

INÉGALITÉS

Inégalité triangulaire

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

Trigonométrie

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad & |\sin x| \leq |x| \\ \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad & |\tan x| \geq |x| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad & \sin x \leq x \\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[, \quad & \tan x \leq x \end{aligned}$$

Logarithme et exponentielle

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, +\infty[, \quad & \ln(1+x) \leq x \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad & e^x \geq 1+x \end{aligned}$$

Moyennes arithmétique, géométrique, harmonique, quadratique

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}$$

Inégalité de Minkowski

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p \in [1, +\infty[$,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Inégalité de Hölder

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $(p, q) \in [1, +\infty]^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$