Polynômes annulateurs

Exercice 1 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit l'endomorphisme

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres de u, ainsi que les espaces propres associés.

Exercice 2

1. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_2 = 0$$

2. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{A}^3 - 8\mathrm{A}^2 + 21\mathrm{A} - 18\mathrm{I}_2 = 0$$

Exercice 3 ★ **TPE MP 2010**

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M}^3 - \mathrm{M}^2 - \mathrm{M} - 2\mathrm{I}_n = 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$.

Exercice 4 ★★

Déterminer les matrices $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\mathrm{M}^5 = \mathrm{M}^2$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = n$.

Exercice 5

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme unitaire annulateur de u. La décomposition de P en facteurs irréductibles unitaires s'écrit $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}_i$. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $\mathrm{N}_i = \mathrm{Ker}\, \mathrm{P}_i(u)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $\mathrm{F} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{F} \cap \mathrm{N}_i$.

Exercice 6 **TPE-EIVP PSI 2017**

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$, $\mathrm{C}^2 = 2\mathrm{A} + 3\mathrm{B}$, $\mathrm{C}^3 = 5\mathrm{A} + 6\mathrm{B}$. A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 7 ★★★

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(f) = 0$, $\mathrm{P}(0) = 0$ et $\mathrm{P}'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 8 ★★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$ est pair.

Exercice 9 ★★★

Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \mathrm{P}(\mathrm{X} + k) = 0$$

Exercice 10 ★★ **E3A MP 2019**

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $\mathrm{E}_n=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice identité de E_n sera notée I_n.
Pour $\mathrm{A}\in\mathrm{E}_n$ et $j\in[\![1,n]\!]$, on note A_j la j-ème colonne de la matrice A.
Soit u l'application qui à toute matrice A de E_n associe la matrice B dont les colonnes B_j sont

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ \mathrm{B}_j=\mathrm{S}-\mathrm{A}_j=\sum_{k=1,k\neq j}^{n}\mathrm{A}_k \text{ où } \mathrm{S}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_k$$

1. Dans cette question, $n=2$ et E_2 est muni de la base $\mathcal{B}=(\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4)$ où

$$\mathrm{K}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad \mathrm{K}_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\qquad \mathrm{K}_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad \mathrm{K}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

a. Vérifier que u est un endomorphisme de E_2.

b. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que u est un automorphisme de E_2.

c. Reconnaître la nature géométrique de l'automorphisme u en précisant ses éléments caractéristiques.

2. Exprimer $\det(u(\mathrm{A}))$ en fonction de $\det(\mathrm{A})$ dans les case $n=2$ et $n=3$.

On revient au cas général et on admettra que u est un endomorphisme de E_n.

3. Montrer à l'aide d'opérations sur les colonnes et en utilisant S que l'on a

$$\det(u(\mathrm{A}))=(-1)^{n-1}(n-1)\det(\mathrm{A})$$

4. **a.** Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de l'endomorphisme u.

b. En déduire les éléments propres de l'endomorphisme u. Est-il diagonalisable ?

5. Soinet J_n la matrice de E_n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $\mathrm{U}_n=\mathrm{J}_n-\mathrm{I}_n$.

a. Déterminer les colonnes du produit matriciel AU_n à l'aide de celles de A.

b. Retrouver alors le résultat de la question **4.a**.

Exercice 11 **Mines Télécom MP 2022**

Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres complexes et déterminer une matrice D diagonable semblable à A.

2. Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\mathrm{M}^3+\mathrm{M}=0$. Montrer que M est semblable à D.

3. A et M sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Diagonalisabilité

Exercice 12 ★★ **CCP PSI 2015**

L'endomorphisme

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})&\longrightarrow&\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}&\longmapsto&\begin{pmatrix}d&a\\b&c\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

est-il diagonalisable ?

Exercice 13 ★★ **CCP MP 2018**

Soient x un nombre réel et E_x l'ensemble des matrices $\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{M}^2+\mathrm{M}+x\mathrm{I}_n=0$.

1. Si $x\neq 0$, montrer qu'une matrice $\mathrm{M}\in\mathrm{E}_x$ est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à E_0 ?

2. Pour quelles valeurs de x tous les éléments de E_x sont ils diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

3. Déterminer l'ensemble T des traces des éléments de E_{-2}. Quel est son cardinal ?

Exercice 14 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + 2\mathrm{M}^\top \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $\operatorname{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Exercice 15 **CCP MP 2022**

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2$ ainsi que λ et μ deux complexes distincts et non nuls tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_p &= \mathrm{A} + \mathrm{B} \\ \mathrm{M} &= \lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B} \\ \mathrm{M}^2 &= \lambda^2\mathrm{A} + \mu^2\mathrm{B} \end{aligned}$$

1. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
2. Exprimer A en fonction de M et I_p.
3. Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
4. M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

Exercice 16 ★★★

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v diagonalisent dans une base commune.

Exercice 17 ★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors $\mathrm{A}^\top$ l'est aussi.

Exercice 18 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un endomorphisme f de E est dit *cyclique* s'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

1. On supose dans cette qustion que $n = 3$ et on considère un endomorphisme g de E dont la matrice dans une base de E est $\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer que g est cyclique et diagonalisable.
2. Un endomorphisme f cyclique est-il toujours diagonalisable ?
3. Soit f un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres distinctes deux à deux. Est-il cyclique ?
4. Soit f un endomorphisme diagonalisable et cyclique. Ses valeurs propres sont-elles distinctes deux à deux ?

Exercice 19 ★★★★ **Mines-Ponts MP 2015**

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversible et dont l'inverse appartient aussi à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{G}$, $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.

Exercice 20 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit $n \geqslant 2$ entier. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A} \neq \pm\mathrm{I}_n$.

1. Montrer que $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) \equiv n[2]$.
2. Montrer que $|\operatorname{tr}(\mathrm{A})| \leq n - 2$.

Exercice 21 **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (\mathrm{M}, \mathrm{M}^{-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2\}$$

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det \mathrm{M}| = 1$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{M}^d = \mathrm{I}_n$. On pose $\mathrm{A} = \frac{1}{3}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_n)$. Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{A}^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

3. Montrer qu'il existe un entier K_n majorant le cardinal des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 22 **Banque Mines-Ponts MP 2023**

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables commutant entre elles.

  a. Montrez que A_1 et A_2 sont simultanément diagonalisables.

  b. Conclure pour $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_p$ (on fera une récurrence).

2. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dans $\{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n\}$. Montrer que G est fini. Que dire de son cardinal ?

3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ distincts. Existe-t-il un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$?

Trigonalisabilité

Exercice 23 ★★★

Soient u et v deux endomorphismes trigonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v trigonalisent dans une base commune.

Exercice 24 **X MP 2010**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_n$ si et seulement si il existe $\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{S}\overline{\mathrm{S}}^{-1}$.

Nilpotence

Exercice 25 **CCINP MP 2022**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?

2. On suppose qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

  a. Quel est le polynôme caractéristique de B ?

  b. En déduire une contradiction.

3. Montrer que A est semblable à $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Polynôme minimal

Exercice 26 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A}^n = \mathrm{I}_n$ et telle que la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \dots, \mathrm{A}^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0$.

Exercice 27 **ENS MP 2011**

1. Soit A une matrice inversible réelle. Exprimer le polynôme minimal de A^{-1} en fonction de celui de A.

2. Soit A une matrice orthogonale réelle telle que 1 et -1 ne soient pas racines de son polynôme minimal. Montrer que A et A^{-1} ont même polynôme minimal. Montrer que le degré de ce polynôme minimal est pair.

Exercice 28

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $\mathrm{P}(f) \circ g - g \circ \mathrm{P}(f) = f \circ \mathrm{P}'(f)$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
3. Montrer que f est nilpotent.

Exercice 29 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}$ où $n \geq 3$.

1. Quel est le rang de A ? la dimension du noyau de A ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in]1, +\infty[$ tel que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$.
5. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 30 ★★

On considère un entier $n \geq 2$. Soit l'endomorphisme

$$u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n \end{array} \right.$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2.
2. u est-il diagonalisable ?
3. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u.

Exercice 31 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Donner le rang de B en fonction du rang de A.
2. Montrer que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$,
$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & \mathrm{P}(\mathrm{A}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{P}(0) \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$
3. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B l'est aussi, et donner ses valeurs propres.

Exercice 32 ★★ **Matrice compagnon**

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$.
2. Montrer que $\pi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{A}}$.
3. Déterminer les sous-espaces propres de $\mathrm{A}^\top$.

Exercice 33 **Endomorphismes cycliques**

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **a.** Pour $x \in \mathrm{E}$, on note $\mathrm{I}_{u,x} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{P}(u)(x) = 0_{\mathrm{E}}\}$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{I}_{u,x}$ est un idéal de $\mathbb{K}[x]$. On note $\pi_{u,x}$ son unique générateur unitaire. Justifier que $\pi_{u,x}$ divise π_u.

   b. Pour $x \in \mathrm{E}$, on note $\mathrm{E}_{u,x} = \{\mathrm{P}(u)(x), \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{E}_{u,x}$ est un sous-espace vectoriel de E et que $(u^k(x))_{0\leq k\leq \deg \pi_{u,x}-1}$ en est une base. En déduire la dimension de $\mathrm{E}_{u,x}$.

   c. Montrer que $\mathrm{E}_{u,x}$ est stable par u et que $\pi_{u_{|\mathrm{E}_{u,x}}} = \pi_{u,x}$.

2. Soient $x_1, \dots, x_p$ tels que les polynômes $\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}$ soient deux à deux premiers entre eux. On pose $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ et $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{p} \pi_{u,x_i}$.

   a. Montrer que $\pi_{u,x}$ divise P.

   b. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{E}_{x_1}, \dots, \mathrm{E}_{x_p}$ sont en somme directe.

   c. En déduire que $\pi_{u,x} = \mathrm{P}$ et $\mathrm{E}_{u,x} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{u,x_i}$.

3. En considérant la décomposition en facteurs irréductibles de π_u, montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

   (i) $\pi_u = \chi_u$.

   (ii) Il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$.

   (iii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   On dit dans ce cas que u est un endomorphisme *cyclique*.

Exercice 34 ★

Soient un entier $n \geq 2$ et $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer le polynôme minimal de U.
2. Réduire U.

Exercice 35 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On définit : $\forall m \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$. Déterminer le polynome minimal de A_m.

Exercice 36 ★★★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A admet le même polynôme minimal considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 37 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère un entier $n \geq 2$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A}^n = \mathrm{I}_n$ et telle que la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \dots, \mathrm{A}^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0$.

Exercice 38 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Énoncer le lemme de décomposition des noyaux appliqué à f dans le cas de deux polynômes premiers entre eux.
2. On suppose que le polynôme minimal de f est donné par $\mu_f = (\mathrm{X}^2+1)(\mathrm{X}^2+4)$. A l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls de E, x et y, tels que : $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.
3. On suppose que E est de dimension 4. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E. Donner alors la matrice de f dans cette base.

Exercice 39 ★★ **CCINP MP 2023**

Soient un entier $n \geq 3$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$ tel que

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de f ?
2. Justifier que le polynôme caractéristique de f peut s'écrire $\chi_f = \mathrm{X}^{n-2}\mathrm{P}$ où P est un polynôme unitaire de degré 2.
3. Calculer $f(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ ainsi que $f^2(e_n)$.
4. Déterminer χ_f.
5. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?

Exercice 40 ★★

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On suppose que AB est inversible et diagonalisable. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 41 ★★★

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 l'est.

Exercice 42 **Polynôme minimal et transposée**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathrm{A})^{\mathsf{T}} = \mathrm{P}(\mathrm{A}^{\mathsf{T}})$.
2. En déduire que $\pi_{\mathrm{A}} = \pi_{\mathrm{A}^{\mathsf{T}}}$.

Exercice 43 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{pmatrix}$.

1. Comparer le spectre de A et celui de M.
2. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, exprimer P(M) en fonction de P(A) et P′(A).
3. Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur A quant à la diagonalisabilité de M.

Exercice 44 **Saint-Cyr MP 2024**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On note π_u le polynôme minimal de u et p sa valuation (i.e. le plus petit degré des monômes non nuls de π_u).

1. On suppose que $p = 0$. Que peut-on en déduire sur u ?
2. Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im}(u^p)$.
3. On suppose $p \neq 0$. Montrer que p est le plus petit entier naturel non nul vérifiant l'égalité précédente.

Exponentielles

Exercice 45

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\exp(\mathrm{A})^{\mathsf{T}} = \exp(\mathrm{A}^{\mathsf{T}})$.
2. On suppose A symétrique dans cette question. Montrer que exp(A) est également symétrique.
3. Montrer que $\det(\exp(\mathrm{A})) > 0$.
4. On suppose A antisymétrique dans cette question. Montrer que $\exp(\mathrm{A}) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 46 ★

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$ de deux manières.

Exercice 47 ★

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$ de deux manières.

Exercice 48 ★★

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\operatorname{Ker}(\exp(u) - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(\exp(u) - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Im}(u)$.