

# DEVOIR SURVEILLÉ N°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 – EPITA 2025 - Mathématiques - Option

Dans ce problème,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou le corps  $\mathbb{C}$ ,  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2 et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . La matrice identité d'ordre  $n$  est notée  $I_n$ , et  $GL_n(\mathbb{K})$  désigne l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite scalaire lorsqu'elle est de la forme  $\lambda I_n$  où  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

La topologie de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est définie à l'aide de l'une quelconque de ses normes équivalentes. Pour une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on appelle classe de similitude de  $M$  l'ensemble  $\mathcal{S}(M)$  constitué de toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui sont semblables à  $M$  :

$$\mathcal{S}(M) = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{K})\}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés topologiques des classes de similitude des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### I Le cas des matrices d'ordre 2

**1** Déterminer la classe de similitude d'une matrice scalaire de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

**2** Pour tout  $k \in \mathbb{K}$ , on pose

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

**2.a** Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{K}$ , les matrices  $E_k$  et  $F_k$  sont inversibles et déterminer leurs inverses.

**2.b** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Calculer, pour tout  $k \in \mathbb{K}$ , les matrices  $E_k A E_k^{-1}$  et  $F_k A F_k^{-1}$ .

**2.c** Montrer que la classe de similitude de  $A$  est bornée si, et seulement si,  $A$  est une matrice scalaire.

Dans la suite de cette partie, on fixe une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  et on cherche à quelle condition sa classe de similitude est fermée.

**3** On suppose dans cette question que  $A$  a deux valeurs propres distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans  $\mathbb{K}$ . Soit  $(M_k)_{k \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{S}(A)$  qui converge vers une matrice  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

**3.a** Soit  $i \in \{1, 2\}$ . En considérant la suite  $(\det(M_k - \lambda_i I_2))_{k \geq 0}$ , montrer que  $\det(B - \lambda_i I_2) = 0$ .

**3.b** En déduire que  $B \in \mathcal{S}(A)$  et conclure que  $\mathcal{S}(A)$  est fermée.

**4** On suppose dans cette question que  $A$  a une seule valeur propre  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$  et que  $A$  n'est pas une matrice scalaire.

**4.a** Montrer que  $A$  est trigonalisable, puis qu'elle est semblable à toute matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{K}^*$$

**4.b** En déduire que la classe de similitude de  $A$  n'est pas fermée.

**5** Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $A$  pour que  $\mathcal{S}(A)$  soit fermée.

**6** Dans cette question, on suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**6.a** Montrer que le spectre réel de  $A$  est vide si, et seulement si,  $4 \det(A) - (\operatorname{tr}(A))^2 > 0$ .

Dans la suite de la question 6, on suppose cette condition réalisée.

**6.b** On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice dans la base canonique  $(e_1, e_2)$  est  $A$ . Montrer que  $(e_1, u(e_1))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et que la matrice de  $u$  dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$$

**6.c** Soit  $(M_k)_{k \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{S}(A)$  qui converge vers une matrice  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $B$  a à la fois la même trace et le même déterminant que  $A$ . En déduire que  $\mathcal{S}(A)$  est fermée.

**7** Conclure sur l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dont la classe de similitude est fermée.

## II Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

**8** Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$ . Montrer que si, pour tout  $x \in \mathbb{K}^n$ ,  $x$  et  $u(x)$  sont liés, alors  $u$  est une homothétie. On pourra raisonner avec la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{K}^n$  et considérer  $u(e_1 + e_i)$  pour  $i \in \{2, \dots, n\}$ .

**9** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice qui n'est pas une matrice scalaire et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé. Montrer qu'il existe un vecteur  $x$  de  $\mathbb{K}^n$  tel que la famille  $(x, u(x))$  est libre. En déduire que pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}^*$ , il existe une base de  $\mathbb{K}^n$  dans laquelle la matrice de  $u$  a pour première colonne

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$$

**10** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la classe de similitude d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  soit bornée.

**11** Existe-t-il une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  invariante par similitude, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \|PMP^{-1}\| = \|M\|$$

## III Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est fermée

Dans cette question,  $A$  désigne une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**12** On suppose dans cette question que  $A$  est diagonalisable. Soit  $(M_k)_{k \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{S}(A)$  qui converge vers une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**12.a** Montrer que l'application  $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ M & \longmapsto \chi_M(X) \end{cases}$  qui à tout élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  associe son polynôme caractéristique, est continue.

**12.b** Montrer que tout polynôme annulateur de  $A$  annule aussi  $B$ . En déduire que  $B$  est diagonalisable.

**12.c** Conclure que  $\mathcal{S}(A)$  est fermée.

- 13** On suppose dans cette question que  $\mathcal{S}(A)$  est fermée. On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $A$ , et on considère une base  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure. On notera  $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  cette matrice.

**13.a** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $B_k = \left(b_1, \frac{b_2}{k}, \dots, \frac{b_n}{k^{n-1}}\right)$  est une base de  $\mathbb{C}^n$  et écrire la matrice de  $u$  dans cette base en fonction des coefficients de  $T$ .

**13.b** En déduire que  $A$  est diagonalisable.

## IV Une classe de similitude est toujours d'intérieur vide

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- 14** On pose  $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = \text{tr}(A)\}$ .  
Quelle est la structure de  $\mathcal{T}$ ? Montrer que  $\mathcal{T}$  est d'intérieur vide.
- 15** En déduire que  $\mathcal{S}(A)$  est d'intérieur vide.

## Problème 2 – CCINP Maths 2 MP 2020

Dans ce problème,  $E$  est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de norme associée  $\| \cdot \|$ .

Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est une similitude de  $E$  lorsqu'il existe un réel  $k > 0$  tel que pour tout vecteur  $x$  de  $E$ ,  $\|u(x)\| = k\|x\|$ . On dira que  $u$  est une similitude de rapport  $k$ .

On notera  $\text{Sim}(E)$  l'ensemble des similitudes de  $E$ .

$O(E)$  désigne l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$ .

L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

### I Exemples, propriétés

**1** Démontrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  est, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , la matrice d'une similitude  $u$  dont on précisera le rapport.

**2** Démontrer que tout élément de  $\text{Sim}(E)$  est bijectif et établir que  $\text{Sim}(E)$ , muni de la loi de composition, est un groupe.

**3** Soient  $u$  un endomorphisme de  $E$ ,  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et  $A$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Démontrer que  $u$  est une isométrie vectorielle de  $E$ , si et seulement si,  $A^T A = I_n$ . Caractériser par une relation matricielle une similitude de rapport  $k$ .

**4** Démontrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  d'une similitude  $u$  dont on donnera le rapport. Donner la matrice de la similitude  $u^{-1}$ .

**5** Soit  $u \in \text{Sim}(E)$ . Vérifier que, pour tout élément  $f$  de  $O(E)$ ,  $u^{-1} \circ f \circ u \in O(E)$ .

**6** On appelle sphère de centre 0 et de rayon  $r > 0$  l'ensemble des vecteurs  $x$  de  $E$  tels que  $\|x\| = r$ . Démontrer que si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  tel que l'image par  $u$  de toute sphère de  $E$  de centre 0 est une sphère de  $E$  de centre 0, alors  $u$  est une similitude de  $E$ . On pourra remarquer que, pour tout vecteur  $y$  non nul,  $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$ .

### II Assertions équivalentes

**7** On rappelle qu'une homothétie vectorielle de  $E$  est une application de la forme  $\alpha \text{Id}_E$ . Démontrer que  $u \in \text{Sim}(E)$  si et seulement si,  $u$  est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de  $E$  et d'un élément de  $O(E)$ .

**8** Écrire la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle non nulle de  $\mathbb{R}^2$  et de la matrice d'une isométrie vectorielle de  $\mathbb{R}^2$  dont on précisera la nature.

**9** Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

En déduire que  $u$  est une similitude de rapport  $k$ , si et seulement si, pour tout couple  $(x, y)$  de vecteurs de  $E$ ,  $\langle u(x), u(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle$ .

- 10** Démontrer que, si  $u$  est une similitude de rapport  $k$ , alors, pour tout couple  $(x, y)$  de vecteurs de  $E$ ,

$$\langle x, y \rangle = 0 \implies \langle u(x), u(y) \rangle = 0$$

On dit que l'endomorphisme  $u$  conserve l'orthogonalité.

- 11** Réciproquement, on suppose que  $u$  est un endomorphisme de  $E$  conservant l'orthogonalité. Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Démontrer que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i + e_j, e_i - e_j \rangle = 0$$

puis que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$$

On note  $k$  la valeur commune prise par tous les  $\|u(e_i)\|$ . Démontrer que  $u$  est une similitude de rapport  $k$ .

- 12** Soit  $u$  une application de  $E$  dans  $E$  (non supposé linéaire) telle qu'il existe un réel  $k > 0$  pour lequel :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle$$

Démontrer que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ , puis que  $u$  est une similitude de  $E$ .