

DEVOIR SURVEILLÉ N°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Soit $(\sigma, \sigma') \in B_n^2$. Alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$[\omega(\sigma)\omega(\sigma')]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [\omega(\sigma)]_{i,k} [\omega(\sigma')]_{k,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))} = [\omega(\sigma \circ \sigma')]_{i,j}$$

Ainsi $\omega(\sigma)\omega(\sigma') = \omega(\sigma \circ \sigma')$.

2 Soit $\sigma \in B_n$. Alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$[\omega(\sigma)^T]_{i,j} = [\omega(\sigma)]_{j,i} = \delta_{j,\sigma(i)} = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)} = [\omega(\sigma^{-1})]_{i,j}$$

Par conséquent, $\omega(\sigma)^T = \omega(\sigma^{-1})$ et, d'après la question précédente,

$$\omega(\sigma)^T \omega(\sigma) = \omega(\sigma^{-1})\omega(\sigma) = \omega(\sigma^{-1} \circ \sigma) = \omega(\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}) = I_n$$

Finalement, $\omega(\sigma) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et donc $\omega(B_n) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3 Posons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $D_\sigma = \text{diag}(d_\sigma(1), \dots, d_\sigma(n))$ et $\Omega = \omega(\sigma)$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$[D\Omega]_{i,j} = \sum_{k=1}^n D_{i,k} \Omega_{k,j} = d_i \delta_{i,\sigma(j)}$$

et

$$[\Omega D_\sigma]_{i,j} = \sum_{k=1}^n \Omega_{i,k} D_{k,j} = \delta_{i,\sigma(j)} d_{\sigma(j)}$$

Or il est clair que $d_i \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{i,\sigma(j)} d_{\sigma(j)}$ donc $D\Omega = \Omega D_\sigma$.

4 Posons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et $D' = \text{diag}(d'_1, \dots, d'_n)$. D'après les questions suivantes :

$$\begin{aligned} & \exists M \in \omega(B_n), D' = M^T D M \\ \Leftrightarrow & \exists \sigma \in B_n, D' = \omega(\sigma)^T D \omega(\sigma) \\ \Leftrightarrow & \exists \sigma \in B_n, \omega(\sigma) D' = \omega(\sigma) \omega(\sigma)^T D \omega(\sigma) \\ \Leftrightarrow & \exists \sigma \in B_n, \omega(\sigma) D' = D \omega(\sigma) \\ \Leftrightarrow & \exists \sigma \in B_n, \omega(\sigma) \text{diag}(d'_1, \dots, d'_n) = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \omega(\sigma) \\ \Leftrightarrow & \exists \sigma \in B_n, \omega(\sigma) \text{diag}(d'_1, \dots, d'_n) = \omega(\sigma) \text{diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)}) \\ \Leftrightarrow & \exists \sigma \in B_n, \text{diag}(d'_1, \dots, d'_n) = \text{diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)}) \\ \Leftrightarrow & \exists \sigma \in B_n, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d'_i = d_{\sigma(i)} \end{aligned}$$

En voyant d et d' comme des applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans \mathbb{R} , cette dernière condition équivaut à l'existence de $\sigma \in B_n$ tel que $d' = d \circ \sigma$.

Supposons qu'il existe $\sigma \in B_n$ tel que $d' = d \circ \sigma$. Alors $\text{Im}(d') = \text{Im}(d)$ puisque σ est surjective. Ceci signifie que D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux. Soit $y \in \text{Im}(d) = \text{Im}(d')$. Alors $(d')^{-1}(\{y\}) = \sigma^{-1}(d^{-1}(\{y\}))$ puis $\text{card}(d')^{-1}(\{y\}) = \text{card } d^{-1}(\{y\})$ car σ est bijective. Ceci signifie que les coefficients diagonaux ont le même nombre d'occurrences dans D et D' .

Réciproquement, supposons que D et D' aient le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D' .

5 C'est une simple conséquence du théorème spectral.

6 Notons $\{s_1, \dots, s_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ où les λ_i sont deux à deux distincts. D'après le théorème sur les polynômes interpolateurs de Lagrange, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\lambda_j) = f(\lambda_j)$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Or pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $s_i = \lambda_j$ donc $P(s_i) = f(s_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

7 Pour simplifier, posons $D = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ et $D' = \text{diag}(s'_1, \dots, s'_n)$. On prouve aisément par récurrence que $S^k = \Omega^\top D^k \Omega$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis par linéarité de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \Omega^\top X \Omega$, $P(S) = \Omega^\top P(D) \Omega$. De même, $P(S) = (\Omega')^\top P(D') \Omega'$. Comme D est diagonale,

$$P(D) = \text{diag}(P(s_1), \dots, P(s_n)) = \text{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))$$

Or $\text{Sp}(S) = \{s_1, \dots, s_n\} = \{s'_1, \dots, s'_n\}$ donc on a également $P(s'_i) = f(s'_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puis

$$P(D') = \text{diag}(P(s'_1), \dots, P(s'_n)) = \text{diag}(f(s'_1), \dots, f(s'_n))$$

Finalement,

$$P(S) = (\Omega')^\top \text{diag}((f(s'_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega' = \Omega^\top \text{diag}((f(s_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega$$

Comme $\text{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))$ est diagonale et donc symétrique, on montre sans peine que $\Omega^\top \text{diag}((f(s_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

8 Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(\varphi, \psi) \in (\mathbb{R}^I)^2$. Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. Il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(s_1, \dots, s_n) \in I^n$ tels que $S = \Omega^\top \text{diag}(s_1, \dots, s_n) \Omega$. Par définition,

$$\begin{aligned} u(\lambda\varphi + \mu\psi)(S) &= \Omega^\top \text{diag}(((\lambda\varphi + \mu\psi)(s_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega \\ &= \Omega^\top (\lambda \text{diag}((\varphi(s_i))_{1 \leq i \leq n}) + \mu \text{diag}((\psi(s_i))_{1 \leq i \leq n})) \Omega \\ &= \lambda \Omega^\top (\text{diag}((\varphi(s_i))_{1 \leq i \leq n})) \Omega + \mu \Omega^\top (\text{diag}((\psi(s_i))_{1 \leq i \leq n})) \Omega \\ &= \lambda u(\varphi)(S) + \mu u(\psi)(S) \end{aligned}$$

Ainsi u est linéaire. Puisque tr est également linéaire, $v = \text{tr} \circ u$ est aussi linéaire.

Soit $x \in I$. En prenant $\Omega = I_n$ et $s_1 = \dots = s_n = x$, on obtient

$$u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n$$

9 Soit $\varphi \in \text{Ker } u$. D'après la question précédente, $u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n = 0$ pour tout $x \in I$. Ainsi φ est nulle sur I . Par conséquent, $\text{Ker } u = \{0\}$ et u est injective.

Si $n = 1$, alors en identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à \mathbb{R} , alors l'ensemble des applications de $\mathcal{S}_n(I)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est tout simplement \mathbb{R}^I et la question précédente montre alors que $u(\varphi) = \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^I$. Par conséquent, $u = \text{Id}_{\mathbb{R}^I}$ est surjective. Si $n \geq 2$, on peut choisir une application constante Φ de $\mathcal{S}_n(I)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}I_n$. Supposons que cette application Φ admette un antécédent φ par u . Alors pour tout $x \in I$, on aurait $\Phi(xI_n) = u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n$, ce qui contredirait la définition de Φ . Ainsi u n'est pas surjective.

10 Puisque f est polynomiale, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. Il existe donc $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(s_1, \dots, s_n) \in I^n$ tels que

$$S = \Omega^\top \text{diag}(s_1, \dots, s_n) \Omega$$

Par définition

$$f(S) = \Omega^\top \text{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n)) \Omega = \Omega^\top \text{diag}(P(s_1), \dots, P(s_n)) \Omega$$

Posons $D = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$. Comme D est diagonale, $P(D) = \text{diag}(P(s_1), \dots, P(s_n))$ puis

$$P(S) = P(\Omega^\top D \Omega) = \Omega^\top P(D) \Omega = f(S)$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$. Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(f)(xI_n) = P(xI_n)$ ou encore $f(x)I_n = P(x)I_n$. On en déduit que $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc que f est polynomiale.

11 Supposons que $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$ converge simplement vers $\varphi \in \mathbb{R}^I$ sur I . Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. A nouveau, il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(s_1, \dots, s_n) \in I^n$ tels que $S = \Omega^\top \text{diag}(s_1, \dots, s_n) \Omega$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u(\varphi_k)(S) = \Omega^\top \text{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n)) \Omega$. Comme $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers φ sur I , $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k(s_i) = \varphi(s_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n)) = \text{diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$$

Enfin, l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \Omega^T M \Omega$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc cette application est continue. On en déduit par caractérisation séquentielle de la continuité que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(\varphi_k)(S) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Omega^T \text{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n)) \Omega = \Omega^T \text{diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n)) \Omega = u(\varphi)(S)$$

Autrement dit, $(u(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $u(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$. Comme tr est linéaire et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sorte que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} v(\varphi_k)(S) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{tr}(u(\varphi_k)(S)) = \text{tr}(u(\varphi)(S)) = v(\varphi)(S)$$

A nouveau, $(v(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $v(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.

Supposons maintenant que $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur I . Munissons par exemple $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|$. Remarquons que si $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\Omega^T M \Omega\|^2 &= \text{tr}((\Omega^T M \Omega)^T (\Omega^T M \Omega)) \\ &= \text{tr}(\Omega^T M^T \Omega \Omega^T M \Omega) \\ &= \text{tr}(\Omega^T M^T M \Omega) \\ &= \text{tr}(\Omega \Omega^T M^T M) \\ &= \text{tr}(M^T M) = \|M\|^2 \end{aligned}$$

Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. Avec les mêmes notations que précédemment et la remarque ci-dessus,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\|^2 = \|\text{diag}(\varphi_k(s_1) - \varphi(s_1), \dots, \varphi_k(s_n) - \varphi(s_n))\|^2 = \sum_{i=1}^n (\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i))^2 \leq n \|\varphi_k - \varphi\|_\infty^2$$

ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\| \leq \sqrt{n} \|\varphi_k - \varphi\|_\infty$$

Ce majorant est indépendant de S et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc $(u(\varphi_k))$ converge uniformément vers $u(\varphi)$. Comme tr est linéaire et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on peut noter C la norme subordonnée de tr à la norme euclidienne (et à la valeur absolue). Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall S \in \mathcal{S}_n(I), |v(\varphi_k)(S) - v(\varphi)(S)| \leq C \|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\| \leq C \sqrt{n} \|\varphi_k - \varphi\|_\infty$$

On conclut comme précédemment que $(v(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $v(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.

12 Comme S est symétrique réelle, il existe une base orthonormée (X_1, \dots, X_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associés. Sans perte de généralité, on peut supposer $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Soit alors $X \in \Sigma$. Il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$. Comme (X_1, \dots, X_n) est orthonormée

$$X^T X = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$$

De plus,

$$X^T S X = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i$$

donc, comme $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ et $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$,

$$\lambda_1 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \leq \lambda_n$$

i.e.

$$\lambda_1 \leq X^T S X \leq \lambda_n$$

De plus, $X_1 \in \Sigma$ et $X_1^T X_1 = \lambda_1$ de même que $X_n \in \Sigma$ et $X_n^T X_n = \lambda_n$ donc

$$\min(\text{Sp}(S)) = \lambda_1 = \min_{X \in \Sigma} X^T S X \quad \text{et} \quad \max(\text{Sp}(S)) = \lambda_n = \max_{X \in \Sigma} X^T S X$$

13 Soient $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(I)^2$ et $t \in [0, 1]$. Tout d'abord, $S = (1-t)S_1 + tS_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors pour tout $X \in \Sigma$

$$X^T S X = (1-t)X^T S_1 X + (1-t)X^T S_2 X$$

donc, d'après la question précédente

$$(1-t) \min \text{Sp}(S_1) + t \in \text{Sp}(S_2) \leq X^T S X \leq (1-t) \max \text{Sp}(S_1) + t \max \text{Sp}(S_2)$$

puis, toujours d'après la question précédente, en notant $m = (1-t) \min \text{Sp}(S_1) + t \in \text{Sp}(S_2)$ et $M = (1-t) \max \text{Sp}(S_1) + t \max \text{Sp}(S_2)$;

$$\text{Sp}(S) \subset [m, M]$$

Comme $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(I)^2$, $(\min \text{Sp}(S_1), \max \text{Sp}(S_1), \min \text{Sp}(S_2), \max \text{Sp}(S_2)) \in I^4$ puis, comme I est un intervalle donc convexe, $(m, M) \in I^2$ puis $\text{Sp}(S) \subset [m, M] \subset I$. Ainsi $S \in \mathcal{S}_n(I)$ et $\mathcal{S}_n(I)$ est convexe.

Vérifions maintenant que ρ est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Tout d'abord, ρ est bien positive par définition.

Homogénéité. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. On montre aisément que $\text{Sp}(tM) = t \text{Sp}(M)$. Ainsi

$$\rho(tM) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(tM)\} = \max\{|\lambda t|, \lambda \in \text{Sp}(M)\} = |t| \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(M)\} = |t| \rho(M)$$

Séparation. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $\rho(M) = 0$. Alors $\text{Sp}(M) = \{0\}$ et M est diagonalisable donc M est semblable à la matrice nulle puis $M = 0$.

Inégalité triangulaire. Soit $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. Pour tout $X \in \Sigma$,

$$|X^T (S_1 + S_2) X| \leq |X^T S_1 X| + |X^T S_2 X| \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$$

D'après la question précédente,

$$\text{Sp}(S_1 + S_2) \subset [-\rho(S_1) - \rho(S_2), \rho(S_1) + \rho(S_2)]$$

puis $\rho(S_1 + S_2) \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$.

14 Remarquons déjà que χ est en fait à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, chaque coefficient de $\chi(M)$ est polynomial en les coefficients de M . Les applications coordonnées de χ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sont donc continues de sorte que χ est elle-même continue.

15 Comme la suite (M_k) converge, elle est bornée. Ceci signifie que la suite $(\rho(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est elle-même bornée. Par définition de ρ , la suite $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc aussi bornée. Comme elle est à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension finie \mathbb{R}^n , elle est à valeurs dans un compact et elle admet alors une valeur d'adhérence que nous noterons Λ . Il existe donc une application $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \Lambda$. Par définition de Sp_\uparrow ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Lambda_{\alpha(k),1} \leq \dots \leq \Lambda_{\alpha(k),n}$$

puis, par passage à la limite,

$$\Lambda_1 \leq \dots \leq \Lambda_n$$

donc Λ est croissante.

16 Remarquons déjà que $(M_{\alpha(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers M en tant que suite extraite de la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Notons à nouveau Λ la limite de la suite $(\Lambda_{\alpha(k)})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\chi(M_{\alpha(k)}) = \prod_{i=1}^n (X - \Lambda_{\alpha(k),i})$$

L'application $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}_1[X] \mapsto \prod_{i=1}^n P_i$ est multilinéaire et $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie donc cette application est continue. Comme χ est également continue, on obtient par passage à la limite

$$\chi(M) = \prod_{i=1}^n (X - \Lambda_i)$$

Notamment, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ sont les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On prouve comme à la question précédente que Λ est croissante, ce qui signifie que $\Lambda = \text{Sp}_\uparrow(M)$.

17 On a montré précédemment que la suite $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ était à valeurs dans un compact de \mathbb{R}^n . La question précédente montre que cette suite admet $\text{Sp}_\uparrow(M)$ comme unique valeur d'adhérence. On en déduit que $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\text{Sp}_\uparrow(M)$. Autrement dit, $\text{Sp}_\uparrow(M_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{Sp}_\uparrow(M)$. Ainsi Sp_\uparrow est continue par caractérisation séquentielle de la continuité.

18 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne définie par $\|M\|^2 = \text{tr}(M^T M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|\Omega\|^2 = \text{tr}(\Omega^T \Omega) = \text{tr}(I_n) = n$$

donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée.

L'application $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (M^T, M)$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc f est continue. L'application $g : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto AB$ est bilinéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc g est continue. Ainsi $h = g \circ f$ est continue. De plus, $h(M) = M^T M$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = h^{-1}(\{I_n\})$. Finalement, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Ainsi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée et fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

19 Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On considère à nouveau une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et convergeant vers une matrice M . Il existe alors une suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, M_k = \Omega_k^T \text{diag}(\Lambda_k) \Omega_k$$

en notant à nouveau $\Lambda_k = \text{Sp}_\uparrow(M_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, u(\varphi)(M_k) = \Omega_k^T \text{diag}(\varphi(\Lambda_k)) \Omega_k$$

REMARQUE. On note $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Comme Sp_\uparrow est continue, (Λ_k) converge vers $\Lambda = \text{Sp}_\uparrow(M)$ puis, comme φ est continue, $(\varphi(\Lambda_k))$ converge vers $\varphi(\Lambda)$. La suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc on peut en extraire une suite $(\Omega_{\alpha(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En passant à la limite dans la relation suivante

$$\forall k \in \mathbb{N}, M_{\alpha(k)} = \Omega_{\alpha(k)}^T \text{diag}(\Lambda_{\alpha(k)}) \Omega_{\alpha(k)}$$

on obtient

$$M = \Omega^T \text{diag}(\Lambda) \Omega$$

et en passant à la limite dans la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u(\varphi)(M_{\alpha(k)}) = \Omega_{\alpha(k)}^T \text{diag}(\varphi(\Lambda_{\alpha(k)})) \Omega_{\alpha(k)}$$

on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(\varphi)(M_{\alpha(k)}) = \Omega^T \text{diag}(\varphi(\Lambda)) \Omega = u(\varphi)(M)$$

Ainsi, si $(u(\varphi)(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge, elle converge vers $u(\varphi)(M)$.

Soit S une valeur d'adhérence de la suite $(u(\varphi)(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$. Il existe donc une suite extraite $(u(\varphi)(M_{\beta(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers S . En appliquant ce qui précède à la suite $(M_{\beta(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ au lieu de la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on prouve que $S = u(\varphi)(M)$. Ainsi $u(\varphi)(M)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u(\varphi)(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$.

Comme précédemment, la suite (Λ_k) est à valeurs dans un compact. Comme φ est continue, l'application $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est également continue. L'image d'un compact par une application continue est un compact donc $(\varphi(\Lambda_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est également à valeurs dans un compact. Par définition de ρ , la suite $(u(\varphi)(M_k))$ est donc également à valeurs dans un compact. Comme $u(\varphi)(M)$ est son unique valeur d'adhérence, elle converge vers $u(\varphi)(M)$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, $u(\varphi)$ est continue.

Enfin, on a déjà vu que la trace était continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $v(\varphi)$ est également continue par composition.

20 Soient $U \in \mathcal{U}_S$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il existe donc $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $U = \Omega^T S \Omega$. En notant (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $[U]_{k,k} = E_k^T U E_k = (\Omega E_k)^T S (\Omega E_k)$. Or $\Omega E_k \in \Sigma$ donc, d'après la question 12, $\min \text{Sp}(S) \leq [U]_{k,k} \leq \max \text{Sp}(S)$. Comme $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $(\min \text{Sp}(S), \max \text{Sp}(S)) \in I^2$ puis, comme I est un intervalle, $[U]_{k,k} \in I$. Comme $S \in \mathcal{S}_n(I)$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in I^n$ tel que S est orthoséparable à $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Par conséquent, U est également orthoséparable à $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i.e. il existe $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $U = W^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) W$. Ainsi

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, [U]_{k,k} = \sum_{\ell=1}^n [W]_{\ell,k}^2 \lambda_\ell$$

Comme $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\sum_{\ell=1}^n [W]_{\ell,k}^2 = 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par convexité de f sur I ,

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f([U]_{k,k}) \leq \sum_{\ell=1}^n [W]_{\ell,k}^2 f(\lambda_\ell)$$

puis

$$\sum_{k=1}^n f([U]_{k,k}) \leq \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n [W]_{\ell,k}^2 f(\lambda_\ell) = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^n [W]_{\ell,k}^2 \right) f(\lambda_\ell)$$

A nouveau, comme $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\sum_{k=1}^n [W]_{\ell,k}^2 = 1$ pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^n f([U]_{k,k}) \leq \sum_{\ell=1}^n f(\lambda_\ell) = v(f)(S)$$

Par ailleurs, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{U}_S$ et

$$\sum_{k=1}^n f([D]_{k,k}) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) = v(f)(S)$$

Ainsi

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^n f([U]_{k,k}), U \in \mathcal{U}_S \right\} = v(f)(S)$$

21 Soient $(A, B) \in \mathcal{S}_n(I)^2$ et $t \in [0, 1]$. Posons alors $S = (1-t)A + tB$. Soit $U \in \mathcal{U}_S$. Il existe donc $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$U = \Omega^\top S \Omega = (1-t)\Omega^\top A \Omega + t\Omega^\top B \Omega = (1-t)C + tD$$

en posant $C = \Omega^\top A \Omega \in \mathcal{U}_A$ et $D = \Omega^\top B \Omega \in \mathcal{U}_B$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$[U]_{k,k} = (1-t)[C]_{k,k} + t[D]_{k,k}$$

puis, par convexité de f

$$f([U]_{k,k}) \leq (1-t)f([C]_{k,k}) + tf([D]_{k,k})$$

et enfin

$$\sum_{k=1}^n f([U]_{k,k}) \leq (1-t) \sum_{k=1}^n f([C]_{k,k}) + t \sum_{k=1}^n f([D]_{k,k})$$

Mais, puisque $C \in \mathcal{U}_A$ et $D \in \mathcal{U}_B$, on obtient d'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^n f([U]_{k,k}) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)$$

Ceci étant vrai pour tout $U \in \mathcal{U}_S$, on a encore d'après la question précédente,

$$v(f)(S) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)$$

c'est-à-dire

$$v(f)((1-t)A + tB) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)$$

22 Supposons f convexe sur I . D'après la question précédente, $v(f)$ est convexe sur $\mathcal{S}_n(I)$. Réciproquement, supposons $v(f)$ convexe sur $\mathcal{S}_n(I)$. Soient alors $(a, b) \in I^2$ et $t \in [0, 1]$. Alors

$$v(f)((1-t)aI_n + tbI_n) \leq (1-t)v(f)(aI_n) + tv(f)(bI_n)$$

ou encore

$$v(f)((1-t)a + tb)I_n \leq (1-t)v(f)(a)I_n + tv(f)(b)I_n$$

Or d'après la question 8,

$$\forall x \in I, u(f)(xI_n) = f(x)I_n$$

donc

$$\forall x \in I, v(f)(xI_n) = \text{tr}(f(x)I_n) = nf(x)$$

On en déduit que

$$nf((1-t)a + tb) \leq n(1-t)f(a) + nt f(b)$$

puis

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Ceci signifie que f est convexe sur I .