Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Centrale-Supélec Maths 2 MP 2004

I Matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ carrées d'ordre 2 à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Dans les parties I, II, III, les lettres a, b, c, d désignent des éléments de $\mathbb{Z}$. On pose :

$$\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Démontrer que l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un anneau.

2 **2.a** Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication, appelé le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

2.b Montrer que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \iff |ad - bc| = 1$$

3 On pose

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = 1 \right\}$$

3.a Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

3.b Déterminer l'ensemble des couples $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

3.c Déterminer l'ensemble des couples $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

3.d Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur le couple (a, b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour qu'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$?

$\boxed{4}$ Soient S et T les éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ définis par

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chacune des trois matrices T, S et TS, répondre aux questions suivantes :

4.a La matrice est-elle diagonalisable, ou à défaut trigonalisable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Donner une forme réduite éventuelle ainsi qu'une matrice de passage.

4.b La matrice est-elle diagonalisable, ou à défaut trigonalisable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Donner une forme réduite éventuelle ainsi qu'une matrice de passage.

$\boxed{5}$ On cherche les matrices A de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telles que $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$.

5.a Soit A une telle matrice. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser les formes réduites diagonales possibles de A.

5.b En déduire l'ensemble des matrices solutions A.

$\boxed{6}$ On cherche les matrices A de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telles que

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.a Soit A une telle matrice. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et calculer la trace tr(A) de A.

6.b Donner la forme générale des matrices solutions A en fonction des trois paramètres a, b, c et d'une relation liant ces trois paramètres.

$\boxed{7}$ **7.a** Démontrer que si deux matrices U et V de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont semblables en tant que matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7.b En déduire que les matrices A de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ solutions de l'équation :

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II Réseaux de $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{H}$ le demi-plan ouvert défini par $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

$\mathcal{B} = (\alpha, \beta)$ étant une base de $\mathbb{C}$ considéré comme plan vectoriel réel, on appelle réseau engendré par $\mathcal{B}$ l'ensemble

$$\Lambda_{\mathcal{B}} = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta = \{u\alpha + v\beta, (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Pour simplifier les notations, un réseau sera généralement désigné par la lettre Λ, sans préciser quelle base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}$ l'engendre.

$\boxed{8}$ **8.a** De quelle structure algébrique est doté un réseau Λ ?

8.b Démontrer que tout réseau Λ peut être engendré par une base $\mathcal{B} = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{C}$ telle que $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{H}$.

8.c Démontrer que pour tout quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz+d \neq \neq 0$, on a

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\operatorname{Im}(z)$$

$\boxed{9}$ **9.a** Démontrer que si deux bases $\mathcal{B} = (\omega_1, \omega_2)$ et $\mathcal{B}' = (\omega_1', \omega_2')$ de $\mathbb{C}$ telles que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathcal{H} \text{ et } \frac{\omega_1'}{\omega_2'} \in \mathcal{H}$$

engendrent le même réseau Λ, alors il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

9.b Etudier la réciproque.

$\boxed{10}$ On considère un réseau Λ engendré par une base $\mathcal{B} = (\omega_1, \omega_2)$ de $\mathbb{C}$ telle que $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathcal{H}$.

Déterminer l'ensemble des couples $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\mathcal{B}' = (\omega_1', \omega_2')$ avec $\omega_1' = 3\omega_1 + 5\omega_2$ et $\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2$ soit une base de $\mathbb{C}$ engendrant également le réseau Λ.

$\boxed{11}$ Pour tout complexe $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ on note Λ_τ le réseau engendré par la base $(\tau, 1)$ de $\mathbb{C}$. On suppose que $\tau \in \mathcal{H}$. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $\tau' \in \mathcal{H}$ vérifie $\Lambda_{\tau'} = \Lambda_\tau$.

III Similitudes directes de centre O laissant stable un réseau

Si Λ est un réseau et z un nombre complexe, on pose $z\Lambda = \{z\rho; \rho \in \Lambda\}$.
On dit que deux réseaux Λ et Λ' sont semblables s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda' = \lambda\Lambda$.

$\boxed{12}$ **12.a** Démontrer que tout réseau Λ est semblable à un réseau Λ_τ où $\tau \in \mathcal{H}$.

12.b Démontrer que deux réseaux Λ_τ et $\Lambda_{\tau'}$, où $(\tau, \tau') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, sont semblables si et seulement si il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\tau' = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$.

La fin de la partie III montre qu'il existe des similitudes directes de centre O*, autres que des homothéties, laissant stable un réseau donné* Λ.

$\boxed{13}$ Soit Λ un réseau.

13.a Indiquer, sans faire de démonstration, le lien existant entre l'ensemble $\mathrm{S}(\Lambda) = \{z \in \mathbb{C}; z\Lambda \subset \Lambda\}$ et l'ensemble des similitudes directes σ de centre O laissant stable le réseau Λ, c'est-à-dire telles que $\sigma(\Lambda) \subset \Lambda$.

13.b Quel est l'ensemble des homothéties de centre O laissant stable le réseau Λ ? En déduire l'ensemble $\mathrm{S}(\Lambda) \cap \mathbb{R}$.

13.c De quelle structure algébrique est doté l'ensemble $\mathrm{S}(\Lambda)$?

13.d $\mathcal{B} = (\omega_1, \omega_2)$ étant une base de $\mathbb{C}$, on pose $\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$.

Comparer les ensembles $\mathrm{S}(\Lambda_\mathcal{B})$ et $\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$.

13.e Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre les ensembles $\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$ et Λ_τ ?

$\boxed{14}$ τ étant un complexe de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on considère le réseau Λ_τ engendré par la base $(\tau, 1)$ de $\mathbb{C}$.

14.a On suppose que l'ensemble $\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$ n'est pas réduit à $\mathbb{Z}$. Montrer que τ est alors racine d'un polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

14.b Réciproquement, on suppose que τ est racine non réelle d'un polynôme $P(X) = uX^2 + vX + w$ du second degré à coefficients u, v, w dans $\mathbb{Z}$.

14.b.i Montrer que $S(\Lambda_\tau)$ n'est pas contenu dans $\mathbb{R}$.

14.b.ii Que dire des ensembles $S(\Lambda_\tau)$ et Λ_τ si $u = 1$?

IV Action du groupe Γ des homographies associées à $SL_2(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble $\mathcal{H}$

Dans cette dernière partie, on étudie l'action de ce groupe Γ *sur l'ensemble* $\mathcal{H}$.

On introduit au ***18*** *un sous-ensemble fondamental* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{H}$. *On montre aux questions et* ***20*** *que* Γ *est engendré par les homographies* s *et* t *associées aux matrices* S *et* T *introduites au* ***4*** *et qu'un système de représentants des orbites de* Γ *est constitué par les points de* $\mathcal{F}$.

A toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$ on associe l'application $g : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall \tau \in \mathcal{H}, g(\tau) = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$.

15 **15.a** Montrer que l'on a $g(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$.
On identifie dorénavant g avec l'application de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$ qu'elle induit.
Lorsque la matrice A parcourt $SL_2(\mathbb{Z})$, l'application correspondante g de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$ décrit un ensemble noté Γ.
Dans la suite de cette question on s'intéresse aux propriétés de la surjection

$$\Phi : \begin{cases} SL_2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Gamma \\ A & \longmapsto & g \end{cases}$$

15.b Montrer que $\Phi(A) \circ \Phi(A') = \Phi(AA')$. En déduire que la loi $\circ$ de composition des applications est une loi interne sur Γ.

15.c Pour tout $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, montrer que $\Phi(A)$ est une bijection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$ et que l'on a $[\Phi(A)]^{-1} = \Phi\left(A^{-1}\right)$. En déduire que $(\Gamma, \circ)$ est un groupe.

15.d Montrer que $\Phi(A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \iff A = \pm I_2$.

15.e **15.e.i** Résoudre l'équation $\Phi(A') = \Phi(A)$.

15.e.ii En utilisant les matrices S et T définies à la question **4**, vérifier que le groupe $(\Gamma, \circ)$ n'est pas commutatif.

16 **16.a** Montrer que le cercle $\mathcal{C}(\omega, R)$ de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ a pour équation

$$|z|^2 - \left(\omega\overline{z} + \overline{\omega}z\right) + |\omega|^2 = R^2$$

A quelle condition nécessaire et suffisante ce cercle est-il inclus dans $\mathcal{H}$?

16.b On appelle s l'application de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$ associée à la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ définie à la question **4**, c'est-à-dire l'élément $s = \Phi(S)$ de Γ. Déterminer l'image par s d'un cercle $\mathcal{C}(\omega, R)$ inclus dans $\mathcal{H}$.

17 **17.a** Trouver l'image par s d'une droite $\mathcal{D}$ incluse dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire d'une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \beta$, avec $\beta > 0$.

17.b Trouver l'image par s d'une demi-droite $\mathcal{D}_+$ d'équation $\begin{cases} x = \alpha \\ y > 0 \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, incluse dans $\mathcal{H}$.

18 On introduit le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}$, défini par

$$\mathcal{F} = \left\{\tau \in \mathcal{H} \mid |\tau| \geq 1, |\operatorname{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2}\right\}$$

On appelle t l'application de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$ associée à la matrice $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ définie à la question **4**, c'est-à-dire l'élément $t = \Phi(\mathrm{T})$ de Γ. Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{F}$ et ses images $t(\mathcal{F})$ et $t^{-1}(\mathcal{F})$ par les applications t et t^{-1}.

19 On note G le sous-groupe de Γ engendré par l'ensemble $\{s, t\}$. Soit τ un élément de $\mathcal{H}$.

19.a Montrer qu'il existe un élément $\mathrm{g}_0 \in \mathrm{G}$ tel que

$$\forall \mathrm{g} \in \mathrm{G},\ \operatorname{Im}(\mathrm{g}(\tau)) \leq \operatorname{Im}(\mathrm{g}_0(\tau))$$

19.b On pose alors $\tau' = \mathrm{g}_0(\tau)$. Démontrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$|\operatorname{Re}(t^m(\tau'))| \leq \frac{1}{2}$$

19.c Vérifier que $|t^m(\tau')| \geq 1$ et en conclure que $t^m(\tau') \in \mathcal{F}$.

20 On peut démontrer le résultat suivant, que l'on admettra ici : si $\tau \in \mathcal{F}$ et si pour un élément $g \in \Gamma$, avec $g \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, on a $\mathrm{g}(\tau) \in \mathcal{F}$ alors τ est un point frontière de $\mathcal{F}$, autrement dit on a

$$\operatorname{Re}(\tau) = \pm\frac{1}{2} \text{ ou } |\tau| = 1$$

En utilisant ce résultat ainsi que ceux de la section **19**, démontrer que $\mathrm{G} = \Gamma$.

Indication : on pourra considérer un point τ intérieur à $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire $\tau \in \mathring{\mathcal{F}}$) et son image $\mathrm{g}(\tau)$ par $g \in \Gamma$.