

南京邮电大学 2014/2015 学年第一学期

《数学物理方法》期末试卷 (A)

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 得分 | | | | | | | | | | | |

装订线内不要答题

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 偏微分方程 $u_x + u_x u_y = xy$ _____ 线性的, 它 _____ 齐次的. ()

A) 是, 是 B) 是, 不是 C) 不是, 是 D) 不是, 不是

2. 设 $u|_{x=0} = \mu_1(t)$, $u_x|_{x=l} = \mu_2(t)$, 如果令 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, 则边界齐次化函数

应为: $w(x, t) =$ _____, 可使 $v|_{x=0} = 0$; $v_x|_{x=l} = 0$. ()

A) $\frac{u_2(t) - u_1(t)}{l} x + u_1(t)$

B) $u_2(t)x + u_1(t)$

C) $u_1(t)x + u_2(t) - u_1(t)l$

D) $\frac{u_2(t) - u_1(t)}{2l} x^2 + u_1(t)x$

3. 边界条件与初始条件的在定解问题中的作用, 下列描述哪一个正确. ()

A) 边界条件用来确定本征值与本征函数, 初始条件用来确定展开系数

B) 初始条件用来确定本征值与本征函数, 边界条件用来确定展开系数

C) 二者的作用一样;

D) 上述都不正确

4. 输运方程 $u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ 属于以下哪一种类型? ()

A) 双曲型

B) 椭圆型

C) 抛物型

D) 以上都不对

5. 三维无限大空间的点源影响函数 (格林函数) 可表示为下面哪一项? ()

A) $\frac{\ln|\vec{r} - \vec{r}_0|}{2\pi}$

B) $-\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|}$

C) $\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$

D) $-\frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{4\pi}$

6. Euler 方程 $r^2 R''(r) + rR'(r) - 9R(r) = 0$ 满足 $|R(0)| < +\infty$ 的通解 $R(r) =$ _____ ()

A) $\alpha r^{-3} + \beta r^3$

B) $\alpha r^{-9} + \beta r^9$

C) αr^{-3}

D) αr^3

| |
|----|
| 得分 |
| |

二、填空题 (每空 3 分, 共 42 分)

1. 分离变量法的思想是什么? _____。
2. 定解问题的适定性指的是解的存在性、_____和_____。
3. 以勒让德多项式为基本函数, 在区间 $(-1, 1)$ 上把 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 展开为广义傅立叶级数为 _____; 计算积分: $I = \int_{-1}^1 x^3 P_l(x) P_{l+2}(x) dx =$ _____。
4. Bessel 方程 $r^2 R'' + rR' + (3r^2 - 9)R = 0$ 的通解为 $y =$ _____
其满足 $R(0) = 0, R(1) = 2$ 的特解为 $y =$ _____。
4. $\sqrt{i} =$ _____; $\cosh(ix) =$ _____。
5. $\cos(\omega t)$ 的 Fourier 变换表达式为: _____。
6. 第一类柱函数 $J_n(x)$ 的幂级数表示式为: _____ 第二类柱函数 $Y_n(x) =$ _____。
7. 广义 Fourier 级数表达式 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$ 中系数 f_n 的计算是利用本征函数 $y_n(x)$ 彼此间的 _____。(正交性/完备性)
8. 一维波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足初始条件 $u|_{t=0} = f(x)$, $u_t|_{t=0} = g(x)$ 的解为: _____。

| |
|----|
| 得分 |
| |

三、求解均匀弦的自由横振动, 弦长为 l , 两端固定, 初始时刻位移为零, 初始速度为 $x(l-x)$, 写出定解问题并求解。(8 分)

| |
|----|
| 得分 |
| |

四、用分离变量法求解非齐次泛定方程非其次边界问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = x \\ u|_{x=0} = 2 \quad u|_{x=l} = 2 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (8 \text{ 分})$$

| |
|----|
| 得分 |
| |

五、判断 $x_0 = 0$ 是欧勒型常微分方程 $x^2 y'' + xy' - m^2 y = 0$ (m^2 为常数) 的常点还是奇点，并用级数解法求解此方程在 $x_0 = 0$ 的邻域上的解。(8 分)

| |
|----|
| 得分 |
| |

六、二个同心球壳，半径分别为 a, b ($b > a$)，内球壳电势为 $2\cos\theta$ ，外壳为导体并接地，求球壳之间的电势分布。（8分）

| |
|----|
| 得分 |
| |

七、用分离变量法分析半径为 a ，高为 l 的电磁谐振腔问题：

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & \sqrt{\lambda} = \frac{\omega}{c} \\ u|_{r=a} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=l} = 0 \end{cases}, \text{ 试证该电磁谐振腔的固有频率为:}$$

$$\omega_{mn} = c\sqrt{\lambda} = c\sqrt{\left(\frac{x_m^{(0)}}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}, \quad n=0,1,2,\dots; m=1,2,\dots \quad (8 \text{ 分})$$