2 非惯性系及惯性力

例 2 .1 质量为 m 的小环套在半径为 R 的光滑大圆环上，后者在水平面内以匀角速 ω 绕其上一点 O 转动。试分析小环在大环上运动时的切向加速度和水平面内所受约束力（教材第 84 页例题 16）。

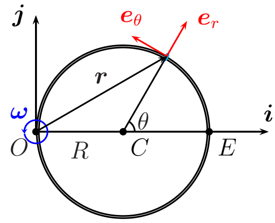

图 9: 习题2 .1

解：建立如图 9所示的以 O 为原点的转动坐标系，以便于分析小环的运动，还建立了以圆心 C 为原点随大环一起转动的极坐标系。位矢 $\boldsymbol{r}$ 可表示为 $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i} + R\boldsymbol{e}_r$，对在转动坐标系里的观测者而言，只有 $\boldsymbol{e}_r$ 随小环的运动而变化，因此小环的速度与加速度为

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = R\dot{\boldsymbol{e}}_r = R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \quad , \quad \boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = R\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta - R(\dot{\theta})^2\boldsymbol{e}_r$$

因为小环只在水平面内运动，竖直方向的力不予考虑（大环对小环沿竖直方向的约束力与小环受到的重力相抵消）。小环受到大环（水平方向的）约束力 $\boldsymbol{N}$（方向与 $\boldsymbol{e}_r$ 共线）、离心力 $\boldsymbol{F}_c$ 和科利奥力 $\boldsymbol{F}_{cor}$ 分别为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= n\boldsymbol{e}_r \\
\boldsymbol{F}_c &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = m\omega^2\boldsymbol{r} \\
&= m\omega^2 R[(1+\cos\theta)\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta] \\
\boldsymbol{F}_{cor} &= -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = 2m\omega R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r
\end{aligned}$$

其中角速度 $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$，而 n 是一待定量。根据 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_{cor}$，可得切（横）向加速度

$$\boldsymbol{a}_t = R\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta = -\omega^2 R\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0 \qquad (2\ .1)$$

微分方程(2 .1)在 $\theta \approx 0$ 时可转化为 $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$，此即谐振子的运动方程，这表明小环围绕其平衡位置 E（图 9）来回振动。注意此时 θ 的取值限于 $(-\pi, \pi)$，以便于在 $\theta = 0$ 处（即 x 的正半轴上）可进行微分运算。

及约束力

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= [-mR\omega^2(1+\cos\theta) - 2m\omega R\dot{\theta} - mR(\dot{\theta})^2]\boldsymbol{e}_r \\
&= [-mR\omega^2(1+\cos\theta) - 2m\omega v - mv^2/R]\boldsymbol{e}_r
\end{aligned}$$

其中 $v = R\dot{\theta}$ 为速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的投影分量。