

DEVOIR SURVEILLÉ N°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Série de restes

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n \geq n_0} a_n$ une série à termes réels. Dans le cas où cette série converge, on note R_n le reste de rang n de cette série, c'est-à-dire $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout entier $n \geq n_0$.
On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} R_n$ dans plusieurs cas.

I Cas d'une série géométrique

On se donne $q \in \mathbb{R}$ et on pose $a_n = q^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (on a donc $n_0 = 0$).

- 1 Pour quelles valeurs de q la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge-t-elle ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de cette partie.
- 2 Exprimer R_n en fonction de q et n .
- 3 En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} R_n$ converge et calculer sa somme.

II Cas d'une série de Riemann

On se donne dans cette partie $\alpha \in \mathbb{R}$ et on pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a donc $n_0 = 1$).

- 4 Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$ converge-t-elle ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de cette partie.
- 5 A l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$.
- 6 En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} R_n$ converge.

III Cas de la série harmonique alternée

Dans cette partie, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a donc $n_0 = 1$). On note également S_n la somme partielle de rang n de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$, c'est-à-dire $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

7 Calculer $\int_0^1 x^n dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

8 En déduire que $S_n = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

9 En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$.

10 Exprimer R_n à l'aide d'une intégrale puis, à l'aide d'une intégration par parties, déterminer deux constantes réelles α et β telles que $\alpha > 1$ et $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}\beta}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

11 En déduire la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} R_n$.

Problème 2 – Puissances de matrices

I Un anneau de matrices

On note \mathcal{A} l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1 Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

2 Montrer que \mathcal{A} est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3 On pose $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que (I_3, M, M^2) est une base de \mathcal{A} .

4 Exprimer M^3 en fonction de I_3 et M .

II Trace de puissances

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 4$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+1} - 4u_n$.

5 Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_k, b_k, c_k tels que $M^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix}$.

6 Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_k) et deux relations de récurrence liant les suites (b_k) et (c_k) .

7 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle z_k le nombre complexe $z_k = b_k + ic_k$. Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k et montrer que $b_k = \operatorname{Re}((1+i)^k)$.

8 Retrouver ce dernier résultat en trouvant une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite (b_k) .

9 Montrer que la suite (u_n) est à valeurs entières.

10 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \operatorname{tr}(M^n)$.

11 Soit p un nombre premier. Montrer que pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$.

12 En déduire que p divise u_p .

Exercice 1 ★★

Somme d'Abel (d'après CCP MP 2014)

Soient $(a_n)_{n \geq n_0}$ et $(B_n)_{n \geq n_0}$ deux suites complexes. On définit alors deux suites $(A_n)_{n \geq n_0}$ et $(b_n)_{n \geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0, A_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$$

$$\forall n \geq n_0, b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que $\sum_{k=n_0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ pour tout entier $n \geq n_0$.
2. Dans cette question, on suppose que la suite (A_n) est bornée et que (B_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle.
 - a. Montrer que la série $\sum_{n \geq n_0} b_n$ converge.
 - b. En déduire que la série $\sum_{n \geq n_0} a_n B_n$ converge.
 - c. En déduire en particulier que la série $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n B_n$ converge. On n'utilisera pas le critère spécial des séries alternées.
3. Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$. On donnera le résultat sous la forme $re^{i\varphi}$ où $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.
 - b. Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$.
On précisera notamment dans les cas de convergence s'il s'agit ou non de convergence absolue. De même, dans les cas de divergence, on précisera s'il s'agit ou non de divergence grossière.
 - c. En déduire la nature des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.
4. Montrer que si la suite (B_n) converge vers 0, si la suite (A_n) est bornée et si la série $\sum_{n \geq n_0} b_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum_{n \geq n_0} a_n B_n$ est convergente.