Devoir à la maison n°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Partie I – Intégrales de Wallis

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$$

I.1 Calculer I_0 et I_1.

I.2 En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

I.3 En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de factorielles.

I.4 Vérifier que $(\mathrm{I}_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. En déduire que $\dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n \leq \mathrm{I}_{n+1} \leq \mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.5 Démontrer que $\mathrm{I}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_n$.

I.6 Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = \dfrac{\pi}{2}$.

I.7 En déduire que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie II – Formule de Stirling

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.

II.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

II.2 En déduire que (u_n) converge vers une certaine limite $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

II.3 Montrer que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et en déduire un équivalent de $n!$.