# INTERROGATION ÉCRITE N°07

NOM : Prénom : Note :

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   *L'application* $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(\mathrm{M})$ *est continue car* $\det(\mathrm{M})$ *est polynomial en les coefficients de* M.
   *Or* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est l'image réciproque de l'ouvert* $\mathbb{R}^*$ *par l'application continue* det *donc* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est ouvert.* ∎

2. L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ admet-elle une limite en $(0,0)$ ? Justifier.

   *D'une part,* $f(t,0) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ *et d'autre part,* $f(t,t) = \dfrac{1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$. *Comme* $(t,0) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$ *et* $(t,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$, $f$ *n'admet pas de limite en* $(0,0)$. ∎

3. L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ admet-elle une limite en $(0,0)$ ? Justifier.

   *Posons* $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ *où* $r = \sqrt{x^2+y^2}$. *Alors*

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x^3+y^3|}{|x^2+y^2|} \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{r^2} = r\left(|\cos\theta|^3 + |\sin\theta|^3\right) \leq 2r = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

   *Comme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. ∎

4. On munit $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $\varphi : f \in \mathrm{E} \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur E.

   *Pour tout $f \in \mathrm{E}$, on a*

$$|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}x = \|f\|_\infty$$

   *On en déduit que $\varphi$ est continue sur* E *par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.* ∎

5. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\left\|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Montrer que l'endomorphisme $\mathrm{D} : \mathrm{P} \in \mathbb{R}[X] \mapsto \mathrm{P}'$ n'est pas continu.

   *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|X^k\|_\infty = 1$ et $\|\mathrm{D}(X^k)\|_\infty = \|kX^{k-1}\|_\infty = k$. Ainsi $\dfrac{\|\mathrm{D}(X^k)\|_\infty}{\|X^k\|_\infty} = k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit que* D *n'est pas un endomorphisme continu de* $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$. ∎

6. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

   *Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par encadrement de la partie entière,*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

   *puis*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x - \frac{1}{n} < u_n \leq x$$

   *Par théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = x$. On en déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.* ∎