© Laurent Garcin MP Dumont d'Urville

DÉRIVATION ET INTÉGRATION

Opérations et dérivation

$$(u+v)' = u' + v' (uv)' = u'v + uv' (\lambda u)' = \lambda u' (u \circ v)' = (u' \circ v)v$$

$$(u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}} (\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2} (u^{\alpha})' = \alpha u'u^{\alpha-1}$$

Formule de Leibniz : $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$

Dérivées usuelles

$$\ln(x) \longmapsto \frac{1}{x} \qquad e^{ax} \longmapsto ae^{ax} \qquad x^{\alpha} \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\sin(x) \longmapsto \cos(x) \qquad \cos(x) \longmapsto -\sin(x) \qquad \tan(x) \longmapsto 1 + \tan^{2}(x) = \frac{1}{\cos^{2}(x)}$$

$$\arcsin(x) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} \qquad \arccos(x) \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} \qquad \arctan(x) \longmapsto \frac{1}{1+x^{2}}$$

$$\sinh(x) \longmapsto \cosh(x) \qquad \cosh(x) \qquad \cosh(x) \qquad \tanh(x) \longmapsto 1 - \tanh^{2}(x) = \frac{1}{\cosh^{2}(x)}$$

Primitives usuelles

$$\ln(x) \longmapsto x \ln(x) - x \qquad e^{ax} \longmapsto \frac{e^{ax}}{a} \ (a \neq 0) \qquad \qquad x^{\alpha} \longmapsto \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\sin(x) \longmapsto -\cos(x) \qquad \cos(x) \longmapsto \sin(x) \qquad \tan(x) \longmapsto -\ln|\cos(x)|$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longmapsto \arcsin(x) \qquad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longmapsto \arccos(x) \text{ ou } -\arcsin(x) \qquad \frac{1}{1+x^2} \longmapsto \arctan(x)$$

$$\sinh(x) \longmapsto \cosh(x) \qquad \cosh(x) \longmapsto \sinh(x) \qquad \sinh(x) \longmapsto \ln(\cosh(x))$$

Formules de Taylor —

Formule de Taylor avec reste intégral : Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un intervalle I, alors

$$\forall (a,b) \in I^2, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange : Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I et si $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur I, alors

$$\forall (a,b) \in I^2, \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \le M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young : Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I et $a\in I$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{x \to a}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^{k} + o((x - a)^{n})$$