
\frac{d\boldsymbol{J}_s}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times \frac{d\boldsymbol{p}_i'}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times (\boldsymbol{f}_i - m_i \boldsymbol{a}_c) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{f}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{f}_i^E = \boldsymbol{M}_c^E
\end{aligned}
$$

中心力场

- 定义：$\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{e}_r = (f(r)\boldsymbol{r}/r)}$



- 处于中心力场中质点的角动量守恒。

$$\frac{d\boldsymbol{J}(t)}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \times (f(r)\boldsymbol{r}/r) = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}(t) = \boldsymbol{J}_0$$

- 推论：中心力场中的质点作平面曲线运动。

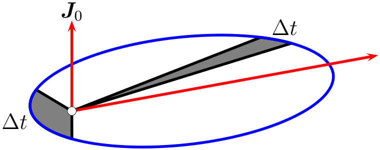
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{J}_0 &= \boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{J}(t) \\ &= \boldsymbol{r}(t)\cdot(\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{p}(t)) \\ &= (\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{p}(t) = 0\end{aligned}$$

应用

由推论可知：选择力心为原点，$\boldsymbol{J}_0$ 为 z 轴，则质点的运动轨迹必然落在 x-y 平面上。

- 开普勒第二定律：行星与太阳的连线在相等时间内扫过相等的面积。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}(t) &= mr(t)\boldsymbol{e}_r \times \left(\frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\theta(t)}{dt}\boldsymbol{e}_\theta\right) \\
&= mr^2(t)\omega(t)\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{J}_0 \\
|\boldsymbol{S}| &= \tfrac{1}{2}r^2(t)\omega(t) = \frac{|\boldsymbol{J}_0|}{2m} = \text{Const.}
\end{aligned}$$



刚体力学 [1]

- 自由度和位形空间：力学系统的所有可能位置状态构成了该系统的位形空间（位置状态可视作位形空间中的一点），其维度称作系统的自由度。如三维空间中运动的 n 个质点组成的质点系，其位形空间的维度为 $3n$。系统如受到约束时，其自由度会降低。如质点被限制在给定轨道上运动，则其自由度由 3 降为 1.

- 刚体：可视为受到一个完整约束的质点系，该约束使得任意两个质点间的距离不变：$r_{ij}(t) = |\boldsymbol{r}_i(t) - \boldsymbol{r}_j(t)| = c_{ij}$

- 刚体的自由度 $n = 6$；其中，3 个自由度用来描述刚体的平移，3 个自由度用来描述刚体的旋转。(此处忽略数学上的证明。)

- 刚体的动能 E_k：为了描述刚体的运动，我们引入两个坐标系：惯性（静止）坐标系，以及与刚体固连并参于刚体全部运动的动坐标系；如动坐标系的原点为刚体的质心，则有（$\boldsymbol{r}_i$ 对应以质心为原点的动坐标系中的位矢。)：

$$
\begin{aligned}
E_k &= \sum \frac{1}{2} m_i [\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i]^2 \\
&= \sum \frac{1}{2} m_i [\boldsymbol{V}^2 + 2\boldsymbol{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)^2] \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum m_i [\omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i)^2] = E_k^{trans} + E_k^{rot}
\end{aligned}
$$

$$
(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i^{\perp})^2 = \omega^2 (\boldsymbol{r}_i^{\perp})^2 = \omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i)^2
$$

注意：E_k 可简单地表示成对应于平移 E_k^t 和对应于转动 E_k^r 之和，这只适用于动坐标系的原点为刚体质心的情形。

- 惯性张量 I：此处对下标 α、β、γ 应用了爱因斯坦求和约定。

$$
\begin{aligned}
E_k^{rot} &= \frac{1}{2}\sum m_i[\omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)^2] \\
&= \frac{1}{2}\sum m_i(\omega_\alpha^2 x_{i\gamma}^2 - \omega_\alpha x_{i\alpha}\omega_\beta x_{i\beta}) \\
&= \frac{1}{2}\omega_\alpha\omega_\beta\sum m_i(x_{i\gamma}^2\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}x_{i\beta}) = \frac{1}{2}I_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta \\
I_{\alpha\beta} &= \sum m_i(x_{i\gamma}^2\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}x_{i\beta}) \\
I_{\alpha\beta} &= \int \rho(x_\gamma^2\delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta)dV \quad \text{(continuum case)}
\end{aligned}
$$

$$
[I_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sum m_i(y_i^2+z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i(x_i^2+z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i(x_i^2+y_i^2) \end{bmatrix}
$$

- 惯性张量 I 的定义是基于原点为质心的坐标系，但我们可将该定义推广到原点为任意一点的坐标系。如新坐标系的原点在原点为质心的坐标系对应于位矢 $\boldsymbol{a}$，则有 $\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{a}$。于是：

$$
\begin{aligned}
I'_{\alpha\beta} &= \sum m_i ({x'}^2_{i\gamma}\delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha}x'_{i\beta}) \\
&= \sum m_i ((x_{i\gamma} - a_\gamma)^2\delta_{\alpha\beta} - (x_{i\alpha} - a_\alpha)(x_{i\beta} - a_\beta)) \\
&= \sum m_i ((x^2_{i\gamma} + a^2_\gamma)\delta_{\alpha\beta} - (x_{i\alpha}x_{i\beta} + a_\alpha a_\beta)) \\
&= \sum m_i ((x^2_{i\gamma}\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}x_{i\beta}) + (a^2_\gamma\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta)) \\
&= I_{\alpha\beta} + M(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta)
\end{aligned}
$$

注：此即平行轴定理的一般形式。

- 角速度$\boldsymbol{\omega}$的绝对性：K为惯性（静止）坐标系；K'和K''为与刚体固连在一起的动坐标系，二者的原点分别为O'和O''，其中O''在K'中对应位矢$\boldsymbol{a}$。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}'') \\
&= (\boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{V}'' + \boldsymbol{\omega}'' \times \boldsymbol{r}'' \\
\boldsymbol{V}'' &= \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{\omega}'' = \boldsymbol{\omega}'
\end{aligned}
$$

由$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'' = \boldsymbol{\omega}'$可知与刚体固连的坐标系在任意时刻的角速度都是一样的，这使得我们有理由称$\boldsymbol{\omega}$为刚体的角速度，而平动速度则没有这样“绝对的”性质。

- 瞬时转动轴：
  1. 如果在原点 O' 的某种选择下 $\boldsymbol{V}'$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 彼此垂直，则对于任意选择的原点 O'' 均有 $\boldsymbol{V}''$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 彼此垂直，即刚体上任一点的速度均与 $\boldsymbol{\omega}$ 垂直。这时总可以选择原点 O'' 使得 $\boldsymbol{V}''=\boldsymbol{0}$，刚体运动在此时刻就是绕过 O'' 的轴转动。该轴就称为刚体的瞬时转动轴。
  2. 在 $\boldsymbol{V}'$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 不垂直的一般情况下，可以选择原点 O' 使得 $\boldsymbol{V}'$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行，则运动是绕某个轴的转动与沿该轴的平动之和。

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{r}'_p\cdot\boldsymbol{\omega}=0\\&\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_p)=\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\}\quad\Longrightarrow\quad\boldsymbol{r}'_p=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}'/\omega^2$$

- 运动方程：

$$\frac{d\boldsymbol{P}_c}{dt}=\boldsymbol{F}^E,\quad\frac{d\boldsymbol{J}_c}{dt}=\boldsymbol{M}_c^E$$

Lecture 7 | Classical Mechanics: Harmonic Vibrations and Waves

Yan-li Tang

School of Sciences

温故而知新

- 常系数微分方程：$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$
$$y^*(x) = e^{\lambda x}$$
- 欧拉方程：$x^2y''(x) + xy'(x) - n^2y(x) = 0$
$$y^*(x) = x^m$$
- n 阶线性齐次常微分方程的解空间是 n 维的。
$$V := \{y(x) \,|\, y(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i(x),\ \forall a_i \in \mathbb{R}\}$$
- n 阶线性非齐次常微分方程的解集是 n 维仿射空间。
$$S := \{y(x) \,|\, y(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i(x) + y_p(x),\ \forall a_i \in \mathbb{R}\}$$

几个基本概念

- 向量的维数与空间的维数：

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{y} & \Leftrightarrow \quad x_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{离散指标} \\ f = g & \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x), \quad x \in (a, b) \quad \text{连续指标} \end{cases}$$

- 内积 $(\cdot, \cdot)$：$(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

- 线性相关与正交：

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} & , \quad f = \alpha g \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 & , \quad (f, g) = 0 \end{cases}$$

- 模或范数：$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}$

几何意义

(1) 以下向量（三维）组成的集合中哪一个是线性空间？

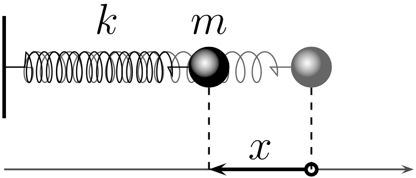
$$\begin{cases} S_1 := \{(x_1,\, x_2,\, 0) \mid \forall x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ S_2 := \{(x_1,\, x_2,\, z_0) \mid \forall x_1,\, x_2 \in \mathbb{R},\ z_0 \neq 0\} \end{cases}$$

(2) 以下函数（无穷维）组成的集合中哪一个是线性空间？

$$\begin{cases} S_1 := \{y(x) \mid a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0,\ a_i \neq 0\} \\ S_2 := \{y(x) \mid a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),\ a_i \neq 0\} \end{cases}$$

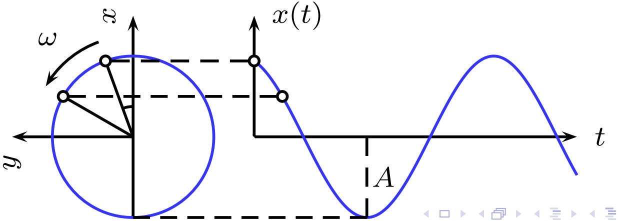
简谐振动

- 弹簧振子：或称为谐振子，x 是振子偏离其平衡位置的位移。

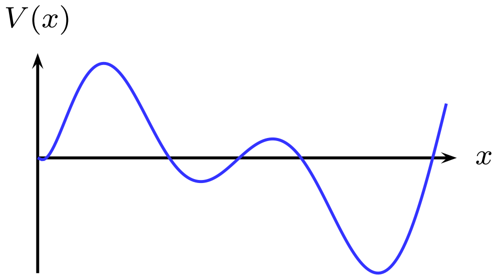


- 运动方程：$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$, $\omega = \sqrt{k/m}$

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos(\varphi(t))$$



简谐近似 [1]



$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

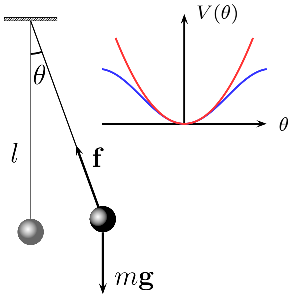
$$\xrightarrow[\omega=\sqrt{V''(x_0)/m}]{y(t)=x(t)-x_0} \quad \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

[1] 拓宽了简谐振子模型的应有范围。“围绕平衡位置做微小振动”意味要作简谐近似。

例子

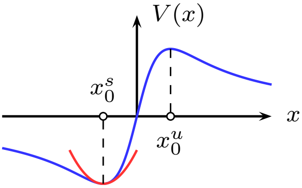
- 单摆运动：$E = E_k + V(\theta)$

$$E = \boxed{m(l\dot{\theta})^2/2} + \boxed{mgl(1-\cos\theta)}$$
$$\approx m(l\dot{\theta})^2/2 + mgl\theta^2/2$$
$$\ddot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) = 0, \quad \omega = \sqrt{g/l}$$



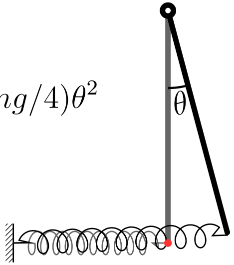
- 保守势场：$V(x) = x/(x^2+1)$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \pm 1$$
$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \;\Rightarrow\; V''(\pm 1) = \mp 0.5$$
$$V(x) \approx V(-1) + 0.25(x+1)^2$$



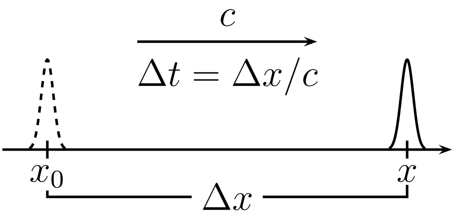
- 求匀质细杆作微小振动的周期 $T=?$ 其中，质量为 m，长度为 l、弹性系数为 k。

$$
\begin{aligned}
E_k &= \int_0^l \tfrac{1}{2}(x\dot\theta)^2\rho dx = \tfrac{1}{6}\rho l^3\dot\theta^2 \xrightarrow{\rho=\frac{m}{l}} \tfrac{1}{6}ml^2\dot\theta^2 = \tfrac{1}{2}I\dot\theta^2 \\
V_s(\theta) &= \tfrac{1}{2}k\left(\sqrt{(a+l\sin\theta)^2+(l-l\cos\theta)^2}-a\right)^2 \approx \tfrac{1}{2}k(l\theta)^2 \\
V_g(\theta) &= -g\int_0^l(\cos\theta x)\rho dx = -mg(\cos\theta l/2) \\
&\approx V_g(0)+(lmg/4)\theta^2 \\
V(\theta) &= V_s(\theta)+V_g(\theta) \approx V_g(0)+(kl^2/2+lmg/4)\theta^2 \\
\omega &= \sqrt{(6kl+3mg)/2ml} \\
T &= 2\pi\sqrt{2ml/(6kl+3mg)}
\end{aligned}
$$



振动与波

- 波动是振动状态的传播：

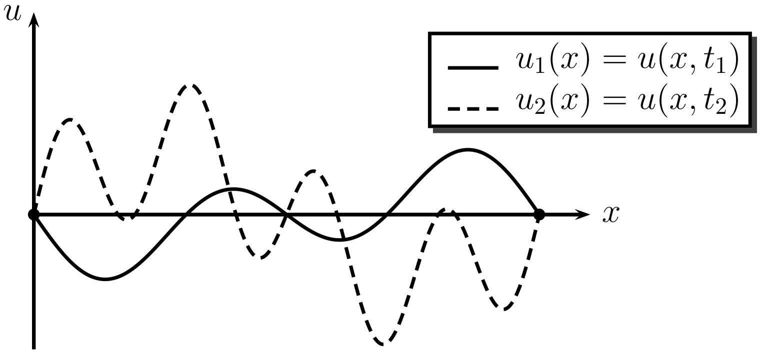


- 一维简谐波的波函数：波长 λ、波数 k

$$u(x_0, t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \quad \omega = 2\pi / T$$

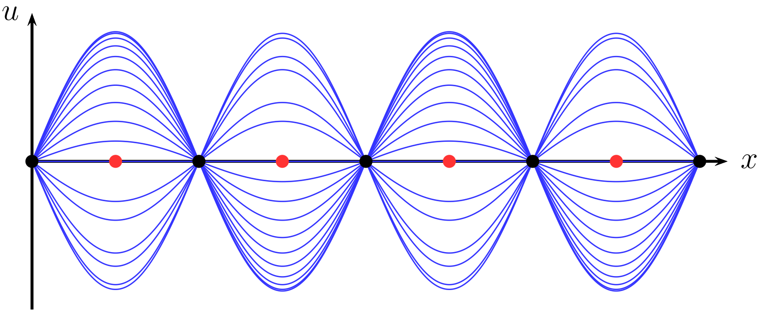
$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x_0, t - \Delta t) \\ &= A\cos(\omega t - k\Delta x + \varphi_0) \quad (\lambda = Tc,\ k = 2\pi/\lambda) \\ &= A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (x_0 = 0) \end{aligned}$$

- 波函数的意义：对应于描述质点空间位置的位矢 $\boldsymbol{r}(t)$，波函数是用来描述具有无穷自由度的连续系统（连续介质）的空间位形。



- 波的干涉、驻波：

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx) \\
&= 2A\cos(kx)\cos(\omega t)
\end{aligned}
$$



Lecture 8 | Classical Mechanics: The Theory of Special Relativity

Yan-li Tang

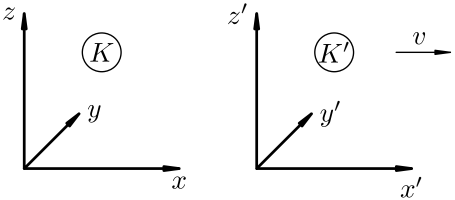
School of Sciences

绝对时空观

经典力学的时空观

绝对时空观认为时间和空间是分离的客体 (separate entities)，空间上的点和时间上的时刻是绝对的实在 (absolute realities)。时间均匀地流逝而不倚赖于参考系，它构成了一维连续体（即无论何时何地对时间间隔的测量结果是一样的）。空间则是三维连续体，具有各向同性(方向的相对性）和均匀性(即无论何时何地对长度的测量结果是一样的）。

伽利略相对性原理



- 伽利略变换: 某理想事件在惯性参考系 K 和 K' 中的时空坐标分别为：(t, x, y, z) 和 (t', x', y', z').

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- 伽利略不变性：如力学量或力学定律在伽利略变换下保持不变，则称其具有伽利略不变性。
  1. 变化量：速度 $v_x = v + v'_x$
  2. 不变量：质量、时间间隔、长度[1]

$$\begin{cases} m' &= m \\ \Delta t' &= \Delta t \\ \Delta l' &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \Delta l \end{cases}$$

  3. 相对性原理：在所有惯性系中，力学定律具有相同的（数学）表述形式。

$$\boxed{\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m'\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}'}$$

- 我们为何要关注不变性？

[1] 即空间距离，长度应以两同时发生的事件来定义？

爱因斯坦假设

“一切科学，不论是自然科学抑或心理学，其目的都在于使我们的经验互相协调并将它们纳入一个逻辑体系。”

- 相对性原理：

  在所有惯性系中，物理学定律具有相同的表达形式。

- 光速不变性原理：

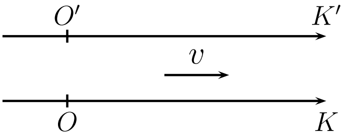
  在所有惯性系中，真空光速具有相同的量值。

Lorentz 变换

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(v)x + \beta(v)t \\ t' &= \eta(v)x + \delta(v)t \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \eta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

Step 1： $\boxed{K' \xrightarrow{v} K}$

$$\xrightarrow{\gamma=\eta/\alpha} \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -v \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} O' \text{ 的运动：} \quad x'_{o'} = 0,\ x_{o'} = vt \quad \Rightarrow \quad \beta = -\alpha v \\[2ex] O \text{ 的运动：} \quad x'_{o} = -vt',\ x_{o} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -vt' = \beta t \\ t' = \delta t \end{cases} \Rightarrow \delta = \alpha \end{cases}$$

Step 2: $\boxed{K_2 \xrightarrow{v_2} K_1 \xrightarrow{v_1} K}$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_2 \\ t_2 \end{bmatrix} &= \alpha(v_2) \begin{bmatrix} 1 & -v_2 \\ \gamma(v_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \\
&= \alpha(v_2)\alpha(v_1) \begin{bmatrix} 1 & -v_2 \\ \gamma(v_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -v_1 \\ \gamma(v_1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \\
&= \alpha(v_2)\alpha(v_1) \begin{bmatrix} 1-\gamma(v_1)v_2 & -v_1-v_2 \\ \gamma(v_1)+\gamma(v_2) & 1-\gamma(v_2)v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \\
&= \alpha(v_3) \begin{bmatrix} 1 & -v_3 \\ \gamma(v_3) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \qquad (v_3 \neq v_1 + v_2)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \frac{\gamma(v_1)}{v_1} = \frac{\gamma(v_2)}{v_2} = k \quad \xrightarrow{\gamma(v)=kv} \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \alpha(v) \begin{bmatrix} 1 & -v \\ kv & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}
$$

Step 3： $\boxed{K' \xrightarrow{v} K \xrightarrow{-v} K'}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \alpha(v) \begin{bmatrix} 1 & -v \\ kv & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \alpha(v)\alpha(-v) \begin{bmatrix} 1 & -v \\ kv & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v \\ -kv & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix}$$

$$= \alpha(v)\alpha(-v) \begin{bmatrix} 1+kv^2 & 0 \\ 0 & 1+kv^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\alpha(v)=\alpha(-v)]{\alpha(0)=1} \alpha(v) = 1/\sqrt{1+kv^2}$$

$\boxed{x\text{ 方向反转}}$

$$\begin{bmatrix} -x' \\ t' \end{bmatrix} = \alpha(-v) \begin{bmatrix} 1 & v \\ -kv & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x \\ t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha(v) = \alpha(-v)$$

Step 4：光速不变原理 $\boxed{\Delta x = c\Delta t,\ \Delta x' = c\Delta t'}$

$$\begin{bmatrix} c\Delta t' \\ \Delta t' \end{bmatrix} = \alpha(v) \begin{bmatrix} 1 & -v \\ kv & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = -1/c^2$$

Lorentz 变换

$$\boxed{y' = y,\ z' = z} + \begin{cases} \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{bmatrix} 1 & +v \\ +v/c^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} \end{cases}$$

- 低速情况 ($v \ll c$)：洛仑兹变换过渡到伽利略变换，由此可知经典时空观对描述低速运动现象时是准确的。

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \xrightarrow{(v/c) \approx 0} \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

时间间隔的相对性

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

1. 同时的相对性 K 系中不同地点 $(\Delta x \neq 0)$ 同时发生的两事件 $(\Delta t = 0)$，在 K' 系看来不同时。

$$\Delta t' = -\frac{v\Delta x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \neq 0$$

2. 时序的相对性与因果律

$$\xrightarrow{v_x=\Delta x/\Delta t} \Delta t' = \Delta t\frac{1-vv_x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\xrightarrow{v,v_x\leq c} \quad \mathrm{sgn}(\Delta t') = \mathrm{sgn}(\Delta t)$$

“长度”的相对性

假设一刚性杆以速率 v 相对于 K 系运动，K 系的观测者如何测量杆的（运动）长度？用事件语言来描述，就是在杆子的两端同时制造个两事件，杆子的长度即为两事件的空间距离。

- K 系：$\Delta t = 0, \Delta x = ?$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2} < \Delta x'$$

结论：运动长度 Δx 小于静止长度 $\Delta x'$，该现象称作洛仑兹收缩。

速度的变换

- 速度变换：$K' \xrightarrow{u} K$

$$
\left.\begin{aligned}
dt' &= \frac{dt - u dx/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{(1 - uv_x/c^2)dt}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\
dx' &= \frac{dx - udt}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{(v_x - u)dt}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\
dy' &= dy \\
dz' &= dz
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}
v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \\
v'_y &= \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{(1 - uv_x/c^2)} v_y \\
v'_z &= \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{(1 - uv_x/c^2)} v_z
\end{aligned}\right.
$$

练习：将速度对换并将 u 换成 $-u$ 即得到相应的逆变换。

Lecture 9 | Laws of Thermodynamics

Yan-li Tang

School of Sciences

- 热力学考虑的是由大量粒子组成的多体系统（热力学系统）的宏观行为（热现象），它与力学的联系简要地说有以下两点：
    1. 热力学中的系统对应于力学中的质点系。
    2. 力学为热力学（及其它领域）提供了合适的数学语言。如热力学坐标（状态参量）、热力学位形空间、自由度、功与过程等等。[1]
- 三个热力学定律分别定义了三个基本状态参量，即：温度、内能和熵。

[1] "Mechanics is the backbone of mathematical physics" by Arnold Sommerfeld

热力学第零定律 如系统 A、B 分别与处于恒定状态下的系统 C 达到热平衡，则 A、B 彼此也是热平衡的。

温度 热力学第零定律给出了热平衡的传递性质（或等价性质），引入了一状态函数，即经验温度 Θ。

$$\begin{cases} f_{AC}(A_1, A_2, \cdots; C_1, C_2, \cdots) = 0 \\ f_{BC}(B_1, B_2, \cdots; C_1, C_2, \cdots) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = F_{AC}(A_1, A_2, \cdots; C_2, \cdots) \\ C_1 = F_{BC}(B_1, B_2, \cdots; C_2, \cdots) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_{AC}(A_1, A_2, \cdots; C_2, \cdots) = F_{BC}(B_1, B_2, \cdots; C_2, \cdots)$$

$$f_{AB}(A_1, A_2, \cdots; B_1, B_2, \cdots) = 0$$

$$\Rightarrow \Theta = \Phi_A(A_1, A_2, \cdots) = \Phi_B(B_1, B_2, \cdots)$$

温度（续） 如系统 1、2 分别与处于恒定状态下的系统 3 达到热平衡，则 1、2 彼此也是热平衡的

$$\left.\begin{array}{l} F_1(p_1, V_1, p_3, V_3) = 0 \\ F_2(p_2, V_2, p_3, V_3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_3 = f_1(p_1, V_1, V_3) \\ p_3 = f_2(p_2, V_2, V_3) \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lll} f_1(p_1, V_1, V_3) = f_2(p_2, V_2, V_3) & \Rightarrow & p_1 = g(V_1, p_2, V_2, V_3) \\ F_3(p_1, V_1, p_2, V_2) = 0 & \Rightarrow & p_1 = f_3(V_1, p_2, V_2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1(p_1, V_1, V_3) = \Phi_1(p_1, V_1)\varepsilon(V_3) + \eta(V_3) \\ f_2(p_2, V_2, V_3) = \Phi_2(p_2, V_2)\varepsilon(V_3) + \eta(V_3) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \Theta = \Phi_1(p_1, V_1) = \Phi_2(p_2, V_2)$$

物态方程 $\Theta = \Phi_A(A_1, A_2, \cdots)$

温标 就是给温度的某种标度，如线性标度法。温标的实现需要三个要素：测温物质（系统）、测温属性（热力学坐标）和固定标准点（标度法）。

理想气体温标 描述理想气体（系统）状态的热力学坐标为 P 和 V：$T = T(P, V)$。

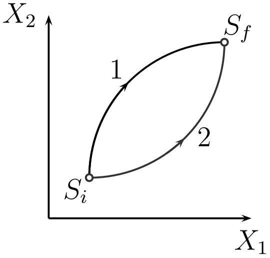
$$\begin{cases} T = T(P_0, V) \xrightarrow{\text{摄氏温标}} T(V) = \dfrac{100(V - V_0)}{V_{100} - V_0} \\ T = T(P, V_0) \xrightarrow{\text{摄氏温标}} T(P) = \dfrac{100(P - P_0)}{P_{100} - P_0} \end{cases}$$

理想气体的物态方程 $pV = \nu RT = NkT$

基本概念 广义力（位移、功）、态函数、准静态过程、绝热过程、绝热功。

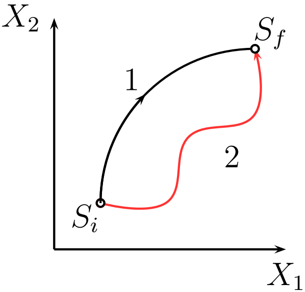
第一定律 对绝热系统做功改变其状态，功的大小只依赖于系统的初态和末态，而不管功是如何施加的，也不依赖于系统经历怎样的中间过程（甚至非静态过程）。

注释： 第一定律表明外界对系统做的绝热功 A_{ad} 与过程无关。这暗示可定义一态函数，即内能 $U_f - U_i = A_{ad}$（右图中的曲线对应准静态绝热过程。）



图：$A^1_{ad} = A^2_{ad}$

注释（续） 尽管系统由 S_i 到 S_f 可以选择不同（无数个）绝热过程，但是联系态 S_i 和 S_f 的曲线不一定都对应绝热过程。因为除了做功以外，热量的交换也是改变系统状态的一种手段。如过程 1 是绝热的，过程 2 不是绝热的，则有 $Q = A_1 - A_2 \neq 0$。该式给出了热量 Q 的定义(或量值)。



$\boxed{\text{绝热功}} \longrightarrow \boxed{\text{内能}} \longrightarrow \boxed{\text{热量}}$

第一定律的数学表示 下标 1 和 2 分别代表初态和末态。

$$\boxed{\Delta U = U_2 - U_1 = A + Q} \quad \text{or} \quad \boxed{\mathrm{d}U = đA + đQ}$$

注意功 A 和热量 Q 的正负号：如外界对系统做功以增加其内能则 $A > 0$（正功），反之 $A < 0$（负功）；如系统由外界吸热以增加其内能则 $Q > 0$，反之 $Q < 0$。功 A 和热量 Q 不是态函数，当系统由初态经历某一过程变到末态，功 A 和热量 Q 的取值不仅依赖初态和末态，而且依赖具体的过程。针对一元过程，态函数（如 U）的变化对应恰当微分（使用符号 d），否则对应非恰当微分（使用符号 đ）。

问题 $(p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p)$ 和 $p\,\mathrm{d}V$ 哪一个是恰当微分？

态函数焓 $H = U(p,V) + pV$。

热容量 C 系统经历一元过程时，系统吸收的热量 $đQ$ 与其温度变化 $\mathrm{d}T$ 的比率，即 $C = \frac{đQ}{\mathrm{d}T}$。下标是用来标记过程的属性；注意热容量 C 的取值依赖于过程的方向性。

$$\begin{cases} C_V = \frac{đQ}{\mathrm{d}T}\Big|_V = \frac{\mathrm{d}U - đA}{\mathrm{d}T}\Big|_V = \frac{\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\Big|_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V \\ C_p = \frac{đQ}{dT}\Big|_p = \frac{dU - đA}{dT}\Big|_p = \frac{dU + pdV}{dT}\Big|_p = \frac{d(U + pV)}{dT}\Big|_p = \frac{\partial H}{\partial T}\Big|_p \end{cases}$$

理想气体的内能 $U(T) = C_V T$；显然焓 H 也只是温度 T 的函数。

问题 对等温过程和绝热过程而言，理想气体的热容量 C_T 和 C_{ad} 分别为多少？

第一定律对理想气体的应用

等温过程 系统温度保持不变的过程，在 p-V 图上对应曲线 $pV = \nu RT$

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = -\nu RT \ln\frac{V_2}{V_1} \xrightarrow{1st\,law} Q = -A$$

绝热过程 系统与外界无热量交换的过程，在 p-V 图上对应曲线 $pV^\gamma = \text{Const.}$

$$\text{đ}Q = \mathrm{d}U - \text{đ}A = C_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V = 0$$

$$p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = \nu R\,\mathrm{d}T$$

$$\xrightarrow{\gamma=(C_V+\nu R)/C_V} \gamma p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = 0 \quad \Rightarrow \quad pV^\gamma = p_1V_1^\gamma = \text{Const}$$

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1V_1^\gamma}{V^\gamma}\,\mathrm{d}V = -\frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

多方过程 在 p-V 图上对应曲线 $pV^n = \text{Const.}$（当 $n=\infty$ 时，该式应理解为其极限；p' 和 V' 表示对 T 求导。）

$$A = -p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V^n} = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]$$

$$C_n = \frac{đQ}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = C_V + pV'$$

$$pV^n = \text{Const.} \;\Rightarrow\; p'V + npV' = 0$$

$$pV = \nu RT \;\Rightarrow\; p'V + pV' = \nu R$$

$$\Rightarrow\; pV' = \nu R/(1-n) \;\Rightarrow\; C_n = C_V + \nu R/(1-n)$$

$n=0$、1、γ、∞ 分别对应等压、等温、绝热、等体过程。

$$pV^n = p_1 V_1^n \quad\Rightarrow\quad V = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/n} V_1 \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad V = V_1$$

循环过程 对应于热力学位形空间中的一闭合曲线。

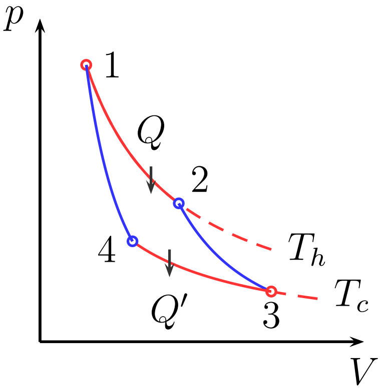
热温比 $\frac{đQ}{T}$ 对于理想气体，$\frac{đQ}{T}$ 是恰当微分。

$$\frac{đQ}{T} = \frac{C_V}{T}\,\mathrm{d}T + \frac{\nu R}{V}\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}(C_V \ln T + \nu R \ln T)$$

一些概念 正、负循环、效率 η 、制冷系数 ε。

卡诺循环 由两等温过程和绝热过程组成，其循环效率只依赖于高温（低温）热源的温度 T_h（T_c）。

$$
\begin{aligned}
Q &= -A_{1\to 2} = \nu R T_h \int_{V_1}^{V_2} V^{-1}\,\mathrm{d}V \\
&= \nu R T_h \ln(V_2/V_1) \\
Q' &= -A_{3\to 4} = \nu R T_c \ln(V_4/V_3) \\
\eta &= \frac{Q+Q'}{Q} = 1 + \frac{T_c \ln(V_4/V_3)}{T_h \ln(V_2/V_1)} \\
p_1 V_1^\gamma &= p_4 V_4^\gamma \;\Rightarrow\; T_h V_1^{\gamma-1} = T_c V_4^{\gamma-1} \\
p_2 V_2^\gamma &= p_3 V_3^\gamma \;\Rightarrow\; T_h V_2^{\gamma-1} = T_c V_3^{\gamma-1} \\
V_2/V_1 &= V_3/V_4 \;\Rightarrow\; \eta = \frac{T_h - T_c}{T_h}
\end{aligned}
$$



例题

设某气体服从物态方程 $p(V-V_0)=\nu RT$，内能 $U=C_VT+U_0$；系统经历一准静态过程，在该过程中系统与外界交换的热量和功始终满足 $đQ=\varepsilon đA$。以 T 和 V 为状态参量，给出该过程的曲线方程；并计算在 (T,V) 处的热容量 C（其中 ν、R、C_V、V_0、U_0、ε 均为常数)。

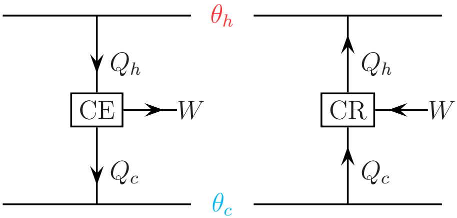
可逆过程

有不同层次上的定义——热力学意义上的可逆是最弱的定义，而力学上的可逆是最强的定义。

- 热力学可逆：设 α（β）为描述系统（外界）的状态参量，系统和外界经历过程 $P:(\alpha_1,\ \beta_1)\mapsto(\alpha_2,\ \beta_2)$ 由初态变到末态，如存在过程 $P':(\alpha_2,\ \beta_2)\mapsto(\alpha_1,\ \beta_1)$ 使得系统和外界恢复到初态，则称过程 P 为可逆过程。
- 卡诺可逆：过程 $P:(\alpha_1,\ \beta_1)\mapsto(\alpha_2,\ \beta_2)$ 是一准静态过程。
- 力学上的可逆。

卡诺热机

卡诺热机 工作于高温热源 θ_h 和低温热源 θ_c 之间的任一可逆热机。有别于其它热机，卡诺热机只与两恒定热源交换热量。其中 θ 表示经验温度。



(a) 图中 CE 代表卡诺热机 (Carnot Engine)，对应正循环；CR（或 R）代表卡诺制冷机 (Carnot Refrigerator)，对应负循环。

热力学第二定律

两种表述

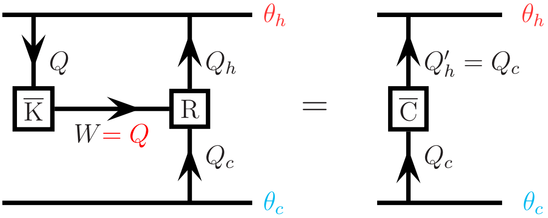
开尔文表述 (Kelvin's statement) No process is possible whose sole result is the complete conversion of heat into work.

克劳修斯表述 (Clausius's statement) No process is possible whose sole result is the transfer of heat from a colder to a hotter body.

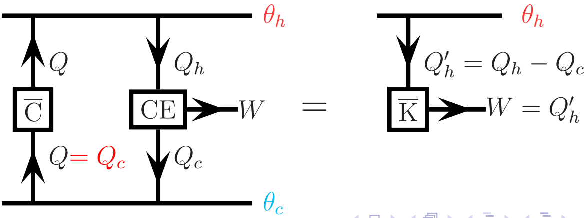
注释 这是热力学第二定律的两种经典表述；二者侧重点不同但是等价的。开尔文表述强调热转化为功的效率性，即热不可能完全转化为功；克劳修斯表述则强调热传递的方向性，即热不可能自发地由低温物体流向高温物体。

两种表述的等价性：反证法

$\overline{\mathrm{K}} \rightarrow \overline{\mathrm{C}}$ K 代表 Kelvin， C 代表 Clausius；字符上的短线代表否定。

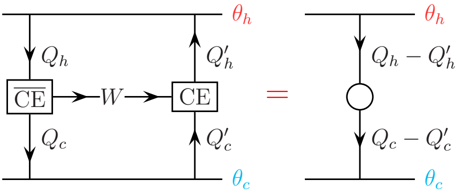


$\overline{\mathrm{C}} \rightarrow \overline{\mathrm{K}}$ 同上。



卡诺定理

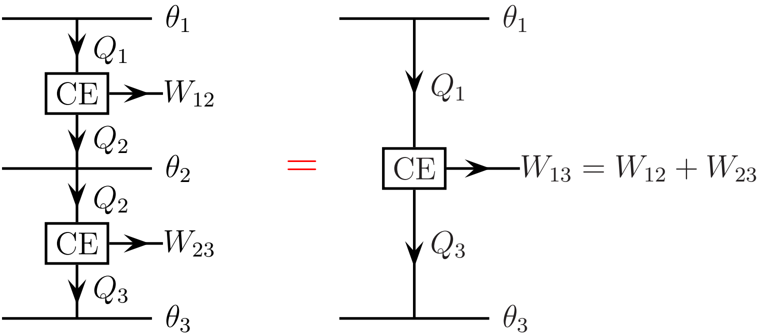
卡诺定理 工作于高温热源 θ_h 和低温热源 θ_c 之间的任一热机效率不大于可逆（卡诺）热机。



(b) 由克劳修斯表述知：$Q_h - Q'_h \geq 0 \Rightarrow W/Q'_h \geq W/Q_h \Rightarrow \eta' \geq \eta$

推论 工作于高温热源 θ_h 和低温热源 θ_c 之间的一切可逆（卡诺）热机具有相同的效率 $\eta(\theta_h, \theta_c)$。

热力学温标



(c) 图中各热机的效率分别为：$\eta(\theta_1, \theta_2) = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$、$\eta(\theta_2, \theta_3) = 1 - \frac{Q_3}{Q_2}$ 和 $\eta(\theta_1, \theta_3) = 1 - \frac{Q_3}{Q_1}$；其中 $Q_i > 0$，表示吸热或放热的量值。

热力学温标（续）

定义 $f(\theta_h, \theta_c) = 1 - \eta(\theta_h, \theta_c) = \frac{Q_c}{Q_h}$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(\theta_1, \theta_2), \quad \frac{Q_3}{Q_2} = f(\theta_2, \theta_3), \quad \frac{Q_3}{Q_1} = f(\theta_1, \theta_3)$$

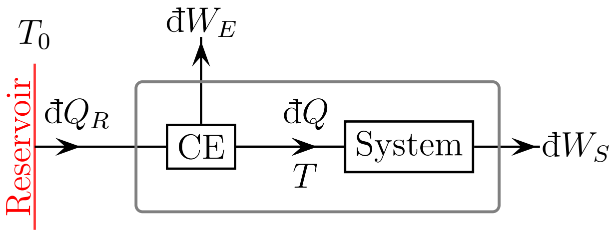
$$\Rightarrow \quad f(\theta_1, \theta_2) = \frac{f(\theta_1, \theta_3)}{f(\theta_2, \theta_3)} = \frac{g(\theta_2)}{g(\theta_1)} = \frac{T_{K2}}{T_{K1}}$$

$$\frac{T_{K2}}{T_{K1}} = \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \eta = \frac{T_2}{T_1}$$

评注 该式定义了热力学温标（除了有一个正比常数不确定外）；不同于其它经验温标，热力学温标不依赖于工作物质的属性；除了概念上的优势外，热力学温标在实际应用上没有什么特殊的优势。选择水的三相点的温度为 273.16K，则热力学温标 T_K 与理想气体温标一致T。

克劳修斯定理[2]

克劳修斯定理 对任一循环过程，有 $\boxed{\displaystyle\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \le 0 \ \text{ or } \ \oint \frac{đQ}{T} \le 0}$



$$\text{CE} \ \Rightarrow \ đQ_R = T_0 \frac{đQ}{T} \ \Rightarrow \ Q_R = T_0 \oint_C \frac{đQ}{T} = W$$

$$\xrightarrow[T_0>0]{\text{Kelvin's statement}} \oint_C \frac{đQ}{T} \le 0$$

[2] 又称为克劳修斯不等式，它是热力学第二定律的数学表述。

克劳修斯定理的推论：

- 对于可逆过程，有 $\oint_C \frac{đQ_{rev}}{T} = 0$

$$\oint_C \frac{đQ_{rev}}{T} = -\oint_C \frac{đQ_{rev}}{T} \Rightarrow \oint_C \frac{đQ_{rev}}{T} = 0$$

- 态函数熵：$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{đQ_{rev}}{T}$
- 基本公式：$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$
- 熵增加原理：当绝热系统由初态 A 变换到末态 B，则系统熵的变化 $\Delta S = S(B) - S(A) \geq 0$。其中，等号只适用于可逆（绝热）过程。

$$\int_A^B \frac{đQ}{T} + \int_B^A \frac{đQ_{rev}}{T} \leq 0 \Rightarrow \Delta S = \int_A^B \frac{đQ_{rev}}{T} \geq \int_A^B \frac{đQ}{T} = 0$$