Intégrales impropres

On a défini en première année l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Il s'agit maintenant de donner un sens si possible à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle autre qu'un segment. On parle alors d'intégrales impropres ou généralisées.

Exemple 0.1

$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est une intégrale impropre puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ mais $[1, +\infty[$ n'est pas un segment.

Exemple 0.2

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, \mathrm{d}x$ est une intégrale impropre car tan est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ mais $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ n'est pas un segment.

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Convergence d'intégrales

1.1 Continuité par morceaux

On a vu en première année la définition d'une fonction continue par morceaux sur un **segment**. On peut étendre cette notion à un intervalle quelconque.

Définition 1.1 Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

Exemple 1.1

- $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1.2 Intégrales impropres

Définition 1.2 Intégrale convergente sur un intervalle semi-ouvert

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ **converge** si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite en b^-. Cette limite est alors notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ **converge** si $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite en a^+. Cette limite est alors notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.

Remarque.

- Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ alors pour tout $c \in [a, b[$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
- Si f est continue par morceaux sur $]a, b]$ alors pour tout $c \in]a, b]$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Analogie avec les séries

Par analogie avec les séries, on peut définir le concept d'«intégrale partielle» et de «reste».

- Dans le cas d'une intégrale sur $[a, b[$, l'«intégrale partielle» sera $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [a, b[$. On peut alors dire que l'intégrale converge si l'«intégrale partielle» admet une limite finie en b^-. Dans ce cas, le «reste» sera $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et il est de limite nulle en b^-.
- Dans le cas d'une intégrale sur $]a, b]$, l'«intégrale partielle» sera $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in]a, b]$. On peut alors dire que l'intégrale converge si l'«intégrale partielle» admet une limite finie en a^+. Dans ce cas, le «reste» sera $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et il est de limite nulle en a^+.

Attention ! Contrairement aux séries, une intégrale du type $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ peut converger sans que $\lim_{+\infty} f = 0$. Pire, f peut même ne pas être bornée.

Exemple 1.2

- Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{a} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple 1.3

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$.

Définition 1.3 Intégrale sur un intervalle ouvert

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a \leq b$ et f continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les convergences des intégrales de f sur $[c, b[$ et sur $]a, c]$ ne dépendent pas de $c \in]a, b[$. Dans le cas où ces deux intégrales convergent, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge et on pose

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\, \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\, \mathrm{d}t$$

Cette quantité ne dépend pas de $c \in]a, b[$.

Exemple 1.4

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ diverge.

Remarque. Si $\mathrm{I} =]a, b[$ est un intervalle **borné** et si f est continue par morceaux sur I et admet des limites finies en a^+ et b^-, alors l'intégrale de f sur I converge.
En particulier, si une fonction f continue sur $\mathrm{I} =]a, b[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors l'intégrale de f sur I converge.
Une telle intégrale est appelée **faussement impropre**.

1.3 Propriétés

Proposition 1.1

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pose $a = \inf \mathrm{I}$ et $b = \sup \mathrm{I}$.

Linéarité Si les intégrales de f et g sur I convergent, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'intégrale de $\lambda f + \mu g$ sur I converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\, \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions dont l'intégrale sur I converge est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application qui à une telle fonction associe son intégrale sur I est une forme linéaire.

Positivité Si f est positive sur I et si l'intégrale de f sur I converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \geq 0$.

Stricte positivité On suppose $a < b$. Si f est positive et continue sur I et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle sur I.

Relation de Chasles Si l'intégrale de f sur I converge, alors pour tout $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\, \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\, \mathrm{d}t$$

Attention ! Prendre garde à l'ordre des bornes pour la positivité.

Attention ! L'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))\,\mathrm{d}t$ peut converger sans que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Par exemple, on ne peut pas écrire

$$\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

En effet, la première intégrale converge tandis que les deux suivantes divergent.

Remarque. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ diverge.

Proposition 1.2 Fonctions à valeurs complexes

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose $a = \inf \mathrm{I}$ et $b = \sup \mathrm{I}$. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$ convergent et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Exercice 1.1

Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} e^{-at}\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Proposition 1.3 Dérivation

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ **converge**, alors $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a, b[$, de dérivée $-f$.
- Soient $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'intégrale de f sur $]a, b]$ **converge**, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]a, b]$ de dérivée f.

2 Intégrabilité

2.1 Définition

Définition 2.1 Intégrabilité

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. On dit que f est **intégrable** sur I ou que l'intégrale de f sur I **converge absolument** si l'intégrale de $|f|$ sur I converge.

Remarque. On remarquera l'analogie avec l'absolue convergence pour les séries.

Remarque. Pour une fonction **de signe constant**, l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale.

Remarque. Si $\mathrm{I} =]a, b[$ est un intervalle **borné** et si f est continue par morceaux sur I et admet des limites finies en a^+ et b^-, f est intégrable sur I.

Proposition 2.1 Intégrales de Riemann

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- $x \mapsto \frac{1}{|x-b|^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 2.2 Exponentielles

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $a > 0$.

Notation 2.1 Espace $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$

On note $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

2.2 Intégrabilité par comparaison

Proposition 2.3

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$ **à valeurs positives**. L'intégrale de f sur $[a, b[$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]a, b]$ **à valeurs positives**. L'intégrale de f sur $]a, b]$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $]a, b]$.

Remarque. Dans le cas où f est **positive** et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, on pourra noter $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Proposition 2.4 Majoration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I telles que $0 \leq f \leq g$ sur I. Si l'intégrale de g sur I converge, alors l'intégrale de f sur I converge également.

Proposition 2.5 Majoration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $|f| \leq |g|$ sur I et si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

Exemple 2.1

$f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. En effet,

- f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$;
- pour tout $t \in [1, +\infty[$, $|f(t)| \leq \dfrac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Proposition 2.6 Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale de f sur I converge. De plus,

$$\left|\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, \mathrm{d}t$$

où $a = \inf \mathrm{I}$ et $b = \sup \mathrm{I}$.

Remarque. Ce résultat est à mettre en parallèle avec le fait que la convergence absolue implique la convergence pour les séries.

Attention ! L'intégrale d'une fonction peut très bien converger sans que la fonction soit intégrable. On parle alors d'intégrale **semi-convergente**.

Exemple 2.2

L'intégrale de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur $]0, +\infty[$ converge mais cette fonction n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Autrement dit, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge mais pas absolument.

Proposition 2.7 Structure d'espace vectoriel

L'ensemble $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2.1

On note $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur $\mathbb{K}$ telles que f^2 est intégrable sur I. Montrer que $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 2.8 Domination

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. Si $f \underset{b^-}{=} \mathcal{O}(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$. Si $f \underset{a^+}{=} \mathcal{O}(g)$ et si g est intégrable sur $]a, b]$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.

Exemple 2.3

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Si f est continue par morceaux et bornée sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Proposition 2.9 Négligeabilité

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$. Si $f \underset{a^+}{=} o(g)$ et si g est intégrable sur $]a, b]$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.

Exemple 2.4

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Tout d'abord, $t \mapsto \dfrac{\sin(e^t)}{t^2+1}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Remarquons ensuite que $\dfrac{\sin(e^t)}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $t \mapsto \dfrac{\sin(e^t)}{t^2+1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et même sur $[0, +\infty[$. A fortiori, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 2.5

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Tout d'abord, $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

Remarquons ensuite que $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right)$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ convergeait, alors la $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ serait intégrable sur $[1, +\infty[$, puisqu'elle y est positive. Par conséquent, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ serait également intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui n'est pas puisque $\dfrac{1}{2} \leq 1$. On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Proposition 2.10 Equivalence

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$. Si $f \underset{a^+}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si g l'est.

Exemple 2.6

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si f admet une limite non nulle en $+\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ diverge.

Exemple 2.7

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^2 + t}\, \mathrm{d}t$.

Tout d'abord, $t \mapsto \frac{e^{1/t}}{t^2 + t}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

Remarquons ensuite que $\frac{e^{1/t}}{t^2 + t} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{e^{1/t}}{t^2 + t}$ l'est également. Notamment, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^2 + t}\, \mathrm{d}t$ converge.

Exemple 2.8

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 + t^3}\, \mathrm{d}t$.

Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2 + t^3}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Remarquons que $\frac{\sin t}{t^2 + t^3} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2 + t^3}$ ne l'est pas non plus. Comme cette fonction est positive sur $]0, 1]$, $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 + t^3}\, \mathrm{d}t$ diverge.

Remarque. Les résultats précédents peuvent se reformuler en termes de convergence d'intégrale. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. On suppose que g est de **signe constant** au voisinage de b^-.

- Si $f \underset{b^-}{=} \mathcal{O}(g)$, la convergence de $\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t$ implique la convergence de $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$.
- Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$, la convergence de $\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t$ implique la convergence de $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$.
- Si $f \underset{b^-}{\sim} o(g)$, la convergence de $\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t$ équivaut à la convergence de $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$.

On a bien entendu des résultats similaires lorsque l'on remplace l'intervalle $[a, b[$ par l'intervalle $]a, b]$.

On donne enfin des exemples classiques de fonctions définies par des intégrales.

Exemple 2.9 Fonction Γ d'Euler

La fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- De plus, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
- Enfin, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{=} o(1/t^2)$ et la fonction positive $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

Exemple 2.10 Fonction B d'Euler

La fonction $\mathrm{B} : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$.
- De plus, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
- Enfin, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$ et la fonction positive $t \mapsto (1-t)^{y-1}$ est intégrable au voisinage de $1-$ si et seulement si $y > 0$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

3 Calcul d'intégrales

3.1 Changement de variables

Proposition 3.1 Changement de variables

Soient $(a, b, \alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^4$ tel que $a \leq b$ et $\alpha \leq \beta$, f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et φ une bijection strictement croissante de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\, \mathrm{d}u$$

sont de même nature et, en cas de convergence, sont égales.

Remarque. Si φ est décroissante, on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\, \mathrm{d}u = \int_b^a f(t)\, \mathrm{d}t$$

Méthode **Changement de variable**

On dit qu'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$. Comment alors se souvenir de la formule ?

- On remplace t par $\varphi(u)$ dans la fonction à intégrer.
- $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \varphi'(u)$ donc $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ et on remplace dans l'intégrale.
- t doit varier entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ lorsque u varie entre a et b, ce qui nous donne les bornes de l'intégrale en u.

Exemple 3.1

Montrons que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}$ converge et déterminons sa valeur. On va effectuer le changement de variable $u = \sqrt{1+t^2}$ i.e. $t = \sqrt{u^2-1}$. L'application $u \mapsto \sqrt{u^2-1}$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\sqrt{2}, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}$ et $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$ sont de même nature puisque $\mathrm{d}t = \dfrac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}}$. Une décomposition en éléments simples montre alors que

$$\forall u \in \left[\sqrt{2}, +\infty\right[,\ \frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)$$

On en déduit que

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Exemple 3.2 Symétrie de la fonction B

On rappelle que $\mathrm{B} : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. A l'aide du changement de variable affine $t \mapsto 1-t$, on montre que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x)$$

Exercice 3.1 Expressions alternatives de la fonction B

On rappelle que $\mathrm{B} : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. A l'aide du changement de variable $t = \sin^2\theta$, montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{B}(x, y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

2. A l'aide du changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$, montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{B}(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u$$

3.2 Intégration par parties

Proposition 3.2 Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si fg admet des limites finies en a^+ et b^-, alors les intégrales de $f'g$ et fg' sur $]a,b[$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

où $[fg]_a^b = \lim\limits_{t\to b^-} f(t)g(t) - \lim\limits_{t\to a^+} f(t)g(t)$.

Remarque. Le résultat reste valable si $b \leq a$.

Exemple 3.3

Montrons la convergence et calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$. Posons $f(t) = t$ et $g(t) = -e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ de sorte que $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. Puisque fg admet des limites finies en 0 et $+\infty$, les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}$ et $\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, il en est donc de même pour $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$, ce que l'on aurait pu prouver directement. De plus,

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{+\infty} fg - \lim_0 fg + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Exemple 3.4 Relation fonctionelle de la fonction Γ

On rappelle que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto t^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto xt^{x-1}$. La fonction $t \mapsto -e^{-t}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto e^{-t}$. Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. De plus, comme $x > 0$

$$\lim_{t\to 0^+} t^x e^{-t} = 0$$

et, par croissances comparées,

$$\lim_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0$$

On en déduit que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

Exercice 3.2

Calculer $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.5 Relation fonctionnelle de la fonction B

On rappelle que $B : (x,y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrons que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto (1-t)^y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ de dérivées respectives $t \mapsto xt^{x-1}$ et $t \mapsto -y(1-t)^{y-1}$. Par intégrations par parties,

$$\int_0^1 yt^x(1-t)^{y-1}\, dt = -\left[t^x(1-t)^y\right]_0^1 + \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y\, dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. Puisque $x > 0$ et $y > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} t^x(1-t)^y = \lim_{t\to 1^-} t^x(1-t)^y = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
yB(x+1,y) &= \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y\, dt \\
&= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\, dt \\
&= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt - x\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\, dt \qquad \text{car ces deux intégrales convergent} \\
&= xB(x,y) - xB(x+1,y)
\end{aligned}$$

ou encore

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

Exercice 3.3

Calculer $B(n+1,p+1) = \int_0^1 t^n(1-t)^p\, dt$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 3.4 Intégrale de Dirichlet

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge. Cette intégrale converge-t-elle absolument ?

4 Intégration des relations de comparaison

Remarque. Soit f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$.

- Si f est positive et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.
- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\lim_{x\to+\infty} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Proposition 4.1

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. On suppose de plus que g est **de signe constant** au voisinage de b^-.

Domination On suppose que $f \underset{b^-}{=} \mathcal{O}(g)$.

- Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge i.e. si g est intégrable en b^-, alors $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge i.e. si g n'est pas intégrable en b^-, alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Négligeabilité On suppose que $f \underset{b^-}{=} o(g)$.

- Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge i.e. si g est intégrable en b^-, alors $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge i.e. si g n'est pas intégrable en b^-, alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Equivalence On suppose que $f \underset{b^-}{\sim} g$.

- Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge i.e. si g est intégrable en b^-, alors $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge i.e. si g n'est pas intégrable en b^-, alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. On a des résultats analogues pour des fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$ quitte à utiliser des relations de comparaison en a^+ et non b^-.

Remarque. Ces résultats sont l'exact pendant des résultats sur les sommations de relations de comparaison dans le cadre des séries. Il vaut voir $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ comme un «reste» et $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ comme une «somme partielle».

Exemple 4.1

- On sait que $\frac{1}{t+\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, que $t \mapsto \frac{1}{t}$ est positive au voisinage de $+\infty$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}}$ diverge et $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$.
- On sait que $\frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est positive au voisinage de 0^+ et que $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge donc $\int_0^{\pi} \frac{\sin t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge et $\int_0^x \frac{\sin t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \underset{x\to0^+}{=} \mathcal{O}\left(\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\right)$ ou encore $\int_0^x \frac{\sin t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \underset{x\to0^+}{=} \mathcal{O}(\sqrt{x})$.

Attention ! Il est essentiel que la fonction de référence soit de signe constant au voisinage du point considéré.