Interrogation écrite n°01

NOM : Prénom : Note :

---

1. Déterminer un équivalent simple de la somme partielle de la série $\sum \sqrt{n}$.

   Première méthode. *On remarque que*

$$n^{3/2}-(n-1)^{3/2}=n^{3/2}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3/2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{3}{2}\sqrt{n}$$

   ou encore $\sqrt{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{3}\left(n^{3/2}-(n-1)^{3/2}\right)$. *Comme* $\sqrt{n}$ *est une série à termes positifs divergente*

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(k^{3/2}-(k-1)^{3/2}\right)=\frac{2}{3}n^{3/2}$$

   Deuxième méthode. *La fonction* $t\mapsto\sqrt{t}$ *est croissante donc*

$$\forall k\geq 1,\ \int_{k-1}^{k}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\leq\sqrt{k}\leq\int_{k}^{k+1}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

   puis

$$\forall n\geq 1,\ \int_{0}^{n}\sqrt{t}\leq\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leq\int_{1}^{n+1}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

   puis

$$\forall n\geq 1,\ \frac{2}{3}n^{3/2}\leq\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}\leq\frac{2}{3}(n+1)^{3/2}-1\leq\frac{2}{3}(n+1)^{3/2}$$

   Comme $(n+1)^{3/2}\underset{n\to+\infty}{\sim}n^{3/2}$, $\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}n^{3/2}$. ∎

2. Déterminer un équivalent simple du reste de la série $\sum\frac{1}{n^2}$.

   Première méthode. *On sait que* $\frac{1}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$. *Comme la série* $\sum\frac{1}{n^2}$ *est un série à termes positifs convergente,*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{n}$$

   Deuxième méthode. *Comme* $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall k\geq 2,\ \int_{k}^{k+1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{k^2}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

   puis

$$\forall n\geq 2,\ \int_{n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leq\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

   ou encore

$$\forall n\geq 2,\ \frac{1}{n+1}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n}$$

   Comme $\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$. ∎

3. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$.

Par croissances comparées, $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. *Or* $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ *est une série à termes positifs convergente donc* $\sum \frac{\ln n}{n^2}$. ∎

4. Justifier la convergence de la série $\sum 2^{n+2} \cdot 3^{1-n}$ et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{n+2} \cdot 3^{1-n}$.

Remarquons que $2^{n+2} \cdot 3^{1-n} = 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. *La série* $\sum 2^{n+2} \cdot 3^{1-n}$ *est donc une série géométrique de raison* $\frac{2}{3} \in [0,1[$ *donc une série convergente. De plus,*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{n+2} \cdot 3^{1-n} = 12 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 12\left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 12 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 16$$

∎

5. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)$.

Remarquons que $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. *Ainsi la suite* $(\ln(n+1) - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante et de limite nulle. La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)$ *converge d'après le critère spécial des séries alternées.* ∎