

# DEVOIR À LA MAISON N°05

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

### Partie I – Etude d'exemples

**I.1 I.1.a** Si  $\alpha = 1$ , on a évidemment  $\gamma_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Sinon,  $\gamma_n = \frac{1}{n+1} \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$ .

**I.1.b** Si  $\alpha = 1$ ,  $(\gamma_n)$  est constante égale à 1 donc converge vers 1.

Si  $\alpha = -1$ ,  $\gamma_n = \frac{1}{n+1} \frac{1 + (-1)^n}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc  $0 \leq \gamma_n \leq \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $(\gamma_n)$  converge vers 0.

Si  $|\alpha| < 1$ , alors  $\gamma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - \alpha}$  donc  $(\gamma_n)$  converge vers 0.

Si  $|\alpha| > 1$ , alors  $\gamma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$  donc  $(\gamma_n)$  diverge.

**I.2 I.2.a** On trouve  $A^2 = A^T$  et  $A^3 = I_3$ . On en déduit que  $A^{3k} = I_3$ ,  $A^{3k+1} = A$  et  $A^{3k+2} = A^T$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**I.2.b** Posons  $B_n = (n+1)C_n$ . D'après la question précédente,  $B_{n+3} = B_n + I_n + A + A^T$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi

$$B_{3n} = B_0 + n(I_n + A + A^T) = I_n + n(I_n + A + A^T)$$

$$B_{3n+1} = B_1 + n(I_n + A + A^T) = I_n + A + n(I_n + A + A^T)$$

$$B_{3n+2} = B_2 + n(I_n + A + A^T) = (n+1)(I_n + A + A^T)$$

On en déduit que

$$C_{3n} = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} \\ \frac{n}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} \\ \frac{n}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} \end{pmatrix} \quad C_{3n+1} = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{3n+2} & \frac{n}{3n+2} & \frac{n+1}{3n+2} \\ \frac{n}{3n+2} & \frac{n}{3n+2} & \frac{n}{3n+2} \\ \frac{n}{3n+2} & \frac{n}{3n+2} & \frac{n+1}{3n+2} \end{pmatrix} \quad C_{3n+2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On constate que les suites  $(C_{3n})$ ,  $(C_{3n+1})$  et  $(C_{3n+2})$  convergent vers la même matrice  $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ . On en

déduit que  $(C_n)$  converge vers  $C$ .

**I.2.c** On a  $C^2 = C$  donc  $v^2 = v$ , ce qui prouve que  $v$  est un projecteur. On a clairement  $\text{Im } v = \text{vect}((1, 1, 1))$  et on voit que  $\text{Ker } v$  est l'hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x + y + z = 0$ .

**I.3 I.3.a** On cherche une matrice inversible  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ dC & d \end{pmatrix}$  telle que  $AP = PD$ . La condition  $AP = PD$  équivaut au système

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c = a \\ \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}d = -\frac{1}{6}b \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = c \\ \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d = -\frac{1}{6}d \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ 3b + 4d = 0 \end{cases}$$

Il suffit par exemple de prendre  $a = c = 1$ ,  $b = 4$  et  $d = -3$  i.e.  $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  qui est inversible, de sorte qu'on a bien  $A = PDP^{-1}$ .

**I.3.b** On trouve  $P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Par récurrence, on obtient  $A^k = PD^kP^{-1}$ . Or  $D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix}$  et un calcul donne alors

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^k & \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^k \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^k & \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix}$$

**I.3.c** On a  $A^k = U + \left(-\frac{1}{6}\right)^k V$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  avec  $U = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ .

**I.3.d** On a donc

$$C_n = U + \frac{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)} V = U + \frac{1}{n+1} \frac{6}{7} \left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right) V$$

**I.3.e** Comme  $\left|-\frac{1}{6}\right| < 1$ , on montre que  $(C_n)$  converge vers  $C = U$ .

**I.3.f** On vérifie que  $U^2 = U$ , ce qui prouve que  $v^2 = v$ .  $v$  est donc un projecteur de  $\mathbb{R}^2$ . On a alors  $\text{Im } v = \text{vect}((1, 1))$  et  $\text{Ker } v$  est la droite d'équation  $3x + 4y = 0$ .

## Partie II – Etude de $(C_n)$ lorsque $A$ est $r$ -périodique

**II.1 II.1.a** Posons  $z_k = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_{k+l}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . En utilisant, la périodicité de  $(\alpha_k)$ , on montre que  $z_{k+1} = z_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Ainsi la suite  $(z_k)$  est constante égale à  $z_0 = \gamma$ .

**II.1.b** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \beta_{n+r} &= \sum_{k=0}^{n+r} \alpha_k - \frac{n+r+1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k - \frac{n+1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k + \sum_{k=n+1}^{n+r} \alpha_k - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \\ &= (n+1)\gamma_n - (n+1)\gamma + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{n+1+k} - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \\ &= \beta_n + rz_{n+1} - r\gamma = \beta_n \end{aligned}$$

en utilisant la question précédente. Ainsi  $(\beta_n)$  est  $r$ -périodique et est donc bornée comme toute suite périodique. En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\min_{0 \leq k \leq r-1} \beta_k \leq \beta_n \leq \max_{0 \leq k \leq r-1} \beta_k$$

**II.1.c** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n = \gamma + \frac{\beta_n}{n+1}$$

Comme  $(\beta_n)$  est bornée,  $(\gamma_n)$  converge vers  $\gamma$ .

**II.2 II.2.a** Puisque  $A^r = I_p$ ,  $A^{k+r} = A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Il s'ensuit que  $\alpha_{k+r} = a_{i,j}(A^{k+r}) = a_{i,j}(A^k) = \alpha_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . La suite  $(\alpha_k)$  est donc  $r$ -périodique. Avec les notations de la question précédente, on a  $\gamma_n = c_{i,j}(C_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or on a montré que  $(\gamma_n)$  converge vers  $\gamma$ . Or

$$\gamma = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} c_{i,j}(A^k) = c_{i,j} \left( \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} A^k \right)$$

Ceci montrer que  $(C_n)$  converge vers

$$C = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} A^k$$

**II.2.b** Comme  $A$  et  $I_p$  commutent

$$\begin{aligned} A^r - I_p &= (A - I_p) \left( \sum_{k=0}^{r-1} A^k \right) = r(A - I_p)C \\ &= \left( \sum_{k=0}^{r-1} A^k \right) (A - I_p) = rC(A - I_p) \end{aligned}$$

Comme  $A^r = I_p$  et  $r \neq 0$ ,  $AC = CA = C$ .

**II.2.c** Puisque  $AC = C$ , on montre par récurrence que  $A^k C = C$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Il s'ensuit que

$$C^2 = \frac{1}{r} \left( \sum_{k=0}^{r-1} A^k \right) C = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} A^k C = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} C = C$$

On en déduit que  $v^2 = v$  et  $v$  est donc un projecteur.

On a  $AC = C$ , ce qui signifie  $u \circ v = v$  ou encore  $(u - \text{Id}) \circ v = 0$  et donc  $\text{Im } v \subset \text{Ker}(u - \text{Id})$ . Soit  $x \in \text{Ker}(u - \text{Id})$ . Alors  $u(x) = x$  puis  $u^k(x) = x$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . On en déduit que

$$v(x) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} u^k(x) = x$$

et donc  $x \in \text{Im } v$ . Ainsi  $\text{Ker}(u - \text{Id}) \subset \text{Im } v$ . Finalement  $\text{Ker}(u - \text{Id}) = \text{Im } v$ .

De même,  $CA = C$ , ce qui signifie que  $v \circ u = v$  ou encore  $v \circ (u - \text{Id}) = 0$  et donc  $\text{Im}(u - \text{Id}) \subset \text{Ker } v$ . Mais on a également  $\text{rg } v = \dim \text{Ker}(u - \text{Id})$  d'après ce qui précède. Le théorème du rang permet donc d'affirmer que  $\text{rg}(u - \text{Id}) = \dim \text{Ker } v$  puis que  $\text{Im}(u - \text{Id}) = \text{Ker } v$ .

**II.3 II.3.a** La suite  $(\alpha'_k)$  est  $r$ -périodique. La suite  $(\gamma'_n)$  qui lui est associée converge donc vers

$$\gamma' = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \alpha'_k$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \gamma'_n - \gamma_n &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^n \alpha'_k - \sum_{k=0}^n \alpha_k \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=m}^{n+m} \alpha_k - \sum_{k=0}^n \alpha_k \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \right) \\ &= \frac{1}{n+1} (y_n - K) \end{aligned}$$

avec  $y_n = \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k$  et  $K = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k$ . La suite  $(y_n)$  est  $r$ -périodique donc bornée. On en déduit que la  $(\gamma'_n - \gamma_n)$  converge vers 0. Ainsi  $(\gamma_n)$  converge vers

$$\gamma' = \frac{1}{r} \sum_{k=m}^{m+r-1} \alpha_k$$

**II.3.b** Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ . La suite de terme général  $\alpha_k = c_{i,j}(A^k)$  est  $r$ -périodique à partir du rang  $m$ . D'après la question précédente, la suite  $(\gamma_n)$  qui lui est associée converge vers  $\gamma'$  en gardant les mêmes notations. Ceci montre que  $(C_n)$  converge vers

$$C = \frac{1}{r} \sum_{k=m}^{m+r-1} A^k$$

**II.3.c** Comme  $A$  et  $I_p$  commutent

$$\begin{aligned} A^{m+r} - A^m &= (A - I_p) \left( \sum_{k=m}^{m+r-1} A^k \right) = r(A - I_p)C \\ &= \left( \sum_{k=m}^{m+r-1} A^k \right) (A - I_p) = rC(A - I_p) \end{aligned}$$

Comme  $A^{m+r} = A^m$  et  $r \neq 0$ ,  $AC = CA = C$ .

Puisque  $AC = C$ , on montre par récurrence que  $A^k C = C$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Il s'ensuit que

$$C^2 = \frac{1}{r} \left( \sum_{k=m}^{m+r-1} A^k \right) C = \frac{1}{r} \sum_{k=m}^{m+r-1} A^k C = \frac{1}{r} \sum_{k=m}^{m+r-1} C = C$$

On en déduit que  $v^2 = v$  et  $v$  est donc un projecteur.

On a  $AC = C$ , ce qui signifie  $u \circ v = v$  ou encore  $(u - \text{Id}) \circ v = 0$  et donc  $\text{Im } v \subset \text{Ker}(u - \text{Id})$ . Soit  $x \in \text{Ker}(u - \text{Id})$ . Alors  $u(x) = x$  puis  $u^k(x) = x$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . On en déduit que

$$v(x) = \frac{1}{r} \sum_{k=m}^{m+r-1} u^k(x) = x$$

et donc  $x \in \text{Im } v$ . Ainsi  $\text{Ker}(u - \text{Id}) \subset \text{Im } v$ . Finalement  $\text{Ker}(u - \text{Id}) = \text{Im } v$ .

De même,  $CA = C$ , ce qui signifie que  $v \circ u = v$  ou encore  $v \circ (u - \text{Id}) = 0$  et donc  $\text{Im}(u - \text{Id}) \subset \text{Ker } v$ . Mais on a également  $\text{rg } v = \dim \text{Ker}(u - \text{Id})$  d'après ce qui précède. Le théorème du rang permet donc d'affirmer que  $\text{rg}(u - \text{Id}) = \dim \text{Ker } v$  puis que  $\text{Im}(u - \text{Id}) = \text{Ker } v$ .

### Partie III – Etude de matrices stochastiques

**III.1** Pour aller plus vite, on utilisera le fait que  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est stochastique si et seulement si  $M$  est à coefficients positifs et si  $MU = U$  avec  $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1.

**III.1.a** Puisque  $M$  et  $N$  sont à coefficients positifs et que  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels positifs,  $\lambda M + \mu N$  est à coefficients positifs. De plus,  $(\lambda M + \mu N)U = \lambda MU + \mu NU = (\lambda + \mu)U = U$  car  $M$  et  $N$  sont stochastiques et car  $\lambda + \mu = 1$ . Ainsi  $\lambda M + \mu N$  est stochastique.

**REMARQUE.** On a en fait montré que  $\mathcal{S}_p$  est une partie convexe de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

**III.1.b** Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ ,

$$c_{i,j}(MN) = \sum_{k=1}^p c_{ik}(M)c_{kj}(N) \geq 0$$

car  $M$  et  $N$  sont à coefficients positifs. De plus,  $MNU = MU = U$  car  $M$  et  $N$  sont stochastiques. Donc  $MN$  l'est également.

**III.1.c** Tout d'abord, on montre par récurrence que  $A^n$  est stochastique pour tout  $n \in \mathbb{N}$  en utilisant la question précédente.

$C_0 = I_p$  est stochastique. Supposons que  $C_n$  le soit pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $C_{n+1} = \frac{n}{n+1}C_n + \frac{1}{n+1}A^{n+1}$  est stochastique d'après la question **III.1.a**. Par récurrence,  $C_n \in \mathcal{S}_p$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons que  $(C_n)$  admet une limite  $C$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n$  est stochastique, on a

- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, c_{i,j}(C_n) \geq 0$ .
- $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{j=1}^p c_{i,j}(C_n) = 1$ .

Par passage à la limite,

- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, c_{i,j}(C) \geq 0.$
- $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{j=1}^p c_{i,j}(C) = 1.$

Ainsi  $C$  est stochastique.

**III.2 III.2.a** Supposons  $M$  déterministe. La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Comme tous les coefficients valent 0 ou 1, un seul des coefficients de chaque ligne vaut 1 et les autres valent 0.

Réciproquement si tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1 et si chaque ligne de  $M$  contient exactement un coefficient égal à 1, alors  $M$  est bien déterministe.

**III.2.b** Il y a  $p$  choix possibles pour la position du seul coefficient 1 pour chacune des  $p$  lignes d'une matrice déterministe. On en déduit que  $\text{card } \mathcal{D}_p = p^p$ .

**III.2.c**  $MN$  est stochastique d'après la question **III.1.b**. De plus, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$

$$c_{i,j}(MN) = \sum_{k=1}^p c_{ik}(M)c_{kj}(N) \in \mathbb{N}$$

La somme des coefficients de chaque ligne de  $MN$  valant 1 et chacun de ces coefficients étant entier naturel, un seul d'entre eux vaut 1 et les autres sont nuls. Ceci prouve que  $MN$  est déterministe.

**III.2.d** La suite  $(A^k)$  est à valeurs dans  $\mathcal{D}_p$  d'après la question précédente. Comme  $\mathcal{D}_p$  est un ensemble fini, la suite  $(A^k)$  ne peut être injective. Il existe donc des entiers naturels  $m$  et  $n$  tels que  $m < n$  et  $A^m = A^n$ . Posons  $r = n - m \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $A^{m+r} = A^m$  i.e.  $A$  est donc  $r$ -périodique à partir du rang  $m$ .

Si  $A$  est inversible, alors en multipliant l'égalité  $A^{m+r} = A^m$  par  $(A^{-1})^m$ , on obtient  $A^r = I_p$ , ce qui prouve que  $A$  est  $r$ -périodique.

**III.2.e** Chaque colonne de  $A$  contient au moins un coefficient égal à 1 sinon une colonne de  $A$  serait nulle, ce qui contredirait son inversibilité. Comme  $A$  contient un seul coefficient égal à 1 par ligne, elle contient en tout  $p$  coefficients égaux à 1. On en déduit que chaque colonne de  $A$  contient exactement un coefficient égal à 1, les autres étant nuls.

On voit alors que  $AA^T = I_p$ , ce qui prouve que  $A^{-1} = A^T$ . Les coefficients de  $A^T$  sont tous égaux à 0 ou 1 et comme chaque colonne de  $A^T$  contient exactement un coefficient égal à 1, chaque ligne de  $A^T$  contient exactement un coefficient égal à 1. Ceci prouve que  $A^{-1} = A^T$  est déterministe. Comme  $A^{-1}$  est évidemment inversible,  $A^{-1} \in \Delta_p$ .

**REMARQUE.** Comme le produit de deux matrices déterministes inversibles et une matrice déterministe (d'après **III.2.c**) inversible et que  $I_n \in \Delta_p$ , on voit que  $\Delta_p$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_p(\mathbb{R})$ .

Les matrices déterministes inversibles sont aussi appelées matrices de permutation. Je vous laisse deviner pourquoi.

**III.3** D'après la question **III.2.d**,  $A$  est  $r$ -périodique à partir d'un certain rang  $m$ . D'après les questions **II.3.b** et **II.3.c**,  $(C_n)$  converge vers une matrice  $C$  telle que  $C^2 = C$ . D'après la question **III.1.c**,  $C \in \mathcal{S}_p$ .

**III.4 III.4.a** Puisque  $XY = I_p$ ,  $X$  et  $Y$  sont inversibles.

**III.4.b** Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . D'une part,

$$c_{jj}(XY) = \sum_{k=1}^p c_{jk}(X)c_{kj}(Y) \leq \mu_j \sum_{k=1}^p c_{jk}(X) = \mu_j$$

Puisque  $c_{jj}(XY) = c_{jj}(I_p) = 1$ , on a  $\mu_j \geq 1$ . D'autre part,

$$\sum_{i=1}^p c_{i,j}(Y) = 1$$

et  $c_{i,j} \geq 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  donc  $c_{i,j} \leq 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On en déduit que  $\mu_j \leq 1$ .  
Finalement  $\mu_j = 1$ .

**III.4.c** Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Puisque  $\mu_j = 1$ , un des coefficients de la  $j^{\text{ème}}$  ligne vaut 1. Puisque  $Y$  est stochastique, la somme des coefficients de cette ligne vaut 1 et, puisque tous les autres coefficients de cette ligne sont positifs, ils sont nuls.

Les coefficients de  $Y$  valent donc tous 0 ou 1 et chaque ligne de  $Y$  contient exactement un coefficient égal à 1, ce qui prouve que  $Y$  est déterministe. Ainsi  $Y \in \Delta_p$  puisque  $Y$  est également inversible.

Puisque  $XY = I_p$ ,  $X = Y^{-1}$  est donc  $X \in \Delta_p$  d'après **III.2.e**.

**III.4.d** Posons  $W = UV \in \Delta_p$ . On a donc  $W^{-1}UV = I_p$ . D'après **III.2.e**,  $W^{-1} \in \Delta_p$  et a fortiori  $W^{-1} \in \mathcal{S}_p$ . D'après **III.1.b**,  $W^{-1}U \in \mathcal{S}_p$  et ce qui précède montre que  $W^{-1}U \in \Delta_p$  et  $V \in \Delta_p$ . Enfin,  $U = W(W^{-1}U) \in \mathcal{D}_p$  d'après **III.2.c** et  $U$  est inversible car  $W$  et  $W^{-1}U$  le sont. Ainsi  $U \in \Delta_p$ .