

# SÉRIES ENTIÈRES

## 1 Généralités

### 1.1 Définition d'une série entière et rayon de convergence

#### Définition 1.1 Série entière

On appelle **série entière** toute série de fonctions de la variable complexe ou réelle de la forme  $\sum a_n z^n$  où  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

**REMARQUE.** On s'autorise un abus de notation en confondant  $z^n$  et la fonction  $z \mapsto z^n$ .

#### Lemme 1.1 Lemme d'Abel

Soient  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . Si la suite  $(a_n r^n)$  est bornée, alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < r$ , la série  $\sum a_n z^n$  **converge absolument**.

#### Définition 1.2 Rayon de convergence

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière. On appelle **rayon de convergence** de cette série entière la borne supérieure

$$\sup \{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

**REMARQUE.** Si la suite  $(a_n)$  est bornée, le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  est supérieur ou égal à 1.

#### Proposition 1.1

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

- Si  $|z| < R$ , alors  $\sum a_n z^n$  **converge absolument**.
- Si  $|z| > R$ , alors  $\sum a_n z^n$  **diverge grossièrement**.

**REMARQUE.** Si  $|z| = R$ , on ne peut rien dire.

#### Corollaire 1.1

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

- Si  $\sum a_n z^n$  converge, alors  $R \geq |z|$ .
- Si  $\sum a_n z^n$  diverge, alors  $R \leq |z|$ .

**REMARQUE.** Si la suite  $(a_n)$  ne converge pas vers 0, la série  $\sum a_n$  diverge. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  est inférieur ou égal à 1.

**Exemple 1.1**

Considérons la série entière  $\sum \cos(n)z^n$ . Notons  $R$  son rayon de convergence.

- La suite de terme général  $\cos(n)$  est bornée donc  $R \geq 1$ .
- La suite  $(\cos(n))$  ne converge pas vers 0. Donc  $R \leq 1$ .

Ainsi  $R = 1$ .

**Rappel Règle de d'Alembert**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle **strictement positive** telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

- Si  $\ell < 1$ , alors la série  $\sum u_n$  converge absolument.
- Si  $\ell > 1$ , alors la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

**REMARQUE.** Si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire.



**ATTENTION!** La suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  peut ne pas avoir de limite.

**Proposition 1.2**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  telle que  $(a_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ , alors  $R = \frac{1}{\ell}$

**REMARQUE.**  $R = 0$  si  $\ell = +\infty$  et  $R = +\infty$  si  $\ell = 0$ .

**Exemple 1.2**

- La série entière  $\sum z^n$  a pour rayon de convergence 1 et pour somme  $\frac{1}{1-z}$ .
- La série entière  $\sum \frac{z^n}{n!}$  a un rayon de convergence infini et a pour somme  $e^z$ .

**Exercice 1.1**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum \binom{2n}{n} z^n$ .



**ATTENTION!** On ne peut pas toujours utiliser la règle de d'Alembert pour calculer le rayon de convergence d'une série de cette manière. Par exemple, la suite  $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$  peut ne pas avoir de limite ou la suite  $(a_n)$  peut s'annuler une infinité de fois.

**Exemple 1.3**

Considérons la série entière  $\sum a_n z^n$  avec  $a_n = 2^n$  si  $n$  est pair et  $a_n = 3^n$  si  $n$  est impair. On note  $R$  son rayon de convergence.

La suite de terme général  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  n'admet pas de limite puisqu'elle prend alternativement les valeurs  $\frac{3}{2}$  et  $\frac{2}{3}$ .

Néanmoins la suite de terme général  $u_n = \frac{a_n}{9^n}$  est bornée puisque  $u_{2n} = \frac{4^n}{9^n} \leq 1$  et  $u_{2n+1} = 3$ . Ainsi  $R \geq \frac{1}{9}$ . Mais si  $r > \frac{1}{9}$ , la suite de terme général  $v_n = a_n r^n$  n'est pas bornée puisque la suite extraite de terme général  $v_{2n+1} = 3 \cdot (9r)^n$  diverge vers  $+\infty$ . Ainsi le rayon de convergence vaut  $\frac{1}{9}$ .

**Exemple 1.4 Série lacunaire**

Considérons par exemple la série entière  $\sum 2^n z^{n^2}$ . C'est bien une série entière dans le sens où elle est de même nature et de même somme que la série  $\sum a_n z^n$  avec  $a_n = 2^{\sqrt{n}}$  si  $n$  est un carré d'entier et  $a_n = 0$  sinon. On ne peut pas calculer le rayon de convergence en étudiant la limite de la suite  $(a_{n+1}/a_n)$  puisque  $(a_n)$  s'annule une infinité de fois. On peut néanmoins appliquer la règle de d'Alembert directement.

$$\frac{|2^{n+1} z^{(n+1)^2}|}{|2^n z^{n^2}|} = 2|z|^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

Ainsi le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

On remarque notamment que  $\frac{2^{n+1}}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$  mais le rayon de convergence ne vaut pas  $\frac{1}{2}$ .

**Définition 1.3 Disque ouvert/intervalle ouvert de convergence**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ .

- On appelle **disque ouvert de convergence** le disque  $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ .
- On appelle **intervalle ouvert de convergence** l'intervalle  $] -R, R[$ .

**REMARQUE.** Si  $R = +\infty$ , le disque ouvert de convergence est  $\mathbb{C}$  tandis que l'intervalle ouvert de convergence est  $\mathbb{R}$ .

**Convergence au bord du disque ouvert de convergence**

On ne peut rien dire quant à la convergence d'une série entière au bord du disque ouvert de convergence. Par exemple, la série  $\sum \frac{z^n}{n}$  a pour rayon de convergence 1 (critère de d'Alembert). La série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge tandis que la série harmonique alternée  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge. On peut en fait montrer que si  $|z| = 1$ , la série  $\sum \frac{z^n}{n}$  converge si et seulement si  $z \neq 1$ .

## 1.2 Comparaison de séries entières

### Proposition 1.3

Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

- Si  $|a_n| \leq |b_n|$  à partir d'un certain rang, alors  $R_a \geq R_b$ .
- Si  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(b_n)$ , alors  $R_a \geq R_b$ .
- Si  $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |b_n|$ , alors  $R_a = R_b$ .

**REMARQUE.** A fortiori, si  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$ , alors  $R_a \geq R_b$ .

### Proposition 1.4

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n^\alpha a_n z^n$  ont même rayon de convergence.

## 1.3 Opérations sur les séries entières

### Proposition 1.5 Somme de deux séries entières

Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

Alors le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum (a_n + b_n) z^n$  vérifie  $R \geq \min(R_a, R_b)$ .

De plus, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

### Exercice 1.2

Montrer que si  $R_a \neq R_b$ , alors  $R = \min(R_a, R_b)$  et donner un exemple où  $R > \min(R_a, R_b)$  dans le cas où  $R_a = R_b$ .

### Définition 1.4 Produit de Cauchy de deux séries entières

On appelle **produit de Cauchy** de deux séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  la série entière  $\sum c_n z^n$  où

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

### Proposition 1.6 Produit de Cauchy

Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

Alors le rayon de convergence  $R$  du produit de Cauchy  $\sum c_n z^n$  de ces deux séries entières vérifie  $R \geq \min(R_a, R_b)$ .

De plus, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

**Exemple 1.5**

On pose  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ . On souhaite déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ .

Il est clair que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$  (somme partielle d'une série exponentielle). On en déduit que  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . Ainsi le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  vaut 1 par la règle de d'Alembert.

De plus, les rayons de convergence des séries entières  $\sum \frac{z^n}{n!}$  et  $\sum z^n$  sont respectivement  $+\infty$  et 1. On en déduit par produit de Cauchy que

$$\forall z \in D(0, 1), \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) = \frac{e^z}{1-z}$$

**Exercice 1.3**

On pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} H_n x^n$  et calculer sa somme.

**Exercice 1.4**

Donner un exemple où  $R > \min(R_a, R_b)$  et  $R_a \neq R_b$ .

## 2 Régularité de la somme

**Proposition 2.1 Domaine de définition**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de somme  $S(z)$  et de rayon de convergence  $R$ . On note  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  (resp.  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ ) l'ensemble de définition complexe (resp. réel) de  $S$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  (resp.  $z \in \mathbb{R}$ ) tels que  $\sum a_n z^n$  converge. Alors

- $D(0, R) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \subset \overline{D(0, R)}$ ;
- $] -R, R[ \subset \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \subset [-R, R]$ .

**Exercice 2.1**

Déterminer le domaine définition réel de  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ .

**Proposition 2.2 Convergence normale**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Alors pour tout réel  $r < R$ , la série entière  $\sum a_n z^n$  converge normalement le disque fermé de centre 0 et de rayon  $r$ .



**ATTENTION !** On ne peut pas affirmer qu'une série entière converge normalement sur le disque ouvert de convergence.

**Corollaire 2.1 Continuité de la somme**

La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence.

**Proposition 2.3**

L'application  $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z$  est continue sur  $\mathbb{C}$ .

A partir de maintenant, on s'intéresse à la régularité de la somme d'une série entière d'une variable **réelle**.

**Proposition 2.4 Primitive d'une série entière**

Soient  $\sum a_n x^n$  une série entière de la variable réelle,  $R$  son rayon de convergence et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  sa somme.

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $] -R, R[$ . Alors

- La série entière  $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  admet  $R$  pour rayon de convergence ;
- $\forall x \in ] -R, R[$ ,  $F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ .

**REMARQUE.** Le rayon de convergence de la série entière «primitivée» est le même que celui de la série entière initiale.

**Exemple 2.1**

La série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^n$  a pour rayon de convergence 1 et pour somme  $\frac{1}{1+x}$ . Puisque  $x \mapsto \ln(1+x)$  est l'unique primitive nulle en 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ,

$$\forall x \in ] -1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

**Proposition 2.5 Dérivation terme à terme**

Soient  $\sum a_n x^n$  une série entière de la variable réelle,  $R$  son rayon de convergence et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  sa somme. Alors

- la série entière  $\sum n a_n x^{n-1}$  admet  $R$  pour rayon de convergence ;
- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -R, R[$  ;
- $\forall x \in ] -R, R[$ ,  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ .

**Exemple 2.2**

On sait que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

En dérivant, on obtient

$$\forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

**Corollaire 2.2 Dérivation terme à terme**

Soient  $\sum a_n x^n$  une série entière de la variable réelle,  $R$  son rayon de convergence et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  sa somme. Alors

- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$  ;
- pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la série entière  $\sum \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$  admet  $R$  pour rayon de convergence ;
- $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in ] -R, R[, f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$ .

**Exercice 2.2**

Montrer que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^{q+1}} = \sum_{n=q}^{+\infty} \binom{n}{q} x^{n-q}$$

**Corollaire 2.3 Expression des coefficients à l'aide des dérivées successives**

Soient  $\sum a_n x^n$  une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence non nul, et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  sa somme. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

**Corollaire 2.4 Unicité des coefficients**

Soient  $\sum a_n x^n$  et  $\sum b_n x^n$  deux séries entières. Si les sommes de ces deux séries entières coïncident sur un intervalle  $]0, \alpha]$  avec  $\alpha > 0$ , alors  $a_n = b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**REMARQUE.** En particulier, si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  sont des séries entières de rayon de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$  strictement positifs dont les sommes coïncident sur un voisinage (réel ou complexe) de 0, alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \min(R_a, R_b) \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

**Théorème 2.1 Convergence radiale (Abel)**

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Si  $\sum a_n R^n$  converge, alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ .

**Exemple 2.3**

La série entière  $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$  admet 1 pour rayon de convergence et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x)$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .

Or  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées. D'après le théorème de convergence radiale d'Abel

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$



**ATTENTION !** Le fait que la somme d'une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R$  ait une limite en  $R^-$  n'implique pas que  $\sum a_n R^n$  converge. Par exemple, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^n$  a pour rayon de convergence 1 et pour somme  $\frac{1}{1+x}$ . De plus,  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  admet bien une limite en 1 mais  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n$  diverge grossièrement.

**REMARQUE.** De manière générale, si la série  $\sum a_n r^n$  converge pour un certain  $r \in \mathbb{R}_+$ , on peut toujours affirmer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow r^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ , même si  $r$  n'est pas le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$ . En effet, en notant  $R$  ce rayon de convergence, la convergence de la série  $\sum a_n r^n$  assure que  $R \geq r$ . Si  $R = r$ , on est ramené au théorème de convergence radiale d'Abel à proprement parler. Si  $r < R$ , alors la continuité de  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  sur l'intervalle ouvert de convergence  $] -R, R[$  (et donc notamment en  $r$ ) assure le résultat.

**Exercice 2.3 Une réciproque du théorème d'Abel**

Soit  $(a_n)$  une suite **positive** telle que la série entière  $\sum a_n x^n$  possède un rayon de convergence  $R > 0$ . On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour  $x \in ]-R, R[$  et on suppose que  $f$  admet une limite en  $R$ . Montrer que la série  $\sum a_n R^n$  converge.

**3 Fonctions développables en série entière et développements usuels****Définition 3.1 Fonction développable en série entière**

Soient  $f$  une fonction d'une variable complexe à valeurs complexes et  $r > 0$ . On dit que  $f$  est **développable en série entière** sur le disque  $D(0, r)$  s'il existe une suite  $(a_n)$  telle que

$$\forall z \in D(0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$



**Proposition 3.1 Série géométrique**

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \implies \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

**Proposition 3.2 Série exponentielle**

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

**Exercice 3.1**

La fonction  $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z}$  est-elle développable en série entière ?

**Définition 3.2 Fonction développable en série entière**

Soient  $f$  une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes et  $r > 0$ . On dit que  $f$  est **développable en série entière** sur  $] -r, r[$  s'il existe une suite  $(a_n)$  telle que

$$\forall x \in ] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

**REMARQUE.** Notamment une fonction développable en série entière sur  $] -r, r[$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -r, r[$ .

**REMARQUE.** Une somme et un produit de fonctions développables en série entière est développable en série entière.

**Définition 3.3 Série de Taylor**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 0. On appelle **série de Taylor** la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

**Proposition 3.3 Série de Taylor**

Soit  $f$  une fonction développable en série entière sur  $] -r, r[$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -r, r[$  et

$$\forall x \in ] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

**REMARQUE.** Autrement dit, toute fonction développable en série entière est égale à la somme de sa série de Taylor sur un voisinage de 0.

**REMARQUE.** Si  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour  $x \in ] -r, r[$  ( $r > 0$ ), alors, d'après la formule de Taylor-Young,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$



**ATTENTION !** Une fonction n'est pas toujours égale à la somme de sa série de Taylor sur un voisinage de 0. Par exemple, la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $f^{(n)}(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  $f$  ne peut être égale à sa somme de sa série de Taylor sur aucun voisinage de 0 puisqu'elle n'est jamais constamment nulle sur un tel voisinage.

### Proposition 3.4 Exemples de fonctions développables en série entière

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} & \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \forall x \in ]-1, 1[, \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \\ \forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n & \forall x \in ]-1, 1[, \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\ \forall x \in ]-1, 1[, (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \end{aligned}$$

**REMARQUE.** On convient que

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha-k)$$

En particulier,  $\binom{\alpha}{0} = 1$ .

**REMARQUE.** Le développement en série entière de  $x \mapsto \ln(1+x)$  est encore valable en 1 et celui de  $\arctan$  est encore valable en  $-1$ .

### Méthode Calcul de la somme de $\sum P(n)x^n$ où $P$ est un polynôme

On fait apparaître la série géométrique et ses dérivées.

**Exemple 3.1**

On souhaite calculer la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n^2 + 2n + 3)x^n$ .

Tout d'abord le rayon de convergence vaut 1 par la règle de d'Alembert.

On remarque ensuite que

$$n^2 + 2n + 3 = n(n-1) + 3n + 3$$

Soit  $x \in ]-1, 1[$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 2n + 3)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + 3x \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{1-x} \right) + 3x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) + \frac{3}{1-x} \\ &= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x} \\ &= \frac{2x^2 - 3x + 3}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

**Méthode** Calcul de la somme de  $\sum F(n)x^n$  où F est une fraction rationnelle

On décompose F en éléments simples.

**Exemple 3.2**

On souhaite calculer la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 3} \frac{n+1}{n^2 - 3n + 2} x^n$ .

Tout d'abord le rayon de convergence vaut 1 par la règle de d'Alembert.

On remarque ensuite que

$$\frac{n+1}{n^2 - 3n + 2} = \frac{3}{n-2} - \frac{2}{n-1}$$

Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2 - 3n + 2} x^n &= 3 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-2} - 2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} \\ &= 3x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - 2x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -3x^2 \ln(1-x) + 2x(\ln(1-x) + x) \\ &= (2x - 3x^2) \ln(1-x) + 2x^2 \end{aligned}$$

**Méthode** Développer en série entière une fraction rationnelle

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples.

On remarque alors que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |a| \implies \frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^n}$$

Le développement en série entière de  $\frac{1}{(z-a)^p}$  peut être obtenu par dérivation.

**Exemple 3.3 Développement en série entière d'une fraction rationnelle**

Soit  $F = \frac{X^2 - 9X + 5}{X^3 - 3X + 2}$ . La partie entière de cette fraction rationnelle est clairement nulle. On remarque que 1 est racine du dénominateur donc

$$(X^3 - 3X + 2) = (X - 1)(X^2 + X - 2) = (X - 1)^2(X + 2)$$

Il existe donc  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$F(X) = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\beta}{(X - 1)^2} + \frac{\gamma}{X + 2}$$

Comme  $-2$  est pôle simple,

$$\gamma = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = \frac{27}{9} = 3$$

en notant  $F = \frac{P}{Q}$ . Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = \alpha + \gamma = 1$  donc  $\alpha = -2$ . Enfin,  $F(0) = -\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{5}{2}$  donc  $\gamma = -1$ . Ainsi

$$F(X) = -\frac{2}{X - 1} - \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{3}{X + 2} = \frac{2}{1 - X} - \frac{1}{(1 - X)^2} + \frac{3}{1 + \frac{X}{2}}$$

On remarque alors que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

En dérivant

$$\forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)x^n$$

Par ailleurs

$$\forall x \in ]-2, 2[, \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$$

On en déduit que  $F$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$  et que

$$\forall x \in ]-1, 1[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( 1 - n + 3 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} \right) x^n$$

**Méthode Déterminer un développement en série entière via une équation différentielle**

Pour déterminer le développement en série entière d'une fonction  $f$ , on peut montrer qu'elle vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux et en déduire une relation de récurrence sur les coefficients de cet éventuel développement en série entière.

**Exemple 3.4**

On souhaite montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$  est développable en série entière en l'origine et déterminer ce développement en série entière.

Comme  $\arcsin$  et  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  sont développables en séries entières de rayon de convergence égal à 1,  $f$  est développable en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 par produit de Cauchy.

De plus,  $f$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et que

$$\forall x \in ] -1, 1[, f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ou encore

$$\forall x \in ] -1, 1[, (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$$

Comme  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ , il existe  $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tel que

$$\forall x \in ] -1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

En reportant dans l'équation différentielle précédente, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 1$$

ou encore

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} - na_{n-1}] x^n = 1$$

Par unicité du développement en série entière,  $a_1 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)a_{n+1} - na_{n-1} = 0$$

Notamment,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} a_{2n-1}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Par ailleurs,  $a_0 = f(0) = 0$  donc  $a_{2n} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Finalement

$$\forall x \in ] -1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^{2n+1}$$