INTERROGATION ÉCRITE N°07

NOM : Prénom : Note :

---

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(\mathrm{M})$ *est continue car* $\det(\mathrm{M})$ *est polynomial en les coefficients de* M.
   Or $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est l'image réciproque de l'ouvert* $\mathbb{R}^*$ *par l'application continue* det *donc* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est ouvert.* ∎

2. L'application $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ admet-elle une limite en $(0,0)$? Justifier.

   D'une part, $f(t,0) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ *et d'autre part,* $f(t,t) = \dfrac{1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$. *Comme* $(t,0) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$ *et* $(t,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$, f *n'admet pas de limite en* $(0,0)$. ∎

3. L'application $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ admet-elle une limite en $(0,0)$? Justifier.

   Posons $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ *où* $r = \sqrt{x^2+y^2}$. *Alors*

   $$|f(x,y)| \leq \frac{|x^3+y^3|}{|x^2+y^2|} \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{r^2} = r\left(|\cos\theta|^3 + |\sin\theta|^3\right) \leq 2r = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

   Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. ∎

4. On munit $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $\varphi : f \in \mathrm{E} \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur E.

   Pour tout $f \in \mathrm{E}$, on a

$$|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}x = \|f\|_\infty$$

   On en déduit que φ est continue sur E par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires. ∎

5. On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n\right\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Montrer que l'application $\mathrm{D} : \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}'$ n'est pas continue.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\mathrm{X}^k\|_\infty = 1$ et $\|\mathrm{D}(\mathrm{X}^k)\|_\infty = \|k\mathrm{X}^{k-1}\|_\infty = k$. Ainsi $\frac{\|\mathrm{D}(\mathrm{X}^k)\|_\infty}{\|\mathrm{X}^k\|_\infty} = k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Comme D est linéaire, on en déduit que D n'est pas un endomorphisme continu de $(\mathbb{R}[\mathrm{X}], \|\cdot\|_\infty)$. ∎

6. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par encadrement de la partie entière,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

   puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x - \frac{1}{n} < u_n \leq x$$

   Par théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = x$. On en déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ∎