Devoir à la maison n°14

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – CCINP Maths 1 MP 2015

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a, b]$: si f est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

I Exemples et contre-exemples

1 Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par : $\forall x \in]0,1],\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0,1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

2 Soit N entier naturel non nul, on note $\mathcal{R}_\mathrm{N}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[a, b]$, de degré inférieur ou égal à N. Justifier que $\mathcal{R}_\mathrm{N}$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.
Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

3 Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.
Soit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ ainsi :

$$\forall \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sup_{x \in [-2,-1]} |\mathrm{P}(x)| \text{ et } \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \sup_{x \in [1,2]} |\mathrm{P}(x)|$$

3.a Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On admettra que N_2 en est également une.

3.b On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2, 2]$ ainsi :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-2,-1] \\ 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ x^3 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2, 2]$.
Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni de la norme N_2.

II Application : un théorème des moments

4 f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout entier naturel k, $\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

> **Remarque.** $\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x$ est le moment d'ordre k de f sur $[a,b]$.

4.a Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\int_a^b \mathrm{P}(x)f(x)\,\mathrm{d}x$?

4.b Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle.

5 **Application.**
Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple (f,g) d'éléments de E par $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a,b]$ et l'orthogonal de F. Déterminer $\mathrm{F}^\perp$. A-t-on $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$?

6 **6.a** Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$. Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre I_{n+1} et I_n et démontrer que, pour tout n non nul, $\mathrm{I}_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

6.b En déduire que, pour tout entier naturel k, $\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3 \sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

6.c Proposer une fonction f continue sur $[0,+\infty[$, non nulle et vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} u^k f(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

6.d Expliquer pourquoi la fonction proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $[0,+\infty[$ par une suite de polynômes.

III Exemple via un théorème de Dini

7 **Question préliminaire.**
Soit $x \in [0,1]$, on note $\mathrm{I} =]-\infty, \sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence valable pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left(x - (u_n)^2\right) = g_x(u_n)$$

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer, en fonction du réel x, sa limite.

8 Proposer un exemple de suite (f_n) de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement mais non uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f qui est continue. Il sera possible de s'appuyer sur une représentation graphique sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on pourra admettre le résultat suivant. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f elle même continue sur $[a,b]$. Si la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire : pour tout entier naturel n et pour tout $t \in [a,b]$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

9 **Application.**
Soit (P_n) la suite de fonctions polynômes définie par :

$$P_0(x) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right)$$

9.a Justifier que la suite (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

9.b Démontrer que la suite (P_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

IV Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0, 1]$.

Dans toute cette partie, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0, 1]$.

On pose : $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

10 S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

10.a Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(|Sn - nx| > n\alpha) \leq \dfrac{1}{4n\alpha^2}$.

10.b Soit la variable aléatoire $f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)$$

11 **11.a** Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (a, b) \in [0, 1]^2,\ |a - b| \leq \alpha \implies |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$$

puis majorer $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$.

11.b Justifier que

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbb{P}(S_n = k)\right| \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$$

11.c Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout réel $x \in [0, 1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$, puis conclure.