SEMAINE DU 07/09

1 Cours

Espaces vectoriels normés

Normes Définition. Rappel sur les normes euclidiennes. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des applications bornées sur un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\ \mathrm{d}t} \qquad \|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f|$$

Distance associée à une norme. Boules et sphères. Définition de la convexité d'une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Convexité des boules. Equivalence de normes. Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Partie bornée, application bornée. Produit d'espaces vectoriels normés : norme produit.

Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé Convergence/divergence. Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques. Suites extraites et valeurs d'adhérence.

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé Convergence/divergence. Divergence grossière. Somme d'une série. Série télescopique. Convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence en **dimension finie**. Exponentielle d'une matrice carrée et d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Groupes

Révisions de première année Groupes, sous-groupes, morphismes de groupes. Groupes classiques : $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{K},+)$ et $(\mathbb{K}^*,\times)$ où $\mathbb{K}$ est un corps, $(\mathrm{S(E)},\circ)$ (groupe des permutations d'un ensemble E), $(\mathrm{S}_n,\circ)$ (groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$), groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL(E)}$, $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$, $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U},\times)$. Morphismes classiques : déterminant, signature.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une application est une norme, on peut essayer de l'exprimer à l'aide d'une norme connue.
- Calculer une norme uniforme d'une suite ou d'une fonction par une étude de cette suite ou de cette fonction.
- Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on exhibe une suite u tel que $\dfrac{\mathrm{N}_2(u_n)}{\mathrm{N}_1(u_n)}$ tende vers 0 ou $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite diverge, on peut extraire deux suites convergeant vers des limites différentes.

3 Questions de cours

BCCP Exercices 37 (hormis la question 1c), 40, 61

Retour sur le DS n°01 : transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\geq n_0}$ deux suites complexes. On définit alors deux suites $(\mathrm{A}_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{A}_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$
$$\forall n \geq n_0,\ b_n = \mathrm{B}_{n+1} - \mathrm{B}_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k\mathrm{B}_k = \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$ pour tout entier $n \geq n_0$.
2. On suppose dans cette question que la suite (A_n) est bornée et que (B_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n\mathrm{B}_n$ converge.
3. On suppose dans cette question que la suite (B_n) converge vers 0, que la suite (A_n) est bornée et que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} b_n$ est absolument convergente. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n\mathrm{B}_n$ est convergente.