

DEVOIR SURVEILLÉ N°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Tout d'abord ψ est continue sur I . De plus, $\psi(u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{u^{1/2}}$ et $1/2 < 1$ donc ψ est intégrable en 0^+ . Enfin, $\psi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-u})$ donc ψ est intégrable en $+\infty$.
Finalement, ψ est bien intégrable sur I .

2 Posons $\varphi(x, u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$. Remarquons déjà que l'application $u \mapsto \varphi(x, u)$ n'est définie sur I que si $x \geq 0$.
De plus, $\varphi(0, u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$ et $3/2 \geq 1$ donc $u \mapsto \varphi(0, u)$ n'est pas intégrable en 0^+ .

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $u \mapsto \varphi(x, u)$ est bien continue sur I . De plus, $\varphi(x, u) \underset{u \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right)$ et $1/2 < 1$ donc $u \mapsto \varphi(x, u)$ est intégrable en 0^+ . Enfin, par croissances comparées, $\varphi(x, u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-u})$ donc $u \mapsto \varphi(x, u)$ est intégrable en $+\infty$.
Finalement, $x \mapsto \varphi(x, u)$ est intégrable sur I .

On déduit de ce qui précède que $F(x)$ est définie si et seulement si $x > 0$.

3 Il s'agit d'utiliser le théorème des dérivations des intégrales à paramètre :

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto \varphi(x, u)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* ;
- pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \varphi(x, u)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u) = \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* ;
- pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $(x, u) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u) \right| \leq \frac{e^{-u}}{a^2 \sqrt{u}} = \Phi(u)$$

- d'après la question 1, Φ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

On peut en conclure que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2} du$$

4 Soit $x \in I$.

$$F(x) + xF'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du - x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2} du$$

Les applications $u \mapsto e^{-u}\sqrt{u}$ et $u \mapsto -\frac{1}{u+x}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , de dérivées respectives $u \mapsto \frac{e^{-u}(\frac{1}{2} - u)}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \frac{1}{(u+x)^2}$ donc, par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2} du = - \left[\frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x} \right]_{u=0}^{u=+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}(\frac{1}{2} - u)}{\sqrt{u}(u+x)} dy$$

L'intégration par parties est légitime puisque

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x} = 0$$

Ainsi

$$F(x) + xF'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\left(\frac{1}{2} - u\right)}{\sqrt{u}(u+x)} du =$$

En écrivant $\frac{1}{2} - u = \left(x + \frac{1}{2}\right) - (u+x)$, on obtient :

$$F(x) + xF'(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)F(x) - K$$

ou encore

$$xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K$$

5 L'application G est dérivable sur I en tant que produit de fonctions dérivables sur I . De plus, pour tout $x \in I$,

$$G'(x) = \frac{e^{-x}F(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{-x}F(x) + \sqrt{x}e^{-x}F'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left(xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x)\right) = -K \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Les applications G et $x \mapsto -K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ sont toutes deux dérivables sur I et leurs dérivées sont égales : elles diffèrent donc d'une constante. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

6 Comme $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ converge, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = K$$

Puisque $u+x \geq x$ pour tout $(x, u) \in I^2$,

$$\forall x \in I, 0 \leq F(x) \leq \frac{K}{x}$$

On en déduit notamment que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$. En passant à la limite dans l'égalité $G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$, on obtient $C = K^2$.

Par ailleurs, en effectuant le changement de variable $u = xt^2$, on obtient

$$\forall x \in I, F(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1} dt$$

puis

$$\forall x \in I, G(x) = 2e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1} dt$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1}$$

De plus, pour tout $(x, t) \in I^2$,

$$\left| \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur I . Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \pi$. En passant à la limite dans l'égalité $G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$, on obtient $C = \pi$.

Ainsi $C = K^2 = \pi$ donc $K = \sqrt{\pi}$ car K est manifestement positive.

7 Les séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n \geq 0} \sqrt{n} x^n$ ont pour rayon de convergence 1 d'après la règle de d'Alembert. Leurs sommes respectives \tilde{f} et \tilde{g} sont donc continues sur $] -1, 1[$. Enfin, $\varphi : x \mapsto e^{-x}$ est également continue sur I à valeurs dans $]0, 1[$ donc $f = \tilde{f} \circ \varphi$ et $g = \tilde{g} \circ \varphi$ sont continues (et donc définies) sur I .

8 La fonction $u \mapsto \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ est clairement décroissante sur I . Ainsi, par comparaison série/intégrale,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$$

En effectuant le changement de variable $t = ux$ dans chacune des deux intégrales, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Par conséquent,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

9 Posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout entier $n \geq 2$,

$$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Or

$$\begin{aligned} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} &= \sqrt{n} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$S_n - S_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

puis que la série télescopique $\sum S_n - S_{n-1}$ converge et enfin que la suite (S_n) converge.

10 Soit $x > 0$. La série de l'énoncé est le produit de Cauchy des deux séries *absolument convergentes* $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-nx}$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} e^{-(n-k)x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-nx}$$

On en déduit donc que

$$h(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \right) = \frac{f(x)}{1 - e^{-x}}$$

puisque la deuxième somme est la somme d'une série géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$.

11 On a montré que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ et on sait que $1 - e^{-x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$ donc $h(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$.

On a alors $h(x) - 2g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n e^{-nx}$ pour tout $x \in I$ et la suite (S_n) est convergente donc bornée donc il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x \in I, |h(x) - 2g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |S_n| e^{-nx} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M e^{-nx} = \frac{M e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

Comme $e^{-x} - e^{-x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$,

$$h(x) - 2g(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

A fortiori,

$$h(x) - 2g(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Or $h(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ donc

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

ou encore

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$$

12 Si A est fini, on a clairement $A = \mathbb{R}_+$.

Supposons A infini. En particulier, A n'est pas vide. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_N = 1$. On pose alors $\varphi(0) = N$. Supposons avoir prouvé l'existence d'entiers naturels $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ tels que $\varphi(0) < \dots < \varphi(n)$ et $\varphi(k) \in A$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Comme A est infini, $A \subsetneq \llbracket 0, \varphi(n) \rrbracket$. Il existe donc un entier $N \in A$ tel que $N > \varphi(n)$. On pose alors $\varphi(n+1) = N$. On prouve donc par récurrence l'existence d'une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ strictement croissante. Il suffit alors de poser $b_n = a_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La série $\sum a_n$ diverge grossièrement puisque (a_n) possède une suite extraite (b_n) ne convergeant pas vers 0 et donc (a_n) ne converge pas non plus vers 0. Si $x > 0$, $a_n e^{-nx} = \mathcal{O}(e^{-nx})$ est la série $\sum e^{-nx}$ est une série géométrique convergente à termes positifs de sorte que $\sum a_n e^{-nx}$ converge. Finalement, $I_A = \mathbb{R}_+^*$.

13 Soit $x > 0$. Remarquons que $\text{card}(A(n)) = \sum_{k=0}^n a_k$. Ainsi la série $\sum_{n \geq 0} \text{card}(A(n)) e^{-nx}$ est le produit de Cauchy des séries absolument convergentes (car à termes positifs et convergentes) $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-nx}$ et $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$. Notamment la série $\sum_{n \geq 0} \text{card}(A(n)) e^{-nx}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{card}(A(n)) e^{-nx} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \right) = \frac{f_A(x)}{1 - e^{-x}}$$

14 L'application $\Psi : \begin{cases} \llbracket 1, \lfloor \sqrt{n} \rfloor \rrbracket & \longrightarrow & A_1(n) \\ k & \longmapsto & k^2 \end{cases}$ est bien définie. De plus, Ψ est injective car strictement croissante.

Enfin, si on se donne $m \in A_1(n)$, alors il existe un entier naturel k non nul tel que $m = k^2$. Mais alors $1 \leq k^2 \leq n$ puis $1 \leq k \leq \sqrt{n}$ et enfin $1 \leq k \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ car k est entier. Ainsi l'application Ψ est surjective. Finalement Ψ est bijective et on en déduit notamment que $\text{card}(A_1(n)) = \text{card} \llbracket 1, \lfloor \sqrt{n} \rfloor \rrbracket = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

D'après la question précédente,

$$\forall x > 0, \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx}$$

Puisque $0 \leq \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq 1$,

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$$

ou encore

$$0 \leq g(x) - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

Comme $\frac{1}{1 - e^{-x}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$, on a donc

$$g(x) - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

A fortiori,

$$g(x) - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Or on a vu qu $g(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ ou encore $g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ donc

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

ou encore

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$$

Puisque $1 - e^{-x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$,

$$f_{A_1}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

Ensuite, $xf_{A_1}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\pi x}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf_{A_1}(x) = 0$. Ainsi $A_1 \in S$ et $\Phi(A_1) = 0$.

15 Soit $x > 0$. Remarquons que

$$v(n) = \text{card}\{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p^2 + q^2 = n\} = \text{card}\{(k, n-k), (k, n-k) \in A_1^2\} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$$

car $a_k a_{n-k} = 1$ si $(k, n-k) \in A_1^2$ et $a_k a_{n-k} = 0$ sinon. On en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} v(n)e^{-nx}$ est le produit de Cauchy de la série absolument convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{-nx}$ par elle-même. Par conséquent, cette série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = f_{A_1}(x)^2$$

De plus, si $n \notin A_2$, $a_n = v(n) = 0$ et si $n \in A_2$, $a_n = 1 \leq v(n)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq v(n)$. On en déduit que

$$f_{A_2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = f_{A_1}(x)^2$$

Par conséquent

$$xf_{A_2}(x) \leq xf_{A_1}(x)^2$$

On a admis que $A_2 \in S$ donc $x \mapsto xf_{A_2}(x)$ admet une limite $\Phi(A_2)$ en 0^+ . On sait également que $f_{A_1}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ donc

$\lim_{x \rightarrow 0^+} xf_{A_1}(x)^2 = \frac{\pi}{4}$. Par passage à la limite, on obtient

$$\Phi(A_2) \leq \frac{\pi}{4}$$

16 Soient $x > 0$ et $\psi \in E$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx})| \leq \alpha_n e^{-nx} \|\psi\|_\infty$$

Comme $\sum \alpha_n e^{-nx}$ converge par hypothèse, $\sum \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx})$ converge absolument et $L(\psi)(x)$ existe. Ainsi $L(\psi)$ est bien définie.

Par linéarité de la somme, L est bien linéaire. De plus, si $\psi_1 \leq \psi_2$, alors $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$ par croissance de la somme.

17 La fonction nulle appartient à E_1 puisque son image par L est nulle par linéarité de L . Si on se donne $(\psi_1, \psi_2) \in E_1^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $x > 0$, $xL(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)(x) = \lambda_1 xL(\psi_1)(x) + \lambda_2 xL(\psi_2)(x)$ par linéarité de L . De plus, $x \mapsto xL(\psi_1)(x)$ et $x \mapsto xL(\psi_2)(x)$ admettent toutes deux des limites en 0^+ . Par conséquent, $x \mapsto xL(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)(x)$ admet également une limite en 0^+ i.e. $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 \in E_1$. E_1 est donc un sous-espace vectoriel de E .

De plus, on a également

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)(x) = \lambda_1 \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(\psi_1)(x) + \lambda_2 \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(\psi_2)(x)$$

ce qui prouve que Δ est une forme linéaire.

Enfin, pour tout $\psi \in E_1$, on obtient par inégalité triangulaire :

$$|xL(\psi)(x)| \leq x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \|\psi\|_\infty$$

puis, par passage à la limite,

$$|\Delta(\psi)| \leq \ell \|\psi\|_\infty$$

Donc Δ est continue par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

18 Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$,

$$L(e_p)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} e^{-npx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x}$$

Comme $(p+1)x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} (p+1)x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x} = \ell$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(e_p)(x) = \frac{\ell}{p+1}$$

On en déduit que $e_p \in E_1$ et que $\Delta(e_p) = \frac{\ell}{p+1} = \ell \int_0^1 e_p(t) dt$. Notons E_2 l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$. Par linéarité de Δ et de l'intégrale, on en déduit que

$$E_2 \subset E_1 \text{ et } \forall P \in \mathbb{R}[X], \Delta(P) = \ell \int_0^1 P(t) dt$$

Montrons ensuite que E_1 est fermé. Soit $(\psi_n) \in (E_1)^\mathbb{N}$ convergeant uniformément vers $\varphi \in E$. Par inégalité triangulaire,

$$\forall x > 0, |xL(\psi)(x) - xL(\psi_n)(x)| \leq xL(e_0)(x) \|\psi - \psi_n\|_\infty$$

Comme $x \mapsto xL(e_0)(x)$ admet une limite en 0^+ , cette fonction est bornée au voisinage de 0^+ . On en déduit que la suite $(x \mapsto xL(\psi_n)(x))$ converge uniformément vers $x \mapsto xL(\varphi)(x)$ sur un voisinage de 0^+ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x \mapsto xL(\psi_n)(x)$ possède une limite en 0_+ donc $x \mapsto xL(\psi)(x)$ également i.e. $\psi \in E_1$. E_1 est donc fermé par caractérisation séquentielle.

On en déduit que $\overline{E_2} \subset \overline{E_1} = E_1$. D'après le théorème de Weierstrass, $E_0 \subset \overline{E_2}$ et donc $E_0 \subset E_1$. Soit $\psi \in E_0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers ψ sur le segment $[0, 1]$. Par continuité de Δ sur E_1 ,

$$\Delta(\psi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta(P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell \int_0^1 P_n(t) dt = \ell \int_0^1 \psi(t) dt$$

par théorème d'interversion limite/intégrale.

19 On vérifie que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (a-\varepsilon)^-} g_-(x) &= \lim_{x \rightarrow (a-\varepsilon)^+} g_-(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow a^-} g_-(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} g_-(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a^-} g_+(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} g_+(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (a+\varepsilon)^-} g_-(x) &= \lim_{x \rightarrow (a+\varepsilon)^+} g_-(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi g_- et g_+ sont continues sur $[0, 1]$ et appartiennent à E_0 . D'après la question précédente,

$$\Delta(g_-) = \ell \int_0^1 g_-(t) dt = \ell \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{et} \quad \Delta(g_+) = \ell \int_0^1 g_+(t) dt = \ell \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

De plus, $g_- \leq \mathbb{1}_{[0,a]} \leq g_+$ donc pour tout $x > 0$,

$$xL(g_-)(x) \leq xL(\mathbb{1}_{[0,a]})(x) \leq xL(g_+)(x)$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(g_-)(x) = \Delta(g_-) = \ell \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(g_+)(x) = \Delta(g_+) = \ell \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ donc on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]0, \alpha], \ell(a - \varepsilon) \leq xL(g_-)(x) \leq xL(\mathbb{1}_{[0,a]})(x) \leq xL(g_+)(x) \leq \ell(a + \varepsilon)$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(\mathbb{1}_{[0,a]})(x) = \ell a$. Donc $\mathbb{1}_{[0,a]} \in E_1$ et

$$\Delta(\mathbb{1}_{[0,a]}) = \ell a = \ell \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,a]}(t) dt$$

On peut alors montrer que toute fonction en escalier sur $[0, 1]$ est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{[0,a]}$ et la linéarité de Δ et de l'intégrale montre alors que pour toute fonction en escalier f , $f \in E_1$ et

$$\Delta(f) = \ell \int_0^1 f(t) dt$$

En notant E_3 l'ensemble des fonctions en escalier sur $[0, 1]$, on a donc $E_3 \subset E_1$ puis $\overline{E_3} \subset \overline{E_1} = E_1$ car E_1 est fermé. On sait de plus que toute fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[0, 1]$, c'est-à-dire que $\overline{E_3} = E$. On en déduit que $E = E_1$. Soit alors $f \in E$ et (f_n) une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[0, 1]$. Par continuité de Δ sur $E = E_1$,

$$\Delta(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$$

par théorème d'interversion limite/intégrale.

REMARQUE. A priori, le théorème d'interversion est valide pour les suites de fonctions *continues* (et non continues par morceaux) convergeant uniformément sur un segment. Mais il est clair que

$$\left| \int_0^1 f_n(t) dt - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \leq \|f_n - f\|_\infty$$

de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$$

20 Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n/N} \psi(e^{-n/N})$$

Mais $\psi(e^{-n/N}) = 0$ pour $n > N$ et $\psi(e^{-n/N}) = e^{n/N}$ si $n \leq N$ donc

$$L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^N \alpha_n$$

Comme $\psi \in E_1$, d'après la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x L(\psi)(x) = \ell \int_0^1 \psi(t) dt = \ell$$

Notamment,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right) = \ell$$

ou encore

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \alpha_n = \ell$$

21 Soit $A \in S$. Alors $x \mapsto x f_A(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$ admet une limite $\Phi(A)$ en 0^+ . On peut donc appliquer la question précédente avec $\alpha_n = a_n$ et $\ell = \Phi(A)$. Ainsi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N a_n = \Phi(A)$$

ou encore

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{card}(A(N)) = \Phi(A)$$

On a vu précédemment que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = f_{A_1}(x)^2$$

et que $f_{A_1}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = \frac{\pi}{4}$$

On peut donc appliquer la question précédente avec $\alpha_n = v(n)$ et $\ell = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N v(n) = \frac{\pi}{4}$$