

# DEVOIR SURVEILLÉ N°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

### Partie I – Etude dans un cas particulier

**I.1 I.1.a** On calcule le polynôme caractéristique de  $A : \chi_A = (X + 2)(X - 1)^2$ . Par conséquent le spectre de  $A$  est  $\{-2; 1\}$ .

**I.1.b** On vérifie aisément que  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  en calculant son déterminant dans la base canonique. De plus,  $Au_1 = u_1$ ,  $Au_2 = u_2$  et  $Au_3 = -2u_3$  donc  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont des vecteurs propres de  $A$ .

**I.1.c** On vient de trouver une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  donc  $A$  est diagonalisable.

**I.1.d**  $Bu_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  n'est pas colinéaire à  $u_1$  et de même pour  $u_2$  et  $u_3$  donc aucun élément de  $\mathcal{F}$  n'est vecteur propre de  $B$  donc a fortiori commun à  $A$  et  $B$ .

**I.2 I.2.a**  $\chi_B = (X - 2)^3$  (on développe par rapport à la deuxième ligne) donc le spectre de  $B$  est  $\{2\}$ .

**I.2.b**  $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ . Les trois colonnes de cette matrice sont colinéaires à  $u_4$  donc  $\text{Im}_2(B) \subset \text{vect}(u_4)$  et  $u_4$  est la première colonne donc  $\text{vect}(u_4) \subset \text{Im}_2(B)$ . Par conséquent  $\text{Im}_2(B) = \text{vect}(u_4)$ . Le théorème du rang nous dit alors que  $\dim E_2(B) = 2$ .

**I.2.c** La somme des dimensions des sous espaces propres de  $B$  est égale à  $2 < 3$  donc  $B$  n'est pas diagonalisable.

**I.3 I.3.a**  $Bu_5 = 2u_5$  et  $Au_5 = u_5$  donc  $\text{vect}(u_5) \subset E_1(A) \cap E_2(B)$ .

$E_1(A)$  et  $E_2(B)$  sont de dimension 2 donc cette intersection est de dimension 1 ou 2 (on a déjà un vecteur non nul dans l'intersection). Si elle est de dimension 2, alors  $E_1(A) = E_2(B)$  ce qui est absurde car  $u_1$  est dans  $E_1(A)$  mais pas dans  $E_2(B)$ . Par conséquent l'intersection est de dimension 1 et  $E_1(A) \cap E_2(B) = \text{vect}(u_5)$ .

**I.3.b** Comme  $u_3$  n'est pas vecteur propre de  $B$  et qu'il engendre  $E_{-2}(A)$ , il n'y a pas de vecteur propre commun à  $A$  et  $B$  dans  $E_{-2}(A)$ . De plus, 2 est la seule valeur propre de  $B$  donc les vecteurs propres communs à  $A$  et  $B$  sont dans  $E_1(A) \cap E_2(B)$ .

D'après la question précédente, les vecteurs propres communs à  $A$  et  $B$  sont les vecteurs de la forme  $\lambda u_5$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

**I.4 I.4.a**  $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  donc  $[A, B] = C$ .

**I.4.b** On calcule le polynôme caractéristique de  $C$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 5 & -3 & 1 \\ 2 & \lambda - 6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$ . On remplace  $L_1$  par  $L_1 - L_3$  :

$$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 2 & \lambda - 6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}. \text{ On utilise la linéarité par rapport à la première ligne puis on remplace } C_1 \text{ par } C_1 + C_3 :$$

$$\chi_C(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 6 & -2 \\ \lambda + 6 & -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}. \text{ Enfin, on développe par rapport à la première ligne : } \chi_C(\lambda) = \lambda(\lambda - 6)(\lambda + 6).$$

$\chi_C$  est scindé à racines simples donc  $C$  est diagonalisable. De plus les valeurs propres de  $C$  sont  $-6, 0$  et  $6$  donc  $C$  est semblable à  $D$ .

Le rangs de  $C$  et de  $D$  sont alors égaux et  $\text{rg}(C) = 2$ .

## Partie II – Condition nécessaire et conditions suffisantes

**II.1 II.1.a** Soient  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $Ae = \lambda e$  et  $Be = \mu e$ . Alors  $ABe = \mu Ae = \lambda \mu e$  et de même pour  $BAe$  donc  $e \in \text{Ker}([A, B])$ .

**II.1.b** Le vecteur  $e$  n'est pas nul (car vecteur propre) donc  $\dim \text{Ker}[A, B] > 0$  d'après la question précédente. D'après le théorème du rang,  $\text{rg}([A, B]) < n$ .

**II.2** On suppose  $[A, B] = 0$ . Comme  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $A$  a au moins une valeur propre : soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ .  $[A, B] = 0$  donc  $\text{Ker}([A, B]) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B])$  :  $A$  et  $B$  vérifient la propriété  $\mathcal{H}$ .

**II.3 II.3.a** Soit  $X \in E_\lambda(A)$ . Par hypothèse  $(AB - BA)X = 0$  soit  $ABX = BAX$ . Or  $AX = \lambda X$  donc  $A(BX) = \lambda BX$  ce qui signifie que  $BX \in E_\lambda(A)$  :  $\psi : X \mapsto BX$  est une application de  $E_\lambda(A)$  dans lui-même. De plus, par propriété du produit matriciel,  $\psi$  est linéaire donc  $\psi$  est un endomorphisme de  $E_\lambda(A)$ .

**II.3.b**  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  donc  $E_\lambda(A)$  est de dimension non nulle et comme  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\psi$  a au moins une valeur propre : il existe  $\mu \in \mathbb{C}$  et  $X \in E_\lambda(A)$  non nul tels que  $\psi(X) = \mu X$ . On a donc  $BX = \mu X$ ,  $AX = \lambda X$  et  $X$  non nul :  $X$  est un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ .

**II.4** En dimension 1, tous les vecteurs non nuls sont des vecteurs propres donc  $\mathcal{P}_1$  est vérifiée.

**II.5 II.5.a**  $A$  et  $B$  ne vérifient pas  $\mathcal{H}$  donc  $E_\lambda(A)$  n'est pas inclus dans  $\text{Ker}(C)$  : il existe  $u \in E_\lambda(A)$  tel que  $u \notin \text{Ker}(C)$  :  $u$  est donc un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  qui vérifie  $Au = \lambda u$  et  $Cu \neq 0$ .

**II.5.b** Par hypothèse  $\text{Im } C$  est de dimension 1 et  $v = Cu$  est un vecteur non nul de cette image donc  $\text{Im } C = \text{vect}(v)$ .

**II.5.c**  $v = Cu$  donc  $v = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu$  soit  $v = (A - \lambda I)(Bu)$  :  $v \in \text{Im}_\lambda(A)$ . La question précédente permet alors de dire que  $\text{Im } C \subset \text{Im}_\lambda(A)$ .

**II.5.d**  $\text{Im } C$  est de dimension 1 donc  $1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A))$ .

$\lambda$  est valeur propre de  $A$  donc  $E_\lambda(A)$  a une dimension non nulle et, d'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$ .

Finalement

$$1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$$

.

**II.5.e**  $A$  et  $A - \lambda I_n$  commutent donc  $[A, A - \lambda I_n] = 0$ .

Par définition  $[B, A - \lambda I_n] = B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B = BA - AB = -[A, B]$  d'où  $[B, A - \lambda I_n] = -C$ .

$\varphi$  et  $\psi$  sont des applications linéaires par propriétés du produit matriciel.

Soit  $X \in \text{Im}_\lambda(A)$  :  $X = (A - \lambda I_n)Y$  où  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .

Comme  $[A, A - \lambda I_n] = 0$ ,  $AX = (A - \lambda I_n)(AY)$  donc  $AX \in \text{Im}_\lambda(A)$ . Par conséquent  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\text{Im}_\lambda(A)$ .

De même  $BX = (A - \lambda I_n)(BY) - CY$ .  $CY \in \text{Im } C$  et  $\text{Im } C \subset \text{Im}_\lambda(A)$  donc  $CY \in \text{Im}_\lambda(A)$  ; on a aussi  $(A - \lambda I_n)(BY) \in \text{Im}_\lambda(A)$  donc  $BX \in \text{Im}_\lambda(A)$ . On en conclut que  $\psi$  est un endomorphisme de  $\text{Im}_\lambda(A)$ .

**II.5.f**  $\text{Im}([\varphi, \psi]) \subset \text{Im}(C)$  donc  $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$ . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\varphi$  et  $\psi$ , endomorphismes de  $\text{Im}_\lambda(A)$  qui est de dimension non nulle et strictement inférieure à  $n$  :  $\varphi$  et  $\psi$  ont un vecteur propre commun. A fortiori  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun.

**II.6**  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . On suppose que  $\mathcal{P}_k$  est vérifiée pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ .

Soit  $E$  de dimension  $n$ .

Soit  $\varphi$  et  $\psi$  deux d'endomorphismes de  $E$  tels que  $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$ .

On considère A et B les matrices associées respectivement à  $\varphi$  et  $\psi$  dans une base de E,  $C = AB - BA$ .

Si  $\text{rg}(C) = 1$  et si A et B ne vérifient pas  $\mathcal{H}$ , alors, d'après la question II.5, A et B ont un vecteur propre commun :  $\varphi$  et  $\psi$  ont un vecteur propre commun ( $K = \mathbb{C}$ ) donc A a au moins une valeur propre.

Si  $\text{rg}(C) = 1$  et A, B vérifient  $\mathcal{H}$ , alors d'après II.3,  $\varphi$  et  $\psi$  ont un vecteur propre commun.

Si  $\text{rg}(C) = 0$ , alors  $[A, B] = 0$  et, d'après les questions II.2 et II.3,  $\varphi$  et  $\psi$  ont un vecteur propre commun.

On en déduit que  $\mathcal{P}_n$  est vérifiée.

Par récurrence, on peut conclure que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

### Partie III – Etude d'un autre cas particulier

**III.1**  $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k}$ . On pose  $l = 2n - k$  pour obtenir  $g(P) = \sum_{l=0}^{2n} a_{2n-l} X^l$ .

**III.2** Pour tout polynôme P,  $\deg P' \leq \deg P$  et la dérivation des polynômes est linéaire donc  $f$  est un endomorphisme de E.

La question précédente prouve que  $g$  est une application de E dans E.

Si  $(P, Q) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} g(P + \lambda Q) &= X^{2n}(P + \lambda Q) \left( \frac{1}{X} \right) \\ &= X^{2n}P \left( \frac{1}{X} \right) + X^{2n}Q \left( \frac{1}{X} \right) \\ &= g(P) + \lambda g(Q) \end{aligned}$$

donc  $g$  est linéaire.  $g$  est donc un endomorphisme de E.

**III.3 III.3.a** Soit P un vecteur propre de  $g$  et  $\lambda$  la valeur propre associée.  $g(P) = \lambda P$ .

La question III.1 prouve que  $g$  est injective donc  $\lambda$  ne peut pas être nul. Par conséquent P et  $g(P)$  ont le même degré que l'on appelle  $d$ . (P n'est pas nul car vecteur propre).

On reprend les notations de la question III.1.  $a_d \neq 0$  donc si  $k = 2n - d$ ,  $a_{2n-k} \neq 0$  et donc  $\deg(g(P)) \geq 2n - d$ . Par conséquent  $d \geq 2n - d$  et donc  $\deg(P) \geq n$ .

**III.3.b**  $g(X^n) = X^n$  et  $X^n$  n'est pas le polynôme nul donc  $X^n$  est un vecteur propre de  $g$ .

**III.4 III.4.a**  $f^i(P) = P^{(i)}$ .  $P'$  est nul si et seulement si P est un polynôme constant c'est-à-dire un polynôme de degré  $\leq 0$ .

On suppose que  $\ker f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$  pour un entier  $i$  entre 1 et  $2n - 1$ .

$P \in \ker f^{i+1}$  si et seulement si  $P' \in \ker f^i$  donc si et seulement si  $P' \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$  donc  $\ker f^{i+1} = \mathbb{C}_i[X]$ .

Par récurrence, pour tout  $i$  entre 1 et  $2n$ ,  $\ker f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$ .

**III.4.b** Si P est non nul de degré  $i - 1$ , alors  $f^i(P) = 0P$  donc  $0 \in \text{Sp}(f^i)$ .

$(f^i)^{2n+1} = (f^{2n+1})^i$  et si  $P \in E$ , sa dérivée d'ordre  $2n + 1$  est nul donc  $X^{2n+1}$  est un polynôme annulateur de  $f^i$ . 0 est sa seule racine donc 0 est la seule valeur propre possible de  $f^i$ .

Finalement  $\text{Sp}(f^i) = \{0\}$ .

**III.5** Si  $i \geq n + 1$ ,  $f^i(X^n) = 0X^n$  donc  $X^n$  est vecteur propre de  $f^i$ . Avec la question III.3.b, on peut en déduire que  $X^n$  est un vecteur propre commun à  $f$  et  $g$ .

On suppose réciproquement que  $i$  est tel que  $f$  et  $g$  ont un vecteur propre commun.

Soit P un vecteur propre commun. D'après la question III.3.a,  $\deg(P) \geq n$  et d'après la question III.4.b,  $P \in \ker f^i$  donc d'après la question III.4.a,  $\deg(P) \leq i - 1$ . Ainsi,  $n \leq i - 1$  soit  $i \geq n + 1$ .

Finalement  $f$  et  $g$  ont un vecteur propre commun si et seulement si  $i \geq n + 1$ .

**III.6**  $A_n = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n+1}$  où pour  $i$  entre 2 et  $2n$ ,  $a_{i,i-1} = i - 1$  et tous les autres coefficients nuls :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour  $k$  entre 0 et  $2n$ ,  $g(X^k) = X^{2n-k}$  donc  $B_n = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n+1}$  où pour tout  $i$  entre 1 et  $2n + 1$ ,  $b_{i,2n+2-i} = 1$ , tous les autres coefficients étant nuls.

**III.7 III.7.a** En prenant  $n = 1$  dans la question précédente, on obtient bien  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Par produit matriciel,  $(A_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $(A_1)^3$  est la matrice nulle.

**III.7.b** On trouve  $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  qui est de rang 2.

$[(A_1)^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  qui est aussi de rang 2.

**III.7.c** Quand  $i = 2, i \geq 1 + 1$  donc  $(A_1)^2$  et  $B_1$  ont un vecteur propre commun alors que la condition de la question **II.6** n'est pas vérifiée; celle-ci n'est donc pas nécessaire.

Quand  $i = 1, \text{rg}([A_1, B_1]) < 3$  mais  $A_1$  et  $B_1$  n'ont pas de vecteur propre commun donc la condition de la question **II.1.b** n'est pas suffisante.

## Partie IV – Forme normale pour un vecteur propre

**IV.1**  $\dim E_\lambda(A) \geq 2$  donc on peut considérer deux vecteurs propres  $X$  et  $X'$  formant une famille libre associés à la valeur propre  $\lambda$  :  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$ .

Si  $x_1 = 0$  alors  $X \in \mathcal{N}$ .

Si  $x_1 \neq 0$ , on pose  $X'' = x'_1 X - x_1 X'$ . Alors  $X'' \in \mathcal{N}$  (la première composante de  $X''$  est nulle),  $X''$  n'est pas nul (car  $(X, X')$  est libre) et est dans  $E_\lambda(A)$  donc  $X''$  est un vecteur propre de  $A$ .

Dans tous les cas,  $A$  admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**IV.2 IV.2.a** Soit  $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  tel que  $A_{1,2} = 1, A_{2,1} = -1$ , tous les autres coefficients nuls (ceci est possible car  $n \geq 2$ ).  $A$  n'est pas la matrice nulle et est antisymétrique donc  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0\}$ .

**IV.2.b** Soit  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ ,  $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Pour tous  $i$  et  $j$ ,  $M_{i,j} = -M_{j,i}$  donc en particulier les coefficients diagonaux  $M_{i,i}$  sont nuls; comme il y en a un par colonne, on en déduit que les colonnes de  $M$  sont des éléments de  $\mathcal{N}$ .

**IV.2.c** Soit  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ . La transposition est linéaire et  $(AB)^T = B^T A^T$  donc

$$\varphi(M)^T = (AM)^T + (MA^T)^T = M^T A^T + (A^T)^T M^T = -MA^T + AM^T = -\varphi(M)$$

donc  $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

De même

$$\psi(M)^T = (AMA^T)^T = AM^T A^T - \psi(M)$$

$\varphi$  et  $\psi$  sont donc des applications de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  dans lui-même. De plus, elles sont linéaires par propriétés du produit matriciel donc  $\varphi$  et  $\psi$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

**IV.2.d** Soit  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

$$\varphi \circ \psi(M) = \varphi(AMA^T) = A(AMA^T) + (AMA^T)A^T = A^2 MA^T + AM(A^T)^2$$

et par ailleurs

$$\psi \circ \varphi(M) = \psi(AM + MA^T) = A(AM + MA^T)A^T = A^2 MA^T + AM(A^T)^2$$

Par conséquent, pour tout  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ ,  $\varphi \circ \psi(M) = \psi \circ \varphi(M)$  donc  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ .

**IV.3 IV.3.a** •  $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  et  $X_2^T \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$  donc  $X_1 X_2^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . De même  $X_2 X_1^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  donc  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .  
De plus

$$\begin{aligned} B^T &= (X_1 X_2^T)^T - (X_2 X_1^T)^T \\ &= X_2 X_1^T - X_1 X_2^T \end{aligned}$$

donc  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

- On suppose  $B = 0$ . Alors  $X_1 X_2^T = X_2 X_1^T$ . On multiplie à droite par  $\overline{X_2}$  pour obtenir  $X_1 (X_2^T \overline{X_2}) = X_2 (X_1^T \overline{X_2})$ . Or  $X_2^T \overline{X_2}$  et  $X_1^T \overline{X_2}$  sont des scalaires et  $(X_1, X_2)$  est libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes) donc  $X_2^T \overline{X_2} = X_1^T \overline{X_2} = 0$ . En posant  $X_2 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , cela nous donne  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 0$  et donc  $X_2 = 0$  ce qui contredit le fait que  $X_2$  soit un vecteur propre de  $A$ . Par conséquent  $B \neq 0$ .
- Pour  $i = 1$  ou  $i = 2$ ,  $AX_i = \lambda_i X_i$  donc  $X_i^T A^T = \lambda_i X_i^T$ .

$$\begin{aligned} AB + BA^T &= AX_1 X_2^T - AX_2 X_1^T + X_1 X_2^T A^T - X_2 X_1^T A^T \\ &= \lambda_1 X_1 X_2^T - \lambda_2 X_2 X_1^T + \lambda_2 X_1 X_2^T - \lambda_1 X_2 X_1^T \\ &= \lambda_1 B + \lambda_2 B \end{aligned}$$

d'où  $AB + BA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)B$ .

- De même

$$\begin{aligned} ABA^T &= (AX_1)(X_2^T A^T) - (AX_2)(X_1^T A^T) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 X_1 X_2^T - \lambda_2 \lambda_1 X_2 X_1^T \end{aligned}$$

d'où  $ABA^T = (\lambda_1 \lambda_2)B$ .

**IV.3.b**  $A$  et  $I_n$  commutent donc  $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = A^2 B - (\lambda_1 + \lambda_2)AB + \lambda_1 \lambda_2 B$ . On multiplie la relation  $AB + BA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)B$  par  $A$  à gauche :  $A^2 B + ABA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)AB$  donc  $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = -ABA^T + \lambda_1 \lambda_2 B$ . Comme  $ABA^T = (\lambda_1 \lambda_2)B$ , on conclut  $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0$ .

**IV.3.c**  $B \neq 0$  donc l'une au moins des colonnes de  $B$  est non nulle ; soit  $C$  une colonne de  $B$  non nulle.  $(A - \lambda_2 I_n)B = 0$  donc  $(A - \lambda_2 I_n)C = 0_{n,1}$  soit  $AC = \lambda_2 C$ .  $C$  n'est pas nulle donc  $C$  est un vecteur propre de  $A$ .

De plus  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  donc  $C \in \mathcal{N}$ .  $C$ , une des colonnes de  $B$ , est donc un vecteur propre de  $A$  sous forme normale.

**IV.3.d**  $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0$  donc il existe  $X$  une colonne de  $(A - \lambda_2 I_n)B$  non nulle. Il existe alors  $U$  une des colonnes de  $B$  telle que  $X = (A - \lambda_2 I_n)U$ . D'après la question b.,  $X$  est un vecteur propre de  $A$  (associé à la valeur propre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  est une valeur propre de  $A$ ,  $U \in \mathcal{N}$ ). Finalement  $X$  est donc un vecteur propre de  $A$  sous forme normale.

**IV.4** **IV.4.a**  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux endomorphismes de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  tels que  $\text{rg}([\varphi, \psi]) = 0 \leq 1$  donc, d'après la partie II,  $\varphi$  et  $\psi$  ont un vecteur propre commun : il existe  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  non nulle vecteur propre de  $\varphi$  et de  $\psi$  ; il existe donc  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\varphi(B) = \alpha B$  soit  $AB + BA^T = \alpha B$  et il existe  $\beta \in \mathbb{C}$  tel que  $ABA^T = \beta B$ .

**IV.4.b** On multiplie la relation  $AB + BA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)B$  par  $A$  à gauche :  $A^2 B + ABA^T = \alpha AB$  mais  $ABA^T = \beta B$  donc  $A^2 B + \beta B = \alpha AB$ . En factorisant par  $B$ , on obtient  $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0$ .

**IV.4.c** Le polynôme  $X^2 - \alpha X + \beta$  à coefficients complexes a deux racines (éventuellement confondues) donc il existe  $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $X^2 - \alpha X + \beta = (X - \gamma)(X - \delta)$ . Alors  $A^2 - \alpha A + \beta I_n = (A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)$  et, la relation de la question précédente devient :  $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0$ .

**IV.4.d** On suppose  $(A - \delta I_n)B = 0$  donc, si  $A - \delta I_n$  est inversible, alors  $B = 0$  ce qui est exclu donc  $A - \delta I_n$  n'est pas inversible et  $\delta \in \text{Sp}(A)$ . Une colonne non nulle de  $B$  est alors un vecteur propre de  $A$  sous forme normale.

**IV.4.e** Si  $\delta = \lambda$  et  $(A - \delta I_n)B \neq 0$ .

Soit  $X$  une colonne non nulle de  $(A - \delta I_n)B$  et  $U$  la colonne de  $B$  telle que  $X = (A - \delta I_n)U$ .  $U \in \mathcal{N}$ ,  $\delta \in \text{Sp}(A)$  et  $(A - \gamma I_n)X = 0_{n,1}$  (d'après la question **IV.4.c**) donc  $X$  est un vecteur propre de  $A$  sous forme normale.

**IV.4.f**  $A$  n'a qu'une valeur propre  $\lambda$  et  $\delta \neq \lambda$  donc  $\delta$  n'est pas valeur propre de  $A$  et  $(A - \delta I_n)$  est inversible.

$A - \gamma I_n$  et  $A - \delta I_n$  commutent donc si on multiplie à gauche la relation de la question **IV.4.c** par  $(A - \delta I_n)^{-1}$ , on obtient  $(A - \gamma I_n)B = 0$ .

**IV.4.g** On est alors revenu à la situation de la question **IV.4.d** et donc  $A$  possède un vecteur propre sous forme normale.

On considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  quelconque.

$A$  a au moins une valeur propre.

Si  $A$  a une seule valeur propre, d'après les questions précédentes,  $A$  possède un vecteur propre sous forme normale.

Si  $A$  a au moins deux valeurs propres distinctes, alors d'après **IV.3**,  $A$  possède un vecteur propre sous forme normale.

On en conclut que, dans tous les cas, une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  possède un vecteur propre sous forme normale.