

## 1 Cours

### Intégrales impropres

**Convergence/divergence** Fonctions continues par morceaux. Nature d'une intégrale impropre. Propriétés générales : linéarité, positivité, relation de Chasles, l'intégrale d'une fonction continue et positive n'est nulle que si cette fonction est nulle.

**Intégrabilité** Définition. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire. Les fonctions intégrables sur un intervalle forment un espace vectoriel. Intégrabilité des fonctions  $x \mapsto 1/x^\alpha$  sur  $[a, +\infty[$ ,  $x \mapsto 1/(x-a)^\alpha$  sur  $]a, b]$ ,  $x \mapsto 1/(b-x)^\alpha$  sur  $[a, b[$  et  $x \mapsto e^{\alpha x}$  sur  $[a, +\infty[$ . Intégrabilité par comparaison (majoration, domination, négligeabilité, équivalence).

**Techniques de calcul** Changement de variable. Intégration par parties.

**Intégration des relations de comparaison** La fonction de référence doit être **de signe constant** au voisinage du point considéré.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Pour déterminer la nature d'une intégrale impropre, on peut :
  - utiliser une primitive de l'intégrande et utiliser sa limite ;
  - comparer l'intégrande à une fonction du type  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  au moyen de  $\leq, o, \mathcal{O}, \sim$  ;
  - utiliser un changement de variable ou une intégration par parties (en plus de la «formule», ces deux résultats peuvent renseigner sur la **nature** d'une intégrale).
- Pour calculer la valeur d'une intégrale impropre (sous réserve de convergence), on peut :
  - utiliser une primitive de l'intégrande ;
  - utiliser un changement de variable ;
  - utiliser une intégration par parties.
- Pour déterminer des relations de récurrence sur des suites d'intégrale, on utilise bien souvent une intégration par parties.
- Pour l'intégration de relations de comparaison :
  - dans le cas de convergence, on a des résultats sur le «reste» ;
  - dans le cas de divergence, on a des résultats sur la «somme partielle».

De plus,

- le «reste» s'écrit en conservant la borne «problématique» et en faisant varier l'autre borne ;
- la «somme partielle» s'écrit en conservant la borne **non** «problématique» et en faisant varier l'autre borne.

## 3 Questions de cours

### Fonction $\Gamma$ d'Euler

1. Montrer que  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Justifier que pour tout  $x \in \mathbb{D}$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
3. Déterminer la valeur de  $\Gamma(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Fonction $B$ d'Euler

1. Montrer que  $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  est définie sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .
2. Justifier que pour  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $B(x, y) = B(y, x)$ .
3. Justifier que pour  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$ .
4. Déterminer la valeur de  $B(n, p)$  pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^*$ .

**Convergence de l'intégrale de Dirichlet** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge.

**Non convergence absolue de l'intégrale de Dirichlet** Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  ne converge pas absolument i.e. que  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .