

DEVOIR À LA MAISON N°05

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – ESSEC 2000

Dans l'ensemble du problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n . On note \mathcal{P}_n le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[x]$ formé des polynômes unitaires de degré n , c'est-à-dire de degré n et dont le coefficient de x^n est égal à 1.

L'objectif du problème est de déterminer des polynômes $P \in \mathcal{P}_n$ réalisant le minimum sur \mathcal{P}_n de chacune des trois expressions suivantes :

$$N_1(P) = \int_{-1}^1 |P(x)| \, dx, \quad N_2(P) = \left(\int_{-1}^1 |P(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad N_\infty(P) = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

Les trois parties du problème sont consacrées à la résolution des trois problèmes ainsi définis. La partie I est indépendante des deux suivantes.

I Minimisation de $N_2(P)$ pour $P \in \mathcal{P}_n$

On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ le nombre réel suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) \, dt.$$

- 1 Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- 2 On considère la fonction f associant à tout n -uplet $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) = \int_{-1}^1 (t^n - x_{n-1}t^{n-1} - \dots - x_1t - x_0)^2 \, dt.$$

- 2.a Citer le théorème garantissant l'existence et l'unicité de (a_0, \dots, a_{n-1}) réalisant le minimum m_n de f sur \mathbb{R}^n , et montrer que ces réels a_0, a_1, \dots, a_{n-1} vérifient :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \int_{-1}^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \dots - a_1t - a_0) t^k \, dt = 0$$

- 2.b On pose, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots, -n-1\}$:

$$F(x) = \frac{a_1}{x+n+1} + \frac{a_2}{x+n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x+2} + \frac{a_0}{x+1}.$$

Établir l'existence d'un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots, -n-1\}$:

$$(x+n+1)(x+n)(x+n-1) \cdots (x+1)F(x) = a x(x-1) \cdots (x-n+1),$$

puis déterminer a en fonction de $n!$ et $(2n)!$.

2.c Établir :

$$m_n = f(a_0, \dots, a_{n-1}) = \int_{-1}^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \dots - a_1t - a_0) t^n dt$$

2.d En déduire que

$$m_n = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$$

3 On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_2(P)$ pour $P \in \mathcal{P}_n$.

3.a Pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, effectuer le changement de variable $x = 2t - 1$ dans l'intégrale de $N_2(P)$ et en déduire que :

$$N_2(P) \geq 2^{-n} \sqrt{m_n}.$$

3.b En déduire le minimum de $N_2(P)$ lorsque P décrit \mathcal{P}_n .

II Minimisation de $N_\infty(P)$ pour P décrivant \mathcal{P}_n

On considère la suite de polynômes (T_k) définis par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, et pour $k \geq 1$:

$$T_{k+1}(X) = 2XT_k(X) - T_{k-1}(X).$$

4 Étude des propriétés de T_k .

4.a Montrer que T_k est un polynôme de degré k , de coefficient dominant 2^{k-1} pour $k \geq 1$.

4.b Pour un réel θ , montrer que $T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5 Minimisation de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit \mathcal{P}_n .

5.a Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{P}_n$ tel que :

$$N_\infty(P) = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| < 2^{1-n}.$$

Préciser le signe de $2^{1-n}T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) - P\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ pour $0 \leq k \leq n$, puis montrer une contradiction.

5.b En déduire le minimum de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit \mathcal{P}_n .

III Minimisation de $N_1(P)$ pour P décrivant \mathcal{P}_n

On considère la suite (U_k) définie par $U_0(X) = 1$, $U_1(X) = 2X$, et pour $k \geq 1$:

$$U_{k+1}(X) = 2XU_k(X) - U_{k-1}(X).$$

6 Étude de propriétés de U_k .

6.a Montrer que U_k est un polynôme, préciser son degré et son coefficient dominant. Etablir de plus que $U_k(-X) = (-1)^k U_k(X)$.

6.b Déterminer les suites (u_k) vérifiant $u_{k+1} - 2 \cos \theta u_k + u_{k-1} = 0$. En déduire pour tout nombre $\theta \in]0, \pi[$ l'expression de $U_k(\cos \theta)$ en fonction $\sin((k+1)\theta)$ et $\sin \theta$ puis déterminer les valeurs $U_k(1)$ et $U_k(-1)$.

6.c En dérivant $T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$, exprimer $(k+1)U_k$ en fonction de T'_{k+1} .

7 Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\text{sgn}(x)$ par :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{P}_n$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_{-1}^1 x^k \text{sgn}(P(x)) \, dx = 0 \quad (*)$$

7.a Prouver que, pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$,

$$\int_{-1}^1 (Q(x) - P(x)) \text{sgn}(P(x)) \, dx = 0$$

7.b En déduire que $N_1(P) \leq N_1(Q)$.

7.c Calculer $N_1(U_n)$ par le changement de variable $x = \cos \frac{\theta}{n+1}$. En admettant que le polynôme $U_n/2^n$ satisfait l'hypothèse (*), en déduire le minimum de $N_1(P)$ lorsque P décrit \mathcal{P}_n .

8 On démontre pour terminer que $U_n/2^n$ satisfait bien l'hypothèse (*). On introduit $c_j = \cos \frac{j\pi}{n+1}$ où $0 \leq j \leq n+1$.

8.a Déterminer $U_n(c_j)$ et le signe de U_n sur chaque intervalle $]c_{j+1}, c_j[$.

8.b Pour $0 \leq k < n$, on pose

$$I_k = \int_{-1}^1 x^k \text{sgn}(U_n(x)) \, dx.$$

Déterminer I_k lorsque $n+k$ est impair

8.c On suppose que $n+k$ est pair. Prouver que

$$I_k = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j^{k+1}$$

En déduire que $I_k = 0$ puis que $U_n/2^n$ satisfait bien l'hypothèse (*).