Devoir à la maison n°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Etude de la suite (v_n)

I.1 La suite (v_n) vérifie la relation : $v_0 > 0$, $v_1 > 0$ et $\forall n \geq 0$, $\sqrt{v_n}\sqrt{v_{n+1}}v_{n+2} = 1$.
Si elle converge vers une limite l finie ou infinie, alors $l \geq 0$ et par continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$, on a $l^2 = 1$.
$\boxed{\text{La seule limite possible de } (v_n) \text{ est } 1}$.

I.2 **I.2.a** La suite (w_n) vérifie la relation de récurrence $\boxed{w_{n+2} = -\frac{w_{n+1} + w_n}{2}}$.

I.2.b L'espace vectoriel F est de dimension 2. On le vérifie en montrant que $(w_n) \mapsto (w_0, w_1)$ est un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}^2$.
On cherche des éléments de F de la forme (r^n) avec $r \neq 0$, en reportant dans la relation de récurrence, on obtient $r^2 = -\frac{r+1}{2}$, soit $r = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$.
Donc $\boxed{\left(\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n, \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n\right) \text{ est une base de F}}$.

I.2.c $\left|\frac{-1+i\sqrt{7}}{4}\right| = \left|\frac{-1-i\sqrt{7}}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n = 0$.
On en déduit que $\boxed{\text{si } (x_n) \in \text{F, alors } x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0}$.

I.3 $(w_n) \in$ F donc, d'après la question **I.2.c**, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, or $v_n = e^{w_n}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1}$ et $\boxed{\sum v_n \text{ diverge}}$.
De plus $v_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)$ et $\sum \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ converge absolument donc
$\boxed{\sum (v_n - 1) \text{ converge absolument}}$.

Partie II – Norme subordonnée

II.1 Remarquons que l'application $f_{\text{A}} : \text{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mapsto \text{AX}$ est linéaire et donc continue puisque $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est de dimension finie. De plus, $\mathcal{B} = \{\text{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \ \|\text{X}\| \leq 1\}$ est compact toujours car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Ainsi f_{A} est bornée sur $\mathcal{B}$. En notant N_∞ la norme uniforme sur les applications bornées sur $\mathcal{B}$, on a donc $|||\text{A}||| = \text{N}_\infty(f_{\text{A}})$. On vérifie alors aisément que $|||\ |||$ est une norme sachant que N_∞ en est une.

Homogénéité Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il est clair que $f_{\lambda A} = \lambda f_A$ donc

$$|||\lambda A||| = N_\infty(f_{\lambda A}) = N_\infty(\lambda f_A) = |\lambda| N_\infty(f_A) = |\lambda|\, |||A|||$$

Inégalité triangulaire Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Il est clair que $f_{A+B} = f_A + f_B$. Alors

$$|||A + B||| = N_\infty(f_{A+B}) = N_\infty(f_A + f_B) \leq N_\infty(f_A) + N_\infty(f_A) = |||A||| + |||B|||$$

Séparation Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|||A||| = 0$. Alors $N_\infty(f_A) = 0$ donc f_A est nulle sur $\mathcal{B}$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Si $X = 0$ alors $f_A(X) = 0$. Sinon $X/\|X\| \in \mathcal{B}$ donc $f_A(X/\|X\|) = 0$ puis $f_A(X) = 0$. Ainsi f_A est nulle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ i.e. $A = 0$.

II.2 Si $B = 0$, alors $AB = 0$ et donc $|||AB||| = |||A|||\,|||B||| = 0$. Supposons $B \neq 0$ de sorte que $|||B||| \neq 0$. Soit $X \in \mathcal{B}$. Alors $\|BX\| \leq |||B|||$ ou encore $BX/\,|||B||| \in \mathcal{B}$ donc $\|ABX/\,|||B|||\,\| \leq |||A|||$ i.e. $\|ABX\| \leq |||A|||\,|||B|||$. Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{B}$, $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$.

Partie III – Etude de normes matricielles

III.1 **III.1.a** $DZ = \begin{pmatrix} m_{1,1}z_1 \\ m_{2,2}z_2 \\ \vdots \\ m_{n,n}z_n \end{pmatrix}$ donc $\|DZ\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |m_{i,i}z_i| \leq m \max\limits_{1\leq i\leq n} |z_i| = m\|Z\|_\infty$.

$\boxed{\|DZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty}$.

III.1.b Si $\|Z\|_\infty \leq 1$, alors on a $\|DZ\|_\infty \leq m$ d'où $|||D|||_\infty = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|X\|_\infty\leq 1} \|DX\|_\infty \leq m$.

De plus, il existe un entier $j \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $m = |m_{j,j}|$. En prenant $z_j = 1$ et pour $k \neq j$, $z_k = 0$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on a $\|DZ\|_\infty = m$ et $\|Z\|_\infty = 1$ d'où $|||D|||_\infty \geq m$.

Finalement $\boxed{|||D|||_\infty = m}$.

III.2 **III.2.a** $N_P(X) = \|PX\|_\infty$.

Si P n'est pas inversible, en prenant $X \in \ker P$ non nul, on a $N_P(X) = 0$ et $X \neq 0$ donc N_P n'est pas une norme.

Si P est inversible, alors

- N_P est une application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^+$
- $\forall X \in \mathbb{C}^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}, N_P(\lambda X) = \|\lambda PX\|_\infty = |\lambda|\|PX\|_\infty = |\lambda| N_P(X)$.
- $\forall (X, Y) \in (\mathbb{C}^n)^2, N_P(X + Y) = \|P(X + Y)\|_\infty = \|PX + PY\|_\infty \leq \|PX\|_\infty + \|PY\|_\infty = N_P(X) + N_P(Y)$.
- $\forall X \in \mathbb{C}^n, N_P(X) = 0 \implies \|PX\|_\infty = 0 \implies PX = 0 \implies X = 0$ (car $\|.\|_\infty$ est une norme et P est inversible).

donc N_P est une norme.

Finalement, $\boxed{N_P \text{ est une norme si et seulement si P est une matrice inversible}}$.

III.2.b $|||A|||_P = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|X\|_P\leq 1} \|AX\|_P = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty\leq 1} \|PAX\|_\infty = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty\leq 1} \|PAP^{-1}PX\|_\infty$

Or P est inversible, donc $X \mapsto PX$ est une bijection de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^n$ donc

$\sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty\leq 1} \|PAP^{-1}PX\|_\infty = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|X\|_\infty\leq 1} \|PAP^{-1}X\|_\infty = |||PAP^{-1}|||_\infty$,

On a donc bien $\boxed{|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty}$.

III.3 **III.3.a** On sait que λ est une valeur propre de A associée au vecteur X si et seulement si λ est une valeur propre de PAP^{-1} associée au vecteur PX.

A et PAP^{-1} ont donc le même spectre et donc $\boxed{\rho(A) = \rho(PAP^{-1})}$.

III.3.b Il existe une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Soit X un vecteur propre unitaire associé à λ. $\rho(A) = |\lambda| = \|\lambda X\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq |||A|||_\infty$.

En utilisant **III.2.b**, on en déduit : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1}) \leq |||PAP^{-1}|||_\infty = |||A|||_P$, et donc $\boxed{\rho(A) \leq |||A|||_P}$.

III.3.c On suppose A diagonalisable. Il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = PAP^{-1}$. D'après **III.2.b**, $|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty = |||D|||_\infty$, d'après **III.1.b**, $|||D|||_\infty = \rho(D)$ et comme A et D sont semblables, $\rho(D) = \rho(A)$.

$\boxed{\text{Il existe donc } P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } |||A|||_P = \rho(A)}$.

III.3.d $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$P_A(X) = 1 - X^3$, les valeurs propres de A sont 1, j et j^2 donc $\boxed{\rho(A) = 1}$.

Les vecteurs propres associés à 1, j et j^2 sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

Si $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$, alors $D = PAP^{-1}$ et d'après **III.3.c** $|||A|||_P = \rho(A)$.

III.3.e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

A est de rang 1 et E_0 a pour équation $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$.

Une base de E_0 est : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

D'autre part, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

A est donc diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres est n)

Si $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$,

alors $D = PAP^{-1}$ et d'après **III.3.c** $|||A|||_P = \rho(A)$.

III.4 **III.4.a** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

$\|AZ\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|)$

$\leq \max(|az_1| + |bz_2|, |cz_1| + |dz_2|) \leq \max(|a| + |b|, |c| + |d|) \max(|z_1|, |z_2|) = m\|Z\|_\infty$.

On a donc $\boxed{\|AZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty}$.

On en déduit $|||A|||_\infty \leq m$.
Si on suppose que $m = |a| + |b|$, alors on choisit z_1 et z_2 de module 1 tels que $|a| = az_1$ et $|b| = bz_2$. On a alors $\|AZ\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|) = \max(m, |cz_1 + dz_2|) = m$ et $\|Z\|_\infty = 1$.
De même si $m = |c| + |d|$.
On en déduit $|||A|||_\infty \geq m$.
On a donc $\boxed{|||A|||_\infty = m}$.

III.4.b **III.4.b.i** $A \in M_2(\mathbb{C})$, non diagonalisable.
On travaille dans $\mathbb{C}$, donc $Sp(A) \neq \emptyset$.
Si Sp(A) possédait deux éléments, alors le polynôme caractéristique de A serait scindé à racines simples et A serait diagonalisable, donc $\boxed{\text{Sp(A) ne contient qu'un élément}}$.

III.4.b.ii On choisit une base $e = (e_1, e_2)$ de E, avec e_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre α.
La matrice dans la base e de f est alors triangulaire supérieure, avec les valeurs propres sur la diagonale. Elle est donc de la forme $\boxed{\underset{e}{mat}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}$.

III.4.b.iii β est non nul car A n'est pas diagonalisable.
Posons $e_1' = \dfrac{\beta}{\epsilon} e_1$ et $e_2' = e_2$.
$e' = (e_1', e_2')$ est une base de $\mathbb{C}^2$, $f(e_1') = e_1'$, $f(e_2') = f(e_2) = \beta e_1 + \alpha e_2 = \epsilon e_1' + \alpha e_2'$.
On a donc $\underset{e'}{mat}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \epsilon \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Il existe donc une base } e' \text{ de } \mathbb{C}^2 \text{ telle que } \underset{e'}{mat}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } |\beta'| \leq \epsilon}$.

III.4.b.iv Notons $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$.
On a alors $|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty = |||T|||_\infty = |\alpha| + |\beta'| \leq |\alpha| + \epsilon = \rho(A) + \epsilon$.
$\boxed{\text{Il existe donc une matrice } P \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ telle que } |||A|||_P \leq \rho(A) + \epsilon}$.

III.4.c D'après **III.4.b.iv**, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in GL_2(\mathbb{C}) \quad |||A|||_P \leq \rho(A) + \epsilon$.
On a donc $\inf\limits_{P \in GL_2(\mathbb{C})} |||A|||_P \leq \rho(A)$.
D'après **III.3.b**, si $P \in GL_2(\mathbb{C})$ alors $|||A|||_P \geq \rho(A)$.
On a donc $\inf\limits_{P \in GL_2(\mathbb{C})} |||A|||_P \geq \rho(A)$.
Finalement $\boxed{\inf\limits_{P \in GL_2(\mathbb{C})} |||A|||_P = \rho(A)}$.

III.4.d $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
$|||A|||_\infty = \max(|-3| + |8|, |-2| + |5|) = 11$.
$P_A(X) = (X-1)^2$ et $\dim(E_1) = 1$ donc A est non diagonalisable et $Sp(A) = \{1\}$.
On a donc $\rho(A) = 1$ et d'après **III.4.b.iii**, A est semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $|\beta'| \leq 1$.
Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$.
$|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty = |||T|||_\infty = 1 + |\beta'| \leq 2$.
$\boxed{\text{Il existe donc une matrice } P \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ telle que } |||A|||_P \leq 2}$.

III.4.e On utilise la question **III.4.b.iv** avec $\epsilon = \dfrac{1 - \rho(A)}{2} > 0$.
On a alors $|||A|||_P \leq \rho(A) + \epsilon = \dfrac{1 + \rho(A)}{2} < 1$.
On sait que la norme subordonnée est une norme d'algèbre, donc $|||A^n|||_P \leq |||A|||_P{}^n$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} |||A^n|||_P = 0}$.

Partie IV – Etude de la suite (u_n)

IV.1 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(0,-\dfrac{2}{(x+y)^2})$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(1,-\dfrac{2}{(x+y)^2})$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathrm{C}^1 \text{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2}$.

IV.2 $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point fixe de f si et seulement si $(a,b)=(b,\dfrac{2}{a+b})$.

$\boxed{\text{Le seul point fixe de } f \text{ dans } (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ est } (1,1)}$.

IV.3 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=(0,-\dfrac{1}{2})$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=(1,-\dfrac{1}{2})$ donc $\boxed{\mathrm{J}_{(1,1)}=\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$.

IV.4 Le polynôme caractéristique de $\mathrm{J}_{(1,1)}$ est $\mathrm{P}_{\mathrm{J}_{(1,1)}}(\mathrm{X})=\mathrm{X}^2+\frac{1}{2}\mathrm{X}+\frac{1}{2}$. Ses valeurs propres sont $\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{4}$ de module $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\rho(\mathrm{J}_{(1,1)})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\mathrm{J}_{(1,1)}$ est donc diagonalisable (2 valeurs propres distinctes) et d'après la question **III.3.c**,

$\boxed{\text{il existe } \mathrm{P}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ tel que } |||\mathrm{J}_{(1,1)}|||_{\mathrm{P}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

IV.5 **IV.5.a** $\mathrm{J}_{(x,y)}=\begin{pmatrix}0&1\\-\dfrac{1}{(x+y)^2}&-\dfrac{1}{(x+y)^2}\end{pmatrix}$ et $(x,y)\mapsto\dfrac{1}{(x+y)^2}$ est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

$(x,y)\mapsto\mathrm{J}_{(x,y)}$ est donc continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. On est en dimension finie, donc la continuité ne dépend pas du choix des normes.

Soit $\epsilon=\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$. (car $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\alpha<1$)

Ecrivons la continuité de J en $(1,1)$ pour la norme $\|.\|_{\mathrm{P}}$ au départ et la norme $|||.|||_{\mathrm{P}}$ à l'arrivée :

$\exists\eta>0\quad\forall(x_0,y_0)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\quad\left(\|(1,1)-(x_0,y_0)\|_{\mathrm{P}}\leq\eta\Longrightarrow|||\mathrm{J}_{(x_0,y_0)}-\mathrm{J}_{(1,1)}|||_{\mathrm{P}}\leq\epsilon\right)$.

De l'inégalité triangulaire on déduit :

$|||\mathrm{J}_{(x_0,y_0)}-\mathrm{J}_{(1,1)}|||_{\mathrm{P}}\leq\epsilon\Longrightarrow|||\mathrm{J}_{(x_0,y_0)}|||_{\mathrm{P}}\leq|||\mathrm{J}_{(1,1)}|||_{\mathrm{P}}+\epsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\epsilon=\alpha$.

D'où finalement, $\boxed{\exists\eta>0\quad\forall(x_0,y_0)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\quad\left(\|(1,1)-(x_0,y_0)\|_{\mathrm{P}}\leq\eta\Longrightarrow|||\mathrm{J}_{(x_0,y_0)}|||_{\mathrm{P}}\leq\alpha\right)}$.

IV.5.b Posons $\psi(t)=(1,1)+t\,[(x_0,y_0)-(1,1)]$.

f est C^1 sur D et ψ est C^1 de $[0,1]$ dans D, par composition, $\boxed{\varphi \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1]}$.

Par composition, pour tout $t\in[0,1]$

$$\varphi'(t)=\mathrm{d}f_{\psi(t)}(\psi'(t))=\mathrm{d}f_{\varphi(t)}((x_0,y_0)-(1,1))$$

ou, quitte à confondre $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\varphi'(t)=\mathrm{J}_{\psi(t)}((x_0,y_0)-(1,1))$$

Majorons $\|\varphi'(t)\|_{\mathrm{P}}$ pour appliquer l'inégalité des accroissements finis.

$$\|\varphi'(t)\|_{\mathrm{P}}\leq|||\mathrm{J}_{\psi(t)}|||_{\mathrm{P}}\,\|(x_0,y_0)-(1,1)\|_{\mathrm{P}}$$

Or $\|(1,1)-\psi(t)\|_{\mathrm{P}}=t\|(x_0,y_0)-(1,1)\|_{\mathrm{P}}\leq\eta$

donc d'après **IV.5.a**, $|||\mathrm{J}_{\psi(t)}|||_{\mathrm{P}}\leq\alpha$ et $\|\varphi'(t)\|_{\mathrm{P}}\leq\alpha\|(x_0,y_0)-(1,1)\|_{\mathrm{P}}$

φ est de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$, $\forall t\in[0,1]$, $\|\varphi'(t)\|_{\mathrm{P}}\leq\alpha\|(x_0,y_0)-(1,1)\|_{\mathrm{P}}$, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\|\varphi(0)-\varphi(1)\|_{\mathrm{P}}\leq\alpha\|(x_0,y_0)-(1,1)\|_{\mathrm{P}}$ ou encore $\boxed{\|(1,1)-f(x_0,y_0)\|\leq\alpha\|(1,1)-(x_0,x_0)\|_{\mathrm{P}}}$.

IV.5.c Montrons par récurrence sur n que $\forall n\geq n_0,\quad(u_n,u_{n+1})\in\mathrm{D}$.

Par hypothèse, pour $n=n_0$, $(u_{n_0},u_{n_0+1})\in\mathrm{D}$.

Supposons que pour un entier $n\geq n_0$ donné, $(u_n,u_{n+1})\in\mathrm{D}$.

On a alors : $\|(1,1)-(u_{n+1},u_{n+2})\|_{\mathrm{P}}=\|(1,1)-f(u_n,u_{n+1})\|_{\mathrm{P}}$ et d'après la question précédente,

$(u_n, u_{n+1}) \in \mathrm{D} \Longrightarrow \|(1,1) - f(u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}} \leq \alpha\|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}} \leq \|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}} \leq \eta$.
Donc $\|(1,1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_{\mathrm{P}} \leq \eta$ et $(u_n, u_{n+1}) \in \mathrm{D}$.
Finalement, la propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$:
$\boxed{\forall n \geq n_0, \quad (u_n, u_{n+1}) \in \mathrm{D}}$.

IV.5.d Montrons par récurrence sur n que :
$\forall n \geq n_0, \quad \|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}} \leq \alpha^{n-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_{\mathrm{P}}$.
Pour $n = n_0$, la relation est évidente.
Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné,
$\|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}} \leq \alpha^{n-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_{\mathrm{P}}$.
Alors, $\|(1,1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_{\mathrm{P}} = \|(1,1) - f(u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}}$
et comme $(u_n, u_{n+1}) \in \mathrm{D}$, d'après la question **IV.5.b**,
$\|(1,1) - f(u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}} \leq \alpha\|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}}$
On a donc $\|(1,1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_{\mathrm{P}} \leq \alpha^{n+1-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_{\mathrm{P}}$.
Finalement, la propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$:
$\boxed{\forall n \geq n_0, \quad \|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}} \leq \alpha^{n-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_{\mathrm{P}}}$.

IV.5.e Les normes $\|.\|_{\mathrm{P}}$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes (dimension finie), il existe donc un réel $c > 0$ tel que $\|.\|_\infty \leq c\|.\|_{\mathrm{P}}$.
On a alors, $\forall n \geq n_0$, $|1-u_n| \leq \|(1,1)-(u_n, u_{n+1})\|_\infty \leq c\|(1,1)-(u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}} \leq c\alpha^{n-n_0}\|(1,1)-(u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_{\mathrm{P}}$,
et donc $\boxed{u_n = 1 + \mathrm{O}(\alpha^n)}$.

IV.5.f $u_n = 1 + \mathrm{O}(\alpha^n)$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.
Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$ et $\boxed{\sum(u_n - 1) \text{ converge absolument}}$.

Partie V – Suite de l'étude

V.1 **V.1.a** La suite (x_n) ne converge pas vers λ : $\exists \tau > 0\ \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}\ \exists n > \mathrm{N}\ |x_n - \lambda| > \tau$.
En utilisant cette relation, on construit une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{\varphi(n)} - \lambda| > \tau$.
La suite $(x_{\varphi(n)})$ est bornée (extraite de (x_n)), on peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers une limite λ'. Nécessairement, $|\lambda' - \lambda| \geq \tau > 0$ donc $\lambda' \neq \lambda$.
Donc $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ admet une valeur d'adhérence } \lambda' \neq \lambda}$.

V.1.b Toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence. D'après la question précédente, si une suite est bornée et non convergente, alors elle possède au moins deux valeurs d'adhérences.
Donc $\boxed{\text{toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence est convergente}}$.

V.1.c (x_n) est une suite bornée.
Si $\ell_- = \ell_+$, alors (x_n) est bornée et possède une unique valeur d'adhérence, donc d'après la question précédente, elle est convergente.
Si (x_n) est convergente, alors elle possède une unique valeur d'adhérence donc $\ell_- = \ell_+$.
Finalement $\boxed{(x_n) \text{ est convergente si et seulement si } \ell_- = \ell_+}$.

V.2 **V.2.a** Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_n \leq \dfrac{1}{\alpha}$ par récurrence double sur n.
Par hypothèse, pour $n = 0$ et $n = 1$, la relation est vraie.
Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné, $\alpha \leq u_n \leq \dfrac{1}{\alpha}$ et $\alpha \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{\alpha}$.
Alors, $u_{n+2} = \dfrac{2}{u_{n+1} + u_n} \leq \dfrac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}} = \alpha$
et $u_{n+2} = \dfrac{2}{u_{n+1} + u_n} \geq \dfrac{2}{\alpha + \alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$
donc $\alpha \leq u_{n+2} \leq \dfrac{1}{\alpha}$
Finalement, la propriété est vraie au rang 0 et 1 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_n \leq \dfrac{1}{\alpha}}$.

V.2.b ℓ_- est la plus petite valeur d'adhérence de la suite (u_n). C'est donc la limite d'une suite extraite que l'on notera $u_{\psi(n)}$.
la suite $u_{\psi(n)-2}$ est alors bornée, elle possède une sous-suite $u_{\psi\circ\chi(n)-2}$ qui converge vers une limite a. En posant $\varphi : n \mapsto \psi\circ\chi(n)-2$, on a alors :
$u_{\varphi(n)+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_-$ et $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, or $u_{\varphi(n)+1} = \dfrac{2}{u_{\varphi(n)+2}} - u_{\varphi(n)}$ donc $(u_{\varphi(n)+1})$ converge. On note b sa limite.
Par passage à la limite dans $u_{\varphi(n)+2} = \dfrac{2}{u_{\varphi(n)+1}+u_{\varphi(n)}}$, on obtient $\ell_- = \dfrac{2}{a+b}$.
De plus $a \leq \ell_+$ et $b \leq \ell_+$ donc $\ell_- \geq \dfrac{2}{\ell_+ + \ell_+} = \dfrac{1}{\ell_+}$. On en déduit $\boxed{\ell_-\ell_+ \geq 1}$.

V.2.c On procède de même en considérant une sous-suite $u_{\psi(n)}$ qui converge vers ℓ_+ et on obtient $\ell_-\ell_+ \leq 1$ d'où $\boxed{\ell_-\ell_+ = 1}$.

V.2.d De même qu'en (b), on contruit successivement :
$(u_{\psi(n)})$ qui converge vers ℓ_-
$(u_{\psi\circ\chi(n)-3})$ qui converge vers une limite a.
$(u_{\psi\circ\chi\circ\omega(n)-2})$ qui converge vers une limite b.
En posant $\varphi : n \mapsto \psi\circ\chi\circ\omega(n)-3$, on a alors :
$u_{\varphi(n)+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_-$, $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $u_{\varphi(n)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.
Or $u_{\varphi(n)+2} = \dfrac{2}{u_{\varphi(n)+3}} - u_{\varphi(n)+1}$ donc $(u_{\varphi(n)+2})$ converge. On note c sa limite.
Par passage à la limite dans $u_{\varphi(n)+2} = \dfrac{2}{u_{\varphi(n)+1}+u_{\varphi(n)}}$ et dans $u_{\varphi(n)+3} = \dfrac{2}{u_{\varphi(n)+2}+u_{\varphi(n)+1}}$
on obtient $c = \dfrac{2}{a+b}$ et $\ell_- = \dfrac{2}{b+c}$.
On a donc $b+c = \dfrac{2}{\ell_-} = 2\ell_+$ et $b \leq \ell_+$ et $c \leq \ell_+$, donc $b = c = \ell_+$.
De même $\ell_+ = c = \dfrac{2}{a+b}$ donc $a = b = \ell_-$.
On a alors $b = \ell_+$ et $b = \ell_-$ d'où $\boxed{\ell_+ = \ell_-}$.
$\ell_+ = \ell_-$, $\ell_-\ell_+ \geq 1$ et (u_n) est une suite de réels positifs donc $\ell_+ = \ell_- = 1$ et donc $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 1}$.

V.2.e La suite $((u_n, u_{n+1})$ converge vers $(1,1)$ donc
$\boxed{\text{il existe bien un entier } n_0 \text{ tel que } ((u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in \mathrm{D}}$.