

# DEVOIR SURVEILLÉ N°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 – Mines 2016 MP Maths 2 – Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata

Dans tout le problème,  $I$  désigne l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

### I Une intégrale à paramètre

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u(u+x)}} du \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

- 1 Montrer que la fonction  $\psi : u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$  est intégrable sur  $I$ .
- 2 Déterminer les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $F(x)$  est définie.
- 3 Montrer que la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et exprimer  $F'(x)$  sous la forme d'une intégrale.
- 4 En déduire que pour tout  $x \in I$ ,  $xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K$ .
- 5 Pour tout  $x \in I$ , on pose  $G(x) = \sqrt{x}e^{-x}F(x)$ . Montrer qu'il existe une constante réelle  $C$  telle que pour tout  $x \in I$ ,  $G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ .
- 6 Déterminer les limites de  $G$  en 0 et  $+\infty$  et en déduire la valeur de  $K$ .

### II Etude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$  et  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$ .

- 7 Montrer que  $f$  et  $g$  sont définies et continues sur  $I$ .
- 8 Montrer que pour tout  $x \in I$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$ . En déduire un équivalent de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

- 9** Montrer que la suite  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n \geq 1}$  converge.
- 10** Démontrer que pour tout  $x > 0$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nx}$  converge et exprimer sa somme  $h(x)$  en fonction de  $f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{I}$ .
- 11** En déduire un équivalent de  $h(x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Montrer alors que  $g(x)$  est équivalent à  $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

### III Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

A tout ensemble  $A \subset \mathbb{N}$ , on associe la suite  $(a_n)$  définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $I_A$  l'ensemble des réels  $x \geq 0$  pour lesquels la série  $\sum a_n e^{-nx}$  converge. On pose  $f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$  pour tout  $x \in I_A$ . Enfin, sous réserve d'existence, on pose  $\Phi(A) = \lim_{x \rightarrow 0} x f_A(x)$  et on note  $S$  l'ensemble des parties  $A \subset \mathbb{N}$  pour lesquelles  $\Phi(A)$  existe.

- 12** Quel est l'ensemble  $I_A$  si  $A$  est fini ? Si  $A$  est infini, montrer que l'on peut extraire une suite  $(b_n)$  de la suite  $(a_n)$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n = 1$ . Déterminer  $I_A$  dans ce cas.
- 13** Soit  $A \in S$  et  $(a_n)$  la suite associée. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A(n)$  l'ensemble des éléments de  $A$  inférieurs ou égaux à  $n$ . Vérifier que pour tout  $x > 0$ , la série  $\sum_{n \geq 0} \text{card}(A(n)) e^{-nx}$  converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{card}(A(n)) e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1 - e^{-x}}$$

Dans la question suivante,  $A = A_1$  désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

- 14** Montrer que si  $x > 0$ ,  $\frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx}$  où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière.
- En déduire un encadrement de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}}$  puis un équivalent de  $f_{A_1}$  en 0. Prouver que  $A_1 \in S$  et donner  $\Phi(A_1)$ .

Dans la question suivante,  $A = A_2$  désigne l'ensemble constitué des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que  $A_2 \in S$  et on désire majorer  $\Phi(A_2)$ . Soit  $v(n)$  le nombre de couples d'entiers naturels non nuls  $(p, q)$  pour lesquels  $n = p^2 + q^2$ .

- 15** Montrer que pour tout réel  $x > 0$ , la série  $\sum_{n \geq 0} v(n) e^{-nx}$  converge et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = f_{A_1}(x)^2$$

Montrer alors que pour tout  $x > 0$ ,  $f_{A_2}(x) \leq f_{A_1}(x)^2$ . En déduire un majorant de  $\Phi(A_2)$ .

## IV Un théorème taubérien

Soit  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels positifs tels que, pour tout réel  $x > 0$ , la série  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n e^{-nx}$  converge.

On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} = \ell \in [0, +\infty[$$

On note  $F$  l'espace vectoriel des fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $E$  le sous-espace de  $F$  des fonctions continues par morceaux et  $E_0$  le sous-espace de  $E$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$ . On munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par la formule  $\|\psi\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\psi(t)|$ .

Si  $\psi \in E$ , on note  $L(\psi)$  l'application qui à  $x > 0$  associe

$$L(\psi)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx})$$

- 16** Montrer que  $L(\psi)$  est bien définie pour tout  $\psi \in E$  et que  $L$  est linéaire. Vérifier que pour tout  $(\psi_1, \psi_2) \in E^2$ ,  $\psi_1 \leq \psi_2$  entraîne  $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$ .

On note  $E_1$  l'ensemble des  $\psi \in E$  pour lesquels  $\lim_{x \rightarrow 0} xL(\psi)(x)$  existe et, si  $\psi \in E_1$ , on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x \rightarrow 0} xL(\psi)(x)$$

- 17** Vérifier que  $E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que l'application  $\Delta$  est une forme linéaire continue sur  $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$ .
- 18** Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $e_p : t \in [0, 1] \mapsto t^p$  appartient à  $E_1$  et calculer  $\Delta(e_p)$ . En déduire que  $E_0 \subset E_1$  et calculer  $\Delta(\psi)$  pour tout  $\psi \in E_0$ .

Pour tout  $(a, b) \in [0, 1]^2$  tel que  $a < b$ , on note  $\mathbb{1}_{[a, b]} : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$  la fonction définie par

$$\mathbb{1}_{[a, b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $a \in ]0, 1[$  et  $\varepsilon \in ]0, \min(a, 1 - a)[$ . On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a - \varepsilon] \\ \frac{a - x}{\varepsilon} & \text{si } x \in ]a - \varepsilon, a[ \\ 0 & \text{si } x \in [a, 1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{a + \varepsilon - x}{\varepsilon} & \text{si } x \in ]a, a + \varepsilon[ \\ 0 & \text{si } x \in [a + \varepsilon, 1] \end{cases}$$

- 19** Vérifier que  $g_-$  et  $g_+$  appartiennent à  $E_0$  et calculer  $\Delta(g_-)$  et  $\Delta(g_+)$ . Montrer que  $\mathbb{1}_{[0, a]} \in E_1$  et calculer  $\Delta(\mathbb{1}_{[0, a]})$ . En déduire que  $E_1 = E$  et donner  $\Delta(\psi)$  pour tout  $\psi \in E$ .

On considère maintenant la fonction  $\psi$  définie sur  $[0, 1]$  par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{e}\right[ \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] \end{cases}$$

**20** *Théorème taubérien.* Calculer  $L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right)$  pour tout entier  $N > 0$  et en déduire la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \alpha_k$$

On rappelle que  $v(n)$  est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls  $(p, q)$  tels que  $n = p^2 + q^2$ .

**21** Si  $A \in S$ , que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card}(A(n))$ ? Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v(k)$ .