Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

On notera π_x le polynôme minimal d'une SRL x.

1 Clairement, $0 \in \mathrm{J}_x$. De plus, si $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{J}_x^2$, $(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\sigma)(x) = \mathrm{A}(\sigma)(x) + \mathrm{B}(\sigma)(x) = 0$ donc $\mathrm{A}+\mathrm{B} \in \sigma(x)$. Enfin, si $\mathrm{A} \in \mathrm{J}_x$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{BA}(\sigma)(x) = \mathrm{B}(\sigma) \circ \mathrm{A}(\sigma)(x) = \mathrm{B}(\sigma)(0) = 0$ donc $\mathrm{BA} \in \mathrm{J}_x$. Ainsi, J_x est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
De plus, x est une SRL donc, par définition, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul tel que $\mathrm{A}(\sigma)(x) = 0$. Ainsi $\mathrm{A} \in \mathrm{J}_x$ et J_x n'est pas l'idéal nul.

2 On constate que $x \in \mathcal{R}(\mathbb{K})$ est d'ordre 0 si et seulement si $\pi_x = 1$ ce qui équivaut à dire que $x = 0$. La seule SRL d'ordre 0 est la suite nulle.
De même, $x \in \mathcal{R}(\mathbb{K})$ est d'ordre 1 si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\pi_x = \mathrm{X} - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$. Ceci équivaut à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel $x_{n+1} - \alpha x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les SRL d'ordre 1 sont donc les suites géométriques.
Soit x une SRL de polynôme minimal $(\mathrm{X}-1)^2$. Alors $\sigma(x) - x \in \mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{Id})$ i.e. $\sigma(x) - x$ est constante. On en déduit que x est arithmétique. Sa raison ne peut être nulle sinon $\mathrm{X}-1 \in \mathrm{J}_x$ ce qui impliquerait $(\mathrm{X}-1)^2 \mid (\mathrm{X}-1)$. Ainsi x est une suite arithmétique non constante. Réciproquement si x est une suite arithmétique non constante, on vérifie que $(\mathrm{X}-1)^2 \in \mathrm{J}_x$. Le polynôme minimal de x serait donc 1, $\mathrm{X}-1$ ou $(\mathrm{X}-1)^2$. Ce polynôme minimal ne peut être 1 ou $\mathrm{X}-1$ car x n'est pas constante. Ainsi le polynôme minimal de x est $(\mathrm{X}-1)^2$. Finalement, les SRL de polynôme minimal $(\mathrm{X}-1)^2$ sont les suites arithmétiques non constantes.

3 $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}+1)^3$ annule x. Comme π_x divise P, on a $\pi_x \in \{1, \mathrm{X}+1, (\mathrm{X}+1)^2, (\mathrm{X}+1)^3\}$.
On ne peut avoir $\pi_x = 1$ sinon $x = 0$ et notamment $x_1 = 0$.
On ne peut avoir $\pi_x = \mathrm{X}+1$ sinon x serait géométrique de raison -1, ce qui contredit le fait que $x_0 = 0$ et $x_1 = -1$ par exemple.
Montrons par récurrence que $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0$ d'après les données de l'énoncé. Supposons que cette égalité soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$x_{n+3} + 2x_{n+2} + x_{n+1} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n + 2x_{n+2} + x_{n+1} = -x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0$$

Par récurrence $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $(\mathrm{X}+1)^2$ annule x. On en déduit que $\pi_x = (\mathrm{X}+1)^2$. La suite x est donc d'ordre minimal 2.

4 Tout d'abord, $\mathcal{R}_\mathrm{A}(\mathbb{K})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ puisque c'est le noyau de l'endomorphisme $\mathrm{A}(\sigma)$.
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_\mathrm{A}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \longmapsto & (x_0, \dots, x_{p-1}) \end{array}\right.$ est clairement linéaire. De plus, elle est clairement bijective puisqu'une suite de $\mathcal{R}_\mathrm{A}(\mathbb{K})$ est entièrement déterminée par ses p premiers termes. Ainsi $\dim \mathcal{R}_\mathrm{A}(\mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}^p = p$.
Enfin, $\mathrm{A}(\sigma)$ et σ commutent car $\mathbb{K}[\sigma]$ est une algèbre commutative. Notamment, $\mathcal{R}_\mathrm{A}(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}(\sigma)$ est stable par σ.

5 Lorsque $\mathrm{A} = \mathrm{X}^p$, $\mathcal{R}_\mathrm{A}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites $x \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ telles que $x_{n+p} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. l'ensemble des suites nulles à partir du rang p. Une base de $\mathcal{R}_\mathrm{A}(\mathbb{K})$ est alors $((\delta_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}, (\delta_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (\delta_{n,p-1})_{n\in\mathbb{N}})$ où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

6 **6.a** L'application $\Psi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{p-1}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}^\mathbb{N} \\ \mathrm{Q} & \longmapsto & (\mathrm{Q}(n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}\right.$ est clairement linéaire. Ainsi $\mathrm{E}_\mathrm{A}(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ en tant qu'image de cette application linéaire. De plus, si $\mathrm{Q} \in \mathrm{Ker}\,\Psi$, $\mathrm{Q}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $\lambda \neq 0$. On en déduit que $\mathrm{Q} = 0$. Ainsi $\dim \mathrm{E}_\mathrm{A}(\mathbb{K}) = \mathrm{rg}\,\Psi = \dim \mathbb{K}_{p-1}[\mathrm{X}] = p$.

6.b Puisque $\dim \mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \dim E_A(\mathbb{K}) = p$, il suffit de prouver une inclusion. Soit $x \in E_A(\mathbb{K})$. Il existe donc $Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $x_n = Q(n)\lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(\sigma - \lambda\,\mathrm{Id})(x)_n = Q(n+1)\lambda^{n+1} - Q(n)\lambda^{n+1} = \Delta(Q)(n)\lambda^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où Δ est l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui à P associe $P(X+1) - P(X)$. Une récurrence montre alors que $(\sigma - \lambda\,\mathrm{Id})^p(x)_n = \Delta^p(Q)(n)\lambda^{n+p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Or il est clair que $\deg \Delta(P) = \deg(P) - 1$ si $\deg P \geq 1$ et $\Delta(P) = 0$ si $\deg P = 0$. Comme $\deg Q \leq p-1$, $\Delta^p(Q) = 0$. Ainsi $(\sigma - \lambda\,\mathrm{Id})^p(x) = 0$ i.e. $x \in \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.
On a donc montré que $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$. On en déduit que $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ car ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ont la même dimension.

7 Quitte à poser $\lambda_0 = 0$, les $A_k = (X - \lambda_k)^{m_k}$ pour $0 \leq k \leq d$ sont premiers entre eux deux à deux. D'après le lemme des noyaux

$$\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \operatorname{Ker} A(\sigma) = \bigoplus_{k=0}^{d} \operatorname{Ker} A_k(\sigma) = \bigoplus_{k=0}^{d} \mathcal{R}_{A_k}(\mathbb{K})$$

Puisque $A_0 = X^{m_0}$, $\mathcal{R}_{A_0}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites nulles à partir du rang m_0. Comme les suites de $\mathcal{R}_{A_0}(\mathbb{K})$ peuvent prendre des valeurs arbitraires jusqu'au rang $m_0 - 1$, il n'y a pas de condition sur les m_0 premiers termes des suites de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$. La question précédente permet alors d'affirmer que les suites de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ sont exactement les suites x telles que

$$\forall n \geq m_0,\ x_n = \sum_{k=1}^{n} Q_k(n)\lambda_k^n$$

où pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $Q_k \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X]$.

8 Tout d'abord, $\sigma^k(x) \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ est stable par σ.
On a vu précédemment que $\dim \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) = p$. Il suffit donc de prouver que la famille $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. Soit alors $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k \sigma^k(x) = 0$$

En posant $P = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$, on a donc $P(\sigma)(x) = 0$ puis B divise P. Or $\deg P < p = \deg B$ donc $P = 0$. Ainsi $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ et $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. Puisque $\dim \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) = p$, $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n \geq p$, la famille $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ engendre $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ en tant que sur-famille de la base $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$. Ainsi $\operatorname{rg}(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1} = p$.
Si $n \leq p$, la famille $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre en tant que sous-famille de la base $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$. Ainsi $\operatorname{rg}(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1} = n$.

9 Supposons $n \geq p$. Soit $v \in \operatorname{Ker} \varphi_n$. Alors $v_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. A fortiori, $v_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$. Comme v est une SRL d'ordre p, on montre aisément par récurrence que $v = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} \varphi_n = \{0\}$ et φ_n est injective.
Remarquons que $H_n(x)$ est la matrice de la famille $(\varphi_n(x), \varphi_n(\sigma(x)), \dots, \varphi_n(\sigma^{n-1}(x)))$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ainsi

$$\operatorname{rg} H_n(x) = \operatorname{rg}(\varphi_n(x), \varphi_n(\sigma(x)), \dots, \varphi_n(\sigma^{n-1}(x)))$$

Comme φ_n est injective,

$$\operatorname{rg}(\varphi_n(x), \varphi_n(\sigma(x)), \dots, \varphi_n(\sigma^{n-1}(x))) = \operatorname{rg}(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{n-1}(x))$$

En utilisant la question précédente, on a donc $\operatorname{rg} H_n(x) = p$.

10 Notons d l'ordre minimal de x. On a donc $m \geq d$. D'après la question précédente, $\operatorname{rg} H_m(x) = d$ i.e. $d = p$.
Puisque $p+1 \geq p$, la question précédente montre que $\operatorname{rg} H_{p+1}(x) = p$. D'après le théorème du rang matriciel, $\dim \operatorname{Ker} H_{p+1}(x) = p + 1 - \operatorname{rg} H_{p+1}(x) = 1$ donc $\operatorname{Ker} H_{p+1}(x)$ est une droite vectorielle. Soit $Y = (y_0, \dots, y_p)$ un vecteur directeur (donc non nul) de cette droite. Remarquons que la matrice formée des n premières lignes et n premières colonnes de $H_{p+1}(x)$ est la matrice $H_p(x)$. Ainsi, si on avait $y_p = 0$, $\tilde{Y} = (y_1, \dots, y_{p-1})$ serait un élément non nul de $\operatorname{Ker} H_p(x)$. C'est impossible car $\operatorname{rg} H_p(x) = p$. Ainsi $y_p \neq 0$ et il suffit alors de poser $b_k = y_k/y_p$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$.

11 Comme $(b_0, \dots, b_{p-1}, 1)$ est dans le noyau de $H_{p+1}(x)$,

$$\forall n \in [\![0, p]\!],\ x_{p+n} + \sum_{k=0}^{p-1} b_k x_{k+n} = 0$$

ce qui peut également s'écrire $\varphi_{p+1}(B(\sigma)(x)) = 0$. Puisque $p+1 \geq p$, φ_{p+1} est injective de sorte que $B(\sigma)(x) = 0$. Ainsi π_x divise B. Or π_x et B sont unitaires et de même degré p donc $\pi_x = B$.

```
def suite(n):
    L=[1,1,1,0]
    for _ in range(n-3):
        L.append(L[-1]-2*L[-3])
    return L[:n+1]
```

```
>>> suite(0)
[1]
>>> suite(2)
[1, 1, 1]
>>> suite(10)
[1, 1, 1, 0, -2, -4, -4, 0, 8, 16, 16]
```

13 La suite x est récurrente d'ordre 4 donc son ordre minimal est inférieur ou égal à 4. D'après la question **10**, l'ordre minimal de x est le rang de $\mathrm{H}_4(x)$. On trouve

$$\operatorname{rg} \mathrm{H}_4(x) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

La question **9** montre que $\operatorname{rg} \mathrm{H}_n(x) = 3$ pour tout $n \geq 3$. De plus, on laisse au lecteur le soin de vérifier que $\operatorname{rg} \mathrm{H}_1(x) = \operatorname{rg} \mathrm{H}_2(x) = 1$.

14 Puisque x est d'ordre minimal 3, la question **11** montre qu'il suffit de calculer le noyau de $\mathrm{H}_4(x)$ pour obtenir le polynôme minimal de x.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} &= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} && \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1,\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\
&= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} && \text{car } \operatorname{rg} \mathrm{H}_4(x) \text{ est de rang 3 et que les trois premières lignes sont échelonnées} \\
&= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{vect}(0, 2, -2, 1)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\pi_x = \mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}$. La relation de récurrence minimale de la suite x est donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} - 2x_{n+2} + 2x_{n+1} = 0$$

15 On trouve $\pi_x = \mathrm{X}(\mathrm{X} - \lambda)(\mathrm{X} - \overline{\lambda})$ avec $\lambda = 1 + i$. On en déduit avec la question **7** qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall n \geq 1,\ x_n = \alpha\lambda^n + \beta\overline{\lambda}^n$$

Puisque $x_1 = x_2 = 1$, on a

$$\begin{cases} \alpha\lambda + \beta\overline{\lambda} = 1 \\ \alpha\lambda^2 + \beta\overline{\lambda}^2 = 1 \end{cases}$$

ce qui donne $\begin{cases} \alpha = \dfrac{1-i}{4} \\ \beta = \dfrac{1+i}{4} \end{cases}$. On en déduit que

$$\forall n \geq 1,\ x_n = \frac{1}{2}((1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}) = (\sqrt{2})^{n-1} \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)$$

16 On trouve cette fois-ci $\operatorname{rg} H_4(x) = 2$. On en déduit que l'ordre minimal de x est 2. On trouve également que la droite $\operatorname{Ker} H_3(x)$ est engendré par $(2, -2, 1)$. Le polynôme minimal de x est donc X^2-2X+2 et sa relation de récurrence minimale est

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$$

17 Il suffit de constater que M est symétrique réelle : elle est alors diagonalisable d'après le théorème spectral.

18 Supposons que $(\lambda, \dots, \lambda)$ soit le spectre ordonné d'une matrice de Hankel M de taille n. Comme M est diagonalisable et ne possède qu'une valeur propre, $M = \lambda I_n$. On aurait par exemple $a_2 = m_{2,2} = \lambda$ et $a_2 = m_{1,3} = 0$, ce qui contredit $\lambda \neq 0$.

19 Les coefficients diagonaux de M sont $a_0, \dots, a_{2n-2}$. Ainsi $\operatorname{tr}(M) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k}$. Mais M est diagonalisable M est semblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ donc $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Ainsi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k}$.

M^2 est semblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$ donc $\operatorname{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$. Par ailleurs, pour tout $k \in [\![1, n]\!]^2$,

$$(M^2)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}m_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i+j-2}^2$$

Ainsi

$$\operatorname{tr}(M^2) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i+j-2}^2$$

On procède à une sommation par paquets. Pour $k \in [\![0, 2n-2]\!]$, posons

$$A_k = \left\{(i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i + j - 2 = k\right\}$$

Alors $[\![1, n]\!]^2 = \bigsqcup_{k=0}^{2n-2} A_k$ de sorte que

$$\operatorname{tr}(M^2) = \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{(i,j)\in A_k} a_{i+j-2}^2 = \sum_{k=0}^{2n-2} \operatorname{card}(A_k)a_k^2$$

Or pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$A_k = \{(i, k + 2 - i),\ i \in [\![1, k + 1]\!]\}$$

de sorte que $\operatorname{card}(A_k) = k + 1$ et pour $k \in [\![n, 2n-2]\!]$,

$$A_k = \{(i, k + 2 - i),\ i \in [\![k + 2 - n, n]\!]\}$$

de sorte que $\operatorname{card}(A_k) = 2n - k - 1$. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \operatorname{tr}(M^2) = \sum_{k=0}^{2n-2} \operatorname{card}(A_k)a_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(k + 1)a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2}(2n - k - 1)a_k^2$$

20 Il est clair que

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{2(i-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Par ailleurs,

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{p}(2i - 1)a_{2i-1}^2 + \sum_{i=p+1}^{n}(2n - 2i + 1)a_{2(i-1)}^2 = \sum_{k=0}^{p-1}(2k + 1)a_{2k}^2 + \sum_{k=p}^{n-1}(2n - k - 1)a_{2k}^2$$

Les termes de la somme suivante étant positifs, on peut minorer la somme par la somme des termes d'indices pairs

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k + 1)a_k^2 \geq \sum_{k=0}^{p-1}(2k + 1)a_{2k}^2$$

et, de la même manière,

$$\sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)a_k^2 \geq \sum_{k=p}^{n-1}(2n-2k-1)a_{2k}^2$$

On en déduit que

$$\|v\|^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)a_k^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

21 En développant

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n}\lambda_i^2 + \sum_{1\leq i,j\leq n}\lambda_j^2 - 2\sum_{1\leq i,j\leq n}\lambda_i\lambda_j = 2n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2 = 2\left(n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - \langle v,w\rangle^2\right)$$

Par sommation par paquets,

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 + \sum_{1\leq j<i\leq n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_k)^2 = 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_i-\lambda_j)^2$$

par symétrie des rôles de i et j. On en déduit que

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - \langle v,w\rangle^2$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle v,w\rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2 \leq \|w\|^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

de sorte que

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 \geq (n-\|w\|^2)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = \mathrm{K}_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

22 Un calcul montre que

$$\sum_{1\leq i<j\leq 3}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = 2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3)$$

et que $\mathrm{K}_3 = \frac{2}{3}$. On laisse au lecteur le soin de conclure.

23 Tout d'abord, $\operatorname{rg}\mathrm{B} = 3$ donc 0 est une valeur propre de multiplicité $n-3$ d'après le théorème du rang. Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On vérifie que $\mathrm{B}e_p = -2e_p$, $\mathrm{B}(e_1+e_{2p-1}) = e_1+e_{2p-1}$ et $\mathrm{B}(e_1-e_{2p-1}) = -(e_1-e_{2p-1})$. Comme 0 est valeur propre de multiplicité $n-3$, -2, 1 et -1 sont des valeurs propres de multiplicité 1. Le spectre ordonné de B est donc $(1,0,\dots,0,-1,-2)$.

24 Notons $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ le spectre ordonné de B i.e. $\mu_1 = 0$, $\mu_k = 0$ pour $k \in [\![2,n-2]\!]$, $\mu_{n-1} = -1$ et $\mu_n = -2$. D'après le résultat admis par l'énoncé,

$$\lambda_1-\lambda_{n-1}-2\lambda_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_{n+1-i} \leq \operatorname{tr}(\mathrm{MB}) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i = \lambda_1-\lambda_{n-1}-2\lambda_n$$

Or $\operatorname{tr}(\mathrm{MB}) = \operatorname{tr}(\mathrm{M}^\top\mathrm{B})$ est le produit scalaire usuel des matrices M et B de sorte que

$$\operatorname{tr}(\mathrm{MB}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}b_{i,j} = -2m_{p,p} + m_{1,2p-1} + m_{2p-1,1} = -2a_{2p-2} + a_{2p-2} + a_{2p-2} = 0$$

On en déduit que

$$\lambda_1-\lambda_{n-1}-2\lambda_n \leq 0 \leq \lambda_1-\lambda_{n-1}-2\lambda_n$$

25

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{M}} &= \begin{vmatrix} \mathrm{X}-a & -b & -c \\ -b & \mathrm{X}-c & -b \\ -c & -b & \mathrm{X}-a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{X}-(a-c) & -b & -c \\ 0 & \mathrm{X}-c & -b \\ -\mathrm{X}+(a-c) & -b & \mathrm{X}-a \end{vmatrix} \qquad \mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_3 \\
&= (\mathrm{X}-(a-c)) \begin{vmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & \mathrm{X}-c & -b \\ -1 & -b & \mathrm{X}-a \end{vmatrix} \\
&= (\mathrm{X}-(a-c)) \begin{vmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & \mathrm{X}-c & -b \\ 0 & -2b & \mathrm{X}-a-c \end{vmatrix} \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\
&= (\mathrm{X}-(a-c))((\mathrm{X}-c)(\mathrm{X}-a-c) - 2b^2) \\
&= (\mathrm{X}-(a-c))(\mathrm{X}^2 - (a+2c)\mathrm{X} + ac + c^2 - 2b^2)
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$
\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \left\{ a-c, \frac{a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}}{2}, \frac{a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}}{2} \right\}
$$

26 On résout le système suivant

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}}{2} \\ \lambda_2 = a-c \\ \lambda_3 = \dfrac{a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}}{2} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = a+2c \\ \lambda_2 = a-c \\ \lambda_1 - \lambda_3 = \sqrt{a^2+8b^2} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a = \dfrac{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}{3} \\ c = \dfrac{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{3} \\ a^2+8b^2 = (\lambda_1-\lambda_3)^2 \end{cases} \qquad \text{car } \lambda_1 - \lambda_3 \geq 0 \\
\iff &\begin{cases} a = \dfrac{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}{3} \\ c = \dfrac{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{3} \\ 8b^2 = (\lambda_1-\lambda_3-a)(\lambda_1-\lambda_3+a) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a = \dfrac{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}{3} \\ c = \dfrac{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{3} \\ b^2 = \dfrac{1}{8}(\lambda_1-\lambda_3-a)(\lambda_1-\lambda_3+a) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a = \dfrac{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}{3} \\ c = \dfrac{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{3} \\ b^2 = \dfrac{1}{18}(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Par hypothèse, $(\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)(2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \geq 0$ donc l'unique solution de ce système avec $b \geq 0$ est

$$(a, b, c) = \left(\frac{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)(2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)}, \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{3}\right)$$

$\boxed{\textbf{27}}$ La question précédente et la question **24** montrent que, dans le cas $n = 3$, les conditions $\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geq 0$ et $2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geq 0$ sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une matrice de Hankel ayant pour spectre ordonné $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.
La condition de la question **22** dans le cas d'un triplet ordonné $(\lambda, 1, 1)$ équivaut à $2\lambda^2 - 6\lambda + 1 \geq 0$. Les deux racines du trinôme $2X^2 - 6X + 1$ sont $\alpha = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$ et $\beta = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$. Choisissons par exemple $\lambda = \beta$. On a bien $\beta > 1$ de sorte que le triplet $(\beta, 1, 1)$ est bien ordonné. Par contre, en posant $\lambda_1 = \beta$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 1$, la condition nécessaire $\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geq 0$ n'est pas satisfaite puisque $\beta < 3$ (il suffit de remarquer que $\sqrt{7} < 3$). La condition de la question **22** n'est donc pas suffisante.