Réduction géométrique

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, qui en pratique sera généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Rappels et compléments

1.1 Matrices semblables

Définition 1.1 Matrices semblables

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que B est **semblable** à A si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, la seule matrice semblable à λI_n est λI_n.

Proposition 1.1

La relation de similitude («être semblable à») est une relation d'équivalence.

Remarque. Si deux matrices sont semblables, l'une est inversible si et seulement si l'autre l'est.

Remarque. Si A et B sont semblables, alors A^n et B^n sont semblables pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible).
Plus précisément, s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$, alors $B^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible).

1.2 Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 1.2 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **somme** de $F_1, \dots, F_p$ le sous-espace vectoriel

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{k=1}^{p} F_k = \left\{ x_1 + \cdots + x_p, \ (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k \right\}$$

Remarque. On a $\sum_{k=1}^{n} F_k = \operatorname{vect}\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)$. $\sum_{k=1}^{n} F_k$ est donc le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F_1, \dots, F_n$.

Remarque. La somme d'espaces vectoriels est associative : si F, G, H sont trois sous-espacs vectoriels,

$$F + G + H = (F + G) + H = F + (G + H)$$

Définition 1.3 Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si pour tout $x \in \sum_{k=1}^{p} F_k$ il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k$ tel que $x = x_1 + \dots + x_p$.

La somme de $F_1, \dots, F_p$ est alors notée $F_1 \oplus \dots \oplus F_p = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

Proposition 1.2 Caractérisation d'une somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k,\ x_1 + \dots + x_p = 0_E \implies x_1 = \dots = x_p = 0_E$$

Remarque. Si des sous-espaces vectoriels sont en somme directe, ils sont deux à deux en somme directe.

Attention ! La réciproque est fausse. Des espaces vectoriels peuvent être deux à deux en somme directe sans que leur somme soit directe. Par exemple, trois droites distinctes coplanaires ont leurs intersections deux à deux nulles sans pour autant qu'elles soient en somme directe.

Remarque. Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille finie de sous-espaces vectoriels en somme directe d'un espace vectoriel E, alors, pour toute partie J de I, $(F_i)_{i \in J}$ est également une famille de sous-espaces vectoriels en somme directe.
De plus, si $J_1, \dots, J_r$ sont des parties deux à deux disjointes de I, alors, en posant $G_k = \bigoplus_{i \in J_k} F_i$, les sous-espaces vectoriels $G_1, \dots, G_r$ sont encore en somme directe. De plus,

$$\bigoplus_{i=1}^{r} G_i = \bigoplus_{i \in \bigsqcup_{i=1}^{r} J_i} F_i$$

Exemple 1.1

Si F, G et H sont trois sous-espaces vectoriels en somme directe d'un espace vectoriel E, alors

$$F \oplus G \oplus H = (F \oplus G) \oplus H = F \oplus (G \oplus H)$$

Définition 1.4 Projecteurs associés à une décomposition en somme directe

Soient $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. On note p_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j \in [\![1,r]\!] \setminus \{i\}} F_j$. La famille $(p_1, \dots, p_r)$ est appelée famille de projecteurs associée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. On a alors $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{Id}_E$.

Remarque. On constate également que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$.

Proposition 1.3 Base d'une somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose qu'il existe des bases $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ de $F_1, \dots, F_p$. Alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ est une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ si et seulement si $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe.

Dans ce cas, $\mathcal{B}$ est dite **base adaptée** à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Proposition 1.4 Dimension d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$$

De plus, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe.

Remarque. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Pour montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$, il suffit de montrer que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe et que $\sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \dim E$.

Proposition 1.5

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

Soient $(u_1, \dots, u_p) \in \prod_{k=1}^{p} \mathcal{L}(E_k, F)$. Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u_{|E_k} = u_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Exemple 1.2

Soit H un hyperplan de E et $a \in E \setminus H$. Il existe une unique forme linéaire sur E tel que $\operatorname{Ker}\varphi = H$ et $\varphi(a) = 1$.

1.3 Matrices définies par blocs

Matrices définies par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$. On peut définir une matrice $M \in \mathcal{M}_{n+p,q+r}(\mathbb{K})$ à l'aide de ces quatre matrices de la façon suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)$$

Produit de matrices définies par blocs

Le produit de deux matrices définies par blocs s'effectue de la manière suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{D} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{E} & \mathrm{G} \\ \hline \mathrm{F} & \mathrm{H} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{AE}+\mathrm{CF} & \mathrm{AG}+\mathrm{CH} \\ \hline \mathrm{BE}+\mathrm{DF} & \mathrm{BG}+\mathrm{DH} \end{array}\right)$$

Attention ! Il faut bien évidemment que les différentes matrices soient de taille compatible :

- le nombre de **colonnes** de A et B doit être le nombre de **lignes** de E et G ;
- le nombre de **colonnes** de C et D doit être le nombre de **lignes** de F et H.

Remarque. La transposée de la matrice $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ est la matrice $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^\mathsf{T} & \mathrm{B}^\mathsf{T} \\ \hline \mathrm{C}^\mathsf{T} & \mathrm{D}^\mathsf{T} \end{array}\right)$.

Définition 1.5 Matrices triangulaires par blocs

On dit qu'une matrice carrée A est **triangulaire supérieure par blocs** s'il existe une famille de matrices $(\mathrm{A}_{i,j})_{1\le i\le j\le r}$ de tailles «adéquates» telle que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} & \cdots & \mathrm{A}_{1,r} \\ 0 & \mathrm{A}_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{A}_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_{r,r} \end{pmatrix}$$

On dit qu'une matrice carrée A est **triangulaire inférieure par blocs** s'il existe une famille de matrices $(\mathrm{A}_{i,j})_{1\le j\le i\le r}$ de tailles «adéquates» telle que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathrm{A}_{r,1} & \cdots & \mathrm{A}_{r,r-1} & \mathrm{A}_{r,r} \end{pmatrix}$$

Définition 1.6 Matrices diagonales par blocs

On dit qu'une matrice carrée A est diagonale par blocs s'il existe des matrices carrées $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_r$ telles que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_r \end{pmatrix}$$

Proposition 1.6 Déterminants par blocs

Le déterminant d'une matrice **triangulaire par blocs** (et a fortiori **diagonale par blocs**) est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

Attention ! En général $\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right| \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Transvections par blocs

On appelle transvection par blocs une opération transformant une matrice $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$ en une matrice $\left(\begin{array}{c|c} A & B + \lambda A \end{array}\right)$ (si A et B ont le même nombre de colonnes) ou une matrice $\left(\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right)$ en une matrice $\left(\begin{array}{c} A \\ \hline B + \lambda A \end{array}\right)$ (si A et B ont le même nombre de lignes).

Remarque. La première opération correspond à la multiplication à droite par une matrice du type $\left(\begin{array}{c|c} I_p & \lambda I_p \\ \hline 0 & I_p \end{array}\right)$ et la seconde à la multiplication à gauche par une matrice du type $\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline \lambda I_p & I_p \end{array}\right)$.

Proposition 1.7

Le déterminant d'une matrice carrée est invariant par transvection par blocs.

1.4 Sous-espaces stables

Définition 1.7 Sous-espace stable

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Remarque. Si F est un sous-espace stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u induit un endomorphisme u_F de F.

Exercice 1.1

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui commutent i.e. $u \circ v = v \circ u$. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $v(F)$ est également stable par u.

Définition 1.8 Base adaptée à un sous-espace vectoriel

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On dit qu'une base de E est adaptée à F si ses premiers éléments forment une base de F.

Proposition 1.8 Matrice et stabilité

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Une base $\mathcal{B}$ de E est adaptée à F si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs. Plus précisément, en notant $n = \dim E$ et $p = \dim F$, il existe $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$. On peut remarquer que A est la matrice de l'endomorphisme de F induit par u dans la base formée des p premiers vecteurs de $\mathcal{B}$.

1.5 Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes

Définition 1.9 Endomorphisme nilpotent

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel. On dit que u est **nilpotent** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.
Le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ est appelé l'**indice de nilpotence** de u.

Définition 1.10 Matrice nilpotente

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$.
Le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$ est appelé l'**indice de nilpotence** de A.

Exemple 1.3

Toute matrice triangulaire stricte est nilpotente d'indice de nilpotence inférieure ou égale à sa taille.

Exemple 1.4

Soit $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors J est nilpotente d'indice n.

Proposition 1.9 Majoration de l'indice de nilpotence

(i) L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie est inférieur ou égal à $\dim \mathrm{E}$.

(ii) L'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inférieur ou égal à n.

2 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

2.1 Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme

Proposition 2.1 Droite stable

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $x \in \mathrm{E}$. La droite $\mathrm{vect}(x)$ est stable par u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Définition 2.1 Valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- On dit qu'un vecteur **non nul** $x \in \mathrm{E}$ est un **vecteur propre** de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u s'il existe $x \in \mathrm{E}$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.

Dans chacun de ces deux cas, on dit que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Attention ! Un vecteur propre est forcément **non nul**.

Exemple 2.1

Soit D l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui à une application associe sa dérivée. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ.

Exemple 2.2

Si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors c'est également un vecteur propre de u^n associé à la valeur propre λ^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si u est un automorphisme).

Exemple 2.3

L'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est 0.

Définition 2.2 Spectre d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. On appelle **spectre** de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u.

Remarque. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$;
- $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \neq \{0_\mathrm{E}\}$;
- $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = 0$ (si E est de dimension finie).

Exemple 2.4

0 est une valeur propre d'un endomorphisme u si et seulement si celui-ci est non injectif.

Définition 2.3 Sous-espace propre d'un endomorphisme

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et λ une valeur propre de u. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{E}_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est appelé **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ.

Remarque. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau.

Remarque. Si λ n'est pas une valeur propre de u, on peut convenir que $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.

Exemple 2.5

Considérons l'endomorphisme T de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ qui à la suite (u_n) associe la suite (u_{n+2}).
Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $E_\lambda(T) = \text{vect}\left((\alpha^n), ((-\alpha)^n)\right)$ où α est une racine carrée de λ.

Méthode **Déterminer les éléments propres d'un endomorphisme**

Pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on recherche les scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que l'équation $u(x) = \lambda x$ possède des solutions non nulles. Lesdites solutions sont alors les vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

Exercice 2.1 ★★

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\varphi(P) = XP'$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer les éléments propres de φ.

2.2 Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'une matrice carrée

Définition 2.4 Valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit qu'une matrice colonne **non nulle** $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre** de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$.
- On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle tel que $AX = \lambda X$.

Dans chacun de ces deux cas, on dit que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Remarque. Un vecteur propre est forcément **non nul**.

Exemple 2.6

0 est une valeur propre d'une matrice carrée si et seulement si elle est non inversible.

Exemple 2.7

Soit D une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. En notant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, E_k est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ_k.

Exemple 2.8

Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors c'est également un vecteur propre de A^n associé à la valeur propre λ^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible).

Exemple 2.9

L'unique valeur propre d'une matrice carrée nilpotente est 0.

Définition 2.5 Spectre d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée. On appelle **spectre** de A, noté Sp(A), l'ensemble des valeurs propres de A.

Remarque. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$;
- $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \{0\}$;
- $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$.

Définition 2.6 Sous-espace propre d'une matrice carrée

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)$ est appelé **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ.

Remarque. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau.

Remarque. Si λ n'est pas une valeur propre de A, on peut convenir que $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \{0\}$.

Proposition 2.2 Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et A sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E. Alors

(i) $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$;

(ii) $x \in \mathrm{E}$ est un vecteur propre de u si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un vecteur propre de A ;

(iii) Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, l'isomorphisme $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}\right.$ induit un isomorphisme de $\mathrm{E}_\lambda(u)$ sur $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$.

Proposition 2.3

Deux matrices semblables ont même spectre.

Attention ! La réciproque est fausse. Par exemple, le spectre de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $\{0\}$ mais ces deux matrices ne sont évidemment pas semblables.

Remarque. Deux matrices semblables n'ont pas les mêmes sous-espaces propres. Néanmoins ces sous-espaces propres sont isomorphes. Plus précisément, s'il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{P}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$, l'automorphisme $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ sur $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B})$.

Proposition 2.4 Spectre et sous-corps

Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps d'un corps $\mathbb{L}$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{L}}(A)$.

Attention ! L'inclusion peut être stricte. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ peut être considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On peut vérifier que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ et que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}$.

2.3 Propriétés des sous-espaces propres

Proposition 2.5

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carré est directe.

Corollaire 2.1

Une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Corollaire 2.2 Cardinal d'un spectre

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie** n ou d'une matrice carrée de taille n est un ensemble **fini** de cardinal inférieur ou égal à n.

Proposition 2.6

Soient deux endomorphismes d'un même espace vectoriel qui commutent. Alors tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

2.4 Polynôme caractéristique

Définition 2.7 Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$ de $\mathbb{K}[X]$ est appelé **polynôme caractéristique** de A.

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A = \chi_{A^\top}$.

Exemple 2.10

Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $(X-1)(X-4) - 2 \times 3 = X^2 - 5X - 2$.

Exemple 2.11 Matrice compagnon

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Alors en développant par rapport à la dernière colonne, $\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Proposition 2.7 Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$.

Remarque. C'est a fortiori vrai pour les matrices diagonales.

Remarque. On peut montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs triangulaires.

Proposition 2.8 Similitude et polynôme caractéristique

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Attention ! La réciproque est fausse. Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même polynôme caractéristique mais ne sont évidemment pas semblables.

Définition 2.8 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie**. Le polynôme $\chi_u = \det(X\,\mathrm{Id}_E - u)$ de $\mathbb{K}[X]$ est appelé **polynôme caractéristique** de u.

Remarque. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet pour matrice M dans une base de E, alors $\chi_u = \chi_M$.

Méthode Déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Pour déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de déterminer la matrice de cet endomorphisme dans une base de E et de calculer le polynôme caractéristique de cette matrice.

Exemple 2.12

Soit r la rotation d'angle θ du plan euclidien orienté. La matrice de r dans une base orthonormée directe est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\chi_r = (X - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = X^2 - 2\cos\theta + 1$.

Proposition 2.9 Degré et coefficients du polynôme caractéristique

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors χ_A est un polynôme unitaire de degré n. De plus, le coefficient constant de χ_A est $(-1)^n \det(A)$ et le coefficient du monôme de degré $n-1$ est $-\operatorname{tr}(A)$.

(ii) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie** n. Alors χ_u est un polynôme unitaire de degré n. De plus, le coefficient constant de χ_u est $(-1)^n \det(u)$ et le coefficient du monôme de degré $n-1$ est $-\operatorname{tr}(u)$.

Exemple 2.13

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors u est un automorphisme si et seulement si $\chi_u(0) \neq 0$ i.e. si et seulement si le coefficient constant de χ_u est non nul.

Exemple 2.14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\chi_A(0) \neq 0$ i.e. si et seulement si le coefficient constant de χ_A est non nul.

Exemple 2.15

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, alors $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$.

Proposition 2.10 Spectre et polynôme caractéristique

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de χ_A.

(ii) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors $\operatorname{Sp}(u)$ est l'ensemble des racines de χ_u.

Attention ! Le corps de base peut avoir son importance. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = X^2 + 1$. Ainsi $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ tandis que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}$.

Remarque. On retrouve ainsi le fait que le spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ou d'une matrice carrée de taille n est de cardinal inférieur ou égal à n.

Remarque. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet pour matrice M dans une base de E, alors $\chi_u = \chi_M$ de sorte que $\operatorname{Sp}(u) = \operatorname{Sp}(M)$.

Exemple 2.16

Le spectre d'une matrice triangulaire est donc l'ensemble des coefficients diagonaux de cette matrice.

Exemple 2.17

Toute matrice carrée réelle de taille impaire possède une valeur propre réelle.
De même, tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire possède une valeur propre réelle.

Remarque. Si A est une matrice carrée **réelle**, alors $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ de sorte que les valeurs propres **complexes non réelles** de A sont conjuguées deux à deux.

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Sp}(A^\top) = \mathrm{Sp}(A)$. En effet, $\chi_A = \chi_{A^\top}$.

Méthode **Déterminer les éléments propres d'une matrice**

Pour déterminer les éléments propres d'une matrice M, il suffit de

1. calculer χ_M ;
2. déterminer les racines de χ_M, ce qui fournit $\mathrm{Sp}(M)$;
3. pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, déterminer $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$, ce qui fournit $E_\lambda(M)$.

Méthode **Déterminer les éléments propres d'un endomorphisme**

Pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de **dimension finie**, il suffit de

1. déterminer la matrice M de u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E ;
2. déterminer les éléments propres de M.

On sait alors que $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(M)$ et l'isomorphisme $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$ permet de récupérer le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ à partir du sous-espace propre $E_\lambda(M)$.

Exercice 2.2

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = (X+1)P' - P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 2.11 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Si on note $u_{|F}$ l'endomorphisme de F induit par u, alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.

Définition 2.9 Multiplicité d'une valeur propre

(i) Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et λ une valeur propre de u. On appelle **mutiplicité** de la valeur propre λ, notée $m_\lambda(u)$, la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_u.

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. On appelle **mutiplicité** de la valeur propre λ, notée $m_\lambda(A)$, la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_A.

Remarque. On peut convenir qu'une valeur propre de multiplicité nulle n'est tout simplement pas une valeur propre.

Remarque. Si A est une matrice carrée **réelle**, alors les racines **complexes conjuguées** de A sont de même multiplicité.

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A) \leq n$ avec égalité si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.
De même, si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, alors $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u) \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
Mais d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$ donc si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A) = n$ et $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u) = \dim E$.

Proposition 2.12

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie**. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda(A)$.

3 Diagonalisabilité

3.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 3.1 Endomorphisme diagonalisable

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de **dimension finie** est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Remarque. La base est formée de vecteurs propres de u et les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de u, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans χ_u.

Exemple 3.1

Une homothétie, un projecteur ou une symétrie d'un espace vectoriel de dimension finie sont diagonalisables.

Attention ! La diagonalisabilité peut dépendre du corps de base. L'endomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & iz \end{array} \right.$ est diagonalisable en tant qu'endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ mais ne l'est pas en tant qu'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exemple 3.2

Si u est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie possèdant une **unique** valeur propre λ, alors $u = \lambda \,\mathrm{Id}_E$.

Proposition 3.1 Diagonalisabilité et sous-espaces propres

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de **dimension finie**. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable ;

(ii) il existe une base de E formée de vecteurs propres de u ;

(iii) $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$;

(iv) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = \dim \mathrm{E}$;

(v) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u)$.

Exercice 3.1

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose u diagonalisable.
Montrer que u et v commutent si et seulement si tout sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice 3.2 Diagonalisabilité d'un endomorphisme de rang 1

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathrm{rg}\, u = 1$.

1. Montrer que $\chi_u = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \mathrm{tr}\, u)$.
2. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}\, u \neq 0$.

Proposition 3.2

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. **Si** une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(i) $\mathrm{card}\, \mathrm{Sp}(u) = \dim \mathrm{E}$;

(ii) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples ;

alors u est diagonalisable.

Attention ! Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est diagonalisable mais possède λ comme unique valeur propre et son polynôme caractéristique $(\mathrm{X} - \lambda)^n$ admet λ comme racine de multiplicité n.

Exemple 3.3

La matrice de l'endomorphisme u de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ défini par $u(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}' - \mathrm{P}''$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $0, 1, \dots, n$. Son polynôme caractéristique est $\prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - k)$ qui est scindé à racines simples. Ainsi u est diagonalisable.

Décomposition spectrale

Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie. Notons $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}$ la famille de projecteurs associée à la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Alors $u = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$. Cette écriture s'appelle la décomposition spectrale de u.

3.2 Matrice diagonalisable

Définition 3.2 Matrice diagonalisable

On dit qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque. Les coefficients diagonaux de cette matrice diagonale sont les valeurs propres de A, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans χ_A.

Exemple 3.4

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonalisable possèdant une **unique** valeur propre λ, alors $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n$.

Proposition 3.3

Une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est diagonalisable.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans une base de E est diagonalisable.

Attention ! La diagonalisabilité peut dépendre du corps de base. Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable en tant que matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais ne l'est pas en tant que matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 3.4

Une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A.
Si on note $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ cette base de vecteurs propres, alors $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec P la matrice dont les colonnes sont $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où λ_i est la valeur propre associée à X_i.

Proposition 3.5 Diagonalisabilité et sous-espaces propres

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est diagonalisable ;

(ii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$;

(iii) $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = n$;

(iv) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, $\dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = m_\lambda(\mathrm{A})$.

Proposition 3.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **Si** une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(i) $\operatorname{card} \operatorname{Sp}(A) = n$;

(ii) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples ;

alors A est diagonalisable.

Attention ! Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, si $n \geq 2$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λI_n est diagonalisable mais possède λ comme unique valeur propre et son polynôme caractéristique $(X-\lambda)^n$ admet λ comme racine de multiplicité n.

Méthode **Diagonalisation d'une matrice**

Diagonaliser une matrice diagonalisable A consiste à trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. La marche à suivre est la suivante.

1. Déterminer les valeurs propres de A et des bases des sous-espaces propres associés.
2. Former la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs des bases des différents sous-espaces propres.
3. Former la matrice diagonale D constituée des valeurs propres de A, chaque colonne de D contenant la valeur propre associée à la colonne correspondante de P.

Exemple 3.5

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. On en déduit que $\operatorname{Sp}(A) = \{1, 2\}$. On trouve

$$E_1(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_2(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

On en déduit que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de puissance

Si A est une matrice carrée diagonalisable, alors il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et même pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible). Puisque D est diagonale, le calcul de ses puissances est aisé.

Exercice 3.3 Commutant

Déterminer le commutant de la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire le commutant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.4 Commutant

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable possédant n valeurs propres distinctes. Déterminer le commutant de M, c'est-à-dire l'ensemble des matrices commutant avec M.

4 Trigonalisabilité

4.1 Endomorphisme trigonalisable

Définition 4.1 Endomorphisme trigonalisable

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de **dimension finie** est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Remarque. Les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de u, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans χ_u.

Remarque. On a une définition équivalente en remplaçant «triangulaire supérieure» par «triangulaire inférieure» (il suffit d'inverser l'ordre des vecteurs de la base).

Remarque. Un endomorphisme diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

Proposition 4.1 Trigonalisabilité, déterminant et trace

Soit u un endomorphisme trigonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m_\lambda(u)\lambda \qquad \det(u) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda(u)}$$

Autrement dit, la trace et le déterminant sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres **comptées** avec multiplicité.

Remarque. C'est a fortiori vrai pour les endomorphismes diagonalisables.

Proposition 4.2 Trigonalisabilité et polynôme caractéristique

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Attention ! La trigonalisabilité peut donc dépendre du corps de base.

Remarque. Soit u un endomorphisme trigonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors tout endomorphisme induit par u est également trigonalisable. En effet, χ_u est scindé et si v est un endomorphisme induit par u, alors χ_v divise χ_u de sorte que χ_v est également scindé.

Corollaire 4.1

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

4.2 Matrice trigonalisable

Définition 4.2 Matrice trigonalisable

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque. Les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire supérieure sont les valeurs propres de A, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans χ_A.

Remarque. Une matrice diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

Proposition 4.3

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base de E est trigonalisable.

Proposition 4.4 Trigonalisabilité, déterminant et trace

Soit A une matrice carrée trigonalisable. Alors

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda \qquad \det(A) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda^{\mu_\lambda(A)}$$

Autrement dit, la trace et le déterminant sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres **comptées** avec multiplicité.

Remarque. C'est a fortiori vrai pour les matrices diagonalisables.

Proposition 4.5 Trigonalisabilité et polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Attention ! La trigonalisabilité peut donc dépendre du corps de base.

Exemple 4.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(A^p) = \{\lambda_1^p, \dots, \lambda_r^p\}$.

Corollaire 4.2

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Méthode Trigonalisation d'une matrice

Il s'agit essentiellement de remarquer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet pour polynôme caractéristique $\chi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda(A)}$ alors

- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^{m_\lambda(A)}$ d'après le lemme des noyaux (cf. plus loin) ;
- la suite $(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^k)$ est croissante pour l'inclusion.

L'algorithme suivant fournit alors une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$.
On remarque que T peut alors s'écrire $T = D + T'$ avec D diagonale et T' triangulaire stricte et que D et T' **commutent**.

Algorithme 1 Trigonalisation d'une matrice

Données : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable
Résultat : Une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

```
Déterminer Sp(A)
Pour λ ∈ Sp(A) Faire
    Déterminer une base B_λ de E_λ(A) = Ker(A − λI_n)
    k ← 1
    Tant que dim Ker(A − λI_n)^k < m_λ(A) Faire
        Ajouter des vecteurs à B_λ la transformer en une base de Ker(A − λI_n)^k
        k ← k + 1
    Fin Tant que
Fin Pour
Poser B = ⋃_{λ∈Sp(A)} B_λ
Former la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs de B
Former la matrice T dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base B des produits de A par les vecteurs de B
```

Exemple 4.2

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A = (X+2)(X-1)^2$. On calcule ensuite

$$\operatorname{Ker}(A + 2I_3) = \operatorname{vect}(C_1) \qquad \operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{vect}(C_2) \qquad \operatorname{Ker}(A - I_3)^2 = \operatorname{vect}(C_2, C_3)$$

avec

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AC_1 = -2C_1 \qquad AC_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_2 \qquad AC_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -C_2 + C_3$$

On en déduit qu'en posant $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = PTP^{-1}$.

Exemple 4.3

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A = (X+1)^3$ de sorte que $\operatorname{Sp}(A) = \{-1\}$. On calcule ensuite

$$\operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{vect}(C_1) \qquad \operatorname{Ker}(A + I_3)^2 = \operatorname{vect}(C_1, C_2) \qquad \operatorname{Ker}(A + I_3)^3 = \operatorname{vect}(C_1, C_2, C_3)$$

avec

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AC_1 = -C_1 \qquad AC_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 - C_2 \qquad AC_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = -C_1 - 2C_2 - C_3$$

On en déduit qu'en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = PTP^{-1}$.

Proposition 4.6 Trigonalisabilité et nilpotence

(i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable et admet 0 comme unique valeur propre.

(ii) Une matrice carrée est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et admet 0 comme unique valeur propre.

Remarque. Un endomorphisme nilpotent est nilpotent si et seulement si il existe une base dans laquelle sa matrice est est triangulaire stricte.
Une matrice est nilpotente si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire stricte.

Exemple 4.4

Une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle.

Corollaire 4.3 Polynôme caractéristique et nilpotence

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors u est nilpotent si et seulement si $\chi_u = X^n$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si et seulement si $\chi_A = X^n$.