6 第五单元

习题 6 .1 一细杆两端装有质量相同的质点 A 和 B，可绕水平轴 O 自由摆动，已知参量如 图 25所示。求小幅摆动的周期和等值摆长。(P.203:Prob.4-26)

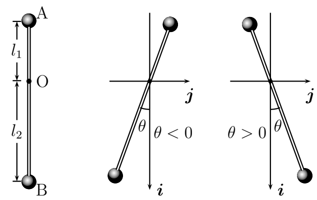

图 25: 习题6 .1

解法一：如图 25所示，系统的角动量、重力力矩分别为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_z &= I\omega\boldsymbol{k} = m(l_1^2+l_2^2)\omega\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{M}_z &= (\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_B)\times(mg\boldsymbol{i}) = (l_2-l_1)\frac{\boldsymbol{r}_B}{r_B}\times(mg\boldsymbol{i}) \\
&= -(l_2-l_1)mg\sin\theta\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

由角动量定理 $\dot{\boldsymbol{J}}_z = \boldsymbol{M}_z$ 和 $\omega = \dot{\theta}$ 可知

$$I\ddot{\theta} = -(l_2-l_1)mg\sin\theta \tag{6 .1}$$

由于是小幅摆动，故有 $\sin\theta \approx \theta$；于是方程 (6 .1)可近似为

$$\ddot{\theta}+\omega_a^2\theta = 0, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{(l_2-l_1)mg}{I}} = \sqrt{\frac{(l_2-l_1)g}{l_1^2+l_2^2}} \tag{6 .2}$$

因此 $T = \frac{2\pi}{\omega_a} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1^2+l_2^2}{(l_2-l_1)g}}$；由单摆的角频率公式 $\omega_{单摆} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 和 w_a 可知等值摆长 $l = \frac{l_1^2+l_2^2}{(l_2-l_1)}$。

解法二：系统的总动能为：

$$E_k = \frac{1}{2}m(\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_A)^2+\frac{1}{2}m(\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_B)^2 = \frac{1}{2}m(l_1^2+l_2^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

以 O 处为重力势能零点并应用简谐近似，则系统的重力势能为：

$$U_G = -mg(l_2-l_1)\cos\theta \approx -mg(l_2-l_1)(1-\frac{1}{2}\theta^2)$$

由机械能守恒定律可知：

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - mg(l_2-l_1)(1-\frac{1}{2}\theta^2) = \text{Const.} \tag{6 .3}$$

方程(6 .3)两端对时间求导则可得方程(6 .2)，余下步骤相同。

习题 6 .2 如图 26所示，复摆周期原为 $T_1 = 0.5s$，在 O 轴下 $l = 10cm$ 处（联线过质心 C）加质量 $m = 50g$ 后，周期变为 $T_2 = 0.6s$。求复摆对 O 轴原来的转动惯量。(P.203:Prob.4-27)

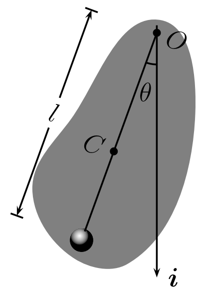

图 26: 习题6 .2

解法一：如图 26所示，复摆沿 O 轴的角动量 $\boldsymbol{J}_z = I\omega\boldsymbol{k}$，沿 O 轴的重力力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_z &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (\Delta m_i g\boldsymbol{i}) = \left(\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i\right) \times g\boldsymbol{i} \\ &= M\boldsymbol{r}_c \times g\boldsymbol{i} = -Mgr_c \sin\theta\boldsymbol{k} \approx -Mgr_c\theta\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

其中 M 为复摆的总质量，位矢 $\boldsymbol{r}_c$ 为其质心所在位置，θ 为 $\boldsymbol{r}_c$ 与 $\boldsymbol{i}$ 之间的夹角，最后一步利用了 $\theta \approx 0$。由角动量定律 $\frac{d\boldsymbol{J}_z}{dt} = \boldsymbol{M}_z$ 可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgr_c}{I}\right)\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr_c}} \tag{6 .4}$$

当加质量 m 后，系统的总角动量为 $\boldsymbol{J}'_z = (I + ml^2)\omega\boldsymbol{k}$，重力力矩为

$$\boldsymbol{M}'_z = \boldsymbol{M}_z + \boldsymbol{r}_m \times mg\boldsymbol{i} = \boldsymbol{M}_z - mgl\sin\theta\boldsymbol{k} \approx -(Mgr_c + mgl)\theta\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{r}_m$ 为 m 所对应的位矢，第二个等号利用了 $\boldsymbol{r}_c$ 和 $\boldsymbol{r}_m$ 共线。同理可得

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I + ml^2}{Mgr_c + mlg}} \tag{6 .5}$$

方程(6 .4)和(6 .5)只含有两个未知量 I 和 Mgr_c，由此可解得 I。

解法二：复摆的动能为 $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$，重力势能为 $U_G = -Mgr_c\cos\theta$，根据机械能守恒定律可知

$$\frac{d(E_k + U_G)}{dt} = 0 \quad \xrightarrow[\sin\theta\approx\theta]{\frac{d\theta}{dt}\neq 0} \quad I\frac{d^2\theta}{dt} + Mgr_c\theta = 0 \tag{6 .6}$$

当加质量 m 后，系统的动能变为 $E'_k = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}ml^2(\frac{d\theta}{dt})^2$，重力势能为 $U_G = -(Mgr_c + mgl)\cos\theta$，同理可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgr_c + mgl}{I + ml^2}\right)\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I + ml^2}{Mgr_c + mlg}} \tag{6 .7}$$

由方程(6 .6)和(6 .6)可解得 I。