Devoir surveillé n°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$, la suite $(\mathrm{P}_n(x))$ l'est également. A fortiori, elle est strictement positive. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\mathrm{P}_{n+1}(x)}{\mathrm{P}_n(x)} = \mathrm{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) \geq 1$$

donc $(\mathrm{P}_n(x))$ est croissante.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(\mathrm{P}_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\mathrm{ch}(x/k)\right)$$

Comme $\mathrm{ch}(x/n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\ln(\mathrm{ch}(x/n)) = \ln(1 + (\mathrm{ch}(x/n) - 1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{ch}(x/n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} x^2/2n^2$$

Or $\sum \frac{x^2}{n^2}$ est une série à termes psoitifs convergente donc $\sum \ln(\mathrm{ch}(x/n))$ également. La suite de ses sommes partielles i.e. la suite $(\ln(\mathrm{P}_n(x)))$ converge. Par passage à l'exponentielle, la suite $(\mathrm{P}_n(x))$ converge également. On en déduit que $\mathrm{J} = \mathbb{R}$.

3. **a.** Comme ch est paire, $\mathrm{P}_n(-x) = \mathrm{P}_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par passage à la limite, $\varphi(-x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? φ est donc paire.
Soit x et y deux réels tels que $0 \leq x \leq y$. Par croissance de ch sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ 0 \leq \mathrm{ch}(x/k) \leq \mathrm{ch}(y/k))$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}_n(x) \leq \mathrm{P}_n(y)$$

Enfin, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ par passage à la limite. φ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par parité, elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

b. Posons $g_n : x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x/n))$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\|h_n\|_{\infty,[-a,a]} = h_n(a)$$

On a vu précédemment que $\sum h_n(a)$ convergeait donc $\sum h_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a, a]$. De plus, les h_n sont continues sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la $\sum_{n=0}^{+\infty} h_n = \ln \circ \varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par continuité de l'exponentielle, φ est également continue sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Comme $1/\,\mathrm{ch}$ est positive, le calcul de l'intégrale vaudra comme preuve de convergence.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\,t\ \mathrm{d}t}{1 + \mathrm{sh}^2\,t} = [\arctan(\mathrm{sh}\,t)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

car $\lim_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty$ et $\lim_{+\infty} \arctan = \pi/2$ de même que $\lim_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty$ et $\lim_{-\infty} \arctan = -\pi/2$.

b. Comme ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}_n(x) \geq \mathrm{P}_1(x) = \mathrm{ch}(x)$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\mathrm{P}_n(x)} \leq \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

et enfin, par passage à la limite

$$0 \leq \frac{1}{\varphi} \leq \frac{1}{\mathrm{ch}}$$

Comme $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\varphi}$ l'est également.

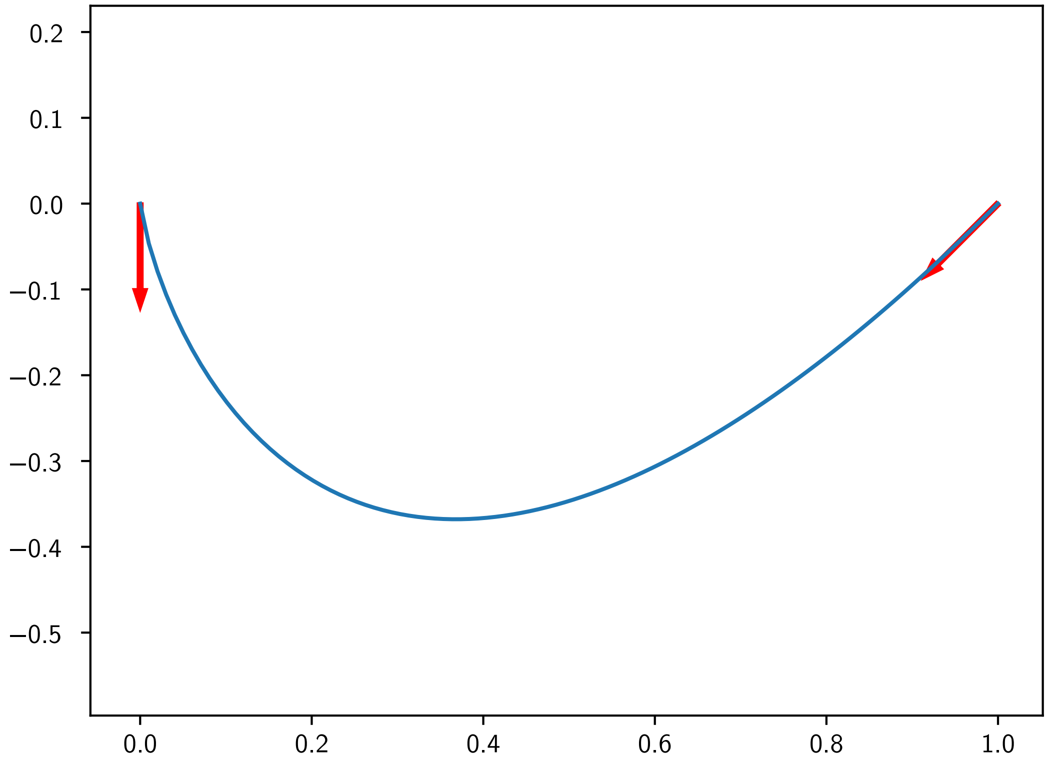
Solution 2

1. Il est clair que les fonctions f_n sont continues sur $]0,1]$. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, ce qui garantit la continuité de f_n en 0.
Remarquons ensuite que pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = e^{-x\ln(x)}$. Donc f est continue sur $]0,1]$. Le même argument de croissances comparées prouve la continuité de f en 0.

2. Tout d'abord, $\sum f_n(0)$ converge clairement et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 1 = f(0)$. De plus, pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum f_n(x)$ est une série exponentielle : elle converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = e^{-x\ln(x)} = f(x)$. Ainsi $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers la fonction f sur I.

3. Tout d'abord, comme φ est continue en 0, $\varphi(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$. Ensuite, φ est dérivable sur $]0,1]$ et
$$\forall t \in]0,1],\ \varphi'(t) = 1 + \ln(t)$$
On en déduit que φ est décroissante sur $[0, e^{-1}]$ puis croissante sur $[e^{-1}, 1]$.

4. Puisque $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = 1$, la courbe de φ admet une tangente d'équation $y = x - 1$ en $(1,0)$. De plus, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = -\infty$ donc la courbe de φ admet une tangente verticale en $(0,0)$.



5. Les variations et le signe de φ montrent que $\|\varphi\|_\infty = |\varphi(e^{-1})| = e^{-1}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in$ I, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n\varphi(x)^n}{n!}$, on en déduit que $\|f_n\|_\infty = \dfrac{(e^{-1})^n}{n!}$. La série exponentielle $\sum \|f_n\|_\infty$ converge i.e. $\sum f_n$ converge normalement sur I.

6. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\phi : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, ϕ est positive donc la convergence de l'intégrale $\Gamma(x)$ équivaut à l'intégrabilité de ϕ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'une part, $\phi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc ϕ est intégrable en 0^+ si et seulement si $1 - x < 1$ i.e. $x > 0$. D'autre part, $\phi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ par croissances comparées donc ϕ est intégrable en $+\infty$. Finalement, ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$. Autrement dit, le domaine de définition de Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties et sous réserve de convergence,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t = -\left[t^n e^{-t}\right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Puisque

$$\lim_{t \to 0} t^n e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} t^n e^{-t} = 0$$

l'intégration par parties précédente est légitime et $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
De plus,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t = -\left[e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

On en déduit par une récurrence évidente que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. D'abord, $t \mapsto -\ln(t)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si $u = -\ln(t)$, alors $t = e^{-u}$ de sorte que $\mathrm{d}t = -e^{-u} \, \mathrm{d}u$. On en déduit par changement de variable que

$$\mathrm{J}_n = \int_0^1 f_n(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n (-\ln t)^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} e^{-u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u} \, \mathrm{d}u$$

On effectue ensuite le changement de variable $v = (n+1)u$ de sorte que

$$\mathrm{J}_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} v^n e^{-v} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \Gamma(n+1) = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

On remarque que ce résultat est encore valable pour $n = 0$ puisque $\mathrm{J}_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ est une série de fonctions continue convergeant normalement vers f sur le segment $[0,1]$, on peut affirmer par théorème d'interversion série/intégrale que

$$\mathrm{J} = \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

8. Notons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}$ et $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^k}$. Alors

$$|\mathrm{J} - \mathrm{S}_n| = |\mathrm{R}_n| = \mathrm{R}_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^n}$$

Il suffit donc de trouver un entier n_0 tel que $\frac{1}{n_0(n_0+1)^{n_0}} \leq 10^{-6}$ i.e. $n_0(n_0+1)^{n_0} \geq 10^6$. $n_0 = 9$ fait l'affaire puisqu'alors $n_0(n_0+1)^{n_0} = 9 \cdot 10^9 \geq 10^6$.

Solution 3

1. Le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)^2-4 = (X-5)(X-1)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

> **Remarque.** On peut aussi remarquer que A est symétrique réelle mais le spectre de A aide à comprendre la suite de la question.

On trouve $\Pi_1 + 5\Pi_2 = A$, $\Pi_1 + \Pi_2 = I_2$ et $\Pi_1\Pi_2 = 0$.

2. Puisque $PQ(u) = Q(u) \circ P(u)$, $\operatorname{Ker} P(u) \subset \operatorname{Ker} PQ(u)$.

Puisque $P \wedge Q = 1$, il existe $(U, V) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $UP + VQ = 1$. On a donc $U(u) \circ P(u) + V(u) \circ Q(u) = \mathrm{Id}_E$. Soit $x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$. Alors

$$x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x) = 0_E$$

Ainsi $\operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) = \{0_E\}$.

Puisque $\operatorname{Ker} P(u) \subset \operatorname{Ker} PQ(u)$ et $\operatorname{Ker} Q(u) \subset \operatorname{Ker} PQ(u)$, on a $\operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u) \subset \operatorname{Ker} PQ(u)$. Soit enfin $x \in \operatorname{Ker} PQ(u)$. A nouveau,

$$x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x)$$

Posons $y = P(u) \circ U(u)(x)$ et $z = Q(u) \circ V(u)(x)$. On a donc $x = y + z$. De plus, $Q(u)(y) = PQU(u)(x) = U(u) \circ PQ(u)(x) = 0$ et $P(u)(z) = PQV(u)(x)V(u) \circ PQ(u)(x) = 0$. Donc $y \in \operatorname{Ker} P(u)$ et $z \in \operatorname{Ker} Q(u)$. Ainsi $\operatorname{Ker} PQ(u) \subset \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$.

Par double inclusion, $\operatorname{Ker} PQ(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$.

3. On a $Q_1 = P_2^k$ et $Q_2 = P_1^k$. Comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, Q_1 et Q_2 le sont également. D'après le théorème de Bézout, il existe $(R_1, R_2) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $R_1Q_1 + R_2Q_1 = 1$.

4. Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Alors

$$p_i \circ p_j = (R_iQ_iR_jQ_j)(u)$$

Or $R_iQ_iR_jQ_j = \pi_u R_iR_j \prod_{\ell\in[\![1,m]\!]\setminus\{i,j\}} P_\ell^{k_\ell}$ est un multiple du π_u donc un polynôme annulateur de u. Ainsi $p_i \circ p_j = 0$.

Puisque $\sum_{i=1}^{m} R_iQ_i = 1$, $\sum_{i=1}^{m} R_i(u) \circ Q_i(u) = \mathrm{Id}_E$ ou encore $\sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{Id}_E$.

Soit $j \in [\![1, m]\!]$. D'après les deux points précédents,

$$p_j = p_j \circ \mathrm{Id}_E = p_j \circ \sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} p_j \circ p_i = p_j^2$$

donc p_j est un projecteur de E.

5. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, les $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux deux à deux. D'après le lemme des noyaux :

$$\operatorname{Ker} \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ donc $\operatorname{Ker} \chi_u(u) = E$, ce qui conclut.

6. Soit $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Rappelons qu'alors $x_i = p(x_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Soit $j \in [\![1, m]\!]$. En appliquant p_j à l'égalité précédente, on obtient $\sum_{i=1}^{n} p_j(x_i) = 0_E$. D'une part, $p_j(x_j) = x_j$. D'autre part, pour $i \neq j$, $p_j(x_i) = p_j \circ p_i(x_i) = 0_E$. Ainsi $x_j = 0_E$. Ceci prouve que $\operatorname{Im} p_1, \dots, \operatorname{Im} p_m$ sont en somme directe.

Par ailleurs,

$$E = \operatorname{Im} \mathrm{Id}_E = \operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right) \subset \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$$

L'inclusion réciproque étant évidente, $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$.

7. Soit $i \in [\![1, m]\!]$. Posons $P_i = X - \lambda_i$ de sorte qu'avec les notations précédentes, $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} Q_i = \pi_u$. Ainsi

$$(u - \lambda_i \operatorname{Id}_E)^{\alpha_i} \circ p_i = \left[(X - \lambda_i)^{\alpha_i} Q_i R_i\right](u) = (R_i \pi)(u) = R_i(u) \circ \pi_u(u) = 0$$

Ainsi $\operatorname{Im} p_i \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{Id}_E)^{\alpha_i} = N_i$.
En particulier, $\dim \operatorname{Im} p_i \leq \dim N_i$. De plus,

$$\sum_{i=1}^{m} \dim N_i - \dim \operatorname{Im} p_i = \sum_{i=1}^{m} \dim N_i - \sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Im} p_i = \dim E - \dim E = 0$$

car $E = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$. Comme les termes de la somme précédente sont positifs, ils sont nuls i.e. $\dim \operatorname{Im} p_i = \dim N_i$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Comme $\operatorname{Im} p_i \subset N_i$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $N_i = \operatorname{Im} p_i$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.

8. Les racines de π_u sont les valeurs propres de u. Comme u est diagonalisable, π_u est simplement scindé. On en déduit que $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$.

9. La décomposition en éléments simples de $1/\pi_u$ est

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$$

On a donc

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_i Q_i = 1$$

Avec les notations précédentes, $R_i = \theta_i$ de sorte que $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u) = \theta_i Q_i(u)$.

10. D'après la décomposition en éléments simples précédente

$$\frac{X}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{X}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{(X - \lambda_i) + \lambda_i}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i \theta_i}{X - \lambda_i}$$

puis, en multipliant par π_u,

$$X = \left(\sum_{i=1}^{m} \theta_i\right) \pi_u + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \theta_i Q_i$$

En évaluant en u, on obtient

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \theta_i Q_i(u) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$$

> **Remarque.** Si l'on souhaite vraiment procéder comme le suggère l'énoncé, on remarque qu'en faisant tendre x vers $+\infty$ dans la relation
>
> $$\frac{x}{\pi_u(x)} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{x}{x - \lambda_i}$$
>
> on obtient $\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 0$ lorsque $\deg \pi_u > 1$ de sorte que
>
> $$X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \theta_i Q_i$$
>
> Si $\deg \pi_u = 1$, il est difficile de donner un sens à l'énoncé.

11. **a.** On constate que $A^2 = I_4$ donc le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$ annule A de sorte que A est diagonalisable.

b. D'après la question précédente, π_A divise $(X-2)(X+2)$ et comme A n'est pas une matrice d'homothétie, $\deg \pi_A > 1$. On en déduit que $\pi_A = (X - 2)(X + 2)$. On pose $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$ de même que $P_1 = X - 2$ et $P_2 = X + 2$. On en déduit que $Q_1 = X + 2$ et $Q_2 = X - 2$. Finalement,

$$\Pi_1 = \frac{Q_1(A)}{Q_1(\lambda_1)} = \frac{1}{4}(A + 2I_4) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$\Pi_2 = \frac{Q_2(A)}{Q_2(\lambda_2)} = -\frac{1}{4}(A - 2I_4) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La décomposition spectrale de A est

$$A = \lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 = 2\Pi_1 - 2\Pi_2$$

12. On raisonne par récurrence. Tout d'abord, $A^0 = I_4 = \Pi_1 + \Pi_2$. Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $A^q = \lambda_1^q\Pi_1 + \lambda_2^q\Pi_2$. Alors

$$A^{q+1} = (\lambda_1^q\Pi_1 + \lambda_2^q\Pi_2)(\lambda_1\Pi_2 + \lambda_2\Pi_2) = \lambda_1^{q+1}\Pi_1^2 + \lambda_2^{q+2}\Pi_2^2 + \lambda_1^q\lambda_2\Pi_1\Pi_2 + \lambda_2^q\lambda_1\Pi_2\Pi_1$$

Or $\Pi_1^2 = \Pi_1$, $\Pi_2 = \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = 0$ donc

$$A^{q+1} = \lambda_1^{q+1}\Pi_1 + \lambda_2^{q+1}\Pi_2$$

Par récurrence, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^q = \lambda_1^q\Pi_1 + \lambda_2^q\Pi_2$$

13. Notons $d = \deg \pi_v$. On va montrer que $(v^k)_{0\leq k\leq d-1}$ est une base de $\mathbb{C}[v]$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On effectue la division euclidienne de P par π_v : il existe donc $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q\pi_v + R$ et $\deg R \leq d - 1$. Ainsi

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v) \in \operatorname{vect}(u^k)_{0\leq k\leq d-1}$$

La famille $(v^k)_{0\leq k\leq d-1}$ engendre donc $\mathbb{C}[v]$.

Soit $(a_k)_{0\leq k\leq d-1} \in \mathbb{C}^d$ tel que $\sum_{k=0}^{d-1} a_k v^k = 0$. En posant $P = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$, $P(v) = 0$. Ainsi π_u divise P. Mais $\deg P \leq d - 1 < d = \pi_v$ donc $P = 0$ de sorte que $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$. La famille $(v^k)_{0\leq k\leq d-1}$ est donc libre.

Par conséquent, $(v^k)_{0\leq k\leq d-1}$ est une base de $\mathbb{C}[v]$.

14. Tout d'abord, les p_i appartiennent bien à $\mathbb{C}[u]$ par définition.

Soit $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^m$ tel que $\sum_{k=1}^m a_k p_k = 0$. Fixons $i \in [\![1, m]\!]$. En composant par p_i, on obtient $\sum_{k=1}^m a_k p_i \circ p_k = 0$. Mais $p_i \circ p_k = 0$ lorsque $i \neq k$. Ainsi $a_i p_i^2 = 0$ ou encore $a_i p_i = 0$ car p_i est un projecteur. D'après la question **7**, $\operatorname{Im} p_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}$ car $\lambda_i \in \operatorname{Sp}(v)$. Ainsi $p_i \neq 0$ puis $a_i = 0$.

La famille $(p_1, \dots, p_m)$ est une famille libre de m vecteurs de $\mathbb{C}[u]$. D'après la question précédente, $\dim \mathbb{C}[u] = \deg \pi_u = m$. On en déduit que $(p_1, \dots, p_m)$ est une base de $\mathbb{C}[u]$.

15. Si u n'est pas diagonalisable, $\dim \mathbb{C}[u] = \deg \pi_u > m = \operatorname{card} \operatorname{Sp}(u)$. La famille $(p_1, \dots, p_m)$ ne peut donc pas être une base de $\mathbb{C}[u]$.

16. On montre aisément qu'alors $P(u) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) f_i$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$. Notamment, en posant $P = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$, on obtient $P(u) = 0$. Comme P est simplement scindé, u est diagonalisable.