

DEVOIR À LA MAISON N°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – D'après Centrale MP 1996

On note \mathcal{F} l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} et \mathcal{L} la partie de \mathcal{F} formée des fonctions *lipschitziennes* sur \mathbb{R} . On rappelle qu'une fonction φ est lipschitzienne sur \mathbb{R} s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|$$

L'objectif de ce problème est de déterminer les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - \lambda F(x + a) = f(x) \quad (\star)$$

où f est une fonction de \mathcal{L} donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés.

Partie I – Questions préliminaires

- I.1** Montrer qu'une fonction constante sur \mathbb{R} appartient à \mathcal{L} .
- I.2** Montrer que \cos et \sin appartiennent à \mathcal{L} .
- I.3** Montrer que \mathcal{L} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{F} .
- I.4** Soit $\varphi \in \mathcal{L}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\varphi(t)| \leq A|t| + B$$

- I.5** Soit q un complexe de module strictement inférieur à 1.

I.5.a On sait qu'alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ converge. Rappeler sa somme.

I.5.b Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} nq^n$ converge.

- I.6** On suppose dans cette question $|\lambda| < 1$.

I.6.a On fixe $x \in \mathbb{R}$. Justifier que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n e^{i(x+na)}$ converge et déterminer sa somme.

I.6.b Montrer que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n \cos(x + na)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n \sin(x + na)$ convergent et que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x + na) &= \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \sin(x + na) &= \frac{\sin x - \lambda \sin(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2} \end{aligned}$$

Partie II – Etude de (★) lorsque f est nulle et $|\lambda| \neq 1$

On suppose dans cette partie que f est nulle sur \mathbb{R} et $|\lambda| \neq 1$.

II.1 Soit $F \in \mathcal{F}$ vérifiant (★). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$F(x) = \lambda^n F(x + na)$$

$$F(x) = \lambda^{-n} F(x - na)$$

II.2 On suppose maintenant que $F \in \mathcal{L}$. Montrer à l'aide de la question **I.4** que F est nulle sur \mathbb{R} . On pourra distinguer les cas $|\lambda| < 1$ et $|\lambda| > 1$.

Partie III – Etude de (★) lorsque $|\lambda| \neq 1$

III.1 Montrer à l'aide de la question **II.2** que l'équation (★) admet au plus une solution dans \mathcal{L} .

III.2 On suppose dans cette question $|\lambda| < 1$.

III.2.a On fixe $x \in \mathbb{R}$. Montrer à l'aide de la question **I.4** que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n f(x + na)$ converge absolument. On pose alors $F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$.

III.2.b Montrer que $F_0 \in \mathcal{L}$.

III.2.c Montrer que F_0 est l'unique solution de (★) appartenant à \mathcal{L} .

III.2.d Déterminer l'unique solution de (★) appartenant à \mathcal{L} lorsque f est la fonction constante égale à 1.

III.2.e A l'aide de la question **I.6.b**, déterminer l'unique solution de (★) appartenant à \mathcal{L} lorsque f est la fonction cos ou la fonction sin.

III.3 On suppose dans cette question $|\lambda| > 1$.

III.3.a On fixe $x \in \mathbb{R}$. Justifier brièvement que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda^{-n} f(x - na)$ converge absolument. On pose alors $F_0(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$.

III.3.b Montrer que F_0 est l'unique solution de (★) appartenant à \mathcal{L} .