

1 Cours

Topologie

On rappelle que toutes les définitions et les résultats du cours restent inchangés si une norme est remplacée par une norme **équivalente**.

Compacité Définition. Tout compact est fermé et borné. Toute partie fermée d'un compact est compacte. Une suite à valeurs dans un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit de compacts. L'image d'un compact par une application continue est compacte. Théorème des bornes atteintes : une fonction continue sur un compact à valeurs dans \mathbb{R} admet un minimum et un maximum. Théorème de Heine. Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées. Toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

Connexité par arcs Définition. Un convexe est connexe par arcs. Partie étoilée. Toute partie étoilée est connexe par arcs. Les parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles. Composantes connexes par arcs. L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs. Théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un connexe par arcs par une fonction continue à valeurs dans \mathbb{R} est un intervalle.

Espaces préhilbertiens réels (révisions de MPSI)

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une partie est compacte :
 - on peut montrer qu'elle est fermée et bornée (cas de la dimension finie);
 - on peut montrer que c'est l'image d'un compact par une application continue.
- Pour montrer qu'une partie est connexe par arcs :
 - on peut appliquer la définition (existence de chemins continus à valeurs dans cette partie reliant les points de cette partie);
 - on peut montrer que c'est l'image d'un connexe par arcs (par exemple un intervalle) par une application continue.
- Pour montrer qu'une partie n'est pas connexe par arcs :
 - on peut montrer que son image par une application continue n'est pas connexe par arcs.
- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz notamment dans le cas des produits scalaires usuels sur \mathbb{R}^n , $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Orthonormaliser une famille libre à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.
- Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
- Calculer un projeté orthogonal.
- Calculer la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Calculer la matrice d'un projecteur orthogonal ou d'une symétrie orthogonale.

3 Questions de cours

Banque CCINP Exercices 13, 39, 76, 77, 80, 81, 82