7 第六单元

习题 7 .1 在惯性系 K 中观察到两事件同时发生，空间距离相隔 $1m$。惯性系 K' 沿两事件联线的方向相对于 K 运动，在 K' 系中观测到两事件之间的距离为 $3m$。求 K' 系相对于 K 系的速度和在其中测得两事件之间的时间间隔。(P.415:Prob.8-4)

解：以与两事件联线的共线为 x 轴，记 K' 系相对于 K 系的运动速度为 v，并设两事件的时空间隔在 K 系和 K' 系分别为 Δx、Δt 和 Δx、$\Delta t'$。由题意可知 $\Delta x = 1m$、$\Delta t = 0$ 和 $\Delta x' = 3m$，则由 Lorentz 变换可知：

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{8}}{3}c$$

和

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{\sqrt{8}m}{c} \approx -0.94 \times 10^{-8}s.$$

习题 7 .2 斜放的直尺以速度 V 相对于惯性系 K 沿 x 方向运动，它的固有长度为 l_0，在与之共动的惯性系 K' 中它与 x' 轴的夹角为 θ'。试证明：对于 K 系的观察者来说，其长度 l 和与 x 轴的夹角 θ 分别为 (P.415:Prob.8-6)

$$l = l_0\sqrt{\left(\cos\theta'\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)^2 + \sin^2\theta'}, \quad \tan\theta = \frac{\tan\theta'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

解：由题意可知，K 系的观察者测得长度为运动长度，为此观察者得在直尺两端制造两个同时事件，记它们的时空间隔为 Δx、Δy 和 Δt，其中 $\Delta t = 0$；在 K' 系，该事件的空间间隔 $\Delta x' = l_0\cos\theta'$ 和 $\Delta y' = l_0\sin\theta'$。由 Lorentz 变换可知 $\Delta y' = \Delta y$ 和

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \Delta x'\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

由此可知

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = l_0\sqrt{\left(\cos\theta'\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)^2 + \sin^2\theta'}$$

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\tan\theta'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

习题 7 .3 惯性系 K' 相对于惯性系 K 以速度 V 沿 x 方向运动，在 K' 系观测，一质点的速度矢量 $\boldsymbol{v}'$ 在 $x'y'$ 面内与 x' 轴成 θ' 角。试证明：对于 K 系，质点速度与 x 轴的夹角为 (P.415:Prob.8-7)

$$\tan\theta = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{V + v'\cos\theta'}$$

解：由题意可知 $v'_x = v'\cos\theta'$ 和 $v'_y = v'\sin\theta'$，由速度（逆）变换公式可知

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2}$$

由此可证得

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v'\cos\theta'}$$

习题 7 .4 两宇宙飞船相对于某遥远的恒星以 $0.8c$ 的速率朝相反的方向离开。试求两飞船的相对速度。(P.415:Prob.8-9)

解：以恒星为 K 系，其中一艘飞船为 K' 系，并取其飞行方向为 x 轴的方向，于是 K' 系相对于 K 系的速度为 $u = 0.8c$；对于 K 系的观察者而言，另一艘飞船的速度则为 $v = -0.8c$。求两飞船的相对速度，即求在 K' 系中测得另一艘飞船的速度 v'。由速度变换公式可得

$$v' = \frac{v-u}{1-uv/c^2} = \frac{-0.8c-0.8c}{1+0.64} = -\frac{1.6c}{1.64}$$