Devoir à la maison n°08

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 La linéarité de E_a est évidente. Ainsi E_a est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. On vérifie aisément que $E_a \circ E_{-a} = E_{-a} \circ E_a = I$ donc E_a est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (d'inverse E_{-a}).

2 J est linéaire par linéarité de l'intégrale. De plus, $J(X^k) = \frac{1}{k+1}((X+1)^{k+1} - X^{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc J est bien à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$. J est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

3 D'après la formule du binôme, $J(X^k) = X^k + R_k$ où $\deg R_k < k$. Tout d'abord $J(0) = 0$ donc $\deg J(0) = \deg 0 = -1$. Soit $p \in \mathbb{R}[X]$ non nul de degré d. Alors $p = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. Ainsi

$$Jp = \sum_{k=0}^{d} a_k J(X^k) = a_d X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k + \sum_{k=0}^{d} R_k = a_d X^d + Q$$

où $\deg(Q) < d$. Ainsi $\deg Jp = \deg p = d$.
Puisque $\deg J(X^k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(J(X^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Comme J envoie la base canonique de $\mathbb{K}[X]$ sur une base de $\mathbb{K}[X]$, J est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

4 Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $t \mapsto e^{-t}t^k$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$ et $e^{-t}t^k \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc $t \mapsto e^{-t}t^k$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $I_k = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k \, dt$ converge.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties

$$I_k = -\left[e^{-t}t^k\right]_0^{+\infty} + kI_{k-1} = kI_{k-1}$$

Par une récurrence évidente, $I_k = k!I_0 = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5 Par linéarité de l'intégration et de la dérivation, L est linéaire. Tout d'abordn $L(1) = 0$ donc L n'est pas inversible. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$L(X^k)(x) = -k\int_0^{+\infty} e^{-t}(x+t)^{k-1} \, dt = -k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}x^j I_{k-1-j}$$

Ainsi

$$L(X^k) = -k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j} I_{k-1-j} X^j \in \mathbb{K}[X]$$

Ainsi L est bien à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$: c'est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque. En vertu d'une relation classique sur les coefficients binomiaux, on peut écrire

$$\forall k \in \mathbb{N},\ L(X^k) = \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)\binom{k}{j+1} I_{k-1-j} X^j = \sum_{j=1}^{k} j\binom{k}{j} I_{k-j} X^{j-1}$$

6 Pour tout $a \in \mathbb{K}$, $\mathrm{E}_a \circ \mathrm{I} = \mathrm{I} \circ \mathrm{E}_a = \mathrm{E}_a$ donc I est shift-invariant. De plus, $\mathrm{I}(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \notin \mathbb{K}^*$ donc I n'est pas un endomorphisme delta.
Pour tout $a \in \mathbb{K}$ et tout $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{E}_a \circ \mathrm{D}(p) = \mathrm{D} \circ \mathrm{E}_a(p) = p'(\mathrm{X}+a)$ donc $\mathrm{E}_a \circ \mathrm{D} = \mathrm{D} \circ \mathrm{E}_a$ et D est shift-invariant. De plus, $\mathrm{D}(\mathrm{X}) = 1 \in \mathbb{K}^*$ donc D est un endomorphisme delta.
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{E}_a \circ \mathrm{E}_b = \mathrm{E}_b \circ \mathrm{E}_a = \mathrm{E}_{a+b}$ donc E_a est shift-invariant. De plus, $\mathrm{E}_a(\mathrm{X}) = \mathrm{X} + a \notin \mathbb{K}^*$ donc E_a n'est pas un endomorphisme delta.
Soit $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{E}_a \circ \mathrm{J}(p)(x) = \mathrm{J}p(x+a) = \int_{x+a}^{x+a+1} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{x+1} p(u+a)\,\mathrm{d}u = \mathrm{J}(p(\mathrm{X}+a))(x) = \mathrm{J} \circ \mathrm{E}_a(p)(x)$$

par le changement de variable $t = u + a$. Ainsi $\mathrm{E}_a \circ \mathrm{J} = \mathrm{J} \circ \mathrm{E}_a$ et J est shift-invariant. De plus, $\mathrm{J}(\mathrm{X}) = \mathrm{X} + \frac{1}{2} \notin \mathbb{K}^*$ donc J n'est pas un endomorphisme delta.
Soit $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{E}_a \circ \mathrm{L}(p)(x) = \mathrm{L}p(x+a) = -\int_0^{+\infty} e^{-t} p'(x+a+t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{L}(p(\mathrm{X}+a))(x) = \mathrm{L} \circ \mathrm{E}_a(p)(x)$$

donc $\mathrm{E}_a \circ \mathrm{L} = \mathrm{L} \circ \mathrm{E}_a$ et L est shift-invariant. De plus, $\mathrm{L}(\mathrm{X}) = -1 \in \mathbb{K}^*$ donc L est un endomorphisme delta.

7 Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On a déjà vu que $\mathrm{I} \in \mathcal{I}$. Notons $\Psi_a : \mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}]) \mapsto \mathrm{E}_a \circ \mathrm{T} - \mathrm{T} \circ \mathrm{E}_a$. Alors Ψ_a est un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}])$. On en déduit que $\mathcal{I} = \bigcap_{a \in \mathbb{K}} \operatorname{Ker} \Psi_a$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}])$ en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}])$. Enfin, soit $(\mathrm{S},\mathrm{T}) \in \mathcal{I}^2$, alors pour tout $a \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{E}_a \circ (\mathrm{S} \circ \mathrm{T}) = (\mathrm{E}_a \circ \mathrm{S}) \circ \mathrm{T} = (\mathrm{S} \circ \mathrm{E}_a) \circ \mathrm{T} = \mathrm{S} \circ (\mathrm{E}_a \circ \mathrm{T}) = \mathrm{S} \circ (\mathrm{T} \circ \mathrm{E}_a) = (\mathrm{S} \circ \mathrm{T}) \circ \mathrm{E}_a$$

donc $\mathrm{S} \circ \mathrm{T} \in \mathcal{I}$. Ainsi $\mathcal{I}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}])$.
Notons Δ l'ensemble des endomorphismes delta de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Soit $\mathrm{T} \in \Delta$. Alors $-\mathrm{T} \in \Delta$ mais $\mathrm{T} + (-\mathrm{T}) = 0$ n'est évidemment pas un endomorphisme delta. Ainsi Δ n'est pas stable par addition. De plus, $\mathrm{D} \in \Delta$ mais $\mathrm{D} \circ \mathrm{D}(\mathrm{X}) = 0 \notin \mathbb{K}^*$ donc $\mathrm{D} \circ \mathrm{D} \notin \mathcal{I}$. Ainsi $\mathcal{I}$ n'est pas stable par composition.

8 Pour $k > \deg p$, $\mathrm{D}^k p = 0$ donc la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{D}^k p$ ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls : cette somme est donc bien définie. De plus, cette somme est un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ en tant que combinaison linéaire de tels polynômes.

9 Posons $\mathrm{U} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{D}^k$. Soient $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $d = \deg p$. Alors $\mathrm{U}p = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{D}^k p$. On sait que $\mathrm{D} \in \mathcal{I}$ et que $\mathcal{I}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}])$. Ainsi $\sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{D}^k \in \mathcal{I}$. Par conséquent,

$$\forall a \in \mathbb{K},\ \mathrm{E}_a \circ \mathrm{U}(p) = \mathrm{U} \circ \mathrm{E}_a(p)$$

Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{U} \in \mathcal{I}$.

10 Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{D}^k\right) \mathrm{X}^n\right)(0) = n! a_n$$

On en déduit immédiatement que si $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{D}^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \mathrm{D}^k$, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$q_n(\mathrm{X}+a) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \mathrm{X}^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} q_k$$

Comme T est shift-invariant, $(\mathrm{T}q_n)(\mathrm{X}+a) = \mathrm{T}(q_n(\mathrm{X}+a))$ donc, par linéarité de T,

$$(\mathrm{T}q_n)(\mathrm{X}+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{T}q_k$$

puis, en évaluant en 0,

$$(\mathrm{T}q_n)(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{n-k}}{(n-k)!}(\mathrm{T}q_k)(0)$$

L'égalité précédente est valable pour tout $a \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{K}$ est infini de sorte que

$$\mathrm{T}q_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^{n-k}}{(n-k)!}(\mathrm{T}q_k)(0) = \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{T}q_k)(0)\mathrm{D}^k q_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{T}q_k)(0)\mathrm{D}^k q_n$$

car $\mathrm{D}_k q_n = 0$ pour $k > n$. Comme $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, les endomorphismes T et $\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{T}q_k)(0)\mathrm{D}^k$ sont égaux.

12 Soient T et U deux endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. D'après la question précédente, il existe deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\mathrm{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\mathrm{D}^k$ et $\mathrm{U} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\mathrm{D}^k$. On vérifie alors que

$$\mathrm{T}\circ\mathrm{U} = \mathrm{U}\circ\mathrm{T} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\mathrm{D}^n$$

13 Il suffit d'appliquer la question **11** à l'endomorphisme E_a. On reconnaît la formule de Taylor.

Remarque. La formule de Taylor s'écrit plutôt

$$p(\mathrm{X}+a) = \sum_{k=0}^{\deg p} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}\mathrm{X}^k$$

On intervertit en fait le rôle du scalaire a et de l'indéterminée X. Plus rigoureusement, on évalue la formule précédente en $b \in \mathbb{K}$:

$$p(b+a) = \sum_{k=0}^{\deg p} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}b^k$$

Comme $\mathbb{K}$ est infini, on a alors :

$$p(b+\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{\deg p} \frac{p^{(k)}(\mathrm{X})}{k!}b^k$$

Il suffit alors de renommer b en a.

14 Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}q_k = q_{k+1}(\mathrm{X}+1) - q_{k+1}(\mathrm{X})$. D'après la question **11**

$$\forall p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}],\ \mathrm{J}p = \sum_{k=0}^{+\infty}(q_{k+1}(1) - q_{k+1}(0))p^{(k)} = \sum_{k=0}^{\deg p} \frac{1}{(k+1)!}p^{(k)}$$

15 Posons $\mathrm{T} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{D}^k$. On vérifie que $(\mathrm{D}-\mathrm{I})\circ\mathrm{T} = \mathrm{T}\circ(\mathrm{D}-\mathrm{I}) = \mathrm{I}$ donc $\mathrm{D}-\mathrm{I}$ est inversible et $(\mathrm{D}-\mathrm{I})^{-1} = \mathrm{T}$.

On calcule sans peine $(\mathrm{L}q_0)(0) = 0$ et $(\mathrm{L}q_k)(0) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}q_{k-1}(t)\ \mathrm{d}t = -1$. D'après la question **11**

$$\mathrm{L} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{D}^k = \mathrm{I} + \mathrm{T} = \mathrm{I} + (\mathrm{D}-\mathrm{I})^{-1}$$

16 Comme T est non nul, la suite $((\mathrm{T}q_k)(0))_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas constamment nulle d'après les questions **10** et **11**. On peut alors poser $n(\mathrm{T}) = \min\{k \in \mathbb{N},\ (\mathrm{T}q_k)(0) \neq 0\}$. Soit $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors

$$\mathrm{T}p = \sum_{k=n(\mathrm{T})}^{+\infty} (\mathrm{T}q_k)(0)p^{(k)}$$

- Si $n(\mathrm{T}) > \deg p$, $\mathrm{T}p = 0$ et $\deg \mathrm{T}p = -1$.
- Si $n(\mathrm{T}) \leq \deg p$, alors $\mathrm{T}p = \sum_{k=n(\mathrm{T})}^{\deg p} (\mathrm{T}q_k)(0)p^{(k)}$. Comme $(\mathrm{T}q_{n(\mathrm{T})})(0) \neq 0$, $\deg \mathrm{T}p = \deg p^{(n(\mathrm{T}))} = \deg p - n(\mathrm{T})$.

On en déduit bien que $\deg \mathrm{T}p = \max\{-1, \deg p - n(\mathrm{T})\}$.

17 D'après la question précédente, $\mathrm{T}p = 0$ i.e. $\deg \mathrm{T}p = -1$ si et seulement si $\deg p - n(\mathrm{T}) \leq -1$. On en déduit que $\operatorname{Ker} \mathrm{T} = \mathbb{K}_{n(\mathrm{T})-1}[\mathrm{X}]$.

18 Supposons T inversible. Alors $\operatorname{Ker} \mathrm{T} = \{0\}$. D'après la question précédente, ceci signifie que $n(\mathrm{T}) = 0$. Par définition de $n(\mathrm{T})$, on a donc $(\mathrm{T}q_0)(0) \neq 0$ et donc $\mathrm{T}1 \neq 0$.
Supposons $\mathrm{T}1 \neq 0$. D'après la question **11**, $\mathrm{T}1 = (\mathrm{T}q_0)(0)$ donc $(\mathrm{T}q_0)(0) \neq 0$. Par définition, on a donc $n(\mathrm{T}) = 0$. D'après la question **16**, $\deg \mathrm{T}p = \max\{-1, \deg p\}$ pour tout $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On en déduit immédiatement que $\deg \mathrm{T}p = \deg p$ pour tout $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
Supposons que $\deg \mathrm{T}p = \deg p$ pour tout $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. L'image de la base canonique de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est alors une base de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, ce qui prouve que T est inversible.

19 Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors $\mathrm{E}_a \circ \mathrm{T} = \mathrm{T} \circ \mathrm{E}_a$ puis $\mathrm{T}^{-1} \circ (\mathrm{E}_a \circ \mathrm{T}) \circ \mathrm{T}^{-1} = \mathrm{T}^{-1} \circ (\mathrm{T} \circ \mathrm{E}_a) \circ \mathrm{T}^{-1}$ ou encore $\mathrm{T}^{-1} \circ \mathrm{E}_a = \mathrm{E}_a \circ \mathrm{T}^{-1}$ de sorte que T^{-1} est shift-invariant.

20 En posant $\alpha_k = (\mathrm{T}q_k)(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$, la question **11** montre que $\mathrm{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathrm{D}^k$.
De plus, $\mathrm{TX} = \alpha_0 \mathrm{X} + \alpha_1 \in \mathbb{K}^*$ car T est shift-invariant donc $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$.

21 Posons $\mathrm{U} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \mathrm{D}^{k-1}$. Alors U est shift-invariant d'après la question **9** et $\mathrm{D} \circ \mathrm{U} = \mathrm{T}$.
Supposons qu'il existe un endomorphisme V shift-invariant tel que $\mathrm{T} = \mathrm{D} \circ \mathrm{V}$. D'après la question **11**, il existe une suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de scalaires telle que $\mathrm{V} = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \mathrm{D}^{k-1}$. Comme $\mathrm{D} \circ \mathrm{U} = \mathrm{D} \circ \mathrm{V} = \mathrm{T}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \mathrm{D}^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \mathrm{D}^k$. La question **10** montre que $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\mathrm{U} = \mathrm{V}$.
Dans le cas $\mathrm{T} = \mathrm{D}$, on a évidemment $\mathrm{U} = \mathrm{I}$. On rappelle que $\mathrm{L} = \mathrm{I} + (\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1} = (\mathrm{D} - \mathrm{I} + \mathrm{I}) \circ (\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1} = \mathrm{D} \circ (\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1}$ donc $\mathrm{U} = (\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1}$ dans le cas $\mathrm{T} = \mathrm{L}$.

22 Puisque $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$, $n(\mathrm{T}) = \min\{k \in \mathbb{N},\ \alpha_k \neq 0\} = -1$. On en déduit avec la question **16** que $\deg \mathrm{T}p = \deg p - 1$ pour tout $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul.
La question **17** montre que $\operatorname{Ker} \mathrm{T} = \mathbb{K}_0[\mathrm{X}] = \mathbb{K}$.
Soit p un éventuel vecteur propre de T. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{T}p = \lambda p$. Puisque $\deg \mathrm{T}p = \deg p - 1$, on a nécessairement $\lambda = 0$. Puisque $\operatorname{Ker}(\mathrm{T}) \neq \{0\}$, 0 est bien valeur propre de T. Ainsi $\operatorname{Sp}(\mathrm{T}) = \{0\}$.

23 La question précédente montre que $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est stable par T donc T_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Comme $\operatorname{Sp}(\mathrm{T}_n) = \{0\}$, T_n est diagonalisable si et seulement si $\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{T}_n) = \dim \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ i.e. $1 = n + 1$ i.e. $n = 0$.

24 D'après la question **22**, $\operatorname{Im} \mathrm{T}_n \subset \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Mais comme $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{T}_n = 1$, $\operatorname{rg} \mathrm{T}_n = n = \dim \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ d'après le théorème du rang. Ainsi $\operatorname{Im} \mathrm{T}_n = \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Alors

$$\operatorname{Im} \mathrm{T} = \mathrm{T}(\mathbb{K}[\mathrm{X}]) = \mathrm{T}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{T}(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Im} \mathrm{T}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}] = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$$

Ainsi T est surjectif.

25 D'après la question **22**, $\operatorname{Ker} \mathrm{Q} = \mathbb{K}_0[\mathrm{X}]$. On vérifie alors aisément que $\mathrm{X}\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} \mathrm{Q}$ dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On sait alors que Q induit un isomorphisme $\tilde{\mathrm{Q}}$ de $\mathrm{X}\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ sur $\operatorname{Im} \mathrm{Q} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On peut alors poser $q_0 = 1$ et $q_n = \tilde{\mathrm{Q}}^{-1} q_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On alors bien $\mathrm{Q}q_n = q_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $q_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puisque $q_n \in \mathrm{X}\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. D'après la question **22**, $\deg q_{n-1} = \deg \mathrm{Q}q_n = \deg q_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\deg q_0 = 0$, $\deg q_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si l'on suppose qu'il existe une suite (r_n) de polynômes vérifiant les mêmes conditions que (q_n), les deux dernières conditions montrent que $r_n = \tilde{\mathrm{Q}}^{-1} r_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $q_0 = r_0 = 1$, une récurrence évidente montre que $q_n = r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

26 Fixons $x \in \mathbb{K}$. Notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion

$$q_n(x + \mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}$$

Puisque $q_0 = 1$, $\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque Q est shift-invariant,

$$\mathrm{Q}(q_n(x + \mathrm{X})) = (\mathrm{Q}q_n)(x + \mathrm{X}) = q_{n-1}(x + \mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) q_{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) \mathrm{Q}q_{n-k} = \mathrm{Q}\left(\sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) q_{n-k}\right)$$

Comme $\operatorname{Ker} Q = \mathbb{K}$, il existe une constante $C_n \in \mathbb{K}$ telle que

$$q_n(x + X) = C_n + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) q_{n-k}$$

En évaluant en 0, on obtient $C_n = q_n(x)$ car $q_j(0) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}^*$. Finalement, comme $q_0 = 1$,

$$q_n(x + X) = q_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) q_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}$$

Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit alors d'évaluer l'égalité $\mathcal{P}_n$ en $y \in \mathbb{K}$ pour obtenir le résultat voulu.

27 $\deg q_0 = 0$ donc $q_0 \in \mathbb{K}^*$. En évaluant la relation pour $x = y = 0$, on obtient $q_0(0) = q_0(0)^2$ donc $q_0(0) = 1$ puis $q_0 = 1$.
En prenant $n = 1$ et $x = y = 0$, on obtient $q_1(0) = 2q_0(0)q_1(0) = 2q_1(0)$ donc $q_1(0) = 0$. Supposons que $q_1(0) = \cdots = q_{n-1}(0) = 0$ pour un certain entier $n \geq 2$. Alors

$$q_n(0) = q_n(0 + 0) = \sum_{k=0}^{n} q_k(0) q_{n-k}(0) = 2q_0(0) q_n(0) = 2q_n(0)$$

donc $q_n(0) = 0$. Par récurrence forte, $q_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $\deg q_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, (q_n) est une base de $\mathbb{K}[X]$. Il existe alors un unique endomorphisme Q tel que $Qq_0 = 0$ (nécessairement, $\operatorname{Ker} Q = \mathbb{K}$ si Q est un endomorphisme delta) et $Qq_n = q_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifions que Q est alors bien un endomorphisme delta. Tout d'abord, $\deg q_1 = 1$ donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$ tel que $q_1 = \alpha X + \beta$. Alors

$$1 = q_0 = Qq_1 = \alpha QX + \beta Q1 = \alpha QX$$

Ainsi $QX = 1/\alpha \in \mathbb{K}^*$. Fixons $y \in \mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est infini

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n(X + y) = \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(y) q_k$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Q \circ E_y(q_n) = Q(q_n(X + y)) = \sum_{k=0} q_{n-k}(y) Qq_k = \sum_{k=1}^{n} q_{n-k}(y) q_{k-1} = \sum_{k=0} q_{n-1-k}(y) q_k$$

Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E_y \circ Q(q_n) = q_{n-1}(X + y) = \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-1-k}(y) q_k$$

Par conséquent, $Q \circ E_y(q_n) = E_y \circ Q(q_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme (q_n) est une base de $\mathbb{K}[X]$, $Q \circ E_y = E_y \circ Q$. Ainsi Q est shift-invariant. Finalement, Q est bien un endomorphisme delta.

28 $(q_0, \dots, q_n)$ est une famille à degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[X]$ donc c'est bien une famille libre. De plus, elle comporte $n + 1$ éléments et $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$ donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

29 La matrice de Q_n dans la base $(q_0, \dots, q_n)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\operatorname{tr}(Q_n) = \det(Q_n) = 0$ et $\chi_{Q_n} = X^{n+1}$.

30 On vérifie sans peine que

- $q_0 = 1$;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg q_n = n$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n(0) = 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Dq_n = q_{n-1}$.

Donc (q_n) est bien la suite de polynômes associée à D.

31 Quitte à poser $q_0 = 1$, on vérifie à nouveau que

- $q_0 = 1$;

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg q_n = n$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n(0) = 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{D}q_n = q_{n-1}$.

Notamment, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}_1 - \mathrm{I})q_n &= q_n(\mathrm{X}+1) - q_n(\mathrm{X}) \\
&= \frac{1}{n!}\left[\prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{X}+1-k) - \prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{X}-k)\right] \\
&= \frac{1}{n!}\left[\prod_{k=-1}^{n-2}(\mathrm{X}-k) - \prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{X}-k)\right] \\
&= \frac{1}{n!}\left[(\mathrm{X}+1) - (\mathrm{X}-(n-1))\right]\prod_{k=0}^{n-2}(\mathrm{X}-k) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-2}(\mathrm{X}-k) = q_{n-1}
\end{aligned}$$

Donc (q_n) est bien la suite de polynômes associée à $\mathrm{E}_1 - \mathrm{I}$.

32 Comme Q est un endomorphisme delta, $\deg \mathrm{Q}p = \deg p - 1$ pour tout polynôme p non nul. On en déduit que pour $k > \deg p$, $\mathrm{Q}^k p = 0$. La somme $\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{Q}^k p)(0)q_k$ ne comporte donc qu'un nombre fini de termes non nuls : elle est donc bien définie. C'est un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ en tant que combinaison linéaire de tels polynômes.

33 Pour la même raison qu'à la question **8**, l'application $\mathrm{U} = \sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{T}q_k)(0)\mathrm{Q}^k$ est bien définie et c'est un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}q_n &= \sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{T}q_k)(0)\mathrm{Q}^k q_n \\
&= \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{T}q_k)(0)\mathrm{Q}^k q_n \qquad \text{car } \mathrm{Q}^k q_n = 0 \text{ pour } k > n = \deg q_n \\
&= \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{T}q_k)(0)q_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{T}q_{n-k})(0)q_k \qquad \text{par changement d'indice} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{T}\circ\mathrm{Q}^k(q_n))(0)q_k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{Q}^k\circ\mathrm{T}(q_n))(0)q_k \qquad \text{d'après la question } \mathbf{12} \\
&= \mathrm{T}q_n \qquad \text{d'après la question précédente appliquée à } p = \mathrm{T}q_n
\end{aligned}$$

Les endomorphismes T et U coïncident sur la base $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ils sont égaux.

34 On prend $\mathrm{Q} = \mathrm{E}_1 - \mathrm{I}$ et $\mathrm{T} = \mathrm{D}$. Ainsi, pour $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$,

$$
\begin{aligned}
p'(\mathrm{X}) = \mathrm{D}p &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\mathrm{D}q_k)(0)\mathrm{Q}^k p \\
&= \sum_{k=0}^{\deg p} q_k'(0)(\mathrm{E}_1 - \mathrm{I})^k p \qquad \text{car } \mathrm{Q}^k p = 0 \text{ pour } k > \deg p \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} q_k'(0) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \mathrm{E}_1^j p \text{ d'après la formule du binôme } (\mathrm{E}_1 \text{ et I commutent}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} q_k'(0) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \mathrm{E}_j p \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} q_k'(0) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} p(\mathrm{X}+j)
\end{aligned}
$$

Or d'après la question **31**, $q_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(\mathrm{X}-i)$. Notamment $q_0 = 1$ donc $q_0' = 0$ et, a fortiori, $q_0'(0) = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $q_k = \mathrm{X}r_k$ avec $r_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k-1}(\mathrm{X}-i)$ donc $q_k' = r_k + \mathrm{X}r_k'$ puis $q_k'(0) = r_k(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. On en déduit alors le résultat voulu.

35 Soit $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. D'après la formule de Leibniz, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{D}^k(\mathrm{X}p) = \mathrm{X}p^{(k)} + \binom{k}{1}p^{(k-1)} = \mathrm{X}p^{(k)} + kp^{(k-1)}$. Ainsi

$$
\mathrm{T}(\mathrm{X}p) = a_0\mathrm{X}p + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\left(\mathrm{X}p^{(k)} + kp^{(k-1)}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\mathrm{X}p^{(k)} + \sum_{k=1}^{+\infty} ka_kp^{k-1} = \mathrm{XT}(p) + \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k\mathrm{D}^{k-1}p
$$

Par conséquent,

$$
\mathrm{T}' = \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k\mathrm{D}^{k-1}
$$

36 Conséquence directe des questions **11** et **9**.

37 D'après la question **20**, il existe une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de scalaires telle que $\alpha_1 \neq 0$ et $\mathrm{T} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k\mathrm{D}^k$. D'après la question **35**, $\mathrm{T}' = \sum_{k=1} k\alpha_k\mathrm{D}^{k-1}$. Ainsi $\mathrm{T}'1 = \alpha_1 \neq 0$ donc T' est inversible d'après la question **18**.

38 Soit $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}' \circ \mathrm{T}(p) + \mathrm{S} \circ \mathrm{T}'(p) &= \mathrm{S}(\mathrm{XT}(p)) - \mathrm{XS}(\mathrm{T}(p)) + \mathrm{S}(\mathrm{T}(\mathrm{X}p) - \mathrm{XT}(p)) \\
&= \mathrm{S}(\mathrm{XT}(p)) - \mathrm{XS}(\mathrm{T}(p)) + \mathrm{S}(\mathrm{T}(\mathrm{X}p)) - \mathrm{S}(\mathrm{XT}(p)) \\
&= \mathrm{S} \circ \mathrm{T}(\mathrm{X}p) - \mathrm{XS} \circ \mathrm{T}(p) \\
&= (\mathrm{S} \circ \mathrm{T})'(p)
\end{aligned}
$$

Finalement, $(\mathrm{S} \circ \mathrm{T})' = \mathrm{S}' \circ \mathrm{T} + \mathrm{S} \circ \mathrm{T}'$.

39 D'après la question précédente,

$$
\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1} = (\mathrm{D}' \circ \mathrm{U} + \mathrm{D} \circ \mathrm{U}') \circ \mathrm{U}^{-n-1} = \mathrm{D}' \circ \mathrm{U}^{-n} + \mathrm{D} \circ \mathrm{U}' \circ \mathrm{U}^{-n-1}
$$

Pour $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$,

$$
\mathrm{D}'(p) = \mathrm{D}(\mathrm{X}p) - \mathrm{XD}(p) = \mathrm{X}p' + p - \mathrm{X}p' = p
$$

donc $\mathrm{D}' = \mathrm{I}$ de sorte que

$$
\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1} = \mathrm{U}^{-n} + \mathrm{D} \circ \mathrm{U}' \circ \mathrm{U}^{-n-1}
$$

Or $\mathcal{I}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}])$ donc

$$
\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1} = \mathrm{U}^{-n} + \mathrm{U}^{-n-1} \circ \mathrm{U}' \circ \mathrm{D}
$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1}(\mathrm{X}^n) &= \mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^n) + \mathrm{U}^{-n-1} \circ \mathrm{U}' \circ \mathrm{D}(\mathrm{X}^n) \\
&= \mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^n) + \mathrm{U}^{-n-1} \circ \mathrm{U}'(n\mathrm{X}^{n-1}) \\
&= \mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^n) + n\mathrm{U}^{-n-1} \circ \mathrm{U}'(\mathrm{X}^{n-1})
\end{aligned}$$

A l'aide de la question précédente, on prouve par une récurrence (laissée au lecteur) que $(\mathrm{U}^n)' = n\mathrm{U}^{n-1} \circ \mathrm{U}'$. Puisque $\mathrm{U}^{-n} \circ \mathrm{U}^n = \mathrm{I}$, $(\mathrm{U}^{-n} \circ \mathrm{U}^n)' = \mathrm{I}' = 0$ puis $(\mathrm{U}^{-n})' \circ \mathrm{U}^n + \mathrm{U}^{-n} \circ (\mathrm{U}^n)' = 0$ et enfin

$$(\mathrm{U}^{-n})' = -\mathrm{U}^{-n} \circ (\mathrm{U}^n)' \circ \mathrm{U}^{-n} = -n\mathrm{U}^{-n-1} \circ \mathrm{U}'$$

Finalement,

$$\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1}(\mathrm{X}^n) = \mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^n) - (\mathrm{U}^{-n})'(\mathrm{X}^{n-1}) = \mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^n) - (\mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^n) - \mathrm{X}\mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^{n-1})) = \mathrm{X}\mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^{n-1})$$

40 On va utiliser l'unicité de la suite (q_n) associée à Q. Posons $r_n = \frac{1}{n!}(\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1})(\mathrm{X}^n)$.
Tout d'abord, $r_0 = (\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-1})(1)$. Or

$$\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-1} = (\mathrm{D} \circ \mathrm{U})' \circ \mathrm{U}^{-1} = (\mathrm{D}' \circ \mathrm{U} + \mathrm{D} \circ \mathrm{U}') \circ \mathrm{U} = (\mathrm{I} \circ \mathrm{U} + \mathrm{D} \circ \mathrm{U}') \circ \mathrm{U}^{-1} = \mathrm{I} + \mathrm{U}' \circ \mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{D}$$

car $\mathcal{I}$ est une sous-algèbre *commutative* de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}])$. Finalement,

$$r_0 = (\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-1})(1) = 1 + \mathrm{U}' \circ \mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{D}(1) = 1 + \mathrm{U}' \circ \mathrm{U}^{-1}(0) = 1$$

par linéarité de $\mathrm{U}' \circ \mathrm{U}^{-1}$.
D'après la question **37**, Q′ est inversible. Comme U l'est aussi, $\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1}$ l'est également. D'après la question **18**, $\deg r_n = \deg \mathrm{X}^n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, $r_n = \mathrm{X}\mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $r_n(0) = 0$.
Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{Q}r_n = \frac{1}{n!}\mathrm{Q} \circ \mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1}(\mathrm{X}^n) = \frac{1}{n!}\mathrm{D} \circ \mathrm{U} \circ \mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1}(\mathrm{X}^n) = \frac{1}{n!}\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1} \circ \mathrm{U} \circ \mathrm{D}(\mathrm{X}^n) = \frac{1}{n!}\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n}(n\mathrm{X}^{n-1}) = r_{n-1}$$

On en déduit donc que $q_n = r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que $n!q_n(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec la question précédente.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, $q_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}(\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n})(\mathrm{X}^{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc

$$\mathrm{X}(\mathrm{Q}')^{-1}(q_{n-1}) = \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{X}\mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^{n-1}) = \frac{n!}{(n-1)!}q_n(\mathrm{X}) = nq_n(\mathrm{X})$$

41 On a vu à la question **15** que $\mathrm{L} = \mathrm{I} + (\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1}$, ou encore $(\mathrm{D} - \mathrm{I}) \circ \mathrm{L} = \mathrm{D}$. En appliquant à ℓ_n, on trouve bien $\ell'_{n-1} - \ell_{n-1} = \ell'_n$.
On a $\mathrm{L} = (\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1} \circ \mathrm{D}$. On a a montré plus haut que pour un endomorphisme T inversible, $(\mathrm{T}^n)' = n\mathrm{T}^{n-1} \circ \mathrm{T}'$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}' &= ((\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1})' \circ \mathrm{D} + (\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1} \circ \mathrm{D}' \\
&= -(\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-2} \circ (\mathrm{D} - \mathrm{I})' \circ \mathrm{D} + (\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1} \circ \mathrm{I} \\
&= -(\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-2} \circ \mathrm{I} \circ \mathrm{D} + (\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1} \circ \mathrm{I} \\
&= (\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-2} \circ (-\mathrm{D} + \mathrm{D} - \mathrm{I}) = -(\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-2}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(\mathrm{L}')^{-1} = -(\mathrm{D} - \mathrm{I})^2 = -\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} - \mathrm{I}$$

D'après la question précédente,

$$n\ell_n = \mathrm{X}(-\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} - \mathrm{I})\ell_{n-1} = \mathrm{X}(-\ell''_{n-1} + 2\ell'_{n-1} - \ell_{n-1}) = \mathrm{X}((\ell'_{n-1} - \ell_{n-1}) - (\ell'_{n-1} - \ell_{n-1})') = \mathrm{X}(\ell'_n - \ell''_n)$$

puis

$$\mathrm{X}\ell''_n - \mathrm{X}\ell'_n + n\ell_n = 0$$

Avec les notations de la question précédente, $\mathrm{U} = (\mathrm{D}-\mathrm{I})^{-1}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
q_n &= \frac{\mathrm{X}}{n!}\mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^{n-1}) \\
&= \frac{\mathrm{X}}{n!}\mathrm{X}(\mathrm{D}-\mathrm{I})^n(\mathrm{X}^{n-1}) \\
&= \frac{\mathrm{X}}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\mathrm{D}^{n-k}(\mathrm{X}^{n-1})\text{d'après la formule du binôme} \\
&= \frac{\mathrm{X}}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\mathrm{D}^{n-k}(\mathrm{X}^{n-1})\text{car } \mathrm{D}^n(\mathrm{X}^{n-1}) = 0 \\
&= \frac{\mathrm{X}}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!}\mathrm{X}^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{X}^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\frac{\mathrm{X}^k}{k!}
\end{aligned}$$

42 Comme (q_n) est une base de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, il existe un unique endomorphisme T tel que $\mathrm{T}q_n = \dfrac{\mathrm{X}^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(\mathrm{X}^n/n!)$ est également une base de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, T est inversible.

43 Par définition de T, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{D}\circ\mathrm{T}(q_n) = \frac{\mathrm{X}^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{T}q_{n-1} = \mathrm{T}\circ\mathrm{Q}(q_n)$$

De plus, Q est un endomorphisme delta donc on a vu précédemment que $\mathrm{Q}1 = 0$. Comme $q_0 = 1$, on a donc $\mathrm{T}\circ\mathrm{Q}(q_0) = 0$. De plus, $\mathrm{D}\circ\mathrm{T}(q_0) = \mathrm{D}1 = 0$. Finalement, $\mathrm{D}\circ\mathrm{T}(q_n) = \mathrm{T}\circ\mathrm{Q}(q_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme (q_n) est une base de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{D}\circ\mathrm{T} = \mathrm{T}\circ\mathrm{Q}$ puis $\mathrm{D} = \mathrm{T}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{T}^{-1}$.

44 En posant $\mathrm{V} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ p & \longmapsto & p(x/\alpha) \end{array}\right.$, on a $\mathrm{W}\circ\mathrm{V} = \mathrm{V}\circ\mathrm{W} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]}$ donc W est inversible : c'est bien un automorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{W}^{-1} = \mathrm{V}$.

45 On a clairement $\mathrm{D}\circ\mathrm{W} = \alpha\mathrm{W}\circ\mathrm{D}$. On rappelle que $\mathrm{L} = \mathrm{D}\circ(\mathrm{D}-\mathrm{I})^{-1}$ d'après la question **15**. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \mathrm{W}\circ\mathrm{L}\circ\mathrm{W}^{-1} \\
&= \mathrm{W}\circ\mathrm{D}\circ(\mathrm{D}-\mathrm{I})^{-1}\circ\mathrm{W}^{-1} \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathrm{D}\circ\mathrm{W}\circ(\mathrm{W}\circ(\mathrm{D}-\mathrm{I}))^{-1} \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathrm{D}\circ\mathrm{W}\circ\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{D}\circ\mathrm{W}-\mathrm{W}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathrm{D}\circ\mathrm{W}\circ\left(\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{D}-\mathrm{I}\right)\circ\mathrm{W}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathrm{D}\circ\mathrm{W}\circ\mathrm{W}^{-1}\circ\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{D}-\mathrm{I}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathrm{D}\circ\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{D}-\mathrm{I}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

46 On utilise à nouveau l'unicité de la suite (p_n).

- $\ell_0(\alpha\mathrm{X}) = 1$.
- Comme $\alpha \neq 0$, $\deg \ell_n(\alpha\mathrm{X}) = \deg \ell_n = n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ell_n(\alpha\cdot 0) = \ell_n(0) = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(\ell_n(\alpha\mathrm{X})) = \mathrm{W}\circ\mathrm{L}\circ\mathrm{W}^{-1}(\ell_n(\alpha\mathrm{X})) == \mathrm{W}\circ\mathrm{L}(\ell_n) = \mathrm{W}(\ell_{n-1}) = \ell_{n-1}(\alpha\mathrm{X})$$

On en déduit que $p_n = \ell_n(\alpha X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

47 On rappelle que $(D - I) \circ L = D$ donc $D \circ L - L = D$ puis $D \circ (L - I) = L$ et enfin, $D = L \circ (L - I)^1$. En reportant dans l'expression trouvée à la question **45**, on obtient

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{\alpha} L \circ (L - I)^{-1} \circ \left(\frac{1}{\alpha} L \circ (L - I)^{-1} - I\right)^{-1} \\
&= L \circ \left(\alpha\left(\frac{1}{\alpha} L \circ (L - I)^{-1} - I\right) \circ (L - I)\right)^{-1} \\
&= L \circ \left(\left(L \circ (L - I)^{-1} - \alpha I\right) \circ (L - I)\right)^{-1} \\
&= L \circ (L - \alpha(L - I))^{-1} \\
&= L \circ (\alpha I + (1 - \alpha)L)^{-1}
\end{aligned}$$

48 D'après la question **43** que $D = T \circ L \circ T^{-1}$ ou encore $T \circ L = D \circ T$. Ainsi

$$\begin{aligned}
Q &= T \circ P \circ T^{-1} \\
&= T \circ L \circ (\alpha I + (1 - \alpha)L)^{-1} \circ T^{-1} \\
&= D \circ T \circ (\alpha I + (1 - \alpha)L)^{-1} \circ T^{-1} \\
&= D \circ (T \circ (\alpha I + (1 - \alpha)L) \circ T^{-1})^{-1} \\
&= D \circ (\alpha I + (1 - \alpha)D)^{-1}
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{I}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ dont les éléments inversibles ont encore leurs inverses dans $\mathcal{I}$, Q est bien shift-invariant. Comme $(\alpha I + (1 - \alpha)D)^{-1}$ est inversible, $\deg(\alpha I + (1 - \alpha)D)^{-1}X = \deg X = 1$ puis $\deg QX = 0$ i.e. $QX \in \mathbb{K}^*$. On en déduit que Q est bien un endomorphisme delta.
On applique ensuite la question **40** avec $U = (\alpha I + (1 - \alpha)D)^{-1}$. On a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
r_n &= \frac{X}{n!} U^{-n}(X^{n-1}) \\
&= \frac{X}{n!}(\alpha I + (1 - \alpha)D)^n(X^{n-1}) \\
&= \frac{X}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} D^{n-k}(X^{n-1}) &&= \frac{X}{n!} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} X^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{n} \binom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} \frac{X^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}
\end{aligned}$$

49 Par linéarité de T^{-1},

$$T^{-1} r_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} T^{-1}\left(\frac{X^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} \ell_k(X)$$

Montrons ensuite que $T^{-1} r_n = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, $T^{-1} r_0 = T^{-1} 1 = T^{-1}(X^0/0!) = \ell_0 = 1$.
- Comme T^{-1} est inversible, $\deg T^{-1} r_n = \deg r_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- D'après le calcul précédent, $(T^{-1} r_n)(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car $\ell_k(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(T^{-1} r_n) = (P \circ T^{-1})(r_n) = (T^{-1} \circ Q)(r_n) = T^{-1}(Q r_n) = T^{-1} r_{n-1}$$

Par unicité de la suite (p_n) associé à P, $T^{-1} r_n = p_n = \ell_n(\alpha X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui conclut.