习题 2 .5 如所示，将质量为 m 的小球用细线挂在倾角为 θ 的光滑斜面上。求（1）若斜面以加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿图示方向运动时，细线的张力及小球对斜面的正压力；（2）当加速度 a 取何值时，小球刚可以离开斜面？(P.95:Prob.2-23)

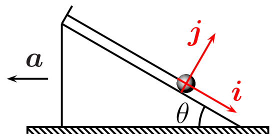

图 8: 习题2 .5

解：建立如图 8所示与斜面固连的动坐标系，小球受到重力 $\boldsymbol{G}$、来自斜面的支持力 $\boldsymbol{N}$、来自细线的张力 $\boldsymbol{T}$ 和平移的惯性力 $\boldsymbol{F}_t$，分别有

$$\boldsymbol{G} = mg(\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{N} = N\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{F}_t = -m\boldsymbol{a} = ma(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})$$

对于合力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_t$ 有 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} = 0$ 和 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j} = 0$，即

$$T = mg\sin\theta + ma\cos\theta, \quad N = mg\cos\theta - ma\sin\theta$$

当 $N = 0$ 时，即 $a = g/\tan\theta$，小球刚可以离开斜面。

习题 2 .6 一辆汽车驶入曲率半径为 R 的弯道。弯道倾斜一角度 θ，轮胎与路面之间的摩擦系数为 μ。求汽车在路面上不作侧向滑动时的最大和最小速率。(P.96:Prob.2-24)

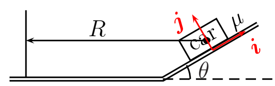

图 9: 习题2 .6

解：由题意可知法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$、重力 $\boldsymbol{G}$、路面对汽车的支持力 $\boldsymbol{N}$ 及摩擦力 $\boldsymbol{F}_m$ 分别为

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{R}(-\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{N} = N\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{G} = -mg(\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{F}_m = f\boldsymbol{i}$$

其中 v 为汽车的速率。由 $m\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_m$ 可得：

$$N = m\frac{v^2}{R}\sin\theta + mg\cos\theta$$
$$f = mg\sin\theta - m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

根据 $|f| \leq \mu N$（即小于等于最大静摩擦力），可得：

$$\sqrt{\frac{gR(\tan\theta - \mu)}{1 + \mu\tan\theta}} \leq v \leq \sqrt{\frac{gR(\tan\theta + \mu)}{1 - \mu\tan\theta}}$$

习题 2 .7 一条均匀的绳子，质量为 m，长度为 l，将它拴在转轴上，以角速率 ω 旋转，试证明：略去重力时，绳中的张力分布为

$$T(r) = \frac{m\omega^2}{2l}(l^2 - r^2)$$

式中 r 为到转轴的距离。(P.96:Prob.2-28)

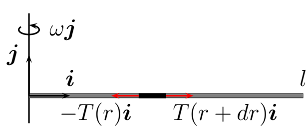

图 10: 习题2 .7

解：建立如图 10所示的旋转坐标系，使得绳子落在 $\boldsymbol{i}$ 轴上。现考虑处于 r 与 $r + dr$ 之间长度为 dr 的一段绳子，显然其质量为 $dm = \rho dr$，其中线密度 $\rho = \frac{m}{l}$。该段绳子受到左边的和右边的绳子的拉力，它们分别为 $-T(r)\boldsymbol{i}$ 和 $T(r + dr)\boldsymbol{i}$（绳子的张力如同压强，是一个强度量，无方向。），

故合拉力为 $\boldsymbol{F}_s = [T(r+dr) - T(r)]\boldsymbol{i}$。因为绳子相对于旋转坐标系静止，所以离心力 $\boldsymbol{F}_c = (dm)\omega^2 r\boldsymbol{i}$ 与绳子的张力抵消，即 $\boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{F}_c = 0$，于是有

$$\frac{dT(r)}{dr} + \frac{m}{l}\omega^2 r = 0 \quad \Rightarrow \quad T(r) = -\frac{m\omega^2}{2l}r^2 + c$$

最后，由初始条件 $T(l) = 0$ 可得积分常数 $c = \frac{m\omega^2 l}{2}$。

习题 2 .8 在顶角为 2α 的光滑圆锥面的顶点上系一劲度系数为 k 的轻弹簧，原长 l_0，下坠一质量为 m 的物体，绕锥面的轴线旋转。试求使物体离开锥面的角速率 ω 和此时弹簧的伸长。(P.96:Prob.2-29)

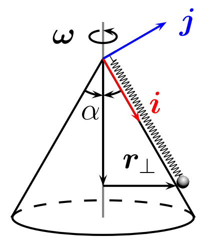

图 11: 习题2 .8

解：建立如图 11所示的转动坐标系 K，它以同样的角速率 ω 随物体一起绕锥面的轴线旋转。图 11只展示了 K 系的基矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，第三个基矢量 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}$ 此刻是垂直于纸面向外的。角速度可用 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j})$$

物体在 K 系的位置对应位矢 $\boldsymbol{r} = l\boldsymbol{i}$（$l$ 为弹簧拉伸的长度），在 K 系的观测者看来，物体受到重力 $\boldsymbol{G}$、弹力 $\boldsymbol{F}_k$、锥面的支持力 $\boldsymbol{N}$ 和离心力 $\boldsymbol{F}_c$ 的作用，它们分别为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G} &= mg(\cos\alpha\boldsymbol{i} - \sin\alpha\boldsymbol{j}) \\
\boldsymbol{F}_k &= -k(l-l_0)\boldsymbol{i} \\
\boldsymbol{N} &= n\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{F}_c &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = m\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp \\
&= m\omega^2 l\sin\alpha(\sin\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{j})
\end{aligned}$$

因为它们的合力 $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{0}$，所以有

$$\begin{aligned}
n &= mg\sin\alpha - m\omega^2 l\sin\alpha\cos\alpha \\
k(l-l_0) &= mg\cos\alpha + m\omega^2 l(\sin\alpha)^2
\end{aligned}$$

当锥面对物体存在支持力意味着 $n \geq 0$，即 $\omega \leq \omega_c(=\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}})$，否则意味着物体离开了锥面。当角速率为临界值 ω_c 时——这意味着物体即将离开锥面，弹簧拉伸的长度为

$$\Delta l = (l-l_0) = \frac{mg\cos\alpha + m\omega_c^2 l(\sin\alpha)^2}{k} = \frac{mg}{k\cos\alpha}$$

临界角速率为

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{(l_0+\Delta l)\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{kg}{l_0 k\cos\alpha + mg}}$$

习题 2 .9 质点以恒定速率 v 沿轨道 $r = k(1+\cos\theta)$ 运动，请计算 1) 加速度 $\boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ 沿径向的分量 a_r；2) 加速度的大小 a；3) 角速率 $\dot{\theta}$。

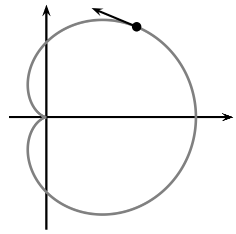

图 12: 心脏线，注意原点（对应 $\theta=\pi$）为奇点。

解：在极坐标系，该曲线关于时间 t 的表示为 $\boldsymbol{r}(t) = k(1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_r$，其中 $\theta = \theta(t)$ 和 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\theta)$。于是有速度

$$\boldsymbol{v}(t) = k\dot{\theta}[-\sin\theta\boldsymbol{e}_r + (1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta] \tag{2 .3}$$

由式2 .3和 $|\boldsymbol{v}(t)| = v$，可得：

$$2(k\dot{\theta})^2(1+\cos\theta) = v^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{v}{2k|\cos(\theta/2)|} \tag{2 .4}$$

此处假定质点按逆时针运动（如图 12所示），即 $\dot{\theta} > 0$。式2 .4两端对时间 t 求导，可得：

$$2\ddot{\theta}(1+\cos\theta) - \dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \tag{2 .5}$$

由式2 .3，并结合式2 .4和 2 .5可得加速度

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(t) &= -k[\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2(1+2\cos\theta)]\boldsymbol{e}_r + k[\ddot{\theta}(1+\cos\theta) - 2\dot{\theta}^2\sin\theta]\boldsymbol{e}_\theta \\
&= -\frac{3}{2}k\dot{\theta}^2[(1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta] \\
&= -\frac{3v^2}{4k}[\boldsymbol{e}_r + \tan(\theta/2)\boldsymbol{e}_\theta]
\end{aligned}$$

因此，有

$$a_r = -\frac{3v^2}{4k}, \quad a = \frac{3v^2}{4k|\cos(\theta/2)|}$$

习题 2 .10 对保守力场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x-1)\boldsymbol{i} + (y-2)\boldsymbol{j}$，求其势能函数 $V(\boldsymbol{r})$，并给出势能零点的位置。

解: 设 γ 为由 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}$ 的任一路径: $\gamma = \{\boldsymbol{r}'(t)|\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t_2), \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}'(t_1), t_1 \leq t \leq t_2\}$，其中 $\boldsymbol{r}'$ 为关于 t 的连续（矢量）函数。由势能定义可知

$$\begin{aligned}
V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{t_1}^{t_2} (x'(t)-1)dx'(t) + (y'(t)-2)dy'(t) \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) - \left[\frac{(x'(t)-1)^2 + (y'(t)-2)^2}{2}\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) + \left[\frac{(x'(t_1)-1)^2 + (y'(t_1)-2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(x'(t_2)-1)^2 + (y'(t_2)-2)^2}{2}\right] \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) + \left[\frac{(x_0-1)^2 + (y_0-2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{2}\right] \\
&\xrightarrow[\boldsymbol{r}_0=(1,2)]{V(\boldsymbol{r}_0)=0} -\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{2}
\end{aligned}$$

其中 $(1,2)$ 为势能零点。一旦熟悉概念及符号，上述计算过程也可表示为

$$\begin{aligned}
V(\boldsymbol{r}) &= V(\boldsymbol{r}_0) - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (x'-1)dx' + (y'-2)dy' \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) - \left[\frac{(x'-1)^2+(y'-2)^2}{2}\right]_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \\
&= V(\boldsymbol{r}_0) + \left[\frac{(x_0-1)^2+(y_0-2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{2}\right] \\
&\xrightarrow[\boldsymbol{r}_0=(1,2)]{V(\boldsymbol{r}_0)=0} -\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{2}
\end{aligned}$$