Topologie

1 Topologie d'un espace vectoriel normé

Toutes les propriétés des parties vues dans cette section (ouvert, fermé, voisinage, intérieur, adhérence, densité, frontière) restent inchangées si on remplace la norme de l'espace vectoriel normé considéré par une norme équivalente.

1.1 Ouverts et fermés

Définition 1.1 Boules ouvertes, boules fermées, sphère

Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in \mathrm{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathrm{B}(a,r) = \{x \in \mathrm{E},\ \|x-a\| < r\}$$

- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathrm{B}_f(a,r) = \{x \in \mathrm{E},\ \|x-a\| \leq r\}$$

- On appelle **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathrm{S}(a,r) = \{x \in \mathrm{E},\ \|x-a\| = r\}$$

Exemple 1.1

Si on munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue,

$$\mathrm{B}(a,r) =]a-r, a+r[\qquad \mathrm{B}_f(a,r) = [a-r, a+r] \qquad \mathrm{S}(a,r) = \{a-r, a+r\}$$

Définition 1.2 Ouvert et fermé

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

- On dit que A est une **partie ouverte** ou un **ouvert** de E si pour tout $a \in \mathrm{A}$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\mathrm{B}(a,\varepsilon) \subset \mathrm{A}$.
- On dit que A est une **partie fermée** ou un **fermé** de E si $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ est un ouvert de E.

Remarque. Par définition, A est un fermé si et seulement si $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ est un ouvert. Mais on en déduit sans peine également que A est un ouvert si et seulement si $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ est un fermé.

Proposition 1.1 Boules ouvertes et fermées

Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé.

Exemple 1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (i.e. de la forme $]a, b[$) sont des ouverts (ce sont des boules ouvertes), de même que les intervalles de la forme $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ et $]-\infty, +\infty[$.
Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ (i.e. de la forme $[a, b]$) sont des fermés (ce sont des boules fermées), de même que les intervalles de la forme $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ et $]-\infty, +\infty[$.

Exemple 1.3

Un singleton est fermé.

Attention ! L'erreur classique consiste à penser que fermé est le contraire d'ouvert.
Une partie peut être à la fois un ouvert et un fermé : c'est le cas de l'ensemble vide et de l'espace total (ce sont d'ailleurs les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé).
Une partie peut n'être ni un ouvert ni un fermé. Par exemple, l'intervalle $[0, 1[$ n'est ni un ouvert ni un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.1

Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé E sont $\varnothing$ et E.

Proposition 1.2 Réunion et intersection d'ouverts ou de fermés

(i) Une réunion quelconque ou une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

(ii) Une intersection quelconque ou une réunion **finie** de fermés est un fermé.

Exemple 1.4

Comme tout singleton est fermé, toute partie finie d'un espace vectoriel normé est fermée comme réunion finie de singletons.

Attention ! Une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert. Par exemple,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

De même, une réunion infinie de fermés peut ne pas être un fermé. Par exemple,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0, 1]$$

Proposition 1.3

Une sphère est un fermé.

Proposition 1.4 Caractérisation séquentielle des fermés

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé. Alors A est un fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A admet sa limite dans A.

Définition 1.3 Voisinage

Soit a un élément d'un espace vectoriel normé E. On appelle **voisinage** de a toute partie de E contenant un ouvert de E comprenant a.

Proposition 1.5

Soit a un élément d'un espace vectoriel normé E. Une partie V de E est un voisinage de a si et seulement si il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$.

Exemple 1.5

Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

Remarque. Les notions de limite ou de valeur d'adhérence peuvent se traduire en terme de voisinage. Notons $\mathcal{V}(\ell)$ l'ensemble des voisinages d'un point ℓ de E.

- (u_n) converge vers $\ell \in E$ si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \in V$$

- $\ell \in E$ est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ u_n \in V$$

Proposition 1.6 Produit d'ouverts et de fermés

Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels normés. On munit $\prod_{i=1}^n E_i$ d'une norme produit.

- Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, U_i est un ouvert de E_i, alors $\prod_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de $\prod_{i=1}^n E_i$.
- Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, F_i est un fermé de E_i, alors $\prod_{i=1}^n F_i$ est un ouvert de $\prod_{i=1}^n E_i$.

1.2 Intérieur et adhérence

Définition 1.4 Intérieur d'une partie

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que $a \in E$ est **intérieur** à A si A est un voisinage de a ou, de manière équivalente si,

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ B(a, \varepsilon) \subset A$$

L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'**intérieur** de A et se note $\mathring{A}$.

Exemple 1.6

Pour $a \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'intérieur de la boule fermée $B_f(a, \varepsilon)$ est la boule ouverte $B(a, \varepsilon)$.

Exemple 1.7

L'intérieur d'un intervalle non vide est l'intervalle ouvert de mêmes extrémités.

Proposition 1.7

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert (pour l'inclusion) inclus dans A, autrement dit $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subset A}} U$.

En particulier, A est un ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.

Exercice 1.2

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$
2. $A \subset B \implies \mathring{A} \subset \mathring{B}$
3. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
4. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

   Dans le dernier cas, on donnera un exemple d'inclusion stricte.

Définition 1.5 Adhérence d'une partie

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que $a \in E$ est **adhérent** à A si l'intersection de tout voisinage de a avec A est non vide ou, de manière équivalente, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'**adhérence** de A et se note $\overline{A}$.

Exemple 1.8

Pour $a \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'adhérence de la boule ouverte $B(a, \varepsilon)$ est la boule fermée $B_f(a, \varepsilon)$.

Exemple 1.9

L'adhérence d'un intervalle borné non vide est l'intervalle fermé de mêmes extrémités.

Remarque. Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on dira que $+\infty$ est adhérent à A si A est non majorée et que $-\infty$ est adhérent à A si A est non minorée.

Exercice 1.3

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$ et $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$.

Proposition 1.8

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors $\overline{\mathrm{A}}$ est le plus petit fermé (pour l'inclusion) contenant A, autrement dit $\overline{\mathrm{A}} = \bigcap_{\substack{\mathrm{F}\text{ fermé} \\ \mathrm{A}\subset\mathrm{F}}} \mathrm{U}$.

En particulier, A est un fermé si et seulement si $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$.

Exercice 1.4

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1. $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\mathrm{A}}$
2. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies \overline{\mathrm{A}} \subset \overline{\mathrm{B}}$
3. $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$
4. $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$

Dans le dernier cas, on donnera un exemple d'inclusion stricte.

Proposition 1.9 Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E et $a \in \mathrm{E}$. Alors $a \in \overline{\mathrm{A}}$ si et seulement si il existe $(a_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

Remarque. Ceci signifie que $\overline{\mathrm{A}}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans A.

Définition 1.6 Frontière

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On appelle **frontière** de A l'ensemble $\mathrm{Fr}(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}}$.

Exemple 1.10

La frontière de la boule $\mathrm{B}(a, \varepsilon)$ est la sphère $\mathrm{S}(a, \varepsilon)$.

Proposition 1.10

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors Fr(A) est un fermé.

Définition 1.7 Densité

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que A est dense si $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E}$ ou, de manière équivalente, si

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$$

Proposition 1.11 Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors A est dense si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe une suite à valeurs dans A de limite x.

Exemple 1.11 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général de terme $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et de limite x.

Exemple 1.12 Densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et posons $\mathrm{M}_p = \mathrm{M} + \frac{1}{p}\mathrm{I}_n$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. On a clairement $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}_p = \mathrm{M}$. De plus, la suite (M_p) est injective et M ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres. Par conséquent, la suite (M_p) est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang.

Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit monogènes (i.e. de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$) soit denses.

1.3 Topologie relative à une partie

Définition 1.8 Ouvert et fermé relatifs

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

(i) On appelle **ouvert relatif** à A toute partie de la forme $\mathrm{A} \cap \mathrm{U}$ où U est un ouvert de E.

(ii) On appelle **fermé relatif** à A toute partie de la forme $\mathrm{A} \cap \mathrm{F}$ où F est un fermé de E.

Exemple 1.13

$[0, 1[$ est un ouvert relatif à $\mathbb{R}_+$ car $[0, 1[=]-1, 1[\cap \mathbb{R}_+$ est $]-1, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
$]0, 1]$ est un fermé relatif à $\mathbb{R}_+^*$ car $]0, 1] = [0, 1] \cap \mathbb{R}_+^*$ est $[0, 1]$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Remarque. On montre aisément qu'une partie F de A est un fermé relatif à A si et seulement si $\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$ est un ouvert relatif à A.
De même, une partie U de A est un ouvert relatif à A si et seulement si $\mathrm{E} \setminus \mathrm{U}$ est un fermé relatif à A.

Remarque. Une partie U de A est un ouvert relatif à A si et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{U},\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap \mathrm{A} \subset \mathrm{U}$$

Proposition 1.12 Caractérisation séquentielle

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Une partie F de A est un fermé relatif à A si et seulement si toute suite d'éléments de F convergeant dans A a sa limite dans F.

Définition 1.9 Voisinage relatif

Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E et $a \in \mathrm{A}$. On appelle **voisinage relatif** de a à A toute partie de la forme $\mathrm{A} \cap \mathrm{V}$ où V est un voisinage de a.

Définition 1.10 Densité relative

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Une partie X de A est dense dans A si $\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{A}$.

Exercice 1.5

Sachant que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont monogènes ou denses, montrer que $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

2 Limite d'une application

Toutes les propriétés des applications vues dans cette section restent inchangées si on remplace les normes des espaces vectoriels normés considérés par des normes équivalentes.

2.1 Définition et propriétés de la limite

Définition 2.1 Limite

Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}, \|\cdot\|_{\mathrm{F}})$ deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, f une application de A dans F, a un point adhérent à A et $\ell \in \mathrm{F}$.
On dit que f admet pour **limite** ℓ en a si pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage U de a tel que $f(\mathrm{U} \cap \mathrm{A}) \subset \mathrm{V}$ ou, de manière équivalente, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ f(\mathrm{B}(a, \alpha) \cap \mathrm{A}) \subset \mathrm{B}(\ell, \varepsilon)$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in \mathrm{A}, \ \|x - a\|_{\mathrm{E}} < \alpha \implies \|f(x) - \ell\|_{\mathrm{F}} < \varepsilon$$

Remarque. On obtient une définition équivalente en remplaçant les boules ouvertes par des boules fermées ou les inégalités strictes par des inégalités larges.

Remarque. La partie A peut avoir son importance. Par exemple, si on considère $f : (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto \arctan(y/x)$. Alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} = \frac{\pi}{2}$.
Mais si on considère $g : (x, y) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R} \mapsto \arctan(y/x)$. Alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} = -\frac{\pi}{2}$

Proposition 2.1 Unicité de la limite

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, f une application de A dans F et a un point adhérent à A.
Si f admet une limite en a, alors celle-ci est unique.

Proposition 2.2 Passage à la limite

Soient f et g deux applications d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant des limites respectives ℓ et ℓ' en $a \in \overline{\mathrm{A}}$.
Si $f \leq g$ sur un voisinage de a relatif à A, alors $\ell \leq \ell'$.

Attention ! Ceci n'a bien évidemment aucun sens pour des applications qui ne sont pas à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.3 Encadrement

Soient f, g et h trois applications d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et h admettent la même limite ℓ en $a \in \overline{\mathrm{A}}$.
Si $f \leq g \leq h$ sur un voisinage de a relatif à A, alors g admet également pour limite ℓ en a.

Méthode Déterminer la limite d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Soit f une application d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour déterminer la limite de f en $a \in \overline{\mathrm{A}}$, on peut :

- se ramener en $(0, \dots, 0)$ en posant $x = a + h$ de sorte que h tend vers $(0, \dots, 0)$ lorsque x tend vers a ;
- choisir une norme adaptée ;
- tirer parti du fait que pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x_i| \leq \|x\|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (que $\|\cdot\|$ soit la norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$).

Exemple 2.1

Soit $f : (x, y, z) \mapsto \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$. Déterminons la limite éventuelle de f en $(0, 0, 0)$.
Munissons $\mathbb{R}^3$ de la norme euclidienne. Alors

$$|f(x,y,z)| = \frac{|x||y||z|}{\|(x,y,z)\|_2^2} \leq \frac{\|(x,y,z)\|_2^3}{\|(x,y,z)\|_2^2} = \|(x,y,z)\|_2$$

On en déduit que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$.

Proposition 2.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, f une application de A dans F, a un point adhérent à A et $\ell \in \mathrm{F}$.
Alors $\lim\limits_a f = \ell$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Méthode Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite

Pour montrer qu'une fonction f définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E n'admet pas de limite en $a \in \overline{\mathrm{A}}$, il suffit au choix :

- d'exhiber une suite (u_n) à valeurs dans A et de limite a telle que la suite $(f(u_n))$ n'ait pas de limite ;
- ou d'exhiber deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs dans A et de limite a telle que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ aient des limites différentes.

Exemple 2.2

L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ n'admet pas de limite en $(0, 0)$. En effet, si on pose $u_n = \left(\dfrac{1}{n}, 0\right)$ et $v_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les suites (u_n) et (v_n) sont bien à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et de limite $(0, 0)$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = \dfrac{1}{2}$.

ATTENTION ! L'exemple précédent montre en particulier que, si f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il ne suffit pas que les fonctions $x \mapsto f(x, b)$ et $y \mapsto f(a, y)$ admettent des limites respectives en a et b pour que f admette une limite en (a, b).
En effet, pour $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, les applications $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ admettent bien des limites en 0 puisqu'elles sont constamment nulles et pourtant, f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Proposition 2.5 Extensions

Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}, \|\cdot\|_{\mathrm{F}})$ deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, f une application de A dans F, a un point adhérent à A et $\ell \in \mathrm{F}$.

- On suppose A non bornée. Alors $\lim\limits_{\|x\|_{\mathrm{E}} \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \|x\|_{\mathrm{E}} \geq \mathrm{K} \implies \|f(x) - \ell\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon$$

- On suppose que A est une partie non majorée de R. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \mathrm{K} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{A},\ x \geq \mathrm{K} \implies \|f(x) - \ell\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon$$

- On suppose que A est une partie non minorée de $\mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \mathrm{K} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{A},\ x \leq \mathrm{K} \implies \|f(x) - \ell\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon$$

- On suppose que $\mathrm{F} = \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ signifie que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \|x - a\|_{\mathrm{E}} \leq \alpha \implies f(x) \geq \mathrm{M}$$

- On suppose que $\mathrm{F} = \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ signifie que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \|x - a\|_{\mathrm{E}} \leq \alpha \implies f(x) \leq \mathrm{M}$$

- On suppose A non bornée et $\mathrm{F} = \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{\|x\|_{\mathrm{E}} \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \|x\|_{\mathrm{E}} \geq \mathrm{K} \implies f(x) \geq \mathrm{M}$$

- On suppose A non bornée et $\mathrm{F} = \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{\|x\|_{\mathrm{E}} \to +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \|x\|_{\mathrm{E}} \geq \mathrm{K} \implies f(x) \leq \mathrm{M}$$

On peut également donner une caractérisation séquentielle de la limite dans chacun de ces cas.

Exemple 2.3

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$. Alors $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x, y) = +\infty$.

Exemple 2.4

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ un polynôme non constant. Alors $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |\mathrm{P}(z)| = +\infty$.

Exemple 2.5

L'application $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet, la suite de terme général $n\pi$ est de limite $+\infty$ mais la suite de terme général $f(n\pi)$ n'admet pas de limite. En effet, elle admet deux valeurs d'adhérences, à savoir $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

Exemple 2.6

L'application $f : (x, y) \mapsto \sin(x + y)$ n'admet pas de limite lorsque $\|(x, y)\|$ tend vers $+\infty$. En effet, la suite de terme général $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$ tend bien en norme vers $+\infty$ mais la suite de terme général $f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$ n'admet pas de limite. En effet, elle admet deux valeurs d'adhérences -1 et 1.

Proposition 2.6 Majoration, minoration

Soient f et g deux applications d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $f \leq g$ sur un voisinage de a relatif à A.

(i) Si $\lim_a f = +\infty$, alors $\lim_a g = +\infty$.

(ii) Si $\lim_a g = -\infty$, alors $\lim_a f = -\infty$.

Proposition 2.7 Limite d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés

Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_n$ des espaces vectoriels normés, f une application d'une partie A de E dans $\prod_{i=1}^n \mathrm{F}_i$, $a \in \overline{\mathrm{A}}$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \prod_{i=1}^n \mathrm{F}_i$. On note $f_1, \dots, f_n$ les applications composantes de f.
Alors f admet pour limite ℓ en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i admet pour limite ℓ_i en a.

2.2 Opérations sur les limites

Proposition 2.8

Soient A une partie d'une espace vectoriel normé E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, f une application de A dans $\mathbb{K}$ et g une application de A dans F.
Si f et g admettent des limites en $a \in \overline{\mathrm{A}}$, alors fg admet une limite en a et $\lim_a fg = (\lim_a f)(\lim_a g)$.

Proposition 2.9

Soient A une partie d'une espace vectoriel normé E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, f et g deux applications de A dans F.
Si f et g admettent des limites en $a \in \overline{\mathrm{A}}$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a et $\lim_a \lambda f + \mu g = \lambda \lim_a f + \mu \lim_a g$.

Proposition 2.10 Limite et composition

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, A et B des parties respectives de E et F, f une application de A dans F, g une application de B dans G et enfin $a \in \overline{A}$, $b \in F$ et $l \in G$. On suppose que $f(A) \subset B$.
Si $\lim\limits_{a} f = b$ et $\lim\limits_{b} g = \ell$, alors $\lim\limits_{a} g \circ f = \ell$.

Remarque. Puisque $f(A) \subset B$, $\lim\limits_{a} f = b$ implique $b \in \overline{B}$.

Méthode Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite

Pour montrer qu'une fonction f définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E n'admet pas de limite en $a \in \overline{A}$, il suffit de déterminer deux applications φ et ψ d'une variable réelle à valeurs dans A telles que $\lim\limits_{b} \varphi = \lim\limits_{c} \psi = a$ et $\lim\limits_{b} f \circ \varphi \neq \lim\limits_{c} f \circ \psi$.

Exemple 2.7

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto x^y$. Remarquons que $f(x, y) = \exp(y \ln x)$.
D'une part, $\lim\limits_{t \to 0^+} (t, 0) = (0, 0)$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t, 0) = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{t \to +\infty} (e^{-t}, 1/t) = (0, 0)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(e^{-t}, 1/t) = e^{-t}$.
On en déduit que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

3 Continuité

Toutes les propriétés des applications vues dans cette section (continuité, continuité uniforme, lipschitzianité) restent inchangées si on remplace les normes des espaces vectoriels normés considérés par des normes équivalentes.

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1 Continuité

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$.
On dit que f est **continue** en $a \in A$ si f admet une limite en a. Dans ce cas, $\lim\limits_{a} f = f(a)$.
Autrement dit, f est continue en a si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ f(B(a, \alpha) \cap A) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in A, \ \|x - a\|_E < \alpha \implies \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$$

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout $a \in A$.

Remarque. On obtient une définition équivalente en remplaçant les boules ouvertes par des boules fermées ou les inégalités strictes par des inégalités larges.

Proposition 3.1 Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F.
Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Proposition 3.2 Continuité d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés

Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_n$ des espaces vectoriels normés, f une application d'une partie A de E dans $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$ et $a \in \mathrm{A}$. On munit $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$ muni d'une norme produit et on note $f_1, \dots, f_n$ les applications composantes de f.
Alors f est continue a (resp. sur A) si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est continue en a (resp. sur A).

Remarque. Une application à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie est continue si et seulement si ses applications coordonnées dans une base le sont.

3.2 Opérations sur les applications continues

Proposition 3.3

Soient A une partie d'une espace vectoriel normé E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, f une application de A dans $\mathbb{K}$ et g une application de A dans F.
Si f et g sont continues en $a \in \mathrm{A}$ (resp. sur A), alors fg est continue en a (resp. sur A).

Proposition 3.4

Soient A une partie d'une espace vectoriel normé E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, f et g deux applications de A dans F.
Si f et g sont continues en $a \in \mathrm{A}$ (resp. sur A), alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est continue en a (resp. sur A).

Proposition 3.5 Continuité et composition

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, A et B des parties respectives de E et F, f une application de A dans F, g une application de B dans G. On suppose que $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$.
Si f est continue en $a \in \mathrm{A}$ (resp. sur A) et g est continue en $f(a)$ (resp. sur B), alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur A).

3.3 Continuité uniforme et lipschitzianité

Définition 3.2 Continuité uniforme

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{E}})$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{F}})$. On dit que f est **uniformément continue** sur A si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a \in \mathrm{A},\ f(\mathrm{B}(a, \alpha) \cap \mathrm{A}) \subset \mathrm{B}(f(a), \varepsilon)$$

ou, de manière équivalente, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, y) \in \mathrm{A}^2,\ \|x - y\|_{\mathrm{E}} < \alpha \implies \|f(x) - f(y)\|_{\mathrm{F}} < \varepsilon$$

Remarque. On obtient une définition équivalente en remplaçant les boules ouvertes par des boules fermées ou les inégalités strictes par des inégalités larges.

Proposition 3.6

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F.
Si f est **uniformément continue** sur A, alors f est **continue** sur A.

Attention ! La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.3 Application lipschitzienne

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{E}})$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{F}})$. On dit que f est **lipschitzienne** sur A si

$$\exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x, y) \in \mathrm{A}^2,\ \|f(x) - f(y)\|_{\mathrm{F}} \leq \mathrm{K}\|x - y\|_{\mathrm{E}}$$

Dans ce cas, on dit que f est lipschitzienne de rapport K ou K-lipschitzienne.

Remarque. La lipschitzianité est inchangée si on change les normes en des normes équivalents. Néanmoins, le **rapport** de lipschitzianité peut changer.

Exemple 3.1

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Par inégalité triangulaire, l'application N est 1-lipschitzienne et en particulier continue.

Proposition 3.7

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F.
Si f est **lipschitzienne** sur A, alors f est **uniformément continue** sur A.

Attention ! La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 3.4 Distance à une partie

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$. Pour $x \in \mathrm{A}$, on appelle **distance** de x à A le réel positif

$$d(x, \mathrm{A}) = \inf_{a \in \mathrm{A}} \|x - a\|$$

Proposition 3.8 Lipschitzianité de la distance

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. L'application $x \in \mathrm{E} \mapsto d(x, \mathrm{A})$ est 1-lipschitzienne sur E.

3.4 Applications linéaires

Remarquons tout d'abord que pour $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, f est continue sur E si et seulement si f est continue en **un** point de E, par exemple le vecteur nul. En effet, si f est continue en le vecteur nul, alors pour tout $x \in \mathrm{E}$

$$\lim_{y \to x} f(y) = \lim_{h \to 0_{\mathrm{E}}} f(x+h) = \lim_{h \to 0_{\mathrm{E}}} f(x) + f(h) = f(x) + f(0_{\mathrm{E}}) = f(x)$$

Proposition 3.9 Continuité d'une application linéaire

Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}, \|\dot{\|}_{\mathrm{F}})$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors f est continue sur E si et seulement si

$$\exists \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathrm{E},\ \|f(x)\|_{\mathrm{F}} \leq \mathrm{C}\|x\|_{\mathrm{F}}$$

Remarque. On montre alors aisément qu'une application linéaire continue est en fait lipschitzienne.

Exemple 3.2

Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $a \in \mathrm{E}$, la forme linéaire $\varphi_a : x \in \mathrm{E} \mapsto \langle x, a\rangle$ est continue sur E. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in \mathrm{E},\ |\varphi_a(x)| \leq \|x\| \cdot \|a\|$$

Exemple 3.3 Projections canoniques

Soient $(\mathrm{F}_1, \mathrm{N}_1), \dots, (\mathrm{F}_n, \mathrm{N}_n)$ des espaces vectoriels normés. On munit $\prod_{i=1}^n \mathrm{F}_i$ d'une norme produit N en posant par exemple $\mathrm{N}(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} \mathrm{N}_i(x_i)$ (toutes les normes produits sont de toute façon équivalentes). Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'application linéaire

$$p_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^n \mathrm{F}_i & \longrightarrow & \mathrm{F}_k \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_k \end{array} \right.$$

est continue.

$$\mathrm{N}_k(p_k(x_1, \dots, x_n)) = \mathrm{N}_k(x_k) \leq \mathrm{N}(x_1, \dots, x_n)$$

Exemple 3.4

On munit l'espace vectoriel E des suites bornées de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. L'endomorphisme $\mathrm{T} : (u_n) \in \mathrm{E} \mapsto (u_{n+1} - u_n)$ est continu. Soit en effet $u \in \mathrm{E}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathrm{T}(u)_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|u\|_\infty$$

Donc $\|\mathrm{T}(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$.

Méthode **Montrer qu'une application linéaire n'est pas continue**

Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}, \|\cdot\|_{\mathrm{F}})$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ n'est pas continue, il suffit de trouver une suite (x_n) d'éléments de E telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\|f(x_n)\|_{\mathrm{F}}}{\|x_n\|_{\mathrm{E}}} = +\infty$$

Exemple 3.5

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme N définie par $N(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$. L'endomorphisme de dérivation

$$D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$$

n'est pas continu. En effet, si on pose $P_n = X^n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(P_n) = 1$ tandis que $N(D(P_n)) = N(nX^{n-1}) = n$. Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{N(D(P_n))}{N(P_n)} = +\infty$$

Définition 3.5

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

Remarque. L'ensemble des endomorphismes continus de E se note $\mathcal{L}_c(E)$. C'est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 3.10 Norme subordonnée ou norme d'opérateur

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Alors les trois bornes supérieures suivantes sont finies et égales :

$$\sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E,\ \|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

On note $|||u|||$ ou $\|u\|_{op}$ leur valeur commune.
L'application $u \in \mathcal{L}_c(E, F) \mapsto |||u|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ appelée **norme d'opérateur** ou encore **norme subordonnée** aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Remarque. Par définition, si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$,

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq |||u||| \cdot \|x\|_E$$

On peut montrer par ailleurs montrer que

$$|||u||| = \inf\{C \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in E\ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

Remarque. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue, alors elle est lipschitzienne de rapport $|||u|||$.

Remarque. Notamment, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et $|||\cdot|||$ désigne la norme subordonnée à $\|\cdot\|$, alors pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$,

$$|||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\},\ \|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{x \in E,\ \|x\| = 1} \|u(x)\|$$

Méthode **Déterminer la norme subordonnée d'une application linéaire**

Pour déterminer la norme subordonnée d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, on peut procéder comme suit.

- On détermine une constante C telle que

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|f(x)\|_{\mathrm{F}} \leq \mathrm{C}\|x\|_{\mathrm{E}}$$

  Ceci prouve que f est continue et que $|||f||| \leq \mathrm{C}$.

- On peut alors au choix :
  - déterminer un vecteur $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que $\|f(x)\|_{\mathrm{F}} = \mathrm{C}\|x\|_{\mathrm{E}}$ (ceci est notamment possible lorsque E est de dimension finie car la sphère unité est alors compacte) ;
  - déterminer une suite $(x_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ de vecteurs non nuls telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\|f(x_n)\|_{\mathrm{F}}}{\|x_n\|_{\mathrm{E}}} = \mathrm{C}$.

  Dans les deux cas, on a prouvé que $|||f||| \geq \mathrm{C}$.

- On conclut que $|||f||| = \mathrm{C}$.

Exemple 3.6

On munit $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|\mathrm{P}\| = \sup\limits_{t\in[-1,1]} |\mathrm{P}(t)|$. Soit $u : \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}/2)$. u est clairement un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

$$\|u(\mathrm{P})\| = \sup_{t\in[-1,1]} |\mathrm{P}(t/2)| = \sup_{t\in[-1/2,1/2]} |\mathrm{P}(t)| \leq \|\mathrm{P}\|$$

Notamment u est continu et $|||u||| \leq 1$.
De plus, en posant $\mathrm{P} = 1$, $u(\mathrm{P}) = 1$ donc

$$|||u||| \geq \frac{\|u(\mathrm{P})\|}{\|\mathrm{P}\|} = 1$$

Ainsi $|||u||| = 1$.

Exemple 3.7

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et nulles en 1. On munit E de la norme uniforme. Considérons l'application $\varphi : f \in \mathrm{E} \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Cette application est clairement une forme linéaire. De plus,

$$\forall f \in \mathrm{E},\ |\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t = \|f\|_\infty$$

Par conséquent, φ est continue sur E et $|||\varphi||| \leq 1$ (il s'agit de la norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $|\cdot|$). Posons $f_n : t \in [0,1] \mapsto 1 - t^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que $f_n \in \mathrm{E}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$. De plus, $\varphi(f_n) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Ainsi

$$|||\varphi||| \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} = 1$$

puis $|||\varphi||| = 1$.

Proposition 3.11 Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur

Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{E}})$, $(\mathrm{F}, \|\cdot\|_{\mathrm{F}})$ et $(\mathrm{G}, \|\cdot\|_{\mathrm{G}})$ des espaces vectoriels normés. On note

- $|||\cdot|||_1$ la norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$;
- $|||\cdot|||_2$ la norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{G}}$;
- $|||\cdot|||_3$ la norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{G}}$.

Alors pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \times \mathcal{L}_c(\mathrm{F}, \mathrm{G})$, $v \circ u \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{G})$ et

$$|||v \circ u|||_3 \leq |||v|||_2 \cdot |||u|||_1$$

Remarque. Notamment si $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et $|||\cdot|||$ désigne la norme subordonnée à $\|\cdot\|$,

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E})^2,\ |||v \circ u||| \leq |||v||| \cdot |||u|||$$

La norme subordonnée est donc une **norme d'algèbre** sur l'algèbre $\mathcal{L}_c(\mathrm{E})$.

Proposition 3.12 Continuité des applications linéaires en dimension finie

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si E est de **dimension finie**, toute application **linéaire** de E dans F est continue i.e. $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Exemple 3.8

Fixons $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est linéaire. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, elle est également continue.

Exercice 3.1

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que si $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(\mathrm{B}) = \mathrm{P}^{-1}\exp(\mathrm{A})\mathrm{P}$.

Définition 3.6 Norme subordonnée ou norme d'opérateur pour les matrices

On munit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de deux normes N_1 et N_2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la norme subordonnée aux normes N_1 et N_2 de A comme la norme subordonnée de l'application linéaire $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{AX}$.

Remarque. Autrement dit

$$|||\mathrm{A}||| = \sup_{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}} \frac{\mathrm{N}_2(\mathrm{AX})}{\mathrm{N}_1(\mathrm{X})} = \sup_{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ \mathrm{N}_1(x) \leq 1} \frac{\mathrm{N}_2(\mathrm{AX})}{\mathrm{N}_1(\mathrm{X})} = \sup_{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ \mathrm{N}_1(\mathrm{X}) = 1} \mathrm{N}_2(\mathrm{AX})$$

Proposition 3.13 Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur

On munit $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de normes respectives N_1, N_2 et N_3. On note

- $|||\cdot|||_1$ la norme subordonnée aux normes N_1 et N_2 ;
- $|||\cdot|||_2$ la norme subordonnée aux normes N_2 et N_3 ;
- $|||\cdot|||_3$ la norme subordonnée aux normes N_1 et N_3

Alors pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$|||AB|||_3 \leq |||A|||_2 \cdot |||B|||_1$$

Remarque. Si $|||\cdot|||$ est une norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ subordonnée à une norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ |||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$$

La norme subordonnée est donc une **norme d'algèbre** sur l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.5 Applications multilinéaires

Proposition 3.14 Continuité des applications multilinéaires

Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n}), (F, \|\cdot\|_F)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On munit $\prod_{i=1}^{n} E_i$ d'une norme produit. Alors une application multilinéaire f de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F est continue si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i,\ \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq C \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}$$

Exemple 3.9 Continuité du produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien réel. L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{array} \right.$ est continue pour la norme euclidienne associée au produit scalaire. En effet, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |\varphi(x, y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Proposition 3.15 Continuité des applications multilinéaires en dimension finie

Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si $E_1, \dots, E_n$ sont de **dimension finie**, toute application multilinéaire de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F est continue.

Exemple 3.10

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array} \right.$ est bilinéaire donc continue ($\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(F, G)$ sont de dimensions finies car E, F, G le sont).

Exemple 3.11

L'application $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{cases}$ est bilinéaire donc continue ($\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies).

Exemple 3.12

Soit $p \in \mathbb{N}$. L'application $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^p \end{cases}$ est continue comme composée de l'application linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^p \\ M & \longmapsto & (M, \dots, M) \end{cases}$$

et de l'application multilinéaire

$$\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^p & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M_1, \dots, M_p) & \longmapsto & M_1 \dots M_p \end{cases}$$

En effet, ces deux applications sont continues car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.

Exemple 3.13 Continuité du déterminant

Soit E un espace de dimension finie. L'application $d : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \det(u)$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$. En effet, en fixant une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, on peut la voir comme la composée de l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto (u(e_1), \dots, (u(e_n)))$ et de l'application multilinéaire $(u_1, \dots, u_n) \in E^n \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$. Ces deux applications sont continues car $\mathcal{L}(E)$ et E sont de dimensions finies.

Exemple 3.14 Continuité du déterminant

L'application $d : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(M)$ est continue sur $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$. En effet, on peut la voir comme la composée de l'application linéaire qui à une matrice associe la famille de ses n colonnes et de l'application linéaire qui à un n-uplet d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ associe son déterminant dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ces deux applications sont continues car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies.

3.6 Applications polynomiales

Définition 3.7 Application polynomiale

On appelle **application polynomiale** toute application du type

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \end{cases}$$

où $(a_{i_1, \dots, i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n}$ est une famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$.

Proposition 3.16

Toute application **polynomiale** est **continue**.

Exemple 3.15 Continuité du déterminant

L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en tant que fonction polynomiale des coefficients de la matrice.
Si E est un espace vectoriel de dimension finie, l'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \det(u)$ est également continue sur $\mathcal{L}(E)$. En effet, si $\mathcal{B}$ est une base de E,l'isomorphisme $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est continu car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. Le déterminant d'un endomorphisme est alors continu comme composée de cet isomorphisme et du déterminant matriciel.

Exemple 3.16 Comatrice

L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{com}(M)$ est continue car chacun des coefficients de la comatrice est au signe près un déterminant et donc une fonction polynomiale des coefficients de la matrice.

Exemple 3.17 Continuité de l'inversion matricielle

L'application $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$ est continue. En effet, pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\mathrm{com}(M)^{\mathsf{T}}$. De plus, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{com}(M)$ est continue et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{\mathsf{T}}$ est continue (endomorphisme d'un espace de dimension finie) donc $M \mapsto \mathrm{com}(M)^{\mathsf{T}}$ est continue par composition. Enfin $M \mapsto \det(M)$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$ est continue comme quotient de fonctions continues.

Exemple 3.18 Continuité de l'inversion d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. L'application $f : u \in \mathrm{GL}(E) \mapsto u^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}(E)$. En effet, si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'isomorphisme $\varphi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est continu car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. Son isomorphisme réciproque est également continu. En notant $g : M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$ dont on a vu qu'elle était continue, $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ est continue sur $\mathrm{GL}(E)$ par composition.

Exemple 3.19

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^p$ est continue car les coefficients de M^p sont polynomiaux en les coefficients de M.

Attention ! L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^p$ n'est pas elle-même polynomiale puisque M désigne une matrice et non un scalaire.

Exemple 3.20 Polynôme caractéristique

L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \chi_M \in \mathbb{K}_n[X]$ est continue car chacun des coefficients de χ_M est polynomial en les coefficients de M.

3.7 Continuité et topologie

Proposition 3.17 Caractérisation de la continuité par les ouverts et les fermés

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F.
Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est **continue** sur A.

(ii) L'image réciproque d'un **ouvert** quelconque de F est un **ouvert** de E relatif à A.

(iii) L'image réciproque d'un **fermé** quelconque de F est un **fermé** de E relatif à A.

Notamment, on a le résultat utile suivant.

Corollaire 3.1 Caractérisation de la continuité par les ouverts et les fermés

Soit f une application d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F.
Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est **continue** sur E.

(ii) L'image réciproque d'un **ouvert** quelconque de F est un **ouvert** de E.

(iii) L'image réciproque d'un **fermé** quelconque de F est un **fermé** de E.

Exemple 3.21

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ de $\mathbb{K}$ par le déterminant qui est une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{\mathrm{I}_n\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'application continue $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$.
- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par le déterminant qui est une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est l'intersection des fermés $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3.2

Soit f une application d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur E ;

(ii) pour toute partie A de E, $f(\overline{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$;

(iii) pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(\mathrm{B})} \subset f^{-1}(\overline{\mathrm{B}})$.

Proposition 3.18 Densité et continuité

Soient f et g deux applications **continues** d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Si f et g coïncident sur une **partie dense** de E, alors elles sont égales.

Exercice 3.3 Endomorphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$

Soit f un endomorphisme **continu** du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
2. En déduire que $f = f(1)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 3.4

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$. On pourra d'abord traiter le cas où A est inversible.

Exercice 3.5 Similitude et comatrice

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que com(A) et com(B) sont également semblables. On pourra d'abord traiter le cas où A et B sont inversibles.

Remarque. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ **continue**. Si A est une partie dense de E, alors $f(\mathrm{A})$ est dense dans $f(\mathrm{E})$.

4 Compacité

4.1 Parties compactes

Définition 4.1 Compact

On dit qu'une partie K d'un espace vectoriel normé E est une **partie compacte** ou un **compact** de E si toute suite à valeurs dans K admet une valeur d'adhérence dans K.

Exemple 4.1

En vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, un segment de $\mathbb{R}$ est un compact.

Exercice 4.1

Soit K un compact et F un fermé d'un espace vectoriel normé E. Montrer que K + F est fermé.

Proposition 4.1

Tout compact d'un espace vectoriel normé est fermé et borné.

Attention ! La réciproque est fausse en général en dimension infinie.
Par exemple, si on munit $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (maximum des valeurs absolues des coefficients), la sphère unité S est fermée et bornée mais non compacte. Si elle était compacte, on pourrait extraire de la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est bien à valeurs dans S, une suite $(\mathrm{X}^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. La suite $(\mathrm{X}^{\varphi(n+1)} - \mathrm{X}^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait alors vers 0, ce qui est absurde puisque $\|\mathrm{X}^{\varphi(n+1)} - \mathrm{X}^{\varphi(n)}\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.2

Montrer que toute partie compacte et non vide de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

Proposition 4.2

Toute partie **fermée** d'une partie **compacte** est **compacte**.

Proposition 4.3 Compacité et convergence

Une suite à valeurs dans un **compact** d'un espace vectoriel normé converge si et seulement si elle admet une **unique valeur d'adhérence**. Dans ce cas, elle converge vers cette unique valeur d'adhérence.

Proposition 4.4 Produit de compacts

Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels normés et $K_1, \dots, K_n$ des compacts respectifs de ces espaces vectoriels normés. Alors $K_1 \times \cdots \times K_n$ est un compact de $E_1 \times \cdots \times E_n$.

4.2 Continuité et compacité

Proposition 4.5

L'image d'une partie **compacte** par une application **continue** est **compacte**.

Corollaire 4.1 Théorème des bornes atteintes

Soient K un compact d'un espace vectoriel normé E et f une application **continue** sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors, f admet un **minimum** et un **maximum** sur K.

Remarque. Autrement dit, une application **continue** sur un **compact** est **bornée** sur ce compact et y **atteint ses bornes**.

Exemple 4.2

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$. L'application $\varphi : x \in E \mapsto \|f(x)\|_F$ est bornée sur la sphère unité et y atteint ses bornes. En effet, φ est continue et la sphère unité S est compacte puisque c'est une partie fermé et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie. On en déduit donc qu'il existe $x \in S$ tel que $|||f||| = \max_S \varphi = \|f(x)\|_F$ où $|||\cdot|||$ désigne la norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Proposition 4.6 Théorème de Heine

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, K une partie **compacte** de E et f une application de K dans F.
Si f est **continue** sur K, alors elle est **uniformément continue** sur K.

Exemple 4.3

Toute application continue sur un segment de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé est uniformément continue sur ce segment.

4.3 Compacité en dimension finie

Lemme 4.1

Les parties fermées et bornées de $\mathbb{K}^n$ sont compactes.

Théorème 4.1 Compacts d'un espace vectoriel de dimension finie

Une partie d'un espace vectoriel normé de **dimension finie** est **compacte** si et seulement si elle est **fermée et bornée**.

Exemple 4.4

Les boules fermées et les sphères d'un espace vectoriel de dimension finie sont compactes.

Exemple 4.5

$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont des compacts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, la sphère unité S est compacte. Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, alors l'application $x \mapsto \|f(x)\|_{\mathrm{F}}$ est continue sur le compact S. Comme elle est à valeurs réelles, elle y admet un maximum. On retrouve alors le fait que toute application linéaire de E dans F, où E est de dimension finie, est continue. On peut également affirmer que

$$|||f||| = \sup_{x\in\mathrm{S}} \|f(x)\|_{\mathrm{F}} = \max_{x\in\mathrm{S}} \|f(x)\|_{\mathrm{F}}$$

Proposition 4.7

Une suite **bornée** à valeurs dans un espace vectoriel normé de **dimension finie** converge si et seulement si elle admet une **unique valeur d'adhérence**.

Attention ! Il est essentiel que la suite soit bornée. Par exemple la suite de terme général $2^n(1-(-1)^n)$ admet 0 comme unique valeur d'adhérence mais ne converge pas.

Proposition 4.8 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Tout sous-espace vectoriel de **dimension finie** d'un espace vectoriel normé est fermé.

Exemple 4.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$. En effet, $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, $\mathbb{K}[A]$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{A^n}{n!} \in \mathbb{K}[A]$ et

$$\exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^n}{n!}$$

donc $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.
Comme $\mathbb{K}[A]$ est une algèbre commutative, on en déduit notamment que A et $\exp(A)$ commutent.

Exemple 4.7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de **dimension finie**. Alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(u) = P(u)$. En effet, $\mathbb{K}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, $\mathbb{K}[u]$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{u^n}{n!} \in \mathbb{K}[u]$ et

$$\exp(u) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{u^n}{n!}$$

donc $\exp(u) \in \mathbb{K}[u]$.
Comme $\mathbb{K}[u]$ est une algèbre commutative, on en déduit notamment que u et $\exp(u)$ commutent.

5 Connexité par arcs

5.1 Parties connexes par arcs

Définition 5.1 Chemin continu

Soient E un espace vectoriel normé et $(a, b) \in E^2$. On appelle **chemin (ou arc) continu** joignant a à b toute application continue γ de $[0, 1]$ dans E telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Définition 5.2 Partie connexe par arcs

Soit C une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que E est **connexe par arcs** si pour tout $(a, b) \in E^2$, il existe un chemin continu joignant a à b à valeurs dans C.

Exemple 5.1

$\mathbb{U}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{C}$. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$. Il existe donc $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$. Posons

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \exp(i((1 - t)\theta_1 + t\theta_2))$$

- γ est continue sur $[0, 1]$;
- γ est à valeurs dans $\mathbb{U}$;
- $\gamma(0) = z_1$ et $\gamma(1) = z_2$.

Exemple 5.2

$SO_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $(R_1, R_2) \in SO_2(\mathbb{R})^2$. Posons $R : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Il existe $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_1 = R(\theta_1)$ et $R_2 = R_2(\theta_2)$. Posons $\gamma : t \in [0,1] \mapsto R((1-t)\theta_1 + t\theta_2)$. Alors

- γ est continue ;
- γ est à valeurs dans $SO_2(\mathbb{R})$;
- $R_1 = \gamma(0)$ et $R_2 = \gamma(1)$.

Proposition 5.1

Toute partie **convexe** d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est **connexe par arcs**.

Exemple 5.3

Les boules fermées et ouvertes d'un espace vectoriel normé sont connexes par arcs.

Proposition 5.2 Connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Les parties **connexes par arcs de** $\mathbb{R}$ sont les **intervalles**.

Proposition 5.3 Composantes connexes par arcs

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. La relation «être joignable par un chemin continu à valeurs dans A» est une relation d'équivalence sur A.
Les classes d'équivalence sont appelées les **composantes connexes par arcs** de A. Ce sont des parties connexes par arcs.

Exemple 5.4

L'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ admet deux composantes connexes par arcs à savoir ses intersections avec les demi-plans d'équations $x < 0$ et $x > 0$.

Définition 5.3 Partie étoilée

Soit A une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On dit que A est **étoilée** s'il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $[a, x] \subset A$.
Dans ce cas, on dit que A est étoilée par rapport à a.

Exemple 5.5

Une partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points.

Exemple 5.6

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est étoilé par rapport à la matrice nulle.

Proposition 5.4

Toute partie **étoilée** d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est **connexe par arcs**.

5.2 Continuité et connexité par arcs

Proposition 5.5

L'image d'une partie **connexe par arcs** par une application **continue** est **connexe par arcs**.

Exemple 5.7

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. En effet, l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par le déterminant (qui est une application continue) est $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs (ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$).
De la même manière, $\det(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$ n'est pas connexe par arcs donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Exemple 5.8

$\mathbb{U}$ est connexe par arcs car c'est l'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par l'application continue $t \mapsto e^{it}$.

Exemple 5.9

$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car c'est l'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par l'application continue $t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Corollaire 5.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Soient C une partie **connexe par arcs** d'un espace vectoriel normé E et f une application **continue** sur C à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f(\mathrm{C})$ est un **intervalle**.

Remarque. Cela signifie que, si f prend les valeurs a et b sur C, alors f prend toutes les valeurs comprises entre a et b sur C.

Exercice 5.1

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $\mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$ n'est pas connexe par arcs.

6 Suites et séries de fonctions

Dans ce paragraphe, A désigne une partie d'un espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie et F un espace vectoriel de dimension finie.

On rappelle que F étant de dimension finie, toutes les normes sur F sont équivalentes.

On notera $\|\cdot\|$ la norme sur F et $\|\cdot\|_\infty$ la norme uniforme sur A.

6.1 Suites de fonctions

Définition 6.1 Convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F. On dit que (f_n) **converge simplement** sur A vers une fonction f de A dans F si

$$\forall x \in \mathrm{A}, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Remarque. Toutes les normes sur F étant équivalentes, la convergence de la suite $(f_n(x))$ ne dépend pas de la norme choisie.

Rappel Norme uniforme

On rappelle que la **norme uniforme** est définie sur l'ensemble des fonctions bornées de A dans F par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathrm{A}} \|f(x)\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme sur F.

Remarque. Le caractère borné d'une fonction ne dépend pas de la norme choisie sur F puisque toutes les normes sur F sont équivalentes.
Par contre, la norme infinie dépend donc de la norme choisie sur F.

Définition 6.2 Convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F. On dit que (f_n) **converge uniformément** sur A vers une fonction f de A dans F si les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Remarque. Si une suite de fonctions converge uniformément sur A, elle converge uniformément sur toute partie de A.

Proposition 6.1 La convergence uniforme implique la convergence simple

Si une suite de fonctions (f_n) converge **uniformément** vers f sur A, alors elle converge **simplement** vers f sur A.

Théorème 6.1 Théorème de la double limite

Soient (f_n) une suite de fonctions de A dans F **convergeant uniformément** vers f sur A et a un point adhérent à A. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite $\ell_n \in \mathrm{F}$ en a, alors

- la suite (ℓ_n) possède une limite en ℓ ;
- $\lim\limits_{a} f = \ell$.

Théorème 6.2 Transfert de continuité

Si (f_n) est une suite de fonctions **continues** sur A à valeurs dans F convergeant **uniformément** vers f sur A, alors f est continue sur A.

Remarque. La continuité étant une notion locale, on peut remplacer la condition de convergence uniforme sur A par la convergence uniforme au voisinage de tout point de A. En particulier, il suffit de montrer la convergence uniforme sur tout compact de A.

Exercice 6.1

Montrer que l'application $\zeta\colon z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ est continue sur $\mathrm{P} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

6.2 Séries de fonctions

Définition 6.3 Série de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F, on note $\sum f_n$ la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est appelée la somme partielle de rang n de la série $\sum f_n$.

Définition 6.4 Convergence simple

On dit qu'une série de fonctions de A dans F converge simplement sur A si la suite de ses sommes partielles converge simplement sur A.

Remarque. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur A, alors la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur A.

Définition 6.5 Reste

Si $\sum f_n$ converge simplement sur A, la fonction $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est bien définie sur A et est appelée reste de rang n de la série $\sum f_n$.

Définition 6.6 Convergence uniforme

On dit qu'une série de fonctions de A dans F converge uniformément sur A si la suite de ses sommes partielles converge uniformément sur A.

Remarque. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur A.

Proposition 6.2

Une série de fonctions converge uniformément sur A si et seulement si

- elle converge simplement sur A
- et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur A.

Définition 6.7 Convergence normale

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. On dit que la série $\sum f_n$ converge **normalement** sur A si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Rappel **Convergence absolue**

Soit $\sum u_n$ une série de termes à valeurs dans F. On dit que $\sum u_n$ converge **absolument** si la série $\sum \|u_n\|$ converge. Quand F est de dimension finie, on peut en déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Proposition 6.3

Si une série de fonctions converge **normalement** sur A, alors elle converge **uniformément** sur A et **absolument** en tout point de A.

Remarque. On peut alors préciser que si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$.

Théorème 6.3 Interversion série/limite

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de A dans F **convergeant uniformément** vers f sur A et a un point adhérent à A. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite $\ell_n \in \mathrm{F}$ en a, alors

- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ converge ;
- $\lim_a f = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Théorème 6.4 Transfert de continuité

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions **continues** sur A à valeurs dans F convergeant **uniformément** vers f sur A, alors f est continue sur A.

Remarque. La continuité étant une notion locale, on peut remplacer la condition de convergence uniforme sur A par la convergence uniforme sur **tout compact** de A.

Exemple 6.1 Continuité de l'exponentielle matricielle

On rappelle que pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(\mathrm{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^n}{n!}$.

Tout d'abord, les applications $f_n : \mathrm{A} \mapsto \frac{\mathrm{A}^n}{n!}$ sont toutes continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
De plus, si on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$, alors $\|\mathrm{A}^n\| \leq \|\mathrm{A}\|^n$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Notamment, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\|\frac{\mathrm{A}^n}{n!}\right\| \leq \frac{\mathrm{R}^n}{n!}$ et, comme $\sum \frac{\mathrm{R}^n}{n!}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ pour tout $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+$.
L'application $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \exp(\mathrm{A})$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. On montre de la même manière que, si E est un espace vectoriel de dimension finie, l'application $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto \exp(u)$ est continue sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.