Fonctions à valeurs vectorielles

Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées sont des fonctions définies sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel normé** E **de dimension finie** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1 Dérivabilité

1.1 Définition

Définition 1.1 Dérivabilité en un point

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$. On dit que f est **dérivable** en $a \in \mathrm{I}$ si $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ admet une limite en a. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$.

Proposition 1.1 Dérivabilité et continuité

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$. Si f est dérivable en $a \in \mathrm{I}$, alors f est continue en a.

Définition 1.2 Négligeabilité

Soient f une fonction à valeurs dans E et g une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$, toutes deux définies sur un voisinage de a (éventuellement non définies en a). On dit que f est **négligeable** devant g en a si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 0$. On note alors $f \underset{a}{=} o(g)$.

Proposition 1.2 Dérivabilité et développement limité

Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a. Dans ce cas, ce développement limité est

$$f(t) \underset{t \to a}{=} f(a) + f'(a)(t - a) + o(t - a)$$

Proposition 1.3 Dérivabilité et fonctions coordonnées

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i = e_i^* \circ f$ est dérivable en a. Dans ce cas,

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

ou encore

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (e_i^* \circ f)'(a) = e_i^* \circ f'(a)$$

Remarque. Le fait que $f_i = e_i^* \circ f$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ signifie que :

$$\forall t \in \mathrm{I},\ f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

Définition 1.3 Dérivabilité à gauche, à droite

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$.
Alors f est **dérivable à droite** en $a \in \mathrm{I}$ si $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ admet une limite à droite en a.
De même, f est **dérivable à gauche** en $a \in \mathrm{I}$ si $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ admet une limite à gauche en a.

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.4 Combinaison linéaire

Soient f et g deux fonctions de I dans E dérivables en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I). Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a (resp. sur I) et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Proposition 1.5

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ et $\lambda : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ dérivables en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I). Alors λf est dérivable en a (resp. sur I) et $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.

Proposition 1.6 Composition par une application linéaire

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ dérivable en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I) et $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors $\mathrm{L} \circ f$ est dérivable en a (resp. sur I). De plus, $(\mathrm{L} \circ f)' = \mathrm{L} \circ f'$.

Remarque. On retrouve le fait que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est dérivable alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i = e_i^* \circ f$ est aussi dérivable et $(e_i^* \circ f)' = e_i^* \circ f'$.

Proposition 1.7 Dérivabilité et application bilinéaire

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathrm{F}$ dérivables en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I). Soit $\mathrm{B} : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ une application **bilinéaire**. Alors $\mathrm{B}(f, g)$ est dérivable en a (resp. sur I). De plus, $\mathrm{B}(f, g)' = \mathrm{B}(f', g) + \mathrm{B}(f, g')$.

Remarque. E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

Exercice 1.1

Soit $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une application dérivable. Montrer que si $\mathrm{A}(t)$ et $\mathrm{A}'(t)$ commutent pour tout $t \in \mathrm{I}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est dérivable sur I et que $(\mathrm{A}^n)' = n\mathrm{A}'\mathrm{A}^{n-1} = n\mathrm{A}^{n-1}\mathrm{A}'$.

Corollaire 1.1

Soient E un espace euclidien, $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ deux fonctions dérivables en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I). Alors $\langle f, g\rangle$ est dérivable en a (resp. sur I) et $\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$.

Exemple 1.1

Si E est un espace euclien et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est une fonction dérivable sur I **ne s'annulant pas sur** I, alors $\|f\|$ est dérivable sur I et $\|f\|' = \dfrac{\langle f', f\rangle}{\|f\|}$.

Proposition 1.8 Dérivabilité et application multilinéaire

Soient $f_1 : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1, \dots, f_p : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_p$ dérivables en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I). Soit $\mathrm{M} : \prod_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i \to \mathrm{F}$ une application **multilinéaire**. Alors $\mathrm{M}(f_1, \dots, f_p)$ est dérivable en a (resp. sur I). De plus,

$$\mathrm{M}(f_1, \dots, f_p)' = \mathrm{M}(f_1', f_2, \dots, f_p) + \mathrm{M}(f_1, f_2', \dots, f_p) + \dots + \mathrm{M}(f_1, \dots, f_{p-1}, f_p')$$

Remarque. $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

Corollaire 1.2

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $f_1, \dots, f_p$ des applications de I dans E dérivables en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I). Alors $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_p)$ est dérivable en a (resp. sur I) et

$$\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_p)' = \det_{\mathcal{B}}(f_1', f_2, \dots, f_p) + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2', \dots, f_p) + \dots + \det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_{p-1}, f_p')$$

Proposition 1.9 Composition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ dérivable sur I et $f : \mathrm{J} \to \mathrm{E}$ dérivable sur J. Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

1.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 1.4 Fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si f est dérivable k fois sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est indéfiniment dérivable sur I.

Notation 1.1

On note $\mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans E.

Proposition 1.10 Combinaison linéaire

Soit $(f,g) \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{E})^2$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{E})^2$.
De plus, si $k \in \mathbb{N}$, $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.

Remarque. Ceci signifie que $\mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{E})$ est un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** et, plus précisément, un sous-espace vectoriel de E^{I}.

Proposition 1.11 Composition par une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{E})$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors $\mathrm{L} \circ f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{F})$.
De plus, si $k \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{L} \circ f)^{(k)} = \mathrm{L} \circ f^{(k)}$.

Proposition 1.12 Classe $\mathcal{C}^k$ et application bilinéaire

Soient $f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{E})$ et $g \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{F})$. Soit $\mathrm{B} : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ une application **bilinéaire**. Alors $\mathrm{B}(f,g) \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{G})$. De plus, si $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{B}(f,g)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{B}(f^{(j)}, g^{(k-j)})$$

Proposition 1.13 Classe $\mathcal{C}^k$ et application multilinéaire

Soient $f_1 \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{E}_1)$, …, $f_p \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{E}_p)$. Soit $\mathrm{M} : \prod_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i \to \mathrm{F}$ une application **multilinéaire**. Alors $\mathrm{M}(f_1,\dots,f_p) \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{F})$.

Remarque. $\mathrm{E}_1,\dots,\mathrm{E}_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

Proposition 1.14 Composition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{J})$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{J},\mathrm{E})$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I},\mathrm{E})$.

2 Intégration

2.1 Définition et propriétés générales

Définition 2.1 Fonctions continues par morceaux

Une fonction $f : [a,b] \to \mathrm{E}$ est dite **continue par morceaux** si ses coordonnées dans une base de E le sont.
Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est dite **continue par morceaux** si elle est continue par morceaux sur **tout segment** de I.

Remarque. La continuité par morceaux ne dépend pas de la base choisie.

Notation 2.1

On notera $\mathcal{C}_m(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans E

Définition 2.2 Intégrale d'une fonction vectorielle

Soient $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathrm{E})$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La quantité

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b e_k^* \circ f(t) \,\mathrm{d}t \right) e_k$$

est indépendante de la base de E choisie. On la note $\displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f$.

Les propriétés des intégrales des fonctions à valeurs **vectorielles** sont quasiment les mêmes que celles des intégrales à valeurs **numériques**.

Proposition 2.1 Linéarité de l'intégrale

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathrm{E})^2$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) \,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t) \,\mathrm{d}t$$

Remarque. Ceci signifie que l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t$ est une **application linéaire** de $\mathcal{C}_m([a, b], \mathrm{E})$ dans E.

Exercice 2.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathrm{E})$. Montrer que

$$\mathrm{L}\left(\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t \right) = \int_a^b \mathrm{L}(f(t)) \,\mathrm{d}t$$

Proposition 2.2 Relation de Chasles

Soient a, b, c trois réels tels que $a \leq c \leq b$ et f continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E. Alors

$$\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t) \,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t) \,\mathrm{d}t$$

Remarque. On en déduit notamment que $\displaystyle\int_b^a f(t) \,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t$.

Proposition 2.3 Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathrm{E})$. Alors
$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Attention ! L'ordre des bornes importe. On doit avoir $a \leq b$.

2.2 Sommes de Riemman

Définition 2.3 Somme de Riemann

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathrm{E})$. On appelle **somme de Riemann** de f l'une des deux sommes suivantes :

$$\mathrm{R}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \qquad \mathrm{R}'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

où $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et n est un entier non nul.

Proposition 2.4 Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathrm{E})$. Alors les suites $(\mathrm{R}_n(f))$ et $(\mathrm{R}'_n(f))$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. L'ordre des bornes n'est pas important.

2.3 Théorème fondamental de l'analyse et conséquences

Définition 2.4 Primitive

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathrm{I},\mathrm{E})$. On dit que $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $\mathrm{F}' = f$.

Théorème 2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Soient $f \in \mathcal{C}(\mathrm{I},\mathrm{E})$ et $a \in \mathrm{E}$. Alors $\mathrm{F}_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'**unique primitive de f sur** I **s'annulant en** a.

Corollaire 2.1

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathrm{E})$. Si F est une **primitive** de f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Corollaire 2.2 Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathrm{E})$. Si $\|f'\| \leq \mathrm{K}$ sur I, alors

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ \|f(b)-f(a)\| \leq \mathrm{K}|b-a|$$

Remarque. Il est essentiel que I soit un **intervalle**.

Remarque. Ceci signifie que f est K-lipschitzienne sur I.

Remarque. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **segment** $[a,b]$, $\|f'\|$ est continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$: elle y admet donc un maximum M. f est alors M-lipschitzienne.

Techniques de calcul

Puisque l'intégrale d'une fonction vectorielle est définie à l'aide des intégrales de ses coordonnées dans une base (i.e. des intégrales de fonctions numériques), les techniques de calcul vues en première année s'appliquent encore :

- intégration par parties ;
- changement de variable.

3 Formules de Taylor

Proposition 3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathrm{E})$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

Remarque. L'ordre de a et b n'importe pas.

Proposition 3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathrm{E})$. Alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{[a,b]} \left\| f^{(n+1)} \right\|$$

Remarque. L'ordre de a et b n'importe pas.

Remarque. $\left\| f^{(n+1)} \right\|$ admet bien un maximum sur le **segment** $[a,b]$ puisqu'elle y est **continue**.

Proposition 3.3 Formule de Taylor-Young

Soient $f \in \mathcal{C}^n(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ et $a \in \mathrm{I}$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par

$$f(t) \underset{t \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + o\left((t-a)^n\right)$$

ou de manière équivalente

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o\left(h^n\right)$$

4 Suites et séries de fonctions

4.1 Suites de fonctions

Théorème 4.1 Interversion limite / primitive

Soient (g_n) une suite de fonctions continues sur un **intervalle** I à valeurs dans E at $a \in \mathrm{I}$. On suppose que (g_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{G}_n : x \in \mathrm{I} \mapsto \int_a^x g_n(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G} : x \in \mathrm{I} \mapsto \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t$$

Alors (G_n) converge uniformément vers la fonction G sur tout segment de I.

Corollaire 4.1 Interversion limite / intégration

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un **segment** $[a, b]$ à valeurs dans E convergeant **uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Théorème 4.2 Interversion limite / dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans E. Si

- (f_n) converge **simplement** vers une fonction f sur I ;
- (f_n') converge **uniformément** vers une fonction g sur tout segment de I.

Alors

- (f_n) converge **uniformément** vers f sur tout segment de I ;
- f est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- $f' = g$.

Corollaire 4.2

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I à valeurs dans E. Si

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ;
- $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors

- la limite simple f de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément vers $f^{(j)}$ sur tout segment de I.

4.2 Séries de fonctions

Théorème 4.3 Interversion série / primitive

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions continues sur un **intervalle** I à valeurs dans E et $a \in \mathrm{I}$. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{F}_n : x \in \mathrm{I} \mapsto \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F} : x \in \mathrm{I} \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n$ converge uniformément vers la fonction F sur tout segment de I.

Corollaire 4.3 Interversion série / intégration

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions continues sur un **segment** $[a, b]$ à valeurs dans E convergeant **uniformément** sur $[a, b]$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

Théorème 4.4 Interversion série / dérivation

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans E. Si

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge **simplement** sur I ;
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge **uniformément** sur tout segment de I.

Alors

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge **uniformément** sur tout segment de I ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Proposition 4.1

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie**. Alors l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tu)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$.

Corollaire 4.4

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I à valeurs dans E. Si

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(j)}$ converge uniformément vers $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}$ sur tout segment de I.

Exercice 4.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées successives.

4.3 Approximation uniforme

Théorème 4.5 Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier

Soit f une fonction **continue par morceaux** sur un **segment** $[a, b]$ à valeurs dans F. Alors il existe une suite (φ_n) de fonctions **en escalier** sur $[a, b]$ à valeurs dans F **convergeant uniformément** vers f.

Remarque. Si on note $\mathcal{C}_m([a, b], \mathrm{F})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans F et $\mathcal{E}([a, b], \mathrm{F})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans F, ceci signifie que $\mathcal{E}([a, b], \mathrm{F})$ est **dense** dans $\mathcal{C}_m([a, b], \mathrm{F})$ pour la norme uniforme.