Suites de fonctions

Exercice 1 ★★★ ENS MP 2010

Soient $d \in \mathbb{N}$ et (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) (P_n) converge dans $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$.

(ii) (P_n) converge simplement sur $[0, 1]$.

(iii) (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 2 ★★★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $p \in \mathbb{N}$. On considère une suite (P_n) de fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à p qui converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f.
Montrer que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p et que (P_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Exercice 3 ★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f^{(n)})$ des dérivées successives converge uniformément vers une fonction φ sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de φ ?

Exercice 4 ★★ CCP MP

On pose $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.

2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$?

3. Soit g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(0)$$

Exercice 5 ★★★★ Théorème de Dini

1. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$, alors la convergence est uniforme.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes, réelles et continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$, alors la convergence est uniforme.

Exercice 6 ★★

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & 2x(1-x) \end{array}\right.$. On définit la suite de fonctions (f_n) par $f_0 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite (f_n).

Exercice 8 ★★

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 ★★★

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^n(x)\cos(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 ★★★

Soit (P_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

- $P_0(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$;
- $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

3. En déduire que la suite (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 11 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f à déterminer.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.

Exercice 12 ★

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : x \in [0,1] \mapsto n^\alpha x^n (1-x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.

Exercice 13 ★

On pose $f_n : x \mapsto \frac{\ln(1+nx)}{1+n^2x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Sur quelle partie D de $\mathbb{R}$ la suite de fonctions (f_n) converge-t-elle simplement ?

2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur D ?

Exercice 14 **Banque Mines-Ponts MP 2019**

Soit f une fonction réelle continue définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $h_n : x \mapsto \frac{f(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction h continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x+y) = h(x) + h(y)$.

3. Qu'en déduire sur h ?

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|h_{n+1}(x) - f(x)| \leq \frac{M}{2^{n+1}} + |h_n(x) - f(x)|$$

En déduire que $h - f$ est bornée.

5. Conclure que f peut s'écrire comme somme d'une homothétie vectorielle et d'une fonction bornée. Unicité ?

Exercice 15 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2016**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

2. Y-a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 16 ★★ **ENSEA/ENSIIE MP 2016**

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-2,2],\ f_n(x) = \frac{n(x^2-4)}{1+n(x+2)}$$

Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,2]$ et sur $[-2,2]$.

Exercice 17 ★★★

On définit une suite de fonctions (f_n) en posant $f_0(x) = \sin(x)$ et $f_{n+1}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}f_n(x)\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Séries de fonctions

Exercice 18 ★★

On note $\mathrm{S}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{nx^{2n-1}}{1-x^{2n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
3. Étudier les variations de S sur D.
4. Étudier les limites de S aux bornes de D.

Exercice 19 ★★ **Mines-Ponts PC**

On pose $f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+x}}\right) - 2\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geq 1} f_{n+1} - f_n$.
2. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 20 ★★★

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $f_n : x \mapsto \sin nx$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 ★★★★

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. On pose $f_n : x \mapsto \sin nx$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la suite (na_n) converge vers 0.

Exercice 22 ★★★ **Mines-Télécom MP 2018**

1. Déterminer l'ensemble de définition de la série de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$. Donner un équivalent simple de f en 0.
2. Mêmes questions avec $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

Exercice 23 ★★ **Mines-Télécom MP 2017**

On définit la suite de fonctions (g_n) de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par $g_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(1-t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$.
2. On pose $\mathrm{G} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.
   Montrer que G est bien définie sur $[0,1]$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par G.
3. En déduire l'expression de G.

Exercice 24 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2019**

1. Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = k$?
2. Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}$?

Exercice 25 **CCINP (ou CCP) PC 2019**

Soit $t \in \mathbb{R}$ et on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{nt})$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que $\lim_{t\to-\infty} f(t) = \ln(2)$.
3. Montrer que $\lim_{t\to 0^-} f(t) = +\infty$.

Exercice 26 **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Pour $t \in]0, 1[$, écrire $\dfrac{t^{a-1}}{1 + t^b}$ comme somme de série $\sum_{n\geq 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)|\, \mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire ?
3. Soit $S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} u_n(t)$. Démontrer
$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b}\, \mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(t)\, \mathrm{d}t$$
4. En déduire
$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a + nb}$$
5. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n + 1}$.

Exercice 27 ★

Soit $\alpha > 0$. On pose $f_n : x \mapsto e^{-n^\alpha x}$ et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la continuité de f.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 28 ★★★ **Arts et Métiers PSI**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_0 = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \in [a, b],\ f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\, \mathrm{d}t$$

1. Déterminer la nature de la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sur $[a, b]$.
2. On note F la somme de cette série. Montrer que
$$\forall x \in [a, b],\ F(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Exercice 29 ★★★★ **Centrale MP**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. On note g la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. On pose $f : x \mapsto g(x) - \ln(x)$. Montrer que f vérifie les trois conditions suivantes :
   (i) $f(1) = 0$.
   (ii) f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$;
   (iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln(x)$;
4. Réciproquement, soit f vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} x\ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$$

Exercice 30 ★★ **E3A MP 2019**

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer

$$2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \qquad 2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme e^z.
Soit α un réel non nul fixé.
Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $\mathrm{C} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathcal{D}$.
3. Donner pour tout $x \in \mathcal{D}$ une expression de $\mathrm{C}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
4. Pour tout entier naturel n, on note

$$\mathrm{J}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\mathrm{C}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{I}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\mathrm{C}(x)\,\mathrm{d}x$$

   a. Calculer J_n puis I_n.
   b. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.
5. On pose enfin, lorsque cela existe $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.
   Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $\mathrm{S}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 31 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Etudier la convergence simple de $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$. On note, pour $x\in\mathbb{R}_+$, $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n+1}$.
2. La série de fonctions considérée converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$? Converge-t-elle uniformément ?
3. Montrer que sa somme est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite en $+\infty$.
4. Résoudre $y'-y=-\frac{e^x}{e^x+1}$ sur $]0,+\infty[$.
5. En déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 32 ★★ **ENSAM Option T 1996**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x)=\frac{x}{n(1+nx^2)}$$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$.
2. Etudier les variations de u_n. Que peut-on conclure pour la convergence de la série $\sum u_n$? La somme S de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S_N}=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}u_n$. Montrer que pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$, il existe un réel $\alpha_{\mathrm{N}}>0$ tel que pour $0<|x|\leq\alpha_{\mathrm{N}}$, on ait

$$\frac{\mathrm{S}(x)}{x}\geq\frac{\mathrm{S_N}(x)}{x}\geq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}$$

   En déduire la limite en 0 de $x\mapsto\frac{\mathrm{S}(x)}{x}$. S est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 33 **CCINP (ou CCP) MP 2023**

Pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}$, on considère $f_n(x)=\frac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.
   On note S sa somme.
2. Etudier la continuité de S sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{S}(x)=\pi$.
   On pourra considérer, pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t\mapsto\frac{2x}{x^2+t^2}$.

Exercice 34 ★★

On pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]-1,1[$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
3. Montrer que $f'(x)=\frac{\sin x+x\cos x-x^2}{(1-x\cos x)^2+(x\sin x)^2}$ pour tout $x\in]-1,1[$.
4. En déduire que $f(x)=\arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 35 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2023**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $v_n(x)=n^xe^{-nx}$. Soit $\mathrm{S}:\ x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de S.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Donner la limite de S en $+\infty$ à l'aide du théorème de la double limite.
4. $\sum_{n\geq 1}v_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?
5. S est-elle dérivable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 36 **Banque Mines-Ponts MP 2023**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$$

On définit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. f est-elle bien définie ? Continue ?
2. Trouver un équivalent de f en 0^+, puis en $+\infty$.
3. Écrire $f(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Exercice 37 ★★

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
2. Montrer que la série $\sum f_{n+1} - f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite (f_n) converge uniformément sur X.

Séries alternées

Exercice 38 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit (λ_n) une suite strictement croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Etudier sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On pose $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\,dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

Exercice 39 ★★ **CCINP (ou CCP) PC 2017**

On considère pour $x > 0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. f est-elle bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Montrer que
$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$
3. Montrer que
$$\forall x > 0,\ 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$
4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de f en 0^+.
6. Montrer que :
$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$$

Exercice 40 ★★ **Fonction ζ alternée**

On considère la fonction $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{D}$,
$$2\mathrm{S}(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$$
avec $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
4. En déduire la limite de S en 0^+.

Exercice 41 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, trouver la monotonie de S.
3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$$

puis en déduire un équivalent simple de S en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 42 ★★★

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ pour $x > 0$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la limite de S en $+\infty$.
3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 43 ★★ **E3A PSI 2020**

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur J.

   On note alors $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in J$.
2. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur J.
3. Etudier alors sa convergence uniforme sur J.
4. Déterminer $\ell = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

   a. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

   b. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini :

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Exercice 44 **CCINP MP 2022**

On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x \in [0,1]$.

2. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

3. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{x^2 \ln(x)\, dx}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Exercice 45 ★★

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]1,+\infty[$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 1.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

Approximations

Exercice 46 ★★★

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)t^k \,dt = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 47 ★★★ **Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et un espace vectoriel normé de dimension finie E.

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t}\varphi(t)\,dt = 0$$

2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\,dt = 0$$

3. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,dt = 0$$

Exercice 48 **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit E l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie. Soit B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour cette norme. Soit enfin $f \in$ E. Montrer que

$$\sup_{g\in B} \int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$$