

DEVOIR À LA MAISON N°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – Centrale Maths I PC 2011

Le but des deux premières parties est d'étudier l'existence d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , dont on a fixé a priori les valeurs des dérivées successives en 0. Les deux parties suivantes sont consacrées à des classes de fonctions pour lesquelles les dérivées successives en 0 de f déterminent complètement la fonction f . On note \mathcal{W} l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction considérée dans \mathcal{W}).

I Intervention des séries entières

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On cherche dans cette partie des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, qui sont somme d'une série entière sur un intervalle $] -\delta, \delta[$ pour au moins un réel $\delta > 0$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = u_n$.

- 1 Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in] -\delta, \delta[$, avec $\delta > 0$, donner $f^{(n)}(0)$ en fonction de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Dans les exemples suivants, proposer une solution f , en précisant une valeur de δ convenable :
 - 2.a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$.
 - 2.b Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ et $u_{2n+1} = 0$.
- 3 Pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2n)!$, montrer qu'aucune fonction du type considéré dans cette partie n'est solution du problème.

II Le théorème de Borel

II.A Une fonction en cloche

Soit g la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 4 4.a Montrer que pour tout naturel p , il existe un polynôme $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0, 1[, g^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

Pour tout entier $p \geq 1$, exprimer Q_p en fonction de Q_{p-1} et Q'_{p-1} .

- 4.b En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, Q_p est de degré $3p - 2$.

- 5 5.a Montrer que pour tout entier naturel p ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g^{(p)}(x) = 0$$

5.b En déduire que $g \in \mathcal{W}$.

II.B Une fonction en plateau

Soit h la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie, pour tout réel x , par $h(x) = \frac{\int_{x-1}^1 g(t) dt}{\int_0^1 g(t) dt}$.

- 6 Montrer que h est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , constante sur $] -\infty, 1]$ et sur $[2, +\infty[$.
- 7 Soit φ la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$ pour tout réel x .

- 7.a Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et que $\varphi^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \geq 1$.
- 7.b Montrer que φ est nulle en dehors de $[-1, 1]$ et tracer sommairement l'allure de son graphe.
- 7.c Justifier pour tout entier naturel p non nul l'existence du réel

$$\lambda_p = \max_{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket} \max_{x \in [-1, 1]} |\varphi^{(k)}(x)|$$

II.C Le théorème de Borel

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit pour tout entier naturel n une fonction g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_0(x) = \varphi(x) \text{ et si } n \geq 1, g_n(x) = \frac{x^n}{n!} \varphi(\beta_n x)$$

où $\beta_n = \max(1, 4^n |u_n| \lambda_n)$.

- 8 8.a Montrer que pour tout entier naturel n , la fonction g_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

8.b Montrer que g_n est nulle hors du segment $\left[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}\right]$.

- 9 Soit n et j des entiers naturels tels que $j < n$.

9.a Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$$

9.b En déduire que $g_n^{(j)}(0) = 0$.

9.c Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \geq \frac{1}{\beta_n}$, on a $g_n^{(j)}(x) = 0$.

9.d Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leq \frac{1}{\beta_n}$, on a $|u_n g_n^{(j)}(x)| \leq 2^{-(n+1)}$.

- 10 Déduire des questions précédentes que pour $n, j \in \mathbb{N}$,

$$g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$$

- 11 En considérant $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} u_n g_n$, montrer qu'il existe une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} telle que $\forall j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}(0) = u_j$ (théorème de Borel).

III Un autre élément de \mathcal{W}

On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante de limite nulle, et telle que la série $\sum a_n$ converge.

III.A Une fonction affine par morceaux

On pose pour tout x réel

$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2} (|x + a_0| + |x - a_0| - 2|x|)$$

- 12** Montrer que f_0 est nulle en dehors de $[-a_0, a_0]$, préciser sa valeur sur $[-a_0, 0]$ et $[0, a_0]$, justifier sa continuité et tracer rapidement son graphe.

- 13** On pose $k = \frac{1}{a_0^2}$.

13.a Pour tout réel x , montrer que $|f_0(x)| \leq \frac{1}{a_0}$.

13.b Montrer que f_0 est lipschitzienne de rapport k sur \mathbb{R} .

III.B La première étape

On pose pour tout x réel

$$f_1(x) = \frac{1}{2a_1} \int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t) dt$$

- 14** Montrer que f_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $f_1'(x)$ pour tout x réel.

- 15** Montrer que f_1 est nulle en dehors de $[-a_0 - a_1, a_0 + a_1]$.

- 16** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_1(x)| \leq \frac{1}{a_0}$ et $|f_1'(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}$.

- 17** Montrer que f_1 est lipschitzienne de rapport k sur \mathbb{R} .

III.C Une suite de fonctions

On définit par récurrence une suite (f_n) de fonctions par f_0 et f_1 définies comme dans les questions précédentes et, pour tout naturel $n \geq 2$ et tout x réel,

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n} \int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t) dt$$

- 18** Montrer que f_n est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} et calculer $f_n'(x)$ pour tout x réel.

- 19** Montrer que f_n est nulle en dehors de $\left[-\sum_{i=0}^n a_i, \sum_{i=0}^n a_i\right]$.

- 20** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $|f_n(x)| \leq \frac{1}{a_0}$ et que, si $p \leq n$, on a $|f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$.

- 21** Montrer que f_n est lipschitzienne de rapport k sur \mathbb{R} .

- 22** Montrer que pour tout naturel n ,

$$\int_{-S}^S f_n(t) dt = 1 \text{ où } S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

III.D La limite

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} k_n$ où $k_n = f_n - f_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

23 **23.a** Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , montrer que $|k_n(x)| \leq \frac{k}{2} a_n$.

23.b En déduire la convergence normale de la série de fonctions $\sum k_n$.
Pour tout réel x , on note

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n$$

24 **24.a** Montrer que pour tout x réel, $f_n(x)$ converge vers une limite que l'on notera $w(x)$ et qui vérifie $w(x) = f_0(x) + s(x)$.

24.b Pour tout x réel, montrer que $|w(x)| \leq \frac{1}{a_0}$.

24.c Montrer que w est lipschitzienne de rapport k sur \mathbb{R} .

24.d Montrer que w est nulle en dehors du segment $[-S, S]$.

25 **25.a** Montrer que $\int_{-S}^S w(t) dt = 1$.

25.b En déduire que w n'est pas constante nulle sur \mathbb{R} .

26 **26.a** Montrer que $\sum (f'_n - f'_{n-1})$ converge normalement sur \mathbb{R} .

26.b Trouver un lien entre w , f_1 et $\sum (f_n - f_{n-1})$.

26.c En déduire que w est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

26.d Montrer que pour tout x réel, $|w'(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}$.

27 Soit $p \geq 2$.

27.a Montrer que $\sum_{n \geq p+1} (f_n^{(p)} - f_{n-1}^{(p)})$ converge normalement sur \mathbb{R} .

27.b Trouver un lien entre w , f_p et $\sum_{n=p+1}^{+\infty} (f_n - f_{n-1})$.

27.c En déduire que w est de classe \mathcal{C}^p sur \mathbb{R} .

27.d Montrer que pour tout x réel, $|w^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$.

IV Classes quasi-analytiques

On considère une suite réelle $M = (M_n)_{n \geq 0}$ vérifiant les trois conditions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n > 0 \quad (\text{IV.1})$$

$$M_0 = 1 \quad (\text{IV.2})$$

$$\forall n \geq 1, M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1} \quad (\text{IV.3})$$

On note $\mathcal{C}(M)$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^∞ pour lesquelles il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ (dépendantes de f) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq AB^n M_n$$

L'ensemble $\mathcal{C}(M)$ est dit classe associée à la suite M .

La classe $\mathcal{C}(M)$ est dite quasi-analytique si

$$\forall f \in \mathcal{C}(M), (\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0) \implies f = 0$$

IV.A Quelques propriétés d'une classe

- 28** Montrer que si $f \in \mathcal{C}(M)$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ appartient aussi à $\mathcal{C}(M)$.
- 29** Vérifier que $\mathcal{C}(M)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{C} .
- 30** **30.a** Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$, on a $M_k M_{n-k} \leq M_n$. On pourra étudier, pour p fixé, la monotonie de la suite $(M_n/M_{n-p})_{n \geq p}$.
- 30.b** En déduire que le produit de deux éléments quelconques de $\mathcal{C}(M)$ est un élément de $\mathcal{C}(M)$.

IV.B Un exemple de classe quasi-analytique

On note U la suite définie par $U_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 31** Montrer que la suite U vérifie les conditions IV.1, IV.2 et IV.3.
- 32** Soit $f \in \mathcal{C}(U)$; on fixe $A > 0$, $B > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq AB^n n!$$

32.a Dans cette question et la suivante, on suppose que le réel α vérifie $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(\alpha) = 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \int_{\alpha}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

32.b En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, |x - \alpha| \leq \frac{1}{2B} \implies f(x) = 0$.

32.c Montrer que $\mathcal{C}(U)$ est une classe quasi-analytique.

IV.C

- 33** Montrer que si $\mathcal{C}(M)$ est quasi-analytique, alors $\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{W} = \{0\}$.
- 34** Montrer la réciproque; on pourra montrer, lorsque $\mathcal{C}(M)$ n'est pas quasi-analytique, l'existence d'une fonction $g \neq 0$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, nulle sur $] -\infty, 0]$, puis considérer $h : x \mapsto g(x)g(c-x)$ pour un $c \in \mathbb{R}$ bien choisi.

IV.D

On se donne une suite réelle $M = (M_n)_{n \geq 0}$ vérifiant les trois conditions IV.1, IV.2 et IV.3 et on considère les assertions :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{M_n} \right)^{\frac{1}{n}} \text{ converge} \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{M_{n-1}}{M_n} \text{ converge} \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{la classe } \mathcal{C}(M) \text{ n'est pas quasi analytique} \quad (\text{IV.6})$$

Pour tout $n \geq 1$, on note $\alpha_n = M_{n-1}/M_n$.

- 35** Exprimer M_n en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et en déduire que IV.4 \implies IV.5
- 36** Démontrer en utilisant la partie III que IV.5 \implies IV.6.

On peut montrer à l'aide d'outils mathématiques plus élaborés que IV.6 \implies IV.4, ce qui donne une caractérisation des classes quasi-analytiques. Ce résultat constitue une partie du théorème de Denjoy-Carleman.