Devoir à la maison n°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – E3A MPI 2025

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note dans tout l'exercice :

- $\mathrm{E} = \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$
- A et B les deux polynômes : $\mathrm{A} = \mathrm{X}^n - 1$ et $\mathrm{B} = \mathrm{X}^n - \mathrm{X}$.

I Questions préliminaires

1 Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.

2 Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
On pourra poser la division euclidienne de A *par* B.

3 Déterminer le PGCD des polynômes A et B.

4 Décomposer les deux polynômes A et B en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Les n racines distinctes de B seront notées : $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ et z_n, avec $z_n = 0$.

On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne du produit AP par B.

5 Prouver que f est un endomorphisme de E.

6 Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. En posant la division euclidienne, déterminer $f(\mathrm{X}^k)$.

7 De la même façon, déterminer $f(\mathrm{X}^{n-1})$.

8 En déduire la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^{n-1})$ de E.

9 Calculer la trace de M.

II Étude du noyau et de l'image de f

10 Justifier que le rang de M est égal à $n-1$.

11 Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

12 Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

13 Justifier que $\mathrm{Im}(f) = \{(\mathrm{X}-1)\mathrm{P} \mid \mathrm{P} \in \mathbb{C}_{n-2}[\mathrm{X}]\}$.

14 Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

III Éléments propres de f

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On note P_j le polynôme de E défini par $P_j = \dfrac{B}{X - z_j} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (X - z_k)$ et $R_j = f(P_j)$.

15 Vérifier que $P_j(z_j) \neq 0$.

16 Montrer que les racines de P_j sont racines de R_j.

17 En déduire qu'il existe un scalaire λ_j tel que $R_j = \lambda_j P_j$. Que peut-on alors dire du polynôme P_j ?

18 Montrer que l'on a : $A(z_j) = \lambda_j$.

19 En déduire l'expression de λ_j à l'aide de z_j. On précisera la valeur de λ_n.

20 L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

21 Retrouver la valeur de la trace de l'endomorphisme f.

22 Déterminer le polynôme caractéristique χ_f de l'endomorphisme f sous forme développée.

23 En déduire le déterminant de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$.