Semaine du 29/09

1 Cours

Espaces vectoriels normés

Normes Définition. Rappel sur les normes euclidiennes. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des applications bornées sur un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, \mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, \mathrm{d}t} \qquad \|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f|$$

Distance associée à une norme. Boules et sphères. Définition de la convexité d'une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Convexité des boules. Equivalence de normes. Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Partie bornée, application bornée. Produit d'espaces vectoriels normés : norme produit.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une application est une norme, on peut essayer de l'exprimer à l'aide d'une norme connue.
- Calculer une norme uniforme d'une suite ou d'une fonction par une étude de cette suite ou de cette fonction.
- Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on exhibe une suite u tel que $\dfrac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)}$ tende vers 0 ou $+\infty$.

3 Questions de cours

Normes sur $\mathbb{K}^n$ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \qquad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

Pour chaque inégalité, donner un vecteur x non nul pour lequel il y a égalité.

Normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$,

$$\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty \qquad \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty \qquad \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$$

Pour chaque inégalité, donner une fonction f non nulle pour laquelle il y a égalité.
Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes entre elles.

Distance à une partie Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$. On pose $d(x,\mathrm{A}) = \inf_{a\in\mathrm{A}} \|x-a\|$ pour $x \in \mathrm{E}$.
Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ |d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A})| \leq \|x-y\|$$

Convexité des boules Montrer qu'une boule fermée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est convexe.

Norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ On rappelle qu'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ en posant $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$. Déterminer une expression de $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$ en fonction des coefficients de A et B.
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Déterminer une expression de $\|\mathrm{A}\|$ en fonction des coefficients de A.