1 Frequently Asked Questions

问 1：教材第 104 页等式 $ma_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\theta$ 是如何得到的？

答 1：首先，我们要知道什么是一个矢量的投影矢量和投影分量。如图 1所示，矢量 $\boldsymbol{a}_t$ 为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影矢量。因为 $\boldsymbol{a}_t$ 与 $\boldsymbol{v}$ 共线，所以有 $\boldsymbol{a}_t = a_t\hat{\boldsymbol{v}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}$ 为与 $\boldsymbol{v}$ 同向的单位矢量；$a_t = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}$ 称作 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影分量。

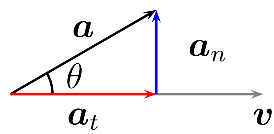

图 1: 矢量的投影

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 为加速度和速度，则有

$$a_t = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{v} = \frac{dv}{dt} \tag{1 .1}$$

其中利用了 $2v\frac{dv}{dt} = \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{dt} = 2\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$。与教材第 31 页 (1.21) 式比较，可知 (1.21) 式中的 a_t 是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影分量，但要注意 (1.22) 式中的 a_n 不是在 $\boldsymbol{a}_n$ 方向上的投影分量，而是法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 的模。a_t 取正值意味速率增加，反之意味速率减小。

由牛二定律可知 $ma_t = g_t$，其中 g_t 表示力在速度方向上的投影分量。按教材图 3-8 所示可知，此时速度朝右上——$\hat{\boldsymbol{v}} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$，而重力朝下——$\boldsymbol{G} = -mg\boldsymbol{j}$；因此，$g_t = \boldsymbol{G}\cdot\hat{\boldsymbol{v}} = -mg\sin\theta$。

问 2：教材第 119 页例 3 中的 $L_{弹} = -\kappa\theta$ 是如何得到的？

答 2：为了简单起见，此处我们不考虑力矩的方向性。首先要说明的是 κ 不是弹性系数 k。当倒摆处于如图 2时，弹簧的形变量为 $s = r\theta$，故弹力为 $ks = kr\theta$，力矩为 $kr^2\theta$，由此可知 $\kappa = kr^2$。

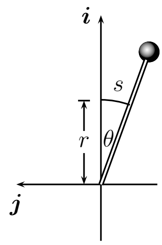

图 2: 倒摆

问 3：如何理解教材第 180 页例 13 运用可倒逆性的证明？

答 3：首先，我们应明确此处“可倒逆性”的含义。教材运用简谐近似得出复摆的等值摆长

$$l_0 = \frac{I}{mr_c} \tag{1 .2}$$

其中转动惯量 I 和质心与转轴间的距离 r_c 均依赖于转轴所处位置。利用平行轴定理可将(1 .2)转换为

$$l_0 = r_c + \frac{I_c}{mr_c} \tag{1 .3}$$

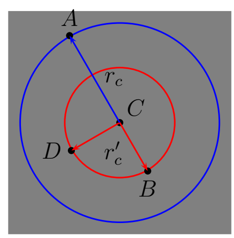

图 3: 可倒逆性——正方形的复摆

与(1 .2)不同的是，(1 .3)中的 I_c 是固定量——转轴过质心时的转动惯量，只有 r_c 依赖于转轴所在位置。因此，(1 .3)明确了 l_0 与 r_c 之间的函数关系——即 $l_0 = f(r_c) = r_c + \frac{I_c}{mr_c}$；很显然，当转轴的位置处于以质心为圆心半径为 r_c 的圆上时（图 3），复摆的等值摆长均为 $l_0 = f(r_c)$。如果给定 l_0，那么 r_c 的取值是否唯一呢？（见图 4）这就需要求解方程 $f(x) = l_0$，简单的计算表明方程有根

$$x_1 = \frac{l_0}{2} + \sqrt{\frac{l_0^2}{4} - \frac{I_c}{m}} \quad and \quad x_2 = \frac{l_0}{2} - \sqrt{\frac{l_0^2}{4} - \frac{I_c}{m}}$$

显然 $x_1 + x_2 = l_0$，不妨记 $r_c = x_1$ 和 $r_c' = x_2$，此即教材的结果。但是教材采用了一个更巧妙的方法，即把方程(1 .3)转换为

$$\frac{I_c}{mr_c(l_0 - r_c)} = 1 \tag{1 .4}$$

注意到当 $r_c \to (l_0 - r_c)$ 时，有 $(l_0 - r_c) \to r_c$，等价于分母中 r_c 和 $l_0 - r_c$ 交换了一下位置，这不影响结果。也就是说，若 r_c 满足方程 $f(x) = l_0$，则 $(l_0 - r_c)$ 也满足。如同把跷跷板两端的人颠倒一下彼此的位置，若颠倒之前能保持平衡，则之后也能保持平衡；此处，r_c 和 $(l_0 - r_c)$ 彼此交换能保持的平衡指的是方程能得以满足。

一般而言，我们可以把复摆对同一等值摆长可以具有两不同 r_c 取值的属性就称之为复摆的可倒逆性。由前面可知，图 3中的大圆上的所有点与 A 点等价，小圆上的所有点与 B 点等价；如果二者的半径均满足方程 $f(x) = l_0$，由可倒逆性知二者彼此等价。

但是，教材对“可倒逆性”——特别是互为倒逆点——是有所特指，这是为了其后关于 g 值的测量服务的。假设处于 A 和 D 位置的转轴对应相同的周期，二者之间的距离 $\overline{AD}(\neq r_c + r_c')$ 不是等值摆长；只有当质心处于连接二者的线段之上时，二者的间距才是等值摆长，如 $\overline{AB}$。

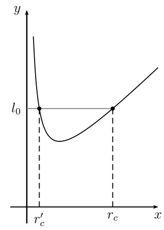

图 4: f(x) 的曲线图