1　质点运动学

这一小节将对质点在空间中的运动轨迹给出相关的数学描述。质点运动学涉及到点、线、面等几何概念，故又被称为运动几何学。质点运动学不关注运动的实现和起因，但作为力学的开篇，它为整个力学作了充分的数学准备。

1 .1　物理概念的模型本质

The image of the world around us, which we carry in our head, is just a model. Nobody in his head imagines all the world, government or country. He has only selected concepts, and relationships between them, and uses those to represent the real system.

虽然物理研究的终极目标是我们赖以生存的物质世界，但是物理学不是直接建立于现实世界之上的，而是与简化版的现实世界紧密相连。这个简化版的世界就是所谓的物理模型，它通常摒弃现实世界中与问题无关的细节，只包含那些与问题相关的主要因素以及它们彼此间的关系。

质点就是这样的一个物理模型。当所考虑的问题仅涉及物体的平动时，物体的尺度与形状则与问题无关，此时可将物体视作有质量的“点”。但问题涉及到物体的转动时，物体的尺度与形状就不能忽略，质点模型就不再合适，刚体将取而代之。因此，我们千万要记住：*物理概念具有模型本质，有其一定的适用范围。*

1 .2　函数及其图像

定义 1 .1 (函数) 设 X 和 Y 为非空的集合，如果存在某种对应关系 f，使得对于集合 X 中的任意一个元素 x，在集合 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称 $f: X \to Y$ 为从集合 X 到集合 Y 的一个函数，记作 $y = f(x)$。其中 x 叫作自变量或原像点，y 叫因变量或像点。集合 X 叫做函数的定义域，集合 $\{f(x)|x \in X\}$ 叫做函数的值域。

根据集合 X 和 Y 中元素的属性，“函数”在不同的数学领域又有各自的称谓：映射、变换、同构、算符和泛函，其中“映射”的叫法比较普遍。

例 1 .1 关于函数的最简单例子就是一元函数

$$y = f(x) = x^2 \tag{1 .1}$$

其中 x 和 y 均为实数，f 为函数名。

注意，符号 $f(x)$ 的准确含义是函数 f 在 x 点的取值。

例 1 .2 比一元函数稍复杂一点的是二元函数

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \tag{1 .2}$$

其中 (x, y) 可视作 2 维平面上的点，而 y 被视作 1 维空间上的点。

例 1 .3 此例中的函数 F 又叫做（微分）算符，其中自变量是关于 x 的函数 g，经过 $\frac{d}{dx}$ 的作用后得到一个新的关于 x 的函数 y。

$$y = F[g] = \frac{d}{dx} g(x) \tag{1 .3}$$

例 1 .4 此例中的函数 F 又叫做线性泛函，其中自变量是关于 x 的函数 g，经过积分后得到一个实数 y。

$$y = F[g] = \int_a^b g(x) dx \tag{1 .4}$$

定义 1.2 (函数的图像) 假设有函数 $f: X \to Y$，其图像为以下的集合

$$G = \{(x, y) \mid y = f(x), \forall x \in X\} \tag{1.5}$$

关于函数，**最后要强调的是数学和物理对函数相关符号处理的规则是不同的**。以一元函数为例，

$$y = f(x) \quad \xrightarrow{x=g(t)} \quad y = f[g(t)] = f \circ g(t) = h(t) \tag{1.6a}$$

$$y = y(x) \quad \xrightarrow{x=g(t)} \quad y = y[g(t)] = y \circ g(t) = y(t) \tag{1.6b}$$

式1.6a使用了 x、y 和 f 分别来表示自变量、应变量和函数名，并且当自变量 x 替换成 t 时，函数名 f 也随之相应地替换成 h，此即数学上的关于函数符号处理的规则。与之不同的是，物理上则使用了同一个符号 y 来表示应变量和函数名（见式1.6b），并且函数名不随自变量的变化而改变。物理上的这种符号处理在大多数情况下不会造成混淆，反而会降低我们思维上的负担。

1.3 矢量及其投影

牛顿力学（简称力学）关注的是所研究对象的空间位置是如何随时间演化，而力学对象的位置状态在数学上是由矢量（或向量）来给出定量的描述，所以力学又常被称作矢量力学。随着力学对象由单个质点到质点系直至连续介质，矢量相应地由 3 维推广到 n 维直至无穷维的波函数。

关于矢量最直观的例子在是三维空间中的有向线段，一旦建立坐标系，它有相应的坐标表示 (x, y, z)。在更高维空间中，我们就无法给出“有向线段”的几何图像，因此这种直观性是不能推广的。不过，我们注意到三维矢量的坐标表示是由三个分量组成的，于是我们把“多分量”属性直接推广到高维空间。因此，我们**将矢量视作一个多分量的量**。比起矢量的一般定义，这是理解矢量的一种较直观的角度。

矢量的一般定义为线性空间（矢量或向量空间）的元素，具体的对象范围很广。

两矢量彼此关系中有两个极端情形：共线和垂直。在线性代数中，前者叫线性相关，后者叫正交。共线用代数式可表达成

$$\boldsymbol{y} = c\boldsymbol{x} \tag{1.7}$$

点积的运算规则：$(\alpha\boldsymbol{y}+\beta\boldsymbol{z})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot(\alpha\boldsymbol{y}+\beta\boldsymbol{z}) = \alpha\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}$，其中 α 和 β 为任意实数。

其中，$c > 0$ 意味着 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 同向，$c < 0$ 意味着 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 反向。垂直用代数式可表达成

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0 \tag{1.8}$$

其中，“$\cdot$”表示点积（在线性代数中叫内积，符号换成了 $(\cdot, \cdot)$）。在一般情况下，矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 既不共线也不垂直，此时我们可以将 $\boldsymbol{y}$ 分解为两项之和

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{y}_t \tag{1.9}$$

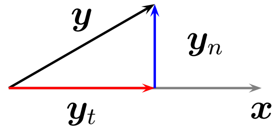


图 1: 矢量的投影

式1.9中 $\boldsymbol{y}_n$ 与 $\boldsymbol{x}$ 垂直，$\boldsymbol{y}_t$ 与 $\boldsymbol{x}$ 共线；其中，$\boldsymbol{y}_t$ 称作为在 $\boldsymbol{x}$ 上的投影矢量，可表示为

$$\boldsymbol{y}_t = c\hat{\boldsymbol{x}} \tag{1.10}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ 为与 $\boldsymbol{x}$ 同向的单位矢量，系数 $c = \boldsymbol{y} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}{x}$ 为投影分量。

1 .4 位矢及其坐标表示

为了给质点在空间所处位置定量的描述，通常要经历三个步骤：

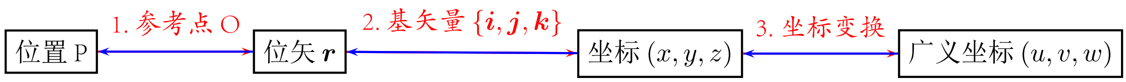
三个步骤：

1) 选取空间任一固定点 O 为参考点，由 O 指向质点所处位置 P 的有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 称作位矢，$\overrightarrow{OP}$ 通常记作 $\boldsymbol{r}(P)$ 或 $\boldsymbol{r}$——即 $\boldsymbol{r}(P)=\overrightarrow{OP}$；显然位置 P 与位矢 $\boldsymbol{r}$ 之间满足一一对应的关系；

2) 建立以 O 为原点的笛卡尔坐标系，坐标轴的指向分别对应彼此正交的单位长度的矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$——即标准基；于是，位矢 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，其中坐标分量 (x,y,z) 由 $\boldsymbol{r}$ 唯一地确定；

3) 对坐标分量 (x,y,z) 进行坐标变换，得到广义坐标 (u,v,w)。

其中第 3 个步骤对某些问题不是必需的。



1 .5 运动轨迹与曲线、速度及加速度

质点在 n 维空间中的运动轨迹可看成一系列点构成的一维连续体，一旦选定空间某点作为参考点，并以该点为原点建立坐标系，则空间中的点与 n 维实空间 R^n 中的点一一对应，运动轨迹就对应 R^n 中的一条曲线。

$\mathrm{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\forall x_i\in\mathrm{R},i=1,\cdots,n\}$

定义 1 .3 (曲线) 为一连续映射 $\boldsymbol{r}:I\to\mathrm{R}^n$；其中，$I$ 为 R 上的区域。该定义又称为曲线的参数表示。

无论是物理上的运动轨迹还是数学上的曲线，都不是一个任意的点的集合，它必须构成一维连续体。为此，定义中的映射 $\boldsymbol{r}:t\in I\mapsto(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 必须是连续的，即每个 $x_i(t)$ 均为 t 的连续函数。因此，一维连续变化的原像点 t 在 $\boldsymbol{r}$ 映射下的像点构成了一维连续体。

定义1 .3是曲线的“强”定义，它强调的是映射本身而不是映射的像点。当考虑动力学信息时，该定义是有用的。考虑以下例子：

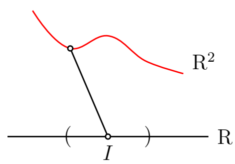


图 2: R^2 中的曲线

例 1 .5 (匀速圆周运动)

$$\boldsymbol{r}_1(t)=\cos(\omega_1 t)\boldsymbol{i}+\sin(\omega_1 t)\boldsymbol{j},\quad 0\le t<2\pi/\omega_1 \tag{1 .11a}$$

$$\boldsymbol{r}_2(t)=\cos(\omega_2 t)\boldsymbol{i}+\sin(\omega_2 t)\boldsymbol{j},\quad 0\le t<2\pi/\omega_2 \tag{1 .11b}$$

虽然映射 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的像点构成的集合是相同的，都是半径为 1 的单位圆，但是若角速率 $\omega_1\neq\omega_2$，$\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 所描述的运动快慢是不同的。

在很多情况下，我们不在意其动力学过程，而只关注由像点构成的曲线的几何特征，如形状、弯曲程度和长度等。为此目的，我们定义曲线为一连续映射 $\boldsymbol{r}:I\to\mathrm{R}^n$ 的像点构成的点集。该定义可称为曲线的“弱”定义。以后，当我们提到曲线或运动轨迹时，指的是弱定义下的曲线。

当考虑曲线的几何特征时，对曲线选择不同的参数表示有时是比较方便的。对以参数 t 表示的曲线 $\boldsymbol{r}:t\in[a,b]\mapsto(x_1(t),\cdots,x_n(t))\in\mathrm{R}^n$，引

入新参数 $\tau(a' \le \tau \le b')$，t 与 τ 有函数关系 $t = t(\tau)$，该函数满足 $t(a') = a$ 和 $t(b') = b$，且 $\frac{dt}{d\tau} > 0$。（这意味当 τ 由 a' 变化到 b' 时，t 由 a 单调地变化到 b。）于是，就得到以参数 τ 表示的曲线

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}[t(\tau)] = \boldsymbol{r}(\tau) \tag{1.12}$$

定义 1.4 对曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 定义速度 $\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}$。

当参数 t 为物理上的真实时间时，$\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{a}(t)$ 就是通常力学上的速度和加速度；否则，我们将 t 视作虚拟时间，将 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{a}(t)$ 理解为按该虚拟时间运动的速度和加速度。当同一条曲线分别以参数 τ 和 t 表示时，相应的速度 $\boldsymbol{v}(\tau)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 满足以下关系

$$\boldsymbol{v}(\tau) = \frac{d\boldsymbol{r}(\tau)}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\frac{dt}{d\tau} = t'(\tau)\boldsymbol{v}(t) \tag{1.13}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 是位矢 $\boldsymbol{r}$ 随“时间”（引号是强调时间可能是虚拟时间）的变化率，而加速度 $\boldsymbol{a}$ 是速度 $\boldsymbol{v}$ 随时间的变化率。一般地，矢量的变化包含长度和方向的改变。以速度 $\boldsymbol{v}$ 为例（图3），其变化 $d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{v}_t + d\boldsymbol{v}_n$，当时间间隔 $dt \to 0$，$d\boldsymbol{v}_t$ 或 $d\boldsymbol{v}_n$ 势必与 $\boldsymbol{v}$ 共线或垂直。于是，

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_t + d\boldsymbol{v}_n}{dt} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n \tag{1.14}$$

其中，法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 反映速度方向的变化，可以用来度量曲线的弯曲程度（见后）；切线加速度 $\boldsymbol{a}_t = \frac{d\boldsymbol{v}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{v}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}$。

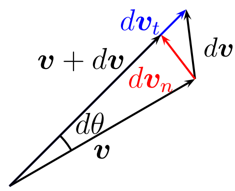


图 3: 速度的变化

1.6 曲线的自然参数表示、曲率及曲率半径

如果曲线上的点都能落在某个平面上时，那么该曲线被称作平面曲线，否则称作空间曲线。

定义 1.5 (曲线的长度) 对曲线 $\boldsymbol{r} : t \in [a, b] \mapsto (x_1(t), \cdots, x_n(t)) \in \mathrm{R}^n$，定义其长度 $L = \int_a^b \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}\, dt = \int_a^b v dt$，其中 $\boldsymbol{v}$ 为速度。

需要强调的是曲线的长度不依赖于该曲线以何种参数表示。根据式 1 .13，可知在新参数 τ 下的长度

$$L' = \int_{a'}^{b'} v(\tau) d\tau = \int_a^b v(t) dt = L \tag{1.15}$$

用力学的语言此结论即为：无论以什么样的速度经过同一条路径，所走过的路程是相同的——貌似一句正确的废话。

定义 $s(t) = \int_a^t v(\tau) d\tau$，$s(t)$ 表示由 a 时刻所在位置出发到 t 时刻所走过的路程，显然 s 是关于 t 的单调递增函数；反过来，t 也可以视作 s 的函数 $t = t(s)$。因此有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}[t(s)] = \boldsymbol{r}(s) \tag{1.16}$$

这种以路程 s 作为参数表示的曲线称作曲线的自然参数表示。在日常生活中，当去某地时人们通常是以路程来标志目的地在道路上的位置，即路程作为参数是人们自然的选择。

例 1.6 匀速圆周运动 $\boldsymbol{r}(t) = R\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + R\sin(\omega t)\boldsymbol{j}\ (0 \le t \le T)$ 的自然参数表示为

$$\boldsymbol{r}(s) = R\cos(\frac{s}{R})\boldsymbol{i} + R\sin(\frac{s}{R})\boldsymbol{j}, \quad 0 \le s \le 2\pi R$$

在自然参数下的速度与加速度有以下特殊的性质：

1. 自然参数下的速度的大小恒为1：$v(s) = 1$

$$\boldsymbol{v}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\boldsymbol{v}(t)}{v(t)} = \hat{\boldsymbol{v}}(t)$$

2. 自然参数下的速度与加速度彼此垂直：$\boldsymbol{v}(s)\cdot\boldsymbol{a}(s) = 0$

$$\boldsymbol{v}(s)\cdot\boldsymbol{a}(s) = \frac{1}{2}\frac{d\boldsymbol{v}^2(s)}{ds} = 0$$

当考虑二维平面曲线运动时，我们把以质点所在位置为原点、以速度 $\boldsymbol{v}(s)$ 和加速度 $\boldsymbol{a}(s)$ 的方向为坐标轴的指向的活动坐标系称作自然坐标系，显然它是一直角坐标系。

定义 1 .6 (曲率及曲率半径) 对以自然参数表示的曲线 $\boldsymbol{r}(s)$，称加速度的模值 $\kappa = |\boldsymbol{a}(s)|$ 为曲线在 s 处的曲率，而称其倒数 $\rho = \kappa^{-1}$ 为曲率半径。

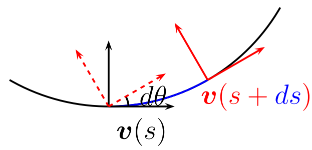


图 4: 曲率

曲率 κ 是用来度量曲线的弯曲程度。如图4所示，一般用切线方向随路程的变化率来度量弯曲程度，即 $\kappa = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|$。对以自然参数 s 表示的曲线，由于 $|\boldsymbol{v}(s)| \equiv 1$，所以 $|d\theta| = |d\boldsymbol{v}(s)|$，于是 $\kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{v}(s)}{ds}\right| = |\boldsymbol{a}(s)|$。一般情况下（见图3），利用 $|d\theta| = |\frac{d\boldsymbol{v}_n(t)}{v}|$ 和 $ds = v(t)dt$，可得 $\kappa = \left|\frac{1}{v^2(t)}\frac{d\boldsymbol{v}_n(t))}{dt}\right| = \frac{|\boldsymbol{a}_n(t)|}{v^2(t)}$。

例 1 .7 对例1 .6计算曲率：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(s) &= \tfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = -\sin(\tfrac{s}{R})\boldsymbol{i} + \cos(\tfrac{s}{R})\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{a}(s) &= \tfrac{d\boldsymbol{v}(s)}{ds} = -\tfrac{1}{R}\cos(\tfrac{s}{R})\boldsymbol{i} - \tfrac{1}{R}\sin(\tfrac{s}{R})\boldsymbol{j} \\
\kappa &= |\boldsymbol{a}(s)| = R^{-1}
\end{aligned}$$

虽然曲率 κ 刻画的是曲线的静态几何特征，但它却决定了动力学量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}_n$ 之间的关系。对给定轨道上的运动，这点具有实际应用价值。比如，当行驶的火车需要拐弯时，通常会降低速率以防脱轨。

1 .7 正交曲线坐标系——极坐标

在计算力学问题时，笛卡尔坐标系有时不太方便，也不直观。为此，人们引入了各种广义坐标系，而最为常见的是正交曲线坐标系。在这一小节，将向大家介绍其中最简单的情形——极坐标。

设位矢 $\boldsymbol{r}$ 在笛卡尔直角坐标系里的坐标为 (x, y)，即 $\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$；对 (x, y) 进行坐标变换

$$\begin{cases} x = x(r,\, \theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\, \theta) = r\sin\theta \end{cases} \tag{1 .17}$$

这里需要作一点说明，首先所有极坐标 $(0, \theta)$ 都对应坐标系原点，此时 θ 取值不唯一; 另外，为了能进行微分运算，x 轴的正半轴上的点都视作奇

异点不予考虑。也就是说我们只考虑 $r>0$ 并且 $0<\theta<2\pi$ 的情形，对该区域上点 (x,y) 与 (r,θ) 之间有一一对应关系，并有逆变换

$$\begin{cases} r = r(x,\, y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \theta(x,\, y) = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases} \tag{1.18}$$

于是，用极坐标位矢可表示为 $\boldsymbol{r}(r,\theta) = r\cos(\theta)\boldsymbol{i} + r\sin(\theta)\boldsymbol{j}$。

例 1.8 阿基米德螺旋线用笛卡尔坐标可表示为 $\sqrt{x^2+y^2} = a + b\arctan(\frac{y}{x})$（$a\geq 0$，$b>0$），而用极坐标则表示为 $r = a+b\theta$，显然后者更直观（图5）。

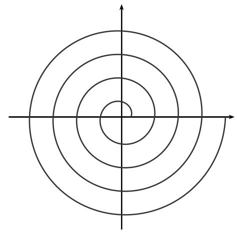


图 5: 阿基米德螺旋线

除此之外，对不同的位置采用不同的坐标轴指向（即基矢量）有可能会让问题变的更容易、更直观（考虑到对称性的原因）。首先，我们先回顾一下笛卡尔坐标网格（图6），它是由水平的和竖直的坐标线构成。假设 P_0 点的笛卡尔坐标为 (x_0,y_0)（其极坐标为 (r_0,θ_0)），定义过该点的x **坐标线**为曲线

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,y_0), \quad -\infty < x < \infty$$

而y **坐标线**为曲线

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x_0,y), \quad -\infty < y < \infty$$

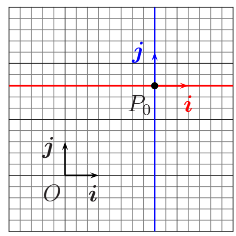


图 6: 笛卡尔坐标网格

这两条坐标线其实均为直线并且相互垂直。对笛卡尔坐标系，P_0 **处的基矢量为与坐标线在该点的切线共线的单位矢量，并朝向坐标值增加的方向**，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}(P_0) = \frac{d\boldsymbol{r}(x_0,y_0)/dx}{|d\boldsymbol{r}(x_0,y_0)/dx|} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(x_0,y_0)/\partial x}{|\partial \boldsymbol{r}(x_0,y_0)/\partial x|} \\ \boldsymbol{j}(P_0) = \frac{d\boldsymbol{r}(x_0,y_0)/dy}{|d\boldsymbol{r}(x_0,y_0)/dy|} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(x_0,y_0)/\partial y}{|\partial \boldsymbol{r}(x_0,y_0)/\partial y|} \end{cases}$$

显然 $\boldsymbol{i}(P_0)$ 和 $\boldsymbol{j}(P_0)$ 不依赖于 P_0 所在位置，均为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，我们把这样的坐标系称作为*均匀坐标系*。

图7所示的是极坐标网格，它是由圆与射线构成，其中过 P_0 点的r **坐标线**为曲线

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(r,\theta_0), \quad 0 < r < \infty$$

而过 P_0 点的θ **坐标线**为曲线

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(r_0,\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi$$

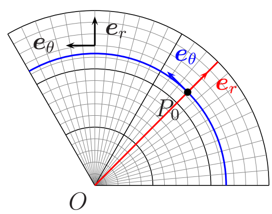


图 7: 极坐标网格

这两条坐标线彼此垂直——即它们在 P_0 处的切线彼此垂直，极坐标系就是所谓的正交曲线坐标系，其中“正交”表示坐标线在交点处彼此垂直，而“曲线”意味坐标线一般为曲线，不都是直线。P_0 处的基矢量同样地定义为沿坐标线的切线方向的单位矢量，具体而言就是

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r(P_0) = \frac{d\boldsymbol{r}(r_0,\theta_0)/dr}{|d\boldsymbol{r}(r_0,\theta_0)/dr|} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(r_0,\theta_0)/\partial r}{|\partial \boldsymbol{r}(r_0,\theta_0)/\partial r|} \\ \boldsymbol{e}_\theta(P_0) = \frac{d\boldsymbol{r}(r_0,\theta_0)/d\theta}{|d\boldsymbol{r}(r_0,\theta_0)/d\theta|} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(r_0,\theta_0)/\partial \theta}{|\partial \boldsymbol{r}(r_0,\theta_0)/\partial \theta|} \end{cases} \tag{1.19}$$

不同于笛卡尔坐标系，极坐标系是*非均匀坐标系*——即基矢量一般是随位置的变化而变化。不过对于极坐标系，$\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 仅仅依赖于 θ（见图7），该结论也可由式 1.19导出：

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\sin(\theta)\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\boldsymbol{j} \end{cases} \tag{1.20}$$

基矢 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 有如下重要的关系：

$$\boldsymbol{e}_r = -\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{d\theta} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{e}_\theta = \frac{d\boldsymbol{e}_r}{d\theta} \tag{1.21}$$

这可由式1.20导出，也可由图8直观地得到。有了基矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$，位矢、速度和加速度可表示成：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \end{cases}$$

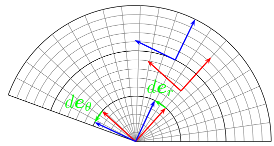


图 8: $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$

其中 $\boldsymbol{v}_r(\boldsymbol{a}_r)$ 称作径向（加）速度，而 $\boldsymbol{v}_\theta(\boldsymbol{a}_\theta)$ 称作横向（加）速度。

例 1.9 (教材习题 1-2.)

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = R\boldsymbol{e}_r, \quad \theta = \omega t \\ \boldsymbol{v} = R\omega\boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{a} = -R\omega^2\boldsymbol{e}_r \end{cases}$$