

# INTÉGRALES IMPROPRES

On a défini en première année l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Il s'agit maintenant de donner un sens si possible à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle autre qu'un segment. On parle alors d'intégrales impropres ou généralisées.

## Exemple 0.1

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  est une intégrale impropre puisque  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $[1, +\infty[$  mais  $[1, +\infty[$  n'est pas un segment.

## Exemple 0.2

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$  est une intégrale impropre car  $\tan$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  mais  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  n'est pas un segment.

Dans la suite  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Convergence d'intégrales

### 1.1 Continuité par morceaux

On a vu en première année la définition d'une fonction continue par morceaux sur un **segment**. On peut étendre cette notion à un intervalle quelconque.

#### Définition 1.1 Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On dit que  $f$  est continue par morceaux si la restriction de  $f$  à tout segment inclus dans  $I$  est continue par morceaux.

#### Exemple 1.1

- $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .
- $x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  n'est pas continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

### 1.2 Intégrales impropres

**Définition 1.2 Intégrale convergente sur un intervalle semi-ouvert**

- Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tels que  $a \leq b$ . Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b[$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On dit que l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b[$  **converge** si  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  admet une limite en  $b^-$ . Cette limite est alors notée  $\int_a^b f(t) dt$ . Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.
- Soient  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ . Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $]a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On dit que l'intégrale de  $f$  sur  $]a, b]$  **converge** si  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  admet une limite en  $a^+$ . Cette limite est alors notée  $\int_a^b f(t) dt$ . Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.

**REMARQUE.**

- Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b[$  alors pour tout  $c \in [a, b[$ , les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_c^b f(t) dt$  sont de même nature.
- Si  $f$  est continue par morceaux sur  $]a, b]$  alors pour tout  $c \in ]a, b]$ , les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^c f(t) dt$  sont de même nature.

**Analogie avec les séries**

Par analogie avec les séries, on peut définir le concept d'«intégrale partielle» et de «reste».

- Dans le cas d'une intégrale sur  $[a, b[$ , l'«intégrale partielle» sera  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  pour  $x \in [a, b[$ . On peut alors dire que l'intégrale converge si l'«intégrale partielle» admet une limite finie en  $b^-$ . Dans ce cas, le «reste» sera  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  et il est de limite nulle en  $b^-$ .
- Dans le cas d'une intégrale sur  $]a, b]$ , l'«intégrale partielle» sera  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  pour  $x \in ]a, b]$ . On peut alors dire que l'intégrale converge si l'«intégrale partielle» admet une limite finie en  $a^+$ . Dans ce cas, le «reste» sera  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  et il est de limite nulle en  $a^+$ .



**ATTENTION!** Contrairement aux séries, une intégrale du type  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  peut converger sans que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f = 0$ . Pire,  $f$  peut même ne pas être bornée.

**Exemple 1.2**

- Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'intégrale  $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$ .
- Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'intégrale  $\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha}$  est convergente si et seulement si  $\alpha < 1$ .

**Exemple 1.3**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$  converge si et seulement si  $a > 0$ .

**Définition 1.3 Intégrale sur un intervalle ouvert**

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tel que  $a \leq b$  et  $f$  continue par morceaux sur  $]a, b[$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Les convergences des intégrales de  $f$  sur  $[c, b[$  et sur  $]a, c]$  ne dépendent pas de  $c \in ]a, b[$ . Dans le cas où ces deux intégrales convergent, on dit que l'intégrale de  $f$  sur  $]a, b[$  converge et on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Cette quantité ne dépend pas de  $c \in ]a, b[$ .

**Exemple 1.4**

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  diverge.

**REMARQUE.** Si  $I = ]a, b[$  est un intervalle **borné** et si  $f$  est continue par morceaux sur  $I$  et admet des limites finies en  $a^+$  et  $b^-$ , alors l'intégrale de  $f$  sur  $I$  converge.

En particulier, si une fonction  $f$  continue sur  $I = ]a, b[$  est prolongeable en une fonction continue sur le segment  $[a, b]$ , alors l'intégrale de  $f$  sur  $I$  converge.

Une telle intégrale est appelée **faussement impropre**.

**1.3 Propriétés****Proposition 1.1**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On pose  $a = \inf I$  et  $b = \sup I$ .

**Linéarité** Si les intégrales de  $f$  et  $g$  sur  $I$  convergent, alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , l'intégrale de  $\lambda f + \mu g$  sur  $I$  converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions dont l'intégrale sur  $I$  converge est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et l'application qui à une telle fonction associe son intégrale sur  $I$  est une forme linéaire.

**Positivité** Si  $f$  est positive sur  $I$  et si l'intégrale de  $f$  sur  $I$  converge, alors  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ .

**Stricte positivité** On suppose  $a < b$ . Si  $f$  est positive et continue sur  $I$  et si  $\int_a^b f(t) dt = 0$ , alors  $f$  est nulle sur  $I$ .

**Relation de Chasles** Si l'intégrale de  $f$  sur  $I$  converge, alors pour tout  $c \in ]a, b[$ ,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$



**ATTENTION !** Prendre garde à l'ordre des bornes pour la positivité.



**ATTENTION !** L'intégrale  $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$  peut converger sans que  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  convergent. Par exemple, on ne peut pas écrire

$$\int_2^{+\infty} \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t-1} - \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

En effet, la première intégrale converge tandis que les deux suivantes divergent.

**REMARQUE.** Si  $\int_a^b f(t) dt$  converge et  $\int_a^b g(t) dt$  diverge, alors  $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt$  diverge.

### Proposition 1.2 Fonctions à valeurs complexes

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On pose  $a = \inf I$  et  $b = \sup I$ .

Alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge si et seulement si  $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$  et  $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$  convergent et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

### Exercice 1.1

Calculer  $\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(t) dt$  et  $\int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(t) dt$

### Proposition 1.3 Dérivation

- Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tels que  $a \leq b$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b[$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b[$  **converge**, alors  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  est dérivable sur  $[a, b[$ , de dérivée  $-f$ .
- Soient  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si l'intégrale de  $f$  sur  $]a, b]$  **converge**, alors  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur  $]a, b]$  de dérivée  $f$ .

## 2 Intégrabilité

### 2.1 Définition

#### Définition 2.1 Intégrabilité

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est **intégrable** sur  $I$  ou que l'intégrale de  $f$  sur  $I$  **converge absolument** si l'intégrale de  $|f|$  sur  $I$  converge.

**REMARQUE.** On remarquera l'analogie avec l'absolue convergence pour les séries.

**REMARQUE.** Pour une fonction de **signe constant**, l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale.

**REMARQUE.** Si  $I = ]a, b[$  est un intervalle **borné** et si  $f$  est continue par morceaux sur  $I$  et admet des limites finies en  $a^+$  et  $b^-$ ,  $f$  est intégrable sur  $I$ .

### Proposition 2.1 Intégrales de Riemann

Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$  si et seulement si  $\alpha > 1$ .
- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est intégrable sur  $]0, a[$  si et seulement si  $\alpha < 1$ .

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a < b$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$  est intégrable sur  $]a, b]$  si et seulement si  $\alpha < 1$ .
- $x \mapsto \frac{1}{|x-b|^\alpha}$  est intégrable sur  $[a, b[$  si et seulement si  $\alpha < 1$ .

### Proposition 2.2 Exponentielles

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Alors  $t \mapsto e^{-at}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  si et seulement si  $a > 0$ .

### Notation 2.1 Espace $L^1(I, \mathbb{K})$

On note  $L^1(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

## 2.2 Intégrabilité par comparaison

### Proposition 2.3

- Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tels que  $a \leq b$ . Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $[a, b[$  à **valeurs positives**. L'intégrale de  $f$  sur  $[a, b[$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est majorée sur  $[a, b[$ .
- Soient  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ . Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $]a, b]$  à **valeurs positives**. L'intégrale de  $f$  sur  $]a, b]$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  est majorée sur  $]a, b]$ .

**REMARQUE.** Dans le cas où  $f$  est **positive** et  $\int_a^b f(t) dt$  diverge, on pourra noter  $\int_a^b f(t) dt = +\infty$ .

### Proposition 2.4 Majoration

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$  telles que  $0 \leq f \leq g$  sur  $I$ . Si l'intégrale de  $g$  sur  $I$  converge, alors l'intégrale de  $f$  sur  $I$  converge également.

**Proposition 2.5 Majoration**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si  $|f| \leq |g|$  sur  $I$  et si  $g$  est intégrable sur  $I$ , alors  $f$  est intégrable sur  $I$ .

**Exemple 2.1**

$f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^2 + 1}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . En effet,

- $f$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ ;
- pour tout  $t \in [1, +\infty[$ ,  $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$  et  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

**Proposition 2.6 Inégalité triangulaire**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si  $f$  est intégrable sur  $I$ , alors l'intégrale de  $f$  sur  $I$  converge. De plus,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

où  $a = \inf I$  et  $b = \sup I$ .

**REMARQUE.** Ce résultat est à mettre en parallèle avec le fait que la convergence absolue implique la convergence pour les séries.



**ATTENTION !** L'intégrale d'une fonction peut très bien converger sans que la fonction soit intégrable. On parle alors d'intégrale **semi-convergente**.

**Exemple 2.2**

L'intégrale de  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  sur  $]0, +\infty[$  converge mais cette fonction n'est pas intégrable sur  $]0, +\infty[$ . Autrement dit,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge mais pas absolument.

**Proposition 2.7 Structure d'espace vectoriel**

L'ensemble  $L^1(I, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Exercice 2.1**

On note  $L^2(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues par morceaux sur  $\mathbb{K}$  telles que  $f^2$  est intégrable sur  $I$ . Montrer que  $L^2(I, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Proposition 2.8 Domination**

- Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tels que  $a \leq b$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b[$ . Si  $f = \mathcal{O}(g)$  et si  $g$  est intégrable sur  $[a, b[$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$ .
- Soient  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $]a, b]$ . Si  $f = \mathcal{O}(g)$  et si  $g$  est intégrable sur  $]a, b]$ , alors  $f$  est intégrable sur  $]a, b]$ .

**Exemple 2.3**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ . Si  $f$  est continue par morceaux et bornée sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

**Proposition 2.9 Négligeabilité**

- Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tels que  $a \leq b$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b[$ . Si  $f = o(g)$  et si  $g$  est intégrable sur  $[a, b[$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$ .
- Soient  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $]a, b]$ . Si  $f = o(g)$  et si  $g$  est intégrable sur  $]a, b]$ , alors  $f$  est intégrable sur  $]a, b]$ .

**Exemple 2.4**

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1} dt$ .

Tout d'abord,  $t \mapsto \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1}$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

Remarquons ensuite que  $\frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . Or  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  donc  $t \mapsto \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  et même sur  $[0, +\infty[$ . A fortiori,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1} dt$  converge.

**Exemple 2.5**

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ .

Tout d'abord,  $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$  est continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ .

Remarquons ensuite que  $\frac{1}{\sqrt{t}} = o\left(\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\right)$ . Si l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$  convergerait, alors la  $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$  serait intégrable sur  $[1, +\infty[$ , puisqu'elle y est positive. Par conséquent,  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  serait également intégrable sur  $[1, +\infty[$ , ce qui n'est pas puisque  $\frac{1}{2} \leq 1$ . On en déduit que  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$  diverge.

**Proposition 2.10 Equivalence**

- Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tels que  $a \leq b$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b[$ . Si  $f \sim_{b^-} g$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  si et seulement si  $g$  l'est.
- Soient  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $]a, b]$ . Si  $f \sim_{a^+} g$ , alors  $f$  est intégrable sur  $]a, b]$  si et seulement si  $g$  l'est.

**Exemple 2.6**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, +\infty[$ . Si  $f$  admet une limite non nulle en  $+\infty$ , alors  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  diverge.

**Exemple 2.7**

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^2 + t} dt$ .

Tout d'abord,  $t \mapsto \frac{e^{1/t}}{t^2 + t}$  est continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ .

Remarquons ensuite que  $\frac{e^{1/t}}{t^2 + t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ . Comme  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ ,  $t \mapsto \frac{e^{1/t}}{t^2 + t}$  l'est également. Notamment,  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^2 + t} dt$  converge.

**Exemple 2.8**

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 + t^3} dt$ .

Tout d'abord,  $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2 + t^3}$  est continue par morceaux sur  $]0, 1]$ .

Remarquons que  $\frac{\sin t}{t^2 + t^3} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$ . Comme  $t \mapsto \frac{1}{t}$  n'est pas intégrable sur  $]0, 1]$ ,  $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2 + t^3}$  ne l'est pas non plus. Comme cette fonction est positive sur  $]0, 1]$ ,  $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 + t^3} dt$  diverge.

**REMARQUE.** Les résultats précédents peuvent se reformuler en termes de convergence d'intégrale. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b[$ . On suppose que  $g$  est de **signe constant** au voisinage de  $b^-$ .

- Si  $f = \mathcal{O}(g)$ , la convergence de  $\int_a^b g(t) dt$  implique la convergence de  $\int_a^b f(t) dt$ .
- Si  $f = o(g)$ , la convergence de  $\int_a^b g(t) dt$  implique la convergence de  $\int_a^b f(t) dt$ .
- Si  $f \sim o(g)$ , la convergence de  $\int_a^b g(t) dt$  équivaut à la convergence de  $\int_a^b f(t) dt$ .

On a bien entendu des résultats similaires lorsque l'on remplace l'intervalle  $[a, b[$  par l'intervalle  $]a, b]$ .

On donne enfin des exemples classiques de fonctions définies par des intégrales.



**Exemple 2.9 Fonction  $\Gamma$  d'Euler**

La fonction  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Tout d'abord, la fonction  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- De plus,  $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$  et la fonction positive  $t \mapsto t^{x-1}$  est intégrable au voisinage de  $0^+$  si et seulement si  $x > 0$ .
- Enfin,  $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1/t^2)$  et la fonction positive  $t \mapsto 1/t^2$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

Ainsi  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $x > 0$ . Comme cette fonction est positive, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  converge si et seulement si  $x > 0$ .

**Exemple 2.10 Fonction B d'Euler**

La fonction B :  $(x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  est définie sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

- Tout d'abord, la fonction  $t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1}$  est continue sur  $]0, 1[$ .
- De plus,  $t^{x-1} (1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$  et la fonction positive  $t \mapsto t^{x-1}$  est intégrable au voisinage de  $0^+$  si et seulement si  $x > 0$ .
- Enfin,  $t^{x-1} (1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$  et la fonction positive  $t \mapsto (1-t)^{y-1}$  est intégrable au voisinage de  $1^-$  si et seulement si  $y > 0$ .

Ainsi  $t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1}$  est intégrable sur  $]0, 1[$  si et seulement si  $x > 0$  et  $y > 0$ . Comme cette fonction est positive, l'intégrale  $\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  converge si et seulement si  $x > 0$  et  $y > 0$ .

### 3 Calcul d'intégrales

#### 3.1 Changement de variables

**Proposition 3.1 Changement de variables**

Soient  $(a, b, \alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^4$  tel que  $a \leq b$  et  $\alpha \leq \beta$ ,  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $]a, b[$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $\varphi$  une bijection strictement croissante de  $]\alpha, \beta[$  sur  $]a, b[$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors les intégrales

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

sont de même nature et, en cas de convergence, sont égales.

**REMARQUE.** Si  $\varphi$  est décroissante, on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_b^a f(t) dt$$

**Méthode** Changement de variable

On dit qu'on effectue le changement de variable  $t = \varphi(u)$ . Comment alors se souvenir de la formule ?

- On remplace  $t$  par  $\varphi(u)$  dans la fonction à intégrer.
- $\frac{dt}{du} = \varphi'(u)$  donc  $dt = \varphi'(u) du$  et on remplace dans l'intégrale.
- $t$  doit varier entre  $\varphi(a)$  et  $\varphi(b)$  lorsque  $u$  varie entre  $a$  et  $b$ , ce qui nous donne les bornes de l'intégrale en  $u$ .

**Exemple 3.1**

Montrons que l'intégrale  $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$  converge et déterminons sa valeur. On va effectuer le changement de variable  $u = \sqrt{1+t^2}$  i.e.  $t = \sqrt{u^2-1}$ . L'application  $u \mapsto \sqrt{u^2-1}$  est une bijection croissante de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[\sqrt{2}, +\infty[$  sur  $[1, +\infty[$ . On en déduit que les intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$  et  $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{du}{u^2-1}$  sont de même nature puisque  $dt = \frac{u du}{\sqrt{u^2-1}}$ . Une décomposition en éléments simples montre alors que

$$\forall u \in [\sqrt{2}, +\infty[, \frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right)$$

On en déduit que

$$I = \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{u-1}{u+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) = \ln(\sqrt{2}+1)$$

**Exemple 3.2 Symétrie de la fonction B**

On rappelle que  $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  est définie sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ . A l'aide du changement de variable affine  $t \mapsto 1-t$ , on montre que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = B(y, x)$$

**Exercice 3.1 Expressions alternatives de la fonction B**

On rappelle que  $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  est définie sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

1. A l'aide du changement de variable  $t = \sin^2 \theta$ , montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta$$

2. A l'aide du changement de variable  $t = \frac{u}{1+u}$ , montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

**3.2 Intégration par parties**

**Proposition 3.2 Intégration par parties**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $]a, b[$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si  $fg$  admet des limites finies en  $a^+$  et  $b^-$ , alors les intégrales de  $f'g$  et  $fg'$  sur  $]a, b[$  sont de même nature. De plus, en cas de convergence

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$$

où  $[fg]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} f(t)g(t)$ .

**REMARQUE.** Le résultat reste valable si  $b \leq a$ .

**Exemple 3.3**

Montrons la convergence et calculons l'intégrale  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ . Posons  $f(t) = t$  et  $g(t) = -e^{-t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  de sorte que  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \int_0^{+\infty} f(t)g'(t) dt$ . Puisque  $fg$  admet des limites finies en 0 et  $+\infty$ , les intégrales  $\int_0^{+\infty} te^{-t}$  et  $\int_0^{+\infty} f'(t)g(t) dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  sont de même nature.

Puisque  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  converge, il en est donc de même pour  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ , ce que l'on aurait pu prouver directement. De plus,

$$\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \lim_{+\infty} fg - \lim_0 fg + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

**Exemple 3.4 Relation fonctionnelle de la fonction  $\Gamma$** 

On rappelle que  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $t \mapsto t^x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de dérivée  $t \mapsto xt^{x-1}$ . La fonction  $t \mapsto -e^{-t}$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de dérivée  $t \mapsto e^{-t}$ . Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1} e^{-t} dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. De plus, comme  $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x e^{-t} = 0$$

et, par croissances comparées,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-t} = 0$$

On en déduit que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

**Exercice 3.2**

Calculer  $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemple 3.5 Relation fonctionnelle de la fonction B**

On rappelle que  $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  est définie sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ . Montrons que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

Les fonctions  $t \mapsto t^x$  et  $t \mapsto (1-t)^y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$  de dérivées respectives  $t \mapsto xt^{x-1}$  et  $t \mapsto -y(1-t)^{y-1}$ . Par intégrations par parties,

$$\int_0^1 yt^x(1-t)^{y-1} dt = -[t^x(1-t)^y]_0^1 + \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. Puisque  $x > 0$  et  $y > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x(1-t)^y = \lim_{t \rightarrow 1^-} t^x(1-t)^y = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} yB(x+1, y) &= \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t) dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt - x \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt \quad \text{car ces deux intégrales convergent} \\ &= xB(x, y) - xB(x+1, y) \end{aligned}$$

ou encore

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

**Exercice 3.3**

Calculer  $B(n+1, p+1) = \int_0^1 t^n(1-t)^p dt$  pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ .

**Exercice 3.4 Intégrale de Dirichlet**

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge. Cette intégrale converge-t-elle absolument ?

## 4 Intégration des relations de comparaison

**REMARQUE.** Soit  $f$  est une fonction continue par morceaux sur  $[a, b[$ .

- Si  $f$  est positive et  $\int_a^b f(t) dt$  diverge, alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = +\infty$ .
- Si  $\int_a^b f(t) dt$  converge, alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^b f(t) dt = 0$ .

### Proposition 4.1

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $]a, b[$ . On suppose de plus que  $g$  est **de signe constant** au voisinage de  $b^-$ .

**Domination** On suppose que  $f = \mathcal{O}(g)$ .

- Si  $\int_a^b g(t) dt$  converge, alors  $\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_x^b g(t) dt\right)$ .
- Si  $\int_a^b g(t) dt$  diverge, alors  $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_a^x g(t) dt\right)$ .

**Négligeabilité** On suppose que  $f = o(g)$ .

- Si  $\int_a^b g(t) dt$  converge, alors  $\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$ .
- Si  $\int_a^b g(t) dt$  diverge, alors  $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$ .

**Equivalence** On suppose que  $f \sim g$ .

- Si  $\int_a^b g(t) dt$  converge, alors  $\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_x^b g(t) dt$ .
- Si  $\int_a^b g(t) dt$  diverge, alors  $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_a^x g(t) dt$ .

**REMARQUE.** On a des résultats analogues pour des fonctions continues par morceaux sur  $]a, b]$  quitte à utiliser des relations de comparaison en  $a^+$  et non  $b^-$ .

**REMARQUE.** Ces résultats sont l'exact pendant des résultats sur les sommations de relations de comparaison dans le cadre des séries. Il vaut voir  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  comme un «reste» et  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  comme une «somme partielle».

**Exemple 4.1**

- On sait que  $\frac{1}{t + \sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ , que  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est positive au voisinage de  $+\infty$  et que  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge donc  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + \sqrt{t}}$  diverge et  $\int_1^x \frac{dt}{t + \sqrt{t}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$ .
- On sait que  $\frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ , que  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  est positive au voisinage de  $0^+$  et que  $\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{t}}$  converge donc  $\int_0^\pi \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{t}}$  converge et  $\int_0^x \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{t}} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}}\right)$  ou encore  $\int_0^x \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{t}} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(\sqrt{x})$ .



**ATTENTION !** Il est essentiel que la fonction de référence soit de signe constant au voisinage du point considéré.