

## 1 Cours

### Espaces vectoriels normés

**Normes** Définition. Rappel sur les normes euclidiennes. Normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$  :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des applications bornées sur un ensemble  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Normes usuelles sur  $C^0([a, b], \mathbb{K})$  :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt} \qquad \|f\|_\infty = \max_{[a, b]} |f|$$

Distance associée à une norme. Boules et sphères. Définition de la convexité d'une partie d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Convexité des boules. Equivalence de normes. Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Partie bornée, application bornée. Produit d'espaces vectoriels normés : norme produit.

**Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé** Convergence/divergence. Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques. Suites extraites et valeurs d'adhérence.

**Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé** Convergence/divergence. Divergence grossière. Somme d'une série. Série télescopique. Convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence en **dimension finie**. Exponentielle d'une matrice carrée et d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

## Groupes

**Révisions de première année** Groupes, sous-groupes, morphismes de groupes. Groupes classiques :  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{K}, +)$  et  $(\mathbb{K}^*, \times)$  où  $\mathbb{K}$  est un corps,  $(S(E), \circ)$  (groupe des permutations d'un ensemble  $E$ ),  $(S_n, \circ)$  (groupe des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ), groupes linéaires  $GL_n(\mathbb{K})$  et  $GL(E)$ ,  $\mathbb{U}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ ,  $\mathbb{U}_n$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{U}, \times)$ . Morphismes classiques : déterminant, signature.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une application est une norme, on peut essayer de l'exprimer à l'aide d'une norme connue.
- Calculer une norme uniforme d'une suite ou d'une fonction par une étude de cette suite ou de cette fonction.
- Pour montrer que deux normes  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas équivalentes, on exhibe une suite  $u$  tel que  $\frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)}$  tende vers 0 ou  $+\infty$ .
- Pour montrer qu'une suite diverge, on peut extraire deux suites convergeant vers des limites différentes.

## 3 Questions de cours

**BCCP 37** hormis la question 1c pour les 3/2

**BCCP 40** les 3/2 pourront admettre que  $(e - u) \sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (e - u)u^n$

**BCCP 61**

**Retour sur le DS n°01 : transformation d'Abel**

Soient  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et  $(B_n)_{n \geq n_0}$  deux suites complexes. On définit alors deux suites  $(A_n)_{n \geq n_0}$  et  $(b_n)_{n \geq n_0}$  de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0, A_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$$

$$\forall n \geq n_0, b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que  $\sum_{k=n_0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$  pour tout entier  $n \geq n_0$ .

2. On suppose dans cette question que la suite  $(A_n)$  est bornée et que  $(B_n)$  est une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n B_n$  converge.
3. On suppose dans cette question que la suite  $(B_n)$  converge vers 0, que la suite  $(A_n)$  est bornée et que la série  $\sum_{n \geq n_0} b_n$  est absolument convergente. Montrer que la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n B_n$  est convergente.