

DEVOIR SURVEILLÉ N°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des rai-sonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – EPITA 2025 - Mathématiques - Option

Dans ce problème, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou le corps \mathbb{C} , n est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} . La matrice identité d'ordre n est notée I_n , et $GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire lorsqu'elle est de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.

La topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie à l'aide de l'une quelconque de ses normes équivalentes. Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle classe de similitude de M l'ensemble $\mathcal{S}(M)$ constitué de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables à M :

$$\mathcal{S}(M) = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{K})\}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés topologiques des classes de similitude des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I Le cas des matrices d'ordre 2

1 Déterminer la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2 Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on pose

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

2.a Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices E_k et F_k sont inversibles et déterminer leurs inverses.

2.b Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices $E_k A E_k^{-1}$ et $F_k A F_k^{-1}$.

2.c Montrer que la classe de similitude de A est bornée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Dans la suite de cette partie, on fixe une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et on cherche à quelle condition sa classe de similitude est fermée.

3 On suppose dans cette question que A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 dans \mathbb{K} . Soit $(M_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

3.a Soit $i \in \{1, 2\}$. En considérant la suite $(\det(M_k - \lambda_i I_2))_{k \geq 0}$, montrer que $\det(B - \lambda_i I_2) = 0$.

3.b En déduire que $B \in \mathcal{S}(A)$ et conclure que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

4 On suppose dans cette question que A a une seule valeur propre λ dans \mathbb{K} et que A n'est pas une matrice scalaire.

4.a Montrer que A est trigonalisable, puis qu'elle est semblable à toute matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{K}^*$$

4.b En déduire que la classe de similitude de A n'est pas fermée.

5 Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que $\mathcal{S}(A)$ soit fermée.

6 Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

6.a Montrer que le spectre réel de A est vide si, et seulement si, $4\det(A) - (\text{tr}(A))^2 > 0$.

Dans la suite de la question **6**, on suppose cette condition réalisée.

6.b On note u l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est A. Montrer que $(e_1, u(e_1))$ est une base de \mathbb{R}^2 et que la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \text{tr}(A) \end{pmatrix}$$

6.c Soit $(M_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que B a à la fois la même trace et le même déterminant que A. En déduire que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

7 Conclure sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la classe de similitude est fermée.

II Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

8 Soit u un endomorphisme de \mathbb{K}^n . Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, x et $u(x)$ sont liés, alors u est une homothétie. On pourra raisonner avec la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{K}^n et considérer $u(e_1 + e_i)$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$.

9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui n'est pas une matrice scalaire et u l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé. Montrer qu'il existe un vecteur x de \mathbb{K}^n tel que la famille $(x, u(x))$ est libre. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, il existe une base de \mathbb{K}^n dans laquelle la matrice de u a pour première colonne

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^\top$$

10 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la classe de similitude d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit bornée.

11 Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \|PMP^{-1}\| = \|M\|$$

III Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est fermée

Dans cette question, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

12 On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Soit $(M_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

12.a Montrer que l'application $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ M &\longmapsto \chi_M(X) \end{cases}$ qui à tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe son polynôme caractéristique, est continue.

12.b Montrer que tout polynôme annulateur de A annule aussi B. En déduire que B est diagonalisable.

12.c Conclure que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

13 On suppose dans cette question que $\mathcal{S}(A)$ est fermée. On note u l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à A , et on considère une base (b_1, b_2, \dots, b_n) de \mathbb{C}^n dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. On notera $T = (t_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ cette matrice.

13.a Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $B_k = \left(b_1, \frac{b_2}{k}, \dots, \frac{b_n}{k^{n-1}} \right)$ est une base de \mathbb{C}^n et écrire la matrice de u dans cette base en fonction des coefficients de T .

13.b En déduire que A est diagonalisable.

IV Une classe de similitude est toujours d'intérieur vide

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

14 On pose $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = \text{tr}(A)\}$.
Quelle est la structure de \mathcal{T} ? Montrer que \mathcal{T} est d'intérieur vide.

15 En déduire que $\mathcal{S}(A)$ est d'intérieur vide.

Problème 2 – CCINP Maths 2 MP 2020

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$.

Un endomorphisme u de E est une similitude de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de E , $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dira que u est une similitude de rapport k .

On notera $\text{Sim}(E)$ l'ensemble des similitudes de E .

$O(E)$ désigne l'ensemble des isométries vectorielles de E .

L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

I Exemples, propriétés

1 Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.

2 Démontrer que tout élément de $\text{Sim}(E)$ est bijectif et établir que $\text{Sim}(E)$, muni de la loi de composition, est un groupe.

3 Soient u un endomorphisme de E , \mathcal{B} une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base \mathcal{B} .
Démontrer que u est une isométrie vectorielle de E , si et seulement si, $A^T A = I_n$.
Caractériser par une relation matricielle une similitude de rapport k .

4 Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 d'une similitude u dont on donnera le rapport.

Donner la matrice de la similitude u^{-1} .

5 Soit $u \in \text{Sim}(E)$. Vérifier que, pour tout élément f de $O(E)$, $u^{-1} \circ f \circ u \in O(E)$.

6 On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$ l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$. Démontrer que si u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0, alors u est une similitude de E . On pourra remarquer que, pour tout vecteur y non nul, $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$.

II Assertions équivalentes

7 On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme αId_E .

Démontrer que $u \in \text{Sim}(E)$ si et seulement si, u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $O(E)$.

8 Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle non nulle de \mathbb{R}^2 et de la matrice d'une isométrie vectorielle de \mathbb{R}^2 dont on précisera la nature.

9 Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

En déduire que u est une similitude de rapport k , si et seulement si, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , $\langle u(x), u(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle$.

- 10** Démontrer que, si u est une similitude de rapport k , alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E ,

$$\langle x, y \rangle = 0 \implies \langle u(x), u(y) \rangle = 0$$

On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.

- 11** Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité. Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base orthonormée de E . Démontrer que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i + e_j, e_i - e_j \rangle = 0$$

puis que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$$

On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$. Démontrer que u est une similitude de rapport k .

- 12** Soit u une application de E dans E (non supposé linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle$$

Démontrer que u est un endomorphisme de E , puis que u est une similitude de E .