DEVOIR SURVEILLÉ N°15

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 On pose $\varphi(x,t) = e^{-t(1-itx)}$. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\varphi(x,t)| = \left|e^{-t} \cdot e^{it^2x}\right| = e^{-t}$$

Comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, f est vbien définie sur $\mathbb{R}$.

2 Quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^p e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $t^p e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} e^{-t/2}$. Or $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto t^p e^{-t}$ également. Ainsi Γ_p est bien définie.
Par intégration par parties

$$\Gamma_{p+1} = -\left[t^{p+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + (p+1)\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Le crochet est nul par croissances comparées donc $\Gamma_p = (p+1)\Gamma_p$.

3 Comme $\Gamma_0 = 1$, on montre par récurrence que $\Gamma_p = p!$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ (rédiger la récurrence).

4 On applique un théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = (it^2)^p\varphi(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t)\right| = t^{2p}e^{-t}$$

  et on a vu que $t \mapsto t^{2p}e^{-t}$ était intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t(1-itx)}\,\mathrm{d}t$$

5 Notamment, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = i^p\Gamma_{2p} = (2p)!i^p$. En posant $a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$, on a donc

$$\frac{|a_{p+1}|}{|a_p|} = \frac{(2p+2)!}{(p+1)!}\cdot\frac{p!}{(2p)!} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_p x^p$ est donc nul en vertu de la règle de d'Alembert.
On sait que si f est développable en série entière, alors elle est la somme de sa série de Taylor sur son intervalle ouvert de convergence (non vide). Ce n'est pas le cas d'après ce qui précède. Ainsi f n'est pas développable en série entière.

6 Posons $f_k : x \mapsto e^{-k(1-ikx)}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Fixons $p \in \mathbb{N}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p e^{-k(1-ikx)}$$

donc $\|f_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p}e^{-k}$. Par croissance comparée, $k^{2p}e^{-k} \underset{k\to+\infty}{=} o(1/k^2)$. Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série à termes positifs convergente, $\sum \|f_k^{(p)}\|_\infty$ converge i.e. $\sum f_k^{(p)}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}e^{-k}e^{ik^2x}$$

7 Notamment, $g^{(p)}(0) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}e^{-k}$. Comme les termes de la somme sont positifs,

$$|g^{(p)}(0)| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}e^{-k} \geq p^{2p}e^{-p}$$

puisque la somme est supérieure à chacun de ses termes et notamment à celui d'indice p.

8 D'après la question précédente,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \left|\frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right| \geq \frac{p^{2p}e^{-p}}{p!}$$

Posons $a_p = \dfrac{p^{2p}e^{-p}}{p!}$. Alors

$$\frac{|a_{p+1}|}{|a_p|} = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{2p} e^{-1}(p+1) \geq (p+1)e^{-1}$$

On en déduit que $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{|a_{p+1}|}{|a_p|} = +\infty$. En vertu de la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entiere $\sum a_p x^p$ est nul. Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{p\geq0} \dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$ est nul également.
A nouveau, si g était développable en série entière, alors elle serait la somme de sa série de Taylor sur son intervalle ouvert de convergence (non vide). Ce n'est pas le cas d'après ce qui précède. Ainsi g n'est pas développable en série entière.

9 On vérifie que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

10 Récurrence laissée au lecteur.

11 D'après les deux questions précédentes,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}}\right) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \cdot \frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(1+x^2)^{p+1}}$$

12 Soient $p \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire,

$$\left|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}\right| \leq |x+i|^{p+1} + |x-i|^{p+1} = 2(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}$$

D'après la question précédente

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leq \frac{p!}{2(1+x^2)^{p+1}} \cdot 2(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}} = \frac{p!}{(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $1 + x^2 \geq x^2 > 0$ donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}$$

13 Remarquons que $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_\alpha^{(p)}(x) = \alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x)$$

D'après la question précédente,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ |\alpha| \cdot \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leq \frac{|\alpha|^{p+1} p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}$$

14 Posons $q_n : x \mapsto x^n$. Ainsi $u_n = a_n q_n \psi_{\alpha_n}$. D'après la formule de Leibniz (valide car q_n et ψ_{α_n} sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$),

$$\forall p \leq n\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} q_n^{(k)}(x) \psi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$$

15 Si $p \in\leq [\![0, n-1]\!]$, $n-k > 0$ pour tout $k \in [\![0, p]\!]$. En évaluant l'égalité précédente en $x = 0$, on obtient donc bien $u_n^{(p)}(0) = 0$.
Pour les mêmes raisons,

$$u_n^{(n)}(0) = a_n \binom{n}{n} n! \varphi_{\alpha_n}^{(0)}(0) = n! a_n \varphi_{\alpha_n}(0) = n! a_n$$

16 Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n-1]\!]$.Par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq |a_n| \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} |\alpha_n| \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right|$$

puis en utilisant la question **13**,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}} = \frac{p!|x|n-p+1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}$$

Or $0 \leq p \leq n-1$ donc

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{2^n p! |x| n - p + 1}{\sqrt{n!}}$$

Les deux membres de l'inégalité définissant des fonctions continues de $\mathbb{R}$, l'inégalité est encore valide pour $x = 0$ (on peut aussi invoquer le fait que les deux membres de l'inégalité sont nuls pour $x = 0$ en vertu de la question précédente).

17 Fixons $p \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. D'après la question précédente,

$$\forall n \geq p+1,\ \left\|u_n^{(p)}\right\|_{\infty,[-a,a]} \leq \frac{2^n p! |a|^{n-p+1}}{\sqrt{n!}}$$

Posons $k_n = \dfrac{2^n p! |a|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}$. Alors

$$\frac{|k_{n+1}|}{|k_n|} = \frac{2|a|}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi $\sum k_n$ converge en vertu de la règle de d'Alembert. On en déduit que $\sum\limits_{n \geq p+1} u_n^{(p)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a, a]$. Ainsi $\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\bigcup\limits_{a \in \mathbb{R}_+} [-a, a] = \mathbb{R}$. Comme $\sum\limits_{n=0}^{p} u_n$ est également de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme finie de telles fonctions, U est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.
Ceci étant valide pour tout $p \in \mathbb{N}$, U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

18 Il est clair que $u_n(0) = a_n\delta_{0,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\mathrm{U}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = a_0$$

De plus,

$$\mathrm{U}^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(0)$$

Or on a vu à la question **15** que $u_n^{(p)}(0) = 0$ pour $n > p$ et $u_p^{(p)}(0) = p!a_p$. Ainsi

$$\mathrm{U}^{(p)}(0) = p!a_p + \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0)$$

19 On définit une suite de réels (a_n) et une suite de fonctions (u_n) par récurrence. On pose $a_0 = b_0$ et $u_0 \colon x \mapsto \dfrac{a_0}{1+a_0^2x^2}$ puis, supposant $a_0, \dots, a_{p-1}$ et $u_0, \dots, u_{p-1}$ déjà construits, on pose

$$a_p = \frac{1}{p!}\left(b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0)\right)$$
$$u_p \colon x \mapsto \frac{a_px^p}{1+p!a_p^2x^2}$$

On pose ensuite $\mathrm{U} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. D'après les deux questions précédentes, U est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{U}(0) = a_0 = b_0$ puis, pour $p \geq 1$,

$$\mathrm{U}^{(p)}(0) = p!a_p + \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) = b_p$$

Problème 2

1 Il suffit de considérer la $i^{\text{ème}}$ ligne dans l'égalité $\lambda X = AX$.

2 D'après la question précédente,

$$\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j$$

Par inégalité triangulaire

$$|\lambda||x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}||x_j|$$

puis par définition de i_0,

$$|\lambda||x_{i_0}| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|$$

Or $x \neq 0$ donc $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty > 0$. On en déduit que

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$$

En notant $S_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$, on a donc

$$|\lambda| \leq S_{i_0} \leq \max_{1\leq i\leq n} S_i$$

ce qui est le résultat voulu.

3 $A_n(\alpha,\beta)$ est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectrale : toutes ses valeurs propres sont donc réelles.

4 Avec les notations de la question **2**, $S_1 = S_n = |\alpha| + |\beta|$ et $S_i = |\alpha| + 2|\beta|$ pour $i \in [\![2, n-1]\!]$. On en déduit avec cette même question que $|\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|$.

5 Soit λ une valeur propre de $A_n(0,1)$. D'après la question précédente, $\lambda \in [-2,2]$ i.e. $\lambda/2 \in [-1,1]$. Or cos est continue sur $[0,\pi]$, $\cos 0 = 1$ et $\cos\pi = -1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda/2 = \cos\theta$ i.e. $\lambda = 2\cos\theta$.

6 Soit un entier $n \geq 3$. En développant par rapport à la première ligne :

$$\chi_{A_n(0,1)} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & X & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_n = X\begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & X & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{n-1}$$

Le premier déterminant est $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$ tandis qu'en développant le second par rapport à sa première colonne, on obtient $-\chi_{A_{n-2}(0,1)}$. Ainsi

$$\chi_{A_n(0,1)} = X\chi_{A_{n-1}(0,1)} - \chi_{A_{n-2}(0,1)}$$

On en déduit que

$$\chi_{A_n(0,1)}(2X) = 2X\chi_{A_{n-1}(0,1)}(2X) - \chi_{A_{n-2}(0,1)}(2X)$$

ou encore

$$U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}$$

7 Soit $\theta \in]0,\pi[$. Il est clair que $\chi_{A_1(0,1)} = X$ donc $U_1 = 2X$ puis

$$\sin(\theta)U_1(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$$

donc

$$U_1(\cos(\theta)) = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}$$

De même, $\chi_{A_2}(0,1) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - 1$ donc $U_2 = 4X^2 - 1$ puis

$$\sin(\theta)U_2(\cos(\theta)) = 4\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) = \sin(2\theta+\theta) &= \sin(2\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(2\theta) \\ &= 2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + \sin(\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) \\ &= 4\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta) = \sin(\theta)U_2(\cos(\theta))\end{aligned}$$

Ainsi

$$U_2(\cos(\theta)) = \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}$$

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 3$ tel que

$$U_{n-1}(\cos(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \qquad \text{et} \qquad U_{n-2}(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Alors

$$\begin{aligned}\sin(\theta)U_n(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\sin(\theta)U_{n-1}(\cos(\theta)) - \sin(\theta)U_{n-2}(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta) \\ &= 2\cos(\theta)\sin(n\theta) - (\sin(n\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(n\theta)) \\ &= \cos(\theta)\sin(n\theta) + \sin(\theta)\cos(n\theta) \\ &= \sin((n+1)\theta)\end{aligned}$$

puis

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

On a donc montré par récurrence double que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

8 D'après la question précédente,

$$\chi_{A_n(0,1)}\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right) = U_n\left(\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right) = \frac{\sin(j\pi)}{\sin\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} = 0$$

On en déduit que

$$\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right),\ j \in [\![1,n]\!]\right\} \subset \mathrm{Sp}(A_n(0,1))$$

Par ailleurs, $\frac{j\pi}{n+1} \in]0,\pi[$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ et cos est strictement décroissante sur $]0,\pi[$ donc les $\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$ sont deux à deux distincts. Comme $A_n(0,1)$ possède au plus n valeurs propres, on a donc

$$\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right),\ j \in [\![1,n]\!]\right\} = \mathrm{Sp}(A_n(0,1))$$

9 Il suffit de regarder les différentes lignes de l'égalité $A_n(0,1)x - 2\cos(\theta_j)x = 0$.

10 Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 est

$$X^2 - 2\cos(\theta_j)X + 1 = \left(X - e^{i\theta_j}\right)\left(X - e^{-i\theta_j}\right)$$

Puisque $\theta_j \in]0,\pi[$, les deux racines de ce polynôme sont distinctes. On sait de plus que

$$E = \mathrm{vect}\left((\cos(k\theta_j))_{k\in\mathbb{N}}, (\sin(k\theta_j))_{k\in\mathbb{N}}\right)$$

On en déduit que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

11 Soit $u \in \mathrm{E}$ telle que $u_0 = u_{n+1} = 0$. Il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \mathrm{A}\cos(k\theta_j) + \mathrm{B}\sin(k\theta_j)$$

La condition $u_0 = 0$ donc $\mathrm{A} = 0$.
Réciproquement, si $u_k = \mathrm{B}\sin(k\theta_j)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors $u \in \mathrm{E}$, $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sin(j\pi) = 0$.
L'ensemble recherché est donc $\operatorname{vect}\big((\sin(k\theta_j))_{k\in\mathbb{N}}\big)$.

12 Quitte à poser $x_0 = x_{n+1} = 0$, la question **9** donne

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0$$

Ainsi $x_0, \dots, x_{n+1}$ sont les $n+2$ premiers termes d'une des suites déterminées à la question précédente. Il existe donc $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = \mathrm{B}\sin(k\theta_j)$$

Ainsi, en posant $u_j = \begin{pmatrix} \sin(\theta_j) \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{E}_{2\cos(\theta_j)}(\mathrm{A}_n(0,1)) \subset \operatorname{vect}(u)$$

Comme un sous-espace propre n'est jamais nul, on a en fait

$$\mathrm{E}_{2\cos(\theta_j)}(\mathrm{A}_n(0,1)) = \operatorname{vect}(u)$$

13 Si $\beta = 0$, alors $\mathrm{A}_n(\alpha, 0) = \alpha\mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n(\alpha, 0)) = \{\alpha\}$ et $\mathrm{E}_\alpha(\mathrm{A}_n(\alpha, 0)) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Si $\beta \neq 0$, on remarque que $\mathrm{A}_n(\alpha, \beta) = \alpha\mathrm{I}_n + \beta\mathrm{A}_n(0, 1)$. On en déduit donc que

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n(\alpha, \beta)) = \left\{\alpha + 2\beta\cos\theta_j,\ j \in [\![1, n]\!]\right\}$$

et que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{E}_{\alpha+2\beta\cos\theta_j}(\mathrm{A}_n(\alpha, \beta)) = \operatorname{vect}(u_j)$$

14 Un calcul par blocs donne

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0_n \\ -\mathrm{C} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{AD} - \mathrm{BC} & \mathrm{B} \\ \mathrm{CD} - \mathrm{DC} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{AD} - \mathrm{BC} & \mathrm{B} \\ 0_n & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

car C et D commutent.

15 Supposons D inversible. D'après la question précédente et par propriété du déterminant :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{D} & 0_n \\ -\mathrm{C} & \mathrm{I}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{AD} - \mathrm{BC} & \mathrm{B} \\ 0_n & \mathrm{D} \end{vmatrix}$$

Or le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux donc

$$\begin{vmatrix} \mathrm{D} & 0_n \\ -\mathrm{C} & \mathrm{I}_n \end{vmatrix} = \det(\mathrm{D})\det(\mathrm{I}_n) = \det(\mathrm{D}) \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{AD} - \mathrm{BC} & \mathrm{B} \\ 0_n & \mathrm{D} \end{vmatrix} = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{BC})\det(\mathrm{D})$$

Ainsi

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{vmatrix} \cdot \det(\mathrm{D}) = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{BC})\det(\mathrm{D})$$

Mais comme D est inversible, $\det(\mathrm{D}) \neq 0$ de sorte que

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{vmatrix} = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{BC})$$

16 Remarquons que

$$\det\left(\mathrm{D}+\frac{1}{p}\mathrm{I}_n\right)=(-1)^n\det\left(-\mathrm{D}-\frac{1}{p}\mathrm{I}_n\right)=(-1)^n\chi_{\mathrm{D}}(-1/p)$$

Comme χ_{D} possède un nombre fini de racines, il existe un nombre fini de $p\in\mathbb{N}^*$ tels que $\chi_{\mathrm{D}}(-1/p)\neq 0$. On en déduit qu'il existe $p_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\chi_{\mathrm{D}}(-1/p)\neq 0$ pour tout $p\geq p_0$ i.e. $\mathrm{D}+\frac{1}{p}\mathrm{I}_n$ est inversible pour tout $p\geq p_0$.

17 Pour tout $p\geq p_0$, $\mathrm{D}+\frac{1}{p}\mathrm{I}_n$ est inversible donc on peut appliquer le résultat de la question **15** :

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{A}&\mathrm{B}\\\mathrm{C}&\mathrm{D}+\frac{1}{p}\mathrm{I}_n\end{pmatrix}\right)=\det\left(\mathrm{A}\left(\mathrm{D}+\frac{1}{p}\mathrm{I}_n\right)-\mathrm{BC}\right)$$

De plus

$$\begin{pmatrix}\mathrm{A}&\mathrm{B}\\\mathrm{C}&\mathrm{D}+\frac{1}{p}\mathrm{I}_n\end{pmatrix}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}\mathrm{A}&\mathrm{B}\\\mathrm{C}&\mathrm{D}\end{pmatrix}$$

Comme le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice, il est continu. Ainsi

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{A}&\mathrm{B}\\\mathrm{C}&\mathrm{D}+\frac{1}{p}\mathrm{I}_n\end{pmatrix}\right)\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{A}&\mathrm{B}\\\mathrm{C}&\mathrm{D}\end{pmatrix}\right)$$

Par continuité du produit matriciel

$$\mathrm{A}\left(\mathrm{D}+\frac{1}{p}\mathrm{I}_n\right)-\mathrm{BC}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{AD}-\mathrm{BC}$$

puis par continuité du déterminant

$$\det\left(\mathrm{A}\left(\mathrm{D}+\frac{1}{p}\mathrm{I}_n\right)-\mathrm{BC}\right)\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\det(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})$$

Par unicité de la limite

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{A}&\mathrm{B}\\\mathrm{C}&\mathrm{D}\end{pmatrix}\right)=\det(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})$$

18 Soit $\mu\in\mathbb{C}$. Alors

$$\chi_{\mathrm{N}}(\mu)=\begin{vmatrix}\mu\mathrm{I}_n&-\mathrm{I}_n\\-\mathrm{M}&\mu\mathrm{I}_n\end{vmatrix}$$

Comme $-\mathrm{M}$ et $\mu\mathrm{I}_n$ commutent, on peut appliquer le résultat de la question précédente :

$$\chi_{\mathrm{N}}(\mu)=\det(\mu^2\mathrm{I}_n-\mathrm{M})=\chi_{\mathrm{M}}(\mu^2)$$

Ainsi

$$\mu\in\mathrm{Sp}(\mathrm{N})\iff\chi_{\mathrm{N}}(\mu)=0\iff\chi_{\mathrm{M}}(\mu^2)=0\iff\mu^2\in\mathrm{Sp}(\mathrm{M})$$

On en déduit que

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{N})=\left\{\mu\in\mathbb{C},\ \mu^2\in\mathrm{Sp}(\mathrm{M})\right\}$$

19 Un calcul par blocs donne

$$\mathrm{N}\begin{pmatrix}x\\\mu x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu x\\\mathrm{M}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu x\\\mu^2 x\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}x\\\mu x\end{pmatrix}$$

De plus, $x\neq 0$ car x est un vecteur propre donc $\begin{pmatrix}x\\\mu x\end{pmatrix}\neq 0$. Ainsi $\begin{pmatrix}x\\\mu x\end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

20 Supposons M diagonalisable et inversible.

La question précédente montre que si $\mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{N})$, alors l'application $x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}$ est une application linéaire de $\mathrm{E}_{\mu^2}(\mathrm{M})$ dans $\mathrm{E}_\mu(\mathrm{N})$. Cette application est clairement injective (considérer le noyau). On en déduit que $\dim(\mathrm{E}_{\mu^2}(\mathrm{M})) \leq \dim(\mathrm{E}_\mu(\mathrm{N}))$. De plus, d'après la question **18**,

$$\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(\mathrm{N})} \dim \mathrm{E}_\mu(\mathrm{N}) = \sum_{\mu\in\mathbb{C},\ \mu^2\in\mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim \mathrm{E}_\mu(\mathrm{N})$$

On en déduit que

$$\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(\mathrm{N})} \dim \mathrm{E}_\mu(\mathrm{N}) \geq \sum_{\mu\in\mathbb{C},\ \mu^2\in\mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim \mathrm{E}_{\mu^2}(\mathrm{M})$$

Mais comme M est inversible les valeurs propres de M sont non nulles. Ainsi pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$, il existe exactement deux complexes $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $\mu^2 = \lambda$. On en déduit que

$$\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(\mathrm{N})} \dim \mathrm{E}_\mu(\mathrm{N}) \geq 2 \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M})$$

Or M est diagonalisable donc $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = n$ de sorte que

$$\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(\mathrm{N})} \dim \mathrm{E}_\mu(\mathrm{N}) \geq 2n$$

Mais comme $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$,

$$\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(\mathrm{N})} \dim \mathrm{E}_\mu(\mathrm{N}) \leq 2n$$

Finalement $\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(\mathrm{N})} \dim \mathrm{E}_\mu(\mathrm{N}) = 2n$ et N est diagonalisable.

A nouveau, $0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{\mu \in \mathbb{C},\ \mu^2 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})\}$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{N})$ et N est inversible.

21

$$\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ -2x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{X} = \mathrm{BX}$$

avec $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0_2 & \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{A}_2(-2,1) & 0_2 \end{pmatrix}$.

Le théorème de Cauchy linéaire stipule que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 4.

22 On a $\chi_{\mathrm{A}_2(0,1)} = \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 3 = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+3)$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_2(0,1)) = \{-1,-3\}$. La question **18** montre que $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) = \{i, -i, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$.

Comme $\mathrm{A}_2(0,1)$ est inversible et diagonalisable, B est également inversible et diagonalisable en vertu de la question **20** (on peut aussi remarquer que B possède 4 valeurs propres distinctes).

23 On vérifie que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $\mathrm{A}_2(-2,1)$ associés respectivement aux valeurs propres -3 et -1. D'après la question **19**, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de B associés respectivement aux valeurs propres $-i\sqrt{3}$, $i\sqrt{3}$, $-i$ et i. Ces quatre valeurs propres étant distinctes, la famille de ces vecteurs propres est libre : c'est donc une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. On peut donc poser

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} & -i & i \\ i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} & -i & i \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{24}}$ Le système $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$ équivaut à

$$\begin{cases} y_1' = -i\sqrt{3}y_1 \\ y_2' = i\sqrt{3}y_2 \\ y_3' = -iy_3 \\ y_4' = iy_4 \end{cases}$$

On en déduit que les solutions sont les fonctions

$$t \mapsto \begin{pmatrix} ae^{-i\sqrt{3}t} \\ be^{i\sqrt{3}t} \\ ce^{-it} \\ de^{it} \end{pmatrix},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$$

$\boxed{\textbf{25}}$ En posant $\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}$, le système $\mathrm{X}' = \mathrm{BX}$ équivaut à $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$. La question précédente montre alors que les solutions sont les fonctions

$$t \mapsto \mathrm{P}\begin{pmatrix} ae^{-i\sqrt{3}t} \\ be^{i\sqrt{3}t} \\ ce^{-it} \\ de^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-i\sqrt{3}t} + be^{i\sqrt{3}t} + ce^{-it} + de^{it} \\ -ae^{-i\sqrt{3}t} - be^{i\sqrt{3}t} + ce^{-it} + de^{it} \\ -ia\sqrt{3}e^{-i\sqrt{3}t} + ib\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} - ice^{-it} + ide^{it} \\ ia\sqrt{3}e^{-i\sqrt{3}t} - ib\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} - ice^{-it} + ide^{it} \end{pmatrix}$$

Il existe donc $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1(t) = ae^{-i\sqrt{3}t} + be^{i\sqrt{3}t} + ce^{-it} + de^{it} \\ x_2(t) = -ae^{-i\sqrt{3}t} - be^{i\sqrt{3}t} + ce^{-it} + de^{it} \\ x_1'(t) = -ia\sqrt{3}e^{-i\sqrt{3}t} + ib\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} - ice^{-it} + ide^{it} \\ x_2'(t) = ia\sqrt{3}e^{-i\sqrt{3}t} - ib\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} - ice^{-it} + ide^{it} \end{cases}$$

Les conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1,0,0,0)$ donnent

$$\begin{cases} a+b+c+d = 1 \\ -a-b+c+d = 0 \\ -ia\sqrt{3} + ib\sqrt{3} - ic + id = 0 \\ ia\sqrt{3} - ib\sqrt{3} - ic + id = 0 \end{cases}$$

En additionnant les deux premières lignes et les deux dernières lignes, on obtient $2c + 2d = 1$ et $-2ic + 2id = 0$ de sorte que $c = d = \dfrac{1}{4}$. En soustrayant les deux premières lignes et les deux dernières lignes, on obtient $2a + 2b = 1$ et $-2ia\sqrt{3} + 2ib\sqrt{3} = 0$ de sorte que $a = b = \dfrac{1}{4}$. Finalement

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t) + \dfrac{1}{2}\cos(t) \\ x_2(t) = -\dfrac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t) + \dfrac{1}{2}\cos(t) \end{cases}$$