

DEVOIR SURVEILLÉ N°12

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Si $X \sim X'$, alors $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X' = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $G_X = G_{X'}$. Réciproquement, si $G_X = G_{X'}$, alors $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X' = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par unicité du développement en série entière et donc $X \sim X'$.

REMARQUE. On peut utiliser l'unicité du développement en série entière puisque la série entière définissant une fonction génératrice a un rayon de convergence non nul (supérieur ou égal à 1.)

2 D'après la question précédente, $G_X = G_{Y+Z}$. Soit $t \in [-1, 1]$. Alors $|t^Y| \leq 1$ donc $t^Y \in \mathbb{I}$. D'après la formule de transfert, $G_Y(t) = \mathbb{E}(t^Y)$. De même, $G_Z(t) = \mathbb{E}(t^Z)$ et $G_{Y+Z}(t) = \mathbb{E}(t^{Y+Z}) = \mathbb{E}(t^Y t^Z)$. Comme Y et Z sont indépendantes, t^Y et t^Z le sont également. Ainsi $\mathbb{E}(t^{Y+Z}) = \mathbb{E}(t^Y)\mathbb{E}(t^Z)$. Finalement, $G_X = G_{Y+Z} = G_Y G_Z$.

3 Posons $q = 1 - p$ et rappelons que $G_X(t) = (q + pt)^n$. Supposons $n \geq 2$. En se donnant des variables aléatoires Y et Z indépendantes telles que $Y \sim \mathcal{B}(n-1, q)$ et $Z \sim \mathcal{B}(1, p)$, on a $G_X = G_Y G_Z = G_{Y+Z}$ puis $X \sim Y + Z$ en utilisant les questions précédentes. De plus, Y et Z sont à valeurs dans \mathbb{N} et ni Y ni Z ne sont constantes presque sûrement. Ainsi X est décomposable. Réciproquement, supposons que $n = 1$. Soient Y et Z des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} telles que $X \sim Y + Z$. Remarquons alors que si $k \geq 2$, $\{Y = k\} \subset \{X \geq k\}$ donc $\mathbb{P}(Y = k) \leq \mathbb{P}(X \geq k) = 0$ puis $\mathbb{P}(Y = k) = 0$. De même, $\mathbb{P}(Y = k) = 0$. Ainsi G_Y et G_Z sont polynomiales de degré au plus 1. Comme G_X est également polynomiale de degré 1, l'égalité $G_X = G_Y G_Z$ donne que G_Y ou G_Z est une fonction constante. Ceci signifie que Y ou Z est constante presque sûrement (en fait, nulle presque sûrement). Ainsi X n'est pas décomposable.

4 4.a Remarquons que

$$(\deg U, \deg V) \in \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$$

On peut supposer sans perte de généralité que U et V sont unitaires.

Supposons que $\deg U = \deg V = 2$. Il existe alors $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}_+)^4$ tel que $U(T) = T^2 + aT + b$ et $V(T) = T^2 + cT + d$. En

identifiant les coefficients de A et UV , on obtient,
$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d + ac = 0 \\ ad + bc = 2 \\ bd = 1 \end{cases}$$
 Comme a, b, c, d sont positifs, on obtient $a = c = 0$

ce qui contredit $ad + bc = 2$.

Supposons que $\deg U = 1$ et $\deg V = 3$. En écrivant $U = T + a$ et $V = T^3 + bT^2 + cT + d$, on obtient
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ ab + c = 0 \\ c + d = 2 \\ ad = 1 \end{cases}$$

Comme a, b, c, d sont positifs, on obtient $a = b = 0$, ce qui contredit $ad = 1$.

De la même manière, on ne peut avoir $\deg U = 3$ et $\deg V = 1$.

Ainsi U ou V est constant.

4.b Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$. On vérifie aisément que $G_{X^2} = \frac{1}{4}A$.

Soient Y et Z des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} telles que $X^2 \sim Y + Z$. Comme X^2 est à valeurs dans $\llbracket 0, 4 \rrbracket$, on prouve comme à la question précédente que Y et Z sont presque sûrement à valeurs dans $\llbracket 0, 4 \rrbracket$. Ainsi G_Y et G_Z

sont polynomiales et $G_Y G_Z = \frac{1}{4}A$. D'après la question précédente, G_Y ou G_Z est constante, ce qui prouve que Y ou Z est constante presque sûrement (en fait, nulle presque sûrement). Ainsi X^2 n'est pas décomposable.

5 **5.a** Pour tout $\omega \in \Omega$, il existe un unique couple d'entiers $(Q(\omega), R(\omega))$ tel que $X(\omega) = aQ(\omega) + R(\omega)$ (division euclidienne de $X(\omega)$ par a). Ceci garantit l'existence et l'unicité du couple (Q, R) demandées par l'énoncé.

5.b X est à valeurs dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc, puisque $n = ab$, (Q, R) est à valeurs dans $\llbracket 0, b-1 \rrbracket \times \llbracket 0, a-1 \rrbracket$. Par unicité du quotient et du reste d'une division euclidienne

$$\forall (q, r) \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket \times \llbracket 0, a-1 \rrbracket, \mathbb{P}((Q, R) = (q, r)) = \mathbb{P}(X = aq + r) = \frac{1}{n}$$

car $aq + r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On récupère les lois marginales à partir de la loi conjointe,

$$\begin{aligned} \forall q \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket, \mathbb{P}(Q = q) &= \sum_{r=0}^{a-1} \mathbb{P}((Q, R) = (q, r)) = \frac{a}{n} = \frac{1}{b} \\ \forall r \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket, \mathbb{P}(R = r) &= \sum_{q=0}^{b-1} \mathbb{P}((Q, R) = (q, r)) = \frac{b}{n} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Autrement dit Q et R suivent des lois uniformes respectivement sur $\llbracket 0, b-1 \rrbracket$ et $\llbracket 0, a-1 \rrbracket$.

5.c Posons $Y = aQ$. Remarquons que Y suit une loi uniforme sur $\{ak, k \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket\}$. De plus,

$$\forall (k, r) \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket \times \llbracket 0, a-1 \rrbracket, \mathbb{P}(Y = ak, R = r) = \mathbb{P}(X = ak + r) = \frac{1}{n} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} = \mathbb{P}(Y = ak)\mathbb{P}(R = r)$$

Ainsi Y et R sont indépendantes et X est décomposable.

On en déduit que

$$G_X(T) = G_Y(T)G_R(T) = \left(\frac{1}{b} \sum_{k=0}^{b-1} T^{ak}\right) \left(\frac{1}{a} \sum_{r=0}^{a-1} T^r\right)$$

6 On posera dans cette question $W(T) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$.

6.a Supposons acquis le résultat de l'énoncé et montrons qu'alors X est indécomposable. Soient Y et Z des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} telles que $X \sim Y + Z$. On montre comme précédemment que Y et Z sont presque sûrement à valeurs dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$; on en déduit notamment que G_Y et G_Z sont des polynômes. De plus, $G_X = G_Y G_Z$. Notons α et β les coefficients dominants respectifs de G_Y et G_Z et posons $U = G_X/\alpha$ et $V = G_X/\beta$ de sorte que U et V sont unitaires. Remarquons également que $G_X = \frac{1}{n}W$. L'égalité $G_X = G_Y G_Z$ donne alors $W = UV$ en divisant chacun des polynômes par son coefficient dominant respectif. Les coefficients de G_Y et G_Z sont positifs en tant que probabilités; ceux de U et V le sont donc également. D'après le résultat admis, U ou V est constant donc G_Y ou G_Z également. Ceci signifie que Y ou Z est presque sûrement constante (presque sûrement nulle en fait).

6.b Remarquons que $W(T) = \frac{T^n - 1}{T - 1}$. Ainsi W est simplement scindé sur \mathbb{C} et ses racines sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité distinctes de 1. Comme $UV = W$, il existe une partie R de $\mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ de cardinal r telle que $U(T) = \prod_{\omega \in R} (T - \omega)$. Alors

$$T^r U\left(\frac{1}{T}\right) = T^r \prod_{\omega \in R} \left(\frac{1}{T} - \omega\right) = \prod_{\omega \in R} (1 - \omega T) = \left(\prod_{\omega \in R} \omega\right) \left(\prod_{\omega \in R} \left(\frac{1}{\omega} - T\right)\right) = C \prod_{\omega \in R} \left(T - \frac{1}{\omega}\right)$$

en posant $C = \prod_{\omega \in R} (-\omega) = U(0)$. Pour $\omega \in R \subset \mathbb{U}$, $\frac{1}{\omega} = \bar{\omega}$. Ainsi

$$T^r U\left(\frac{1}{T}\right) = C \prod_{\omega \in R} (T - \bar{\omega})$$

Comme U est à coefficients réels,

$$T^r U\left(\frac{1}{T}\right) = C U(T)$$

De plus, $|C| = \prod_{\omega \in R} |\omega| = 1$. Mais $C = U(0)$ est le coefficient constant de U . C'est donc un réel positif et $C = 1$, puis

$$T^r U\left(\frac{1}{T}\right) = U(T).$$

On montre de la même manière que $T^s V\left(\frac{1}{T}\right) = V(T)$.

6.c Comme $U(T) = T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$, $u_k = u_{r-k}$ pour tout $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$. Comme le coefficient de T^r dans $W(T)$ vaut 1, $\sum_{k=0}^r u_{r-k} v_k = 1$, en convenant que $u_0 = u_r = v_0 = v_s = 1$. Puisque $u_r v_0 = 1$, et $u_{r-k} = u_k$, $\sum_{k=1}^r u_k v_k = 0$. Comme les termes de la somme sont positifs, $u_k v_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

6.d On raisonne par récurrence. Tout d'abord, $(u_0, v_0) = (1, 1) \in \{0, 1\}^2$. Supposons qu'il existe $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ tel que $(u_j, v_j) \in \{0, 1\}^2$ pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Comme le coefficient de T^{k+1} dans $W = UV$ vaut 1, on a :

$$\sum_{j=0}^{k+1} u_j v_{k+1-j} = 1$$

Puisque $u_0 = v_0 = 1$, on a donc

$$u_{k+1} + v_{k+1} + \sum_{j=1}^k u_j v_{k+1-j} = 1$$

Par hypothèse de récurrence, on peut affirmer que $\sum_{j=1}^k u_j v_{k+1-j} \in \mathbb{N}$ donc. De plus, u_{k+1} et v_{k+1} sont positifs. On en déduit que $u_{k+1} + v_{k+1} \in \{0, 1\}$. Mais d'après la question précédente, l'un au moins des deux coefficients u_{k+1} et v_{k+1} est nul. On en déduit immédiatement que $(u_{k+1}, v_{k+1}) \in \{0, 1\}^2$.

Par récurrence, $(u_k, v_k) \in \{0, 1\}^2$ pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$.

6.e On montre tout d'abord que $v_k \in \{0, 1\}$ pour tout $k \in \llbracket 0, s \rrbracket$. C'est déjà vrai pour $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ d'après la question précédente. Supposons alors qu'il existe $k \in \llbracket r, s-1 \rrbracket$ tel que $v_j \in \{0, 1\}$ pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Le coefficient de T^{k+1} dans $W = UV$ vaut 1. On a donc

$$\sum_{j=0}^r u_j v_{k+1-j} = 1$$

ou encore

$$v_{k+1} + \sum_{j=1}^r u_j v_{k+1-j} = 1$$

A nouveau, $\sum_{j=1}^r u_j v_{k+1-j} \in \mathbb{N}$ et v_{k+1} est positif donc $v_{k+1} \in \mathbb{N}$. On a donc montré que $v_k \in \{0, 1\}$ pour tout $k \in \llbracket 0, s \rrbracket$.

Finalement $n = W(1) = U(1)V(1)$ et $U(1) = \sum_{k=0}^r u_k \in \mathbb{N}$ et $V(1) = \sum_{k=0}^s v_k \in \mathbb{N}$. Comme n est premier, $U(1) = \sum_{k=0}^r u_k = 1$

ou $V(1) = \sum_{k=0}^s v_k = 1$. Comme U et V sont à coefficients positifs et que $u_0 = v_0 = 1$, on a donc $U = 1$ ou $V = 1$. D'après la question **6.a**, X est indécomposable.

7 Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat admis dans l'énoncé, il existe des variables aléatoires indépendantes $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ toutes constantes égales à $\frac{a}{m}$. Il est alors clair que $X \sim \sum_{i=1}^m X_{m,i}$. Ainsi X est infiniment divisible.

8 **8.a** Remarquons que

$$\bigcap_{i=1}^n \left\{ X_i > \frac{M}{n} \right\} \subset \{X > M\} \subset \{|X| > m\} = \emptyset$$

Comme les X_i sont indépendantes, on en déduit que

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$$

Comme les X_i sont de même loi, tous les facteurs sont égaux. Ainsi

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$$

puis

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}\left(X_i \leq \frac{M}{n}\right) = 1$$

De la même manière,

$$\bigcap_{i=1}^n \left\{ X_i < -\frac{M}{n} \right\} \subset \{X < -M\} \subset \{|X| > m\} = \emptyset$$

Comme les X_i sont indépendantes, on en déduit que

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(X_i < -\frac{M}{n}\right) = 0$$

Comme les X_i sont de même loi, tous les facteurs sont égaux. Ainsi

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}\left(X_i < -\frac{M}{n}\right) = 0$$

puis

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}\left(X_i \geq -\frac{M}{n}\right) = 1$$

Enfin, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left\{|X_i| \leq \frac{M}{n}\right\} = \left\{X_i \leq \frac{M}{n}\right\} \cap \left\{X_i \geq -\frac{M}{n}\right\}$ est presque sûr en tant qu'intersection d'événements presque certains.

8.b Puisque $X_i^2 \leq \frac{M^2}{n^2}$ presque sûrement,

$$\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 \leq \mathbb{E}(X_i^2) \leq \frac{M^2}{n^2}$$

Par indépendance des X_i ,

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) \leq \frac{M^2}{n}$$

8.c Par passage à la limite dans l'inégalité précédente lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\mathbb{V}(X) = 0$. On en déduit que X est presque sûrement constante.

9 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Si $p \in \{0, 1\}$, X est presque sûrement constante donc infiniment divisible d'après la sous-partie précédente.

Sinon X est bornée mais pas presque sûrement constante. Donc X n'est pas infiniment divisible d'après la sous-partie précédente.

10 Posons $S = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Alors

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-1)} = e^{\lambda(t-1)}$$

donc $S \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

11 Supposons que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat admis en début d'énoncé, il existe des variables aléatoires

X_1, \dots, X_m mutuellement indépendantes suivant la même loi $\mathcal{P}(\lambda/m)$. D'après la question précédente, $\sum_{i=1}^m X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$ donc

$X \sim \sum_{i=1}^m X_i$. On en déduit que X est infiniment divisible.

12 Posons $X = \sum_{i=1}^r iX_i$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On se donne des variables aléatoires Y_1, \dots, Y_r mutuellement indépendantes telles que $Y_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i/m)$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

REMARQUE. Ce n'est pas exactement le résultat admis dans l'énoncé mais c'est un résultat qui est tout de même au programme et qui, de plus, est utilisé par l'énoncé !

Posons $Y = \sum_{i=1}^r iY_i$. D'après l'énoncé, il existe des variables aléatoires Z_1, \dots, Z_m mutuellement indépendantes suivant la

même loi que Y . Posons $Z = \sum_{i=1}^m Z_i$. Pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}
 G_Z(t) &= \prod_{i=1}^m G_{Z_i}(t) && \text{car les } Z_i \text{ sont mutuellement indépendantes} \\
 &= G_Y(t)^m && \text{car } Z_i \sim Y \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, m \rrbracket \\
 &= \left(\prod_{i=1}^r G_{iY_i}(t) \right)^m && \text{car les } iY_i \text{ sont mutuellement indépendantes} \\
 &= \left(\prod_{i=1}^r \mathbb{E}(t^{iY_i}) \right)^m \\
 &= \left(\prod_{i=1}^r G_{Y_i}(t^i) \right)^m \\
 &= \left(\prod_{i=1}^r e^{\lambda_i(t^i-1)/m} \right)^m \\
 &= \prod_{i=1}^r e^{\lambda_i(t^i-1)} \\
 &= \prod_{i=1}^r G_{X_i}(t^i) \\
 &= \prod_{i=1}^r \mathbb{E}(t^{iX_i}) \\
 &= \prod_{i=1}^r G_{iX_i}(t) \\
 &= G_X(t) && \text{car les } iX_i \text{ sont mutuellement indépendantes}
 \end{aligned}$$

Ainsi $X \sim Z = \sum_{i=1}^m Z_i$. On en déduit que X est infiniment divisible.

REMARQUE. On peut en fait montrer un résultat plus général. En effet, si Y est une variable aléatoire indéfiniment divisible, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, αY est infiniment divisible. Par ailleurs, on peut montrer qu'une somme de variables aléatoires indépendantes infiniment divisibles est encore infiniment divisible. On en déduit alors que $\sum_{i=1}^r iX_i$ est infiniment divisible puisque les X_i le sont.

13 **13.a** Comme $B \sqcup \bar{B} = \Omega$, $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap \bar{B})$ puis $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$. De même, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$. On en déduit par inégalité triangulaire que

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) - \mathbb{P}(B \cap \bar{A})| \leq \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$$

13.b D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y \neq n\}) + \mathbb{P}(\{Y = n\} \cap \{X \neq n\})$$

Soit $t \in [-1, 1]$. Par inégalité triangulaire à nouveau,

$$|G_X(t) - G_Y(t)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)) t^n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| |t|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$$

On en déduit avec notre remarque initiale que

$$|G_X(t) - G_Y(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y \neq n\}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y = n\} \cap \{X \neq n\})$$

Or

$$\{X \neq Y\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{X = n\} \cap \{Y \neq n\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{Y = n\} \cap \{X \neq n\}$$

donc

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y \neq n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y = n\} \cap \{X \neq n\})$$

et finalement

$$|G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y)$$

14 **14.a** Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $Z_n = \bigcup_{i \geq n} \{U_i \neq 0\}$. Tout d'abord, les $\{U_i \neq 0\}$ sont bien des événements car les U_i sont des variables aléatoires. On en déduit que Z_n est bien un événement en tant que réunion dénombrable d'événements. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = Z_{n+1} \cup \{U_n \neq 0\} \subset Z_n$ donc (Z_n) est bien décroissante pour l'inclusion. Enfin, par sous-additivité,

$$0 \leq \mathbb{P}(Z_n) \leq \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$$

Or la série $\sum \mathbb{P}(U_i \neq 0)$ converge donc la suite de ses restes converge vers 0. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(U_i \neq 0) = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$ par encadrement.

14.b Soit $\omega \in \Omega$. Comme les U_i sont à valeurs dans \mathbb{N} , la série $\sum U_i(\omega)$ converge si et seulement si les $U_i(\omega)$ sont nuls à partir d'un certain rang. Si on note D l'événement « S est définie», alors

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \geq n} \{U_i = 0\}$$

ou encore

$$\bar{D} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \geq n} \{U_i \neq 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$$

Comme la suite (Z_n) est décroissante, on obtient par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}(\bar{D}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$$

Autrement dit, $\mathbb{P}(D) = 1$ i.e. S est définie presque sûrement.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient avec la question précédente :

$$\forall t \in [-1, 1], |G_S(t) - G_{S_n}(t)| \leq 2\mathbb{P}(S \neq S_n)$$

puis, en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme uniforme sur $[-1, 1]$:

$$\|G_{S_n} - G_S\|_\infty \leq 2\mathbb{P}(S \neq S_n)$$

Comme les U_i sont à valeurs dans \mathbb{N} , elles sont positives de sorte que

$$\{S \neq S_n\} = \{S - S_n \neq 0\} = \bigcup_{i \geq n} \{U_i \neq 0\} = Z_n$$

Ainsi

$$\|G_{S_n} - G_S\|_\infty \leq 2\mathbb{P}(Z_n)$$

Par encadrement, $\|G_{S_n} - G_S\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ i.e. (G_{S_n}) converge uniformément vers G_S .

15 **15.a** Tout d'abord, $\mathbb{P}(X_i = 0) = e^{-\lambda_i}$ donc $\mathbb{P}(X_i \neq 0) = 1 - e^{-\lambda_i}$. Comme $\sum \lambda_i$ converge, $\lambda_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$ donc $\mathbb{P}(X_i \neq 0) = 1 - e^{-\lambda_i} \sim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i$. Puisque $\sum \lambda_i$ est une série à termes positifs convergente, $\sum \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ converge également.

15.b Comme les X_i sont mutuellement indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , la question **14.b** montre que $\sum_{i \geq 1} X_i$ converge presque sûrement. Si on note S sa somme et S_n sa somme partielle de rang n , la même question montre que (G_{S_n}) converge uniformément vers G_S sur $[-1, 1]$. Or pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-1)} = \exp\left((t-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda(t-1)}$$

Comme la convergence uniforme implique la convergence simple, on obtient par unicité de la limite,

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

Ainsi $S \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

15.c Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\{iX_i \neq 0\} = \{X_i \neq 0\}$. On en déduit comme à la question précédente que $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} iX_i$ converge presque sûrement et que la suite $\left(\prod_{i=1}^r G_{iX_i} \right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément et donc simplement vers G_X sur $[-1, 1]$. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $Y_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i/m)$. Pour les mêmes raisons, la série $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} iY_i$ converge presque sûrement. On note Y sa somme. A nouveau, la suite $\left(\prod_{i=1}^r G_{iY_i} \right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément et donc simplement vers G_Y sur $[-1, 1]$.

On se donne ensuite Z_1, \dots, Z_m des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que Y . Posons $Z = \sum_{i=1}^m Z_i$. Pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}
 G_Z(t) &= \prod_{i=1}^m G_{Z_i}(t) \quad \text{car les } Z_i \text{ sont mutuellement indépendantes} \\
 &= G_Y(t)^m \quad \text{car } Z_i \sim Y \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, m \rrbracket \\
 &= \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^r G_{iY_i}(t) \right)^m \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\prod_{i=1}^r G_{iY_i}(t) \right)^m \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\prod_{i=1}^r \mathbb{E}(t^{iY_i}) \right)^m \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\prod_{i=1}^r G_{Y_i}(t^i) \right)^m \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\prod_{i=1}^r e^{\lambda_i(t^i-1)/m} \right)^m \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^r e^{\lambda_i(t^i-1)} \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^r G_{X_i}(t^i) \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^r \mathbb{E}(t^{iX_i}) \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^r G_{iX_i}(t) \\
 &= G_X(t)
 \end{aligned}$$

Ainsi $X \sim Z = \sum_{i=1}^m Z_i$. On en déduit que X est infiniment divisible.

16 La suite (λ_k) est définie de manière unique par $\lambda_1 = \frac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)}$ et la relation de récurrence

$$\forall k \geq 2, \lambda_k = \frac{1}{k\mathbb{P}(X=0)} \left(k\mathbb{P}(X=k) - \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j\mathbb{P}(X=k-j) \right)$$

17 Par définition des λ_k ,

$$k\lambda_k\mathbb{P}(X=0) = k\mathbb{P}(X=k) - \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j\mathbb{P}(X=k-j)$$

Par inégalité triangulaire et positivité des probabilités,

$$k|\lambda_k|\mathbb{P}(X=0) \leq k\mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} j|\lambda_j|\mathbb{P}(X=k-j) \leq k\mathbb{P}(X=k) + k \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\mathbb{P}(X=k-j)$$

puis

$$|\lambda_k| \mathbb{P}(X=0) \leq \mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \mathbb{P}(X=k-j)$$

Remarquons ensuite que pour $\ell \neq 0$, $\mathbb{P}(X=\ell) \leq 1 - \mathbb{P}(X=0)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \mathbb{P}(X=k-j) \leq (1 - \mathbb{P}(X=0)) \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \right)$$

18 L'inégalité précédente peut se réécrire

$$\left(1 + \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \right) \mathbb{P}(X=0) \leq 1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|$$

En posant $u_k = 1 + \sum_{j=1}^k |\lambda_j|$, on a donc $0 \leq u_k \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)} u_{k-1}$. Comme $u_0 = 1$, on montre aisément par récurrence que $u_k \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est le résultat attendu.

19 D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda_k| \leq 1 + \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}$$

donc

$$|\lambda_k| \mathbb{P}(X=0)^k \leq 1$$

La suite $(\lambda_k \mathbb{P}(X=0)^k)$ est donc bornée et $\rho(X) \geq \mathbb{P}(X=0)$ par définition du rayon de convergence.

20 Par dérivation terme à terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence,

$$\forall t \in]-\rho(X), \rho(X)[, H'_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \lambda_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \lambda_{k+1} t^k$$

Par ailleurs,

$$\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) t^k$$

Puisque $\sigma(X) = \min(1, \rho(X))$, on obtient par produit de Cauchy de deux séries entières :

$$\forall t \in]-\sigma(X), \sigma(X)[, H'_X(t) G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k (j+1) \lambda_{j+1} \mathbb{P}(X=k-j) \right) t^k$$

Mais, par changement d'indice,

$$\sum_{j=0}^k (j+1) \lambda_{j+1} \mathbb{P}(X=k-j) = \sum_{j=1}^{k+1} j \lambda_j \mathbb{P}(X=k+1-j) = (k+1) \mathbb{P}(X=k+1)$$

Ainsi

$$\forall t \in]-\sigma(X), \sigma(X)[, H'_X(t) G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \lambda_{k+1} \mathbb{P}(X=k+1) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k \lambda_k t^{k-1} = G'_X(t)$$

par dérivation terme à terme de la série entière définissant G_X .

Comme G_X est solution de l'équation différentielle, $y' = H'_X y$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in]-\sigma(X), \sigma(X)[, G_X(t) = C \exp(H_X(t))$$

Comme $G_X(0) = \mathbb{P}(X=0)$ et $H_X(0) = \ln(\mathbb{P}(X=0))$, on obtient $C = 1$.

21 Comme X et Y sont indépendantes, pour tout t tel que $|t| < \min(\sigma(X), \sigma(Y))$,

$$\exp(H_{X+Y}(t)) = G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t) = \exp(H_X(t)) \exp(H_Y(t)) = \exp(H_X(t) + H_Y(t))$$

puis, par passage au logarithme,

$$H_{X+Y}(t) = H_X(t) + H_Y(t)$$

22 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{j=1}^k j\lambda_j\mathbb{P}(X = k - j) \geq k\lambda_k\mathbb{P}(X = 0)$$

car tous les termes de la somme sont positifs. Ainsi

$$0 \leq \lambda_k \leq \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 0)}$$

Comme la série $\sum \mathbb{P}(X = k)$ converge, il en est de même de la série $\sum \lambda_k$ par comparaison de séries à termes positifs.

23 Puisque $\sum \lambda_k$ converge, $\rho(X) \geq 1$. Avec la question **20**

$$\forall t \in]-1, 1[, G_X(t) = \exp(H_X(t))$$

Mais puisque les séries $\sum \mathbb{P}(X = k)$ et $\sum \lambda_k$ convergent, les séries entières $\sum \mathbb{P}(X = k)t^k$ et $\sum \lambda_k t^k$ convergent normalement sur $[-1, 1]$. On en déduit que G_X et H_X sont continues sur $[-1, 1]$. L'égalité précédente se prolonge alors sur $[-1, 1]$:

$$\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \exp(H_X(t))$$

En évaluant en 1, on obtient :

$$1 = G_X(1) = \exp(H_X(1)) = \exp\left(\ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k\right)$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = -\ln(\mathbb{P}(X = 0))$$

24 D'après la question précédente,

$$\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t^k - 1)\right)$$

Or en posant $S = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$, on a prouvé à la question **15.c** que

$$\begin{aligned} \forall t \in [-1, 1], G_S(t) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^r G_{kX_k}(t) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} \exp(\lambda_k(t^k - 1)) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k(t^k - 1)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t^k - 1)\right) \quad \text{par continuité de l'exponentielle} \\ &= G_X(t) \end{aligned}$$

On en déduit que $X \sim S = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$.

25 **25.a** Posons $S = \sum_{k=1}^n X_{n,k}$. Alors $\bigcap_{k=1}^n \{X_{n,k} < 0\} \subset \{S < 0\}$ donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_{n,k} < 0\}\right) \leq \mathbb{P}(\{S < 0\}) = 0$$

car S est à valeurs dans \mathbb{N} . Comme les $X_{n,k}$ sont indépendants et de même loi, on a donc $\mathbb{P}(X_{n,1} < 0)^n = 0$ puis $\mathbb{P}(X_{n,1} < 0) = 0$ et enfin $\mathbb{P}(X_{n,1} \geq 0) = 1$.

25.b Notons $P = \bigcap_{k=1}^n \{X_{n,k} \geq 0\}$. Alors $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(X_{n,1} \geq 0)^n = 1$. De plus,

$$\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap P) + \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \bar{P})$$

Comme $\{S = 0\} \cap \bar{P} \subset \bar{P}$,

$$0 \leq \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \bar{P}) \leq \mathbb{P}(\bar{P}) = 0$$

de sorte que $\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap P)$. Or

$$\{S = 0\} \cap P = \bigcap_{k=1}^n \{X_{n,k} = 0\}$$

donc, comme les $X_{n,k}$ sont indépendants et de loi,

$$\mathbb{P}(\{S = 0\} \cap P) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{n,k} = 0) = \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)^n$$

Or $S \sim X$ donc $\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(X = 0) > 0$. On en déduit que $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) > 0$.

25.c Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Alors

$$\{X_{n,1} = x\} \cap \left(\bigcap_{k=2}^n \{X_{n,k} = 0\} \right) \subset \{S = x\}$$

Ainsi, par indépendance des $X_{n,k}$,

$$0 \leq \mathbb{P}(X_{n,1} = x) \prod_{k=2}^n \mathbb{P}(X_{n,k} = 0) \leq \mathbb{P}(S = x) = \mathbb{P}(X = x) = 0$$

puis

$$\mathbb{P}(X_{n,1} = x) \prod_{k=2}^n \mathbb{P}(X_{n,k} = 0)$$

Comme les $X_{n,k}$ sont de même loi, la question précédente montre que $\mathbb{P}(X_{n,k} = 0) > 0$ pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ donc $\mathbb{P}(X_{n,1} = x) = 0$. Ainsi $X_{n,1}$ est presque sûrement à valeurs dans \mathbb{N} .

Comme les $X_{n,k}$ sont de même loi, elles sont toutes presque sûrement à valeurs dans \mathbb{N} .

26 **26.a** On a montré précédemment que $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)^n$. Comme $\mathbb{P}(X = 0) > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(X = 0))\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

26.b Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\{X_{n,1} = i\} \subset \overline{\{X_{n,1} = 0\}}$ donc

$$0 \leq \mathbb{P}(X_{n,1} = i) \leq 1 - \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)$$

On conclut avec le théorème des gendarmes que

$$\mathbb{P}(X_{n,1} = i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

27 **27.a** Comme les $X_{n,k}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, on peut généraliser la question **21** pour affirmer que

$$H_X = \sum_{k=1}^n H_{X_{n,k}} = nH_n$$

27.b Notons $H_n(t) = \ln(\mathbb{P}(X_{n,1} = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k t^k$. Par unicité du développement en série entière, la question précédente montre que $\lambda_k = n\mu_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par définition des μ_k et λ_k ,

$$kn\mathbb{P}(X_{n,1} = k) = \sum_{j=1}^k nj\mu_j\mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) = \sum_{j=1}^k j\lambda_j\mathbb{P}(X_{n,1} = k-j)$$

27.c Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **26**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^k j \lambda_j \mathbb{P}(X_{n,1} = k - j) = k \lambda_k$$

On en déduit avec la question précédente, $n \mathbb{P}(X_{n,1} = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \mathbb{P}(X_{n,1} = k) \geq 0$ donc $\lambda_k \geq 0$ par passage à la limite. Ceci signifie que X est λ -positive.

28 **28.a** Les questions précédentes montrent que si X est infiniment divisible, alors elle est λ -positive, autrement dit (i) \implies (ii).

La question **24** montre que si X est λ -positive, alors il existe une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables de Poisson indépendantes telle que $X \sim \sum_{i=1}^{+\infty} i X_i$, autrement dit (ii) \implies (iii).

Enfin, la question **15.c** montre l'implication (iii) \implies (i).

28.b Vu la question suivante, je pense qu'il faut traiter le cas d'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que $\mathbb{P}(X = 1) > 0$. On remarque alors que $Y = X - 1$ est à valeurs dans \mathbb{N} et que $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1) > 0$ de sorte qu'on peut appliquer à Y le résultat de la question précédente.

Il est alors clair que X est infiniment divisible si et seulement si Y l'est. En effet, la variable aléatoire constante égale à 1 est indépendante de toute variable aléatoire.

28.c Posons $Y = X - 1$ de sorte que Y est à valeurs dans \mathbb{N} et $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = p > 0$. On calcule $G_Y(t) = \frac{p}{1 - qt}$ en posant $q = 1 - p$ puis

$$H_Y(t) = \ln(G_Y(t)) = \ln(p) - \ln(1 - qt) = \ln(p) + \sum_{k=1}^{+\infty} q^k t^k$$

Avec les notations de l'énoncé, on a donc $\lambda_k = q^k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que Y est λ -positive. Ainsi Y est infiniment divisible et X également.