

# RÉDUCTION ALGÈBRIQUE

## Polynômes annulateurs

### Solution 1

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  et  $M$  un vecteur propre associé. Alors  $M + \text{tr}(M)I_n = \lambda M$  puis en considérant la trace des deux membres,  $(n+1)\text{tr}(M) = \lambda \text{tr}(M)$ . Si  $\lambda = n+1$  ou  $\text{tr}(M) = 0$ . Si  $\text{tr}(M) = 0$  alors  $M = \lambda M$  et donc  $\lambda = 1$ . Ainsi  $\text{Sp}(u) \subset \{1, n+1\}$ .

Déterminons les sous-espaces propres associés à ces potentielles valeurs propres. Clairement, le sous-espace associé à la valeur propre 1 est l'hyperplan des matrices de traces nulles. De plus,  $I_n$  est clairement un vecteur propre associé à la valeur propre  $n+1$  donc le sous-espace propre associé à la valeur propre  $n+1$  est  $\text{vect}(I_n)$  puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**REMARQUE.** On constate que  $u$  est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**REMARQUE.** Si  $n = 1$ , 1 n'est en fait pas valeur propre puisqu'alors le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle est le sous-espace nul.

### Solution 2

1. Soit  $A$  une matrice vérifiant la condition de l'énoncé. Le polynôme  $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$  annule  $A$  et est scindé à racines simples :  $A$  est donc diagonalisable et  $\text{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$ .

- Si la seule valeur propre de  $A$  est 1, alors  $A = I_2$ .
- Si la seule valeur propre de  $A$  est 2, alors  $A = 2I_2$ .
- Si  $A$  admet 1 et 2 pour valeurs propres, alors il existe  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A = PBP^{-1}$  avec  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Réciproquement les matrices  $I_2$ ,  $2I_2$  et  $PBP^{-1}$  avec  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  conviennent.

2. Soit  $A$  une matrice vérifiant la condition de l'énoncé. Le polynôme  $X^3 - 8X^2 + 21X - 18 = (X-2)(X-3)^2$  annule  $A$ . D'après le lemme des noyaux,  $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}(A - 2I_2) \oplus \text{Ker}(A - 3I_2)^2$ .

- Si  $\dim \text{Ker}(A - 2I_2) = 2$ , alors  $A = 2I_2$ .
- Si  $\dim \text{Ker}(A - 2I_2) = \dim \text{Ker}(A - 3I_2)^2 = 1$ , alors il existe  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A = PBP^{-1}$  avec  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .
- Si  $\dim \text{Ker}(A - 3I_2)^2 = 2$ , alors le polynôme  $(X-3)^2$  annule  $A$  :  $A$  est trigonalisable et  $\text{Sp}(A) = \{3\}$ . Il existe donc  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  et  $a \in \mathbb{R}$  telle que  $A = P \begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ .

Réciproquement, les matrices ci-dessus conviennent.

**REMARQUE.** On peut en fait montrer qu'on peut se ramener à  $a = 1$  dans le dernier cas.

### Solution 3

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel qu'il existe  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$  et  $\text{tr}(M) = 0$ . Le polynôme  $P = X^3 - X^2 - X - 2 = (X-2)(X-j)(X-\bar{j})$  est un polynôme annulateur de  $M$ . On en déduit que  $\text{Sp}(M) \subset \{2, j, \bar{j}\}$ . De plus,  $P$  est simplement scindé donc  $M$  est diagonalisable.

Notons  $p, q, r$  les dimensions respectives de  $\text{Ker}(M - 2I_n)$ ,  $\text{Ker}(M - jI_n)$  et  $\text{Ker}(M - \bar{j}I_n)$ . On a donc  $\text{tr}(M) = 2p + qj + r\bar{j} = 0$ . En passant aux parties réelle et imaginaire, on en déduit  $2p - \frac{q}{2} - \frac{r}{2} = 0$  et  $q - r = 0$  puis  $2p = q = r$ . Ainsi  $n = p + q + r = 5p$  est un multiple de 5.

On peut alors affirmer que  $M$  est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent  $D = \text{diag}(2, j, j, \bar{j}, \bar{j})$ . Réciproquement soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un multiple de 5 et considérons une matrice  $M$  semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent  $D = \text{diag}(2, j, j, \bar{j}, \bar{j})$ . Alors  $\text{tr}(M) = \frac{n}{5} \text{tr}(D) = 0$ . De plus,  $P(M)$  est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent  $P(D) = \text{diag}(P(2), P(j), P(j), P(\bar{j}), P(\bar{j})) = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0)$ . On a donc bien  $P(M) = 0$ .

**REMARQUE.** Si  $n$  n'est pas un multiple de 5, il n'existe pas de matrice vérifiant les conditions de l'énoncé.

#### Solution 4

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant les conditions de l'énoncé. Alors  $X^5 - X^2 = X^2(X^3 - 1)$  est un polynôme annulateur de  $M$ . On en déduit que  $\text{Sp}(M) \subset \{0, 1, j, \bar{j}\}$ . Notons  $m_0, m_1, m_j, m_{\bar{j}}$  les multiplicités respectives (éventuellement nulles) de  $0, 1, j, \bar{j}$ . Alors

$$0m_0 + m_1 + jm_j + \bar{j}m_{\bar{j}} = \text{tr}(M) = n$$

En considérant la partie réelle, on obtient

$$m_1 - \frac{1}{2}m_j - \frac{1}{2}m_{\bar{j}} = n$$

Or  $m_1 \leq n$ ,  $m_j \geq 0$  et  $m_{\bar{j}} \geq 0$  donc  $m_1 = n$  et  $m_j = m_{\bar{j}} = 0$ . Par ailleurs

$$m_0 + m_1 + m_j + m_{\bar{j}} = n$$

donc  $m_0 = 0$ . Ainsi 0 n'est pas valeur propre de  $M$ . Par conséquent,  $M$  est inversible. Comme  $M^5 - M^2 = 0$ ,  $M^3 - I_n = 0$  en multipliant par  $M^{-2}$ . Par conséquent,  $X^3 - 1$  est un polynôme annulateur de  $M$  scindé à racines simples. On en déduit que  $M$  est diagonalisable. Comme 1 est sa seule valeur propre,  $M = I_n$ .

Réciproquement,  $I_n$  vérifie bien les conditions de l'énoncé : c'est donc l'unique matrice vérifiant les conditions de l'énoncé.

#### Solution 5

Puisque  $F$  est stable par  $u$ , on peut considérer l'endomorphisme  $u|_F$  induit par  $u$ . On remarque que  $P$  est aussi un polynôme annulateur de  $u|_F$ . Les polynômes  $P_i$  étant premiers entre eux deux à deux, le lemme des noyaux permet d'affirmer que  $F = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } P_i(u|_F)$ . Or pour tout

$$i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \text{Ker } P_i(u|_F) = F \cap \text{Ker } P_i(u) = F \cap N_i. \text{ Ainsi } F = \bigoplus_{i=1}^r F \cap N_i.$$

#### Solution 6

On remarque que  $C^3 - C^2 - 3C = 0$ . Ainsi  $X^3 - X^2 - 3X = X(X^2 - X - 3)$  est un polynôme scindé à racines simples (le polynôme de degré 2 n'admet évidemment pas 0 pour racine et est de discriminant strictement positif). Par conséquent  $C$  est diagonalisable et donc semblable à une matrice diagonale  $D$ . On voit alors aisément que  $A = 3C - C^2$  est semblable à la matrice diagonale  $3D - D^2$  et que  $B = C^2 - 2C$  est semblable à la matrice diagonale  $D^2 - 2D$ .  $A$  et  $B$  sont donc diagonalisables.

#### Solution 7

Comme  $P(0) = 0$  et  $P'(0) = 0$ , 0 est racine simple de  $P$ . Il existe donc  $Q$  non divisible par  $X$  tel que  $P = XQ$ . Comme  $X$  est irréductible,  $X$  et  $Q$  sont premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux,

$$E = \text{Ker } P(f) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker } Q(f)$$

Comme  $XQ = P$ ,  $Q(f) \circ f = P(f) = 0$  donc  $\text{Im } f \subset \text{Ker } Q(f)$ . Par ailleurs, il existe  $R \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $Q = Q(0) + XR$ . Ainsi

$$Q(f) = Q(0) \text{Id}_E + f \circ R(f)$$

Si on se donne  $x \in \text{Ker } Q(f)$ , on a donc  $Q(0)x + f \circ R(f)(x) = 0_E$  et donc  $x = -\frac{1}{Q(0)}f(R(f)(x)) \in \text{Im } f$  car  $Q(0) \neq 0$ . Ainsi  $\text{Ker } Q(f) \subset \text{Im } f$  puis  $\text{Ker } Q(f) = \text{Im } f$  par double inclusion, ce qui permet de conclure.

**REMARQUE.** Si on suppose  $E$  de dimension finie, on peut se passer de montrer l'inclusion  $\text{Ker } Q(f) \subset \text{Im } f$ . En effet, on sait déjà que

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } Q(f)$$

et le théorème du rang montre que

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Ainsi  $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} Q(f)$  et, comme  $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} Q(f)$ ,  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} Q(f)$ , ce qui permet de conclure.

### Solution 8

$X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - \bar{j})$  est un polynôme annulateur de  $A$  scindé à racines simples. Ainsi  $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, j, \bar{j}\}$  et  $A$  est diagonalisable. Notons  $m_0, m_j, m_{\bar{j}}$  les multiplicités (éventuellement nulles) de  $0, j, \bar{j}$ . Comme  $A$  est à coefficients réels, il en est de même de son polynôme caractéristique de sorte que  $m_j = m_{\bar{j}}$ . De plus,  $m_0 + m_j + m_{\bar{j}} = n$  donc  $m_0 = n - 2m_j$ . Comme  $A$  est diagonalisable,  $m_0 = \dim \operatorname{Ker} A$ . D'après le théorème du rang,  $\operatorname{rg} A = n - \dim \operatorname{Ker} A = 2m_j$ . Le rang de  $A$  est donc bien pair.

### Solution 9

Notons  $u : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto P(X+1)$ . La matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que  $u - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$  est nilpotent. L'indice de nilpotence est inférieur à  $\dim \mathbb{C}_{n-1}[X] = n$  donc  $(u - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]})^n = 0$ . Ceci donne par la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k = 0$$

Puisqu'on a clairement  $u^k(P) = P(X+k)$ , on en déduit le résultat demandé.

### Solution 10

1. a. Remarquons que pour  $M \in E_2$ ,  $u(M)_1 = M_2$  et  $u(M)_2 = M_1$ .

Soient  $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$  et  $(A, A') \in E_2^2$ . Alors

$$u(\lambda A + \lambda' A')_1 = (\lambda A + \lambda' A')_2 = \lambda A_2 + \lambda' A'_2 = \lambda u(A)_1 + \lambda' u(A')_1 = (\lambda A + \lambda' A')_1 = \lambda A_1 + \lambda' A'_1 = \lambda u(A)_2 + \lambda' u(A')_2$$

Par conséquent,  $u(\lambda A + \lambda' A') = \lambda u(A) + \lambda' u(A')$ .

$u$  est bien linéaire : c'est un endomorphisme de  $E_2$ .

- b. D'après la remarque de la question précédente,  $u(K_1) = K_3$ ,  $u(K_2) = K_4$ ,  $u(K_3) = K_1$  et  $u(K_4) = K_2$ . On en déduit que

$$M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul montre que  $M^2 = I_4$  i.e.  $u^2 = \operatorname{Id}_{E_2}$ .  $u$  est bien un automorphisme de  $E_2$ .

- c. Puisque  $u^2 = \operatorname{Id}_{E_2}$ ,  $u$  est une symétrie.

$$\operatorname{Ker}(M - I_4) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1, L_4 \leftarrow L_4 + L_2 = \operatorname{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Par conséquent,  $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_{E_2}) = \operatorname{vect}(K_1 + K_3, K_2 + K_4)$ . De même,

$$\operatorname{Ker}(M + I_4) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_2 = \operatorname{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Par conséquent,  $\operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_{E_2}) = \operatorname{vect}(K_1 - K_3, K_2 - K_4)$ . Finalement,  $u$  est la symétrie par rapport à  $\operatorname{vect}(K_1 + K_3, K_2 + K_4)$  parallèlement à  $\operatorname{vect}(K_1 - K_3, K_2 - K_4)$ .

2. Notons  $\mathcal{B}_c$  la base canonique de  $E_n$ . Dans le cas  $n = 2$ , par antisymétrie du déterminant,

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(u(A)_1, u(A)_2) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_2, A_1) = -\det_{\mathcal{B}_c}(A_1, A_2) = -\det(A)$$

Dans le cas  $n = 3$

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(u(A)_1, u(A)_2, u(A)_3) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_2 + A_3, A_1 + A_3, A_1 + A_2)$$

Par multilinéarité et caractère alterné du déterminant,

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_2, A_3, A_1) + \det_{\mathcal{B}_c}(A_3, A_1, A_2)$$

Enfin, puisque les 3-cycles sont de signature 1, le caractère antisymétrique du déterminant donne

$$\det(u(A)) = 2 \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, A_2, A_3) = 2 \det(A)$$

3. On note  $S = \sum_{k=1}^n A_k$ . Ainsi

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(S - A_1, \dots, S - A_n)$$

A nouveau, le caractère multilinéaire et alterné du déterminant donne

$$\begin{aligned} \det(u(A)) &= \det_{\mathcal{B}_c}(-A_1, \dots, -A_n) + \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}_c}(-A_1, \dots, -A_{k-1}, S, -A_{k+1}, \dots, -A_n) \\ &= (-1)^n \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_n) + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, S, A_{k+1}, \dots, A_n) \end{aligned}$$

Encore une fois le caractère multilinéaire et alterné du déterminant donne

$$\det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, S, A_{k+1}, \dots, A_n) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, \sum_{i=1}^n A_i, A_{k+1}, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, A_i, A_{k+1}, \dots, A_n) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_n)$$

Finalement,

$$\det(u(A)) = (-1)^n \det(A) + (-1)^{n-1} n \det(A) = (-1)^{n-1} (n-1) \det(A)$$

4. a. Soit  $A \in E_n$ . Posons  $B = u(A)$  et  $C = u(B) = u^2(A)$ . Alors

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, B_j = \left( \sum_{k=1}^n A_k \right) - A_j$$

et

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j &= \sum_{k=1}^n B_k - B_j \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \left( \sum_{l=1}^n A_l \right) - A_k \right) - \sum_{k=1}^n A_k + A_j \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_l - 2 \sum_{k=1}^n A_k + A_j = (n-2) \sum_{k=1}^n A_k + A_j = (n-2)(B_j + A_j) + A_j = (n-2)u(A)_j + (n-1)A_j \end{aligned}$$

On en déduit que  $u^2(A) = (n-2)u(A) + (n-1)A$ . Ceci étant valable pour tout  $A \in E_n$ ,  $u^2 - (n-2)u + (n-1)\text{Id}_{E_n} = 0$ . Ainsi  $X^2 - (n-2)X + (n-1) = (X+1)(X-(n-1))$  est un polynôme annulateur de  $u$ .

b. Comme  $n \neq 0$ ,  $n-1 \neq -1$  et donc le polynôme  $(X+1)(X-(n-1))$  est scindé à racines simples :  $u$  est diagonalisable.

Pour  $A \in E_n$ ,

$$u(A) = -A \iff \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(A)_j = -A_j \iff \sum_{k=1}^n A_k = 0$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-1$  est donc l'ensemble des matrices dont la somme des colonnes est nulle.

Soit  $A$  dans le sous-espace propre associé à la valeur propre  $n-1$ . Alors, en posant  $S = \sum_{k=1}^n A_k$ ,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, S - A_j = (n-1)A_j$$

ou encore

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_j = \frac{1}{n}S$$

Toutes les colonnes de  $A$  sont donc égales. Inversement, on vérifie immédiatement que si toutes les colonnes de  $A$  sont égales, alors  $u(A) = (n-1)A$ . Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre  $n-1$  est l'ensemble des matrices ayant toutes leurs colonnes égales.

**REMARQUE.** On pourrait préciser que  $\dim E_{-1}(u) = n^2 - n$  et  $\dim E_{n-1}(u) = n$ .

- c. i. En raisonnant par blocs, les colonnes de  $AJ_n$  sont toutes égales à  $\sum_{k=1}^n A_k$ . On en déduit que les colonnes de  $AU_n$  sont celles de  $u(A)$ . Autrement dit,  $AU_n = u(A)$ .  
 ii. Un calcul direct donne  $J_n^2 = nJ_n$  donc

$$U_n^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n = nJ_n - 2J_n + I_n = n(U_n + I_n) - 2(U_n + I_n) + I_n = (n-2)U_n + (n-1)I_n$$

Ainsi pour tout  $A \in E_n$ ,

$$u^2(A) = u(A)U_n = AU_n^2 = (n-2)AU_n + (n-1)A = (n-2)u(A) + (n-1)A$$

On en déduit à nouveau que  $u^2 - (n-2)u - (n-1) = 0$  i.e. que  $X^2 - (n-2)X - (n-1)$  annule  $A$ .

**REMARQUE.** L'exercice est vraiment mal posé. En remarquant que  $u(A) = AU_n$ , toutes les questions précédentes se traitent de manière beaucoup plus naturelle. Par exemple,

$$\det(u(A)) = \det(A) \det(U_n)$$

et  $\det(U_n)$  se calcule beaucoup plus facilement par opérations sur lignes ou colonnes.

## Solution 11

1. Un calcul par blocs donne  $\chi_A = X(X^2 + 1) = X(X-i)(X+i)$ . Comme  $\text{Sp}(A)$  est l'ensemble des racines de  $\chi_A$ ,  $\text{Sp}(A) = \{0, i, -i\}$ .

Enfin,  $\chi_A$  est scindé à racines simples (dans  $\mathbb{C}$ ) donc  $A$  est semblable à la matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ .

2. Comme  $X^3 + X = X(X-i)(X+i)$  est un polynôme annulateur de  $M$  scindé à racines simples,  $M$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(M) \subset \{0, i, -i\}$ . 0 ne peut être la seule valeur propre de  $M$  car sinon  $M$  serait semblable à la matrice nulle et donc nulle. De plus, comme  $M$  est à coefficients réels,  $\chi_M$  l'est également de sorte que les valeurs propres non réelles de  $M$  sont conjuguées. Ainsi  $\text{Sp}(M) = \{0, i, -i\}$ . On en déduit que  $M$  est bien semblable à  $D$ .

3. Comme  $A$  et  $M$  sont toutes deux semblables à  $D$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ,  $A$  et  $M$  sont également semblables l'une à l'autre dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  car la similitude est une relation d'équivalence.

Montrons que  $M$  est également semblable à  $A$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Notons  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$ . Comme  $A$  est semblable à  $D$ ,  $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = \text{rg}(D) = 2$  puis  $\dim \text{Ker}(u) = 1$  d'après le théorème du rang. Notons  $e_1$  un vecteur directeur de la droite  $\text{Ker}(u)$ .

Comme  $X^3 + X = X(X^2 + 1)$  est un polynôme annulateur de  $u$  et comme  $X$  et  $X^2 + 1$  sont premiers entre eux,  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ . Notons  $e_2$  un vecteur non nul de  $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  et  $e_3 = u(e_2)$ . Comme  $u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$  commute avec  $u$ , son noyau est stable par  $u$  de sorte que  $e_3 = u(e_2) \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ .

Montrons que  $(e_2, e_3)$  est une base de  $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ . Tout d'abord,  $\dim \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker}(u) = 2$  donc il suffit de montrer que  $(e_2, e_3)$  est libre. Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\alpha e_2 + \beta e_3 = 0$  ou encore  $\alpha e_2 + \beta u(e_2) = 0$ . En appliquant  $u$ , on obtient

$\alpha u(e_2) + \beta u^2(e_2) = 0$ . Comme  $e_2 \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ ,  $u^2(e_2) = -u_2$  donc  $\alpha e_3 - \beta e_2 = 0$ . Ainsi  $\begin{cases} \alpha e_2 + \beta e_3 = 0 \\ -\beta e_2 + \alpha e_3 = 0 \end{cases}$ . En éliminant  $e_3$ ,

on obtient  $(\alpha^2 + \beta^2)e_2 = 0$  et donc  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  puis  $\alpha = \beta = 0$  car  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels. Ainsi  $(e_2, e_3)$  est bien libre et c'est une base de  $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ .

Comme  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ ,  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Enfin,  $u(e_1) = 0$ ,  $u(e_2) = e_3$  et  $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$  donc la matrice de  $u$  dans cette base est  $A$ . On en déduit que  $M$  est semblable à  $A$ .

## Diagonalisabilité

### Solution 12

$\varphi$  est clairement un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et on constate que  $\varphi^4 = \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ . Ainsi  $X^4 - 1$  est un polynôme annulateur de  $\varphi$ . Par conséquent,

$\text{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$ . On trouve que  $E_1(\varphi) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et  $E_{-1}(\varphi) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ . Puisque

$$\dim E_1(\varphi) + \dim E_{-1}(\varphi) = 2 < 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$\varphi$  n'est pas diagonalisable.

### Solution 13

1. Supposons  $x \neq 0$  et soit  $M \in E_x$ . Alors

$$-\frac{1}{x}M(M + I_n) = -\frac{1}{x}(M + I_n)M = I_n$$

donc  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $M^{-1} = -\frac{1}{x}(M + I_n)$ .

Soit  $M \in E_0$ . Alors  $M^2 + M = 0$ . Si  $M$  est inversible, alors, en multipliant par  $M^{-1}$ ,  $M = -I_n$  et  $-I_n$  est bien inversible. La seule matrice inversible de  $E_0$  est  $-I_n$ .

2. Remarquons que  $P_x = X^2 + X + x$  est un polynôme annulateur de toutes les matrices de  $E_x$ .

Si le discriminant de  $P_x$  est strictement négatif i.e.  $x > \frac{1}{4}$ , alors les matrices de  $E_x$  ne possèdent pas de valeur propre réelle et ne sont donc pas diagonalisables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Si le discriminant de  $P_x$  est strictement positif i.e.  $x < \frac{1}{4}$ , alors  $P_x$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples donc toutes les matrices de  $E_x$  sont diagonalisables.

Si  $x = \frac{1}{4}$ ,  $P_{\frac{1}{4}} = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2$ . On vérifie que  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  appartient à  $E_{\frac{1}{4}}$  mais n'est pas diagonalisable.

Ainsi  $E_x$  ne contient que des matrices diagonalisables si et seulement si  $x < \frac{1}{4}$ .

3. Remarquons que  $P_{-2} = (X - 1)(X + 2)$ . Les spectres des matrices de  $E_{-2}$  sont inclus dans  $\{1, -2\}$ . Soit  $M \in E_{-2}$ . Notons  $m_1$  et  $m_{-2}$  les multiplicités (éventuellement nulles) des valeurs propres 1 et  $-2$ .

Comme les matrices de  $E_{-2}$  sont diagonalisables,  $m_1 + m_{-2} = n$  et  $m_1 - 2m_{-2} = \text{tr}(M)$ . Ainsi  $\text{tr}(M) = n - 3m_{-2}$  puis

$$T \subset \{n - 3k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

Réciproquement, pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $M = \begin{pmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & -2I_k \end{pmatrix} \in E_{-2}$  et  $\text{tr}(M) = n - 3k \in T$ . Ainsi

$$T = \{n - 3k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

### Solution 14

1. On a  $f = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + 2g$  avec  $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T$ . Comme  $\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$  et  $g$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $f$  en est un également.

2. Notons  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), f(M) = 3M$$

$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), f(M) = -M$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}(f - 3 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

Comme  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on peut affirmer (détailler si cela ne semble pas clair) que

$$\text{Ker}(f - 3 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f - 3 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

On en déduit que  $f$  est diagonalisable, que ses valeurs propres sont 3 et  $-1$  et que les sous-espaces propres associés respectifs sont  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

3. Déjà répondu à la question précédente.

4. Comme la trace et le déterminant d'un endomorphisme trigonalisable sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité et comme  $f$  est diagonalisable,

$$\text{tr}(f) = 3 \cdot \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + (-1) \cdot \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = 3 \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n(n+2)$$

$$\det(f) = 3^{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \cdot (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

### Solution 15

1. On constate que

$$(\lambda + \mu)M = \lambda^2 A + \mu^2 B + \lambda\mu(A + B) = M^2 + \lambda\mu I_p$$

ou encore

$$M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p = 0$$

Comme  $\lambda\mu \neq 0$ ,

$$\frac{1}{\lambda\mu} M ((\lambda + \mu)I_p - M) = I_p$$

Ceci prouve que  $M$  est inversible et que

$$M^{-1} = \frac{1}{\lambda\mu} ((\lambda + \mu)I_p - M)$$

2. A partir des deux premières égalités, on obtient  $(\lambda - \mu)A = M - \mu I_p$ . Comme  $\lambda \neq \mu$ , on peut affirmer que  $A = \frac{1}{\lambda - \mu}(M - \mu I_p)$ .

3. Un calcul donne

$$A^2 = \frac{1}{(\lambda - \mu)^2} (M^2 - 2\mu M + \mu^2 I_p)$$

Or on a vu à la première question que  $M^2 = (\lambda + \mu)M - \lambda\mu I_p$  donc

$$A^2 = \frac{1}{(\lambda - \mu)^2} ((\lambda - \mu)M - (\lambda\mu - \mu^2)I_p) = \frac{\lambda - \mu}{(\lambda - \mu)^2} (M - \mu I_p) = A$$

Ainsi  $A$  est une matrice de projecteur.

De plus, comme  $A^2 = A$ ,

$$B^2 = (I_p - A)^2 = I_p - 2A + A^2 = I_p - A = B$$

donc  $B$  est une matrice de projecteur.

4. D'après la première question,  $X^2 - (\lambda + \mu)X + \lambda\mu = (X - \lambda)(X - \mu)$  est un polynôme annulateur de  $M$ . Comme  $\lambda \neq \mu$ , ce polynôme est scindé à racines simples donc  $M$  est diagonalisable. On peut également affirmer que  $\text{Sp}(M) \subset \{\lambda, \mu\}$ .

Cette inclusion peut être stricte. Par exemple, si  $A = I_p$  et  $B = 0$ , alors  $M = \lambda I_p$  et  $\text{Sp}(M) = \{\lambda\}$ . De même, si  $A = 0$  et  $B = I_p$ , alors  $M = \mu I_p$  et  $\text{Sp}(M) = \{\mu\}$ .

**Solution 16**

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(v)$ . On montre classiquement que  $E_\lambda = \text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_E)$  est stable par  $u$  :  $u$  induit donc un endomorphisme  $u_\lambda$  de  $E_\lambda$ . Puisque  $u$  est diagonalisable,  $u$  annule un polynôme scindé à racines simples à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . A fortiori,  $u_\lambda$  annule ce même polynôme et est donc également diagonalisable. Notons  $\mathcal{B}_\lambda$  une base de  $E_\lambda$  dans laquelle la matrice de  $u_\lambda$  est diagonale. Notons alors  $\mathcal{B}$  la juxtaposition des bases  $\mathcal{B}_\lambda$  pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ . Comme  $v$  est diagonalisable,  $E$  est la somme directe des sous-espaces propres de  $v$  et  $\mathcal{B}$  est donc une base de  $E$ . Par construction, la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est diagonale et celle de  $v$  l'est évidemment puisque  $\mathcal{B}$  est la juxtaposition de bases de sous-espaces propres de  $v$ .

**Solution 17**

**Méthode n°1** :  $A$  est diagonalisable donc il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ . Par conséquent,  $A^\top = (P^{-1})^\top D^\top P^\top = (P^\top)^{-1} D P^\top$ . Ainsi  $A^\top$  est également diagonalisable.

**Méthode n°2** :  $A$  est diagonalisable donc admet un polynôme annulateur  $P$  scindé à racines simples. Alors  $P(A^\top) = P(A)^\top = 0$  donc  $A^\top$  est également diagonalisable.

**Solution 18**

1. Notons  $(e_1, e_2, e_3)$  la base dans laquelle la matrice de  $g$  est  $G$ . On a  $g(e_1) = e_2$  et  $g(e_2) = e_3$  donc  $(e_1, e_2, e_3) = (e_1, g(e_1), g^2(e_1))$  est une base de  $E$  et  $g$  est cyclique. On trouve sans peine

$$\chi_g = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$$

Comme  $\chi_g$  est simplement scindé,  $g$  est diagonalisable.

2. Un endomorphisme cyclique n'est pas toujours diagonalisable. Considérons par exemple un endomorphisme  $f$  nilpotent d'indice  $n - 1$ . Il existe alors  $x_0 \in E$  tel que  $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ . On montre alors classiquement que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ . Ainsi  $f$  est bien cyclique mais  $f$  n'est évidemment pas diagonalisable dès que  $n \geq 2$ .
3. Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont distinctes deux à deux. Il existe donc une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ . De plus, en notant  $\lambda_i$  la valeur propre associée au vecteur propre  $e_i$ , les  $\lambda_i$  sont deux à deux distincts. Notons  $x_0 = \sum_{i=1}^n e_i$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f^k(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k e_i$ . La matrice de la famille  $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est une matrice de Vandermonde associée au  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Comme les  $\lambda_i$  sont distincts deux à deux, cette matrice est inversible et la famille  $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ . Ainsi  $f$  est cyclique.
4. Soit  $x_0 \in E$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ . On montre que l'ensemble  $\{P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x_0) = 0_E\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ . Puisque les idéaux de  $\mathbb{K}[X]$  sont principaux, cet idéal est engendré par un polynôme  $\pi_{f, x_0}$ . Puisque  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ , on a nécessairement  $\deg \pi_{f, x_0} = n$ . Mais  $\pi_f$  appartient aussi à l'idéal sus-mentionné donc  $\pi_{f, x_0}$  divise  $\pi_f$ . Ainsi  $n = \deg \pi_{f, x_0} \leq \deg \pi_f \leq n$  puis  $\deg \pi_f = n$ . Comme  $f$  est diagonalisable,  $\deg \pi_f = \text{card Sp}(f)$ . On en déduit que  $\text{card Sp}(f) = n$  et donc que les valeurs propres de  $f$  sont deux à deux distinctes.

**Solution 19**

1. On montre par exemple aisément que c'est un sous-groupe de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $M \in G$ . Puisque le morphisme de groupe  $\begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow G \\ M & \longmapsto M^n \end{cases}$  ne peut être injectif puisque  $\mathbb{Z}$  est infini et que  $G$  est fini. Son noyau contient donc un entier non nul  $n$  tel que  $M^n = I_2$ . On peut même supposer  $n$  positif quitte à le changer en son opposé. Puisque le polynôme  $X^n - 1$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$  et annule  $M$ ,  $M$  est diagonalisable. On peut également ajouter que ses valeurs propres sont des racines de l'unité et en particulier des complexes de module 1.

Si  $M$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ , ses valeurs propres ne peuvent être que 1 ou  $-1$ . Dans ce cas,  $M$  est semblable à  $I_2$ ,  $-I_2$  ou  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Dans tous les cas,  $M^6 = I_2$ .

Si  $M$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ , elle l'est quand même dans  $\mathbb{C}$  et ses valeurs propres sont des complexes de module 1 conjugués



puisque  $M$  est à coefficients réels.  $M$  est donc semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$  où  $\theta \in \mathbb{R}$ . Puisque la trace est un invariant de similitude,  $2 \cos \theta = \text{tr}(M) \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $\cos$  est à valeurs dans  $[-1, 1]$ ,  $\cos \theta \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$ .

- Si  $\cos \theta = \pm 1$ ,  $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \pm 1$  et on est ramené au cas précédent (en fait,  $M$  serait diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  et on a supposé que ce n'était pas le cas).
- Si  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ , alors  $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$ . Il est alors clair que  $M^{12} = I_2$ .
- Si  $\cos \theta = \frac{-1}{2}$ , alors  $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ . Il est alors clair que  $M^{12} = I_2$ .
- Si  $\cos \theta = 0$ , alors  $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Il est alors clair que  $M^{12} = I_2$ .

### Solution 20

1. Puisque  $X^2 - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$  scindé à racines simples,  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité. Ainsi pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_k = \pm 1$  et, a fortiori,  $\lambda_k \equiv 1 [2]$ . Puisque  $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ ,  $\text{tr}(A) \equiv n [2]$ .
2. Les valeurs propres de  $A$  ne peuvent pas toutes être égales à 1 ou  $-1$  sinon,  $A$  serait semblable à  $I_n$  ou  $-I_n$  et donc égale à  $I_n$  ou  $-I_n$ . En notant  $a$  le nombre de valeurs propres égales à 1 et  $b$  le nombre de valeurs propres égales à  $-1$ . On a donc  $a + b = n$ ,  $1 \leq a \leq n - 1$  et  $1 \leq b \leq n - 1$ . Ainsi  $\text{tr}(A) = a - b$  est compris entre  $-n + 2$  et  $n - 2$  i.e.  $|\text{tr}(A)| \leq n - 2$ .

### Solution 21

1. Remarquons déjà que

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n M_{\sigma(k), k} \in \mathbb{Z}$$

Supposons que  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ . Alors  $\det(M) \det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(I_n) = 1$ . Mais d'après la remarque initiale,  $\det(M)$  et  $\det(M^{-1})$  sont entiers. Ainsi  $\det(M) = \pm 1$  i.e.  $|\det M| = 1$ .

Supposons que  $|\det(M)| = 1$ . Tout d'abord,  $\det(M) \neq 0$  donc  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . De plus, d'après la formule de la comatrice,  $M^{-1} = \pm \text{com}(M)^T$ . Les cofacteurs de  $M$  sont, au signe près, des déterminants de matrices extraites de  $M$  : ce sont donc des entiers toujours d'après notre remarque initiale. Ainsi  $M^{-1}$  est à coefficients entiers et  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ .

Enfin,  $I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$  puisque  $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  et  $\det(I_n) = 1$ . Soit  $(M, N) \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})^2$ . Alors  $MN \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  et  $|\det(MN)| = |\det(M)| |\det(N)| = 1$  donc  $MN \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ . Enfin, si  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ , alors  $M^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$  par définition de  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ .  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$  est donc bien un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

2. Comme  $X^d - 1$  est simplement scindé dans  $\mathbb{C}$  et annule  $M$ ,  $M$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ . De plus, ses valeurs propres sont des racines de l'unité : elles sont donc notamment de module 1. Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  diagonale telle que  $M = PDP^{-1}$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$A^k = \frac{1}{3^k} P(D - I_n)^k P^{-1}$$

Par inégalité triangulaire, les coefficients diagonaux de  $(D - I_n)$  sont de module inférieure ou égale à 2. On en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^k} (D - I_n)^k = 0$$

Enfin, l'application  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto PXP^{-1}$  est linéaire donc continue puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie. On en déduit que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .

3. Considérons l'application  $\varphi$  qui à une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  associe la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  dont les coefficients sont les classes de ceux de  $M$  dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . La compatibilité de la congruence avec la somme et le produit permet d'affirmer que  $\varphi$  est un morphisme d'anneaux. Le même argument permet aussi d'affirmer que, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ,  $\det(\varphi(M)) = \det(M)$  (utiliser la formule définissant le déterminant).

Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{Z})$ . Notons  $d$  son cardinal. On va montrer que l'application  $\varphi$  induit un morphisme injectif de  $G$  dans  $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . Soit  $M \in G$ . Notamment,  $|\det(M)| = 1$  d'après la première question. Alors  $\det(\varphi(M)) = \pm 1 \neq 0$  donc  $\varphi(M) \in GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . On a donc bien  $\varphi(G) \subset GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . De plus,  $\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$  pour tout  $(M, N) \in G^2$  d'après une remarque précédente. On en déduit que  $\varphi$  induit bien un morphisme de groupe de  $G$  dans  $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telle que  $\varphi(M)$  soit le neutre du groupe  $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . Ceci signifie que les coefficients de  $M - I_n$  sont des multiples de 3 donc  $A = \frac{1}{3}(M - I_n)$  est à coefficients entiers. Comme  $d$  est l'ordre de  $G$ ,  $M^d = I_n$  et la question précédente permet d'affirmer que  $(A^k)$  converge vers 0. Comme  $A$  est à coefficients entiers, la suite  $(A^k)$  est nulle à partir d'un certain rang i.e.  $A$  est nilpotente. Mais on a vu à la question précédente que  $A$  était diagonalisable donc  $A$  est nulle puis  $M = I_n$ .

En conclusion,  $\varphi$  induit bien un morphisme injectif de  $G$  dans  $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . Notamment,

$$d = \text{card } G \leq \text{card } GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \leq \text{card } \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 3^{n^2}$$

## Solution 22

1. Notons  $u_1, \dots, u_p$  les endomorphismes canoniquement associés à  $A_1, \dots, A_p$ .

- a. Les sous-espaces propres de  $u_1$  sont stables par  $u_2$  car  $u_1$  et  $u_2$  commutent. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u_1)$ . Comme  $u_2$  est diagonalisable, il induit un endomorphisme diagonalisable de  $E_\lambda(u_1)$ . Notons  $\mathcal{B}_\lambda$  une base de diagonalisation de cet endomorphisme. Comme  $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u_1)} E_\lambda(u_1)$ , la concaténation des bases  $\mathcal{B}_\lambda$  est une base de  $\mathbb{C}^n$ . On vérifie sans peine que c'est une base de diagonalisation commune de  $u_1$  et  $u_2$ . On en déduit alors que  $A_1$  et  $A_2$  sont simultanément diagonalisables.

b. On note  $\text{HR}(p)$  l'assertion :

si  $u_1, \dots, u_p$  sont des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux, alors ils sont simultanément diagonalisables.

$\text{HR}(1)$  est évidemment vraie. Supposons  $\text{HR}(p)$  vraie pour un certain  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soient alors  $u_1, \dots, u_{p+1}$  des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u_{p+1})$ . Alors  $E_\lambda(u_{p+1})$  est stable par  $u_1, \dots, u_p$ . Les endomorphismes de  $E_\lambda(u_{p+1})$  induits par  $u_1, \dots, u_p$  sont encore diagonalisables et commutent deux à deux. On peut ainsi trouver une base commune  $\mathcal{B}_\lambda$  de diagonalisation de ces endomorphismes induits. A nouveau, la concaténation des bases  $\mathcal{B}_\lambda$  pour  $\lambda \in \text{Sp}(u_{p+1})$  est une base commune de diagonalisation de  $u_1, \dots, u_{p+1}$  de sorte que  $\text{HR}(p+1)$  est vraie. Ainsi  $\text{HR}(p)$  est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

2. Montrons que  $G$  est commutatif. Remarquons que  $A^{-1} = A$  pour tout  $A \in G$ . Soit  $(A, B) \in G^2$ . Alors  $AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$ . Comme le polynôme simplement scindé  $X^2 - 1$  annule tous les éléments de  $G$ , ceux-ci sont tous diagonalisables. On peut de plus préciser que le spectre de chaque élément de  $G$  est inclus dans  $\{-1, 1\}$ .

Si l'on considère une partie finie  $F$  de  $G$  de cardinal  $p$ , la question précédente montre qu'il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  diagonalisant tous les éléments de  $F$ . L'application  $M \in A \mapsto P^{-1}MP$  est une injection de  $A$  dans le groupe  $D_n$  des matrices diagonales à coefficients diagonaux égaux à  $\pm 1$ . Ainsi  $p \leq 2^n$ .

Ainsi  $G$  est fini de cardinal inférieur à  $2^n$ .

**REMARQUE.** On peut préciser la réponse même si ce n'est pas utile pour la question suivante. Il existe une matrice  $P$  diagonalisant tous les éléments de  $G$ . Le morphisme  $M \in G \mapsto P^{-1}MP$  est une injection de  $G$  dans  $D$  donc  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $D$ . Son cardinal divise donc  $2^n$ . Il existe ainsi  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  tel que  $\text{card } G = 2^k$ .

3. Notons  $S_n$  l'ensemble des matrices  $M \in GL_n(\mathbb{C})$  telles que  $M^2 = I_n$ . On définit de la même manière  $S_m$ . Supposons qu'il existe un isomorphisme  $\varphi$  de  $GL_n(\mathbb{C})$  sur  $GL_m(\mathbb{C})$ . On vérifie sans peine que  $\varphi$  induit une bijection de  $S_n$  sur  $S_m$ . Les sous-groupes de  $GL_n(\mathbb{C})$  inclus dans  $S_n$  sont donc isomorphes aux sous-groupes de  $GL_m(\mathbb{C})$  inclus dans  $S_m$ . Notamment, le sous-groupe  $D_n$  défini dans la question précédente est isomorphe à un sous-groupe de  $GL_m(\mathbb{C})$  inclus dans  $S_m$ . Ainsi  $S_m$  contient un sous-groupe d'ordre  $2^n$ . D'après la question précédente, on a donc  $2^n \leq 2^m$ . Mais de manière symétrique  $2^m \leq 2^n$  donc  $n = m$ .

## Trigonalisabilité

### Solution 23

On fait l'hypothèse de récurrence  $\text{HR}(n)$  suivante :

Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes trigonalisables d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ , alors  $u$  et  $v$  trigonalisent dans une base commune.

**Initialisation :** HR(1) est trivialement vraie puisque, dans ce cas, la matrice de tout endomorphisme dans une base quelconque est triangulaire supérieur.

**Hérédité :** Supposons HR( $n$ ) pour un certain  $n \geq 1$ . Soient alors  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n + 1$  et  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent. Montrons tout d'abord que  $u$  et  $v$  possèdent un vecteur propre commun. Puisque  $v$  est trigonalisable,  $v$  possède au moins une valeur propre  $\lambda$ . On montre alors classiquement que le sous-espace propre  $E_\lambda = \text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_E)$  est stable par  $u$ .  $u$  induit un endomorphisme  $u_\lambda$  de  $E_\lambda$ . Comme  $u$  est trigonalisable,  $u$  annule un polynôme scindé à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . A fortiori,  $u_\lambda$  annule ce même polynôme et est donc également trigonalisable. Par conséquent,  $u_\lambda$  possède une valeur propre et donc un vecteur propre  $e_1$ . Ce vecteur  $e_1$  est donc également un vecteur propre de  $u$  et un vecteur propre de  $v$  puisqu'il appartient au sous-espace propre  $E_\lambda$  de  $v$ .

Comme  $e_1 \neq 0_E$ , on peut compléter ce vecteur en une base  $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$  de  $E$ . Les matrices de  $u$  et  $v$  dans cette base sont respectivement de la forme :

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array} \right) \quad B = \left( \begin{array}{c|ccc} \mu & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

avec  $A', B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Posons  $E' = \text{vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$  et soient  $u'$  et  $v'$  les endomorphismes de  $E'$  de matrices respectives  $A'$  et  $B'$  dans la base  $(e_2, \dots, e_{n+1})$  de  $E'$ .

On montre alors que si  $P$  est un polynôme, alors

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} P(\lambda) & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P(A') & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Comme  $u$  est trigonalisable,  $u$  annule un polynôme scindé à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et donc  $A$  annule ce même polynôme. La remarque précédente montre que  $A'$  annule également ce polynôme :  $A'$  est donc trigonalisable et  $u'$  également. On montre de même que  $v'$  est trigonalisable.

Puisque  $u$  et  $v$  commutent,  $A$  et  $B$  commutent, ce qui entraîne la commutativité de  $A'$  et  $B'$  après un calcul par blocs et enfin la commutativité de  $u'$  et  $v'$ . On peut alors appliquer HR( $n$ ) : il existe donc une base  $(e'_2, \dots, e'_{n+1})$  de  $E'$  dans laquelle les matrices de  $u'$  et  $v'$  sont triangulaires supérieures. Il suffit alors de vérifier que les matrices de  $u$  et  $v$  dans la base  $(e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$  de  $E$  sont également triangulaires supérieures.

**Conclusion :** Par récurrence, HR( $n$ ) est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

#### Solution 24

Remarquons tout d'abord que pour  $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ,  $\overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$ .

Commençons par le sens le plus simple : supposons qu'il existe  $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = S\overline{S}^{-1}$ . Dans ce cas,

$$A\overline{A} = S\overline{S}^{-1}\overline{S\overline{S}^{-1}} = S\overline{S}^{-1}\overline{S}^{-1}S = I_n$$

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur  $n$ .

Si  $n = 1$ , alors  $A = (\lambda)$  avec  $|\lambda| = 1$ . On a donc  $\lambda = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . Il suffit alors de prendre  $S = \left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)$ .

On suppose maintenant la propriété vraie à un rang  $n - 1 \geq 1$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A\overline{A} = I_n$ .

Montrons d'abord que toutes les valeurs propres de  $A$  sont de module 1. Soient  $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A = P + iQ$ . Ainsi  $(P + iQ)(P - iQ) = I_n$ . En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient  $P^2 + Q^2 = I_n$  et  $QP - PQ = 0$ . Ainsi  $P$  et  $Q$  commutent et trigonalisent dans une base commune i.e. il existe  $R \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $U, V \in \mathcal{J}_n^+(\mathbb{C})$  telles que  $P = RUR^{-1}$  et  $Q = RVR^{-1}$ . Posons  $T = U + iV$ . On a donc  $A = RTR^{-1}$  et  $\overline{A} = \overline{R}\overline{T}\overline{R}^{-1}$ . La diagonale de  $T$  contient les valeurs propres de  $A$ . Comme  $A\overline{A} = I_n$ , on en déduit que toutes les valeurs propres de  $A$  sont de module 1.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  (il en existe toujours une complexe). On a donc  $|\lambda| = 1$ . On a à nouveau  $\lambda = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . Posons  $\mu = e^{\frac{i\theta}{2}}$ , de sorte que  $\frac{\mu}{\overline{\mu}} = 1$ . Soit  $X$  un vecteur propre de  $A$  associée à la valeur propre  $\lambda$ . Dans ce cas,  $\overline{X}$  est également un vecteur propre de  $X$  associé

à la valeur propre  $\lambda$ . En effet,  $AX = \lambda X$  donc  $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$  puis  $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$ . Puisque  $A\overline{A} = I_n$ , on obtient  $\overline{X} = \overline{\lambda A X}$  puis  $A\overline{X} = \lambda \overline{X}$  puisque  $\frac{1}{\overline{\lambda}} = \lambda$ . On peut supposer  $X$  réel. En effet, les vecteurs  $X + \overline{X}$  et  $i(X - \overline{X})$  sont réels et l'un des deux est non nul. L'un de ces deux vecteurs

est donc un vecteur propre réel associé à la valeur propre  $\lambda$ . On peut compléter  $X$  en une base de  $\mathbb{C}^n$  à l'aide de vecteurs réels (ceux de la base canonique, par exemple). Notons  $P$  la matrice de cette base dans la base canonique. Posons  $B = P^{-1}AP$ . Cette matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & Y^T \\ 0 & C \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ avec } Y \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ et } C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}). \text{ On a } B\bar{B} = P^{-1}AP\bar{P}^{-1}\overline{AP} = I_n \text{ car } \bar{P} = P \text{ et } \bar{P}^{-1} = P^{-1} \text{ (P est à coefficients réels). On en}$$

déduit que  $C\bar{C} = I_{n-1}$ . D'après notre hypothèse de récurrence, il existe  $T \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$  telle que  $C = T\bar{T}^{-1}$ .

Montrons qu'il existe  $Z \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $Z - \lambda\bar{Z} = Y^T\bar{T}$ . Puisque  $B\bar{B} = 0$ , on a en particulier  $\lambda\bar{Y}^T\bar{T} + Y^T\bar{T} = 0$ . Notons  $\varphi(z) = z + \lambda\bar{z}$  et  $\psi(z) = z - \lambda\bar{z}$  pour  $z \in \mathbb{C}$ .  $\varphi$  et  $\psi$  sont des endomorphismes du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ . On vérifie que  $\varphi \circ \psi = 0$  en utilisant  $|\lambda| = 1$ . On a donc  $\text{Im } \psi \subset \text{Ker } \varphi$ .  $\varphi$  et  $\psi$  ne sont pas nuls donc  $\dim \text{Im } \psi \geq 1 \geq \dim \text{Ker } \varphi$ . Ainsi  $\text{Im } \psi = \text{Ker } \varphi$ . Les composantes de  $Y\bar{T}$  sont dans  $\text{Ker } \varphi$  donc dans  $\text{Im } \psi$ , ce qui justifie l'existence de  $Z$ .

$$\text{Posons alors } U = \begin{pmatrix} \mu & Z^T \\ 0 & T \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}. \text{ On a alors } \bar{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\mu}} & -\frac{1}{\bar{\mu}}\bar{Z}^T\bar{T}^{-1} \\ 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{pmatrix}. \text{ On vérifie alors que } U\bar{U}^{-1} = B. \text{ Il suffit alors de poser } S = PUP^{-1}$$

pour avoir  $A = S\bar{S}^{-1}$ .

## Nilpotence

### Solution 25

1. On a évidemment  $\chi_A = X^3$  donc la seule valeur propre de  $A$  est 0. Si  $A$  était diagonalisable, elle serait donc semblable à la matrice nulle et donc nulle, ce qui n'est pas. Ainsi  $A$  n'est pas diagonalisable.

2. a. On a  $B^6 = A^3 = 0$  donc  $X^6$  est un polynôme annulateur de  $B$ . On en déduit que 0 est la seule valeur propre de  $A$  donc  $\chi_A = X^3$ .

b. D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $B^3 = 0$ . A fortiori,  $A^2 = B^4 = 0$ , ce qui est absurde puisque  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

3. Notons  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  et  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^3$ . Alors  $u(e_1) = 0$ ,  $u(e_2) = e_1$  et  $u(e_3) = e_2$ . La matrice de  $u$  dans la base  $(e_2, e_1, e_3)$  est  $C$ . On en déduit que  $A$  est semblable à  $C$ .

## Polynôme minimal

### Solution 26

Remarquons que  $X^n - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$  donc le polynôme minimal  $\pi_A$  divise  $X^n - 1$ . De plus, il n'existe pas de polynôme annulateur de  $A$  de degré strictement inférieur à  $n$  sinon la famille  $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$  serait libre. On en déduit que  $\pi_A = X^n - 1$ . Or  $\pi_A$  divise  $\chi_A$  et  $\deg \chi_A = n$  donc  $\chi_A = \pi_A = X^n - 1$ . Les valeurs propres de  $A$  sont donc les racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité et sont toutes de multiplicités 1. Ainsi

$$\text{tr}(A) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \frac{e^{2i\pi} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = 0$$

### Solution 27

On notera classiquement  $\pi_M$  le polynôme minimal d'une matrice  $M$ .

1. Posons  $n = \deg \pi_A$  et  $P = X^n \pi_A \left( \frac{1}{X} \right)$ . Comme  $A$  est inversible, le coefficient constant de  $\pi_A$  est non nul et  $\deg P = n$ .  $P$  est un polynôme annulateur de  $A^{-1}$  donc  $\pi_{A^{-1}}$  divise  $P$ . En particulier,  $\deg \pi_{A^{-1}} \leq n$ . De même, en posant  $p = \deg \pi_{A^{-1}}$  et  $Q = X^p \pi_{A^{-1}} \left( \frac{1}{X} \right)$ ,  $\deg Q = p$

et on trouve que  $\pi_A$  divise  $Q$ . En particulier,  $\deg \pi_A \leq p$ .

Finalement,  $\deg \pi_{A^{-1}} = \deg P$ . En notant  $a$  le coefficient constant (non nul) de  $\pi_A$ , on a  $\pi_{A^{-1}} = \frac{1}{a}P$  car  $\pi_{A^{-1}}$  est unitaire par convention.

2. Puisque pour tout polynôme  $P$  et toute matrice  $M$  à coefficients réels

$$P(M) = 0 \iff P(M)^T = 0 \iff P(M^T) = 0$$

$A$  et  $A^T = A^{-1}$  ont le même polynôme minimal. Si ce polynôme minimal était de degré impair, il admettrait une racine réelle  $\lambda$ . Ainsi  $A$  admettrait  $\lambda$  pour valeur propre. Soit  $X$  un vecteur propre associé à cette valeur propre. On a donc  $AX = \lambda X$  et donc  $\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ . Mais comme  $A$  est orthogonale,  $\|AX\| = \|X\|$  d'où  $\lambda = \pm 1$  ( $\|X\| \neq 0$  car un vecteur propre est non nul). Ceci contredit l'énoncé. C'est donc que le polynôme minimal de  $A$  est de degré pair.

## Solution 28

1. On procède par récurrence. Tout d'abord,

$$f^0 \circ g - g \circ f^0 = 0 = 0f^0$$

Supposons que  $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors en composant par  $f$  à gauche,

$$f^{n+1} \circ g - f \circ g \circ f^n = nf^{n+1}$$

Mais

$$f \circ g = g \circ f + f$$

donc

$$f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} - f^{n+1} = nf^{n+1}$$

ou encore

$$f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = (n+1)f^{n+1}$$

Ainsi  $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  d'après le principe de récurrence.

2. D'après la question précédente, les applications linéaires  $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(f) \circ g - g \circ P(f) \end{array} \right.$  et  $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & f \circ P'(f) \end{array} \right.$  coïncident sur la base canonique de  $\mathbb{K}[X]$ . Elles sont donc égales et on en déduit le résultat voulu.

3. Si on applique la question précédente à  $P = \pi_f$  le polynôme minimal de  $f$ , on obtient  $f \circ \pi'_f(f) = 0$ . Le polynôme  $X\pi'_f$  annule donc  $f$  de sorte que  $\pi_f$  divise  $X\pi'_f$ . En considérant le degré  $p$  de  $\pi_f$  et le coefficient dominant, on a donc  $p\pi_f = X\pi'_f$ . Ainsi  $\frac{\pi'_f}{\pi_f} = \frac{p}{X}$  de sorte que  $\pi_f = X^p$ .  $f$  est donc nilpotent.

## Solution 29

1. Les deux premières colonnes de  $A$  ne sont pas colinéaires et les autres colonnes sont toutes colinéaires à la seconde. Ainsi  $\text{rg}(A) = 2$  puis  $\dim \text{Ker}(A) = n - 2$ .

2. La matrice  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable.

3. Comme  $A$  est diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre 0 est la dimension du sous-espace propre associé, c'est-à-dire  $n - 2$ .

4. Remarquons que  $\chi_A(1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ . Via l'opération  $C_1 \leftarrow 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$ ,  $\chi_A(1) = \begin{vmatrix} \alpha & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha$

où  $\alpha = -\sum_{k=2}^n k^2 < 0$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_A(x) = +\infty$ ,  $\chi_A$  admet une racine  $\lambda > 1$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que  $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - \mu)$ . Mais  $\text{tr}(A) = 1 = \lambda + \mu$  donc  $\mu = 1 - \lambda$ . On en déduit que  $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$  avec  $\lambda > 1$ .

5. Comme  $A$  est diagonalisable,  $\pi_A$  est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de  $A$ . Ainsi  $\pi_A = X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda) = X^3 - X^2 + \lambda(1 - \lambda)X$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Or  $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - 1 + \lambda)$  donc, comme vu à la question précédente,

$$\lambda(1 - \lambda) = \chi_A(1) = - \sum_{k=2}^n k^2$$

Finalement, un polynôme annulateur de  $A$  est  $X^3 - X^2 - \left(\sum_{k=2}^n k^2\right)X$ .

### Solution 30

1. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$u^2(M) = u(M) + \text{tr}(u(M))I_n = u(M) + (n+1)\text{tr}(M)I_n = (n+2)u(M) - (n+1)M$$

Ainsi  $X^2 - (n+2)X + (n+1)$  est un polynôme annulateur de  $u$ .

2. On constate que  $X^2 - (n+2)X + (n+1) = (X-1)(X-(n+1))$  est scindé à racines simples donc  $u$  est diagonalisable.
3. Le polynôme minimal  $\pi_u$  divise  $(X-1)(X-(n+1))$ . Or on a clairement  $u \neq \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$  et, comme  $n \geq 2$ ,  $u \neq (n+1)\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$  donc  $\pi_u \neq X-1$  et  $\pi_u \neq X-(n+1)$ . Ainsi  $\pi_u = (X-1)(X-(n+1))$ .  
Notamment  $\text{Sp}(u) = \{1, n+1\}$ . Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est clairement l'hyperplan des matrices de trace nulle. Le sous-espace propre associé à la valeur propre  $n+1$  est donc une droite. Comme  $u$  est diagonalisable, les multiplicités des valeurs propres de  $u$  dans le polynôme caractéristique sont égales aux dimensions des sous-espaces propres. Ainsi  $\chi_u = (X-1)^{n^2-1}(X-(n+1))$ .

**REMARQUE.** On peut vérifier que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est  $\text{vect}(I_n)$ .

### Solution 31

1. On sait que le rang de  $B$  est le rang de la famille de ses colonnes. Comme les  $n$  dernières colonnes de  $B$  sont également les  $n$  dernières, le rang de  $B$  est celui de  $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ . Mais le rang de  $B$  est également le rang de la famille de ses lignes donc  $\text{rg } B = \text{rg } A$ .
2. Une récurrence simple montre que  $B^p = \begin{pmatrix} A^p & A^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ . De plus,  $B^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ .

Soit  $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p \in \mathbb{R}[X]$ . Alors

$$\begin{aligned} P(B) &= a_0 I_{2n} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p B^p \\ &= a_0 \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \begin{pmatrix} A^p & A^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) - a_0 I_n \\ 0 & a_0 I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car  $a_0 = P(0)$ .

3. Comme  $A$  est diagonalisable, le polynôme minimal  $\pi_A$  de  $A$  est scindé à racines simples.

Supposons que  $A$  n'est pas inversible. Alors  $0 \in \text{Sp}(A)$  donc  $0$  est racine de  $\pi_A$  i.e.  $\pi_A(0) = 0$ . D'après la question précédente,  $\pi_A(B) = 0$  et donc  $B$  est diagonalisable puisque  $\pi_A$  est scindé à racines simples.

Supposons que  $A$  est inversible. Alors  $0$  n'est pas racine de  $\pi_A$ . Le polynôme  $P = X\pi_A$  est donc encore scindé à racines simples et annule  $B$  d'après la question précédente.  $B$  est encore diagonalisable.

### Solution 32

1. Il suffit de développer le déterminant définissant  $\chi_A$  par rapport à sa dernière colonne.

2. Soit  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . On a donc  $u(e_k) = e_{k+1}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Ainsi  $e_k = u^{k-1}(e_1)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Il s'ensuit que  $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1}$  est la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . En particulier, c'est une famille libre. Posons  $p = \deg \pi_A$  et supposons  $p < n$ . Posons  $\pi_A = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} c_k X^k$ . On sait que  $\pi_A = \pi_u$  annule  $u$ . Ainsi  $u^p + \sum_{k=0}^{p-1} c_k u^k = 0$ . En particulier,  $u^p(e_1) + \sum_{k=0}^{p-1} c_k u^k(e_1) = 0$ . La famille  $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq p}$  est donc liée ce qui contredit la liberté de la famille  $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1}$ . Par conséquent,  $p = n$ . Ainsi  $\deg \pi_A = \deg \chi_A$ ,  $\pi_A$  divise  $\chi_A$  et  $\pi_A$  et  $\chi_A$  sont unitaires, ce qui permet d'affirmer que  $\pi_A = \chi_A$ .

3. On sait que  $\chi_{A^T} = \chi_A = P$ . Ainsi  $\text{Sp}(A^T)$  est l'ensemble des racines de  $P$ . Soit donc  $\lambda$  une racine de  $P$ .

Alors  $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in E_\lambda(A^T)$  si et seulement si

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, x_{k+1} = \lambda x_k \\ - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k = \lambda x_{n-1} \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_k = \lambda^k x_0 \\ P(\lambda)x_0 = 0 \end{cases}$$

La dernière égalité est toujours vraie puisque  $\lambda$  est racine de  $P$ . On en déduit que  $E_\lambda(A^T) = \text{vect}((1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}))$ .

### Solution 33

1. a. Soit  $x \in E$ . Vérifions que  $I_{u,x}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ .

- Il est clair que  $0 \in I_{u,x}$ .
- Soit  $(P, Q) \in I_{u,x}^2$ . Alors

$$(P + Q)(u)(x) = P(u)(x) + Q(u)(x) = 0_E$$

donc  $P + Q \in I_{u,x}$ .

- Soit  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times I_{u,x}$ . Alors

$$(PQ)(u)(x) = P(u)(Q(u)(x)) = P(u)(0_E) = 0_E$$

donc  $PQ \in I_{u,x}$ .

Puisque  $\pi_u$  est un polynôme annulateur de  $u$ , a fortiori,  $\pi_u(u)(x) = 0_E$  donc  $\pi_u \in I_{u,x}$ . Comme  $\pi_{u,x}$  est un générateur de  $I_{u,x}$ ,  $\pi_u$  est un multiple de  $\pi_{u,x}$ .

b. Soit  $x \in E$ .  $E_{u,x}$  est l'image de l'application linéaire  $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto P(u)(x) \end{cases}$  : c'est donc un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Soit  $y \in E_{u,x}$ . Alors il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $y = P(u)(x)$ . Notons  $Q$  et  $R$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $\pi_{u,x}$ . Alors  $P = Q\pi_{u,x} + R$  puis  $y = P(u)(x) = R(u)(x)$  puisque  $Q\pi_{u,x} \in I_{u,x}$ . Or  $\deg R \leq \deg \pi_{u,x} - 1$  donc  $y \in \text{vect}((u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1})$ , ce qui prouve que  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$  est une famille génératrice de  $E_{u,x}$ .

Soit  $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$  tel que  $\sum_{k=0}^{\deg \pi_{u,x}-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$ . Posons  $R = \sum_{k=0}^{\deg \pi_{u,x}-1} \lambda_k X^k$ . On a donc  $R(u)(x) = 0_E$  i.e.  $R \in I_{u,x}$ .  $R$  est donc un multiple de  $\pi_{u,x}$  et comme  $\deg R < \deg \pi_{u,x}$ ,  $R = 0$  i.e.  $\lambda_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, \deg \pi_{u,x} - 1 \rrbracket$ . Ceci prouve que la famille  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$  est libre.

Finalement,  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$  est une base de  $E_{u,x}$ . On en déduit que  $\dim E_{u,x} = \deg \pi_{u,x}$ .

- c. Soit  $y \in E_{u,x}$ . Il existe donc  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $y = P(u)(x)$ . Alors  $u(y) = (XP)(u)(x)$  appartient également à  $E_{u,x}$ . Ainsi  $E_{u,x}$  est stable par  $u$ .

Soit  $Q \in I_{u,x}$ . Alors  $Q(u)(y) = (PQ)(u)(x) = P(u)(Q(u)(x)) = P(u)(0_E) = 0_E$  donc  $Q$  est un polynôme annulateur de  $u|_{E_{u,x}}$ . Réciproquement soit  $Q$  un polynôme annulateur de  $u|_{E_{u,x}}$ . En particulier,  $Q(u)(x) = 0_E$  donc  $Q \in I_{u,x}$ . Ainsi  $I_{u,x}$  est l'idéal annulateur de  $u|_{E_{u,x}}$  de sorte que  $\pi_{u,x} = \pi_{u|_{E_{u,x}}}$ .

2. a. Posons  $P_i = \prod_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{i\}} \pi_{u,x_j}$  pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Alors

$$P(u)(x) = \sum_{i=1}^p P(u)(x_i) = \sum_{i=1}^p P_i(u)(\pi_{u,x_i}(x_i)) = \sum_{i=1}^p P_i(u)(0_E) = 0_E$$

donc  $P \in I_{u,x}$  de sorte que  $\pi_{u,x}$  divise  $P$ .

- b. Soit  $(y_1, \dots, y_p) \in \prod_{i=1}^p E_{u,x_i}$  tel que  $\sum_{i=1}^p y_i = 0_E$ . Il existe des polynômes  $Q_1, \dots, Q_p$  de  $\mathbb{K}[X]$  tels que  $y_i = Q_i(u)(x_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On a donc

$$\sum_{j=1}^p Q_j(u)(x_j) = 0_E$$

Fixons  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . En appliquant  $P_i(u)$  à l'égalité précédente, on obtient

$$\sum_{j=1}^p P_i(u)(Q_j(u)(x_j)) = 0_E$$

Mais comme pour  $j \neq i$

$$P_i(u)(Q_j(u)(x_j)) = Q_j(u)(P_i(u)(x_j)) = Q_j(0_E) = 0_E$$

il reste  $(P_i Q_i)(u)(x_i) = 0_E$ . On en déduit que  $\pi_{u,x_i}$  divise  $P_i Q_i$ . Or  $\pi_{u,x_i}$  est premier avec  $P_i$  donc  $\pi_{u,x_i}$  divise  $Q_i$  par le théorème de Gauss. Ainsi  $y_i = Q_i(u)(x_i) = 0_E$ .

Ceci montre que  $E_{x_1}, \dots, E_{x_p}$  sont en somme directe.

- c. Par définition,  $\pi_{u,x}(x) = 0_E$  i.e.  $\sum_{i=1}^p \pi_{u,x}(x_i) = 0_E$ . Mais pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\pi_{u,x}(x_i) \in E_{u,x_i}$ . Puisque  $E_{u,x_1}, \dots, E_{u,x_p}$  sont en somme directe,  $\pi_{u,x}(x_i) = 0_E$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Ainsi  $\pi_{u,x_i}$  divise  $\pi_{u,x}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Mais comme  $\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}$  sont premiers entre eux deux à deux,  $P$  divise  $\pi_{u,x}$ . Or on a déjà vu que  $\pi_{u,x}$  divisait  $P$  donc  $P = \pi_{u,x}$  puisqu'il s'agit de deux polynômes unitaires.

Il est clair que  $E_{u,x} \subset \bigoplus_{i=1}^p E_{u,x_i}$ . De plus,

$$\dim E_{u,x} = \deg \pi_{u,x} = \deg P = \sum_{i=1}^p \deg \pi_{u,x_i} = \sum_{i=1}^p \dim E_{u,x_i} = \dim \left( \bigoplus_{i=1}^p E_{u,x_i} \right)$$

$$\text{donc } E_{u,x} = \bigoplus_{i=1}^p E_{u,x_i}.$$

3. La décomposition en facteurs irréductibles de  $\pi_u$  s'écrit

$$\pi_u = \prod_{i=1}^p M_i^{\alpha_i}$$



où  $M_1, \dots, M_p$  sont des polynômes irréductibles unitaires de  $\mathbb{K}[X]$  distincts deux à deux et  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont des entiers naturels non nuls. En particulier, les polynômes  $M_1^{\alpha_1}, \dots, M_p^{\alpha_p}$  sont premiers entre eux deux à deux. Le lemme des noyaux permet alors d'affirmer que

$$E = \text{Ker } \pi_u(u) = \bigoplus_{j=1}^p \text{Ker } M_j^{\alpha_j}(u)$$

Supposons qu'il existe  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $\text{Ker } M_i^{\alpha_i-1}(u) = \text{Ker } M_i^{\alpha_i}(u)$ . Alors le lemme des noyaux permet d'affirmer que le polynôme  $\frac{\pi_u}{M_i}$  est un polynôme annulateur de  $u$ , ce qui contredit la minimalité de  $\pi_u$ . Ainsi pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\text{Ker } M_i^{\alpha_i-1}(u) \subsetneq \text{Ker } M_i^{\alpha_i}(u)$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , il existe donc  $x_i \in (\text{Ker } M_i^{\alpha_i}(u)) \setminus (\text{Ker } M_i^{\alpha_i-1}(u))$ .

Fixons  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Puisque  $M_i^{\alpha_i}(u)(x_i) = 0_E$ ,  $\pi_{u,x_i}$  divise  $M_i^{\alpha_i}$ . Puisque  $M_i$  est irréductible, il existe un entier naturel  $\beta_i \leq \alpha_i$  tel que  $\pi_{u,x_i} = M_i^{\beta_i}$ . Mais puisque  $M_i^{\alpha_i-1}(u)(x_i) \neq 0_E$ ,  $\beta_i = \alpha_i$ . Ainsi  $\pi_{u,x_i} = M_i^{\alpha_i}$ .

Posons alors  $x = \sum_{i=1}^p x_i$ . D'après la question précédente,

$$\pi_{u,x} = \prod_{i=1}^p \pi_{u,x_i} = \prod_{i=1}^p M_i^{\alpha_i} = \pi_u$$

#### 4. On procède par implications circulaires.

- (i)  $\implies$  (ii) Supposons que  $\pi_u = \chi_u$ . On sait qu'il existe  $x \in E$  tel que  $\pi_{u,x} = \pi_u$ . En particulier,  $\dim E_{u,x} = \deg \pi_{u,x} = \deg \pi_u = \deg \chi_u = n$ . Ainsi  $E_{u,x} = E$ .
- (ii)  $\implies$  (iii) Supposons qu'il existe  $x \in E$  tel que  $E_{u,x} = E$ . Alors  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$  est une base de  $E_{u,x} = E$ . En posant  $u^n(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)$ , la matrice de  $u$  dans cette base est bien de la forme voulue.
- (iii)  $\implies$  (i) Supposons qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme de l'énoncé. Si on note  $x$  le premier vecteur de cette base, alors cette base est  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ . Ainsi  $E = \text{vect}(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1} \subset E_{u,x}$ . Puisqu'on a évidemment  $E_{u,x} \subset E$ , on a alors  $E_{u,x} = E$ . En particulier,  $\deg \pi_{u,x} = \dim E_{u,x} = n$ . Puisque  $\pi_{u,x}$  divise  $\pi_u$  qui lui-même divise  $\chi_u$  et que  $\deg \chi_u = n$ , il s'ensuit que  $\pi_{u,x} = \pi_u = \chi_u$ .

#### Solution 34

1. On constate que  $U^2 = nU$  donc  $X^2 - nX = X(X - n)$  est un polynôme annulateur de  $U$ . Or ni  $X$  ni  $X - n$  n'annulent  $U$ . Donc  $\pi_U = X(X - n)$ .
2. On en déduit que  $U$  est diagonalisable ( $\pi_U$  est scindé à racines simples) et  $\text{Sp}(U) = \{0, n\}$ . De plus, il est clair que  $\text{rg } U = 1$  donc  $\dim E_0(u) = \dim \text{Ker } U = n - 1$ . Par conséquent,  $\dim E_n(U) = 1$ . Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On vérifie que  $e_1 - e_i$  appartient à  $E_0(U)$  pour  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Ces vecteurs sont clairement linéairement indépendants et  $\dim E_0(U) = n - 1$  donc ils forment une base de  $E_0(U)$ . Soit  $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients valent 1. Alors  $v \in E_n(U)$  et  $\dim E_n(U) = 1$  donc  $(v)$  est une base de  $E_n(U)$ . En notant  $P = \begin{pmatrix} e_1 - e_2 & \dots & e_1 - e_n & v \end{pmatrix}$  et  $D$  la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position  $(n, n)$  qui vaut 1, on a  $U = PDP^{-1}$ .

#### Solution 35

1. On calcule le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
 \chi_{A_m}(X) &= \begin{vmatrix} X+m+1 & -m & -2 \\ m & X-1 & -m \\ 2 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} X+m-1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ X+m-1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\
 &= (X+m-1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} & \text{en factorisant la première colonne} \\
 &= (X+m-1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 0 & 0 & X+m-1 \end{vmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 &= (X+m-1)^2(X-1)
 \end{aligned}$$

On traite d'abord le cas  $m = 0$ . Alors  $\chi_{A_0} = (X-1)^3$ . Comme  $\pi_{A_0}$  divise  $\chi_{A_0}$  et est unitaire,  $\pi_{A_0}$  vaut  $(X-1)$ ,  $(X-1)^2$  ou  $(X-1)^3$ . On  $M \neq I_3$ ,  $\pi_{A_0} \neq X-1$ . Un calcul montre que  $(A_0 - I_3)^2 = 0$  donc  $\pi_{A_0} = (X-1)^2$ .

On suppose ensuite  $m \neq 0$ . Puisque  $\text{Sp}(A_m) = \{1, 1-m\}$  et  $\pi_{A_m}$  divise  $\chi_{A_m}$ ,  $\pi_{A_m}$  vaut  $(X-1)(X+m-1)$  ou  $(X-1)(X+m-1)^2$ . Un calcul donne

$$(A - I_3)(A + (m-1)I_3) = \begin{pmatrix} m(2-m) & 0 & m(m-2) \\ 0 & 0 & 0 \\ m(2-m) & 0 & m(m-2) \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est nulle que si  $m = 2$ . On en déduit que  $\pi_{A_2} = (X+1)(X-1)$  et si  $m \neq 2$ ,  $\pi_{A_m} = (X-1)(X+m-1)^2$ .

On récapitule :

- $\pi_{A_0} = (X-1)^2$ ;
- $\pi_{A_2} = (X-1)(X+1)$ ;
- $\pi_{A_m} = (X-1)(X+m-1)^2$  si  $m \notin \{0, 2\}$ .

### Solution 36

Notons  $\pi_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}[X]$  le polynôme minimal de  $A$  considérée comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\pi_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X]$  le polynôme minimal de  $A$  considérée comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$\pi_{\mathbb{R}}$  peut être vu comme un polynôme à coefficients complexes annihilant  $A$  donc  $\pi_{\mathbb{C}}$  divise  $\pi_{\mathbb{R}}$  (dans  $\mathbb{C}[X]$ ).

Notons  $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$  le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de  $\pi_{\mathbb{C}}$ . Comme  $\pi_{\mathbb{C}}$  annule  $A$  et  $A$  est à coefficients réels, on montre aisément que  $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$  annule également  $A$ . On en déduit que  $\pi_{\mathbb{A}}$  divise  $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$  (dans  $\mathbb{C}[X]$ ). Mais comme  $\pi_{\mathbb{C}}$  et  $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$  sont unitaires et de même degré, ils sont égaux. On en déduit que  $\pi_{\mathbb{C}}$  est à coefficients réels et annule  $A$ . Ainsi  $\pi_{\mathbb{R}}$  divise  $\pi_{\mathbb{C}}$  (dans  $\mathbb{R}[X]$  et a fortiori dans  $\mathbb{C}[X]$ ). Finalement,  $\pi_{\mathbb{C}}$  et  $\pi_{\mathbb{R}}$  se divisent l'un l'autre (dans  $\mathbb{C}[X]$ ) et sont unitaires donc ils sont égaux.

### Solution 37

$X^n - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Comme  $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$  est libre, il n'existe pas de polynôme annulateur de  $A$  de degré strictement inférieur à  $n$ . Ainsi  $\pi_A = X^n - 1$ . De plus  $\pi_A \mid \chi_A$  et  $\deg \chi_A = n$  donc  $\chi_A = \pi_A = X^n - 1$ . Le coefficient de  $X^{n-1}$  dans  $\chi_A$  est  $-\text{tr}(A)$ . Comme  $n \geq 2$ ,  $\text{tr}(A) = 0$ .

### Solution 38

1. Cf. cours.

2. Comme  $\mu_f(f) = 0$ , le lemme des noyaux montre que

$$E = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E)$$

Si on avait  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = \{0\}$ , on aurait  $\text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E) = E$  et  $X^2 + 4$  serait donc un polynôme annulateur de  $E$ , ce qui contredirait la définition du polynôme minimal. Ainsi  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \neq \{0\}$ . On prouve de la même manière que  $\text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E) \neq \{0\}$ . Il existe donc des vecteurs non nuls  $x$  et  $y$  de  $E$  appartenant respectivement à  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E)$ . On a alors  $f^2(x) = -x$  et  $f^2(y) = -4y$ .

3. Montrons que  $(x, f(x))$  est une famille libre de  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ . On sait que déjà que  $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ . Comme  $f^2 + \text{Id}_E$  commute avec  $f$ ,  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$  est stable par  $f$  de sorte que  $f(x) \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ . Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\alpha x + \beta f(x) = 0$ . En appliquant  $f$ , on obtient  $\alpha f(x) + \beta f^2(x) = 0$  ou encore  $\alpha f(x) - \beta x = 0$ . Alors

$$\alpha(\alpha x + \beta f(x)) - \beta(\alpha f(x) - \beta x) = (\alpha^2 + \beta^2)x = 0$$

Comme  $x \neq 0$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  puis  $\alpha = \beta = 0$  car  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels. Ainsi  $(x, f(x))$  est une famille libre de  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ .

On montre de la même manière que  $(y, f(y))$  est une famille libre de  $\text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E)$ . Ainsi  $\dim \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \geq 2$  et  $\dim \text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E) \geq 2$ . Or  $E = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E)$  donc  $\dim E = \dim \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) + \dim \text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E) = 4$ . On en déduit que  $\dim \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = \dim \text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E) = 2$  puis que  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$  sont des bases respectives de  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E)$ . A nouveau,  $E = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E)$  donc  $(x, f(x), y, f(y))$  est une base de  $E$  (adaptée à la décomposition en somme directe précédente).

La matrice de  $f$  dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Solution 39

1. Comme les  $a_i$  ne sont pas nuls, les  $n - 1$  premières colonnes de  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$  sont non nulles et colinéaires et la dernière colonne n'est pas colinéaire aux précédentes. On en déduit que  $\text{rg}(f) = 2$ .
2. D'après le théorème du rang  $\dim \text{Ker } f = n - 2$ . On en déduit que 0 est une valeur propre de  $f$  de multiplicité supérieure ou égale à  $n - 2$ . Ainsi  $X^{n-2}$  divise  $\chi_f$ . Comme  $\chi_f$  est unitaire de degré  $n$ , il existe bien  $P \in \mathbb{R}[X]$  unitaire tel que  $\chi_f = X^{n-2}P$  et  $\deg P = 2$ .

**REMARQUE.** Comme  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable de même que  $f$ . On en déduit que 0 est valeur propre de multiplicité exactement  $n - 2$ . Ainsi 0 n'est pas racine de  $P$  ou encore  $P(0) \neq 0$ .

3. Il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $P = X^2 + \alpha X + \beta$ . On sait que le coefficient de  $X^{n-1}$  dans  $\chi_f$  est  $-\text{tr}(f)$  donc  $\alpha = -\text{tr}(f) = -a_1$ .
4. Il est clair que

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad f(e_i) = a_{n+1-i}e_n \quad \text{et} \quad f(e_n) = \sum_{i=1}^n a_{n+1-i}e_i$$

On en déduit que

$$f^2(e_n) = \sum_{i=1}^n a_{n+1-i}f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n+1-i}^2 e_n + a_1 f(e_n) = a_1 f(e_n) + S e_n$$

$$\text{en posant } S = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n+1-i}^2 = \sum_{i=2}^n a_i^2.$$

5. D'après la question précédente, le sous-espace vectoriel  $G = \text{vect}(e_n, f(e_n))$  est stable par  $f$ . De plus,  $f(e_n) = \sum_{i=1}^n a_{n+1-i}e_i$  n'est pas colinéaire à  $e_n$  car  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre et les  $a_i$  sont non nuls. Ainsi  $(e_n, f(e_n))$  est une base de  $G$  et la matrice de l'endomorphisme  $f_G$  de  $G$  induit par  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & S \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$ . D'après le cours,  $\chi_{f_G} = X^2 - a_1 X - S$  divise  $\chi_f = X^{n-2}P$ . Comme  $\chi_{f_G}(0) = -S \neq 0$ ,  $\chi_{f_G}$  est premier avec  $X^{n-2}$ . On en déduit que  $\chi_{f_G}$  divise  $P$  d'après le lemme de Gauss. Comme  $\chi_{f_G}$  et  $P$  sont unitaires et de degré 2,  $\chi_{f_G} = P$  puis  $\chi_f = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - S)$ .

6. La matrice  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est symétrique réelle donc diagonalisable, de même que  $f$ . Le polynôme  $P$  est de discriminant  $a_1^2 + 4S > 0$  donc il est scindé à racines simples. De plus, 0 n'est pas racine de  $P$ . Comme  $f$  est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et possède les mêmes racines que  $\chi_f$ . On en déduit que  $\pi_f = XP = X(X^2 - a_1X - S)$ .

#### Solution 40

Comme  $AB$  est diagonalisable, son polynôme minimal  $\pi_{AB}$  est scindé à racines simples. De plus,  $AB$  est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de  $A$  et n'est donc pas une racine de  $\pi_{AB}$ .

Comme  $\pi_{AB}(AB) = 0$ ,  $B\pi_{AB}(AB)A = 0$  ou encore  $P(BA) = 0$  avec  $P = X\pi_{AB}$ . Or  $\pi_{AB}$  est scindé à racines simples et 0 n'est pas racine de  $\pi_{AB}$  donc  $P$  est encore scindé à racines simples. On en déduit que  $BA$  est diagonalisable.

#### Solution 41

Supposons que  $u$  est diagonalisable. Il existe alors une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice  $D$  de  $u$  est diagonale. La matrice de  $u^2$  dans cette même base est la matrice diagonale  $D^2$ . Ainsi  $u^2$  est diagonalisable.

Supposons  $u^2$  diagonalisable. Le polynôme minimal  $\pi_{u^2}$  de  $u^2$  est alors scindé à racines simples. Il existe donc des complexes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  distincts deux à deux tels que  $\pi_{u^2} = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ . Comme  $u \in \text{GL}(E)$ ,  $u^2 \in \text{GL}(E)$  et aucun des  $\lambda_i$  n'est nul. Notons  $\mu_i$  une racine carrée (non nulle) de  $\lambda_i$ . Posons

$$P = \prod_{i=1}^r (X^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^r (X - \mu_i)(X + \mu_i)$$

Comme les  $\lambda_i$  sont distincts deux à deux et non nuls, les  $\pm\mu_i$  sont également distincts deux à deux de sorte que  $P$  est scindé à racines simples. De plus,

$$P(u) = \pi_{u^2}(u^2) = 0$$

donc  $u$  est diagonalisable.

#### Solution 42

1. Sachant que pour deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $(AB)^T = B^T A^T$ , on prouve aisément par récurrence que  $(A^k)^T = (A^T)^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Soit  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ . Par linéarité de la transposition,

$$P(A)^T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (A^k)^T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (A^T)^k = P(A^T)$$

2. **Première méthode.** Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$P(A) = 0 \iff P(A)^T = 0 \iff P(A^T) = 0$$

Ainsi  $A$  et  $A^T$  possèdent le même idéal annulateur. Comme le polynôme minimal est l'unique générateur unitaire de cet idéal,  $\pi_A = \pi_{A^T}$ .

**Deuxième méthode.**  $\pi_A(A^T) = \pi_A(A)^T = 0^T = 0$  donc  $\pi_{A^T}$  divise  $\pi_A$ . En appliquant ceci à  $A^T$ ,  $\pi_{(A^T)^T} = \pi_A$  divise  $\pi_{A^T}$ . Comme  $\pi_A$  et  $\pi_{A^T}$  sont unitaires par définitions,  $\pi_A = \pi_{A^T}$ .

#### Solution 43

1. On a clairement  $\chi_M = \chi_A^2$  (déterminant triangulaire par blocs). Les polynômes  $\chi_M$  et  $\chi_A$  ont donc les mêmes racines. Ainsi  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(M)$ .
2. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ nA^n & A^n \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ AP'(A) & P(A) \end{pmatrix}$$

3. Supposons que  $M$  soit diagonalisable. Son polynôme minimal  $\pi_M$  est donc scindé à racines simples. D'après la question précédente,  $\pi_M$  et  $X\pi'_M$  annulent  $A$ . Ainsi  $\pi_A$  divise  $\pi_M$  et  $X\pi'_M$ . Comme  $\pi_M$  est scindé à racines simples,  $\pi_M \wedge \pi'_M = 1$ . Or  $\pi_A$  divise  $\pi_M$  donc  $\pi_A \wedge \pi'_M = 1$  également. D'après le lemme de Gauss,  $\pi_A$  divise  $X$  i.e.  $\pi_A = X$  puis  $A = 0$ . Réciproquement, si  $A = 0$ ,  $M = 0$  est diagonalisable.

#### Solution 44

1. Dire que  $p = 0$  équivaut à dire que  $\pi_u(0) \neq 0$ , ou encore que  $0 \notin \text{Sp}(u)$  ou enfin que  $u \in \text{GL}(E)$ .
2. Remarquons que  $\pi_u = X^p Q$  où  $0$  n'est pas racine de  $Q$ . Ainsi  $X^p \wedge Q = 1$ . D'après le lemme des noyaux,  $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Ker } Q(u)$ . De plus,  $Q(u) \circ u^p = \pi_u(u) = 0$  donc  $\text{Im}(u^p) \subset \text{Ker } Q(u)$ . Enfin, d'après le théorème du rang,  $\dim \text{Im}(u) = \dim(E) - \dim \text{Ker } u = \dim \text{Ker } Q(u)$  donc  $\text{Im}(u^p) = \text{Ker } Q(u)$ , ce qui conclut.
3. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $E = \text{Ker}(u^k) \oplus \text{Im}(u^k)$ . Notons  $R$  le polynôme minimal de  $u|_{\text{Im } u^k}$ . Alors  $X^k R$  annule  $u$  sur  $\text{Ker } u^k$  et sur  $\text{Im } u^k$  donc sur  $E$ . On en déduit que  $\pi_u$  divise  $X^k R$ . Par transitivité,  $X^p$  divise  $X^k R$ . Or, comme  $k \geq 1$ ,

$$\text{Ker } u|_{\text{Im } u^k} = \text{Ker } u \cap \text{Im } u^k \subset \text{Ker } u^k \cap \text{Im } u^k = \{0\}$$

Ainsi  $0$  n'est pas valeur propre de  $u|_{\text{Im } u^k}$  donc n'est pas racine de  $R$ . Par conséquent,  $X^p \wedge R = 1$ . D'après le lemme de Gauss,  $X^p$  divise  $X^k$  donc  $p \leq k$ .

## Exponentielles

#### Solution 45

1. Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie, l'endomorphisme  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T$  est continu. En notant  $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$ , on a donc

$$\begin{aligned} \exp(A^T) &= \left( \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p \right)^T \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p^T \quad \text{par continuité de la transposition} \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \right)^T \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{(A^k)^T}{k!} \quad \text{par linéarité de la transposition} \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{(A^T)^k}{k!} \quad \text{par propriété de la transposition} \\ &= \exp(A^T) \end{aligned}$$

2. Puisque  $A$  est symétrique,  $A^T = A$ . Ainsi, d'après la question précédente,

$$(\exp(A))^T = \exp(A^T) = \exp(A)$$

de sorte que  $\exp(A)$  est symétrique.

3. Puisque  $\frac{1}{2}A$  commute avec elle-même

$$\exp(A) = \exp(A/2 + A/2) = \exp(A/2)^2$$

Par propriété du déterminant,

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(A/2)^2) = \det(\exp(A/2))^2 \geq 0$$

De plus,  $\exp(A)$  est inversible puisque  $\exp(A)\exp(-A) = \exp(0) = I_n$  ( $A$  et  $-A$  commutent) donc  $\det(\exp(A)) \neq 0$ . Ainsi  $\det(\exp(A)) > 0$ .

4.

$$\begin{aligned}
\exp(A)^T \exp(A) &= \exp(A^T) \exp(A) && \text{d'après la première question} \\
&= \exp(-A) \exp(A) && \text{car } A \text{ est antisymétrique} \\
&= \exp(-A + A) && \text{car } A \text{ et } -A \text{ commutent} \\
&= \exp(0) = I_n
\end{aligned}$$

Ainsi  $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$ . Mais la question précédente prouve que  $\det(\exp(A)) > 0$  donc  $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$ .

**Solution 46****Méthode n°1**

On sait que  $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$ . On effectue la division euclidienne de  $X^n$  par  $\chi_A$ . Il existe un polynôme  $Q_n$  et deux réels  $a_n$  et  $b_n$  tels que

$$X^n = \chi_A Q_n + a_n X + b_n$$

Après évaluation en 2 et 3, on obtient le système  $\begin{cases} 2a_n + b_n = 2^n \\ 3a_n + b_n = 3^n \end{cases}$ . On en déduit que  $a_n = 3^n - 2^n$  et  $b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ . Ainsi, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = \chi_A(A)Q_n(A) + a_n A + b_n I_2 = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I_2$$

Par conséquent,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \right) A + \left( 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \right) I_2 = (e^3 - e^2)A + (3e^2 - 2e^3)I_2 = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

**Méthode n°2**

Comme  $\chi_A$  est scindé à racines simples,  $A$  est diagonalisable. De plus,  $\text{Sp}(A) = \{2, 3\}$ . On calcule sans peine  $E_2(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  et

$E_3(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ . Ainsi, en posant  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ , on a  $A = PDP^{-1}$  puis

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Un rapide calcul donne  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  puis

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

**Solution 47****Méthode n°1**

On calcule  $\chi_A = (X - 2)^2(X - 3)$ . On effectue la division euclidienne de  $X^n$  par  $\chi_A$ . Il existe un polynôme deux polynômes  $Q_n$  et  $R_n$  tels que

$$X^n = \chi_A Q_n + R_n \quad \text{et} \quad \deg R_n < 3$$

Alors 2 est racine double de  $X^n - R_n$  et 3 est racine simple de  $X^n - R_n$  ce qui donne

$$(X^n - R_n)(2) = (X^n - R_n)(3) = (X^n - R_n)'(3) = 0$$

En notant  $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$  avec  $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ , on obtient le système

$$\begin{cases} 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \\ 6a_n + b_n = 3n^{n-1} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a_n = 3^{n-1}n - 3^n + 2^n \\ b_n = 6 \cdot 3^n - 5 \cdot 3^{n-1}n - 6 \cdot 2^n \\ c_n = 9 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^{n-1}n - 8 \cdot 3^n \end{cases}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = \chi_A(A)Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$$

Par conséquent,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \right) A^2 + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} \right) A + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} \right) I_3 = e^2 A^2 + (e^3 - 6e^2)A + (9e^2 - 2e^3)I_3 = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 10e^2 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 9e^2 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 11e^2 \end{pmatrix}$$

## Méthode n°2

Comme  $\chi_A$  est scindé,  $A$  est trigonalisable. De plus,  $\text{Sp}(A) = \{2, 3\}$ . On calcule sans peine  $E_2(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$  et  $E_3(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Enfin, on recherche  $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  tel que

$$AU = 2U + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On trouve  $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $A = PTP^{-1}$  en posant

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $\exp(A) = P \exp(T) P^{-1}$ . Or

$$\exp \left( \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) = \exp \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \exp \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 10e^2 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 9e^2 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 11e^2 \end{pmatrix}$$

**Solution 48**

Notons  $p$  l'indice de nilpotence de  $u$ . Alors

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{u^n}{n!}$$

Remarquons que

$$\exp(u) - \text{Id}_E = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^n}{n!} = \left( \sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^{n-1}}{n!} \right) \circ u = u \circ \left( \sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^{n-1}}{n!} \right)$$

On en déduit automatiquement que  $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(\exp(u) - \text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(\exp(u) - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(u)$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(\exp(u) - \text{Id}_E)$ . On a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{u^k(x)}{k!} = 0_E$$

Supposons  $u(x) \neq 0_E$ . Notons alors  $\ell$  le plus grand entier naturel non nul vérifiant  $u^\ell(x) \neq 0_E$ . En appliquant  $u^{\ell-1}$  à la dernière relation, on obtient  $u^\ell(x) = 0_E$ , ce qui est contradictoire. On en déduit que  $u(x) = 0_E$  i.e.  $x \in \text{Ker}(u)$ . Par double inclusion,  $\text{Ker}(\exp(u) - \text{Id}_E) = \text{Ker}(u)$ . D'après le théorème du rang,  $\text{rg}(\exp(u) - \text{Id}_E) = \text{rg}(u)$ . Or  $\text{Im}(\exp(u) - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(u)$  donc  $\text{Im}(\exp(u) - \text{Id}_E) = \text{Im}(u)$ .