Interrogation écrite n°02

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

   L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ *est continue (par morceaux) sur* $]0,1[$. *Or* $\dfrac{1}{\ln t} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{t-1}$. *Or* $t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$ *n'est pas intégrable en* 1^-. *Ainsi* $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ *n'est pas intégrable en* 1^-. *Comme cette fonction est de signe constant sur* $]0,1[$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ *diverge.*

   Remarque. *Puisque* $\dfrac{1}{\ln t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ *est intégrable en* 0^+.

   ∎

2. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}-1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

   L'application $f\colon t \mapsto \dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}}$ *est continue (par morceaux) sur* $]0,+\infty[$. *De plus*

   $$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{i}{t^{1/2}}$$

   et $t \mapsto \dfrac{i}{t^{1/2}}$ *est intégrable en* 0^+ *donc* f *également. Enfin,* $|e^{it}| = 1$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *donc*

   $$f(t) \underset{t\to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

   et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ *est intégrable en* $+\infty$ *donc* f *également.*

   Finalement, f *est intégrable sur* $]0,+\infty[$. *A fortiori,* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge (absolument).* ∎

3. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t}$ à l'aide du changement de variable $u = \operatorname{sh} t$.

sh *induit une bijection de classe* $\mathcal{C}^1$ *strictement croissante de* $\mathbb{R}_+$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *donc*

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t \, \mathrm{d}t}{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = [\arctan u]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

∎

4. Déterminer un équivalent *simple* de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{e^t \, \mathrm{d}t}{t}$ en 0^+.

On sait que

- $\dfrac{e^t}{t} \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$ *;*
- $\forall t \in]0, 1], \ \dfrac{1}{t} \geq 0$ *;*
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ *diverge.*

On en déduit que $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x$. ∎

5. Déterminer un équivalent *simple* de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$ en $+\infty$.

On sait que

- $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ *;*
- $\forall t \in [1, +\infty[, \ \dfrac{1}{t^2} \geq 0$ *;*
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ *converge.*

On en déduit que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{x}$. ∎