Semaine du 10/11

1 Cours

Réduction géométrique

Rappels et compléments Matrices semblables. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. La dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels est inférieure ou égale à la somme des dimensions avec égalité si et seulement si la somme est directe. Caractérisation d'une application linéaire par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires. Matrices définies par blocs, opérations sur des matrices définies par blocs. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Matrices et endomorphismes nilpotents. Indice de nilpotence. Majoration de l'indice de nilpotence. Sous-espace stable. Base adapatée à un sous-espace vectoriel stable. Matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à un sous-espace stable (triangulaire par blocs).

Eléments propres Définition de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre. La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe. Le cardinal du spectre est inférieur ou égal à la dimension. Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

Polynôme caractéristique Définition du polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est égal à celui de sa matrice dans une base. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré n (n étant égal à la taille de la matrice où la dimension de l'espace vectoriel) ; coefficients des monômes de degré 0 et $n-1$. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Si F est un sous-espace stable par un endomorphisme u, alors $\chi_{u_{|\mathrm{F}}}$ divise χ_u. Multiplicité d'une valeur propre. La dimension d'un sous-espace propre est majorée par la multiplicité.

Diagonalisabilité Définition : un endomorphisme est diagonalisable si sa matrice dans une base est diagonale ; une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Un endomorphisme d'un espace vectoriel E si et seulement si

- sa matrice dans une base l'est ;
- il existe une base de E de vecteurs propres ;
- la somme des sous-espaces propres est égale à E ;
- la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E ;
- le polynôme caractéristique est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si

- il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de vecteurs propres ;
- la somme des sous-espaces propres est égale à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
- la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n ;
- le polynôme caractéristique est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité.

Si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme/d'une matrice est scindé à racines simples, **alors** cet endomorphisme/cette matrice est diagonalisable. **Si** un endomorphisme d'un espace de dimension n/une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes, **alors** cet endomorphisme/cette matrice est diagonalisable.

Trigonalisabilité Définition : un endomorphisme est trigonalisable si sa matrice dans une base est triangulaire supérieure ; une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base l'est. Un endomorphisme/une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Un endomorphisme/une matrice est nilpotent si et seulement si cet endomorphisme/cette matrice est trigonalisable et 0 est son unique valeur propre.

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer le spectre et les sous-espaces propres d'une matrice via le polynôme caractéristique.
- Déterminer le spectre et les sous-espaces propres d'un endomorphisme : en dimension finie, on peut se ramener à la matrice de l'endomorphisme dans une base bien choisie.
- Pour calculer un polynôme caractéristique d'une matrice, on peut :
  - développer par rapport à une ligne ou une colonne comportant beaucoup de zéros ;
  - faire apparaître un déterminant triangulaire ou triangulaire par blocs par opérations de pivots ;
  - factoriser dès que possible une ligne ou une colonne par $\mathrm{X}-\lambda$.
- Choisir une caractérisation de la diagonalisabilité adaptée.
- Diagonalisation effective : si A est diagonalisable, trouver explicitement P inversible et D diagonale telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 67, 69, 70, 72