INTERROGATION ÉCRITE N°02

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer un équivalent simple de la somme partielle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$.

Première méthode. *On sait que* $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1)-\ln(n)$. *Comme la série* $\sum \frac{1}{n}$ *est un série à termes positifs divergente,*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)-\ln(k) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Seconde méthode. *On sait que la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Par comparaison série/intégrale*

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1+\int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

ou encore

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1+\ln(n)$$

Comme $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

> ***REMARQUE.*** *On rappelle que* $\ln(n+1) = \ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ *car* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$.

∎

2. Justifier la convergence de la série $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Comme la suite $(\pi/2n)$ *décroît vers* 0, $\sum \frac{(-1)^\pi}{2n}$ *converge. Comme* $3>1$, $\sum \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ *converge. Ainsi* $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ *converge.*

∎

3. Déterminer un équivalent simple du reste de la série $\sum \frac{1}{n^3}$.

Première méthode. *On sait que*

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est un série à termes positifs convergente,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Seconde méthode. *On sait que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par comparaison série/intégrale*

$$\frac{1}{2(n+1)^2} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2n^2}$$

Comme $\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

∎

4. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Calculer $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ et sa somme en cas de convergence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{R}_n = q^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$. La série $\sum \mathrm{R}_n$ est donc une série géométrique de raison q : elle converge puisque $|q| < 1$. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n = \frac{q}{1-q}\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

∎