3 第三单元

习题 3 .1 如图 13所示，在劲度系数为 k 的弹簧下挂质量分别为 m_1 和 m_2 的两个物体，开始时处于静止。若把 m_1 和 m_2 之间的连线烧断，求 m_1 的最大速度。(P.147:Prob.3.7)

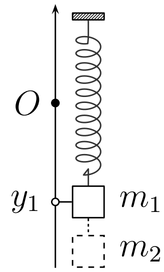

图 13: 习题3 .1

解：如图 13所示，以弹簧处于原长时 m_1 所在位置为坐标系的原点 O，因此当 $t=0$ 时有 $y_1(0)=-(m_1+m_2)g/k$ 和 $\dot{y}_1(0)=0$。以 O 为弹性和重力势能的零点，则总势能为

$$V(y_1)=\frac{1}{2}ky_1^2+m_1gy_1$$

从而，初始时刻的机械能 $E=V(y_1(0))=(m_2^2-m_1^2)g^2/(2k)$。显然，当势能达到极小值时，动能达到极大值。由 $\frac{dV}{dy_1}=0$，可知当 $y_1=y_m=-\frac{m_1g}{k}$ 时势能有极小值 $V_m=V(y_m)$；设此时最大速率为 v_m，由机械能守恒定律可知

$$\frac{1}{2}m_1v_m^2+V_m=E$$

可求得 $v_m=m_2g/\sqrt{m_1k}$。

习题 3 .2 如本题图，劲度系数为 k 的弹簧一端固定在墙上，另一端系一质量为 m_A 的物体。当把弹簧的长度压短 x_0 后，在它旁边紧贴着放一质量为 m_B 的物体。撤去外力后，求（1）A、B 离开时，B 以多大速率运动；（2）A 距起始点移动的最大距离。设下面是光滑的水平面。(P.147:Prob.3.8)

解：见教材图示，显然分离发生在弹力方向发生反转的那一时刻——即弹簧达到原长，推力变成拉力——在此之前，两物体一直具有相同速度。设分离瞬间的速率为 v，由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2=\frac{1}{2}kx_0^2$$

可得 $v=|x_0|\sqrt{\frac{k}{m_A+m_B}}$。随后，物体 A 继续向前运动，达到最远处 x_m 是其动能完全转换为弹性势能，即有 $\frac{1}{2}kx_m^2=\frac{1}{2}m_Av^2$。于是，物体 A 距离起点最大距离为 $(|x_0|+x_m)$。

习题 3 .3 一质点在保守力场中沿 x 轴（在 $x>0$ 范围内）运动，其势能为 $V(x)=kx/(x^2+a^2)$，其中 k、a 均为大于零的常数。试求（1）质点所受到的力的表示式；（2）质点的平衡位置。

解：由 $F(x)=-\frac{dV(x)}{dx}$ 可得

$$F(x)=\frac{k(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^2}$$

由 $F(x)=0$ 及 $x>0$ 可知平衡位置 $x_0=a$。

习题 3 .4 一质量为 m 的质点在保守力场中沿 x 轴（在 $x>0$ 范围内）运动，其势能为 $V(x)=A/x^3-B/x$，其中 A、B 均为大于零的常数。（1）找出质点运动中受到沿 x 负方向最大力的位置；（2）若质点的总能量 $E=0$, 试确定质点的运动范围。

解：分别计算 $F(x)$ 及其一阶导数

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = \frac{3A}{x^4} - \frac{B}{x^2}$$
$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{12A}{x^5} + \frac{2B}{x^3}$$

由 $F'(x) = 0$ 及 $x > 0$，可知极值位置 $x_m = \sqrt{\frac{6A}{B}}$，在 x_m 处的力 $F(x_m) = -\frac{B^2}{12A}$。下面我们要分析 x_m 是否就是沿 x 负方向最大力的位置——仅根据极值无法判断其是否是最大值，当 $0 < x < x_m$ 时有 $F'(x) < 0$，这意味着 F 为单调递减函数，即 $F(x) > F(x_m)$，当 $x > 0$ 时有 $F'(x) > 0$，这意味着 F 为单调递增函数，即 $F(x) > F(x_m)$，故 x_m 是沿 x 负方向最大力的位置。

由 $V(x) \leq 0$，可解得 $x \geq \sqrt{\frac{A}{B}}$，所以质点的运动范围为 $[\sqrt{\frac{A}{B}}, +\infty)$。

习题 3 .5 一质量为 m 的质点在半径为 R 的竖直圆轨道内运动，设没有摩擦力，当质点在最低点时，其速率为 v_0，如图 14所示。(1) v_0 的最小值 v_{min} 为多大时，质点还能沿着圆形轨道运动而不脱离轨道？(2) 假定 $v_0 = 0.775v_{min}$，则质点将在某点 P 处脱离轨道而沿图 14中虚线所示的路径运动，试求 P 的角位置 θ。

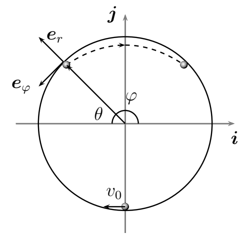

图 14: 习题3 .5

解：(1) 质点受到重力 $\boldsymbol{G} = -mg\boldsymbol{j}$ 和轨道的法向支持力 $\boldsymbol{N} = -f\boldsymbol{e}_r$（没有摩擦力），由牛顿定律可知

$$-ma_n\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{N} + (\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r \quad \Rightarrow \quad f = ma_n - mg\sin\varphi \tag{3 .1}$$

因为轨道是半径为 R 的圆，所以

$$a_n = \frac{v^2}{R} \tag{3 .2}$$

由于支持力 $\boldsymbol{N}$ 不做功，而重力为保守力，故有机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin\varphi = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \tag{3 .3}$$

结合(3 .1)、(3 .2)和(3 .3)，可得：

$$f = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2 + 3\sin\varphi) \tag{3 .4}$$

“不脱离轨道”意味着不论质点处于轨道哪个位置始终有 $f \geq 0$，故有

$$\frac{mv_0^2}{R} \geq mg(2 + 3\sin\varphi) \quad \forall\varphi \in [0, 2\pi) \tag{3 .5}$$

当 $\varphi = \pi/2$（最高位置）时，式(3 .3)中不等号右端为 $5mg$，因此 $v_{min} = \sqrt{5Rg}$。

(2) 当 $v_0 = 0.775v_{min}$ 时，由 $f = 0$ 可得

$$\sin\varphi = \frac{0.775^2 \times 5 - 2}{3} = 0.334375 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi - \arcsin(0.334375) \tag{3 .6}$$

即角位置 $\theta = \arcsin(0.334375)$。