Interrogation écrite n°06

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $\mathrm{B} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul. Montrer que l'application f qui à $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ associe le reste de la division euclidienne de P par B est un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

   f est clairement à valeurs dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Soit $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2 \times \mathbb{K}^2$. Par définition de la division euclidienne, il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}_1 = \mathrm{BQ}_1 + f(\mathrm{P}_1)$ et $\mathrm{P}_2 = \mathrm{BQ}_2 + f(\mathrm{P}_2)$. De plus, $\deg f(\mathrm{P}_1) < \deg \mathrm{B}$ et $\deg f(\mathrm{P}_2) < \deg \mathrm{B}$. Alors $\lambda_1\mathrm{P}_1 + \lambda_2\mathrm{P}_2 = \mathrm{B}(\lambda_1\mathrm{Q}_1 + \lambda_2\mathrm{Q}_2) + \lambda_1 f(\mathrm{P}_1) + \lambda_2 f(\mathrm{P}_2)$ et $\deg(\lambda_1 f(\mathrm{P}_1) + \lambda_2 f(\mathrm{P}_2)) < \deg \mathrm{B}$. On en déduit que $\lambda_1 f(\mathrm{P}_1) + \lambda_2 f(\mathrm{P}_2)$ est le reste de la division euclidienne de $\lambda_1\mathrm{P}_1 + \lambda_2\mathrm{P}_2$ par B i.e. $f(\lambda_1\mathrm{P}_1 + \lambda_2\mathrm{P}_2) = \lambda_1 f(\mathrm{P}_1) + \lambda_2 f(\mathrm{P}_2)$. f est donc bien linéaire ∎

2. Soient un entier $n \geq 2$ et $u : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$. Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et déterminer son polynôme minimal.

   Pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $u^2(\mathrm{M}) = \mathrm{tr}(\mathrm{M})u(\mathrm{I}_n) = n\,\mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n = nu(\mathrm{M})$. Ainsi $u^2 - nu = 0$. Le polynôme simplement scindé $\mathrm{X}^2 - n\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X} - n)$ annule u donc u est diagonalisable. De plus, π_u est unitaire et divise $\mathrm{X}(\mathrm{X} - n)$.
   De plus, $u(\mathrm{I}_n) = n\mathrm{I}_n$ donc $n \in \mathrm{Sp}(u)$ de sorte que n est une racine de π_u. Enfin, en choisissant une matrice A non nulle de trace nulle (il en existe car $n \geq 2$), $u(\mathrm{A}) = 0$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ de sorte que 0 est une racine de π_u.
   On en déduit que $\pi_u = \mathrm{X}(\mathrm{X} - n)$. ∎

3. Calculer $\varphi(1400)$ ou φ désigne l'indicatrice d'Euler.

$$\varphi(1400) = \varphi(2^3 \times 5^2 \times 7) = \varphi(2^3)\varphi(5^2)\varphi(7) = (2^3 - 2^2)(5^2 - 5^1)(7 - 1) = 480$$

∎

4. Déterminer le polynôme minimal de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   On remarque que $\mathrm{A}^2 = 3\mathrm{A}$ *donc* $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-3)$ *est un polynôme annulateur de* A. *Ainsi* π_A *divise* $\mathrm{X}(\mathrm{X}-3)$. *Par conséquent,* $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}$ *ou* $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X} - 3$ *ou* $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-3)$. *Mais comme* $\mathrm{A} \neq 0$, $\pi_\mathrm{A} \neq \mathrm{X}$ *et comme* $\mathrm{A} \neq 3\mathrm{I}_3$, $\pi_\mathrm{A} \neq \mathrm{X} - 3$. *Par conséquent,* $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-3)$. ∎

5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} 2x \equiv 4[9] \\ 7x \equiv 2[12] \end{cases}$.

   2 *est inversible modulo* 9 *d'inverse* 5 *et* 5 *est inversible modulo* 12 *d'inverse* 7 *donc le système* $(\mathcal{S})$ *équivaut à* $\begin{cases} x \equiv 5 \times 4[9] \\ x \equiv 7 \times 2[12] \end{cases}$ *ou encore* $\begin{cases} x \equiv 2[9] \\ x \equiv 2[12] \end{cases}$. *Ainsi* x *est solution de* $(\mathcal{S})$ *si et seulement si* 12 *et* 9 *divise* $x - 2$, *ce qui équivaut au fait que* $9 \vee 12 = 36$ *divise* $x - 2$. *L'ensemble des solutions est donc* $2 + 36\mathbb{Z}$. ∎