# Devoir à la maison n°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

**Problème 1 – CCP 2001 Maths2 MP - Utilisation des matrices compagnons**

## Notations et définitions

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n$ est un entier naturel.
- Si $u$ est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u^{n+1} = u^n \circ u$.
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ de matrice unité $I_n$ et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ; les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont notés $M = (m_{i,j})$.
- Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A, rg(A) son rang, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique et Sp(A) l'ensemble de ses valeurs propres.
- Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ est un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$ on lui associe la **matrice compagnon**

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

(c'est-à-dire la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

*Les parties II, III et IV utilisent les résultats de la partie I et sont indépendantes entre elles.*

## I Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et $C_P$ sa matrice compagnon associée.

**1** Montrer que $C_P$ est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

**2** Montrer que $\chi_{C_p} = P$.

**3** Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

**4** On note $C_P^T$ la transposée de la matrice $C_P$.

**4.a** Justifier la proposition : $\mathrm{Sp}(C_P) = \mathrm{Sp}(C_P^T)$.

**4.b** Soit $\lambda$ élément de $\mathrm{Sp}(C_P^T)$, déterminer le sous-espace propre de $C_P^T$ associé à $\lambda$.

**4.c** Montrer que $C_P^T$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

**4.d** On suppose que P admet $n$ racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que $C_P^T$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$ est non nul.

**5** *Exemples :*

**5.a** Déterminer une matrice A (dont on précisera la taille $n$) vérifiant :

$$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999 I_n$$

**5.b** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme de E vérifiant : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de $f$ est une matrice compagnon que l'on déterminera.

## II Localisation des racines d'un polynôme

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ :

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad D_i = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r_i\}$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

**6** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda$.

Montrer que pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ : $|\lambda x_i| \leq r_i \|X|_\infty$.

**7** Démontrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

**8** Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Etablir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\}$.

**9** *Application :*
Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue $n$ :

$$n^a + n^b = n^c + n^d$$

n'admet pas de solution sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

## III Suites récurrentes linéaires

On note $\mathrm{E} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si $u$ est une suite de E, on écrira $u(n)$ à la place de $u_n$ pour désigner l'image de $n$ par $u$.

On considère le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p + a_{p-1}\mathrm{X}^{p-1} + \cdots + a_0$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $a_0 \neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments $u$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \cdots - a_0 u(n)$$

**10** Montrer que si $\lambda$ est racine de P alors la suite $n \mapsto \lambda^n$ est élément de F.

**11** Soit $\varphi$ l'application de F vers $\mathbb{C}^p$ définie par : $u \mapsto (u(0), u(1), \dots, u(p-1))$. Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de F ?

**12** Pour tout entier $i \in [\![0, p-1]\!]$, on définit les élements $e_i$ de F par :

$$\forall j \in [\![0, p-1]\!],\ e_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

**12.a** Déterminer $e_i(p)$ pour $i \in [\![0, p-1]\!]$.

**12.b** Montrer que le système de vecteurs $\left(e_0, e_1, \dots, e_{p-1}\right)$ est une base de F.

**12.c** Soit $u$ un élément de F, établir que $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$.

**13** Si $u$ est un élément de E, on définit l'élément $f(u)$ de E par : $f(u) : n \mapsto u(n+1)$.
Montrer que l'application $f$ ainsi définie est un endomorphisme de E et que F est stable par $f$.

**14** Si $g$ est l'endomorphisme de F induit par $f$, montrer que la matrice de $g$ dans la base $\left(e_0, e_1, \dots, e_{p-1}\right)$ est $\mathrm{C}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}$.

**15** On suppose que P admet $p$ racines non nulles et deux à deux distinctes : $\lambda_0$, $\lambda_1$, …, $\lambda_{p-1}$.

**15.a** Déterminer une base de F formée de vecteurs propres de g.

**15.b** En déduire que, si $u$ est élément de F, il existe des constantes complexes $k_0$, $k_1$, …, $k_{p-1}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0\lambda_0^n + k_1\lambda_1^n + \cdots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n$$

**16** *Exemple :* (On revient à la notation usuelle $u_n$)
Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels distincts. Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par $u_0$, $u_1$ et $u_2$ et par la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abc$$

## IV Matrices vérifiant $\mathrm{rg}(\mathrm{U} - \mathrm{V}) = 1$

Dans cette partie, pour une matrice A, on notera $\mathrm{C}_\mathrm{A}$ la matrice compagnon du polynôme $\chi_\mathrm{A}$.

**17** Une matrice A est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon $\mathrm{C}_\mathrm{A}$ ?

Pour tout couple $(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :

(*) : $\mathrm{rg}\,(\mathrm{U} - \mathrm{V}) = 1$

(**) : Il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{U} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{C}_\mathrm{U}\mathrm{P}$ et $\mathrm{V} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{C}_\mathrm{V}\mathrm{P}$.

**18** Montrer qu'un couple $(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ de matrices distinctes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant (**) vérifie (*).

**19** Déterminer un couple $(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ de matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ ($n = 2$) vérifiant (*) mais ne vérifiant pas (**) et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes $\chi_{\mathrm{U}}$ et $\chi_{\mathrm{V}}$.

Dans la suite de cette partie, $(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ est un couple de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant (*) et tel que $\chi_{\mathrm{U}}$ et $\chi_{\mathrm{V}}$ sont deux polynômes premiers entre eux.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et de base B. On désigne par $u$ et $v$ les automorphismes de E tels que U (respectivement V) soit la matrice de $u$ (respectivement $v$) dans la base B.

Enfin on pose $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,(u - v)$.

**20** Montrer que H est un hyperplan vectoriel de E.

**21** Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E stable par $u$ et par $v$ c'est-à-dire :

$$u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad v(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$$

On notera $u_{\mathrm{F}}$ (respectivement $v_{\mathrm{F}}$) l'endomorphisme induit par $u$ (respectivement $v$) sur F.

On rappelle que $\chi_{u_{\mathrm{F}}}$ divise $\chi_u$.

**21.a** Montrer que F n'est pas inclus dans H.

**21.b** On suppose que $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$. Montrer que $\mathrm{F} + \mathrm{H} = \mathrm{E}$ puis que l'on peut compléter une base $\mathrm{B}_{\mathrm{F}}$ de F par des vecteurs de H pour obtenir une base $\mathrm{B}'$ de E. En utilisant les matrices de $u$ et $v$ dans la base $\mathrm{B}'$, montrer que l'on aboutit à une contradiction.

**21.c** Quels sont les seuls sous-espaces stables à la fois par $u$ et par $v$ ?

**22** Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{G}_j = \{x \in \mathrm{E},\ u^j(x) \in \mathrm{H}\}$.

**22.a** Montrer que les sous-espaces $\mathrm{G}_j$ sont des hyperplans vectoriels de E.

**22.b** Montrer que $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n-2} \mathrm{G}_j \neq \{0\}$.

**22.c** Soit $y$ un vecteur non nul de $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n-2} \mathrm{G}_j$. On pose pour $j \in [\![0, n-1]\!]$ : $e_j = u^j(y)$.
Montrer que $\mathrm{B}'' = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de E.
(On pourra considérer $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$ où $p$ est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $\big(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\big)$ est libre).

**22.d** Montrer que la matrice de $u$ (respectivement $v$) dans $\mathrm{B}''$ est $\mathrm{C}_{\mathrm{U}}$ (respectivement $\mathrm{C}_{\mathrm{V}}$).

**22.e** Conclure.

**23** *Application :*
Soient $u$ et $v$ deux automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n$ vérifiant :

$$\mathrm{rg}(u - v) = 1,\ \chi_u(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + 1 \text{ et } \chi_v(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - 1$$

**23.a** Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $u(e_i) = v(e_i) = e_i$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $v(e_n) = -u(e_n) = e_1$.

**23.b** On note G le sous-groupe de GL(E) engendré par $u$ et $v$. Montrer que $\mathrm{card}\,\mathrm{G} \leq (2n)!$. On pourra considérer l'ensemble $\mathrm{X} = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$.