第十一章 差错控制编码

基本概念

通过在信息码元中加入一定的监督码元通过一定的关系发现或纠正存在的错码，可以克服信道噪声中的加性干扰。

差错控制方式

- 检错重发(ARQ)：将输入序列编成具有检错能力的码，有错重发
- 前向纠错(FEC)：发送能纠错的码，发现错误自动纠正，适合单向通信
- 反馈校验：接收端重发信码，与发送端对比，有错重发
- 检错删除：发现错码立即删除，不要求重发

信道编码

- 线性码和非线性码：监督位和信息位是否为线性方程决定
- 分组码和卷积码：
  - 分组码(k+r,k)：将k个信息码元划分为一组，然后按照规则产生r个监督码元，编成k+r的码组
  - 卷积码(n,k,N)：监督码元与k比特有关，也与前面N-1个信息段存在约束关系
- 系统码和非系统码：系统码的监督位附在信息位后面，信息码元不变，非系统码改变编码方式

基本概念

- 码重：码元的非零位数目
- 码距：两个码组a、b对应位不同的个数，表示为

$$d(a,b)=w(a\oplus b)$$

  码距又称为汉明距离

- 最小码距：各个码组之间距离的最小值
- 码率：$R_e=k/n$

最小码距和纠检错能力

- 检出e个错码：要求$d_0\geq e+1$
- 纠正t个错码：要求$d_0\geq 2t+1$
- 纠检结合：要求 $d_0\geq e+t+1$

简单编码

- 奇偶监督码：加入一位使"1"的个数为偶数个，称为偶数监督码；为奇数个，称为奇数监督码、
- 二维奇偶码
- 恒比码：零一比例固定

线性分组码

按照一组线性方程构成的分组码，通常码长为n，信息码有k位的，我们称为(n,k)分组码。

(7，4) 汉明码

- r 个检验位必须满足： $2^r-1\geq n$

表 11－1　校正子和错码位置的关系

$S_1S_2S_3$	错码位置	$S_1S_2S_3$	错码位置	$S_1S_2S_3$	错码位置
001	a_0	011	a_3	111	a_6
010	a_1	101	a_4	000	无错码
100	a_2	110	a_5		

- 纠正一位错码的最高效线性分组码

基本原理

- (7,4)码： $a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$
- 校验方程的矩阵形式(7,4 码为例)

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_6 + a_5 + a_4 \\
a_1 &= a_6 + a_5 + a_3 \\
a_0 &= a_6 + a_4 + a_3
\end{aligned}
\quad \rightarrow \quad
\begin{bmatrix} 1110100 \\ 1101010 \\ 1011001 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

由此我们可以得到监督矩阵H，其中我们可以分为P 、I_r

$$
\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1110 & \vdots & 100 \\ 1101 & \vdots & 010 \\ 1011 & \vdots & 001 \end{bmatrix} = [P\boldsymbol{I}_{\mathrm{r}}] \quad \rightarrow \quad H \cdot A = 0
$$

同理我们也存在一个生成矩阵G,可以左乘上一个单位矩阵得到生成矩阵,

$$
G = \begin{bmatrix} 1000 & \vdots & 111 \\ 0100 & \vdots & 110 \\ 0010 & \vdots & 101 \\ 0001 & \vdots & 011 \end{bmatrix} = [I_k Q] \quad \rightarrow \quad A = [a_6 a_5 a_4 a_3] \cdot G
$$

其中P、Q满足 $P = Q^T$，上述表示均为典型矩阵表示，存在单位矩阵块

循环码

任一码组循环一位以后，仍为该码的一个码组，例如(7,3)循环码

```
001 0111 - 010 1110 - 011 1001 - 100 1011 - 101 1100 - 110 0101 -111
0010
000 0000 (自成循环)
```

- 除了全零码，码重不变
- 多项式表示形式 (1100101)

$$
a(x) = x^6 + x^5 + x^2 + 1
$$

- 码多项式的按模运算
  - 例. $x^4 + x^2 + 1$ 被 $x^3 + 1$，求其余式

$$
\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 1} = x + \frac{R(x)}{N(x)}
$$

其中R(x) 即为余式，按照模2进行运算，得到

$$x^4+x^2+1 \equiv 1$$

习题

11－7 已知一个(7,3)码的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1001110\\0100111\\0011101\end{bmatrix}$$

试列出其所有许用码组，并求出其监督矩阵。

解 （1）由生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 可以产生所有许用码组：

$$\boldsymbol{A}=[a_6a_5a_4]\cdot\boldsymbol{G}$$

例如，当信息码为

$$[a_6a_5a_4]=[001]$$

可得相应的码组为

$$[001]\begin{bmatrix}1001110\\0100111\\0011101\end{bmatrix}=[0011101]$$

同理，可得其他许用码组。列表如下：

0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 1 1 1 0
0 0 1 1 1 0 1	1 0 1 0 0 1 1
0 1 0 0 1 1 1	1 1 0 1 0 0 1
0 1 1 1 0 1 0	1 1 1 0 1 0 0

（2）本题中给出的生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是典型阵，即

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}100 & \vdots & 1110\\010 & \vdots & 0111\\001 & \vdots & 1101\end{bmatrix}=[\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{Q}]$$

其中

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1110\\0111\\1101\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}101\\111\\110\\011\end{bmatrix}$$

监督矩阵

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_r]=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\\1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\\1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\\0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\end{bmatrix}$$

11－14 设一个(15,7)循环码由 $g(x)=x^8+x^7+x^6+x^4+1$ 生成。若接收码组为 $T(x)=x^{14}+x^5+x+1$，试问其中有无错码。

分析 循环码的任一码多项式都可以被生成多项式 $g(x)$ 整除。若码组在传输中没有发生错误，则接收码的多项式必定能被 $g(x)$ 整除；若码组在传输中发生错误，则接收码的多项式被 $g(x)$ 除时可能除不尽，而有余式。

解 因为

$$\frac{T(x)}{g(x)}=\frac{x^{14}+x^5+x+1}{x^8+x^7+x^6+x^4+1}=x^6+x^5+x^3+\frac{x^7+x^6+x^3+x+1}{x^8+x^7+x^6+x^4+1}$$

余式

$$r(x)=x^7+x^6+x^3+x+1\neq 0$$

所以接收码中有错误。

(了解)

11－8 已知一个(7,4)循环码的全部码组为

0000000	1000101	0001011	1001110
0010110	1010011	0011101	1011000
0100111	1100010	0101100	1101001
0110001	1110100	0111010	1111111

试写出该循环码的生成多项式 $g(x)$ 和生成矩阵 $G(x)$，并将 $G(x)$ 化成典型阵。

解 (1) 对于生成多项式 $g(x)$，必须符合下面 3 条性质：

① $g(x)$ 是一个 $(n-k)$ 次多项式；

② $g(x)$ 的常数项不为 0；

③ $g(x)$ 是 x^n+1 的一个因式。

以上 3 条给我们提供了一种对于给定的 (n,k) 循环码，确定其生成多项式的方法。

现对 x^7+1 进行因式分解

$$x^7+1=(x+1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)$$

由于本题中 $n-k=7-4=3$，所以可以选取 (x^3+x+1) 或 (x^3+x^2+1)。又因为在给定的全部码组中有“0001011”，故应选用与其对应的生成多项式：

$$g(x)=x^3+x+1$$

(2) 生成矩阵

$$G(x)=\begin{bmatrix} x^3g(x)\\ x^2g(x)\\ xg(x)\\ g(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^6+x^4+x^3\\ x^5+x^3+x^2\\ x^4+x^2+x\\ x^3+x+1\end{bmatrix}$$

或

$$G=\begin{bmatrix}1011000\\0101100\\0010110\\0001011\end{bmatrix}$$