INTERROGATION ÉCRITE N°05

NOM : Prénom : Note :

1. Décomposer $P = X^4 + X^2 + 1$ en un produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

   On remarque que $P = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$. *Les deux facteurs sont de degré* 2 *et de discriminant strictement négatif donc irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$. ∎

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 4x \equiv 1[11] \end{cases}$.

   L'inverse de 2 *modulo* 7 *est* 4 *tandis que l'inverse de* 4 *modulo* 11 *est* 3. *Ainsi*

   $$\mathcal{S} \iff \begin{cases} x \equiv 8[7] \\ x \equiv 3[11] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 36[7] \\ x \equiv 36[11] \end{cases}$$

   Ainsi x *est solution de* $(\mathcal{S})$ *si et seulement si* 7 *et* 11 *divisent* $x - 36$, *c'est-à-dire* 77 *divise* $x - 36$ *car* $7 \wedge 11 = 1$. *L'ensemble des solutions de* $(\mathcal{S})$ *est* $36 + 77\mathbb{Z}$. ∎

3. Calculer $\varphi(360)$ où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

   On décompose en facteurs premiers $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. *Ainsi*

$$\varphi(360) = 360\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 360 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 96$$

∎

4. Soit $u : \mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{XP}'$. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Est-il diagonalisable ? Calculer sa trace et son déterminant.

   u est clairement linéaire. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u(\mathrm{X}^k) = k\mathrm{X}^k \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. *Comme* $(\mathrm{X}^k)_{0\leq k\leq n}$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *est stable par u. De plus cette base est formée de vecteurs propres de u donc u est diagonalisable.*

   Puisque la matrice de u *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *est* $\mathrm{diag}(0, 1, \dots, n)$, $\det(u) = \prod_{k=0}^{n} k = 0$ *et* $\mathrm{tr}(u) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   ∎

5. Donner la liste des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

   Il s'agit des $\overline{k}$ *où* $k \in [\![0, 14]\!]$ *et* $k \wedge 15 = 1$, *à savoir*

$$\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}$$

   Ceci est cohérent puisque $\varphi(15) = \varphi(3)\varphi(5) = (3-1)(5-1) = 8$. ∎