

## Structure de groupe

### Exercice 1 ★★

Soit  $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . On pose pour tous éléments  $(x, y)$  et  $(x', y')$  de  $G$  :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Vérifier que  $*$  est une loi interne associative sur  $G$ .
2. Vérifier que  $(G, *)$  est un groupe. Est-il commutatif?
3. Donner une expression de  $(x, y)^{*n}$ .

### Exercice 2 ★★

Soit  $G = ]-1, 1[$ . On pose pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $G$  :

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Vérifier que  $*$  est une loi interne associative sur  $G$ .
2. Vérifier que  $(G, *)$  est un groupe. Est-il commutatif?
3. Donner une expression de  $x^{*n}$ .

### Exercice 3 ★★

Soit  $G$  un groupe d'élément neutre  $e$  tel que  $\forall x \in G, x^2 = e$ . Montrer que  $G$  est commutatif.

### Exercice 4 ★

On munit  $\mathbb{R}$  de la loi interne  $*$  définie par :  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a * b = a + b + ab$ .  $(\mathbb{R}, *)$  est-il un groupe ?

### Exercice 5 ★

### Transport de structures

Soient  $(G, *)$  un groupe et  $H$  un ensemble. On suppose qu'il existe une bijection  $f$  de  $G$  sur  $H$ . On définit la loi  $\cdot$  sur  $H$  de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in H^2, x \cdot y = f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y))$$

Montrer que  $(H, \cdot)$  est un groupe.

### Exercice 6 ★

### Transport de structures

Soient  $(G, *)$  un groupe et  $(H, \cdot)$  un ensemble muni d'une loi interne. On suppose qu'il existe une surjection de  $G$  sur  $H$  vérifiant

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$$

Montrer que  $(H, \cdot)$  est un groupe. Que peut-on dire de  $f$  ?

### Exercice 7 ★

Soit  $G$  un groupe. On définit une relation binaire  $\sim$  sur  $G$  par

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim y \iff \exists g \in G, y = g^{-1}xg$$

Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence.

### Exercice 8 ★

Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ . On définit trois relations binaires  $\sim, \sim_g, \sim_d$  sur  $G$  de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim y \iff \exists h \in H, y = h^{-1}xh$$

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim_g y \iff \exists h \in H, y = hx$$

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim_d y \iff \exists h \in H, y = xh$$

Montrer que  $\sim, \sim_g, \sim_d$  sont des relations d'équivalence sur  $G$ .

**Exercice 9 ★★**

On pose  $G = ]-1, 1[$ .

1. Montrer que  $\text{th}$  induit une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $G$ .
2. Montrer que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{th}(a + b) = \frac{\text{th}(a) + \text{th}(b)}{1 + \text{th}(a)\text{th}(b)}$ .
3. Pour  $(x, y) \in G^2$ , on pose  $x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$ . A l'aide des questions précédentes, montrer que  $(G, \star)$  est un groupe commutatif.
4. Soit  $x \in G$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x^{\star n} = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$ .

**Sous-groupes****Exercice 10 ★****Stabilisateur**

Soient  $E$  un ensemble et  $x \in E$ . On pose

$$S(x) = \{\sigma \in S(E), \sigma(x) = x\}$$

Montrer que  $S(x)$  est un sous-groupe de  $(S(E), \circ)$ .

**Exercice 11 ★★**

Soient  $G$  un groupe et  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$ .

1. Montrer que  $H \cap K$  est un sous-groupe de  $G$ .
2. Montrer que  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .

**Exercice 12 ★****Centre d'un groupe**

Soit  $G$  un groupe. On définit le centre de  $G$  par

$$Z(G) = \{a \in G, \forall x \in G, ax = xa\}$$

i.e. l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent avec tous les éléments de  $G$ . Montrer que  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $G$ .

**Exercice 13 ★★★****Sous-groupes de  $\mathbb{R}$** 

Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ . On suppose  $G$  non trivial i.e.  $G \neq \{0\}$ .

1. Question préliminaire : soient  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n\alpha \leq \beta < (n+1)\alpha$ .
2. Justifier que  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  possède une borne inférieure que l'on notera  $a$ .
3. On suppose que  $a > 0$ .
  - a. On suppose que  $a \notin G$ . Justifier l'existence de deux éléments distincts  $x$  et  $y$  de  $G$  appartenant à l'intervalle  $]a, 2a[$ .
  - b. Aboutir à une contradiction et en déduire que  $a \in G$ .
  - c. En déduire que  $a\mathbb{Z} \subset G$ .
  - d. Soit  $z \in G$ . En utilisant la question 1, montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $z = na$ .
  - e. En déduire que  $G = a\mathbb{Z}$ .
4. On suppose que  $a = 0$ .
  - a. Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . En utilisant la question 1, montrer qu'il existe  $g \in G$  tel que  $|g - t| < \varepsilon$ .
  - b. En déduire que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 14 ★**

Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On définit une relation binaire  $\sim$  sur  $G$  par

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim y \iff \exists h \in H, y = xh$$

Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence.

**Exercice 15 ★★**

Dans cet exercice, on pourra identifier le plan à  $\mathbb{C}$  via un repère orthonormé. On pourra en particulier identifier une transformation du plan à une application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .

1. On note  $G$  l'ensemble des translations et des similitudes directes du plan. Montrer que  $G$  muni de la loi de composition est un groupe.
2. On note  $H$  l'ensemble des translations et des rotations du plan. Montrer que  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .

## Morphismes

### Exercice 16 ★

### Groupes et complexes

On rappelle que  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{R}^*, \times)$  et  $(\mathbb{C}^*, \times)$  sont des groupes.

On note  $\mathbb{U}$  l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathbb{U}_n$  l'ensemble des racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité.

1. Montrer que  $\mathbb{U}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\mathbb{U}_n$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $f : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z^n \end{cases}$ .
  - a. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .
  - b. En considérant le noyau de  $f$ , retrouver le résultat de la question 2.
  - c.  $f$  est-il injectif?
  - d. Déterminer l'image de  $f$ .  $f$  est-il surjectif?

4. On pose  $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{cases}$ .

- a. Montrer que  $g$  est un morphisme du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  dans le groupe  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .
- b. Déterminer le noyau de  $g$ .  $g$  est-il injectif?
- c. En considérant l'image de  $g$ , retrouver le résultat de la question 1.
- d.  $g$  est-il surjectif?

5. On pose  $h : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ z & \longmapsto & |z| \end{cases}$ .

- a. Montrer que  $h$  est un morphisme du groupe  $(\mathbb{C}^*, \times)$  dans le groupe  $(\mathbb{R}^*, \times)$ .
- b. En considérant le noyau de  $h$ , retrouver le résultat de la question 1.
- c.  $h$  est-il injectif?
- d. Déterminer l'image de  $h$ .  $h$  est-il surjectif?

### Exercice 17 ★★

Montrer que les endomorphismes de groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  continus sont les homothéties i.e. les applications  $x \mapsto \lambda x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 18 ★★

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'application  $f_n : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ p & \longmapsto & e^{2i\pi n p \alpha} \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f_n$  est un morphisme du groupe  $(\mathbb{Z}, +)$  dans le groupe  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .
2. Montrer que  $\text{Im } f_n \subset \mathbb{U}$ .
3. En considérant le noyau de  $f_n$ , montrer que  $f_n$  est injective si et seulement si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ .
4. A partir de maintenant, on suppose que  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . On écrit  $\alpha$  sous forme de fraction irréductible, c'est-à-dire sous la forme  $\alpha = \frac{r}{s}$  avec  $r \in \mathbb{Z}$  et  $s \in \mathbb{N}^*$  tels que  $r \wedge s = 1$ .

- a. Montrer que  $\text{Im } f_1 \subset \mathbb{U}_s$ .
- b. En écrivant une relation de Bézout entre  $r$  et  $s$ , montrer que  $e^{\frac{2i\pi}{s}} \in \text{Im } f_1$ . En déduire que  $\mathbb{U}_s \subset \text{Im } f_1$ .
- c. Montrer que  $\text{Ker } f_1 = s\mathbb{Z}$ .

5. On pose  $m = \frac{s}{n \wedge s}$ .

- a. Justifier que  $m$  est entier.
- b. Montrer que  $nr \wedge s = n \wedge s$ .
- c. Montrer que  $\text{Im } f_n \subset \mathbb{U}_m$ .
- d. En écrivant une relation de Bézout entre  $nr$  et  $s$ , montrer que  $e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \text{Im } f_n$ . En déduire que  $\mathbb{U}_m \subset \text{Im } f_n$ .
- e. Montrer que  $\text{Ker } f_n = m\mathbb{Z}$ .

### Exercice 19 ★★★★★

X MP 2010

Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer les morphismes de  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$  dans  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ .

**Exercice 20 ★★****Automorphismes intérieurs**

Soit  $G$  un groupe. Étant donné un élément  $a$  de  $G$  on définit l'application :

$$\varphi_a : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto axa^{-1} \end{cases}$$

1. Soit  $a \in G$ . Montrer que  $\varphi_a$  est un automorphisme de  $G$ .
2. On pose  $\mathfrak{I}(G) = \{\varphi_a, a \in G\}$ . Montrer que l'ensemble  $\mathfrak{I}(G)$  est un sous-groupe de  $(\text{Aut}(G), \circ)$ .
3. Montrer que  $\varphi : \begin{cases} G & \longrightarrow \text{Aut}(G) \\ a & \longmapsto \varphi_a \end{cases}$  est un morphisme de groupes.

**Exercice 21 ★★**

Soit  $G$  un groupe. Montrer que  $f : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto x^{-1} \end{cases}$  est un automorphisme de  $G$  si et seulement si  $G$  est commutatif.

**Exercice 22 ★★**

Déterminer les morphismes de groupes de  $(\mathbb{Q}, +)$  dans  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Ordre****Exercice 23 ★★★****ENS MP 2019**

Soit  $G$  un groupe. Montrer que  $G$  est fini si et seulement si l'ensemble des sous-groupes de  $G$  est fini.

**Exercice 24 ★★**

Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

**Exercice 25 ★★★**

Soit  $G$  un groupe cyclique d'ordre  $n$ . Montrer que pour tout diviseur  $d$  de  $n$ , il existe un unique sous-groupe de  $G$  d'ordre  $d$ .

**Exercice 26 ★★★****Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit  $G$  un groupe fini. On suppose que tous les éléments de  $G$  sont d'ordre au plus 2. Que peut-on dire du cardinal de  $G$  ?

**Exercice 27 ★★**

Montrer que tout groupe d'ordre premier est cyclique.

**Exercice 28 ★★★****Ordre d'un produit**

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments d'un groupe  $G$  d'ordres respectifs  $p$  et  $q$ . On suppose que  $x$  et  $y$  commutent et que  $p \wedge q = 1$ . Montrer que l'ordre de  $xy$  est  $pq$ .

**Exercice 29 ★★★**

Soit  $G$  un groupe et  $E$  l'ensemble des éléments d'ordre fini de  $G$ . Montrer que si  $E$  est fini, alors  $E$  est un groupe.

**Exercice 30 ★★★**

Soit  $G$  un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que  $G$  est fini.

**Exercice 31 ★★**

Le groupe  $(\mathbb{Z}^2, +)$  est-il monogène ? Justifier.

**Exercice 32 ★★★**

Soit  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Montrer que  $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), +)$  est cyclique si et seulement si  $m \wedge n = 1$ .