

# DEVOIR À LA MAISON N°18

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

**1** Notons  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ . Par définition,  $\text{tr}(f) = \text{tr}(A)$ . Notons  $B$  la matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Comme il s'agit d'une base orthonormée,  $B_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle = \langle Ae_j, e_i \rangle$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Notamment,  $\text{tr}(f) = \text{tr}(B) = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle$ . On en déduit l'égalité recherchée.

**2** Cf. Cours

**3** Comme  $B$  est symétrique réelle, il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $B$ . Notons  $\lambda_i$  la valeur propre associée à  $e_i$ . Comme  $A$  est symétrique,

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \text{tr}(AB)$$

D'après la question 1,

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \langle ABe_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle Ae_i, e_i \rangle$$

Comme  $B$  est symétrique positive, les  $\lambda_i$  sont positifs et comme  $A$  est symétrique positive,  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . On en déduit que  $\langle A, B \rangle \geq 0$ .

**4** Tout d'abord,  $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$  donc  $A^\top A$  est symétrique. De plus, pour tout  $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$x^\top (A^\top A)x = \|Ax\|^2 \geq 0$$

donc  $A$  est symétrique positive.

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A^\top A$ . Notons  $\lambda_i$  la valeur propre associée au vecteur propre  $e_i$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  de norme 1. Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormée,

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

puis

$$A^\top Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i$$

Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormée,

$$\|Ax\|^2 = \langle A^\top Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i \rangle^2$$

Si on note  $M = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , alors

$$\|Ax\|^2 \leq M \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$$

Or  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormée donc

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 = 1$$

Ainsi  $\|Ax\| \leq \sqrt{M}$ . Enfin, en notant  $u$  un vecteur propre unitaire de  $A^\top A$  associé à la valeur propre  $M$ ,

$$\|Au\|^2 = \langle A^\top Au, u \rangle = M \langle u, u \rangle = M$$

puis  $\|Au\| = \sqrt{M}$ . Finalement,

$$\|A\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{M} = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A^\top A)} \sqrt{\lambda}$$

où on a utilisé la croissance de la racine carrée pour la dernière égalité.

**5**  $A^\top A$  est la matrice de  $f^* \circ f$  dans une base orthonormée de  $E$ . Comme  $A^\top A$  est symétrique positive,  $f^* \circ f$  est auto-adjoint positif.

**REMARQUE.** On peut aussi le montrer sans l'aide de la matrice  $A$ . En effet,  $(f^* \circ f)^* = f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f$  et, pour tout  $x \in E$ ,  $\langle f^* \circ f(x), x \rangle = \|f(x)\|^2 \geq 0$ .

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f^* \circ f$ . Notons  $\lambda_i \geq 0$  la valeur propre associée au vecteur propre  $e_i$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , on définit un endomorphisme  $h$  de  $E$  en posant  $h(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . De plus, les endomorphismes  $f^* \circ f$  et  $h^2$  coïncident sur cette base ; ils sont donc égaux.

Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est également une base de vecteurs propres de  $h$ ,  $h$  est auto-adjoint. Enfin,  $\text{Sp}(h) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+$  donc  $h$  est auto-adjoint positif.

**6** Tout d'abord,  $\text{Im } h$  est bien stable par  $h$ , ce qui permet de définir  $\tilde{h}$ . Soit alors  $x \in \text{Ker } \tilde{h} = \text{Im } h \cap \text{Ker } h$ . Alors  $h(x) = 0_E$  et il existe  $a \in E$  tel que  $x = h(a)$ . Ainsi  $f^* \circ f(a) = h^2(a) = 0_E$  puis  $\|x\|^2 = \|f(a)\|^2 = \langle f^* \circ f(a), a \rangle = 0$  et enfin  $x = 0_E$ .

Par conséquent,  $\text{Ker } \tilde{h} = \{0_E\}$ . Mais comme  $\text{Im } h$  est de dimension finie, ceci suffit à garantir que  $\tilde{h}$  est un automorphisme de  $\text{Im } h$ .

**7** Soit  $x \in E$ . Alors

$$\|h(x)\|^2 = \langle h^* \circ h(x), x \rangle = \langle h^2(x), x \rangle = \langle f^* \circ f(x), x \rangle = \|f(x)\|^2$$

et donc  $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ .

On en déduit notamment que  $h(x) = 0_E \iff f(x) = 0_E$ . Ainsi  $\text{Ker } h = \text{Ker } f$ . D'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker } h = \dim \text{Ker } f = \dim E - \dim \text{Im } f = \dim(\text{Im } f)^\perp$$

Notamment, il existe une application linéaire  $v$  qui envoie une base orthonormée de  $\text{Ker } h$  sur une base orthonormée de  $(\text{Im } f)^\perp$ . Cette application linéaire  $v$  est un isomorphisme car l'image d'une base de  $\text{Ker } h$  est une base de  $(\text{Im } f)^\perp$ . De plus, comme  $v$  envoie une base orthonormée sur une base orthonormée, il conserve la norme.

**REMARQUE.** Rigoureusement, ce dernier résultat ne figure au programme que pour les endomorphismes. La preuve ne pose pas de difficulté. Notons  $(e_1, \dots, e_p)$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  les bases orthonormées respectives de  $\text{Ker } h$  et  $(\text{Im } f)^\perp$  telles que  $v(e_i) = f_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Soit  $x \in \text{Ker } h$ . Alors, comme  $(e_1, \dots, e_p)$  est orthonormée,  $x = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$  et  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle^2$ . Par linéarité de  $v$ ,  $v(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle v(e_i) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle f_i$ . Comme  $(f_1, \dots, f_p)$  est orthonormée,  $\|v(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2$ .

**8** Montrons tout d'abord que  $\text{Ker } h$  et  $\text{Im } h$  sont orthogonaux et supplémentaires dans  $E$ . Soit  $(x, y) \in \text{Ker } h \times \text{Im } h$ . Alors  $h(x) = 0_E$  et il existe  $a \in E$  tel que  $y = h(a)$ . Ainsi, comme  $h$  est auto-adjoint,

$$\langle x, y \rangle = \langle x, h(a) \rangle = \langle h(x), a \rangle = \langle 0_E, a \rangle = 0$$

Par conséquent,  $\text{Ker } h \perp \text{Im } h$  et le théorème du rang donne  $\dim E = \dim \text{Ker } h + \dim \text{Im } h$  donc  $\text{Im } h$  et  $\text{Ker } h$  sont orthogonaux et supplémentaires dans  $E$ .

On peut alors définir un endomorphisme  $u$  de  $E$  en posant  $u(x) = v(x)$  pour  $x \in \text{Ker } h$  et  $u(x) = f \circ \tilde{h}^{-1}(x)$  pour  $x \in \text{Im } h$ .

- Soit  $x \in \text{Ker } h$ . Alors  $u \circ h(x) = 0_E$ . Mais on a vu que  $\text{Ker } h = \text{Ker } f$  donc  $f(x) = 0_E = u \circ h(x)$ .
- Soit  $x \in \text{Im } h$ . Alors  $u \circ h(x) = u \circ \tilde{h}(x) = f(x)$ .

Les endomorphismes  $f$  et  $u \circ h$  coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires ; ils sont égaux.

- Soit  $y \in \text{Ker } h$ . Alors  $\|u(y)\| = \|v(y)\| = \|y\|$  car  $v$  conserve la norme.

- Soit  $z \in \text{Im } h$ . On rappelle que  $\|h(x)\| = \|f(x)\|$  pour tout  $x \in E$ . Ainsi

$$\|u(z)\| = \|f \circ \tilde{h}^{-1}(z)\| = \|h \circ \tilde{h}^{-1}(z)\| = \|z\|$$

Soit  $x \in E$ . Il existe alors  $(y, z) \in \text{Ker } h \times \text{Im } h$  tel que  $x = y + z$ . Comme  $\text{Ker } h \perp \text{Im } h$ ,  $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$  d'après le théorème de Pythagore. Ensuite,  $u(x) = u(y) + u(z)$ . Mais  $u(y) = v(y) \in (\text{Im } f)^\perp$  et  $u(z) = f \circ \tilde{h}^{-1}(z) \in \text{Im } f$ . D'après le théorème de Pythagore,

$$\|u(x)\|^2 = \|u(y)\|^2 + \|u(z)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$$

Ainsi  $u$  conserve la norme : c'est un automorphisme orthogonal.

**9** Il suffit de considérer l'endomorphisme  $f$  associée à  $A$  dans une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Il existe alors  $u \in O(E)$  et  $h \in \mathcal{S}^+(E)$  tels que  $f = u \circ h$ . On note alors  $U$  et  $S$  les matrices respectives de  $u$  et  $h$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a alors bien  $A = US$  et, comme  $\mathcal{B}$  est orthonormée,  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

**10** L'application  $h \mapsto \|x - h\|$  est continue sur le compact  $H$  : elle y admet donc un minimum. Il existe alors  $h_0 \in H$  tel que  $d(x, H) = \|x - h_0\|$ .

Soit alors  $h_1$  tel que  $d(x, H) = \|x - h_0\| = \|x - h_1\|$ . Considérons alors la fonction  $q$  de l'énoncé.

$$\forall t \in \mathbb{R}, q(t) = \|t(h_1 - h_0) + (x - h_1)\|^2 = t^2\|h_1 - h_0\|^2 + 2t\langle h_1 - h_0, x - h_1 \rangle + \|x - h_1\|^2$$

Par ailleurs,  $q(0) = q(1) = d(x, H)^2$  donc  $P = q - d(x, H)^2$  est un trinôme de racines 0 et 1 de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \|h_1 - h_0\|^2 t(t-1)$$

Par convexité de  $H$ ,  $th_0 + (1-t)h_1 \in H$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On en déduit que  $q(t) \geq d(x, H)^2$  i.e.  $P(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Ceci n'est possible que si  $\|h_1 - h_0\|^2$  i.e.  $h_0 = h_1$ .

**11** Soit  $h_0 \in H$  tel que  $d(x, H) = \|x - h_0\|$ . Soit  $h_1 \in H$ . Remarquons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, q(t) = \|(x - h_0) - (1-t)(h_1 - h_0)\|^2 = d(x, H)^2 + (1-t)^2\|h_1 - h_0\|^2 - 2(1-t)\langle x - h_0, h_1 - h_0 \rangle$$

A nouveau,  $q(t) \geq d(x, H)^2$  pour tout  $t \in [0, 1]$  donc

$$\forall t \in [0, 1], 2(1-t)\langle x - h_0, h_1 - h_0 \rangle \leq (1-t)^2\|h_1 - h_0\|^2$$

donc

$$\forall t \in [0, 1], 2\langle x - h_0, h_1 - h_0 \rangle \leq (1-t)\|h_1 - h_0\|^2$$

En faisant tendre  $t$  vers  $1^-$ , on obtient

$$\langle x - h_0, h_1 - h_0 \rangle \leq 0$$

Réciproquement, soit  $h_0 \in H$  tel que  $\langle x - h_0, h_1 - h_0 \rangle \leq 0$  pour tout  $h_1 \in H$ . Fixons  $h_1 \in H$  et considérons toujours la même fonction  $q$ .

$$\forall t \in \mathbb{R}, q(t) = \|(x - h_0) - (1-t)(h_1 - h_0)\|^2 = \|x - h_0\|^2 + (1-t)^2\|h_1 - h_0\|^2 - 2(1-t)\langle x - h_0, h_1 - h_0 \rangle$$

donc

$$\|x - h_1\|^2 = q(0) = \|x - h_0\|^2 + \|h_1 - h_0\|^2 - 2\langle x - h_0, h_1 - h_0 \rangle \geq \|x - h_0\|^2$$

Ceci étant valide pour tout  $h_1 \in H$ , on a bien  $d(x, H) = \|x - h_0\|$ .

**12** Notons  $C$  l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de  $H$ .

Tout d'abord,  $H \subset C$  car tout élément de  $H$  peut être considéré comme une combinaison convexe d'un seul élément de  $H$  (l'élément en question). Ensuite  $C$  est convexe. Soit  $(x, y) \in C^2$ . Il existe donc des éléments  $x_1, \dots, x_p$  de  $H$  et des réels

positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  de somme 1 tels que  $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ . De même, il existe des éléments  $y_1, \dots, y_q$  de  $H$  et des réels positifs  $\mu_1, \dots, \mu_q$  de somme 1 tels que  $y = \sum_{j=1}^q \mu_j y_j$ . Soit alors  $t \in [0, 1]$ . Alors

$$(1-t)x + ty = \sum_{i=1}^p (1-t)\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^q t\mu_j y_j$$

De plus, les réels  $(1-t)\lambda_i$  et  $t\mu_j$  sont positifs et

$$\sum_{i=1}^p t\lambda_i + \sum_{j=1}^q t\mu_j = 1 - t + t = 1$$

donc  $(1-t)x + ty$  est bien combinaison convexe des éléments  $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$ . Ainsi  $(1-t)x + ty \in C$  et  $C$  est convexe. Comme  $\text{conv } H$  est le plus petit convexe contenant  $H$ ,  $\text{conv}(H) \subset C$ .

Réciiproquement, on note  $\mathcal{P}_n$  l'assertion « $\text{conv}(H)$  contient les combinaisons convexes de  $n$  éléments de  $H$ ».  $\mathcal{P}_1$  est vraie puisque  $\text{conv}(H)$  contient  $H$ . Supposons  $\mathcal{P}_n$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $x_1, \dots, x_{n+1}$  des éléments de  $H$  ainsi que

$\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  des réels positifs de somme 1. Si  $\lambda_{n+1} = 1$  alors  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x_{n+1} \in$

$H \subset \text{conv}(H)$ . Sinon, posons  $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors  $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$  donc  $y = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \in \text{conv}(H)$  d'après  $\mathcal{P}_n$ .

Mais comme  $\text{conv}(H)$  est convexe,  $x = (1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1} \in \text{conv}(H)$ . Par récurrence,  $\text{conv}(H)$  contient toutes les combinaisons convexes d'éléments de  $H$  donc  $C \subset \text{conv}(H)$ .

Par double inclusion,  $\text{conv}(H) = C$ .

**13** La famille  $(x_2 - x_1, \dots, x_p - x_1)$  est une famille de  $p - 1$  vecteurs de  $E$ . Comme  $p - 1 \geq n + 1 > n = \dim E$ , cette famille est liée. Il existe donc des réels  $\mu_2, \dots, \mu_p$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=2}^p \mu_i(x_i - x_1) = 0_E$ . En posant  $\mu_1 = -\sum_{i=2}^p \mu_i$ , on a bien  $\sum_{i=1}^p \mu_i x_i = 0_E$  et  $\sum_{i=1}^p \mu_i = 0$ .

**14** Comme les  $\mu_i$  sont non tous nuls et de somme nulle, l'ensemble  $I = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \mu_i > 0\}$  n'est pas vide. On peut alors poser  $\theta = \min_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ . Comme les  $\lambda_i$  sont positifs,  $\theta \geq 0$ . Posons ensuite  $\alpha_i = \lambda_i - \theta\mu_i$ . On a alors

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i - \theta \sum_{i=1}^p \mu_i = 1$$

et

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i - \theta \sum_{i=1}^p \mu_i x_i = x$$

De plus, si  $i \in I$ , alors  $\alpha_i \geq 0$  par construction de  $\theta$  et si  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus I$ , alors  $\mu_i \leq 0$  donc  $\alpha_i \geq 0$ . Finalement, les  $\alpha_i$  sont tous positifs et de somme 1. Enfin, il existe  $j \in I$  tel que  $\theta = \frac{\lambda_j}{\mu_j}$  i.e.  $\alpha_j = 0$ . On en déduit que  $x$  est combinaison convexe de  $p - 1$  éléments de  $H$ .

On peut alors prouver par une récurrence descendante finie que  $x$  peut s'écrire comme une combinaison convexe de  $n + 1$  éléments de  $H$ .

**15** Vérifions que l'ensemble  $\Lambda$  de l'énoncé est bien compact. Tout d'abord, les formes linéaires  $\varphi_i : (t_1, \dots, t_{n+1}) \mapsto t_i$  et  $\psi : (t_1, \dots, t_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i$  sont continues car  $\mathbb{R}^{n+1}$  est de dimension finie. De plus,

$$\Lambda = \psi^{-1}(\{1\}) \cap \left( \bigcap_{i=1}^{n+1} \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \right)$$

On peut conclure au caractère fermé de  $\Lambda$  car une image réciproque de fermé par une application continue est fermé et car une intersection de fermés est fermée.

L'ensemble  $\Lambda$  est évidemment borné puisque  $\Lambda \subset [0, 1]^{n+1}$  par exemple. Comme  $\mathbb{R}^{n+1}$  est de dimension finie,  $\Lambda$  est bien compact.

Remarquons alors que  $\text{conv}(H)$  est l'image de  $\Lambda \times H^{n+1}$  par l'application

$$\gamma : (t_1, \dots, t_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i$$

L'ensemble  $\Lambda \times H^{n+1}$  est compact comme produit cartésien fini de compacts. L'application  $\gamma$  est continue car on peut la voir comme une application bilinéaire sur  $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$  et les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $E^{n+1}$  sont de dimensions finies. Finalement,  $\text{conv}(H) = \gamma(\Lambda \times H^{n+1})$  est compacte.

**16** La question précédente montre qu'il suffit de prouver que  $O_n(\mathbb{R})$  est compact. C'est très classique. Pour tout  $Q \in O_n(\mathbb{R})$ ,  $\|Q\|_1 = \sqrt{\text{tr}(Q^\top Q)} = \sqrt{\text{tr}(I_n)} = \sqrt{n}$  donc  $O_n(\mathbb{R})$  est borné. Enfin, l'application  $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top M$  est continue puisque les coefficients de  $M^\top M$  sont polynomiaux en les coefficients de  $M$ . On en déduit que  $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$  est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

**17** Soit  $Q \in O_n(\mathbb{R})$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de norme 1. Alors  $\|QX\|^2 = X^T Q^T Q X = X^T X = \|X\|^2 = 1$  donc  $\|QX\| = 1$ . Ainsi  $\|Q\|_2 = 1$ .

Soit alors  $M \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ . Il existe donc des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  positifs et de somme 1 ainsi que des matrices  $Q_1, \dots, Q_p$  dans  $O_n(\mathbb{R})$  tels que  $M = \sum_{i=1}^p \lambda_i Q_i$ . Par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme :

$$\|M\|_2 \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \|Q_i\|_2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$$

On a bien montré que  $\text{conv}(O_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}$ .

**REMARQUE.** On pouvait aussi remarquer que  $\mathcal{B}$  était convexe en tant que boule. Puisque  $O_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$ ,  $\text{conv}(O_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}$  car  $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$  est le plus petit convexe contenant  $O_n(\mathbb{R})$ .

**18** Tout d'abord,  $M \neq N$  car  $M \notin \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$  et  $N \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ . Ainsi

$$\text{tr}(AM) - \text{tr}(AN) = \text{tr}(A(M - N)) = \|M - N\|_1 > 0$$

donc  $\text{tr}(AN) < \text{tr}(AV)$ .

De plus, d'après la question 11,

$$\forall V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R})), \langle M - N, V - N \rangle \leq 0$$

ou encore

$$\forall V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R})), \text{tr}(A(V - N)) \leq 0$$

ou encore

$$\forall V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R})), \text{tr}(AV) \leq \text{tr}(AN)$$

Choisissons alors  $V = U^T \in O_n(\mathbb{R}) \subset \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ . Alors  $\text{tr}(AV) = \text{tr}(USU^T) = \text{tr}(SU^T U) = \text{tr}(S)$  car  $U$  est orthogonale. On conclut en remarquant que  $\text{tr}(AM) = \text{tr}(USM)$ .

**19** D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $S$ . Notons  $\lambda_i$  la valeur propre associée au vecteur propre  $e_i$ . D'après la question 1,

$$\text{tr}(MUS) = \sum_{i=1}^n \langle MUS e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle MUE e_i, e_i \rangle$$

Comme les  $\lambda_i$  sont positifs ( $S$  est symétrique positive), on obtient avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\text{tr}(MUS) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|MUE e_i\| \|e_i\|$$

Or pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $\|e_i\| = 1$  et, par définition et sous-multiplicativité de la norme subordonnée,

$$\|MUE e_i\| \leq \|MU\|_2 \|e_i\| = \|MU\|_2 \leq \|M\|_2 \|U\|_2 \leq 1 \times 1 = 1$$

On en déduit que

$$\text{tr}(MUS) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(S)$$

**20** Par propriété de la trace,  $\text{tr}(MUS) = \text{tr}(USM)$  donc il y a une contradiction entre les deux questions précédentes. On en déduit par l'absurde que  $\mathcal{B} \subset \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ . Par double inclusion,  $\mathcal{B} = \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ .

**21** Soit  $X \in \mathbb{R}^n$ . Par inégalité triangulaire,

$$\|UX\| \leq \frac{1}{2}(\|VX\| + \|WX\|)$$

Mais comme  $U \in O_n(\mathbb{R})$ ,  $\|UX\| = \|X\|$ . Enfin, comme  $V$  et  $W$  sont dans  $\mathcal{B}$ ,

$$\frac{1}{2}(\|VX\| + \|WX\|) \leq \frac{1}{2}(\|V\|_2 \|X\| + \|W\|_2 \|X\| \leq \|X\|)$$

On en déduit que  $\|VX + WX\| = \|VX\| \|WX\|$  puis, en élévant au carré,

$$\langle VX, WX \rangle = \|VX\| \|WX\|$$

On est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui prouve que les vecteurs  $VX$  et  $WX$  sont (positivement) liés.

Montrons tout d'abord que pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $VX = 0 \implies X = 0$ . Supposons que  $VX = 0$ . Alors  $\|X\| = \|UX\| = \frac{1}{2}\|WX\| \leq \frac{1}{2}\|X\|$  donc  $\|X\| = 0$  puis  $X = 0$ . De même,  $WX = 0 \implies X = 0$ . On se donne alors  $X \neq 0$ . On a alors  $VX \neq 0$ ,  $WX \neq 0$  et même  $UX \neq 0$  car  $U$  est inversible.

Comme  $VX$  et  $WX$  sont colinéaires et que  $VX \neq 0$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $WX = \lambda VX$ . Alors  $UX = \frac{1+\lambda}{2}VX$ . Mais comme  $UX \neq 0$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $VX = \alpha UX$ . De même, il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $WX = \beta UX$ . Alors  $2UX = VX + WX = (\alpha + \beta)UX$  de sorte que  $\alpha + \beta = 2$  car  $UX \neq 0$ . Ensuite, comme  $U$  est orthogonale,  $\|UX\| = \|X\|$ . Mais comme  $V$  et  $W$  sont dans  $\mathcal{B}$ ,  $\|VX\| \leq \|X\|$  et  $\|WX\| \leq \|X\|$ . Comme  $|X| > 0$ , on en déduit que  $|\alpha| \leq 1$  et  $|\beta| \leq 1$ . Ainsi  $(1 - \alpha) + (1 - \beta) = 0$ ,  $1 - \alpha \geq 0$  et  $1 - \beta \geq 0$  donc  $\alpha = \beta = 1$ . On a donc montré que  $UX = VX = WX$  pour tout  $X \neq 0$  mais c'est encore vrai pour  $X = 0$ . On en déduit que  $U = V = W$ .

**22** D'après la question 9, il existe  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telles que  $A = US$ . D'après le théorème spectral, il existe  $Q \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D$  diagonale à coefficients diagonaux positifs telles que  $S = Q^T D Q$ . Il suffit alors de poser  $P = UQ^T \in O_n(\mathbb{R})$ .

**23** On a vu à la question 4 que  $\|A\|_2^2 = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A^T A)} \lambda$ . Or  $A^T A = Q^T D^T P^T P D Q = Q^{-1} D^2 Q$  donc  $\text{Sp}(A^T A) = \{d_1^2, \dots, d_n^2\}$ . Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $d_i^2 \leq \|A\|_2^2 = 1$  car  $A \in \mathcal{B}$ . Notamment,  $d_i \leq 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Si on avait  $d_i = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors on aurait  $D = I_n$  puis  $A = PQ \in O_n(\mathbb{R})$ , ce qui n'est pas. Il existe donc  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $d_j < 1$ .

**24** Posons  $B = P \text{diag}(d_1, \dots, d_{j-1}, 1, d_{j+1}, \dots, d_n)Q$  et  $C = P \text{diag}(d_1, \dots, d_{j-1}, 2d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_n)Q$ . Comme  $d_j \neq 1$ , on a  $B \neq C$ . De plus,  $A = \frac{1}{2}(B + C)$ .

En raisonnant comme à la question précédente, si  $M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q$ , alors

$$\|M\|_2 = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$

Comme  $0 \leq d_i \leq 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\|B\|_2 = 1$  et  $\|C\|_2 \leq 1$  donc  $B$  et  $C$  appartiennent à  $\mathcal{B}$ . On en déduit que  $A$  n'est pas un point extrémal de  $\mathcal{B}$ . Les points extrémaux de  $\mathcal{B}$  sont donc exactement les éléments de  $O_n(\mathbb{R})$ .