

# DEVOIR À LA MAISON N°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

**1** **1.a**  $g$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . D'abord,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 = g(0)$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, g'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$$

Or

$$\cos t = 1 + o(t)$$

$$\sin t = t + o(t^2)$$

donc  $g'(t) = o(1)$  i.e.  $\lim_{t \rightarrow 0} g' = 0$ .  $g'$  admet bien une limite finie en 0 donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  d'après le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ .

**1.b** Comme  $g$  est continue sur le segment  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt$  converge.

Une primitive de  $t \mapsto \sin t$  est  $t \mapsto -\cos t$  tandis que la dérivée de  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est  $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ . De plus, comme  $\cos$  est bornée

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\cos t}{t} = 0$$

Par intégration par parties,  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t) dt$  est de même nature que  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ . Cette dernière intégrale converge puisque  $\frac{\cos t}{t^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . Ainsi  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t) dt$  converge et finalement  $\int_0^{+\infty} g(t) dt$  converge aussi.

**1.c** On effectue le changement de variable  $u = jt$  : les intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$  sont de même nature et égales.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

**1.d** Tout d'abord,

$$g(t) = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + o(t^4)$$

et

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

donc

$$\ln(g(t)) = -\frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{(3!)^2} + o(t^4) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + o(t^4)$$

**1.e** En effectuant le changement de variable  $u = t\sqrt{\frac{n}{3}}$ ,

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt = \sqrt{\frac{3}{n}} \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{3}} = +\infty$ , l'indication de l'énoncé permet d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

**2** **2.a** Comme  $\sin^n$  est bornée,  $\frac{\sin^n t}{t^n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin^n t}{t^n} = 1$  donc  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt$  converge.

**2.b** Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2}{t^2} dt = -\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin(t) \cos(t)}{t} dt$$

L'intégration par parties est légitime car

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 t}{t} = 0$$

Ainsi, en utilisant la question **1.c** avec  $j = 2$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin(t) \cos(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

**3** **3.a** La fonction  $h_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  donc  $h_n^{(k)}$  est continue sur le segment  $[0, 2\pi]$ . Ainsi  $h_n^{(k)}$  est bornée sur ce segment. Comme  $h_n$  est  $2\pi$ -périodique,  $h_n^{(k)}$  l'est également. Finalement,  $h_n^{(k)}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  par  $2\pi$ -périodicité.

**3.b** Comme  $\sin t \sim t$ ,  $h_n = t^n + o(t^n)$ . Comme  $h_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on peut dériver  $k$  fois ce développement limité de sorte que

$$h_n^{(k)}(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) t^{n-k} + o(t^{n-k})$$

ou encore

$$h_n^{(k)}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}$$

**3.c** Comme  $h_n^{(k)}$  est bornée et  $k \leq n-2$ ,  $\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . De plus,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$  d'après la question **3.b**.

On en déduit que  $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$  converge.

**3.d**  $h_n^{(n-2)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de dérivée  $h_n^{(n-1)}$  et  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de dérivée  $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ . D'après la

question précédente,  $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt$  converge.

De plus, comme  $h_n^{(n-2)}$  est bornée,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} = 0$  et comme  $h_n^{(n-2)}(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{2} t^2$  d'après la question **3.b**,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} = 0$ .

Par intégration par parties,  $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$  converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt = \left[\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt$$

On considère alors l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathcal{P}_k : I_n = \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$$

$\mathcal{P}_0$  est trivialement vraie. Supposons  $\mathcal{P}_k$  vraie pour un certain  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ . Par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt = -\frac{1}{n-k-1} \left[ \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k-1}} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n-k-1} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}} dt$$

Les convergences des intégrales sont assurées par ce qui précède. De plus, comme  $h_n^k$  est bornée,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h_n^k(t)}{t^{n-k-1}} = 0$  et comme  $h_n^k(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}$  d'après la question 3.b,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n^{(n-k)}(t)}{t^{n-k-1}} = 0$ . On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt = \frac{1}{n-k-1} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}} dt$$

En utilisant  $\mathcal{P}_k$ , on obtient donc que  $\mathcal{P}_{k+1}$  est vraie. Par récurrence finie,  $\mathcal{P}_{n-1}$  est vraie, ce qui conclut la question.

**4** 4.a Soit  $t \in \mathbb{R}$ . D'après une relation d'Euler et le relation du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} h_{2n}(t) &= \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^{2n} \\ &= \frac{1}{2^{2n} i^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (e^{it})^{2n-k} (-e^{-it})^k \\ &= \frac{1}{4^n (-1)^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k e^{i(2n-2k)t} \\ &= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t} \end{aligned}$$

4.b En dérivant  $2n-1$  fois la relation précédente :

$$\begin{aligned} h_{2n}^{(2n-1)}(t) &= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} (i(2n-2k))^{2n-1} e^{i(2n-2k)t} \\ &= \frac{2^{2n-1} i^{2n-1}}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} (n-k)^{2n-1} e^{i(2n-2k)t} \\ &= \frac{(-1)^n}{2i} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} (n-k)^{2n-1} e^{i(2n-2k)t} \\ &= \frac{1}{2i} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (n-k)^{2n-1} e^{i(2n-2k)t} + \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} (n-k)^{2n-1} e^{i(2n-2k)t} \right) \quad \text{car le terme d'indice } n \text{ est nul} \\ &= \frac{1}{2i} \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{2n}{n-j} j^{2n-1} e^{2ij t} + \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} (-j)^{2n-1} e^{-2ij t} \right) \quad \text{en posant } j = n-k \text{ et } j = k-n \\ &= \frac{1}{2i} \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} e^{2ij t} - \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} e^{-2ij t} \right) \quad \text{par symétrie des coefficients binomiaux} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \frac{e^{2ij t} - e^{-2ij t}}{2i} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt) \quad \text{via une relation d'Euler} \end{aligned}$$

4.c

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_{2n}^{(2n-1)}(t)}{t} dt \quad \text{d'après la question 3.d} \\
&= \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt)}{t} dt \quad \text{d'après la question 4.b} \\
&= \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2jt)}{t} dt \quad \text{car chacune des intégrales convergent} \\
&= \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \frac{\pi}{2} \quad \text{d'après la question 1.c} \\
&= \frac{\pi}{2(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}
\end{aligned}$$

5 5.a Pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)^n dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\sin^n t|}{t^n} dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt = (2/\pi)^{n-1}$$

Donc  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)^n dt = \mathcal{O}((2/\pi)^n)$ . Mais comme  $0 \leq 2/\pi < 1$ ,  $(2/\pi)^n = o(1/\sqrt{n})$  par croissances comparées.

Finalement

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

5.b 5.b.i On a vu précédemment que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, g'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} = \frac{\cos t}{t^2} (t - \tan t)$$

Par convexité de  $\tan$  sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\tan t \geq t$  pour  $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ . Ainsi  $g'$  est négative sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  et  $g$  est décroissante sur cet intervalle.

5.b.ii On a vu à la question 1.d que  $\ln(g(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^2}{6}$ . Puisque  $\varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ ,

$$\ln(g(\varepsilon_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\varepsilon_n^2}{6} = -\frac{\ln^2 n}{6n}$$

5.b.iii Par décroissance et positivité de  $g$  sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,

$$0 \leq \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt \leq \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right) g(\varepsilon_n)^n \leq \frac{\pi}{2} g(\varepsilon_n)^n$$

**REMARQUE.** On utilise aussi le fait que, pour  $n$  suffisamment grand,  $\varepsilon_n \leq \frac{\pi}{2}$  puisque  $(\varepsilon_n)$  converge vers 0.

Ainsi

$$0 \leq \sqrt{n} \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt \leq \sqrt{n} g(\varepsilon_n)^n$$

Or

$$\sqrt{n} g(\varepsilon_n)^n = \exp\left(\frac{1}{2} \ln n - n \ln(g(\varepsilon_n))\right)$$

D'après la question précédente,  $n \ln(g(\varepsilon_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6} \ln^2 n$  donc

$$\frac{1}{2} \ln n - n \ln(g(\varepsilon_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6} \ln^2 n$$

En particulier,

$$\frac{1}{2} \ln n - n \ln(g(\varepsilon_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

puis, par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt = 0$$

ou encore

$$\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

**5.c 5.c.i** Par convexité de  $\exp$ ,  $e^x \geq 1 + x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi, pour tout  $u \in \mathbb{R}_+$ ,

$$|e^{-u} - 1| = 1 - e^{-u} \leq u \leq 2u$$

N'importe quel  $a > 0$  convient donc.

**5.c.ii** D'après la question **1.d**,

$$\ln(g(t)) + \frac{t^2}{6} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^4}{180}$$

On en déduit que  $t \mapsto \ln(g(t)) + \frac{t^2}{6}$  est négative au voisinage de 0.

Par ailleurs, on peut également affirmer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^3} \left( \ln(g(t)) + \frac{t^2}{6} \right) = 0$$

Par définition de la limite, il existe un voisinage de 0 sur lequel  $t \mapsto \frac{1}{t^3} \left( \ln(g(t)) + \frac{t^2}{6} \right)$  est à valeurs dans  $[-1, +\infty[$ .

On déduit des deux points précédents qu'il existe  $b > 0$  tel que

$$\forall t \in [0, b], -t^3 \leq \ln(g(t)) + \frac{t^2}{6} \leq 0$$

**5.c.iii** Puisque  $(\varepsilon_n)$  converge vers 0, elle est à valeurs dans  $[0, b]$  à partir d'un certain rang  $N$ . Soit donc  $n \geq N$  et  $t \in [0, \varepsilon_n]$ . D'après la question précédente.

$$-t^3 \leq \ln(g(t)) + \frac{t^2}{6} \leq 0$$

puis, par croissance de l'exponentielle,

$$e^{-nt^3} \leq g(t)^n e^{\frac{nt^2}{6}} \leq 1$$

puis

$$e^{-nt^3} - 1 \leq g(t)^n e^{\frac{nt^2}{6}} - 1 \leq 0$$

et enfin

$$0 \leq e^{-\frac{nt^2}{6}} - g(t)^n \leq (1 - e^{-nt^3}) e^{-\frac{nt^2}{6}}$$

Mais comme  $e^{-\frac{nt^2}{6}} \leq 1$ , on en déduit finalement que

$$0 \leq e^{-\frac{nt^2}{6}} - g(t)^n \leq (1 - e^{-nt^3})$$

Ces inégalités étant vraies pour tout  $t \in [0, \varepsilon_n]$ , on obtient en intégrant sur cet intervalle,

$$0 \leq \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt - \int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n dt \leq \int_0^{\varepsilon_n} (1 - e^{-nt^3}) dt$$

et donc

$$\left| \int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n dt - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \int_0^{\varepsilon_n} (1 - e^{-nt^3}) dt$$

A nouveau, comme  $(\varepsilon_n)$  converge vers 0, cette suite est à valeurs dans  $[0, a]$  à partir d'un certain rang. On en déduit que pour  $n$  suffisamment grand,

$$\left| \int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n dt - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \int_0^{\varepsilon_n} 2nt^3 dt = \frac{n\varepsilon_n^4}{2} = \frac{\ln^4 n}{2n}$$

**5.d** D'après la question précédente,

$$\int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n dt - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{\ln^4}{n}\right)$$

Mais par croissances comparées,  $\frac{\ln^4}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  donc

$$\int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n dt - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Enfin, d'après la question **1.e**,

$$\int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

ou encore

$$\int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On en déduit que

$$\int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n dt = \left( \int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n dt - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right) + \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puis, par relation de Chasles, en utilisant les questions **5.a** et **5.b**,

$$\int_0^{+\infty} g(t)^n dt = \int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n dt + \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t)^n dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ou encore

$$\int_0^{+\infty} g(t)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

**6** **6.a** La seule liste de  $S_n$  avec une seule montée est évidemment  $(1, 2, \dots, n)$ . Ainsi  $E_n(1) = 1$ .

De même, la seule liste de  $S_n$  avec  $n$  montées est évidemment  $(n, n-1, \dots, 1)$ . On a donc également  $E_n(n) = 1$ .

**6.b** On peut par exemple choisir  $a = (1, 2, \dots, n-k, n, n-1, \dots, n-k+1)$  ou bien  $a = (n, n-1, \dots, n-k+1, 1, 2, \dots, n-k)$ .

**7** Si  $a_i < a_{i+1}$ , le nombre de montées de  $(a_1, \dots, a_{i+1})$  reste le même que celui de  $(a_1, \dots, a_{i+1})$  mais le nombre de descentes augmente de 1. Si  $a_i > a_{i+1}$ , c'est le contraire. Dans tous les cas,  $s_{i+1} = s_i + 1$ . De plus, il est clair que  $s_1 = 1 + 1 = 2$  donc

$$M(a) + D(a) = s_n = s_1 + n - 1 = n + 1$$

**8** **8.a** Soit  $a \in S_n$ . Comme les  $a_i$  sont distincts, les  $n+1-a_i$  le sont également. De plus, les  $a_i$  appartiennent à  $\llbracket 1, n \rrbracket$  donc les  $n+1-a_i$  également. On en déduit que  $\Psi(a) \in S_n$ . Ainsi  $\Psi$  est une application de  $S_n$  dans lui-même.

Il est par ailleurs clair que  $\Psi \circ \Psi = \text{Id}_{S_n}$  donc  $\Psi$  est une involution et a fortiori une bijection.

**8.b** On remarque d'abord que toutes les montées d'une liste  $a$  sont transformées en des descentes par  $\Psi$  et réciproquement. Plus précisément,  $(a_p, \dots, a_q)$  est une montée d'une liste  $a$  de  $S_n$  si et seulement si  $(n+1-a_p, \dots, n+1-a_q)$  est une descente de  $\Psi(a)$ . On en déduit que  $\Psi$  établit une bijection entre l'ensemble des listes de  $S_n$  à  $k$  montées et l'ensemble des listes de  $S_n$  à  $k$  descentes. Le cardinal du premier ensemble est  $E_n(k)$  par définition tandis que le cardinal du second ensemble est  $E_n(n+1-k)$  d'après la question 7. Ainsi  $E_n(k) = E_n(n+1-k)$ .

**9** **9.a** Se donner un couple  $(A, B)$  de parties non vides de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  telles que  $A \cup B = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $A \cap B = \emptyset$  revient à se donner une partie  $A$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  non vide et non égale à  $\llbracket 1, n \rrbracket$  puisqu'alors on a automatiquement  $B = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus A$ . On sait que le nombre de parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est  $2^n$ . Le nombre de couples recherchés est donc  $2^n - 2$ .

**9.b** Se donner une liste de  $S_n$  à 2 montées revient à se donner chacune des deux montées, c'est-à-dire un couple de parties  $(A, B)$  tel que  $A \cup B = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $A \cap B = \emptyset$  puis, en notant  $a_1, \dots, a_p$  les éléments de  $A$  rangés par ordre croissant de même que  $a_{p+1}, \dots, a_n$  les éléments de  $B$  rangés par ordre croissant, à construire la liste  $(a_1, \dots, a_p, \dots, a_{p+1}, \dots, a_n)$ . Mais une telle liste ne convient qu'à condition que  $a_p > a_{p+1}$ . Mais la seule possibilité d'avoir  $a_p < a_{p+1}$  est que  $a_i = i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Pour obtenir  $E_n(2)$ , il faut donc retrancher au cardinal de la question précédente le nombre de couples de parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de la forme  $(\{1, 2, \dots, k\}, \{k+1, \dots, n\})$  avec  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Comme il existe  $n-1$  couples de cette forme,

$$E_n(2) = 2^n - 2 - (n-1) = 2^n - (n+1)$$

**10** **10.a** Les antécédents de  $b$  par  $\varphi_n$  sont les listes obtenues à partir de  $b$  en insérant  $n + 1$  à un endroit de la liste  $b$  (éventuellement au début ou à la fin de la liste).

**10.b** Si  $n + 1$  est placé «à la fin» d'une montée de  $b$ , alors  $M(a) = M(b)$ . Sinon,  $n + 1$  forme une nouvelle montée de longueur 1 et  $M(a) = M(b) + 1$ .

**10.c** Notons  $S_n(k)$  l'ensemble des listes de  $S_n$  à  $k$  montées. D'après la question précédente,

$$S_{n+1}(k+1) = (M \circ \varphi_n)^{-1}(\{k+1\}) \sqcup (M \circ \varphi_n)^{-1}(\{k\})$$

Si on se donne un élément de  $S_n(k+1)$ , ses antécédents par  $\varphi_n$  à  $k+1$  montées sont obtenus en rajoutant  $n+1$  «à la fin» de l'une des  $k+1$  montées. On en déduit que  $\text{card}(M \circ \varphi_n)^{-1}(\{k+1\}) = (k+1)E_n(k)$ . Par contre ses antécédents par  $\varphi_n$  à  $k$  montées sont obtenus en plaçant  $n+1$  à l'un des  $n+1-k$  «emplacements» restants. On en déduit que  $\text{card}(M \circ \varphi_n)^{-1}(\{k\}) = (n+1-k)E_n(k)$ . Le partitionnement précédent permet alors d'affirmer que

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k)$$

De plus,  $E_{n+1}(1) = E_n(1) = 1$  et  $E_n(0) = 0$  donc la formule précédente est encore valide lorsque  $k = 0$ .

Enfin, si  $k > n$ ,  $E_{n+1}(k+1) = E_n(k+1) = E_n(k) = 0$  donc la formule précédente est encore valide lorsque  $k > n$ .

**10.d** On peut utiliser la relation de récurrence de la question précédente mais on préfère confier le travail à Python plutôt que d'effectuer les calculs à la main.

```
def montees(N):
    L = [[1]]
    for n in range(1, N):
        last = L[-1]
        new = [1] + [(k+2)*v[0] + (n-k)*v[1] for k, v in
                     enumerate(zip(last[1:], last[:-1]))] + [1]
        L.append(new)
    return L
```

```
>>> montees(5)
[[1], [1, 1], [1, 4, 1], [1, 11, 11, 1], [1, 26, 66, 26, 1]]
```

**11** Dans la suite, on convient usuellement qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle et que  $\binom{n}{k} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout entier  $k < 0$ . On formule l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{P}_n : \forall k \in \mathbb{N}, E_n(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n$$

Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^0 (-1)^{0-j} \binom{2}{0-j} j^1 &= 0 = E_1(0) \\
\sum_{j=1}^1 (-1)^{1-j} \binom{2}{1-j} j^1 &= 1 = E_1(1) \\
\forall k \geq 2, \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{k-j} j &= \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{k-j} (j-k+k) \\
&= \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} (j-k) \binom{k}{k-j} + k \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{k-j} \\
&= k \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j-1} \binom{k-1}{k-j-1} + k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} \\
&= k \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j-1} \binom{k-1}{k-j-1} + k((1-1)^k - (-1)^k) \\
&= k \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \binom{k-1}{j} - k(-1)^k \\
&= k((1-1)^{k-1} - (-1)^{k-1}) - k(-1)^k \\
&= -k(-1)^{k-1} - k(-1)^k = 0 = E_1(k)
\end{aligned}$$

donc  $\mathcal{P}_1$  est vraie. On suppose que alors que  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+2}{k-j} j^{n+1} &= \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j-1} \binom{n+2}{k-j} (k-j-k) j^n \\
&= \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j-1} \binom{n+2}{k-j} (k-j) j^n - k \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j-1} \binom{n+2}{k-j} j^n \\
&= (n+2) \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j-1} \binom{n+1}{k-j-1} j^n - k \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j-1} \left( \binom{n+1}{k-j} + \binom{n+1}{k-j-1} \right) j^n \\
&= (n+2-k) \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j-1} \binom{n+1}{k-j-1} j^n - k \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j-1} \binom{n+1}{k-j} j^n \\
&= (n+2-k) \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j-1} \binom{n+1}{k-j-1} j^n + k \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n \\
&= kE_n(k) + (n+2-k)E_n(k-1) \\
&= E_{n+1}(k)
\end{aligned}$$

Ainsi  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. Par récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**12** D'après la question précédente,

$$E_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{2n}{n-j} j^{2n-1}$$

Par symétrie des coefficients binomiaux,  $\binom{2n}{n-j} = \binom{2n}{n+j}$ . De plus,  $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$  donc

$$E_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$$

Il suffit alors d'utiliser la question 4.c pour conclure.