

DEVOIR À LA MAISON N°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

1 On trouve

$$B_1 = X - \frac{1}{2}$$

$$B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$$

On en déduit que

$$b_1 = -\frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{1}{12}$$

2 Soit un entier $n \geq 2$.

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t) dt = \int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0$$

car $n-1 \in \mathbb{N}^*$.

3 Tout d'abord, $A_0 = (-1)^0 B_0(1-X) = 1$.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A'_n = -(-1)^n B'_n(1-X) = (-1)^{n-1} B_{n-1}(1-X) = A_{n-1}$$

Enfin, via le changement de variable $u = 1-t$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 A_n(t) dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t) dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(u) du = 0$$

Ces trois conditions définissant de manière la suite (B_n) , on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = A_n = (-1)^n B_n(1-X)$$

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3

$$B_{2n+1}(1) = (-1)^{2n+1} B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(0)$$

Or $2n+1 \geq 2$ donc d'après la question 2, $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0)$. On en déduit que

$$B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$$

5 La formule de Taylor de Taylor stipule que

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Par une récurrence évidente, $B_n^{(k)} = B_{n-k}$ lorsque $k \leq n$. En particulier, $B_n^{(n)} = B_0 = 1$ de sorte que $B_n^{(k)} = 0$ lorsque $k > n$. Ainsi

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{B_{n-k}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \frac{b_{n-k}}{k!} X^k$$

6 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après la question **5** que

$$B_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_{2n+2-k}}{k!} X^k$$

En évaluant cette égalité en 1, on obtient

$$B_{2n+2}(1) = \sum_{k=0}^{2n+2-k} \frac{b_{2n+2-k}}{k!}$$

Or $2n+2 \geq 2$ donc $B_{2n+2}(1) = B_{2n+2}(0) = b_{2n+2}$ d'après la question **2**. Ainsi

$$b_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_{2n+2-k}}{k!}$$

En effectuant le changement d'indice $k \mapsto 2n+2-k$, on en déduit que

$$b_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_k}{(2n+2-k)!}$$

Supposons maintenant que $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_k}{(2n+2-k)!} = b_{2n+2} + b_{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{b_k}{(2n+2-k)!}$$

Or $b_{2n+1} = B_{2n+1}(0) = 0$ puisque $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question **4**. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{b_k}{(2n+2-k)!} = 0$$

On sépare alors les termes d'indices pairs et impairs

$$\sum_{k=0}^n \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k+1}}{(2n+1-2k)!} = 0$$

A nouveau, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{2k+1} = B_{2k+1}(0) = 0$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k+1}}{(2n+1-2k)!} = \frac{b_1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2(2n+1)!}$$

Finalement,

$$\frac{1}{2(2n+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!} = 0$$

En isolant le dernier terme de la somme, on obtient

$$\frac{1}{2(2n+1)!} + \frac{b_{2n}}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!} = 0$$

et donc

$$b_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!}$$

7 La question **6** donne pour $n = 2$

$$b_4 = \frac{1}{5!} - 2 \left(\frac{b_0}{6!} + \frac{b_2}{4!} \right) = \frac{1}{120} - \frac{1}{360} - \frac{1}{144} = \frac{6}{720} - \frac{2}{720} - \frac{5}{720} = -\frac{1}{720}$$

8 Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Par une intégration par parties,

$$\int_0^1 f(t) \sin(\lambda t) dt = \frac{f(0)}{\lambda} - \frac{f(1) \cos \lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 f'(t) \cos(\lambda t) dt$$

On a clairement

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(0)}{\lambda} = 0$$

De plus,

$$\left| \frac{f(1) \cos \lambda}{\lambda} \right| \leq \frac{|f(1)|}{\lambda}$$

et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{|f(1)|}{\lambda} = 0$ donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(1) \cos \lambda}{\lambda} = 0$$

Enfin, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale,

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_0^1 f'(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^1 |f'(t) \cos(\lambda t)| dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^1 |f'(t)| dt$$

Or $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^1 |f'(t)| dt$ donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^1 f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$$

On en déduit finalement que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

9 Tout d'abord $t \mapsto t(1-t)$ et $t \mapsto \sin(\pi t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ et la seconde fonction ne s'annule pas sur $]0, 1[$.

Ainsi φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$. Par ailleurs, $t(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ et $\sin(\pi t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \pi t$ donc $\varphi \underset{0}{\sim} \frac{1}{\pi}$ puis $\lim_0 \varphi = \frac{1}{\pi}$.

Ensuite, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\varphi'(t) = \frac{(1-2t) \sin(\pi t) - t(1-t) \pi \cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)}$$

Or

$$\begin{aligned} (1-2t) \sin(\pi t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} (1-2t)(\pi t + o(t^2)) \underset{t \rightarrow 0}{=} \pi t(1-2t + o(t)) \\ t(1-t) \pi \cos(\pi t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} \pi t(1-t)(1 + o(t)) = \pi t(1-t + o(t)) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (1-2t) \sin(\pi t) - t(1-t) \pi \cos(\pi t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} -\pi t^2 + o(t^2) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\pi t^2 \end{aligned}$$

De plus, $\sin^2(\pi t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \pi^2 t^2$ donc $\varphi' \underset{0}{\sim} -\frac{1}{\pi}$ i.e. $\lim_0 \varphi' = -\frac{1}{\pi}$.

On remarque ensuite que pour $t \in]0, 1[$, $\varphi(1-t) = \varphi(t)$ et donc que $\varphi'(1-t) = -\varphi'(t)$. On en déduit que $\lim_1 \varphi = \lim_0 \varphi = \frac{1}{\pi}$

et que $\lim_1 \varphi' = -\lim_0 \varphi' = \frac{1}{\pi}$.

Puisque φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ et que φ et φ' admettent des limites finies en 0 et 1, φ peut se prolonger en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

10 Soit $t \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} \sin(\pi t) \sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t) &= \sum_{k=1}^p \sin(\pi t) \cos(2k\pi t) \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{1}{2} (\sin(2k\pi t + \pi t) - \sin(2k\pi t - \pi t)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sin((2k+1)\pi t) - \sin((2k-1)\pi t) \\ &= \frac{1}{2} (\sin((2p+1)\pi t) - \sin(\pi t)) \end{aligned}$$

Comme $\sin(\pi t) \neq 0$,

$$\sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2p+1)\pi t)}{2 \sin(\pi t)} - \frac{1}{2}$$

11 Puisque $P(0) = P(1) = 0$, les polynômes X et $1 - X$ divisent P . Etant premiers entre eux, leur produit $X(1 - X)$ divise également P . Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(1 - X)Q$.
Remarquons également que pour tout $t \in]0, 1[$

$$t(1 - t) \sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t) = t(1 - t) \left(\frac{\sin((2p+1)\pi t)}{2 \sin(\pi t)} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \varphi(t) \sin((2p+1)t) - \frac{1}{2} t(1 - t)$$

Mais comme les fonctions $t \mapsto t(1 - t) \sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t)$ et $t \mapsto \frac{1}{2} \varphi(t) \sin((2p+1)t) - \frac{1}{2} t(1 - t)$ sont continues sur $[0, 1]$, l'égalité est en fait valide pour tout $t \in [0, 1]$.
Soit maintenant $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \int_0^1 P(t) \cos(2k\pi t) dt &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t) \right) t(1 - t) Q(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\varphi(t) Q(t) \sin((2p+1)t) - t(1 - t) Q(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(t) Q(t) \sin((2p+1)t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 P(t) dt \end{aligned}$$

Or comme $t \mapsto \varphi(t) Q(t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^1 \varphi(t) Q(t) \sin((2p+1)t) dt = 0$$

d'après la question 8.
On en déduit donc que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \int_0^1 P(t) \cos(2k\pi t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 P(t) dt$$

12 Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{k,1} &= \int_0^1 B_2(t) \cos(2k\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2k\pi} [B_2(t) \sin(2k\pi t)]_0^1 - \frac{1}{2k\pi} \int_0^1 B_1(t) \sin(2k\pi t) dt \quad \text{car } B_2' = B_1 \\ &= -\frac{1}{2k\pi} \int_0^1 B_1(t) \sin(2k\pi t) dt \quad \text{car } \sin(2k\pi) = \sin(0) = 0 \\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2} [B_1(t) \cos(2k\pi t)]_0^1 - \frac{1}{(2k\pi)^2} \int_0^1 B_0(t) \cos(2k\pi t) dt \quad \text{car } B_1' = B_0 \\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2} - \frac{1}{(2k\pi)^2} \int_0^1 \cos(2k\pi t) dt \quad \text{car } B_0 = 1, B_1(1) = 1/2 \text{ et } B_1(0) = -1/2 \\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2} - \frac{1}{(2k\pi)^3} [\sin(2k\pi t)]_0^1 \\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2} \end{aligned}$$

13 Soit un entier $n \geq 2$. On procède à des intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned}
 I_{k,n} &= \int_0^1 B_{2n}(t) \cos(2k\pi t) dt \\
 &= \frac{1}{2k\pi} [B_{2n}(t) \sin(2k\pi t)]_0^1 - \frac{1}{2k\pi} \int_0^1 B'_{2n}(t) \sin(2k\pi t) dt \\
 &= -\frac{1}{2k\pi} \int_0^1 B_{2n-1}(t) \sin(2k\pi t) dt \\
 &= \frac{1}{(2k\pi)^2} [B_{2n-1}(t) \cos(2k\pi t)]_0^1 - \frac{1}{(2k\pi)^2} \int_0^1 B'_{2n-1}(t) \cos(2k\pi t) dt \\
 &= -\frac{1}{(2k\pi)^2} \int_0^1 B_{2n-2}(t) \cos(2k\pi t) dt \quad \text{car } B_{2n-1}(0) = B_{2n-1}(1) \text{ (} 2n-1 \geq 2 \text{ car } n \geq 2 \text{)} \\
 &= -\frac{1}{(2k\pi)^2} I_{k,n-1}
 \end{aligned}$$

La suite $(I_{k,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{(2k\pi)^2}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{k,n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n-2}} I_{k,1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^n}$$

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n \geq 2$ et $b_{2n} = B_{2n}(0) = B_{2n}(1)$ d'après la question 2. Le polynôme $B_{2n} - b_{2n}$ s'annule donc en 0 et 1. La question 11 montre que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \int_0^1 (B_{2n}(t) - b_{2n}) \cos(2k\pi t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 (B_{2n}(t) - b_{2n}) dt$$

Or on sait que

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 B_{2n}(t) \cos(2k\pi t) dt &= I_{k,n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}} & \int_0^1 B_{2n}(t) dt &= 0 \\
 \int_0^1 b_{2n} \cos(2k\pi t) dt &= \frac{b_{2n}}{2k\pi} [\sin(2k\pi t)]_0^1 = 0 & \int_0^1 b_{2n} dt &= b_{2n}
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}} = \frac{b_{2n}}{2}$$

ou encore que

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{b_{2n}}{2}$$

et enfin que

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} b_{2n}}{2}$$

15 On obtient

$$\begin{aligned}
 \zeta(2) &= \frac{(2\pi)^2 b_2}{2} = \frac{\pi^2}{6} \\
 \zeta(4) &= -\frac{(2\pi)^4 b_4}{2} = \frac{\pi^4}{90}
 \end{aligned}$$