ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Produits scalaires

Exercice 1 ★★★★ **Théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan**

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme *euclidienne* s'il existe un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E tel que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
Montrer que $\|\cdot\|$ est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Bases orthonormales

Exercice 2 ★★ **Produit mixte et produit vectoriel**

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
2. En déduire que $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.
3. Soient $x_1, \dots, x_{n-1}$ $n-1$ vecteurs de E. Montrer que l'application
$$x \in \mathrm{E} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$
est une forme linéaire sur E.
4. En déduire qu'il existe un unique vecteur $u \in \mathrm{E}$ tel que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle u, x\rangle$$
On appelle u le produit vectoriel des vecteur $x_1, \dots, x_{n-1}$ et on note
$$u = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$
5. Montrer que l'application
$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathrm{E}^{n-1} \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$
est une application $n-1$-linéaire alternée.

Exercice 3 ★★★

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2,\ \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)\mathrm{Q}^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Donner sans calcul une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 4 ★★★

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E tels que

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k\rangle^2$$

1. Montrer que
$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i\rangle\langle y \mid e_i\rangle$$
2. En déduire que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i\rangle e_i$$
3. Etablir que $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 5 ★★ **Formule de Parseval**

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale totale d'un espace préhilbertien réel E. Montrer que

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle^2$$

Exercice 6 ★★ **CCINP Maths 2 MP 2025**

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

1. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.
2. Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

3. Justifier la convergence de cette intégrale.
4. Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).
5. Calculer pour n et m entiers naturels :

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta$$

6. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

Sous-espaces orthogonaux

Exercice 7 ★★

Montrer que $s : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{\top} \end{array}\right.$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^{\top}B)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 ★★

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que $F \subset G \implies G^{\perp} \subset F^{\perp}$ et que, si F et G sont de dimension finie, $G^{\perp} \subset F^{\perp} \implies F \subset G$.
2. Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
3. Montrer que $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F\cap G)^{\perp}$ et que, si E est de dimension finie, $(F\cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 9 ★★ **Orthogonal et topologie**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E que l'on munit de sa norme euclidienne.

1. Montrer que pour tout $y \in E$, $\varphi_y : x \in E \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue.
2. Montrer que $F^{\perp}$ est fermé dans E.
3. Montrer que de manière générale, $\overline{F} \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

Projection orthogonale

Exercice 10 ★★

Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E. On note U le vecteur colonne représentant u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{vect}(u)$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 11 ★★★ **ENS MP**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ non nul tel que les projetés orthogonaux de $e_1, \dots, e_n$ sur $\operatorname{vect}(u)$ aient la même norme.
2. Montrer que cette norme commune est indépendante du vecteur u choisi et l'exprimer en fonction de $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$.

Exercice 12 ★★ **Caractérisations des projections orthogonales**

Soient E un espace euclidien et p une projection de E. Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;
2. $\forall x, y \in \mathrm{E},\ \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$;
3. $\forall x \in \mathrm{E},\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 13 ★★★

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $u \in \mathrm{O(E)}$.

1. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$.
2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$. Montrer que (x_n) converge vers la projection de x sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$.

Exercice 14 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer que $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ \mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $\mathrm{F} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Montrer que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \left|\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} \mathrm{P}^2(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t}$$

Exercice 15 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soient $n \geq 3$, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Donner le rang de M.
2. Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
3. Donner la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}\, f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 16 **CCP MP 2018**

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1, 1]$ et à valeurs réelles.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E
$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$$
2. On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$ et $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(u, v)$. Déterminer une base orthonormée de F.
3. Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w : t \mapsto e^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^{1} (e^t - (a + bt))^2\ \mathrm{d}t\right]$$
On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore.

Exercice 17 **D'après Mines 2023**

Soit E un espace euclidien.

1. Soit f un projecteur de E. Montrer que f est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in \mathrm{E}, \|f(x)\| \leq \|x\|$.

2. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E. On suppose que $p \circ q$ est un projecteur. Montrer que p et q commutent.

Optimisation

Exercice 18 ★★★

Calculer le minimum de $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \displaystyle\int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 \, dx \end{array}$.

Exercice 19 ★★★

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) du produit scalaire $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{Y}$. On se donne $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{E} = \left\{\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2, \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$ et $\mathrm{K} = \inf \mathrm{E}$.

1. Justifier l'existence de K.

2. On considère le système linéaire $(\mathcal{S}) : \mathrm{AX} = \mathrm{B}$. On appelle *pseudo-solution* de $\mathcal{S}$ tout élément Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|\mathrm{AY} - \mathrm{B}\|^2 = \mathrm{K}$. Montrer que si $(\mathcal{S})$ admet une solution, les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont les solutions de $(\mathcal{S})$.

3. On associe à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}') : \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{AX} = \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{B}$. Montrer qu'un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si il est solution de $(\mathcal{S}')$.

4. Montrer que $\operatorname{rg} \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} = \operatorname{rg} \mathrm{A}$.

5. Montrer que si $\operatorname{rg} \mathrm{A} = n$, $(\mathcal{S})$ admet une unique pseudo-solution.

Exercice 20 ★★★ **ENS MP 2010**

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

Exercice 21 ★★★

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en $m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^p x_i$.

Exercice 22 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{A}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} \, dt$. On rappelle que $\mathrm{A}_0 = 1$. Pour tous $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t^2} \, dt$.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n.

3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

4. Calculer $d(\mathrm{X}^3, \mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.

Exercice 23 **CCINP MP 2024**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \operatorname{tr}(\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{B})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

2. Calculer la distance de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $\mathrm{H} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \operatorname{tr}(\mathrm{M}) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

4. Calculer la distance de H à $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 24 ★★★

Soient H et K deux hyperplans d'un espace euclidien E. On note s_H et s_K les réflexions par rapport à H et K. Montrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

Exercice 25 ★★

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\forall u, v \in E,\ f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$

2. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\forall u, v \in E,\ f(u \wedge v) = -f(u) \wedge f(v)$$

Exercice 26 ★★

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 27 ★★

Déterminer les réels a, b, c pour que $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une rotation.

Exercice 28 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

1. On sait que la matrice d'une réflexion de E dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Quelle est l'interprétation géométrique de θ ?

2. Déterminer une condition portant sur l'angle entre leurs axes pour que la *somme* de deux réflexions soit encore une réflexion.

Exercice 29 ★★ Petites Mines 2009

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E. On pose $v = \mathrm{Id}_E - u$. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont orthogonaux et supplémentaires.

Exercice 30 ★★

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par la famille (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad e_2 : t \mapsto \cos(2\pi t) \qquad e_3 : t \mapsto \sin(2\pi t)$$

1. Montrer que $\Phi : (f, g) \mapsto 2\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.

3. Pour tout réel x, on définit l'application τ_x qui à tout élément f de E associe g tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(x - t)$$

a. Montrer que τ_x est un endomorphisme de E. Donner sa matrice relativement à $\mathcal{B}$.

b. Montrer que τ_x est une isométrie vectorielle de E.

c. Caractériser géométriquement τ_x.

Exercice 31 ★★

Déterminer l'image de la droite d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'axe dirigé par $\vec{a}(1, 1, 1)$.

Exercice 32 ★★

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de E de la réflexion s_1 par rapport au plan d'équation $x + y - 2z = 0$.

2. Quelle est la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner ses éléments caractéristiques.

3. Trouver les réflexions s_2 et s_3 telles que $s_1 \circ s_2 = f$ et $s_3 \circ s_1 = f$. Préciser leur plan de réflexion.

Exercice 33 ★

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On note A la matrice de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. Montrer que f est une symétrie orthogonale si et seulement si A est une matrice orthogonale symétrique.

Exercice 34 ★★ **Mines MP 2011**

Soient E un espace euclidien de dimension 3 ainsi que deux éléments f et g de $\mathrm{SO}(\mathrm{E})$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que f et g sont soit deux rotations de même axe soit des symétries par rapport à des droites orthogonales entre elles.

Exercice 35 ★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})^\perp$.

2. En déduire que $(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})^2 = 0 \implies f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

Exercice 36 ★★

Soient E un plan vectoriel euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion. Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Exercice 37 **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que 2 des 3 assertions suivantes impliquent la troisième :

- u est une isométrie.
- $u^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
- $\forall x \in \mathrm{E}, \langle x, u(x) \rangle = 0$.

Exercice 38 **Mines-Télécom MP 2024**

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (e_1, e, 2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit P le plan d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P. Déterminer la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 39 ★★★

Soit $\mathrm{O} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ une matrice orthogonale réelle de taille n où A et D sont deux blocs carrés de tailles respectives p et q. Montrer que $(\det \mathrm{A})^2 = (\det \mathrm{D})^2$.

Exercice 40 ★

Soient A et B les matrices, dans deux bases orthonormales, d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}^\top \mathrm{B})$.

Exercice 41 ★★

1. Soit X une matrice colonne réelle de taille n. Montrer que $X^\top X \in \mathbb{R}_+$ et que $X^\top X = 0$ implique $X = 0$.
2. Soit M une matrice antisymétrique réelle de taille n. Montrer que $I_n + M$ est inversible.
3. On pose $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice 42 ★★★★ **ENS MP 2010**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ laissant stable $(\mathbb{R}_+)^n$.

Exercice 43 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = \mathrm{com}(A)$ si et seulement si $A = 0$ ou $A \in SO(n)$.

Exercice 44 ★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = A^2$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$ et $\det(A) \in \{0, 1\}$.
3. Déterminer toutes les matrices A telles que $A^\top = A^2$ dans le cas où $n = 2$ et A est inversible.

Exercice 45 ★★ **CCINP MP 2025**

On note :

- $O_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices orthogonales.
- $T_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à diagonale strictement positive.
- $GL_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices inversibles.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.
3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ la base formée par les colonnes de A, et $\mathcal{B}'_{GS}$ la base $\mathcal{B}'$ orthonormalisée par Gram-Schmidt.
   Montrer qu'il existe, en utilisant les bases données, une matrice $O \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = OT$.

Adjoint

Exercice 46 ★★

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On pose

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ |||f||| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|f(x)\|$$

Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ |||f||| = |||f^*|||$$

Exercice 47 ★★

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u^* \circ u) = \mathrm{rg}(u \circ u^*)$.

Exercice 48 ★★★ **X PC 2012**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$. Montrer que $u + u^*$ est inversible.

Exercice 49 ★ **Autour de l'adjoint**

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$. Etablir que

$$\operatorname{Ker}(f + f^*) = \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(f^*)$$

Exercice 50 ★★

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. On pose pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$. Calculer l'adjoint de g_A.

Exercice 51 ★★

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et que $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.
2. En déduire que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u^*)$.

Exercice 52 ★★★

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u^* \circ u + \alpha u + \beta u^* = 0$$

1. On suppose $\alpha \neq \beta$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et p un projecteur orthogonal de E tels que $u = \lambda p$.
2. On suppose $\alpha = \beta$. Montrer que $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$ sont orthogonaux.

Exercice 53 ★★

Soit E un espace euclidien. Montrer que $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2 \mapsto \operatorname{tr}(f^* \circ g)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 54 ★★

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(f^*)$.
2. Montrer que $\det(f) = \det(f^*)$.
3. Montrer que $\chi_f = \chi_{f^*}$.
4. Montrer que $\operatorname{Sp}(f) = \operatorname{Sp}(f^*)$.
5. Montrer que pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$, $\dim E_\lambda(f) = \dim E_\lambda(f^*)$.

Exercice 55 ★★★★ **Endomorphismes normaux**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. On suppose que u est un endomorphisme *normal*, c'est-à-dire que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. On suppose *dans cette question uniquement* que $\dim E = 2$ et que χ_u est irréductible. Soit $\mathcal{B}$ une base *orthonormée* de E. Montrer que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est également stable par u et que les restrictions u_F et $u_{F^\perp}$ de u à F et $F^\perp$ sont des endomorphismes normaux de F et $F^\perp$.
   On pourra considérer la matrice de u dans une base adaptée.
3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 56 ★★★ **Endomorphismes normaux**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. Montrer que u et u^* ont les mêmes éléments propres.
2. Montrer que les sous-espaces propres de u dont deux à deux orthogonaux.

Exercice 57 **Polynôme minimal et adjoint**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u)^* = P(u^*)$.

2. En déduire que $\pi_u = \pi_{u^*}$.

Exercice 58 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2023**

On considère un espace euclidien E dont le produit scalaire est noté, pour tous vecteurs x et y de E : $\langle x|y\rangle$. On fixe deux vecteurs non nuls u et v de E.

1. Pour tout vecteur x de E, on pose : $(u \otimes v)(x) = \langle v|x\rangle u$.

  a. Justifier que $u \otimes v$ est linéaire et donner son rang.

  b. Déterminer les éléments propres de $u \otimes v$.

  c. L'endomorphisme $u \otimes v$ est-il diagonalisable ?

2. Calculer $(u \otimes v)^2 = (u \otimes v) \circ (u \otimes v)$ et retrouver le résultat de la question **1.c**.

3. Soit g un endomorphisme de E. On note g^* son adjoint. Montrer que g commute avec $u \otimes v$ si et seulement si il existe un réel α tel que : $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$.

Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Exercice 59 ★★★ **Mines-Ponts MP 2016**

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires a et b de E formant une famille libre.
Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b \end{array} \right.$$

Exercice 60 ★★ **CCP MP 2016**

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E. On pose $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k$ pour $x \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint défini positif.

2. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, défini positif telle que $g^2 = f^{-1}$.

3. Montrer que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormale de E.

Exercice 61 ★★ **Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif**

Soit f un endomorphisme auto-adjoint positif d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint g de E tel que $f = g^2$.

Exercice 62 ★

Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E. Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

Exercice 63 ★★

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle \geq 0$.

(ii) Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g^* \circ g$.

(iii) Il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h^* = h$ et $f = h^2$.

Exercice 64 ★★★

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E. On note $X = \{x \in E,\ \langle f(x), x\rangle \leq 1\}$. Montrer que X est compacte si et seulement si f est défini positif.

Exercice 65 ★★★ Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif

Soit f un endomorphisme auto-adjoint positif d'un espace euclidien E.

1. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ tel que $g^2 = f$.
2. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathcal{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $g^2 = f$.

Exercice 66 Navale MP 2023

On munit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}],\ (\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'application u définie sur E par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ u(\mathrm{P}) = \int_0^1 (\mathrm{X}+t)^n \mathrm{P}(t)\ \mathrm{d}t$$

est un endomorphisme autoadjoint de E.

2. En déduire qu'il existe une base orthonormee $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ formée de vecteurs propres de u.
3. On note $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_k(y)$$

En déduire la valeur de $\mathrm{tr}(u)$.

Exercice 67 ★★★ ENS MP 2010

Montrer que $\Phi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à une matrice associe sa plus grande valeur propre est une application convexe.

Exercice 68 ★★★ ENS MP 2010

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \end{array}\right)$. Trouver les valeurs propres de B.

Exercice 69 ★★★

Soient A, B deux matrices réelles symétriques positives de taille n et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que tout vecteur propre de A^k est vecteur propre de A.
2. Montrer que si $\mathrm{A}^k = \mathrm{B}^k$, alors $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.
3. Que se passe-t-il sans l'hypothèse A, B symétriques positives ?

Exercice 70 ★★★

Soient A et B deux matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) \geq 0$.

Exercice 71 ★★

Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})}$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $n = p$, N est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 72 ★★★★ ENS MP 2006

Soit $(a, b, c, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |ax^2 + bx + c| \leq |\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}|$$

Montrer que

$$|b^2 - 4ac| \leq |\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}|$$

Exercice 73 ENS PSI 2016

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{M}^\top \mathrm{M}) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(\mathrm{M}\mathrm{M}^\top) \setminus \{0\}$$

Exercice 74 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\forall(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A)^2,\ \lambda + \mu \neq 0$;

(ii) $\forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists! M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ AM + MA = B$.

Exercice 75 ★★★

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ le système

$$\begin{cases} X^\top YX = I_n \\ Y^\top XY = I_n \end{cases}$$

Exercice 76 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les coefficients diagonaux sont nuls et D une matrice diagonale.
Montrer que $S + D$ est semblable à D si, et seulement si, S est nulle.

Exercice 77 ★★★ **Racine carrée d'une matrice symétrique positive**

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
2. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 78 **CCINP (ou CCP) PC 2019**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^n = 0$.

1. Montrer que si M est symétrique, alors $M = 0$.
2. Montrer que si $M^\top M = MM^\top$, alors $M = 0$.

Exercice 79 ★★★★ **Décomposition polaire**

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^\top A = S^2$.
2. Montrer qu'il existe un couple $(Q, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$.
3. Montrer l'unicité du couple (Q, S) de la question précédente.
4. On se donne maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(Q, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$. On pourra utiliser des arguments topologiques. A-t-on encore unicité du couple (Q, S) ?

Exercice 80 ★★

Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 81 ★★ **Décomposition en valeurs singulières**

Pour une matrice diagonale D et $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera D^α la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les puissances $\alpha^{\text{èmes}}$ de ceux de D.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que $A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. On pose $r = \mathrm{rg}(A^\top A)$. Justifier qu'il existe une matrice $V \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telles que
$$V^\top A^\top AV = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
3. On pose $V = (V_1, V_2)$ avec $V_1 \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $V_2 \in \mathcal{M}_{n,n-r}(\mathbb{R})$. Montrer que $AV_2 = 0$.
4. On pose $U_1 = AV_1D^{-1/2}$. Montrer qu'il existe $U_2 \in \mathcal{M}_{m,r-m}(\mathbb{R})$ telle que $U = (U_1, U_2) \in O_m(\mathbb{R})$.
5. Vérifier que $A = U\Sigma V^\top$ avec $\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} D^{1/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Exercice 82 **Mines Télécom MP 2022**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et semblable à une matrice réelle triangulaire supérieure.

1. Déterminer le spectre de A.

2. Montrer que $A^n = 0$.

3. Montrer que $A^2 = 0$.

4. Montrer que $A = 0$.

Exercice 83 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2022**

Soit $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avec des 1 sur la diagonale, sur la première colonne et sur la première ligne, puis des 0 partout ailleurs.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Cas $n = 2$: calculer les éléments propres de A.

3. Cas $n \neq 2$:

a. Montrer que 1 est une valeur propre de A.

b. Montrer que si λ est une valeur propre de A autre que 1, alors $(\lambda - 1)^2 = n - 1$.

c. Expliciter les éléments propres de A.

d. Calculer le déterminant de A en fonction de n.

Exercice 84 ★★★ **Signature d'une matrice symétrique**

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On dit que B est *congruente* à A s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^\top AP$. Montrer que la congruence est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On appelle *signature* de A le couple (p, q) où p est le nombre de valeurs propres strictement positives de A (comptées avec multiplicité) et q est le nombre de valeurs propres strictement négatives de A (comptées avec multiplicité).

a. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de signature (p, q). Montrer que A est congruente à $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire que si A et B ont même signature, alors elles sont congruentes.

3. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de signature (p, q).

a. Démontrer qu'il existe trois sous-espaces vectoriels E_+, E_- et E_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

- $\forall X \in E_+ \setminus \{0\}, X^\top SX > 0$;
- $\forall X \in E_- \setminus \{0\}, X^\top SX < 0$;
- $\forall X \in E_0, X^\top SX = 0$;
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_+ \oplus E_- \oplus E_0$;
- $\dim E_+ = p$, $\dim E_- = q$.

b. On suppose qu'il existe trois sous-espaces vectoriels F, G et H de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

- $\forall X \in F \setminus \{0\}, X^\top SX > 0$;
- $\forall X \in G \setminus \{0\}, X^\top SX < 0$;
- $\forall X \in H, X^\top SX = 0$;
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G \oplus H$.

Montrer que $\dim F = p$ et $\dim G = q$.

4. En déduire que deux matrices symétriques congruentes ont même signature.

Exercice 85 ★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi : (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto X^\top AY$ est un produit scalaire si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 86 ★★★ **Réduction simultanée**

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$P^\top AP = I_n \qquad \text{et} \qquad P^\top BP = D$$

Exercice 87 ★★★

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = \exp(A)$. Cette matrice A est-elle unique ?

Exercice 88 ★★ **Déterminant de Gram**

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien E. On note $A = \left(\langle f_i, f_j\rangle\right)_{1\le i,j\le n}$

1. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\det(A) = 0$ si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 89 ★★

Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique positive sont positifs.

Exercice 90 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2023 (avec préparation)**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques et $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall U \in O_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(AU) \le \operatorname{tr}(A)$$

1. Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(xB) \in O_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
4. Étudier la réciproque.

Exercice 91 **Norme subordonnée à la norme euclidienne**

On suppose que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs normes 2 respectives. Montrer que

$$|||A||| = \sqrt{\max \operatorname{Sp}(A^\top A)}$$

Exercice 92 ★★★ **Théorème du produit de Schur**

Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. On note $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $C_{i,j} = A_{i,j}B_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Montrer que $C \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Exercice 93 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2023 (avec préparation)**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques et $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall U \in O_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(AU) \le \operatorname{tr}(A)$$

1. Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(xB) \in O_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
4. Étudier la réciproque.

Polynômes orthogonaux

Exercice 94 ★★★ **Polynômes de Legendre**

On pose $Q_n = (X^2-1)^n = (X+1)^n(X-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On notera $\varphi(P, Q) = \langle P, Q\rangle$ par la suite.
2. Soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k < n$. Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$.
3. On pose $P_n = Q_n^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $L : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2-1)P'' + 2XP'$. Montrer que L est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est un vecteur propre de L.

Exercice 95 ★★★ **Polynômes de Hermite**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose $L(P) = P'' - 2XP'$. Pour tous $P, Q \in E$, on note

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\, dt$$

1. Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que L est diagonalisable. On précisera ses valeurs propres.
3. Montrer que L est auto-adjoint pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
4. Montrer que l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de E diagonalise L i.e. est une base de vecteurs propres de L.

Divers

Exercice 96 ★★

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Une application $u : E \to E$ est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle + \langle y, u(x)\rangle = 0$$

On note A(E) l'ensemble des applications antisymétriques de E.

Remarque. Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !

1. Soit $u \in A(E)$. Montrer que u est linéaire.
2. Soit $u : E \to E$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (i) u est linéaire et $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$;
   (ii) u est antisymétrique ;
   (iii) u est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que A(E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit $u \in A(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est l'orthogonal de $\operatorname{Ker} u$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors $F^\perp$ est également stable par u.

Exercice 97 ★★★

Montrer que le rang d'une matrice antisymétrique réelle est pair.

Exercice 98 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^\top = A^2 + A - I_n$.
On appelle a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Décrire a si A est symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.
2. Décrire a si on ne suppose plus A symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.

Exercice 99 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \langle u(x), x\rangle = 0$$

1. Montrer que la matrice de u dans une base orthonormale de E est antisymétrique.
2. Montrer que $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ est stable par u.
3. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix}$ avec N inversible.
4. Montrer que le rang de u est pair.

Exercice 100 ★★★ **Réduction des endomorphismes anti-auto-adjoints**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant $u^* = -u$.

1. Montrer que $s = u^2$ est un endomorphisme auto-adjoint.
2. Soit λ une éventuelle valeur propre non nulle de s. Montrer que $\lambda < 0$.
3. Soit x un vecteur propre de s associé à la valeur propre λ. Montrer que $\mathrm{F} = \operatorname{vect}(x, u(x))$ est stable par u. On note u_F l'endomorphisme de F induit par u.
4. Montrer qu'il existe une base orthonormée de F dans laquelle la matrice de u_F est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a > 0$.
5. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a > 0$.
6. Enoncer un résultat analogue pour les matrices antisymétriques.

Exercice 101 **Mines-Télécom MP 2024**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose A antisymétrique. Montrer que pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{X}^\top \mathrm{A}\mathrm{X} = 0$.
2. On se propose de prouver la réciproque.
   - **a.** On suppose que pour tout $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{X}^\top \mathrm{A}\mathrm{Y} = -\mathrm{Y}^\top \mathrm{A}\mathrm{X}$. Montrer que A est antisymétrique.
   - **b.** En déduire le résultat souhaité.

Exercice 102 ★★

Soit A une matrice antisymétrique réelle. Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

Exercice 103 ★★★ **Déterminant d'une matrice antisymétrique**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. On suppose dans cette question que n est impair. Montrer que $\det(\mathrm{A}) = 0$.
2. Soit λ une éventuelle valeur propre *réelle* de A. Montrer que $\lambda = 0$.
3. En déduire que $\det(\mathrm{A}) \geq 0$.

Exercice 104 ★★

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est antisymétrique si et seulement si pour toute matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{P}^\top \mathrm{M}\mathrm{P}$ est de diagonale nulle.

Exercice 105 ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
3. a. Quel est l'orthogonal de l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ?
   b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la distance de A à $S_n(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients de A ?
4. Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.
5. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Exercice 106 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1, \dots, u_{n+1}$ des vecteurs non nuls de E faisant un angle constant α_n (non nul) deux à deux. Que vaut α_n ?

Exercice 107 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}(A^\top A) = \operatorname{rg}(AA^\top) = \operatorname{rg} A$.

Exercice 108 ★★★

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant
$$\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$
pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$.
2. On pose $F = \operatorname{vect}(1 + X^n, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Conclusion ?