8 第七单元

习题 8 .1 设某气体服从物态方程 $p(V-V_0)=\nu RT$，内能 $U=C_VT+U_0$；系统经历一准静态过程，在该过程中系统与外界交换的热量和功始终满足 $đQ=\varepsilon đA$。以 T 和 V 为状态参量，给出该过程的曲线方程；并计算在 (T,V) 处的热容量 C（其中 ν、R、C_V、V_0、U_0、ε 均为常量）。

解：由热力学第一定律：$\mathrm{d}U=đQ+đA$，可得:

$$\xrightarrow[đQ=\varepsilon đA]{\mathrm{d}U=C_V\,\mathrm{d}T,\,đA=-p\,\mathrm{d}V}\quad C_V\,\mathrm{d}T+(1+\varepsilon)p\,\mathrm{d}V=0 \tag{8 .1}$$

由物态方程可知 $p=\nu RT/(V-V_0)$，将其代入上述方程(8 .1)可得

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}+\gamma\frac{\mathrm{d}V}{V-V_0}=0\quad\Rightarrow\quad T(V-V_0)^{\gamma}=C_0$$

其中 $\gamma=\frac{(1+\varepsilon)\nu R}{C_V}$，常量 C_0 由初始条件决定。同理，热容量 C 可如下求得：

$$\xrightarrow[đQ=\varepsilon đA]{\mathrm{d}U=C_V\,\mathrm{d}T}\quad C_V\,\mathrm{d}T=\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}đQ \tag{8 .2}$$

由(8 .2)可知 $C=\frac{đQ}{\mathrm{d}T}=\varepsilon C_V/(1+\varepsilon)$。

习题 8 .2 1mol 某气体服从状态方程 $p(V-b)=RT$，内能为 $U=C_VT+U_0$，C_V、U_0 为常量。试证明，在准静态绝热过程中，这气体满足方程：

为简便起见，作业题中所有下标 m（代表 1mol）均省略。

$$p(V-b)^{\gamma}=Const.$$

其中 $\gamma=C_p/C_V$。(P.132:Prob.5-13)

解：由热力学第一定律：$\mathrm{d}U=đQ+đA$，可得:

$$\xrightarrow[đQ=0]{\mathrm{d}U=C_V\,\mathrm{d}T,\,đA=-p\,\mathrm{d}V}\quad C_V\,\mathrm{d}T+p\,\mathrm{d}V=0 \tag{8 .3}$$

由物态方程可得：

$$\mathrm{d}T=[(V-b)\,\mathrm{d}p+p\,\mathrm{d}V]/R$$

将 $\mathrm{d}T$ 代入方程(8 .3)，经整理可得：

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}+\gamma\frac{\mathrm{d}V}{V-b}=0\quad\Rightarrow\quad p(V-b)^{\gamma}=Const. \tag{8 .4}$$

其中常量 $\gamma=(C_V+R)/C_V=C_p/C_V$。

习题 8 .3 如图 27所示为 1mol 单原子理想气体所经历的循环过程，其中 AB 为等温线。已知 $V_A = 3.0L$，$V_B = 6.0L$，求效率 η。设气体的 $C_V = \frac{3}{2}R$。(P.134:Prob.5-27)

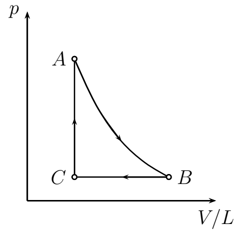

图 27: 习题8 .3

解：首先，根据理想气体的内能 $U = C_V T + U_0$、物态方程 $pV = RT$（此处 $\nu = 1$）和热力学第一定律，我们对每个过程就系统与外界交换的功和热逐一分析。AB 为等温膨胀过程，内能不变，气体对外做功并吸热；BC 为等压压缩过程，外界对气体做功，由物态方程可知 $T_C = T_B/2$，内能减少，气体放热；CA 为等体增压过程，温度上升，内能增加，故气体吸热。

由此可知（注：对于等压过程有 $đQ = C_p\,dT$，对于等体过程有 $đQ = C_V\,dT$。）

$$Q_{AB} = -W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{RT_B}{V}\,dV = RT_B \ln 2 > 0$$

$$Q_{BC} = C_p(T_C - T_B) \xrightarrow{C_p = C_V + R = 5R/2} -\frac{5}{4}RT_B < 0$$

$$Q_{CA} = C_V(T_A - T_C) \xrightarrow{T_A = T_B} \frac{3}{4}RT_B > 0$$

故效率

$$\eta = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{AB} + Q_{CA}} = \frac{\ln 2 - 0.5}{\ln 2 + 0.75}$$

习题 8 .4 如图 28所示为一理想气体（γ 已知）的循环过程。其中 CA 为绝热过程。A 点的状态参量 (T, V_1) 和 (T, V_2) 均为已知。(P.134:Prob.5-28)

(1) 气体在 $A \to B$，$B \to C$ 两过程中各和外界交换热量吗？是放热还是吸热？

(2) 求 C 点的状态参量。

(3) 这个循环是不是卡诺循环？

(4) 求这个循环的效率 η。

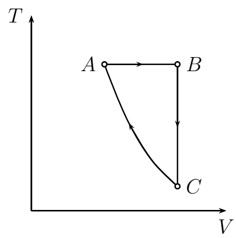

图 28: 习题8 .4

解：(1) 由理想气体的内能 $U = C_V T + U_0$ 可知，因为过程 $A \to B$ 为等温膨胀过程，气体对外做功，而内能不变，故气体吸热；过程 $B \to C$ 为等体降温过程，内能减少，故放热。

(2) 已知 $V_C = V_2$，由绝热曲线 $TV^{\gamma-1} = Const.$ 可知

$$T_C V_2^{\gamma-1} = TV_1^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_C = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T$$

(3) 该循环不是卡诺循环。

(4) 由理想气体的内能 $U = C_V T + U_0$、物态方程 $pV = \nu RT$ 和热力学第一定律可知，对于过程 $A \to B$ 有

$$Q_{AB} = -W_{AB} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V}\,dV = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

而对于过程 $B \to C$，根据 (2) 有

$$Q_{BC} = C_V(T_C - T) = C_V T \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$$

所以效率

$$\eta = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{C_V\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]}{\nu R \ln \frac{V_2}{V_1}} \xrightarrow{\nu R/C_V=\gamma-1} 1 + \frac{\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]}{(\gamma-1)\ln \frac{V_2}{V_1}}$$

习题 8 .5 设燃气涡轮机内工作物质进行如图 29所示的循环过程，其中 1-2，3-4 为绝热过程；2-3，4-1 为等压过程。试证明这循环的效率 η 为

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

又可写为

$$\eta = 1 - \varepsilon_p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

其中 $\varepsilon_p = \frac{p_2}{p_1}$ 是绝热压缩过程的升压比。设工作物质为理想气体，C_p 为常量。(P.134:Prob.5-29)

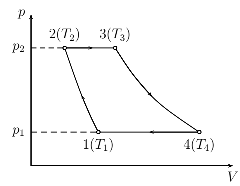

图 29: 习题8 .5

解:因为 $C_p(= đQ/\,dT)$ 为等压过程的热容量,所以对于等压过程 2-3 和 4-1,系统与外界交换的热量分别为 $Q_{23} = C_p(T_3 - T_2)$ 和 $Q_{41} = C_p(T_1 - T_4)$。由物态方程 $pV = \nu RT$ 可知，$Q_{23} > 0(V_3 > V_2)$ 和 $Q_{41} < 0(V_1 < V_4)$，即对于过程 2-3 系统吸热，而对于过程 4-1 系统放热。由于过程 1-2，3-4 均为绝热过程，由热力学第一定律可知净功 $W = -(Q_{23} + Q_{41})$，因此

$$\eta = \frac{-W}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \tag{8 .5}$$

由绝热曲线方程 $p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T = C$（由绝热曲线 $pV^\gamma = C$ 和物态方程 $pV = \nu RT$ 可得），可知（记 $\beta = \frac{1-\gamma}{\gamma}$）

$$p_1^\beta T_1 = p_2^\beta T_2\ ,\ p_2^\beta T_3 = p_1^\beta T_4 \quad \Rightarrow \quad p_1^\beta(T_4 - T_1) = p_2^\beta(T_3 - T_2) \tag{8 .6}$$

将(8 .6)带入(8 .5)得证。