Continuité

Exercice 1 ★★ **Point fixe de l'exponentielle complexe**

Le but de cet exercice est de montrer l'existence de points fixes de l'exponentielle complexe, c'est-à-dire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = z$.

1. L'exponentielle admet-elle des points fixes sur $\mathbb{R}$? On justifiera sa réponse.
2. Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose
$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right) - \frac{x}{\sin x}$$
Déterminer les limites de f en 0 et $\frac{\pi}{2}$.
3. En déduire qu'il existe $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b) = 0$.
4. On pose $a = \frac{b}{\tan b}$ et $z = a + ib$. Montrer que $e^z = z$.

Exercice 2 ★★★

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application continue telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$. Déterminer f.

Exercice 3 ★★

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ une application continue. Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$ et P^+ et P^- les demi-plans de $\mathbb{R}^2$ délimités par D. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ tel que $f(a) \in \mathrm{P}^+$ et $f(b) \in \mathrm{P}^-$. Montrer qu'il existe $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) \in \mathrm{D}$.

Exercice 4 ★★

Soit f une fonction continue sur un segment $\mathrm{I} = [a, b]$ telle que $\mathrm{I} \subset f(\mathrm{I})$.

1. Montrer que f prend les valeurs a et b sur I.
2. En déduire que f admet un point fixe.

Exercice 5 ★★

Soit f une fonction décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Dérivabilité

Exercice 6 ★★★ **Equation fonctionnelle de l'exponentielle matricielle**

Déterminer les applications $\mathrm{M} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivables en 0 vérifiant :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{M}(s + t) = \mathrm{M}(s)\mathrm{M}(t)$$

Exercice 7 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2019**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) > 0$, et $x : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = \mathrm{A}x(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ℓ, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ \ell(x(t)) = 0$.

Exercice 8 ★★

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient f et g deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On pose pour $x \in [a, b]$:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculer $\Delta'(x)$ pour $x \in]a, b[$.
2. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$(g(b) - g(a))\, f'(c) = (f(b) - f(a))\, g'(c)$$

Exercice 9 ★★

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ dérivable en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 10 ★★

On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

1. Montrer que A commute avec $\exp(\mathrm{B})$.
2. On considère l'application $\varphi : t \in [0,1] \mapsto \exp(t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))\exp(-t\mathrm{B})\exp(-t\mathrm{A})$. Justifier que φ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. En déduire que $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$.

Exercice 11 ★★

Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)$ est colinéaire à $f(b)-f(a)$.

Exercice 12 ★★ **Mouvement à force centrale**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(t)$ et $f''(t)$ soient colinéaires. On suppose de plus qu'il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $(f(t_0), f'(t_0))$ est libre.

1. Montrer que f est à valeurs dans un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On pourra utiliser le produit vectoriel.
2. Montrer que l'aire orientée du triangle porté par les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ est constante.

Exercice 13 ★★★

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\varphi : t \in \mathrm{I} \mapsto \det(\mathrm{A}(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que

$$\forall t \in \mathrm{I},\ \varphi'(t) = \operatorname{tr}(\operatorname{com}(\mathrm{A}(t))^{\mathsf{T}}\mathrm{A}'(t))$$

Exercice 14 ★★

Soit $f : x \mapsto \arctan(x)$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme P_{n-1} tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$.
2. Préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de P_n.
3. Déterminer les limites de $f^{(n)}$ en $-\infty$ et $+\infty$ pour $n \geq 1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n sont réelles et simples. Raisonner par récurrence en utilisant le théorème de Rolle.

Exercice 15 ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{P}_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 ★★★ **Centrale MP**

Soient f dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, A et B deux points distincts de sa courbe représentative $\mathcal{C}$ tels que B est sur la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Montrer qu'il existe un point M de $\mathcal{C}$, distinct de A, tel que A est sur la tangente à $\mathcal{C}$ en M.

Intégration

Exercice 17 ★★★

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$. On se donne $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question que $\|\mathrm{A}\| < 1$. Montrer que $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est inversible et que $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}^k$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \|\mathrm{A}\|$. Montrer que $z\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est inversible et exprimer son inverse sous la forme d'une somme de série.

3. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $r > \|\mathrm{A}\|$. Justifier que
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(re^{i\theta})^{k+1}(re^{i\theta}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{A}^k$$

4. Justifier que
$$\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta}\,\mathrm{com}(re^{i\theta} - \mathrm{A})^\top\,\mathrm{d}\theta$$

5. En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 18 ★★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : [a,b] \to \mathrm{E}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. On suppose $f(a) = 0$. Montrer que
$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \frac{(b-a)^2}{2}\max_{t\in[a,b]}\|f'(t)\|$$

2. On suppose maintenant que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que
$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \frac{(b-a)^2}{4}\max_{t\in[a,b]}\|f'(t)\|$$

Sommes de Riemann

Exercice 19

Déterminer un équivalent de $u_n = \sqrt{1}\sqrt{n-1}+\sqrt{2}\sqrt{n-2}+\dots+\sqrt{n-2}\sqrt{2}+\sqrt{n-1}\sqrt{1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 20 X PC 2012

Montrer que
$$\mathrm{X}^{2n} - 1 = (\mathrm{X}^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$
En déduire pour $r > 1$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|1 - re^{i\theta}\right|\,d\theta$$

Exercice 21

1. On pose $\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (S_n) converge vers un réel à préciser.

2. On pose $u_n = \left(\frac{4^n n^n n!}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel à préciser.

Exercice 22 ★★★

Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Formules de Taylor

Exercice 23

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ nulle en 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ pour $n \geq 1$. Etudier la limite de (S_n). On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 24 ★★

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que $f(0) = 1$ et $\forall x \geq \frac{1}{2}, f(x) = 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| \geq 2^n n!$.
2. Montrer que pour $n \geq 1$, $\sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| > 2^n n!$.

Exercice 25 ★★

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$. On suppose de plus que :

$$\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}| \leq \lambda^n n!$$

Montrer que f est nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}\right[$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26 ★★ — Formule de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

On appliquera le théorème de Rolle à la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec une constante A bien choisie.

Exercice 27 ★★

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour $n \geq 1$.

1. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Déterminer par récurrence une expression de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1, montrer que $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la convergence et la limite de (u_n).

Exercice 28 ★★ — Inégalité de Hadamard

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que f, f' et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose

$$M_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \qquad M_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| \qquad M_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f''(t)|$$

On souhaite montrer que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

1. Démontrer l'inégalité demandée dans le cas où $M_0 = 0$ ou $M_2 = 0$. Dans la suite de l'énoncé on supposera M_0 et M_2 strictement positifs.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Justifier que
$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$
3. En déduire que
$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$
4. Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{a}{t} + bt$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que g admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer celui-ci en fonction de a et b.
5. Conclure.

Exercice 29 ★★★ **Fonctions absolument monotones**

Soient $\mathrm{R} > 0$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\mathrm{I} =]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathrm{I}, f^{(n)}(x) \geq 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{I}$, on pose $\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $\mathrm{R}_n(x) = f(x) - \mathrm{S}_n(x)$.

1. Soit $r \in]0, \mathrm{R}[$ et $x \in]-r, r[$. Montrer que $|\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} \mathrm{R}_n(r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $(\mathrm{S}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Exercice 30 ★★★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ nulle en 0. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ pour $n \geq 1$. Etudier la limite de (S_n). On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 31

On considère la fonction $g : x \in]0,1] \mapsto x \ln(x)$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g ce prolongement.
2. Etudier brièvement les variations de g sur $[0,1]$.
3. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ et $t_{n+1} = -g(t_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$.
4. Montrer que pour tout $x \in \left[t_0, e^{-1}\right]$,
   $$|g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$|t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$
6. En déduire la limite de la suite (t_n).