Devoir surveillé n°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

$\boxed{1}$ **1.a** Puisque $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, $\dfrac{\sin t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$.

1.b Remarquons que $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ est intégrable sur $]0,\pi]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ i.e. $\alpha < 2$. L'équivalent précédent montre donc que $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,\pi]$ si et seulement si $\alpha < 2$. Comme cette fonction est positive sur $]0,\pi]$, $\mathrm{I}(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha < 2$.

$\boxed{2}$ **2.a** Tout d'abord, $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $[\pi,+\infty[$. De plus, $\dfrac{\sin t}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[\pi,+\infty[$ lorsque $\alpha > 1$. On en déduit que $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[\pi,+\infty[$ lorsque $\alpha > 1$. Autrement dit, $\mathrm{J}(\alpha)$ est absolument convergente lorsque $\alpha > 1$.

2.b Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(t+\pi)| = |-\sin t| = |\sin t|$$

donc $|\sin|$ est π-périodique. Via le changement de variable affine $u = t - k\pi$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi |\sin(u+k\pi)|\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi |\sin u|\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \sin(u)\,\mathrm{d}u = [-\cos(u)]_{u=0}^{u=\pi} = 2$$

2.c Pour tout $t \in [k\pi,(k+1)\pi]$,

$$\frac{|\sin t|}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{t^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{k^\alpha\pi^\alpha}$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha\pi^\alpha}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$$

donc, d'après la question précédente,

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{k^\alpha\pi^\alpha}$$

Ensuite,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k^\alpha\pi^\alpha}$$

puis, par relation de Chasles et changement d'indice,

$$\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

2.d On sait que pour $\alpha \leq 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge vers $+\infty$. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} = +\infty$. Par minoration, on obtient avec la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = +\infty$$

Notamment l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge i.e. $\mathrm{J}(\alpha)$ n'est pas absolument convergente.
On conclut finalement que $\mathrm{J}(\alpha)$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

$\boxed{3}$ **3.a** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\pi}^{x} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_{t=0}^{t=x} = 1 - \cos(x)$$

Or cos n'admet pas de limite en $+\infty$ (par exemple, $\cos(2n\pi) = 1$ et $\cos(\pi/2 + n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) donc $\mathrm{J}(0) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

3.b Soient $\alpha > 0$ et $x \geq \pi$. Les fonctions $-\cos$ et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi, x]$ de dérivées respectives sin et $t \mapsto -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ donc, par intégration par parties :

$$\int_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_{t=\pi}^{t=x} - \alpha\int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos x}{x^\alpha} - \alpha\int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

3.c Comme $\alpha + 1 > 1$, l'intégrale de Riemann $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge. Bien que ce ne soit pas utile, on peut rajouter que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{t^\alpha}\right]_{t=\pi}^{t\to+\infty} = \frac{1}{\alpha\pi^\alpha}$$

Puisque $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha + 1}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ et $\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$, $t \mapsto \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est également intégrable sur $[\pi, +\infty[$ i.e. $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

3.d Soit $\alpha > 0$. D'après la question précédente, $x \mapsto \int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$. Comme cos est bornée et $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} = 0$. On en déduit via la question **3.b** que $x \mapsto \int_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$ i.e. $\mathrm{J}(\alpha)$ converge.

$\boxed{4}$ D'après la question **1.b**, $\mathrm{I}(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha < 2$. D'après la question **3**, $\mathrm{J}(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. On en déduit que $f(\alpha)$ converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$. Notamment, le domaine de définition de f est $]0, 2[$.
Puisque l'intégrande est positive sur $[0, \pi]$, $\mathrm{I}(\alpha)$ converge également absolument si et seulement si $\alpha < 2$. D'après la question **2.d**, $\mathrm{J}(\alpha)$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$. L'intégrale $f(\alpha)$ converge absolument si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

$\boxed{5}$ **5.a** Tout d'abord, sin est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\sin'' = -\cos$ est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Le graphe de sin est donc au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi $\sin t \leq t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5.b Pour tout $\alpha \in]0, 1]$, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin t}{t^\alpha} = \sin t$. Enfin, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $\alpha \in]0, 1]$,

$$\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| = \frac{\sin t}{t^\alpha} \leq \frac{t}{t^\alpha} = t^{1-\alpha} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\alpha} \leq \frac{\pi}{2}$$

et $t \mapsto \frac{\pi}{2}$ est évidemment intégrale sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_{t=0}^{t=\pi/2} = 1$$

$\boxed{6}$ **6.a** Les fonctions $-\cos$ et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, +\infty[$ de dérivées respectives sin et $t \mapsto -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ donc, sous réserve de convergence,

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_{t=\pi/2}^{t\to+\infty} - \alpha\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par partie est légitime puisqu'on a vu que la première intégrale convergeait et $\lim_{t\to+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} = 0$ car cos est bornée et $\alpha > 0$. On en déduit que

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = -\alpha \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, \mathrm{d}t$$

Les fonctions sin et $t \mapsto \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, +\infty[$ de dérivées respectives cos et $t \mapsto -\frac{\alpha+1}{t^{\alpha+2}}$ donc, par une nouvelle intégration par parties,

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\right]_{t=\pi/2}^{t\to+\infty} + (\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, \mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est à nouveau légitime car la première intégrale converge d'après la première intégration par parties et $\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}} = 0$. Ainsi

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{(\pi/2)^{\alpha+1}} + (\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, \mathrm{d}t$$

Finalement,

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, \mathrm{d}t$$

6.b Tout d'abord,

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+2}} = -\frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right]_{t=\pi/2}^{t\to+\infty} = \frac{1}{(\alpha+1)(\pi/2)^{\alpha+1}}$$

Ainsi

$$\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+2}} = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left|\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, \mathrm{d}t\right| \leq \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\right| \mathrm{d}t \leq \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+2}}$$

Par encadrement,

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, \mathrm{d}t = 0$$

De plus, $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} = 0$ donc, d'après la question précédente,

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = 0$$

6.c On en déduit que

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t + \lim_{\alpha\to 0} \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = 1$$

On ne pouvait directement appliquer le théorème de convergence dominée, sinon on aurait obtenu

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin t\, \mathrm{d}t$$

mais cette dernière intégrale diverge d'après la question **3.a**.

$\boxed{7}$ **7.a** La fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $\frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2t^{\alpha-1}}$ avec $\alpha - 1 < 1$ et $\frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$ avec $\alpha + 1 > 1$. Ainsi $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. A fortiori, $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, \mathrm{d}t$ converge.

7.b Les fonctions $t \mapsto 1 - \cos t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivées respectives sin et $t \mapsto -\dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$. Par intégration par parties,

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt = \left[\frac{1-\cos t}{t^\alpha}\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

Cette intégration par parties est légitime car chacune des deux intégrales convergent. De plus,

$$\frac{1-\cos t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2} t^{2-\alpha}$$

Or $2 - \alpha > 0$ donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^\alpha} = \lim_{t\to 0} t^{2-\alpha} = 0$$

Par ailleurs, $1 - \cos$ est bornée et $\alpha > 0$ donc

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1-\cos t}{t^\alpha} = 0$$

Ainsi

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

De plus, l'intégrande est continu, positif et non constamment nul sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est strictement positive. De plus, $\alpha > 0$ donc $f(\alpha) > 0$.

$\boxed{8}$ **8.a** Puisque $1 - \cos t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, $\lim\limits_0 \varphi = \dfrac{1}{2} = \mathrm{L}$.

8.b Pour $t \in]0, \pi]$, $1 - \cos t > 0$ donc φ est strictement positive sur $]0, \pi]$. De plus, $\varphi(0) = \mathrm{L} > 0$ donc φ est strictement positive sur $[0, \pi]$.

φ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc elle y admet un minimum μ. Il existe donc $a \in [0, \pi]$ tel que $\mu = \varphi(a) > 0$.

8.c Comme $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $[\pi, +\infty[$,

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt \geq \alpha \int_0^{\pi} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

De plus, pour tout $t \in]0, \pi]$,

$$\frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} = \varphi(t) t^{1-\alpha} \geq \mu t^{1-\alpha}$$

donc

$$\int_0^{\pi} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt \geq \mu \int_0^{\pi} t^{1-\alpha}\, dt = \mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

On en déduit les inégalités voulues.

8.d Puisque $\mu > 0$ et $\lim\limits_{\alpha\to 2} \pi^{2-\alpha} = 1$, $\lim\limits_{\alpha\to 2^-} \alpha\mu \dfrac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha} = +\infty$. Par minoration, $\lim\limits_{\alpha\to 2^-} f(\alpha) = +\infty$.

$\boxed{9}$ **9.a** La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus, en utilisant l'équivalent $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on obtient $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} = 2n + 1$. Ainsi $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de sorte que l'intégrale I_n existe.

9.b On a clairement $\mathrm{I}_0 = \dfrac{\pi}{2}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)}{\sin t}$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t) = [\sin(2nt)\cos(t) + \sin(t)\cos(2nt)] - [\sin(2nt)\cos(t) - \sin(t)\cos(2nt)] = 2\sin(t)\cos(2nt)$$

donc

$$\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n-1} = 2\int_0^{\pi/2} \cos(2nt)\, dt = \frac{1}{n}\left[\sin(2nt)\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{n}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0$$

La suite (I_n) est donc constante de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = \frac{\pi}{2}$$

9.c Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\psi(t) = \frac{t - \sin t}{t \sin t}$$

Or $t - \sin t \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^3}{6}$ et $t \sin t \underset{t \to 0}{\sim} t^2$ donc $\psi(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t}{6}$. Notamment, $\mathrm{L} = \lim_0 \psi = 0$.

9.d Par définition de ψ,

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t)\, \mathrm{d}t = \mathrm{I}_n - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, \mathrm{d}t$$

Or on a vu que $\mathrm{I}_n = \frac{\pi}{2}$ et via le changement de variable linéaire $u = (2n+1)t$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u$$

$\boxed{10}$ **10.a** Les applications g et $t \mapsto -\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de dérivées respectives g' et $t \mapsto \sin((2n+1)t)$ donc, par intégration par parties :

$$u_n = -\frac{1}{2n+1}\left[g(t)\cos((2n+1)t)\right]_{t=0}^{t=\pi/2} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\, \mathrm{d}t = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\, \mathrm{d}t$$

10.b Par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\, \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\pi/2} |g'(t)||\cos((2n+1)t)|\, \mathrm{d}t \leq \int_0^{\pi/2} |g'(t)|\, \mathrm{d}t$$

Ce majorant étant indépendant de n, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\, \mathrm{d}t = 0$$

De plus, $\lim_{n \to +\infty} \frac{g(0)}{2n+1} = 0$ donc (u_n) converge vers 0.

10.c ψ est bien continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs, ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\psi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{t^2 \cos t - \sin^2(t)}{t^2 \sin^2(t)}$$

Or $t^2 \sin^2(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^4$,

$$\sin^2(t) \underset{t \to 0}{=} t^2\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)^2 = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)$$

et

$$t^2 \cos^2(t) \underset{t \to 0}{=} t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4)$$

donc $t^2 \cos t - \sin^2(t) \underset{t \to 0}{\sim} -\frac{1}{6}t^4$. Par conséquent, $\lim_{\psi \to 0} h'(t) = -\frac{1}{6}$.

D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

10.d Comme ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue pour affirmer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t)\, \mathrm{d}t = 0$$

D'après la question **9.d**, ceci signifie que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$$

Or on a vu que l'intégrale $f(1)$ converge donc

$$f(1)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$$