

NOM :

Prénom :

Note :

1. Montrer que  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

*L'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$  est continue car  $\det(M)$  est polynomial en les coefficients de  $M$ .*

*Or  $GL_n(\mathbb{R})$  est l'image réciproque de l'ouvert  $\mathbb{R}^*$  par l'application continue  $\det$  donc  $GL_n(\mathbb{R})$  est ouvert.* ■

2. L'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$  admet-elle une limite en  $(0, 0)$  ? Justifier.

*D'une part,  $f(t, 0) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  et d'autre part,  $f(t, t) = \frac{1}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ . Comme  $(t, 0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$  et  $(t, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$ ,  $f$  n'admet pas de limite en  $(0, 0)$ .* ■

3. L'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$  admet-elle une limite en  $(0, 0)$  ? Justifier.

*Posons  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Alors*

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x^3 + y^3|}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{r^2} = r(|\cos \theta|^3 + |\sin \theta|^3) \leq 2r = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

*Comme  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ .* ■

4. On munit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme uniforme  $\| \cdot \|_\infty$ . Montrer que  $\varphi : f \in E \mapsto \int_0^1 f(x) \, dx$  est continue sur  $E$ .

Pour tout  $f \in E$ , on a

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 f(x) \, dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| \, dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \, dx = \|f\|_\infty$$

On en déduit que  $\varphi$  est continue sur  $E$  par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires. ■

5. On munit  $\mathbb{R}[X]$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$  définie par  $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \right\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ . Montrer que l'application  $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$  n'est pas continue.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\|X^k\|_\infty = 1$  et  $\|D(X^k)\|_\infty = \|kX^{k-1}\|_\infty = k$ . Ainsi  $\frac{\|D(X^k)\|_\infty}{\|X^k\|_\infty} = k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ . Comme  $D$  est linéaire, on en déduit que  $D$  n'est pas un endomorphisme continu de  $(\mathbb{R}[X], \| \cdot \|_\infty)$ . ■

6. Montrer que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par encadrement de la partie entière,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x - \frac{1}{n} < u_n \leq x$$

Par théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$ . On en déduit que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . ■