# Devoir à la maison n°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1

**1** La série $\sum \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $x > 1$. Le domaine de définition de $\zeta$ est donc $]1, +\infty[$.

**2** Si $x \leq 0$, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge grossièrement. Si $x > 0$, la suite de terme général $\frac{1}{n^x}$ est décroissante de limite nulle de sorte que $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées. On en déduit que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

**3** **3.a** En utilisant le développement limité classique $\ln(u) \underset{u\to 0}{=} u + \mathcal{O}(u^2)$,

$$\ln(n) - \ln(n-1) = -\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

**3.b** Posons $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$. D'après la question précédente,

$$u_{n-1} - u_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que la série télescopique $\sum u_{n-1} - u_n$ converge. Par conséquent, la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\gamma$. Autrement dit

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

**3.c** Notons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ de sorte que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \mathrm{F}(1)$. Remarquons que

$$\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1-(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k} = \mathrm{H}_n$$

car les termes d'indices impairs de la somme sont nuls. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{2n} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + o(1)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + o(1)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{F}(1) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{2n} = \ln(2)$$

**4** Pour tout $x \in [2, +\infty[$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.
Notamment, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{\infty} f_n = \delta_{n,1}$, le théorème d'interversion série/limite permet d'affirmer que

$$\lim_{+\infty} \mathrm{F} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

$\boxed{5}$ **5.a** Posons $\varphi_x(t) = \dfrac{\ln t}{t^x} = \ln(t)e^{-x\ln t}$. La fonction $\varphi_x$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi_x'(t) = \frac{1 - x\ln(t)}{t} \cdot e^{-x\ln t}$$

La fonction $\varphi_x$ est donc croissante sur $]0, e^{1/x}]$ et décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)$ est décroissante à partir du rang $\lceil e^{1/x} \rceil$.

**5.b** Remarquons que $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour $x > 0$, $f_n(x) = (-1)^{n-1}e^{x\ln n}$ puis $f_n'(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n^x}$.
Fixons $x > 0$. Comme la suite de terme général $\dfrac{\ln n}{n^x}$ est décroissante à partir d'un certain rang (d'après la question précédente) de limite nulle (croissances comparées), $\sum f_n'(x)$ converge d'après la critère spécial des séries alternées. Ainsi $\sum f_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
En posant $\mathrm{N} = \lceil e^{1/a} \rceil$, pour $x \geq a$, la suite $\dfrac{\ln n}{n^x}$ est décroissante à partir du rang N (en effet $\lceil e^{1/x} \rceil \leq \lceil e^{1/a} \rceil$). Le critère spécial des séries alternées permet alors d'affirmer que, pour $n \geq \mathrm{N}$ et $x \geq a$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n'(x)\right| \leq |f_{n+1}'(x)| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0$, la suite des restes de la série $\sum f_n'$ converge uniformément vers 0 sur $[a, +\infty[$. On en déduit que $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
Finalement, $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, +\infty[$, les $f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, ce qui implique que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{6}$ Soit $x > 1$.

$$\mathrm{F}(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x}$$

Les termes d'indices pairs sont nuls donc

$$\mathrm{F}(x) - \zeta(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^x} = -\frac{1}{2^{x-1}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x} = -2^{1-x}\zeta(x)$$

ou encore

$$\mathrm{F}(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$$

On peut également écrire

$$\zeta(x) = \frac{1}{1 - 2^{1-x}}\mathrm{F}(x)$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - 2^{1-x} = 1$ et on a vu à la question **4** que $\displaystyle\lim_{+\infty} \mathrm{F} = 1$, donc $\displaystyle\lim_{+\infty} \zeta = 1$.

$\boxed{7}$ **7.a** Si $x > 1$, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ converge absolument donc le produit de Cauchy de cette série par elle-même converge elle-même absolument. De plus,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}\right)^2 = \mathrm{F}(x)^2$$

**7.b** Soit $x > 0$. Pour tout $n \geq 2$,

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^x} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^x} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}$$

Tous les termes de la somme étant positifs,

$$|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}$$

De plus, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$k(n-k) = nk - k^2 = \frac{n^2}{4} - \left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}$$

donc
$$|c_n(x)| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n^2/4)^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$$
De plus, $\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^x n^{1-2x}$ de sorte que, si l'on suppose $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $1-2x \geq 0$ et la suite de terme général $\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$ ne converge pas vers 0. A fortiori, la suite de terme général $c_n(x)$ ne converge pas vers 0. La série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ diverge donc grossièrement.

$\boxed{8}$ **8.a** On trouve sans difficulté :
$$\frac{1}{\mathrm{X}(n-\mathrm{X})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-\mathrm{X})+\mathrm{X}}{\mathrm{X}(n-\mathrm{X})} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\mathrm{X}} + \frac{1}{n-\mathrm{X}}\right)$$
Ainsi
$$c_n(1) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} = \frac{2(-1)^n \mathrm{H}_{n-1}}{n}$$
**8.b** Pour tout entier $n \geq 2$,
$$\frac{\mathrm{H}_n}{n+1} - \frac{\mathrm{H}_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(n+1)}(n\mathrm{H}_n - (n+1)\mathrm{H}_{n-1}) = \frac{1}{n(n+1)}(n(\mathrm{H}_n - \mathrm{H}_{n-1}) - \mathrm{H}_{n-1}) = \frac{1}{n(n+1)}(1 - \mathrm{H}_{n-1}) \leq 0$$
La suite $\left(\frac{\mathrm{H}_{n-1}}{n}\right)$ est donc décroissante.

**8.c** Remarquons que
$$\frac{\mathrm{H}_{n-1}}{n} = \frac{\mathrm{H}_n}{n} - \frac{1}{n^2}$$
D'après la question **3.b**, $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{n} = 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{H}_{n-1}}{n} = 0$. On rappelle que
$$c_n(1) = \frac{2(-1)^n \mathrm{H}_{n-1}}{\ln(n)}$$
La suite $\left(\frac{\mathrm{H}_{n-1}}{n}\right)$ est décroissante de limite nulle, donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum c_n(1)$ converge.

$\boxed{9}$ **9.a** Comme F est dérivable en 1, on peut écrire
$$\mathrm{F}(x) \underset{x\to1}{=} \mathrm{F}(1) + \mathrm{F}'(1)(x-1) + o(x-1)$$
Or on a vu à la question **3.c** que $\mathrm{F}(1) = \ln(2)$ donc
$$\mathrm{F}(x) \underset{x\to1}{=} \ln(2) + \mathrm{F}'(1)(x-1) + o(x-1)$$
Par ailleurs, $2^{1-x} = e^{-\ln(2)(x-1)}$ donc, en utilisant le développement limité de l'exponentielle,
$$2^{1-x} \underset{x\to1}{=} 1 - \ln(2)(x-1) + \frac{\ln(2)^2}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$
puis
$$1 - 2^{1-x} \underset{x\to1}{=} \ln(2)(x-1) - \frac{\ln(2)^2}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$
**9.b** On a vu à la question **6** que, pour $x > 1$,
$$\mathrm{F}(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$$
Ainsi
$$\begin{aligned}
\zeta(x) &= \frac{\mathrm{F}(x)}{1-2^{1-x}} \\
&\underset{x\to1^+}{=} \frac{\ln(2) + \mathrm{F}'(1)(x-1) + o(x-1)}{\ln(2)(x-1)\left(1 - \frac{\ln(2)}{2}(x-1) + o(x-1)\right)} \\
&\underset{x\to1^+}{=} \frac{1}{\ln(2)(x-1)}(\ln(2) + \mathrm{F}'(1)(x-1) + o(x-1))\left(1 + \frac{\ln(2)}{2}(x-1) + o(x-1)\right) \\
&\underset{x\to1^+}{=} \frac{1}{\ln(2)(x-1)}\left(\ln(2) + \left(\mathrm{F}'(1) + \frac{\ln(2)^2}{2}\right)(x-1) + o(x-1)\right) \\
&\underset{x\to1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \frac{\mathrm{F}'(1)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

$\boxed{10}$ **10.a** Soient $n \geq 1$ et $x \in [1,2]$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est donc décroissante sur $[n, n+1]$ i.e.

$$\forall t \in [n, n+1],\ \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

Par conséquent,

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

**10.b** Soit $x \in [1,2]$. La suite de terme général $\frac{1}{n^x}$ converge (vers 0). On en déduit que la suite télescopique $\sum \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$ converge également. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_n(x)$ converge également.
Remarquons que

$$\sum_{k=1}^n v_k(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{H}_n - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{H}_n - \ln(n+1) = \mathrm{H}_n - \ln(n) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ et on a vu à la question **3.b** que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n - \ln(n) = \gamma$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n v_k(1) = \gamma$$

**10.c** Soit $x \in ]1,2]$.

$$\sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} + \frac{1}{1-x}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$$

En passant à la limite, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$$

**10.d** On sait déjà que la série $\sum v_n$ converge simplement sur $[1,2]$. De plus, d'après la question **10.a**,

$$\forall x \in [1,2],\ 0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1}$$

Ainsi le reste de la série $\sum v_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[1,2]$. On en déduit que $\sum v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$.

**10.e** Montrons tout d'abord que

$$\lim_{x\to1^+} v_n(x) = v_n(1)$$

On pourrait pour cela appliquer le théorème de convergence dominée mais on peut également raisonner comme suit.

$$\forall x > \in ]1,2],\ v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x}\left((n+1)^{1-x} - n^{1-x}\right)$$

Tout d'abord, $\lim_{x\to1^+} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$. De plus

$$(n+1)^{1-x} - n^{1-x} = e^{(1-x)\ln(n+1)} - e^{(1-x)\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} (1-x)(\ln(n+1) - \ln(n)) + o(1-x)$$

donc

$$\lim_{x\to1^+} \frac{1}{1-x}\left((n+1)^{1-x} - n^{1-x}\right) = \ln(n+1) - \ln -n)$$

puis

$$\lim_{x\to1^+} v_n(x) = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = v_n(1)$$

Comme $\sum v_n$ converge uniformément sur $]1,2]$, on peut appliquer le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{x\to1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to1^+} v_n(x)$$

Autrement dit, d'après la question **10.c**,

$$\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) + \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \gamma$$

ou encore

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$

**11** On a montré que F était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à la question **5.b**. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{F}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln(n)}{n^x}$$

En particulier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln(n)}{n} = -\mathrm{F}'(1)$$

De plus, on a montré aux questions **9.b** et **10.e** que

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \frac{\mathrm{F}'(1)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{2} + o(1)$$

et que

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \frac{\mathrm{F}'(1)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{2} = \gamma$$

de sorte que

$$-\mathrm{F}'(1) = \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma\ln(2)$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln(n)}{n} = -\mathrm{F}'(1) = \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma\ln(2)$$