Equations différentielles linéaires

Dans ce chapitre, I désigne un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et E un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1 Généralités

Définition 1.1 Equation différentielle linéaire

On appelle **équation différentielle linéaire** une équation de la forme

$$x' = a(t)(x) + b(t)$$

où

- $a : \mathrm{I} \to \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est continue ;
- $b : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est continue ;
- $x : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est une fonction **inconnue** de classe $\mathcal{C}^1$.

Ecriture matricielle d'une équation différentielle linéaire

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors en notant

- $\mathrm{A}(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de $a(t)$ dans la base $\mathcal{B}$;
- $\mathrm{B}(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice de $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$;
- $\mathrm{X}(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice de $x(t)$ dans la base $\mathcal{B}$;

l'équation différentielle

$$x' = a(t)(x) + b(t)$$

équivaut à

$$\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$$

Définition 1.2 Equation différentielle linéaire homogène

L'équation différentielle **homogène** associée à l'équation différentielle linéaire

$$x' = a(t)(x) + b(t)$$

est

$$x' = a(t)(x)$$

Proposition 1.1 Principe de superposition

Si x_1 et x_2 sont des solutions respectives des équations différentielles **linéaires**

$$x' = a(t)(x) + b_1(t) \qquad \text{et} \qquad x' = a(t)(x) + b_2(t)$$

alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda x_1 + \mu x_2$ est solution de l'équation différentielle linéaire

$$x' = a(t)(x) + (\lambda b_1(t) + \mu b_2(t))$$

Définition 1.3 Problème de Cauchy

On appelle **problème de Cauchy** une équation différentielle linéaire assortie d'une **condition initiale** :

$$\begin{cases} x' = a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $t_0 \in \mathrm{I}$ et $x_0 \in \mathrm{E}$.

Remarque. Trouver une solution x du problème de Cauchy précédent équivaut à déterminer une application x continue sur I vérifiant

$$\forall t \in \mathrm{I},\ x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} (a(s)(x(s)) + b(s))\,\mathrm{d}s$$

2 Solutions d'une équation différentielle linéaire

Dans tout ce paragraphe,

- $a : \mathrm{I} \to \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est une application continue ;
- $b : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est une application continue ;

et

- $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application continue ;
- $\mathrm{B} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une application continue.

2.1 Théorème de Cauchy linéaire

Théorème 2.1 Théorème de Cauchy linéaire

Soit $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathrm{E}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Remarque. Notamment, l'équation différentielle $x' = a(t)(x) + b(t)$ admet toujours des solutions.

Théorème 2.2 Théorème de Cauchy linéaire (version matricielle)

Soit $(t_0, \mathrm{X}_0) \in \mathrm{I} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t) \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

2.2 Equations différentielles homogènes

Proposition 2.1 Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire **homogène**

$$x' = a(t)(x)$$

est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E^{I}.

Proposition 2.2 Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène (version matricielle)

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire **homogène**

$$\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$$

est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^{\mathrm{I}}$.

Proposition 2.3

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle **homogène**

$$x' = a(t)(x)$$

Pour tout $t_0 \in \mathrm{I}$, l'application

$$\begin{cases} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Remarque. Ceci signifie notamment que si deux solutions prennent la même valeur en un certain t_0, alors elles sont égales. De manière un peu plus savante, les graphes des solutions forment une partition de $\mathrm{I} \times \mathrm{E}$.

Corollaire 2.1

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire **homogène**

$$x' = a(t)(x)$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\dim \mathrm{E}$.

Corollaire 2.2

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire **homogène**

$$X' = A(t)X$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

2.3 Equations différentielles avec second membre

Proposition 2.4 Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire

Les solutions de l'équation différentielle linéaire

$$x' = a(t)(x) + b(t)$$

sont les sommes d'une solution particulière et d'une solution de l'équation différentielle homogène associée.
Autrement dit, l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de E^I de direction l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Exemple 2.1

Soit pour $t \in \mathbb{R}$

$$a(t) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{tx}{1+t^2} - \frac{y}{1+t^2}, \frac{x}{1+t^2} + \frac{ty}{1+t^2}\right) \qquad \text{et} \qquad b(t) = \left(\frac{1+t}{1+t^2}, \frac{1-t}{1+t^2}\right)$$

On considère l'équation différentielle $u' = a(t)(u) + b(t)$, autrement dit le système différentiel

$$\begin{cases} x' = \dfrac{tx}{1+t^2} - \dfrac{y}{1+t^2} + \dfrac{1+t}{1+t^2} \\ y' = \dfrac{x}{1+t^2} + \dfrac{ty}{1+t^2} + \dfrac{1-t}{1+t^2} \end{cases}$$

En raisonnant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, cette équation différentielle peut s'écrire $X' = A(t)X + B(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{1+t^2} & -\dfrac{1}{1+t^2} \\ \dfrac{1}{1+t^2} & \dfrac{t}{1+t^2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+t}{1+t^2} \\ \dfrac{1-t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

On remarque que $u_1 : t \mapsto (1, t)$ et $u_2 : t \mapsto (t, -1)$ sont solutions de l'équation **homogène** associée. Puisque l'ensemble des solutions de cette équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2 et que la famille (u_1, u_2) est libre, cet ensemble de solutions est $\mathrm{vect}(u_1, u_2)$.
Par ailleurs, on remarque que $v : t \mapsto (t, t)$ est solution de l'équation **avec second membre**. Ainsi l'ensemble des solutions est

$$v + \mathrm{vect}(u_1, u_2)$$

c'est-à-dire l'ensemble des solutions de la forme

$$t \mapsto (t + \lambda + \mu t, t + \lambda t - \mu)$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 2.5 Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire (version matricielle)

Les solutions de l'équation différentielle linéaire

$$X' = A(t)X + B(t)$$

sont les sommes d'une solution particulière et d'une solution de l'équation différentielle homogène associée.
Autrement dit, l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^{\mathrm{I}}$ de direction l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

3 Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

3.1 Définition

Définition 3.1 Exponentielle d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u^n}{n!}$ converge absolument. Sa somme est appelée **exponentielle** de u et est notée e^u ou $\exp(u)$.

Remarque. L'exponentielle de l'endomorphisme nul de $\mathcal{L}(E)$ est Id_E.

Définition 3.2 Exponentielle d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée **exponentielle** de A et est notée e^A ou $\exp(A)$.

Remarque. L'exponentielle de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice identité I_n.

Remarque. Si N est une matrice **nilpotente** d'indice d. Alors

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{N^k}{k!}$$

3.2 Exponentielle et réduction

Proposition 3.1 Exponentielle d'une matrice diagonale

L'exponentielle d'une matrice diagonale D est une matrice diagonale et les coefficients diagonaux de $\exp(D)$ sont les exponentielles des coefficients diagonaux de D.

Exercice 3.1 Exponentielle d'une matrice triangulaire

Montrer que l'exponentielle d'une matrice triangulaire supérieure / inférieure T est une matrice triangulaire supérieure / inférieure et que les coefficients diagonaux de $\exp(T)$ sont les exponentielles des coefficients diagonaux de T.

Proposition 3.2 Exponentielle et similitude

Soit $(A, B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Alors $\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P$.

Exercice 3.2

Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(M) = P(M)$.

Méthode Calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable

Pour calculer l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut chercher, **si possible**, à la diagonaliser. En effet, si $A = PDP^{-1}$, alors $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ et l'exponentielle d'une matrice diagonale est facile à calculer.

Exemple 3.1 Exponentielle d'une matrice diagonalisable

On souhaite calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = (X-1)(X-4) + 2 = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

Comme χ_A est scindé à racines simples, χ_A est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 3\}$ et les sous-espaces propres sont

$$E_2(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_3(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. De plus,

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\mathrm{com}(P)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.3

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$. Montrer de deux manières différentes que $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Proposition 3.3 Spectre et exponentielle

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable. Alors

$$\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Sp}(A)) = \{e^\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

Remarque. De manière plus précise, si $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associé à une valeur popre λ, on montre que $\exp(\mathrm{A})x = e^\lambda x$.

Remarque. Le résultat est faux si A n'est pas trigonalisable. Par exemple, si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$, alors A n'est pas trigonalisable dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(\mathrm{A}) = \varnothing$. Néanmoins, A est trigonalisable (et même diagonalisable) dans $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{A}) = \{-i\pi, i\pi\}$ et $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(\exp(\mathrm{A})) = \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\exp(\mathrm{A})) = \{-1\}$.

3.3 Régularité de l'exponentielle

Proposition 3.4 Continuité de l'exponentielle

Les applications $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto \exp(a)$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \exp(\mathrm{A})$ sont continues.

Proposition 3.5

- Soit $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors $t \mapsto \exp(ta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $t \mapsto a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a$.
- Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $t \mapsto \exp(t\mathrm{A})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $t \mapsto \mathrm{A}\exp(t\mathrm{A}) = \exp(t\mathrm{A})\mathrm{A}$.

Attention ! Si $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application dérivable, la dérivée de $\exp \circ \mathrm{A}$ n'est pas forcément $\mathrm{A}'(\exp \circ \mathrm{A})$ ni $(\exp \circ \mathrm{A})\mathrm{A}'$.

Exemple 3.2

Posons $\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$. On vérifie que $\mathrm{A}(t)^n = t^{n-1}\mathrm{A}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et donc que $(\exp \circ \mathrm{A})(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^t - 1}{t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ prolongée par continuité en 0. Ainsi $(\exp \circ \mathrm{A})'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{te^t - e^t + 1}{t^2} \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ prolongée par continuité en 0 tandis que $\mathrm{A}'(t)\exp(\mathrm{A}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ et $\exp(\mathrm{A}(t))\mathrm{A}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e^t - 1}{t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ prolongée par continuité en 0.

Exercice 3.4

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $t \mapsto \exp(t\mathrm{A})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées successives.

Exercice 3.5

Soit $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une application dérivable. Montrer que si $\mathrm{A}(t)$ et $\mathrm{A}'(t)$ commutent pour tout $t \in \mathrm{I}$, alors

$$\forall t \in \mathrm{I},\ (\exp \circ \mathrm{A})'(t) = \mathrm{A}'(t)(\exp \circ \mathrm{A})(t) = (\exp \circ \mathrm{A})(t)\mathrm{A}'(t)$$

3.4 Exponentielle d'une somme

Proposition 3.6 Exponentielle d'une somme

- Soient a et b deux endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui **commutent**. Alors $\exp(a+b) = \exp(a) \circ \exp(b)$.
- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**. Alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Remarque. On en déduit notamment que si A et B commutent, exp(A) et exp(B) commutent également.

Attention ! L'hypothèse de commutativité est essentielle. Par exemple, si l'on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient aisément $\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ (A est diagonale) et $\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B est nilpotente). En posant $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on s'aperçoit facilement que $C^n = C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\exp(C) = \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. On vérifie alors facilement que $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$.

Exemple 3.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque en particulier que N est **nilpotente**. Comme I_3 et N commutent, $\exp(A) = \exp(I_3)\exp(N)$. Or $\exp(I_3) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ et $\exp(N) = I_3 + N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

Décomposition de Dunford et exponentielle

Un théorème hors-programme affirme que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, il existe un endomorphisme diagonalisable d et un endomorphisme nilpotent n qui **commutent** tels que $u = d + n$. Cette écriture s'appelle la **décomposition** de Dunford de u. On a bien évidemment un énoncé similaire pour les matrices.
Si l'on dispose d'une décomposition de Dunford $u = d + n$, alors $\exp(u) = \exp(d)\exp(n)$ et les exponentielles d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent sont simples à calculer.

Exemple 3.4 Exponentielle d'une matrice trigonalisable

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 1 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -3 & 1 & X+2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ X-1 & 1 & X+2 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)$$

Comme χ_A est scindé, A est trigonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ et les sous-espaces propres sont

$$E_{-1}(A) = \mathrm{vect}(C_1) \quad \text{avec} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad E_1(A) = \mathrm{vect}(C_2) \quad \text{avec} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notamment, A n'est pas diagonalisable. On cherche alors C_3 vérifiant $AC_3 = C_3 + C_2$ et on trouve par exemple $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $A = PTP^{-1}$ en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$.

Or, d'une part, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et, d'autre part, $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. D et N commutent de sorte que

$$\exp(T) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D)(I_3 + N) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Enfin, on trouve

$$\exp(A) = P\exp(T)P^{-1} = \begin{pmatrix} e - e^{-1} & -e & e^{-1} \\ e - e^{-1} & e & e^{-1} - e \\ e - 2e^{-1} & -e & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

Corollaire 3.1 Exponentielle et inversibilité

- Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exp(a) \in GL(E)$ et $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Exercice 3.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

Exercice 3.7

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(\exp(\mathrm{A})) > 0$.
2. On suppose A **antisymétrique**. Montrer que $\exp(\mathrm{A}) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

4 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

On considère dans ce paragraphe des équations différentielles linéaires du type $x' = a(x)$ avec $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On remarque en particulier :

- qu'il s'agit d'une équation différentielle **homogène** ;
- que a **ne dépend pas de la variable**.

En considérant les matrices A et X de a et x dans une certaine base de E, ce système équivaut alors à $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$.

Proposition 4.1

Soit $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $x' = a(x)$ d'inconnue $x : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ est

$$\{t \mapsto \exp(ta)(u),\ u \in \mathrm{E}\}$$

De plus, l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ où $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}$ est l'application

$$t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0)$$

Proposition 4.2

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ d'inconnue $\mathrm{X} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est

$$\left\{t \mapsto \exp(t\mathrm{A})\mathrm{U},\ \mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right\}$$

De plus, l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$ où $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'application

$$t \mapsto \exp((t - t_0)\mathrm{A})\mathrm{X}_0$$

Exemple 4.1 Cas diagonalisable

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 3y - z \\ z' = 3x - 3y + z \end{cases}$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, ce système équivaut à $X' = AX$. On calcule $\chi_A = (X-2)(X-4)(X+2)$.
La matrice A est donc diagonalisable et, en étudiant les sous espaces propres, on trouve que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1}X$, le système $X' = AX$ équivaut à $Y' = DY$. Les solutions de ce système sont les applications

$$t \mapsto \exp(tD)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-2t} \\ be^{2t} \\ ce^{4t} \end{pmatrix}$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On en déduit que les solutions du système $X' = AX$ sont les applications

$$t \mapsto P\begin{pmatrix} ae^{-2t} \\ be^{2t} \\ ce^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ae^{-2t} \\ be^{2t} \\ ce^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ae^{-2t} + be^{2t} \\ be^{2t} - ce^{4t} \\ ae^{-2t} + ce^{4t} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions est

$$\mathrm{vect}\left(t \mapsto e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{4t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Remarque. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ une base de vecteurs propres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A. On note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre x_i. Les solutions du système $X' = AX$ sont les applications $t \mapsto \exp(tA)U$ avec $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En écrivant $U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$, on obtient que les solutions sont les applications $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} x_i$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ ou encore que l'ensemble des solutions est $\mathrm{vect}(t \mapsto e^{\lambda_i t} x_i)_{1 \le i \le n}$.

Exemple 4.2 Cas trigonalisable

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x - 3y + 4z \\ y' = 4x - 7y + 8z \\ z' = 6x - 7y + 7z \end{cases}$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, ce système équivaut à $X' = AX$. On calcule $\chi_A = (X+1)^2(X-3)$. En posant $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Ker}(A - 3I_3) = \mathrm{vect}(v_1)$ et $\mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{vect}(v_2)$. On cherche ensuite un vecteur v_3 tel que $(A + I_3)v_3 = v_2$ et on trouve $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1}X$, le système $X' = AX$ équivaut à $Y' = TY$. En posant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = D + N$, les matrices D et N commutent et $N^2 = 0$. Ainsi

$$\exp(tT) = \exp(tD)\exp(tN) = \exp(tD)(I_3 + tN) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Les solutions du système $Y' = TY$ sont donc les applications

$$t \mapsto \exp(tT)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{3t} \\ be^{-t} + cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix}$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On en déduit que les solutions du système $X' = AX$ sont les applications

$$t \mapsto P\begin{pmatrix} ae^{3t} \\ be^{-t} + cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ae^{3t} \\ be^{-t} + cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{3t} + be^{-t} + c(t-1)e^{-t} \\ 2ae^{3t} + 2be^{-t} + c(2t-1)e^{-t} \\ 2ae^{3t} + be^{-t} + cte^{-t} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions est

$$\mathrm{vect}\left(t \mapsto e^{3t}v_1, t \mapsto e^{-t}v_2, t \mapsto e^{-t}(v_3 + tv_2)\right)$$

Exercice 4.1

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que A et B commutent. En considérant l'équation différentielle $X' = (A + B)X$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

5 Variation des constantes (hors programme)

La méthode exposée dans ce paragraphe est hors programme dans le cas général. La méthode de variation des constantes n'est au programme que dans le cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.

On revient dans ce paragraphe au cas général, c'est-à-dire qu'on considère

- des équations différentielles du type $x' = a(t)(x) + b(t)$ où $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ sont des applications continues ;
- ou leurs versions matricielles $X' = A(t)X + B(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont également des applications continues.

Proposition 5.1 Wronskien

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de solutions de l'équation homogène $x' = a(t)(x)$. On appelle **wronskien** de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E, l'application $W : t \in I \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t))$.
De plus, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de l'ensemble des solutions de $x' = a(t)(x)$;

(ii) W ne s'annule pas sur I ;

(iii) il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

Exercice 5.1

Montrer que $W'(t) = \operatorname{tr}(a(t))W(t)$ pour tout $t \in I$.

Proposition 5.2 Wronskien (version matricielle)

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de solutions de l'équation homogène $X' = A(t)X$. On appelle **wronskien** de la famille $(X_1, \dots, X_n)$ l'application $W : t \in I \mapsto \left| X_1(t) \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; X_n(t) \right|$ (déterminant de la matrice dont les colonnes sont les $X_i(t)$).
De plus, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X$;

(ii) W ne s'annule pas sur I ;

(iii) il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

Exercice 5.2

Montrer que $W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))W(t)$ pour tout $t \in I$.

Proposition 5.3 Variation des constantes

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une **base** de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $x' = a(t)(x)$. Les solutions de $x' = a(t)(x) + b(t)$ sont les applications $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k$ où $c_1, \dots, c_n$ sont des applications dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} c_k' x_k = b$$

Proposition 5.4 Variation des constantes (version matricielle)

Soit $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ une **base** de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$. Les solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$ sont les applications $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{X}_k$ où $c_1, \dots, c_n$ sont des applications dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} c_k' \mathrm{X}_k = \mathrm{B}$$

Corollaire 5.1 Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants

- Soit $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors x est solution de $x' = a(x) + b(t)$ si et seulement si il existe $u : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \exp(ta)(u(t)) \qquad \text{et} \qquad u'(t) = \exp(-ta)(b(t))$$

- Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors X est solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t)$ si et seulement si il existe $\mathrm{U} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{X}(t) = \exp(t\mathrm{A})\mathrm{U}(t) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}'(t) = \exp(-t\mathrm{A})\mathrm{B}(t)$$

Remarque. On peut alors préciser que l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a(x) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est

$$t \mapsto \exp(ta)\left(\int_{t_0}^{t} \exp(-sa)(b(s))\, \mathrm{d}s\right) + \exp((t - t_0)a)(x_0) = \int_{t_0}^{t} \exp((t - s)a)(b(s))\, \mathrm{d}s + \exp((t - t_0)a)(x_0)$$

et que l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t) \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$ est

$$t \mapsto \exp(t\mathrm{A})\left(\int_{t_0}^{t} \exp(-s\mathrm{A})\mathrm{B}(s)\, \mathrm{d}s\right) + \exp((t - t_0)\mathrm{A})\mathrm{X}_0 = \int_{t_0}^{t} \exp((t - s)\mathrm{A})\mathrm{B}(s)\, \mathrm{d}s + \exp((t - t_0)\mathrm{A})\mathrm{X}_0$$

6 Equations différentielles linéaires scalaires

6.1 Equations différentielles linéaires scalaires résolues

Définition 6.1 Equation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

On appelle équation différentielle linéaire **scalaire** d'ordre n une équation de la forme

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} + b(t)$$

où

- $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$;
- b est une application continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$;
- x est une application inconnue de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 6.1 Lien entre équation différentielle linéaire scalaire et système différentiel linéaire

On considère l'équation différentielle linéaire **scalaire**

$$(\mathcal{E}) : \; x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} + b(t)$$

Posons

$$\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0(t) & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

et considérons le système différentiel

$$(\mathcal{S}) : \; \mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$$

Alors x est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{S})$.

Inversement, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ est solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si x_0 est solution de $(\mathcal{E})$.

Remarque. L'application $x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est donc une bijection de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ vers l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ de bijection réciproque l'application $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto x_0$.

Il est clair que $b = 0 \iff \mathrm{B} = 0$ et on vérifie que dans ce cas, les deux applications précédentes sont des isomorphismes.

Exemple 6.1

L'équation différentielle linéaire scalaire

$$x^{(3)} - e^t x'' + t^2 x' + x = \sin(t)$$

équivaut à

$$\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -t^2 & e^t \end{pmatrix} \mathrm{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$.

Corollaire 6.1 Problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire

Un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n est de la forme

$$\begin{cases} x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} + b(t) \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x^{(k)}(t_0) = x_k \end{cases}$$

avec $t_0 \in \mathrm{I}$ et $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

Exemple 6.2

Voici un exemple de problème de Cauchy pour une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2.

$$\begin{cases} y'' + e^t y' - \ln(t) y = \operatorname{th} t \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$$

Corollaire 6.2 Théorème de Cauchy linéaire

Soient

- $a_0, \dots, a_{n-1}$ des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$;
- b une application continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$;
- $t_0 \in \mathrm{I}$;
- $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$;

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} + b(t) \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x^{(k)}(t_0) = x_k \end{cases}$$

admet une unique solution.

Proposition 6.2 Equation différentielles scalaires homogènes

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des solutions l'équation différentielle **scalaire homogène**

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ de dimension n.

Proposition 6.3 Equation différentielles scalaires avec second membre

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}, b$ sont des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des solutions l'équation différentielle **scalaire**

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} + b(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ de direction le sous-espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle homogène associée.

6.2 Equations différentielles linéaires scalaires non résolues

On dit qu'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n est **non résolue** toute équation différentielle du type

$$(\mathcal{E}) : \sum_{k=0}^{(n)} a_k(t)x^{(k)} = b(t)$$

où $a_0, \dots, a_n, b$ sont des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, la fonction a_n pouvant s'annuler sur I. Si $b = 0$, on parle encore d'équation linéaire homogène.

Exemple 6.3

L'équation différentielle $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ est non résolue sur $\mathbb{R}$ mais elle l'est sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Attention !

- Si $b = 0$, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est encore un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ mais on ne peut rien affirmer quant à sa dimension.
- Le théorème de Cauchy linéaire ne s'applique plus. Notamment, l'existence d'une solution n'est pas garantie dans le cas où $b \neq 0$.
- Si $\mathcal{E}$ possède une solution, alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est un sous-espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée.

Exemple 6.4

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy' = 1$ est bien un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ de dimension 1, à savoir $\ln + \operatorname{vect}(x \mapsto 1)$ mais cette équation différentielle n'admet évidemment **aucune solution** sur $\mathbb{R}$ (considérer $x = 0$).

Exemple 6.5

Considérons l'équation $xy'' + 2y' = 0$. Cette équation équivaut à $(xy)'' = 0$. On trouve ainsi aisément que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ de dimension 2, à savoir $\operatorname{vect}(x \mapsto 1/x, x \mapsto 1)$.

Une solution sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $\mathbb{R}_+^*$ donc de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x} + \mu$ mais la continuité de cette solution en 0 impose $\lambda = 0$. On en déduit que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est $\operatorname{vect}(x \mapsto 1)$ qui est de dimension 1.

Méthode **Recherche de solutions développables en séries entières**

On peut rechercher des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire à coefficients **polynomiaux** sous forme de fonctions développables en séries entières. On rappelle que si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ où R désigne le rayon de convergence. De plus,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Enfin, on peut tirer parti de l'**unicité** du développement en série entière pour déterminer des relations de récurrences entre les a_n.

Exemple 6.6

On considère l'équation différentielle
$$(\mathrm{E}) \ : \ x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$$
On cherche une solution développable en série entière au voisinage de l'origine.
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ de somme $f(x)$.
On sait que
$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
donc
$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \ xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n}$$
De même
$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \ f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n-1}$$
donc
$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \ x(x-1)f''(x) = x^2 f''(x) - xf''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n}$$
D'un point de vue technique, l'idée essentielle est de ne faire apparaître **que des termes en** x^n (pas de «mélange» de puissances). Finalement,
$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \ x(x-1)f''(x) + 3xf'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[n(n-1)a_n - (n+1)na_{n+1} + 3na_n + a_n\right] x^n$$
ou encore
$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \ x(x-1)f''(x) + 3xf'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)^2 a_n - (n+1)na_{n+1}\right] x^n$$
L'**unicité du développement en série entière** permet alors d'affirmer que f est solution de (E) si et seulement si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1)^2 a_n = n(n+1)a_{n+1}$$
ou encore
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1)a_n = na_{n+1}$$
On vérifie aisément que cela équivaut à $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = na_1$. Ainsi les solutions de (E) développables en série entière sont les applications
$$x \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{\lambda x}{(1-x)^2}$$
avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

6.3 Cas des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Définition 6.2 Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2

Soient a et b des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation différentielle $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, on appelle **wronskien** du couple de solutions (x_1, x_2) l'application
$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = x_1x_2' - x_1'x_2$$

Remarque. Le wronskien est en particulier dérivable sur I et

$$W' = x_1x_2'' - x_1''x_2 = x_1(-ax_2' - bx_2) - x_2(-ax_1' - bx_1) = -aW$$

W vérifie donc une équation différentielle linéaire et, en vertu du théorème de Cauchy linéaire, on a deux alternatives :

- soit le wronskien est constamment nul sur I ;
- soit il ne s'annule pas sur I.

Dans le premier cas, la famille (x_1, x_2) est liée tandis que dans le second cas, (x_1, x_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions.
On peut également préciser une expression du wronskien : en fixant $t_0 \in I$,

$$\forall t \in I,\ W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$$

Exemple 6.7

Soit $q : I \to \mathbb{K}$ continue Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation différentielle $x'' + q(t)x = 0$. Le wronskien du couple (x_1, x_2) est

$$W = x_1x_2' - x_1'x_2$$

De plus, W est dérivable sur I et

$$W' = x_1x_2'' - x_1''x_2 = -qx_1x_2 + qx_1x_2 = 0$$

Le wronskien est donc constant sur I.

Proposition 6.4 Wronskien et base

Soient a et b des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation différentielle (E) : $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) (x_1, x_2) est une base de l'ensemble des solutions de (E) ;

(ii) le wronksien $w = x_1x_2' - x_1'x_2$ ne s'annule pas sur I ;

(iii) il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

Proposition 6.5 Méthode de variation des constantes

Soient a, b et c des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si (x_1, x_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle homogène $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, alors les solutions de l'équation différentielle $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ sont les applications $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$ où λ_1 et λ_2 sont des applications dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_1'x_1 + \lambda_2'x_2 = 0 \\ \lambda_1'x_1' + \lambda_2'x_2' = c \end{cases}$$

Remarque. Le système précédent admet bien des solutions. En effet, il s'agit d'un système de Cramer en vertu de la non nullité du wronskien de la base (x_1, x_2). On peut alors calculer λ_1' et λ_2' à l'aide des formules de Cramer :

$$\begin{cases}\lambda_1' = -\dfrac{cx_2}{x_1x_2' - x_1'x_2} \\ \lambda_2' = \dfrac{cx_1}{x_1x_2' - x_1'x_2}\end{cases}$$

Exemple 6.8

On considère l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-2t}}$$

Le polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle linéaire à coefficients constantes est $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ donc une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène est $(f_1, f_2) = (t \mapsto e^t, t \mapsto e^{2t})$. On cherche donc une solution de la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ avec λ_1 et λ_2 dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\begin{cases}\lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 = 0 \\ \lambda_1' f_1' + \lambda_2' f_2' = \dfrac{1}{1+e^{-2t}}\end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases}\lambda_1' e^t + \lambda_2' e^{2t} = 0 \\ \lambda_1' e^t + 2\lambda_2' e^{2t} = \dfrac{1}{1+e^{-2t}}\end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases}\lambda_1' = -\dfrac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} \\ \lambda_2' = \dfrac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\end{cases}$$

On peut choisir

$$\begin{cases}\lambda_1 = \arctan(e^{-t}) \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{-2t})\end{cases}$$

Une solution particulière est donc

$$\varphi : t \mapsto \arctan(e^{-t})e^t - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2t})e^{2t}$$

et l'ensemble des solutions est $\varphi + \operatorname{vect}(f_1, f_2)$.

Exemple 6.9

On considère l'équation différentielle

$$(1+t^2)y''+4ty'+2y=1+t^2$$

On résout d'abord l'équation homogène

$$(1+t^2)y''+4ty'+2y=0$$

On recherche des solutions dévéloppables en séries entières. Une application $y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est solution si et seulement si $a_{n+2}=-a_n$. On en déduit que $a_{2n}=(-1)^n a_0$ et que $a_{2n+1}=(-1)^n a_1$. Les solutions développables en séries entières sont donc les applications $t \mapsto \frac{a_0+a_1 t}{1+t^2}$. En posant $y_1 : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ et $y_2 : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$, (y_1, y_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. On trouve alors une solution particulière en appliquant la méthode de variation des constantes. On recherche une solution de la forme $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ avec λ_1 et λ_2 dérivables vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_1'}{1+t^2} + \dfrac{t\lambda_2'}{1+t^2} = 0 \\ \dfrac{-2t\lambda_1'}{(1+t^2)^2} + \dfrac{(1-t^2)\lambda_2'}{(1+t^2)^2} = 1 \end{cases}$$

ou enfin

$$\begin{cases} \lambda_1' + t\lambda_2' = 0 \\ -2t\lambda_1' + (1-t^2)\lambda_2' = (1+t^2)^2 \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{cases} \lambda_1' = -t-t^3 \\ \lambda_2' = 1+t^2 \end{cases}$$

On peut choisir

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^4}{4} \\ \lambda_2 = t + \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$$

On en déduit qu'une solution particulière est

$$t \mapsto \frac{t^2}{2(1+t^2)} + \frac{t^4}{12(1+t^2)}$$

Les solutions sont donc les applications

$$t \mapsto \frac{t^2}{2(1+t^2)} + \frac{t^4}{12(1+t^2)} + \frac{at+b}{1+t^2}$$

Remarque. On peut faire beaucoup plus simple en reconnaissant une formule de Leibniz : l'équation équivaut à

$$((1+t^2)y)''=1+t^2$$

Ceci équivaut donc à l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$(1+t^2)y=\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{12}+at+b$$

Les solutions sont donc les applications

$$t \mapsto \frac{t^2}{2(1+t^2)} + \frac{t^4}{12(1+t^2)} + \frac{at+b}{1+t^2}$$

Méthode **Méthode de Lagrange**

On considère l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre deux (E) : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$. Si l'on connaît une solution particulière φ de l'équation **homogène** associée à (E), on peut déterminer les solutions de (E) sous la forme $x = \lambda\varphi$, où λ est une application dérivable.

Exemple 6.10

On considère l'équation différentielle (E) : $t^2y'' + ty' - y = 1$ à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il est clair que $t \mapsto t$ est une solution de l'équation homogène. On recherche alors les solutions de (E) $y : t \mapsto \lambda(t)t$, ce qui donne $t^2\lambda'' + 3\lambda' t = 1$.
En effectuant le changement d'inconnue $\mu = \lambda'$, on obtient l'équation différentielle d'ordre 1, $t^2\mu' + 3t^2\mu = 1$. On trouve sans difficulté que les solutions sont les fonctions $\mu : t \mapsto \frac{a}{t^3} + \frac{1}{t^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$, ce qui donne $\lambda : t \mapsto \frac{b}{t^2} + c - \frac{1}{t}$ avec $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.
Les solutions de (E) sont finalement les fonction $y : t \mapsto \frac{b}{t} + ct - 1$ avec $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6.1

1. Déterminer une solution polynomiale non nulle φ de l'équation différentielle $(t^2 + 1)y'' - 2y = 0$.
2. A l'aide du changement d'inconnue $y = \varphi z$, déterminer les solutions de l'équation différentielle $(t^2 + 1)y'' - 2y = t$.