CALCUL DIFFÉRENTIEL

# Dérivées partielles

**Exercice 1** ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Soit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$.

1. $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ ?
2. $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?
3. Étudier l'existence de dérivées partielles secondes de $f$ en $(0,0)$.

**Exercice 2** ★★

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de $f$.

1. $g(x,y) = f(y,x)$
2. $g(x) = f(x,x)$
3. $g(x,y) = f(y, f(x,x))$
4. $g(x) = f(x, f(x,x))$

**Exercice 3** ★★

Etudier l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$.
2. $f(x,y) = |x| + |y|$.
3. $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.

**Exercice 4** ★★

On définit une fonction $f$ sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^0$ ? $\mathcal{C}^1$ ? $\mathcal{C}^2$ ?

**Exercice 5** ★★★ **Laplacien en polaires**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle *laplacien* de $f$ l'application $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Donner une expression du laplacien en coordonnées polaires.

**Exercice 6** ★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(e^t \cos t, \ln(1+t^2))$$

Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de $f$.

**Exercice 7** ★★ **Une équation fonctionnelle**

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad (*)$$

1. Déterminer les solutions constantes de $(*)$.
2. Soit $f$ une solution non constamment nulle de $(*)$.
   a. Montrer que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
   b. Montrer que $f$ est une fonction paire.
3. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x,y) = f(x+y) + f(x-y)$$
   a. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   b. Calculer les dérivées partielles secondes de F.
   c. On suppose que $f$ est une solution non constamment nulle de $(*)$. Des expressions de $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2}$, déduire que $f$ vérifie une équation différentielle de la forme $z'' - \alpha z = 0$.
   d. Donner les solutions de l'équation différentielle $z'' - \alpha z = 0$ suivant les valeurs de $\alpha$.
4. Déterminer toutes les solutions de $(*)$.

**Exercice 8** ★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.

**1.** Etudier la continuité de $f$.

**2.** **a.** Prouver l'existence de dérivées partielles premières de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

**b.** Etudier la continuité des dérivées partielles premières de $f$.

**c.** La fonction $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 9** ★★★★ **Centrale-Supélec MP 2016**

On note $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y\}$.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y} \end{cases}$.

**1.** Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.

**2.** Montrer que $f$ est prolongeable en une application $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.

**3.** Montrer que $\tilde{f}$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.

**4.** Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**5.** Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On pourra écrire $\tilde{f}(x,y)$ comme une intégrale entre 0 et 1.

**6.** Justifier l'existence pour $\tilde{f}$ d'un minimum et d'un maximum sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

**Exercice 10** ★★★★ **Mines-Ponts MP 2016**

On se donne $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit $\mathrm{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < \mathrm{R}^2\right\}$. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\boldsymbol{\Delta} f = 0$. On définit

$$\mathrm{F} : \begin{cases} ]-\mathrm{R},\mathrm{R}[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

**1.** Trouver une relation entre les dérivées partielles de F et $f$.

**2.** Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit

$$\varphi_n : \begin{cases} ]-\mathrm{R},\mathrm{R}[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(r,\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

Trouver une équation différentielle vérifiée par $\varphi_n$ et la résoudre. En déduire $\varphi_n$.

**Exercice 11** ★★

Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ est harmonique si $\boldsymbol{\Delta} f = 0$ sur U. On rappelle que $\boldsymbol{\Delta} f = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
Montrer que si $f$ et $f^2$ sont harmoniques sur U, alors $f$ est constante sur U.

**Exercice 12** ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2023**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0,0) = 0$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|$$

On pose $u : x \mapsto f(x,x)$, $v : x \to f(x,-x)$ et $w_x : y \mapsto f(x,y)$.

**1.** Calculer les dérivées de $u$, $v$ et $w_x$.

**2.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y_x \in \mathbb{R}$ tel que $|y_x| \leq |x|$ et $w_x(y_x) = 0$.

**3.** On pose $\varphi : x \mapsto y_x$. On suppose que $\varphi$ est dérivable. Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction des dérivées partielles de $f$ en $(x,\varphi(x))$. Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

## Différentiation

### Exercice 13 ★★★★ Banque Mines-Ponts MP 2019

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $E^*$ son dual.
On définit

$$D = \{\varphi \in E^*, \forall (f,g) \in E^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\}$$

**1.** Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $E^*$ non réduit à 0.

**2.** Montrer que l'application $a \in \mathbb{R}^n \mapsto (f \in E \mapsto \mathrm{d}f(0)\cdot a)$ est injective.

**3.** Donner une base de D.
*Indication :* On pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$.

### Exercice 14 ★★★ Banque Mines-Ponts MP 2018

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable, telle que $\mathrm{d}f(x)$ soit injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et vérifiant $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
Le but de cet exercice est de montrer que $f$ est surjective. On pose pour cela $g : x \to \|f(x) - a\|^2$ où $a \in \mathbb{R}^n$.

**1.** Justifier que $g$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $\mathrm{d}g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

**2.** Montrer que $g$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

**3.** Conclure.

### Exercice 15 ★★★

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $A(s)$ et $A(t)$ commutent.

**1.** Justifier que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp(M)$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en 0.

**2.** En déduire que $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(A(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = A'(t)\exp(A(t)) = \exp(A(t))A'(t)$$

### Exercice 16 ★★

Montrer que $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^2$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

### Exercice 17 ★★★

Soit $\Omega$ un ouvert non vide et borné d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension finie. On se donne $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{\Omega}$, différentiable sur $\Omega$ et constante sur $\mathrm{Fr}(\Omega) = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.
Montrer que $\mathrm{d}f$ s'annule sur $\Omega$.

### Exercice 18 ★★★ CCINP (ou CCP) MP 2023

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$, c'est-à-dire que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

**1.** Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|H\| < 1$. Montrer que $I_n - H$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} H^n$.

**2.** Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**3.** Soit $f : M \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$.

  **a.** Montrer que $f$ est différentiable en $I_n$ et que $\mathrm{d}f(I_n)(H) = -H$.

  **b.** Montrer que $f$ est différentiable en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$. On remarquera que $(M+H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1}$.

## Gradient

### Exercice 19 ★★

Soit $f$ un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E et $u \in E$. On pose

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle + \langle u, x\rangle$$

**1.** Justifier que $\varphi$ est différentiable sur E.

**2.** Calculer le gradient de $\varphi$ en tout point de E.

**Exercice 20** ★★★

Soit $f$ un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E de dimension non nulle. Pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}$.
On n'utilisera pas le théorème spectral dans tout cet exercice.

1. Calculer le gradient de $\varphi$ en tout point de $E \setminus \{0_E\}$.
2. Montrer que $x \in E \setminus \{0_E\}$ est un vecteur propre de $f$ si et seulement si $\nabla\varphi(x) = 0$.
3. Montrer que $\varphi$ admet un maximum sur $E \setminus \{0_E\}$.
4. En déduire que $f$ admet un vecteur propre.

## Jacobienne

**Exercice 21** ★★

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x, y) = \left(x + 2\sin y, y + \frac{1}{3}\sin x\right)$$

1. Justifier que $g$ est différentiable en tout point et écrire la matrice jacobienne de $g$ en un point $(x, y)$. En déduire que $\mathrm{d}g$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que $g$ est une bijection.
3. On admet que $g^{-1}$ est différentiable. Déterminer la matrice jacobienne de $g^{-1}$ au point $(0, 0)$.

**Exercice 22** ★

Soit

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(x^2 - y^2) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}\right.$$

1. Justifier que les fonctions $f$ et $g$ sont différentiables en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire les matrices jacobiennes de ces deux fonctions au point $(x, y)$.
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image du vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $\mathrm{d}(f \circ g)(x, y)$
   **a.** en calculant $f \circ g$ ;
   **b.** en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

## Espace tangent

**Exercice 23** ★★

1. Montrer que si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (espace des matrices antisymétriques), alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbb{R})$ au point $I_n$.

**Exercice 24** ★★

Soit $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^3 + 3xy + z = 0\right\}$ et $u = (0, -1, 1)$. Déterminer l'ensemble des points de S en lesquels le vecteur $u$ est tangent à S.

**Exercice 25** ★★★

Soit $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 8yz\right\}$. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent contient la droite D d'équations $\begin{cases} y = 1 \\ x + 4z + 2 = 0 \end{cases}$.

**Exercice 26** ★★★★ **Algèbre de Lie**

Soient $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie et G une partie de $\mathcal{A}$ telle que $(G, \times)$ est un groupe d'élément neutre 1. On note $\mathfrak{g} = T_1(G)$ l'ensemble des vecteurs tangents à G en 1.

1. Justifier que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$.
2. Soient $\varepsilon > 0$ et $X : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to G$ telle que $X(0) = 1$. On note $\hat{X} : t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \mapsto X(t)^{-1}$.
   a. Justifier que $\hat{X}$ est bien définie.
   b. On suppose X continue en 0. Justifier que $\hat{X}$ est également continue en 0.
   c. Dans cette question et la suivante, on suppose X dérivable en 0. Montrer que $\hat{X}$ est dérivable en 0 et calculer $\hat{X}'(0)$ en fonction de $X'(0)$.
   d. On fixe $Y \in G$ et on considère $C : t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \mapsto X(t)Y\hat{X}(t)$. Justifier que C est dérivable en 0 et calculer $C'(0)$ en fonction de $X'(0)$ et Y.
3. Soient $x \in \mathfrak{g}$ et $Y \in G$. Montrer que $xY - Yx \in \mathfrak{g}$.
4. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$, $xy - yx \in \mathfrak{g}$.

**Exercice 27** ★★

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A + tM \in GL_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$.
2. En déduire l'ensemble des vecteurs tangents à $GL_n(\mathbb{R})$ au point A (on considère $GL_n(\mathbb{R})$ comme une partie de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

**Exercice 28** ★★★

Soient $\mathcal{U}$ une partie ouverte d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension finie ainsi que $x \in \mathcal{U}$. Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{U}$ en $x$ est E.

# Optimisation

**Exercice 29** ★★

Déterminer les extrema locaux des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x, y) = x^3 + y^3$.
2. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
3. $f(x, y) = 2y^4 - 3xy^2 + x^2$.
4. $f(x, y) = x^3 - y^2 - x$.

**Exercice 30** ★★

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2(1 + y)^3 + y^4 \end{array} \right.$.

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction $f$ admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $f$ admet un minimimum local mais pas global en ce point critique.

**Exercice 31** ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme auto-adjoint $f$ de E dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que : $\forall h \in E \setminus \{0_E\}$, $(f(h) \mid h) > 0$.
2. Soient $u \in E$ fixé et $g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) \mid x) - (u \mid x)$.
   a. Montrer que $g$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point de E.
   b. Montrer qu'il existe un unique vecteur $z_0 \in E$ point critique de $g$.
   c. Montrer que $g$ admet un minimum global en $z_0$.

**Exercice 32** ★★ **CCP PSI 2015**

On considère les ensembles

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$

et

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < y < 1\}$$

ainsi que la fonction F définie sur K par

$$F(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur T ?
2. La fonction F admet-elle un minimum sur K ? un maximum sur K. Si oui, déterminer leurs valeurs.

**Exercice 33** ★★

Déterminer le minimum et le maximum éventuels de $f : (x,y) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur $K = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$.

**Exercice 34** ★★★ **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace euclidien, que l'on munit de sa norme euclidienne, et $f : E \to E$ différentiable, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}f(x)$ soit injective, et vérifiant $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Le but de cet exercice est de montrer que $f$ est surjective. On pose pour cela $g : x \in E \mapsto \|f(x) - a\|^2$ où $a \in E$.

1. Pour $x \in E$, calculer $\mathrm{d}g(x)$.
2. Montrer que $g$ admet un minimum sur E.
3. Conclure.

**Exercice 35** ★★ **CCP PSI 2021**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extrema de $f$.

1. Déterminer les points critiques de $f$.
2. Expliciter des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$ tels que $f(x,y) < 0$.
   Expliciter de même des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$ tels que $f(x,y) > 0$.
   La fonction $f$ admet-elle en $(0,0)$ un maximum local, un minimum local, aucun des deux ?

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = f(1+u, 1+v) - f(1,1)$$

3. Calculer, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v)$, puis, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
4. Prouver que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2r\right)$$

   Que peut-on en conclure ?
5. La fonction $f$ possède-t-elle un ou des extrema globaux ?

**Exercice 36** ★★★ **Entropie**

Soit un entier $n \geq 2$. On pose

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ f(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i)$$

On note

$$C = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}$$

1. Justifier que $f$ admet un maximum sur C.
2. Déterminer la valeur de ce maximum et le point où il est atteint.

**Exercice 37** ★★

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$. Déterminer le minimum et le maximum éventuels de $f$ sur $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

**Exercice 38** ★

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$. Déterminer les extrema locaux éventuels de $f$.

**Exercice 39** ★★

Etudier les extrema globaux de $f : (x, y) \mapsto 2x - y$ sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$.

**Exercice 40** ★★ **CCINP MP Maths 1 2023**

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$.

1. Etablir que l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que $f$ admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
3. A l'aide de la matrice hessienne, démontrer que $f$ admet un extremum local en $(x_0, y_0)$. Est-ce un minimum ou un maximum ?

**Exercice 41** ★★★

On n'utilisera pas le théorème spectral dans cet exercice. Soit $u$ un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E de dimension non nulle. On pose $f(x) = \langle u(x), x\rangle$ pour tout $x \in E$. On note S la sphère unité de E (pour la norme euclidienne associée au produit scalaire de E).

1. Jutsifier que $f$ admet un maximum sur S.
2. Soit $a \in S$ tel que $f(a) = \max\limits_S f$. Justifier que $a$ est un vecteur propre de $u$.

**Exercice 42** ★★ **Saint-Cyr PC 2022**

On définit une fonction $f$ de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(1 - x)(1 - y)}{1 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (1, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, prouver la majoration $(1 - x)(1 - y) \leq (1 - \sqrt{xy})^2$.
2. En déduire que $f$ est continue en $(1, 1)$.
3. On pose $x_0 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Montrer que $f$ admet un maximum en $(x_0, x_0)$.

## Equations aux dérivées partielles

**Exercice 43** ★★

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

**Exercice 44** ★★

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

**Exercice 45** ★★

Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) : $\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + y$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en effectuant le changement de variable $\begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{u^2}{2} + v \end{cases}$.
Déterminer la solution vérifiant $f(0, y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

**Exercice 46** ★★★

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ est *homogène de degré* $\alpha$ si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

Montrer que $f$ est homogène de degré $\alpha$ si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

**Exercice 47** ★★★

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ est *homogène de degré* $\alpha$ si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

**1.** Montrer que si $f$ est homogène de degré $\alpha$, alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y) \qquad (*)$$

**2.** Réciproquement, on suppose que $f$ vérifie la relation $(*)$.

**a.** On fixe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\varphi(t) = f(tx,ty) - t^\alpha f(x,y)$ pour $t > 0$. Montrer que $\varphi$ vérifie une équation différentielle du premier ordre sans second membre et préciser celle-ci.

**b.** En déduire que $f$ est homogène de degré $\alpha$.

**3.** Montrer que si $f$ est homogène de degré $\alpha$, les dérivées partielles de $f$ sont également homogènes et préciser leur degré.

**Exercice 48** ★★★★ **Problème de Dirichlet et principe du maximum**

Soient U un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On note $\partial U = \overline{U} \setminus U$ la frontière de U.
On se donne une fonction $f$ à valeurs réelles continue sur $\overline{U}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. On pose alors

$$\forall x \in U,\ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

**1.** Montrer que $f$ admet un maximum sur $\overline{U}$. On note alors $\bar{x}$ un point de $\overline{U}$ où ce maximum est atteint.

**2.** On suppose que $\Delta f > 0$ sur U. Montrer que $\bar{x} \in \partial U$.

A partir de maintenant, on suppose $\Delta f = 0$ sur U.

**3.** On se donne $\varepsilon > 0$ et on pose

$$\forall x \in \overline{U},\ f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x\|^2 = f(x) + \varepsilon\sum_{i=1}^n x_i^2$$

Montrer que $f_\varepsilon$ est continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $\Delta f_\varepsilon > 0$ sur U.

**4.** En déduire que le maximum de $f$ sur $\overline{U}$ est atteint sur $\partial U$.

**5.** Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions continues sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et vérifiant $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$ sur U. On suppose en outre que $f_1 = f_2$ sur $\partial U$. Montrer que $f_1 = f_2$ sur U.

**Exercice 49** ★★ **CCP PC 2018**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $\mathrm{F} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{E} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On considère $\phi : f \in \mathrm{E} \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} - af$.

**1.** Montrer que $\phi$ est une application linéaire de E dans F.

**2.** On pose $f(x, y) = \sin(y)\exp(ax)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\phi(f)$.

**3.** Soit $\mathrm{G} = \{(x, y) \mapsto \alpha(y)\exp(ax),\ \alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$. Montrer que $\mathrm{G} \subset \mathrm{Ker}(\phi)$. $\phi$ est-elle injective ?

**4.** Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{F}$. On pose $f(x, y) = \exp(ax)\displaystyle\int_0^x \mathrm{A}(t, y)\exp(-at)\,\mathrm{d}t$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $f \in \mathrm{E}$ et que $\phi(f) = \mathrm{A}$.

**5.** Montrer que $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(\phi)$.

**6.** Trouver toutes les fonctions $f \in \mathrm{E}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - af(x, y) = 2x - 3y$$