

# SÉRIES ET FAMILLES SOMMABLES

## Nature de séries

### Solution 1

- On suppose  $0 < b \leq 1$ . Dans ce cas,  $b^n = o(2^{\sqrt{n}})$  puis  $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim 2^{\sqrt{n}}$ . Finalement  $u_n \sim a^n$ . On en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge pour  $0 < a < 1$  et diverge vers  $+\infty$  sinon.
- On suppose  $b > 1$ . Dans ce cas,  $2^{\sqrt{n}} = o(b^n)$  et donc  $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim b^n$ . Finalement,  $u_n \sim \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$ . Posons  $v_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$ . Alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a}{b} 2^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{a}{b} 2^{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{b}$$

D'après la règle de d'Alembert

- si  $a < b$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge ;
- si  $a > b$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge (grossièrement).

Enfin, si  $a = b$ ,  $u_n \sim 2^{\sqrt{n}}$  donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge grossièrement.

### Solution 2

Supposons que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge. Alors  $(S_n)$  converge vers la somme  $S > 0$  de cette série. On a donc  $\frac{u_n}{S_n} \sim \frac{u_n}{S}$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$  converge donc.

Supposons que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge. Puisque cette série est à termes positifs, elle diverge donc vers  $+\infty$ . Si  $\frac{u_n}{S_n}$  ne tend pas vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$  diverge grossièrement. Sinon,  $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \sim -\frac{u_n}{S_n}$  donc les séries de terme général  $\frac{u_n}{S_n}$  et  $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$  sont de même nature. Or

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) &= \sum_{n=1}^N \ln \frac{S_{n-1}}{S_n} \\ &= \sum_{n=1}^N (\ln S_{n-1} - \ln S_n) = \ln S_0 - \ln S_N \end{aligned}$$

Or  $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$  puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge vers  $+\infty$ . Ainsi  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$  diverge de même que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$ .

Les deux séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$  sont donc toujours de même nature.

### Solution 3

- Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$  pour  $n \geq N$ . Par télescopage, on obtient,  $\frac{u_n}{u_N} \leq \frac{v_n}{v_N}$  i.e.  $u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$  pour tout  $n \geq N$ . On a donc  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .

2. a. Soit  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \alpha$  et posons  $v_n = \frac{1}{n^\beta}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a alors

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} \\ &= 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi  $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\alpha - \beta}{n}$ . Puisque  $\alpha - \beta > 0$ , on a donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$  à partir d'un certain rang. D'après la première question,  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge car  $\beta > 1$  et, comme elle est à termes positifs, sa convergence entraîne celle de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

- b. Cette fois-ci, on se donne  $\beta$  tel que  $\alpha < \beta < 1$  et on pose à nouveau  $v_n = \frac{1}{n^\beta}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . On montre comme précédemment que  $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ . La divergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  entraîne la divergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

- c. Si on pose  $u_n = \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  diverge.

Si on pose maintenant  $u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$  pour  $n \geq 2$ , on a à nouveau  $u_n = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Mais la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x \ln^2 x}$  étant décroissante, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t}$  sont de même nature. Or une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t}$  est  $t \mapsto -\frac{1}{\ln t}$ , ce qui prouve la convergence de l'intégrale précédente et par conséquent celle de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

3. On a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{2n}} \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Autrement dit,  $\alpha = \frac{1}{2} < 1$  avec les notations précédentes. La série de terme général  $u_n$  diverge.

**REMARQUE.** Le critère de Raabe-Duhamel permet de conclure (sauf si  $\alpha = 1$ ) dans les cas où le critère de d'Alembert ne le permet pas ( $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ ).

#### Solution 4

1. On sait que  $\tan x = x + \mathcal{O}(x^2)$  donc  $\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  converge et est à termes positifs, il en est de même de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ .

2. Puisque  $e^x = 1 + x + o(x)$ ,

$$\sqrt[3]{3} = e^{\frac{\ln 3}{3}} = 1 + \frac{\ln 3}{3} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\sqrt[3]{2} = e^{\frac{\ln 2}{3}} = 1 + \frac{\ln 2}{3} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit que

$$\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \sim \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{3}$$

Puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge, il en est de même de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})$ .

3. Puisque  $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

De plus,  $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$  donc

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim -\frac{1}{2n}$$

Puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge, il en est de même de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ .

4. Puisque  $\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^4)$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) = 1 + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque  $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^5)$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n} = 1 + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  converge et est à termes positifs, il en est de même de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)$ .

### Solution 5

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{4} < 1$$

La série  $\sum u_n$  est donc convergente d'après la règle de D'Alembert.

### Solution 6

Puisque la suite  $(u_n)$  est à valeurs strictement positives, on peut écrire :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = a[(n+1)^2 - n^2] + (n+1)^3 \ln\left(1 - \frac{a}{n+1}\right) - n^3 \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right)$$

En utilisant le développement limité de  $u \mapsto \ln(1+u)$  à l'ordre 3 en 0, on trouve

$$\begin{aligned} (n+1)^3 \ln\left(1 - \frac{a}{n+1}\right) &= -a(n+1)^2 - a^2(n+1) - a^3 + o(1) \\ n^3 \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) &= -an^2 - a^2n - a^3 + o(1) \end{aligned}$$

Finalement  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -a^2 + o(1)$  et donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-a^2}$ . Si  $a \neq 0$ ,  $e^{-a^2} < 1$  et le critère de d'Alembert permet de conclure à la convergence de la série de terme général  $u_n$ . Si  $a = 0$ , il suffit de voir que  $u_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  pour conclure à la divergence de cette même série.

**Solution 7**

- Si  $\beta \geq 0$ , alors  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$  pour  $n \geq 3$ . Or la série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge puisque  $\alpha > 1$ . On en déduit que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.  
Si  $\beta < 0$ , donnons-nous  $\gamma \in ]1, \alpha[$ . Alors  $(\ln n)^{-\beta} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^{\alpha-\gamma})$  par croissances comparées. Ceci signifie que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ . Or la série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\gamma}$  est à termes positifs et converge puisque  $\gamma > 1$ . On en déduit que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.
- Si  $\beta \leq 0$ , alors  $0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq u_n$  pour  $n \geq 3$ . Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  diverge donc  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge.  
Si  $\beta > 0$ , donnons-nous  $\gamma \in ]\alpha, 1[$ . Alors  $(\ln n)^\beta \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^{\gamma-\alpha})$  par croissances comparées. Ceci signifie que  $\frac{1}{n^\gamma} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$ . Or la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  est à termes positifs et la série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\gamma}$  diverge puisque  $\gamma < 1$ . On en déduit que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge.
- On a alors  $0 \leq \frac{1}{n} \leq u_n$  pour  $n \geq 3$ . Or la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge. On en déduit que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge.
- Posons  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$  pour  $x > 1$ .  $f$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$  de sorte que

$$\forall n \geq 3, 0 \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq u_n \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

Si  $\beta \neq 1$ , alors  $x \mapsto \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}$  est une primitive de  $f$  de sorte qu'en posant  $v_n = \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta}$ ,

$$\forall n \geq 3, 0 \leq v_{n+1} - v_n \leq u_n \leq v_n - v_{n-1}$$

Si  $\beta > 1$ ,  $(v_n)$  converge (vers 0) donc la série télescopique  $\sum v_n - v_{n-1}$  converge. Ainsi  $\sum u_n$  converge par comparaison de séries à termes positifs.

Si  $\beta < 1$ ,  $(v_n)$  diverge (vers  $+\infty$ ) donc la série télescopique  $\sum v_{n+1} - v_n$  diverge. Ainsi  $\sum u_n$  diverge par comparaison de séries à termes positifs.

Si  $\beta = 1$ , alors  $x \mapsto \ln(\ln x)$  est une primitive de  $f$  de sorte qu'en posant  $v_n = \ln(\ln n)$ ,

$$\forall n \geq 3, 0 \leq v_{n+1} - v_n \leq u_n \leq v_n - v_{n-1}$$

A nouveau,  $(v_n)$  diverge (vers  $+\infty$ ) donc la série télescopique  $\sum v_{n+1} - v_n$  diverge. Ainsi  $\sum u_n$  diverge par comparaison de séries à termes positifs.

**Solution 8**

- Soit  $q \in ]\ell, 1[$ . Par définition de la limite, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq q$  pour  $n \geq N$ . Ainsi  $0 \leq u_n \leq q^n$  pour  $n \geq N$ . Puisque la série  $\sum q^n$  converge, il en est de même de la série  $\sum u_n$ .
- Soit  $q \in ]1, \ell[$ . Par définition de la limite, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq q \leq \sqrt[n]{u_n}$  pour  $n \geq N$ . Ainsi  $0 \leq q^n \leq u_n$  pour  $n \geq N$ . Puisque la série  $\sum q^n$  diverge, il en est de même de la série  $\sum u_n$ .
- Posons  $u_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$  et  $\sum u_n$  diverge.  
Posons  $u_n = \frac{1}{n^2}$ . Alors  $\sqrt[n]{u_n} = \exp\left(-\frac{2 \ln n}{n}\right)$  d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$  et  $\sum u_n$  converge.

**Solution 9**

1. L'inegalité est clairement vraie pour  $n = 0$ . Supposons la vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq k|x_{n+1} - x_n| \leq k^{n+1}|x_1 - x_0|$$

Par récurrence, l'inégalité est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. D'après la question précédente  $x_{n+1} - x_n = \mathcal{O}(k^n)$  avec  $k \in [0, 1[$  donc la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} - x_n$  converge (absolument). Ceci signifie que la suite  $(x_n)$  converge.

3. Notons  $\ell$  la limite de  $(x_n)$ . Puisque  $f$  est continue (car lipschitzienne),  $\ell = f(\ell)$  donc  $\ell$  est un point fixe de  $f$ . Soit  $\ell'$  un point fixe de  $f$ . Alors

$$|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq k|\ell - \ell'|$$

ou encore

$$(1 - k)|\ell - \ell'| \leq 0$$

Puisque  $1 - k > 0$ ,  $|\ell - \ell'| = 0$  i.e.  $\ell = \ell'$ .  
 $f$  admet donc un unique point fixe.

### Solution 10

Pour tout entier  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}} & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n}{n-1} \left(2 - e^{\frac{1}{n}}\right) \\ & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \left(2 - e^{\frac{1}{n}}\right) \\ & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Par conséquent  $\sum v_n$  converge.

Mais comme  $v_n = \ln(nu_n) - \ln((n-1)u_{n-1})$ , on peut affirmer grâce au lien entre suite et série télescopique que la suite  $(\ln(nu_n))$  converge.

Notons  $\ell$  sa limite. Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = e^\ell$  i.e.  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^\ell}{n}$ . Comme la série à termes positifs  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, il en est de même de la série  $\sum u_n$ .

### Solution 11

1. La fonction  $f : x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$  est strictement décroissante sur  $]0, 1]$  (elle est dérivable et sa dérivée est  $x \mapsto -\frac{e^x}{x}$ ). Comme  $\frac{e^t}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ ,  $\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$  diverge. Puisque  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est positive,  $\lim_{0^+} f = +\infty$ . Par ailleurs,  $f(1) = 0$ . Enfin,  $f$  est continue sur  $]0, 1]$  donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $u_n \in ]0, 1]$  tel que  $f(u_n) = n$ .
2. D'après la question précédente,  $f$  induit une bijection strictement décroissante de  $]0, 1]$  sur  $[0, +\infty[$ . Sa bijection réciproque est donc également strictement décroissante. Comme  $u_n = f^{-1}(n)$ ,  $(u_n)$  est strictement décroissante. de plus,  $\lim_{0^+} f = +\infty$  donc  $\lim_{+\infty} f^{-1} = 0$ . Par conséquent,  $(u_n)$  converge vers 0.
3. Remarquons que

$$v_n = \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt - \int_{u_n}^1 \frac{dt}{t} = \int_{u_n}^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ , l'intégrale  $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$  converge. Comme  $(u_n)$  converge vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$$

4. Posons  $I = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ . Ainsi  $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -n + I + o(1)$  puis  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^I}{n}$ . On en déduit que  $\sum u_n$  diverge.

### Solution 12

On va raisonner par récurrence. Notons  $\mathcal{P}_p$  l'assertion

Pour tout  $n \in \llbracket 2^p, 2^{p+1} - 1 \rrbracket$ ,  $a_n$  est défini et  $a_n = 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} = 2^p$

$\mathcal{P}_0$  est évidemment vraie. Supposons  $\mathcal{P}_p$  vraie pour un certain  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soit alors  $n \in \llbracket 2^{p+1}, 2^{p+2} - 1 \rrbracket$ . Alors  $\lfloor n/2 \rfloor \in \llbracket 2^p, 2^{p+1} - 1 \rrbracket$  donc  $a_n$  est bien défini et

$$a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2 \cdot 2^p = 2^{p+1} = 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}$$

de sorte que  $\mathcal{P}_{p+1}$  est vraie.

Ainsi  $\mathcal{P}_p$  est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Comme la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$  est à termes positifs, elle converge ou diverge vers  $+\infty$ . Il suffit donc de considérer une suite extraite de la suite  $(S_n)$  de ses sommes partielles pour déterminer sa nature et sa somme éventuelle.

$$\forall p \in \mathbb{N}, S_{2^{p+1}-1} = \sum_{k=0}^p \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{a_j^2} = \sum_{k=0}^p \sum_{k=0}^p \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{(2^k)^2} = \sum_{k=0}^p \frac{2^k}{(2^k)^2} = \sum_{k=0}^p \frac{1}{2^k}$$

Ainsi  $S_{2^{p+1}-1}$  est la somme partielle de rang  $p$  de la série géométrique  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k}$ . On en déduit que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2^{p+1}-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$ . On en déduit

que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$  converge et que sa somme est 3.

**REMARQUE.** On aurait aussi pu utiliser le théorème de sommation par paquets à la famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et à la partition  $\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{p \in \mathbb{N}} \llbracket 2^p, 2^{p+1} - 1 \rrbracket$ .

### Solution 13

1. Si  $\alpha = 2$ , alors  $v_n = 1/2$  et  $\sum v_n$  diverge grossièrement.

Si  $\alpha > 2$ ,  $n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  puis  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et  $\sum v_n$  diverge grossièrement. Si  $\alpha < 2$ , alors  $n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  puis  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ . Dans ce cas,  $\sum v_n$  converge si et seulement si  $2 - \alpha > 1$  i.e.  $\alpha < 1$ .

Finalement,  $\sum v_n$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

2. Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ . Ainsi  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

Puisque  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  convergent,  $\sum \frac{1}{2}(a_n + b_n)$  converge. De plus,  $0 \leq \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n)$  donc  $\sum \sqrt{a_n b_n}$  converge par critère de majoration pour les séries à termes positifs.

3. Supposons que  $\sum u_n$  converge. Alors  $\sum \frac{1}{n^2} + u_n$  converge également. Supposons que  $\sum v_n$  converge. D'après la question précédente,

$\sum \sqrt{\left(\frac{1}{n^2} + u_n\right) v_n} = \sum \frac{1}{n}$  converge, ce qui n'est pas le cas. Ainsi  $\sum v_n$  diverge.

### Solution 14

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction arctan est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[n, n + \alpha]$  donc, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$u_n = |u_n| \leq \alpha \max_{t \in [n, n+\alpha]} |\arctan'| = \alpha \max_{t \in [n, n+\alpha]} \frac{1}{t^2} = \frac{\alpha}{n^2}$$

Comme  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge,  $\sum u_n$  converge par majoration du terme général d'une série à termes positifs.

## Calculs de sommes

### Solution 15

Considérons la fraction rationnelle  $F = \frac{X}{X^4 + X^2 + 1}$ . Elle admet une décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  du type

$$F = \frac{aX + b}{X^2 - X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}$$

L'imparité de  $F$  donne  $a = c$  et  $b = -d$ . En considérant la limite de  $xF(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $\pm\infty$ , on trouve  $a + c = 0$  et donc  $a = c = 0$ .

On trouve alors facilement  $b = \frac{1}{2}$  et  $d = -\frac{1}{2}$  d'où

$$F = \frac{1}{2(X^2 - X + 1)} - \frac{1}{2(X^2 + X + 1)}$$

On remarque alors que  $X^2 - X + 1 = X^2 - (X - 1)$  et que  $X^2 + X + 1 = (X + 1)^2 - X$ . Ainsi pour  $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^p \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p \frac{1}{n^2 - (n - 1)} - \frac{1}{(n + 1)^2 - n} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{(p + 1)^2 - p} \right) \text{ par télescope} \\ &\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi la série de l'énoncé converge bien et sa somme vaut  $\frac{1}{2}$ .

### Solution 16

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{n+p}{n}} &= \frac{p!}{(n + p)(n + p - 1) \dots (n + 1)} \\ &= \frac{p!}{p - 1} \frac{(n + p) - (n + 1)}{(n + p)(n + p - 1) \dots (n + 1)} \\ &= \frac{p!}{p - 1} \left( \frac{1}{(n + p - 1) \dots (n + 1)} - \frac{1}{(n + p) \dots (n + 2)} \right) \end{aligned}$$

Donc pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a par télescope

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{1}{\binom{n+p}{n}} &= \frac{p!}{p - 1} \sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{(n + p - 1) \dots (n + 1)} - \frac{1}{(n + p) \dots (n + 2)} \right) \\ &= \frac{p!}{p - 1} \left( \frac{1}{(p - 1) \dots 1} - \frac{1}{(N + p) \dots (N + 2)} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{p!}{(p - 1)(p - 1)!} = \frac{p}{p - 1} \end{aligned}$$

Ainsi la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$  converge et sa somme vaut  $\frac{p}{p - 1}$ .

### Solution 17

1. On reconnaît le développement de Taylor en 0 de  $\exp$ .

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  donc, a fortiori, de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur le segment d'extrémités 0 et  $x$ . De plus, la dérivée d'ordre  $n + 1$  de  $\exp$  est encore  $\exp$  pour tout  $t$  compris entre 0 et  $x$ ,  $|e^t| = e^t \leq M$  avec  $M = \max(e^x, 1)$  (pour éviter de distinguer suivant le signe de  $x$ ). En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et  $x$  à l'ordre  $n$ , on a

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Remarquons que  $M$  est indépendant de  $n$  donc l'inégalité précédente est valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par comparaison des suites de référence,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)!} = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$  par encadrement. La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  converge donc et sa somme est  $e^x$ .

## 2. On reconnaît les développements de Taylor en 0 de cos et sin.

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . cos et sin sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  donc, a fortiori, de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur le segment d'extrémités 0 et  $x$ . Une récurrence évidente montre que  $\cos^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin$  et  $\sin^{(2n+2)} = (-1)^{n+1} \cos$ . Il est alors évident que  $\cos^{(2n+1)}$  et  $\sin^{(2n+2)}$  sont majorées en valeur absolue par 1 sur  $\mathbb{R}$ . En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à cos entre 0 et  $x$  à l'ordre  $2n$ , on a

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à sin entre 0 et  $x$  à l'ordre  $2n+1$ , on a

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Par comparaison des suites de référence,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$$

Ceci permet de conclure que les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  convergent et ont respectivement pour sommes  $\cos x$  et  $\sin x$ .

**REMARQUE.** On peut, en reprenant la preuve de la première question, montrer que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$  converge et a pour somme  $e^{ix}$ . On obtient la convergence et la somme des séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  en passant à la partie réelle et imaginaire.

## 3. On reconnaît le développement de Taylor en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ .

Soient  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $f : t \mapsto \ln(1+t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, +\infty[$  donc, a fortiori, de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[0, x]$ . Une récurrence évidente montre que  $f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$  pour tout  $t \in ] -1, +\infty[$ . Ainsi pour tout  $t \in [0, x]$ ,

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq n!$$

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et  $x$  à l'ordre  $n$ , on a

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

car  $x \in [0, 1]$ . Par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = \ln(1+x)$ . La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$  converge donc et sa somme vaut  $\ln(1+x)$ .

## Solution 18

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \\ &= \ln(2) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \end{aligned}$$



On a pour tout  $t \in [0, 1]$

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

et par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$  puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

On en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge et que sa somme est  $\ln(2)$ .

### Solution 19

On sait, du moins j'espère, que

$$u_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Par une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{u_n} = 6 \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right)$$

On pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . On montre classiquement qu'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} &= 6 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{4}{2k+1} \right) \\ &= 6 \left( H_n + H_{n+1} - 1 - 4 \left( \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) \right) \\ &= 6 \left( H_n + H_{n+1} - 1 - 4 \left( H_{2n+1} - 1 - \frac{1}{2} H_n \right) \right) \\ &= 6(3H_n + H_{n+1} - 4H_{2n+1} + 3) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 6(3\ln(n) + 3\gamma + \ln(n+1) + \gamma - 4\ln(2n+1) - 4\gamma + 3 + o(1)) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 6 \left( \ln \left( \frac{n^3(n+1)}{(n+1/2)^4} \right) + 3 - 4\ln(2) + o(1) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 6(3 - 4\ln(2)) + o(1) \end{aligned}$$

car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3(n+1)}{(n+1/2)^4} = 1$ . On en déduit que  $\sum \frac{1}{u_n}$  converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = 6(3 - 4\ln(2))$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from math import log
>>> def somme(n):
...     s=0
...     S=0
...     for k in range(1,n+1):
```

```

...         s += k**2
...         S += 1/s
...     return S
...
>>> somme(1000), 6*(3-4*log(2))
(1.364466169557005, 1.3644676665613131)

```

## Solution 20

1. C'est du cours.

2. a. Supposons  $\lambda \neq 0$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$  et  $\sum u_n$  diverge. Si  $\lambda \in \{-\infty, +\infty\}$ ,  $\frac{1}{n} = o(u_n)$  et  $(u_n)$  est de signe constant à partir d'un certain rang donc  $\sum u_n$  diverge.  
Par l'absurde,  $\lambda = 0$ .

b. Remarquons que  $(u_n)$  est positive puisqu'elle est décroissante de limite nulle.

Notons  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Par décroissance de  $(u_n)$ ,

$$0 \leq 2nu_{2n} = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = 2(S_{2n} - S_n)$$

Comme  $\sum u_n$  converge,  $(S_{2n} - S_n)$  converge vers 0 puis  $(2nu_{2n})$  également via le théorème des gendarmes. Par ailleurs,

$$0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = 2nu_{2n} + u_{2n}$$

A nouveau,  $((2n+1)u_{2n+1})$  converge vers 0 par le théorème des gendarmes. On peut alors conclure que  $(nu_n)$  converge vers 0 puisque c'est le cas pour ses suites extraites  $(2nu_{2n})$  et  $((2n+1)u_{2n+1})$ .

c. Remarquons que

$$n(u_n - u_{n+1}) = (nu_n - (n+1)u_{n+1}) + u_{n+1}$$

Puisque la suite  $(nu_n)$  converge, la série télescopique  $\sum nu_n - (n+1)u_{n+1}$  converge. De plus,  $\sum u_{n+1}$  converge par hypothèse. Ainsi,  $\sum n(u_n - u_{n+1})$  converge comme somme de deux séries convergentes. On peut rajouter que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (nu_n - (n+1)u_{n+1}) + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

## Solution 21

Pour simplifier l'exercice, on remarquera que, via le changement de variable  $u = \tan x$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du$$

1. Pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \frac{u^n}{1+u^2} \leq u^n$  donc

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes,  $(I_n)$  converge vers 0.

2. Il est clair que

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}$$

3. Remarquons que

$$(-1)^n I_{2n} + (-1)^n I_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

donc en posant  $v_n = (-1)^n I_{2n}$ ,

$$v_n - v_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

La série télescopique  $\sum v_n - v_{n+1}$  converge puisque  $(v_n)$  converge vers 0. On en déduit que  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$  converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n - v_{n+1} = v_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

**REMARQUE.** On aurait aussi pu utiliser le critère spécial des séries alternées pour montrer que  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$  converge.

4. Pour tout  $u \in [0, 1]$ ,

$$\frac{u^n}{1+u^2} \leq \frac{u^{n+1}}{1+u^2}$$

donc  $I_{n+1} \leq I_n$ . La suite  $(I_n)$  converge vers 0 en décroissant donc la série  $\sum (-1)^n I_n$  converge d'après le critère spécial des séries alternées.

Posons  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k$ . Alors

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k u^k}{1+u^2} du && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} du && \text{somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{(1+u)(1+u^2)} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} du \end{aligned}$$

On prouve comme précédemment que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} du \leq \int_0^1 u^{n+1} du = \frac{1}{n+2}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} du = 0$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{du}{(1+u)(1+u^2)}$$

Par une décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-u}{1+u^2} + \frac{1}{1+u} \right)$$

donc

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2} \left[ \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \ln(1+u) \right]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$$

On vérifie avec Python.

```
>>> from numpy import pi, log
>>> from scipy.integrate import quad
>>> I=lambda n:quad(lambda u:u**n/(1+u**2),0,1)[0]
>>> S=sum([(-1)**n*I(n) for n in range(1000)])
>>> S, pi/8+log(2)/4
(0.5657357520891468, np.float64(0.5659858768387105))
```

## Comparaison série/intégrale

### Solution 22

On posera  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  lorsque  $\alpha > 1$ .

**Première méthode : comparaison à une intégrale.**

Il faut prendre garde au sens de variation de  $t \mapsto 1/t^\alpha$  pour encadrer.

- Supposons  $\alpha \leq 0$ . Par comparaison à une intégrale

$$\int_0^n \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

On en déduit  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ .

- Supposons  $0 < \alpha \leq 1$ . Par comparaison à une intégrale

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

Si  $0 < \alpha < 1$ , on en déduit

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq S_n \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

On en déduit à nouveau  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ .

Si  $\alpha = 1$ ,

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$

et donc  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ .

- Supposons  $\alpha > 1$ . On compare à nouveau à une intégrale. Pour des entiers  $n$  et  $N$  tels que  $1 \leq n < N$

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right)$$

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On en déduit que  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ .

**Deuxième méthode : utilisation de séries télescopiques.**

Plaçons-nous dans le cas  $\alpha \neq 1$ . Comme  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  admet pour primitive  $t \mapsto \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ , on peut conjecturer que  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$  si  $\alpha < 1$  et  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$  dans le cas convergent.

$$n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha} = n^{1-\alpha} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{1-\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{n^\alpha}$$

- Si  $\alpha < 1$ ,  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est une série à termes positifs divergente donc

$$\sum_{k=1}^n k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$$

ou encore

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

- Si  $\alpha > 1$ ,  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est une série à termes positifs convergente donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$$

ou encore

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Reste le cas  $\alpha = 1$ . Cette fois,  $\ln$  est une primitive de  $t \mapsto 1/t$  donc on est amené à considérer l'équivalent suivant

$$\ln(n) - \ln(n-1) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Comme  $\sum \frac{1}{n}$  est une série à termes positifs divergente,

$$\sum_{k=2}^n \ln(k) - \ln(k-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = S_n - 1$$

ou encore, comme  $(S_n)$  diverge vers  $+\infty$ ,

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

**Solution 23**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a évidemment  $u_n = \sum_{k=1}^n \ln k$ . La fonction  $\ln$  étant croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq u_n \leq \int_1^{n+1} \ln(t) dt$$

ou encore

$$n \ln(n) - n + 1 \leq u_n \leq (n+1) \ln(n+1) - n$$

On a clairement  $1 = o(n \ln n)$ ,  $n = o(n \ln n)$  donc  $n \ln n - n + 1 \sim n \ln n$ .

De plus,

$$(n+1) \ln(n+1) - n = n \ln n + n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n$$

On a clairement  $n = o(n \ln n)$  et  $\ln n = o(n \ln n)$ .

Par ailleurs,  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = o(n \ln n)$ .

On en déduit également que  $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = o(n)$  et a fortiori  $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = o(n \ln n)$ .

Finalement,  $(n+1) \ln(n+1) - n \sim n \ln n$ .

Le théorème des gendarmes assure alors que  $u_n \sim n \ln n$ .

2. D'après la question précédente,  $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{n^2 (\ln n)^2}$ . On en déduit par exemple que  $\frac{1}{u_n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , ce qui assure la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n^2}.$$

3. Soit  $(x, y) \in ]1, +\infty[$  tel que  $x \leq y$ . Alors  $0 \leq \ln x \leq \ln y$  donc  $0 \leq \frac{1}{\ln y} \leq \frac{1}{\ln x}$ . Puisque  $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ , on en déduit que  $0 \leq f(y) \leq f(x)$ . Ainsi  $f$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

4. Soit  $n \geq 2$ . Puisque la fonction  $f$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$

$$\int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k)$$

ou encore

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{u_k}$$

Par théorème de minoration, la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$  diverge (vers  $+\infty$ ).

## Solution 24

1. Pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n \geq \ln 2$  donc  $(u_n)$  ne converge pas vers 0 et  $\sum u_n$  converge.

2. Il suffit de constater que la fonction  $t \mapsto \ln(t)^2$  est croissante sur  $[1, +\infty[$  et de procéder à une comparaison série/intégrale classique.

3. Soit  $x \geq 1$ . Par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t)^2 dt &= [t \ln(t)^2]_1^x - 2 \int_1^x \ln(t) dt \\ &= x \ln(x)^2 - 2[t \ln(t) - t]_1^x \\ &= x \ln(x)^2 - 2x \ln(x) - x + 1 \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln(x)^2 \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente,

$$\int_1^n (\ln(t))^2 dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)^2$$

De même,

$$\int_1^{n+1} (\ln(t))^2 dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1) \ln(n+1)^2$$

Or  $n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$  et

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(1)$$

A fortiori,  $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$  puis

$$\int_1^{n+1} (\ln(t))^2 dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)^2$$

Or

$$\int_1^n (\ln(t))^2 dt \leq u_n \leq \int_2^{n+1} (\ln(t))^2 dt \leq \int_1^{n+1} (\ln(t))^2 dt$$

donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)^2$  puis  $\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln(n)^2}$ .

Procédons à nouveau à une comparaison série/intégrale. La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^2}$  est décroissante sur  $[2, +\infty[$  donc

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)^2} \leq \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2} = \left[ -\frac{1}{\ln(t)} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

**REMARQUE.** On peut écrire cette somme infinie puisqu'elle est à termes positifs. De même, on peut écrire cette intégrale impropre puisque son intégrande est positive. L'inégalité a lieu dans  $[0, +\infty]$  a priori.

Par conséquent,  $\sum \frac{1}{n \ln(n)^2}$  converge. Puisque cette série est à termes positifs et que  $\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln(n)^2}$ ,  $\sum \frac{1}{u_n}$  converge également.

### Solution 25

1. La suite  $(u_n)$  est strictement positive. De plus, pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - 3^{\frac{1}{n+1}} \leq 1$$

de sorte que  $(u_n)$  est décroissante. La suite  $(u_n)$  converge d'après le théorème de convergence monotone.

2. Tous les facteurs du produit définissant  $u_n$  sont strictement positifs donc

$$\forall n \geq 2, \ln(u_n) = \sum_{k=2}^n \ln(2 - 3^{1/k})$$

De plus, comme  $3^{1/n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ ,

$$\ln(2 - 3^{1/n}) = \ln(1 + (1 - 3^{1/n})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - 3^{1/n} = 1 - e^{\frac{\ln(3)}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(3)}{n}$$

La série  $\sum \frac{\ln(3)}{n}$  diverge vers  $+\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  par passage à l'exponentielle.

3. Posons  $v_n = \ln(u_n) + \ln(3) \ln(n)$  pour  $n \geq 2$ . Alors

$$v_n - v_{n-1} = \ln(2 - 3^{1/n}) - \ln(3) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

D'une part,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \ln(2 - 3^{1/n}) &= \ln\left(2 - e^{\frac{\ln(3)}{n}}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{\ln(3)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{\ln(3)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que  $v_n - v_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Il s'ensuit que la série télescopique  $\sum v_n - v_{n-1}$  converge et donc que la suite  $(v_n)$  converge.

En notant  $\ell$  sa limite et  $\alpha = e^\ell > 0$ , on a bien le résultat attendu.

### Solution 26

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'une part,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+1}{3n+3}$$

D'autre part,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Par concavité de  $\ln$ ,

$$\frac{1}{3} \ln(3n+3) + \frac{2}{3} \ln(3n) \leq \ln\left(\frac{1}{3}(3n+3) + \frac{2}{3} \cdot 3n\right) = \ln(3n+1)$$

Ainsi

$$\ln(3n+1) - \ln(3n+3) \geq \frac{2}{3} \ln(3n) - \frac{2}{3} \ln(3n+3) = \frac{2}{3} \ln(n) - \frac{2}{3} \ln(n+1)$$

On conclut en par croissance de l'exponentielle.

2. D'après la question précédente, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est croissante. Notamment, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{u_n}{v_n} \geq \frac{u_1}{v_1} = \frac{1}{3}$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \frac{1}{3}v_n$ . Or  $\sum \frac{1}{3}v_n$  est une série à termes positifs divergente donc  $\sum u_n$  diverge.

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$w_n = -\frac{2}{3} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{3(n+1)}\right)$$

Puisque  $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u + \mathcal{O}(u^2)$ , on en déduit que  $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ . Comme  $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$  est une série à termes positifs convergente,  $\sum w_n$  converge (absolument).

4. Il existe donc  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que

$$\sum_{k=1}^{n-1} w_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Par télescopage, ceci signifie que

$$\frac{2}{3} \ln(n) + \ln(u_n) - \ln(u_1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Par passage à l'exponentielle

$$n^{\frac{2}{3}} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_1 e^\ell = \frac{1}{3} e^\ell$$

En posant  $C = \frac{1}{3} e^\ell$  et  $a = \frac{2}{3}$ , on a bien le résultat voulu.

## Séries alternées

### Solution 27

1. Il suffit d'appliquer le critère spécial des séries alternées.

2. On sait que la suite  $(R_n)$  converge vers 0 et que  $R_n$  est du signe de  $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$  i.e. de  $(-1)^{n+1}$ . Il suffit donc de montrer que la suite  $(|R_n|)$  est décroissante pour conclure à la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} R_n$  à nouveau grâce au critère spécial des séries alternées. Puisque  $R_n$  est du signe de  $(-1)^{n+1}$ ,

$$|R_{n+1}| - |R_n| = (-1)^{n+2} R_{n+1} - (-1)^{n+1} R_n = (-1)^n (R_n + R_{n+1})$$

Or, par changement d'indice,

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

Ainsi  $R_n + R_{n+1}$  est lui-même le reste de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ , qui vérifie encore le critère des séries alternées. On en déduit que

$R_n + R_{n+1}$  est du signe de  $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ , c'est-à-dire de  $(-1)^{n+1}$ . Finalement,  $|R_{n+1}| - |R_n| = (-1)^n (R_n + R_{n+1})$  est du signe de  $(-1)^n (-1)^{n+1} = -1$ , c'est-à-dire négatif. La suite  $(|R_n|)$  est donc bien décroissante : on peut appliquer le critère spécial des séries alternées de sorte que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} R_n$  converge.



## Solution 28

1. On a  $b_{2n} = \sum_{k=1}^n \sqrt{2k} - \sqrt{2k-1}$ . Or

$$\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{k}}$$

Or la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$  est une série à termes positifs divergente donc

$$b_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Mais on peut alors classiquement écrire que

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

donc, en utilisant le même théorème,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \sqrt{n}$$

On en déduit finalement que  $b_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n/2}$ .

On remarque ensuite que  $b_{2n+1} = b_{2n} - \sqrt{2n+1}$ . D'une part,  $b_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n/2} + o(\sqrt{n})$  et, d'autre part,  $\sqrt{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$  donc  $\sqrt{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{2n} + o(\sqrt{n})$ . Finalement,  $b_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\sqrt{n/2} + o(\sqrt{n})$  i.e.  $b_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\sqrt{n/2}$ .

Un équivalent de  $b_n$  est donc  $\frac{(-1)^n}{2} \sqrt{n}$ . En effet, les équivalents précédents permettent de montrer qu'en posant  $u_n = \frac{b_n}{(-1)^n \sqrt{n}}$ ,

les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent toutes deux vers  $\frac{1}{2}$ . Il en est donc de même de la suite  $(u_n)$ , ce qui fournit l'équivalent de  $(b_n)$  annoncée.

2. On voit que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} b_n + b_{n+1} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \sqrt{k} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k} + \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \sqrt{k+1} \\ &= -1 - \sum_{k=1}^n (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \end{aligned}$$

Notons  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ .  $S_n$  est la somme partielle d'une série qui converge en vertu du critère des séries alternées puisque la suite de terme général  $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$  est décroissante. Notons  $S$  la somme de cette série. Le premier terme

de la somme définissant  $S$  est  $1 - \sqrt{2} \leq 0$ . On en déduit donc que  $1 - \sqrt{2} \leq S \leq 0$ . Ainsi  $(b_n + b_{n+1})$  converge vers  $\ell = -1 - S$  et  $\ell = -1 - S \leq \sqrt{2} - 2 < 0$ .

**REMARQUE.** On a donc  $b_n + b_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1)$ . Comme  $b_n + b_{n-1} = 2b_n - (-1)^n \sqrt{n}$ , on obtient  $b_n = \frac{(-1)^n}{2} \sqrt{n} + \frac{\ell}{2} + o(1)$ . On en déduit que

$$b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2} \sqrt{n}$$

On retrouve donc l'équivalent de la première question.

## 3. Remarquons que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b_n} & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n} + \frac{\ell}{2} + o(1)} \\
& \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n \ell}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\
& \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1} \ell}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
& \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{2\ell}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
& = a_n - b_n
\end{aligned}$$

avec  $a_n = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et  $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\ell}{n}$ . D'une part,  $\sum a_n$  converge d'après le critère spécial des séries alternées. D'autre part,  $\sum b_n$  diverge par comparaison à une série de Riemann. Ainsi  $\sum \frac{1}{b_n}$  diverge.

**Solution 29**

1. Puisque  $\cos$  est bornée,  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ . En particulier,  $(v_n)$  converge vers 0. Par conséquent,  $(\cos(v_{n-1}))$  converge vers 1 puis  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ . Puisque la série harmonique est une série à termes positifs divergente, la série  $\sum v_n$  diverge également.
2. Il suffit de constater que cette série vérifie le critère des séries alternées.
3. Il nous faut un développement asymptotique de  $(v_n)$ . On remarque que  $v_n - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{v_{n-1}^2}{n}\right)$ . Or  $v_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  donc  $v_n - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ . Par conséquent,  $(-1)^n v_n = \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ . Puisque la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge et que la série  $\sum \frac{1}{n^3}$  est une série à termes positifs convergente, la série  $\sum (-1)^n v_n$  converge également.

**Solution 30**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
u_n & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \cos\left(-n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
& \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^n \sin\left(-\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
& = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Or la série  $\sum \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n}$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\sum u_n$  converge en tant que somme de deux séries convergentes.

**Solution 31**

Remarquons que

$$\begin{aligned}
 \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n \pi}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
 &= \frac{(-1)^n \pi}{2n} + u_n
 \end{aligned}$$

avec  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ . La série  $\sum \frac{(-1)^n \pi}{2n}$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées et la série  $\sum u_n$  converge par comparaison à une série de Riemann. La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$  converge donc comme somme de deux séries convergentes.

### Solution 32

$$\begin{aligned}
 \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + u_n
 \end{aligned}$$

avec  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ . La série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées, la série  $\sum u_n$  converge par comparaison à une série de Riemann mais la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge. Par conséquent, la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$  diverge.

**REMARQUE.** Pourtant,  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . La condition de positivité est donc nécessaire pour le critère de convergence par équivalence.

### Solution 33

1. Puisque  $(a_n)$  converge vers 0,

$$\ln(1+a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a_n - \frac{a_n^2}{2} + \mathcal{O}(a_n)^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  vérifie le critère spécial des séries alternées donc converge. La série  $\sum \frac{1}{n^3}$  converge. Enfin la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge vers  $+\infty$ . On en déduit que la série  $\sum \ln(1+a_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

2. Par propriété du logarithme

$$\ln \left( \prod_{k=2}^n (1 + a_k) \right) = \sum_{k=2}^n \ln(1 + a_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

Par passage à l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \prod_{k=2}^n (1 + a_k) \right) = 0$$

### Solution 34

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_n : x \mapsto x^n + x\sqrt{n} - 1$  est continue et strictement croissante sur  $[0, 1]$ . De plus,  $f_n(0) = -1 > 0$  et  $f_n(1) = \sqrt{n} > 0$  donc  $f_n$  s'annule une unique fois sur  $[0, 1]$ . L'équation  $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$  admet donc une unique solution  $u_n$  dans  $[0, 1]$ .

2. Remarquons que  $u_n = \frac{1 - u_n^n}{\sqrt{n}}$ . Comme  $(u_n)$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$  donc  $(u_n)$  converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

3. Comme  $(u_n)$  converge vers 0,  $(u_n^n)$  également. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{u_n^n}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par comparaison à une série de Riemann,  $\sum u_n$  diverge.

4. Comme  $(u_n)$  converge vers 0,  $0 \leq u_n \leq 1/2$  à partir d'un certain rang de sorte que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/2^n)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} (-1)^n u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n u_n^n}{\sqrt{n}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n \sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge d'après le critère des séries alternées et la série géométrique à termes positifs  $\sum 1/2^n$  converge également.

On en déduit la convergence de la série  $\sum (-1)^n u_n$ .

## Sommation de relations de comparaison

### Solution 35

1. Puisque  $\ell \neq 0$ , on peut affirmer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\ell$ . Par ailleurs, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ell$  est une série divergente à termes de signe constant, donc on peut affirmer que

$$\sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \ell = n\ell$$

Ceci signifie que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell$ .

2. A nouveau, puisque  $\ell \neq 0$ , on peut affirmer que  $nu_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\ell$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\ell$  est encore une série divergente à termes de signe constant donc

$$\sum_{k=1}^n ku_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n n\ell = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2 \ell}{2}$$

Autrement dit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n ku_k = \frac{1}{2}$ .

## Solution 36

1. Avec les notations de l'énoncé,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2$  est à termes positifs donc la suite  $(S_n)$  converge ou diverge vers  $+\infty$ .

Supposons qu'elle converge. Alors elle converge vers une limite  $\ell$  strictement positive ( $S_n \geq S_1 = a_1^2 > 0$ ). Alors  $(a_n)$  converge vers  $1/\ell$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2$  divergerait alors grossièrement, ce qui contredirait la convergence de la suite  $(S_n)$ .

Par conséquent, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2$  diverge et la suite  $(S_n)$  converge vers  $+\infty$ . Puisque  $a_n = \frac{a_n S_n}{S_n}$ ,  $(a_n)$  converge vers 0.

2. La suite  $(S_n)$  est clairement croissante. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [S_{n-1}, S_n]$ . Alors, par croissance de  $t \mapsto t^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$(S_n - S_{n-1})S_{n-1}^2 \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt \leq (S_n - S_{n-1})S_n^2$$

ou encore, en posant  $u_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt$ ,

$$a_n^2 S_{n-1}^2 \leq u_n \leq a_n^2 S_n^2$$

On rappelle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 S_n^2 = 1$ . De plus,

$$a_n^2 S_{n-1}^2 = a_n^2 (S_n - a_n)^2 = a_n^2 S_n^2 - 2S_n a_n^3 + a_n^4$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 S_{n-1}^2 = 1$ . D'après le théorème des gendarmes,  $(u_n)$  converge vers 1.

3. Remarquons que

$$\sum_{k=1}^n u_k = \int_0^{S_n} t^2 dt = \frac{S_n^3}{3}$$

Par sommation de relation de comparaison pour les séries divergentes à termes positifs,  $\sum_{k=1}^n u_k \sim n$ . On en déduit que  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$

et, comme  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$ ,  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ .

## Solution 37

1. Par croissance de la fonction  $\sin$  l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  est stable par  $\sin$ . Ainsi la suite  $(u_n)$  est à valeurs dans cet intervalle. De plus, une étude de fonction montre que  $x \mapsto \sin(x) - x$  est négative sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . On en déduit que  $(u_n)$  est décroissante. Comme elle est minorée, elle converge. Enfin,  $\sin$  est continue donc  $(u_n)$  converge vers un point fixe de  $\sin$ . L'étude de  $x \mapsto \sin(x) - x$  montre que 0 est l'unique point fixe de  $\sin$ . Ainsi  $(u_n)$  converge vers 0.

2. Remarquons que

$$\begin{aligned} \sin(x)^\alpha - x^\alpha &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^\alpha - x^\alpha \\ &= x^\alpha \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^\alpha - x^\alpha \\ &= x^\alpha \left(1 - \frac{\alpha x^2}{6} + o(x^2)\right) - x^\alpha \\ &= -\frac{\alpha x^{\alpha+2}}{6} + o(x^{\alpha+2}) \end{aligned}$$

Notamment, en prenant  $\alpha = -2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$$

Comme  $(u_n)$  converge vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3}$$

3. La série  $\sum \frac{1}{3}$  est une série à termes positifs divergente donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_0^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3}$$

autrement dit

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$ ,

$$\frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3}$$

ou encore

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

car  $(u_n)$  est positive d'après la première question.

### Solution 38

1. Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ . Puisque  $u_n = \ell + o(1)$  et que la série  $\sum 1$  est une série à termes positifs divergente,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \ell + o\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right)$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\ell + o(n)$$

et enfin

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell + o(1)$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell$$

2. a.  $f(x) - x \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\lambda x^\alpha$  donc  $x \mapsto f(x) - x$  est de même signe que  $x \mapsto -\lambda x^\alpha$  au voisinage de  $0^+$ . Ainsi il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $x \mapsto f(x) - x$  est négative sur  $[0, \varepsilon]$  et ne s'annule qu'en 0.

b. Par hypothèse,  $f$  est positive sur  $[0, \varepsilon]$ . Comme 0 est le seul point fixe de  $f$  sur  $[0, \varepsilon]$ ,  $x \mapsto f(x) - x$  est de signe constant sur cet intervalle puisqu'elle y est continue. Or  $f(x) - x \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\lambda x^\alpha$  donc  $x \mapsto f(x) - x$  est négative sur  $[0, \varepsilon]$ . On en déduit que

$$\forall x \in [0, \varepsilon], 0 \leq f(x) \leq x \leq \varepsilon$$

On en déduit alors aisément que  $(u_n)$  est à valeurs dans  $[0, \varepsilon]$  et décroissante. Elle converge donc d'après le théorème de convergence monotone et continuité de  $f$ ,  $(u_n)$  converge vers l'unique point fixe de  $f$  sur  $[0, \varepsilon]$ , à savoir 0.

c. Tout d'abord,  $\alpha > 1$  donc  $x^{\alpha-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . On peut alors utiliser le développement limité usuel de  $(1+u)^\beta$  lorsque  $u$  tend vers 0 :

$$f(x)^{1-\alpha} \underset{x \rightarrow 0}{=} x^{1-\alpha} (1 - \lambda x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}))^{1-\alpha} \underset{x \rightarrow 0}{=} x^{1-\alpha} (1 + (\alpha-1)\lambda x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^{1-\alpha} 1 + (\alpha-1)\lambda + o(1)$$

d. Comme  $(u_n)$  converge vers 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} = (\alpha - 1)\lambda$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} = (\alpha - 1)\lambda$$

D'après la première question

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{1-\alpha} - u_k^\alpha = (\alpha - 1)\lambda$$

ou encore

$$u_n^{1-\alpha} - u_0^{1-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\alpha - 1)\lambda n$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha - 1)\lambda n = +\infty$  de sorte que

$$u_n^{1-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\alpha - 1)\lambda n$$

et enfin

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} ((\alpha - 1)\lambda n)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

e. Dans le cas de la fonction  $x \mapsto \sin x$ , on a  $\lambda = \frac{1}{6}$ ,  $\alpha = 3$  donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Dans le cas de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$ , on a  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = 2$  donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

### Solution 39

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$  donc  $(u_n)$  est décroissante. De plus, l'intervalle  $]0, 1[$  est stable par  $f : x \mapsto x - x^2 = x(1-x)$  donc  $(u_n)$  est à valeurs dans  $]0, 1[$ . Notamment,  $(u_n)$  est minorée. Elle converge donc vers l'unique point fixe de la fonction continue  $f$ , à savoir 0.
2. Remarquons que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ . Comme la série de terme général 1 est grossièrement divergente,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{u_{k+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

D'après l'indication de l'énoncé, on a donc également,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

Par télescope,

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , on en déduit que  $\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$  puis  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

### Solution 40

1. C'est le lemme de Césaro. On a  $u_n = \ell + o(1)$ . Comme  $\sum 1$  est une série à termes positifs divergente, on obtient par sommation de relation de comparaison :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \ell + o\left(\sum_{k=0}^n 1\right)$$

ou encore

$$(n+1)v_n = (n+1)\ell + o(n+1)$$

On en déduit que

$$v_n = \ell + o(1)$$

i.e.  $(v_n)$  converge vers  $\ell$ . Remarquons que

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k(b_{n-k} - b) + \frac{b}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$$

D'après la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k = ab$$

Comme  $(a_n)$  converge, elle est bornée. Il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|a_n| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On en déduit que

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k(b_{n-k} - b) \right| \leq \frac{M}{n+1} \sum_{k=0}^n |b_{n-k} - b| = \frac{M}{n+1} \sum_{k=0}^n |b_k - b|$$

Or  $(|b_n - b|)$  converge vers 0 donc, d'après la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+1} \sum_{k=0}^n |b_k - b| = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k(b_{n-k} - b) = 0$$

puis que  $(c_n)$  converge vers  $ab$ .

#### Solution 41

- Notons  $f : x \mapsto 1 - e^{-x}$ . Par convexité de l'exponentielle,  $f(x) \leq x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On en déduit que  $(a_n)$  est décroissante. De plus,  $\mathbb{R}_+$  est stable par  $f$  donc  $(a_n)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Notamment,  $(a_n)$  est minorée : elle converge d'après le théorème de convergence monotone. Comme  $f$  est continue, la limite de  $(a_n)$  est un point fixe de  $f$ . Les variations de  $x \mapsto f(x) - x$  nous apprennent que 0 est l'unique point fixe de  $f$ . Ainsi  $(a_n)$  converge vers 0.
- Comme  $(a_n)$  converge vers 0, le développement limité de l'exponentielle en 0 montre que  $a_n - a_{n+1} = a_n f(a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} a_n^2$ . Comme  $(a_n)$  converge en décroissant, la série télescopique  $\sum a_n - a_{n+1}$  est une série à termes positifs convergente. On en déduit qu'il en est de même de la série  $\sum a_n^2$ .
- On cherche classiquement  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha$  tende vers une limite finie non nulle lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

$$\begin{aligned} a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &= (a_n(1 - a_n/2 + o(a_n)))^\alpha - a_n^\alpha \\ &= a_n^\alpha (1 - a_n/2 + o(a_n))^\alpha - a_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{2} a_n^{\alpha+1} \end{aligned}$$

On choisit donc  $\alpha = -1$ . Ainsi

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$



Comme  $\sum 1/2$  est une série à termes positifs divergente,

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

On en déduit que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ .

#### Solution 42

Remarquons que  $S_n$  est la somme partielle de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$ . Puisque  $\frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$  et que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série à termes positifs convergente, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$  converge vers un réel  $C$ . En notant  $R_n$  le reste de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$ , on a  $S_n = C - R_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $\frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$ ,  $R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ . Une comparaison à une intégrale montre que  $R_n \sim \frac{1}{n}$  d'où le résultat annoncé.

#### Solution 43

1. On propose deux méthodes.

**Première méthode.** Comme  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ , la série  $\sum \int_{n-1}^n \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$  converge. Or

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{k}} = \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} - S_n + 1 = 2\sqrt{n} - S_n - 1$$

donc la suite  $(S_n - 2\sqrt{n})$  converge. En notant  $C$  sa limite, on a le résultat voulu.

**Deuxième méthode.** On remarque que

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n} \left( \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi la série  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}$  converge ce qui permet également de conclure.

2. D'après la question précédente

$$C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}$$

donc

$$S_n - 2\sqrt{n} - C = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{k} + 2\sqrt{k-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) - \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Or

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n} \left( \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

donc

$$2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{n}}$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

donc

$$2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Par sommation de relation d'équivalence pour le reste de séries convergentes à termes positifs,

$$S_n - 2\sqrt{n} - C \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Ainsi

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2\sqrt{n} + C + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

## Produit de Cauchy

### Solution 44

1. Posons  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n+1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left( \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{n+1} \binom{n+1}{k} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[ \left( \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \right) - 1 - (-1)^{n+1} \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n+1} [(1-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1}] \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Puisque  $S_1 = 1$ , on en déduit alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n = S_1 + \sum_{k=2}^n S_k - S_{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = H_n$$

2. On remarque que  $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ . Puisque les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!}$  sont absolument convergentes, on peut affirmer via le théorème sur les produits de Cauchy que

### Solution 45

On sait que les séries géométriques  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b^n$  convergent absolument et ont pour sommes respectives  $\frac{1}{1-a}$  et  $\frac{1}{1-b}$ . On en déduit par produit de Cauchy que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-b}$$

où

$$c_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

## Familles sommables

### Solution 46

Considérons  $I_n = \left\{ \frac{k+1}{k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $I_n \subset \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$  et

$$\sum_{x \in I_n} \frac{1}{x^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(k+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

car la série à termes positifs  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{(n+1)^2}$  diverge grossièrement vers  $+\infty$ . La famille  $\left( \frac{1}{x^2} \right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$  n'est donc pas sommable.

### Solution 47

1. Soit un entier  $n \geq 2$ . Tout d'abord,

$$nv_n = (n-1)v_{n-1} + u_n$$

donc

$$v_{n-1} = \frac{n}{n-1}v_n - \frac{1}{n-1}u_n$$

Par conséquent,

$$(n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 = 2u_nv_n - \frac{1}{n}(u_n^2 + v_n^2) \leq 2u_nv_n$$

2. a. Posons  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k^2$  et  $T_n = \sum_{k=1}^n v_k^2$ . En convenant que  $v_0 = 0$ , l'inégalité de la question précédente est encore valide pour  $n = 1$ .  
On en déduit que

$$\sum_{k=1}^n (k+1)v_k^2 - (k-1)v_{k-1}^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n u_kv_k$$

ou encore que

$$\sum_{k=1}^n v_k^2 + \sum_{k=1}^n kv_k^2 - (k-1)v_{k-1}^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n u_kv_k$$

Par télescopage

$$\sum_{k=1}^n kv_k^2 - (k-1)v_{k-1}^2 = nv_n^2$$

et par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=1}^n u_kv_k \leq \left( \sum_{k=1}^n u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^n v_k^2 + nv_n^2 \leq 2 \left( \sum_{k=1}^n u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$T_n + nv_n^2 \leq 2\sqrt{S_n}\sqrt{T_n}$$

A fortiori

$$T_n \leq 2\sqrt{S_n}\sqrt{T_n}$$

puis

$$T_n \leq 4S_n \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

La suite  $(T_n)$  est croissante et majorée donc elle converge i.e. la série  $\sum u_n^2$  converge. En passant à la limite dans ce qui précède,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

b. On va d'abord montrer que la famille  $\left(\frac{u_m u_n}{m+n}\right)_{1 \leq m \leq n}$  est sommable. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{|u_m u_n|}{m+n} = |u_n| \sum_{m=1}^{n-1} \frac{|u_m|}{m+n} \leq |u_n| \sum_{m=1}^n \frac{|u_m|}{n} = |u_n v_n|$$

Puisque  $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{|u_m u_n|}{m+n} < \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 + v_n^2 < +\infty$$

Par symétrie, on a également

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{|u_m u_n|}{m+n} < +\infty$$

Enfin la série  $\sum \frac{u_p^2}{2p}$  converge puisque  $\frac{u_p^2}{2p} \leq u_p^2$ .

Puisque

$$(\mathbb{N}^*)^2 = \{(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, 1 \leq m < n\} \sqcup \{(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, 1 \leq n < m\} \sqcup \{(p, p), p \in \mathbb{N}^*\}$$

Le théorème de sommation par paquets permet d'affirmer que

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{|u_m u_n|}{m+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{|u_m u_n|}{m+n} + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{|u_m u_n|}{m+n} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{u_p^2}{2p} < +\infty$$

La famille  $\left(\frac{u_m u_n}{m+n}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est donc sommable.

#### Solution 48

1. Notons  $J_n$  l'intégrale à calculer. Tout d'abord,  $J_0 = 2\pi^2$  et, si  $n \neq 0$ , on intègre par parties

$$\int_0^{2\pi} t e^{-int} dt = -\frac{1}{in} [t e^{-int}]_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt = \frac{2i\pi}{n}$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} a_n b_m \int_0^{2\pi} t e^{-i(n+m)t} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} t \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} a_n b_m e^{-int} e^{-imt} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} t \left( \sum_{n \in \mathbb{I}} a_n e^{-int} \right) \left( \sum_{m \in \mathbb{I}} b_m e^{-imt} \right) dt \end{aligned}$$

Posons  $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{I}} a_n e^{-int}$  et  $g(t) = \sum_{m \in \mathbb{I}} b_m e^{-imt}$ . Par inégalité triangulaire,

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} = \left| \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sqrt{t} |f(t)|) (\sqrt{t} |g(t)|) dt$$

puis, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_0^{2\pi} t |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} t |g(t)|^2 dt}$$

Calculons ensuite

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} t|f(t)|^2 dt &= \int_0^{2\pi} t f(t) \overline{f(t)} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} t \left( \sum_{n \in \mathbb{I}} a_n e^{-int} \right) \left( \sum_{m \in \mathbb{I}} a_m e^{imt} \right) dt \\
 &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} a_n a_m \int_0^{2\pi} t e^{-i(n-m)t} dt \\
 &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} a_n a_m J_{n-m}
 \end{aligned}$$

Or pour  $n \neq m$ ,  $J_{n-m}$  est imaginaire pur et l'intégrale qu'on calcule est réelle de sorte que

$$\int_0^{2\pi} t|f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{I}} a_n^2 J_0 = 2\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{I}} a_n^2$$

De la même manière,

$$\int_0^{2\pi} t|g(t)|^2 dt = 2\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{I}} b_n^2$$

On en déduit le résultat demandé.

3. Soit  $K$  une partie finie de  $(\mathbb{N}^*)^2$ . Il existe une partie finie  $I$  de  $\mathbb{N}^*$  telle que  $K \subset I^2$ . Alors

$$\sum_{(n,m) \in K} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in I} a_n^2 \sum_{n \in I} b_n^2} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n^2}$$

Ceci étant valide pour toute partie finie  $K$  de  $(\mathbb{N}^*)^2$ ,

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n^2} < +\infty$$

La famille  $\left( \frac{a_n b_m}{n+m} \right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est donc sommable et

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \sum_{(n,m) \in K} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n^2}$$

#### Solution 49

Comme la famille est une famille de réels positifs, on peut appliquer le théorème de Fubini positif :

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{mn(m+n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} S_m$$

avec  $S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n+2)}$ . A l'aide d'une décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned}
 S_m &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{mn(m+n+2)} \\
 &= \frac{1}{m(m+2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(m+n+2) - n}{n(m+n+2)} \\
 &= \frac{1}{m(m+2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{m+n+2} \\
 &= \frac{1}{m(m+2)} \sum_{n=1}^{m+2} \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

Notons alors  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  de sorte que  $S_m = \frac{1}{m(m+2)} H_{m+2}$ . Alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{+\infty} S_m &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{H_{m+2}}{m(m+2)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} H_{m+2} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{H_m}{m} - \frac{H_{m+2}}{m+2} + \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{m(m+2)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{H_m}{m} - \frac{H_{m+2}}{m+2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+2)} \\
 &= \frac{1}{2} \left( H_1 + \frac{H_2}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} - \frac{1}{m+2} \\
 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

La famille  $\left( \frac{1}{mn(m+n+2)} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est donc sommable et sa somme vaut  $\frac{7}{4}$ .

#### Solution 50

Comme la famille est à termes positifs, on peut appliquer le théorème de Fubini positif :

$$\begin{aligned}
 \sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} &= \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \\
 &= \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1} \\
 &= \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \quad \text{par télescopage} \\
 &= \frac{\pi^2}{6}
 \end{aligned}$$

La famille  $\left( \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$  est donc sommable et a pour somme  $\frac{\pi^2}{6}$ .

#### Solution 51

En utilisant la partition suivante

$$\{(p, k) \in \mathbb{N}^2, q < p\} = \bigsqcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{p\} \times \llbracket 0, p-1 \rrbracket$$

le théorème de sommation par paquets montre que

$$\sum_{0 \leq q < p} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

En considérant la partition suivante

$$\{(p, q) \in \mathbb{N}^2, q < p\} = \bigsqcup_{q \in \mathbb{N}} \llbracket q+1, +\infty \rrbracket \times \{q\}$$

ce même théorème permet d'affirmer que

$$\sum_{0 \leq q < p} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=q+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha}$$

On en déduit l'égalité demandée. Cette somme est finie dès lors que  $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$  converge i.e.  $\alpha > 2$ .

### Solution 52

D'après le théorème de Fubini positif,

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 + q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} S_p$$

avec  $S_p = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2}$ . Par comparaison série/intégrale

$$S_p + \frac{1}{p^2} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + q^2} dt = \frac{1}{q} [\arctan(t/q)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2q}$$

ou encore

$$S_p \geq \frac{\pi}{2p} - \frac{1}{p^2}$$

Puisque  $\frac{\pi}{2p} - \frac{1}{p^2} \sim \frac{\pi}{2p}$  la série  $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{\pi}{2p} - \frac{1}{p^2}$  diverge et  $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} S_p = +\infty$ . On en déduit que famille  $\left( \frac{1}{p^2 + q^2} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  n'est pas sommable.

**REMARQUE.** On peut aussi remarquer que  $\frac{1}{p^2 + q^2} \geq \frac{1}{(p+q)^2} \geq 0$ . On remarque que  $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{n \geq 2} I_n$  avec  $I_n = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p+q=n\}$  et que

$$\sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q)^2} = \frac{n-1}{n^2}$$

Comme la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n^2}$  diverge, la famille  $\left( \frac{1}{(p+q)^2} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  n'est pas sommable d'après le théorème de sommation par paquets.

La famille  $\left( \frac{1}{p^2 + q^2} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  n'est donc pas sommable non plus.

### Solution 53

D'après le théorème de Fubini positif,

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 + q^3} = \sum_{q=1}^{+\infty} S_q$$

avec  $S_q = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^3}$ . Par une comparaison série/intégrale,

$$S_q \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + q^3} dt = \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}} \left[ \arctan\left(\frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2q^{\frac{3}{2}}}$$

La série  $\sum_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}$  converge donc la série  $\sum_{q \in \mathbb{N}^*} S_q$  également. La famille  $\left( \frac{1}{p^2 + q^3} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  donc sommable.

### Solution 54

Comme il s'agit d'une famille de réels positifs, on peut directement appliquer le théorème de Fubini positif.

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}} \frac{1}{(m+n)(m+n+1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{m+n} - \frac{1}{m+n+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} = +\infty$$

en utilisant un télescopage. La famille  $\left( \frac{1}{(m+n)(m+n+1)} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$  n'est donc pas sommable.

**Solution 55**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . Remarquons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{z^n}{1 - z^n} = z^n \sum_{p=0}^{+\infty} z^{np} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^{np}$$

On travaille maintenant sous réserve de sommabilité. D'après le théorème de Fubini :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} z^{np} = \sum_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2} z^{np}$$

Posons maintenant  $I_k = \{(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, np = k\}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ . Les ensembles  $I_k$  sont clairement disjoints et pour tout  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $(n, p) \in I_{np}$ . Autrement dit,  $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} I_k$ . Le théorème de sommation par paquets permet d'affirmer que

$$\sum_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2} z^{np} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(n,p) \in I_k} z^{np} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(n,p) \in I_k} z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \text{card}(I_k) z^k$$

Notons  $\mathcal{D}_k$  l'ensemble des diviseurs positifs de  $k$ , ainsi que  $\phi : \begin{cases} I_k & \longrightarrow \mathcal{D}_k \\ (m, n) & \longmapsto m \end{cases}$  et  $\psi : \begin{cases} \mathcal{D}_k & \longrightarrow I_k \\ d & \longmapsto (d, k/d) \end{cases}$ . On vérifie que  $\phi$  et  $\psi$  sont bien définies et que  $\phi \circ \psi = \text{Id}_{\mathcal{D}_k}$  et  $\psi \circ \phi = \text{Id}_{I_k}$ . Ainsi  $\psi$  et  $\phi$  sont bijectives et  $\text{card}(I_k) = \text{card}(\mathcal{D}_k) = \tau(k)$ . Finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \tau(k) z^k$$

Reste à vérifier la sommabilité. de la famille  $(z^{np})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ . En reprenant les calculs précédents,

$$\sum_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2} |z^{np}| = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(n,p) \in I_k} |z|^{np} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(n,p) \in I_k} |z|^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \tau(k) |z|^k$$

Mais pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\tau(k) \leq k$  et, en utilisant la règle de d'Alembert, on obtient que  $\sum k |z|^k$  converge. Par conséquent,  $\sum \tau(k) |z|^k$  converge et la famille  $(z^{np})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable, ce qui justifie les calculs précédents.

**Solution 56**

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $|z^{2^n}| < 1$ , on obtient en faisant intervenir une série géométrique,

$$\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose alors  $J_n = \{2^n(2k+1), k \in \mathbb{N}\}$ . En partitionnant  $\mathbb{N}^*$  suivant la valuation 2-adique, on montre que  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une partition de  $\mathbb{N}^*$ . Comme la série  $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} z^j$  converge absolument, la famille  $(z^j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  est sommable et le théorème de sommation par paquets permet alors d'affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)} = \sum_{j=1}^{+\infty} z^j$$

Ce qui peut encore s'écrire d'après ce qui précède et en reconnaissant dans le second membre la somme d'une série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z}$$

**Solution 57**

Posons  $I_p = \{(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m + n = p\}$  et

$$S_p = \sum_{(m,n) \in I_p} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \frac{\text{card}(I_p)}{p^\alpha} = \frac{p-1}{p^\alpha}$$



D'après le théorème de sommation par paquets, la famille  $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable si et seulement si la série  $\sum S_p$  converge. Puisque  $\frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$ , la famille  $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable si et seulement si  $\alpha - 1 > 1$  i.e.  $\alpha > 2$  (comparaison à une série de Riemann).

### Solution 58

#### Première méthode

D'après le théorème de sommation par paquets employé avec les partitions

$$\{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, n < k\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \times \llbracket n+1, +\infty \rrbracket = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} \llbracket 0, k-1 \rrbracket \times \{k\}$$

On obtient

$$S = \sum_{0 \leq n < k} \frac{1}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

#### Deuxième méthode

Posons  $u_{n,k} = \frac{1}{k!}$  si  $n < k$  et  $u_{n,k} = 0$  sinon. D'après le théorème de Fubini positif

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

Mais sachant que  $u_{n,k} = 0$  lorsque  $n \geq k$  et  $u_{n,k} = \frac{1}{k!}$  sinon, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k!}$$

d'où

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

### Solution 59

1. Remarquons que  $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{n \geq 2} I_n$  avec  $I_n = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p + q = n\}$ . Comme la famille  $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , on peut appliquer le théorème de sommation par paquets :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(p+q)^2} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q)^2} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\text{card } I_n}{n^2} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2} \end{aligned}$$

Or  $\frac{n-1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  donc la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n^2}$  diverge. Ainsi

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(p+q)^2} = +\infty$$

et la famille  $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  n'est pas sommable.

2. Pour tout  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,

$$\frac{1}{p^2 + q^2} \geq \frac{1}{p^2 + 2pq + p^2} = \frac{1}{(p + q)^2} \geq 0$$

On en déduit d'après la question précédente que la famille  $\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  n'est pas non plus sommable.