

# DEVOIR SURVEILLÉ N°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## A l'attention des 3/2

Les 3/2 pourront admettre le résultat des questions 8 et 31. Par ailleurs, toutes les variables aléatoires de l'énoncé pourront être considérées comme des «variables aléatoires de MPSI», c'est-à-dire des variables aléatoires définies sur un univers *fini*.

## Problème 1

**1** Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $1 + t^2 \leq 2$  donc  $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq \frac{1}{2^n}$ . Ainsi  $I_n \geq \int_0^1 \frac{1}{2^n} dt = \frac{1}{2^n}$ .

**2** L'application  $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$  avec  $2n \geq 2 > 1$ . On en déduit l'intégrabilité de  $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$  sur  $[0, +\infty[$  puis l'existence de  $K_n$ .

Il est clair que  $K_1 = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ .

**3** Supposons  $n \geq 2$ . Pour tout  $t \in [1, +\infty[$ ,  $0 < 1+t \leq 1+t^2$  de sorte que  $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(1+t)^n}$ . Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} = \frac{2}{2^n(n-1)}$$

Or  $\frac{1}{2^n(n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n n}$  donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$$

**4** D'après la question précédente,  $K_n - I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$ . A fortiori,  $K_n - I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ . Mais d'après la question 1,  $\frac{1}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(I_n)$  donc  $K_n - I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(I_n)$  i.e.  $K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$ .

**5** Par intégration par parties,

$$K_n = \int_0^{+\infty} 1 \cdot (1+t^2)^{-n} dt = [t(1+t^2)^{-n}]_0^{+\infty} + 2n \int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1} dt$$

Cette intégration par parties est légitime car

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t(1+t^2)^{-n} = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} K_n &= 2n \int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1} dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} (1+t^2-1)(1+t^2)^{-n-1} dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n} dt - 2n \int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n-1} dt \\ &= 2nK_n - 2nK_{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n$$

**6** D'après la question précédente,  $K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n$ . On montre par récurrence que  $K_n = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1} (n-1)!^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . A l'aide de la formule de Stirling, on montre que  $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ .

**7** Il suffit d'effectuer le changement de variable linéaire  $u = \sqrt{n}t$ .

**8** On pose  $f_n : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} & \text{si } u \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Pour  $u \leq \sqrt{n}$ ,  $f_n(u) = \exp(-n \ln(1+u^2/n))$  donc  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers  $u \mapsto e^{-u^2}$ . De plus, par concavité de  $\ln$ ,  $f_n(u) \leq \exp(-u^2)$  pour  $u \in \mathbb{R}_+$ . La fonction  $u \mapsto e^{-u^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\sqrt{n}I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{du}{(1+u^2/n)^n} = \int_0^{+\infty} f_n(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

**9** Avec les questions précédentes,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Via le changement de variable,  $t = u/\sqrt{2}$ ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

Par parité de  $u \mapsto e^{-u^2/2}$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$$

**10** Comme  $\varphi(t) \leq \frac{t}{x} \varphi(t)$  pour tout  $t \geq x$ ,

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt$$

De plus,  $-\varphi$  est une primitive de  $t \mapsto t\varphi(t)$  donc

$$\int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt = -[\varphi(t)]_x^{+\infty} = \varphi(x)$$

car  $\lim_{+\infty} \varphi = 0$ .

**REMARQUE.** Ceci prouve en sus la convergence de l'intégrale  $\int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt$ .

On a donc bien

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

**11** On considère la fonction

$$\Psi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (x^2 + 1) \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - x\varphi(x)$$

La fonction  $\Psi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi'(x) = 2x \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - (x^2 + 1)\varphi(x) - \varphi(x) - x\varphi'(x)$$

Or pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$  donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi'(x) = 2x \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - 2\varphi(x) \leq 0$$

en utilisant l'inégalité de la question précédente. La fonction  $\Psi$  est donc décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  : elle admet donc une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  en  $+\infty$ . Or, comme  $\varphi$  est positive,  $\Psi(x) \geq -x\varphi(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\varphi(x) = 0$  donc  $\ell \geq 0$  par passage à la limite. Par décroissance de  $\Psi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\Psi(x) \geq \ell \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

**12** Comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$ ,  $1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . D'après les deux questions précédentes,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x\varphi(x)}{x^2 + 1} \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

Par encadrement,  $1 - \Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$ .

**13** Notons  $B_0 = \emptyset$  et  $B_p = \bigcup_{1 \leq k \leq p} \{|R_k| \geq 3x\}$  pour  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors  $B_{p-1} \subset B_p$  pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  de sorte que

$$A = \bigcup_{p=1}^n \{|R_p| \geq 3x\} = B_n = \bigsqcup_{p=1}^n B_p \setminus B_{p-1} = \bigsqcup_{p=1}^n A_p$$

car  $A_p = B_p \setminus B_{p-1}$  pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**14** Remarquons que

$$A = (\{|R_n| \geq x\} \cap A) \sqcup (\{|R_n| < x\} \cap A) \subset \{|R_n| \geq x\} \sqcup \left( \bigcup_{p=1}^n (\{|R_n| < x\} \cap A_p) \right)$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=1}^n (\{|R_n| < x\} \cap A_p)\right) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(\{|R_n| < x\} \cap A_p)$$

**15** Soit  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Par inégalité triangulaire,  $|R_n - R_p| \geq |R_p| - |R_n|$ . Ainsi

$$\{|R_p| \geq 3x\} \cap \{|R_n| < x\} \subset \{|R_p| - |R_n| > 2x\} \subset \{|R_n - R_p| > 2x\}$$

Finalement,

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p$$

et

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset \{|R_p| \geq 3x\} \cap \{|R_n| < x\} \subset \{|R_n - R_p| > 2x\}$$

donc

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}$$

**16** Tout d'abord, d'après la question précédente,

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}) \leq \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\})$$

Ainsi

$$\sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}) \leq \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\})$$

Or, pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A_p$  s'écrit en fonction des variables aléatoires  $Z_1, \dots, Z_p$  tandis que  $R_n - R_p = \sum_{k=p+1}^n Z_k$ . Comme  $Z_1, \dots, Z_n$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions garantit que les événements  $A_p$  et  $\{|R_n - R_p| > 2x\}$  sont indépendants. Ainsi

$$\sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}) = \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p) \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\}) \leq \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\}) \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p)$$

Comme  $A = \bigcup_{p=1}^n A_p$ ,  $\sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p) = \mathbb{P}(A) \leq 1$ . Ainsi

$$\sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}) \leq \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\})$$

puis

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\})$$

**17** On vérifie sans peine que  $x_{n,n-k} = -x_{n,k}$ .

**18**  $\varphi$  est bornée car à valeurs dans  $]0, 1/\sqrt{2\pi}]$ .  $B_n$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs donc  $B_n$  est également bornée. On en déduit que  $B_n - \varphi$  est bornée, ce qui justifie l'existence de  $\Delta_n$ .

**19** Posons  $I_{n,k} = \left] x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  ainsi que  $y_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k-1}{\sqrt{n}}$  pour  $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ .  
Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et tout  $x \in I_{n,k}$ ,  $-x \in I_{n,n-k}$  et

$$B_n(-x) = \frac{\sqrt{n}}{2} \binom{n}{n-k} \frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = B_n(x)$$

De plus, pour  $x \in \left] -\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \cup \left] \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right]$ ,  $-x \in \left] -\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \cup \left] \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right]$  et  $B_n(-x) = B_n(x)$ .

La partie  $A = \mathbb{R} \setminus \{y_{n,k}, k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket\}$  est donc symétrique par rapport à 0 et la restriction de  $B_n$  à  $A$  est paire. Comme  $\varphi$  est paire sur  $\mathbb{R}$ , la restriction de  $\psi_n = |B_n - \varphi|$  à  $A$  est également paire. On en déduit que  $\psi_n(A) = \psi_n(A \cap \mathbb{R}_+)$ .

Remarquons que  $B_n$  est continue à droite sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $\psi_n$  est continue à droite sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $\psi_n(\mathbb{R}) = \psi_n(A)$  et que  $\psi_n(\mathbb{R}_+) = \psi_n(A \cap \mathbb{R}_+)$ . En effet, on peut par exemple constater que tout  $x \in \mathbb{R}$  est limite d'une suite à valeurs dans  $A \cap [x, +\infty[$ .

Comme  $\psi_n(A) = \psi_n(A \cap \mathbb{R}_+)$ , on a également  $\overline{\psi_n(A)} = \overline{\psi_n(A \cap \mathbb{R}_+)}$  i.e.  $\psi_n(\mathbb{R}) = \psi_n(\mathbb{R}_+)$ . Ainsi

$$\Delta_n = \sup_{\mathbb{R}} \psi_n = \sup \psi_n(\mathbb{R}) = \sup \psi_n(\mathbb{R}_+) = \sup_{\mathbb{R}_+} \psi_n = \sup_{x \geq 0} |B_n(x) - \varphi(x)|$$

**20** Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $I_{n,k} \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$ . Alors  $x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$  i.e.  $2k > n - 1$ . Remarquons que pour un tel  $k$ ,

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n-1-2k}{(k+1)!(n-k)!} < 0$$

De plus,  $\binom{n}{n} = 1 > 0$ . On en déduit que  $B_n$  est bien décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

**21** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in I_n$ . Alors

$$0 \leq -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \leq \ell + 1$$

de sorte que

$$\frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n}{2} + \frac{\ell+1}{2} \sqrt{n}$$

Notamment,  $k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  par minoration. On peut donc écrire

$$k! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Mais les inégalités précédentes montrent également que  $k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$  de sorte que

$$k! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

De même,

$$\frac{n}{2} - \frac{\ell+1}{2}\sqrt{n} \leq n-k \leq \frac{n}{2}$$

donc  $n-k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Ainsi

$$(n-k)! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n-k}\right)\right)$$

Mais à nouveau,  $n-k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$  donc

$$(n-k)! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} k!(n-k) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2\pi e^{-n} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

**22** A nouveau,

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

de sorte qu'avec la question précédente,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n^n \sqrt{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{2\pi k} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} B_n(x_{n,k}) &= \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{n+1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2^{n+1} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{k+1/2} n^{n-k+1/2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2^{k+1/2} 2^{n-k+1/2} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}} \end{aligned}$$

**23** Puisque  $x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}}$ ,

$$1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = \frac{2k}{n} \qquad 1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = 2 - \frac{2k}{n} \qquad \frac{x_{n,k}}{2} \sqrt{n} = k - n/2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} &= \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{k-n/2} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{n/2-k} \\ &= \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{k+1/2} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{n-k+1/2} \\ &= \left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} B_n(x_{n,k}) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Par définition de  $I_{n,k}$ ,  $0 \leq x_{n,k} \leq \ell + 1$  donc  $x_{n,k}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1)$ . Ainsi

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} &= \exp\left(-\frac{n+1}{2} \ln\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{n}{2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(-\frac{x_{n,k}^2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^4}{n^2}\right)\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \frac{x_{n,k}^2}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \exp\left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)
 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} &= \exp\left(-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} \left(\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
 \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} &= \exp\left(\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} \ln\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} \left(-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 B_n(x_{n,k}) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

**24** D'après la question précédente,

$$B_n(x_{n,k}) - \varphi - x_{n,k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \varphi(x_{n,k}) \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Comme  $\varphi$  est bornée,

$$B_n(x_{n,k}) - \varphi - x_{n,k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Notamment,

$$B_n(x_{n,k}) - \varphi - x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Il existe donc  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N_0, \forall k \in I_n, |B_n(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k})| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Comme  $\sqrt{n} + 1/\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \geq N_1$ ,  $\sqrt{n} + 1/\sqrt{n} \geq \ell$ .

La fonction  $\varphi$  est continue sur le segment  $[0, \ell]$  donc elle y est uniformément continue. Il existe donc  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\forall (x, y) \in [0, \ell], |x - y| \leq \alpha \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

On choisit alors  $N_2 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{\sqrt{N_2}} \leq \alpha$ . A fortiori, pour tout  $n \geq N_2$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \alpha$ .

Posons alors  $n_1 = \max\{N_0, N_1, N_2\}$ . Soit  $n \geq N_1$ . Soit également  $x \in [0, \ell]$ . Puisque  $n \geq N_1$ ,  $[0, \ell] \subset [0, \sqrt{n} + 1/\sqrt{n}]$ . Il existe donc  $k \in I_n$  tel que  $x \in [x_{n,k} - 1/\sqrt{n}, x_{n,k} + 1/\sqrt{n}]$ . Alors  $|x - x_{n,k}| \leq 1/\sqrt{n} \leq \alpha$  car  $n \geq N_2$  de sorte que  $|\varphi(x) - \varphi(x_{n,k})| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Enfin, comme  $n \geq N_0$ ,  $|B_n(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k})| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Par inégalité triangulaire,

$$|B_n(x) - \varphi(x)| = |B_n(x_{n,k}) - \varphi(x)| \leq |B_n(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k})| + |\varphi(x_{n,k}) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$