Devoir à la maison n°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Mines-Ponts 2017 Maths 1 MP – Séries et caractères

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers, $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs et N un entier supérieur ou égal à 2.

L'ensemble des classes d'équivalence pour la division euclidienne par N est noté $\mathbb{Z}/\mathrm{N}\mathbb{Z}$. L'élément générique de cet anneau sera noté $\overline{a}$. On note P l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, \mathrm{N}-1\}$ qui sont premiers avec N. L'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbb{Z}/\mathrm{N}\mathbb{Z}$ est noté $(\mathbb{Z}/\mathrm{N}\mathbb{Z})^*$. On rappelle que φ, l'indicatrice d'Euler, est telle que $\varphi(\mathrm{N})$ représente le cardinal de P. Si a divise b dans $\mathbb{Z}$, on notera $a \mid b$.

On rappelle aussi le lemme suivant : soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. Si pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$$

alors

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k = -u_n \mathrm{T}_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} \mathrm{T}_k(u_k - u_{k+1}) + u_m \mathrm{T}_m$$

pour n, m entiers tels que $2 \leq n < m$.

On suppose fixée une application χ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

A. $\chi(0) = 0$ et χ non identiquement nul.

B. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, non premier avec N,
$$\chi(a) = 0.$$

C. Pour tous les entiers relatifs a et b,
$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b).$$

D. χ est N-périodique :
$$\chi(a + \mathrm{N}) = \chi(a), \text{ pour tout } a \in \mathbb{Z}.$$

I Cas particuliers

1 Calculer $\chi(1)$.

2 Lorsque $\mathrm{N} = 2$, déterminer χ.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\mathrm{N} = 4$.

3 Montrer que $\chi(3)$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1.

4 On suppose maintenant que $\chi(3) = -1$. Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\chi(n)}{n}$$

II Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\chi(n)}{n}$

Dans cette partie, a est un entier supérieur ou égal à 1 et premier avec N.

5 Montrer que $|\chi(a)| = 1$.
On pourra utiliser le théorème d'Euler.

6 Etablir l'identité :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$$

On suppose dorénavant qu'il existe a premier avec N tel que $\chi(a) \neq 1$.

7 Pour chaque entier n, calculer $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.
On pourra commencer par le cas $n = 0$.

8 Montrer, pour tout entier $m \geq 1$, l'inégalité

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leq \varphi(N)$$

9 Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

III Comportement asymptotique

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$f_n = \sum_{d|n} \chi(d)$$

où, dans la définition, d décrit l'ensemble des diviseurs entiers (positifs) de n.

10 Soient n et m deux entiers strictement positifs, premiers entre eux. Montrer que $f_{nm} = f_n f_m$.

11 Soient p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Calculer f_{p^α}.

12 Pour tout entier $n \geq 1$, établir l'encadrement :

$$0 \leq f_n \leq n$$

13 Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que $f_{n^2} \geq 1$.

14 Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

On note $f(x)$ la somme de cette série.

15 Montrer, pour tout $x \in [1/2, 1[$:

$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u$$

On pourra utiliser une comparaison d'une série à une intégrale.