Interrogation écrite n°05

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin t \, \mathrm{d}t$. On justifiera sa réponse.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \sin t \, \mathrm{d}t = 1 - \cos x$. *Or* $\cos$ *n'admet pas de limite en* $+\infty$. *En effet,* $2n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $(2n+1)\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *mais* $\cos(2n\pi) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ *et* $\cos((2n+1)\pi) = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. *Comme* $\cos$ *n'admet pas de limite en* $+\infty$, $\int_0^{+\infty} \sin t \, \mathrm{d}t$ *diverge.* ∎

2. La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -2 & 1 \\ -3 & \mathrm{X}+2 & 0 \\ 2 & -2 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix} &\underset{\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3}{=} \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & -2 & 1 \\ \mathrm{X}-1 & \mathrm{X}+2 & 0 \\ \mathrm{X}-1 & -2 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix} \\
&= (\mathrm{X}-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & \mathrm{X}+2 & 0 \\ 1 & -2 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}}{=} (\mathrm{X}-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \mathrm{X}+4 & -1 \\ 0 & 0 & \mathrm{X}-2 \end{vmatrix} \\
&= (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+4)(\mathrm{X}-2)
\end{aligned}$$

   Comme χ_{A} *est scindé à racines simples,* A *est diagonalisable.* ∎

3. L'endomorphisme $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$ est-il diagonalisable ? Justifier.

   La matrice de φ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *est* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Supposons* φ *diagonalisable. Alors* A *l'est également. Or il est clair que* $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ *donc* A *est semblable à la matrice nulle puis* $A = 0$*, ce qui n'est pas. Ainsi* φ *n'est pas diagonalisable.* ∎

4. Soit N l'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$. Montrer que N est un idéal de A.

   - *Tout d'abord,* $0_A \in N$ *puisque* $0_A^1 = 0_A$.
   - *Soit* $(x, y) \in N^2$. *Il existe* $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *tel que* $x^n = y^p = 0_A$. *Comme* A *est un anneau commutatif, on peut employer la formule du binôme de Newton :*
   $$(x+y)^{n+p-1} = \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{n+p-1}{k} x^k \times y^{n+p-1-k}$$
   Soit $k \in [\![0, n+p-1]\!]$. *Si* $k \geq n$*, alors* $x^k = 0_A$ *puis* $\binom{n+p-1}{k} x^k \times y^{n+p-1-k} = 0_A$. *Si* $k \geq n+1$*, alors* $n+p-1-k \geq p$ *puis* $y^{n+^{-}1-k} = 0_A$ *et* $\binom{n+p-1}{k} x^k \times y^{n+p-1-k} = 0_A$. *Tous les termes de la somme précédente sont nuls de sorte que* $(x+y)^{n+p-1} = 0_A$ *puis* $x + y \in N$.
   - *Enfin, soit* $(a, x) \in A \times N$. *Il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $x^n = 0_A$. *Comme* A *est un anneau commutatif,* $(a \times x)^n = a^n \times x^n = 0_A$. *Donc* $a \times x \in N$.

   On conclut que N *est un idéal de* A. ∎