

DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I –

I.1 I.1.a Les points P, Q et R ont pour coordonnées respectives $(1, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On trouve sans difficulté les équations des droites suivantes :

$$(PQ) : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \quad (PR) : y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \quad (QR) : x = -\frac{1}{2}$$

I.1.b Le point d'affixe $x + iy$ i.e. de coordonnées (x, y) appartient à T si et seulement si

$$x > -\frac{1}{2} \quad y < -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \quad y > \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

c'est-à-dire

$$2x + 1 > 0 \quad x + \sqrt{3}y - 1 < 0 \quad x - \sqrt{3}y - 1 < 0$$

I.2 I.2.a On a clairement $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre de A.

I.2.b Comme A est trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres i.e. $\text{tr}(A) = 1 + \lambda + \bar{\lambda}$. Les valeurs propres de A^2 sont $1, \lambda^2$ et $\bar{\lambda}^2$ donc $\text{tr}(A^2) = 1 + \lambda^2 + \bar{\lambda}^2$.

Puisque $\lambda = a + ib$ et $\bar{\lambda} = a - ib$,

$$\text{tr}(A) = 1 + 2a \quad \text{tr}(A^2) = 1 + 2(a^2 - b^2)$$

I.2.c Les coefficients de A sont tous strictement positifs donc $\text{tr}(A) > 0$.
Pour la même raison

$$\begin{aligned} (A^2)_{1,1} &= a_{1,1}^2 + a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,3}a_{3,1} > a_{1,1}^2 \\ (A^2)_{2,2} &= a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,2}^2 + a_{2,3}a_{3,2} > a_{2,2}^2 \\ (A^2)_{3,3} &= a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,3} + a_{3,3}^2 > a_{3,3}^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\text{tr}(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$.

I.2.d D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\text{tr}(A)^2 = \left(\sum_{k=1}^3 1 \cdot a_{k,k} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^3 1^2 \right) \left(\sum_{k=1}^3 a_{k,k}^2 \right) = 3(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2) < 3 \text{tr}(A^2)$$

I.2.e D'une part,

$$1 + 2a = \text{tr}(A) > 0$$

D'autre part,

$$0 < 3 \text{tr}(A^2) - \text{tr}(A)^2 = 2(1 + a^2 - 3b^2 - 2a) = 2(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1)$$

I.2.f Remarquons que $a - \sqrt{3}b - 1$ et $a + \sqrt{3}b - 1$ sont de même signe. Si l'on avait $a - \sqrt{3}b - 1 > 0$ et $a + \sqrt{3}b - 1 > 0$, on aurait $a > 1$ en additionnant ces inégalités. Il s'ensuivrait que $|\lambda|^2 = a^2 + b^2 > 1$, ce qui n'est pas. Ainsi $a - \sqrt{3}b - 1 < 0$ et $a + \sqrt{3}b - 1 < 0$. D'après la question **I.1.b**, le point d'affixe λ appartient à T.

I.3 I.3.a D'après une relation d'Euler, $\lambda + \bar{\lambda} = 2r \cos(\theta)$ donc $\alpha = \frac{1 + \lambda + \bar{\lambda}}{3}$.

On remarque que $j^2 = \bar{j}$ donc, toujours d'après une relation d'Euler,

$$j\lambda + j^2\bar{\lambda} = j\lambda + \bar{j}\bar{\lambda} = re^{i(\theta + \frac{2\pi}{3})} + re^{-i(\theta + \frac{2\pi}{3})} = 2 \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

puis $\beta = \frac{1 + j\lambda + j^2\bar{\lambda}}{3}$.

Enfin,

$$j^2\lambda + j\bar{\lambda} = \bar{j}\lambda + \bar{j}\bar{\lambda} = re^{i(\theta - \frac{2\pi}{3})} + re^{-i(\theta - \frac{2\pi}{3})} = 2 \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

puis $\gamma = \frac{1 + j^2\lambda + j\bar{\lambda}}{3}$.

I.3.b Puisque $1 + j + \bar{j} = 1 + j + j^2 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$, il est clair que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Par ailleurs, en posant $\lambda = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha = \frac{2a + 1}{3} > 0 \quad \beta = \frac{1 - a - \sqrt{3}b}{3} \quad \gamma = \frac{1 - a + \sqrt{3}b}{3}$$

Comme le point d'affixe λ appartient à T, α , β et γ sont strictement positifs d'après la question **I.1.b**.

On en déduit que A vérifie bien la propriété (S).

Comme $r \in]0, 1[$, et $|\cos| \leq 1$, il est clair que α , β et γ sont strictement positifs. On en déduit que A vérifie la propriété (S).

I.3.c Un calcul immédiat montre que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $A = \alpha I_3 + \beta J + \gamma J^2$.

I.3.d Un calcul immédiat donne $\chi_J = X^3 - 1$. Les valeurs propres de J sont les racines de $X^3 - 1$, à savoir 1, j et j^2 .

I.3.e Comme χ_J est scindé à racines simples, J est diagonalisable. Il existe donc $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ tel que $J = PDP^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$A = P(\alpha I_3 + \beta D + \gamma D^2)P^{-1} = P \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta j + \gamma j^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta j^2 + \gamma j \end{pmatrix} P^{-1}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha + \beta j + \gamma j^2$ et $\alpha + \beta j^2 + \gamma j$. En utilisant les expressions de α , β et γ trouvées à la question **I.3.a** et le fait que $1 + j + j^2 = 0$, on trouve

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \alpha + \beta j + \gamma j^2 = \bar{\lambda} \quad \alpha + \beta j^2 + \gamma j = \lambda$$

Les valeurs propres de A sont donc bien 1, λ et $\bar{\lambda}$.

Partie II –

II.1 Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(AU)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

donc $AU = U$. Comme U n'est pas nul, 1 est bien valeur propre de A .

II.2 II.2.a II.2.a.i Comme $\det(B) = 0$, B n'est pas inversible. Il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $BX = 0$.

II.2.a.ii On a notamment

$$0 = (BX)_k = \sum_{j=1}^n b_{k,j}x_j$$

et donc

$$b_{k,k}x_k = - \sum_{j \neq k} b_{k,j}x_j$$

Par inégalité triangulaire

$$|b_{k,k}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_j| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_k|$$

Remarquons que $|x_k| > 0$ car sinon $0 \leq |x_i| \leq |x_k| = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puis $X = 0$, ce qui n'est pas. On en déduit donc que

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

II.2.b Comme $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\det(B) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda) = 0$. D'après la question précédente, il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_j| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

c'est-à-dire

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|$$

Mais comme les $a_{k,j}$ sont positifs

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} a_{k,j}$$

De plus, $\sum_{j=1}^n a_{k,j} = 1$ donc $\sum_{j \neq k} a_{k,j} = 1 - a_{k,k}$. Finalement,

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\lambda| = |(a_{k,k} - \lambda) + a_{k,k}| \leq |a_{k,k} - \lambda| + |a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k} + a_{k,k} = 1$$

car $a_{k,k} > 0$.

II.2.c D'après la question précédente,

$$|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{k,k}$$

puis

$$|a_{k,k} - e^{i\theta}|^2 \leq (1 - a_{k,k})^2$$

ou encore

$$(a_{k,k} - e^{i\theta})(a_{k,k} - e^{-i\theta}) \leq (1 - a_{k,k})^2$$

En développant, on obtient

$$a_{k,k}^2 - 2a_{k,k} \cos \theta + 1 \leq 1 - 2a_{k,k} + a_{k,k}^2$$

ou encore

$$a_{k,k} \cos \theta \geq a_{k,k}$$

Or $a_{k,k} > 0$ donc $\cos \theta \geq 1$. Mais $\cos \theta \leq 1$ donc $\cos \theta = 1$. Ainsi $\theta \equiv 0[2\pi]$ puis $\lambda = e^{i\theta} = 1$.

II.3 II.3.a Comme $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\chi_A(1) = \det(I_n - A) = 0$ donc $\det((I_n - A)^T) = 0$ ou encore $\det(I_n - A^T) = 0$. Par conséquent, $\chi_{A^T}(1) = 0$ et $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^T)$.

De plus, $\text{rg}(A - I_n) = \text{rg}((A - I_n)^T) = \text{rg}(A^T - I_n)$. D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(A - I_n) = \dim \text{Ker}(A^T - I_n)$ i.e. $\dim E_1(A) = \dim E_1(A^T)$.

II.3.b II.3.b.i Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(A^T V)_i = V_i$ et donc

$$\sum_{j=1}^n a_{j,i} v_j = v_i$$

Par inégalité triangulaire,

$$|v_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{j,i}| |v_j| = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$$

II.3.b.ii En additionnant ces inégalités,

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j| = \sum_{j=1}^n |v_j| \sum_{i=1}^n a_{j,i} = \sum_{j=1}^n |v_j|$$

En notant $S_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$, on a donc $|v_i| \leq S_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\sum_{i=1}^n S_i - |v_i| = 0$. Une somme de termes positifs, n'étant nulle que si chacun des termes est nul,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |v_i| = S_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$$

Ces égalités se traduisent par le fait que $A^T |V| = |V|$.

II.3.b.iii Supposons qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|v_i| = 0$. Alors

$$\sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j| = |v_i| = 0$$

Comme il s'agit à nouveau d'une somme de termes positifs, on aurait $a_{j,i} |v_j| = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et donc $|v_j| = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ car les $a_{j,i}$ ne sont pas nuls. Finalement, on aurait $V = 0$ ce qui est exclu.

II.3.c II.3.c.i D'après la question précédente, les y_i ne sont pas nuls. On peut donc considérer la matrice colonne $Z = X - \frac{x_1}{y_1} Y$ qui appartient encore à $E_1(A^T)$ (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$). Par construction $z_1 = 0$, mais d'après la question précédente, $Z = 0$: si Z n'était pas nul, toutes ses composantes seraient non nulles. On en déduit que tous les vecteurs de $E_1(A^T)$ sont colinéaires à X i.e. $\dim E_1(A^T) = 1$.

II.3.c.ii Soit V un vecteur non nul de $E_1(A^T)$. D'après la question précédente, $|V| \in E_1(A^T)$. Posons $\Omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^n |v_i|} |V|$. A nouveau, $\Omega \in E_1(A^T)$. Par construction, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. On a vu que $|v_i| > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc $\omega_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Supposons qu'il existe un vecteur Ω' vérifiant les mêmes conditions. Alors Ω' est colinéaire à Ω puisque $\dim E_1(A^T) = 1$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Omega' = \lambda \Omega$. En fait, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ car les coordonnées de Ω' et Ω sont strictement positives. De plus,

$$1 = \sum_{i=1}^n \omega'_i = \lambda \sum_{i=1}^n \omega_i = \lambda$$

puis $\Omega' = \Omega$.

II.3.c.iii Enfin, puisque $A^T \Omega = \Omega$,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{j,i} \omega_j = \omega_i$$

II.3.d On a donc montré que

- les valeurs propres de A sont de module inférieur ou égal à 1 ;
- la seule valeur propre de A de module 1 est 1 ;
- $E_1(A)$ est engendré par $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$;
- les valeurs propres de A^T sont de module inférieur ou égal à 1 ;
- la seule valeur propre de A^T de module 1 est 1 ;
- aucune coordonnée d'un vecteur propre de A^T associé à la valeur propre 1 n'est nulle ;

- il existe un vecteur propre de A^T associé à la valeur propre 1 dont les coordonnées sont strictement positives et de somme 1.

II.4 II.4.a Montrons que N est une norme.

Positivité Comme les ω_i sont positifs, N est bien à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Homogénéité Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors

$$N(\lambda X) = \sum_{i=1}^n \omega_i |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n \omega_i |x_i| = |\lambda| N(X)$$

Séparation Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $N(X) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n \omega_i |\lambda x_i| = 0$. Mais comme il s'agit d'une somme de termes positifs, $\omega_i |x_i| = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les ω_i ne sont pas nuls donc $x_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ i.e. $X = 0$.

Inégalité triangulaire Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$. Alors, par inégalité triangulaire dans \mathbb{C}

$$N(X + Y) = \sum_{i=1}^n \omega_i |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i (|x_i| + |y_i|) = N(X) + N(Y)$$

II.4.b Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$N(AX) = \sum_{i=1}^n \omega_i \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \omega_i |a_{i,j}| \right) |x_j|$$

Mais on a vu à la question II.3.c que

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n \omega_i |a_{i,j}| = \omega_j$$

de sorte que

$$N(AX) \leq \sum_{j=1}^n \omega_j |x_j| = N(X)$$

II.4.c En particulier, soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et X un vecteur propre associé. Alors $N(AX) \leq N(X)$ donne $|\lambda| N(X) \leq N(X)$ puis $|\lambda| \leq 1$ car $N(X) > 0$ (X n'est pas nul en tant que vecteur propre).

II.5 II.5.a Remarquons que $\Phi(X) = \Omega^T X$. Ainsi

$$\Phi(AX) = \Omega^T AX = (A^T \Omega)^T X$$

Or $\Omega \in E_1(A^T)$, donc $A^T \Omega = \Omega$ puis $\Phi(AX) = \Omega^T X = \Phi(X)$.

II.5.b $E_1(A) = \text{vect}(U)$ est une droite et $\text{Ker } \Phi$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle. Pour montrer que $E_1(A)$ et $\text{Ker } \Phi$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il suffit donc de montrer que $U \notin \text{Ker } \Phi$. Or $\Phi(U) = \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \neq 0$ donc $U \notin \text{Ker } \Phi$. On en déduit que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \text{Ker } \Phi$.

II.5.c D'après la question II.5.a,

$$\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda \Phi(X)$$

Or $\lambda \neq 1$ donc $\Phi(X) = 0$ i.e. $X \in \text{Ker } \Phi$.

II.5.d Notons u l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à A et ϕ la forme linéaire canoniquement associée à Φ . D'après ce qui précède, $\phi \circ u = \phi$ et $\mathbb{C}^n = E_1(u) \oplus \text{Ker } \phi$. L'égalité $\phi \circ u = \phi$ donne notamment $\text{Ker } \phi \circ u = \text{Ker } \phi$ de sorte que $\text{Ker } \phi$ est stable par u . Dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{C}^n = E_1(u) \oplus \text{Ker } \phi$,

la matrice de u est donc $\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On en déduit que $\chi_A = \chi_u = (X - \lambda)\chi_B$. Si 1 était

racine de χ_B , 1 serait valeur propre de l'endomorphisme $u|_{\text{Ker } \phi}$ de $\text{Ker } \phi$ induit par u . Notamment $u|_{\text{Ker } \phi}$ admettrait un vecteur propre $x \in \text{Ker } \phi$ associé à la valeur propre 1. Ce vecteur x serait également un vecteur propre de u associée à la même valeur propre 1. On aurait donc $x \in E_1(u) \cap \text{Ker } \phi = \{0\}$, ce qui contredit que x est un vecteur propre. Ainsi 1 n'est pas racine de χ_B : 1 est donc une racine simple de χ_A i.e. la multiplicité de la valeur propre de 1 dans χ_A vaut 1.