Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

$\boxed{1}$ **1.a** On calcule le polynôme caractéristique de A : $\chi_A = (X+2)(X-1)^2$. Par conséquent le spectre de A est $\{-2; 1\}$.

1.b On vérifie aisément que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en calculant son déterminant dans la base canonique. De plus, $Au_1 = u_1$, $Au_2 = u_2$ et $Au_3 = -2u_3$ donc u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de A.

1.c On vient de trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A donc A est diagonalisable.

1.d $Bu_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à u_1 et de même pour u_2 et u_3 donc aucun élément de $\mathcal{F}$ n'est vecteur propre de B donc a fortiori commun à A et B.

$\boxed{2}$ **2.a** $\chi_B = (X-2)^3$ (on développe par rapport à la deuxième ligne) donc le spectre de B est $\{2\}$.

2.b $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Les trois colonnes de cette matrice sont colinéaires à u_4 donc $\mathrm{Im}_2(B) \subset \mathrm{vect}(u_4)$ et u_4 est la première colonne donc $\mathrm{vect}(u_4) \subset \mathrm{Im}_2(B)$. Par conséquent $Im_2(B) = \mathrm{vect}(u_4)$.
Le théorème du rang nous dit alors que $\dim E_2(B) = 2$.

2.c La somme des dimensions des sous espaces propres de B est égale à $2 < 3$ donc B n'est pas diagonalisable.

$\boxed{3}$ **3.a** $Bu_5 = 2u_5$ et $Au_5 = u_5$ donc $\mathrm{vect}(u_5) \subset E_1(A) \cap E_2(B)$.
$E_1(A)$ et $E_2(B)$ sont de dimension 2 donc cette intersection est de dimension 1 ou 2 (on a déjà un vecteur non nul dans l'intersection). Si elle est de dimension 2, alors $E_1(A) = E_2(B)$ ce qui est absurde car u_1 est dans $E_1(A)$ mais pas dans $E_2(B)$. Par conséquent l'intersection est de dimension 1 et $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{vect}(u_5)$.

3.b Comme u_3 n'est pas vecteur propre de B et qu'il engendre $E_{-2}(A)$, il n'y a pas de vecteur propre commun à A et B dans $E_{-2}(A)$. De plus, 2 est la seule valeur propre de B donc les vecteurs propres communs à A et B sont dans $E_1(A) \cap E_2(B)$. D'après la question précédente, les vecteurs propres communs à A et B sont les vecteurs de la forme λu_5, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

$\boxed{4}$ **4.a** $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ donc $[A, B] = C$.

4.b On calcule le polynôme caractéristique de C. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+5 & -3 & 1 \\ 2 & \lambda-6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$. On remplace L_1 par $L_1 - L3$:

$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 2 & \lambda-6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$. On utilise la linéarité par rapport à la première ligne puis on remplace C_1 par $C_1 + C_3$:

$\chi_C(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & -2 \\ \lambda+6 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$. Enfin, on développe par rapport à la première ligne : $\chi_C(\lambda) = \lambda(\lambda-6)(6+\lambda)$.

χ_C est scindé à racines simples donc C est diagonalisable. De plus les valeurs propres de C sont -6, 0 et 6 donc C est semblable à D.
Le rangs de C et de D sont alors égaux et $\mathrm{rg}(C) = 2$.

$\boxed{5}$ **5.a** Soient λ et μ tels que $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$. Alors $ABe = \mu Ae = \lambda\mu e$ et de même pour BAe donc $e \in \mathrm{Ker}([A, B])$.

5.b Le vecteur e n'est pas nul (car vecteur propre) donc $\dim \mathrm{Ker}[A, B] > 0$ d'après la question précédente. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}([A, B]) < n$.

$\boxed{6}$ On suppose $[A, B] = 0$. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A a au moins une valeur propre : soit $\lambda \in Sp(A)$. $[A, B] = 0$ donc $\mathrm{Ker}([A, B]) = \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A, B])$: A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

$\boxed{7}$ **7.a** Soit $X \in E_\lambda(A)$. Par hypothèse $(AB - BA)X = 0$ soit $ABX = BAX$. Or $AX = \lambda X$ donc $A(BX) = \lambda BX$ ce qui signifie que $BX \in E_\lambda(A)$: $\psi : X \mapsto BX$ est une application de $E_\lambda(A)$ dans lui même. De plus, par propriété du produit matriciel, ψ est linéaire donc ψ est un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

7.b λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ est de dimension non nulle et comme $K = \mathbb{C}$, ψ a au moins une valeur propre : il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $X \in E_\lambda(A)$ non nul tels que $\psi(X) = \mu X$. On a donc $BX = \mu X$, $AX = \lambda X$ et X non nul : X est un vecteur propre commun à A et B.

$\boxed{8}$ En dimension 1, tous les vecteurs non nuls sont des vecteurs propres donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

$\boxed{9}$ **9.a** A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$ donc $E_\lambda(A)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(C)$: il existe $u \in E_\lambda(A)$ tel que $u \notin \mathrm{Ker}(C)$: u est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifie $Au = \lambda u$ et $Cu \neq 0$.

9.b Par hypothèse $\mathrm{Im}\, C$ est de dimension 1 et $v = Cu$ est un vecteur non nul de cette image donc $\mathrm{Im}\, C = \mathrm{vect}(v)$.

9.c $v = Cu$ donc $v = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu$ soit $v = (A - \lambda I)(Bu)$: $v \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. La question précédente permet alors de dire que $\mathrm{Im}\, C \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$.

9.d $\mathrm{Im}\, C$ est de dimension 1 donc $1 \leq \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A))$.
λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ a une dimension non nulle et, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$.
Finalement

$$1 \leq \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$$

.

9.e A et $A - \lambda I_n$ commutent donc $[A, A - \lambda I_n] = 0$.
Par définition $[B, A - \lambda I_n] = B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B = BA - AB = -[A, B]$ d'où $[B, A - \lambda I_n] = -C$.
φ et ψ sont des applications linéaires par propriétés du produit matriciel.
Soit $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$: $X = (A - \lambda I_n)Y$ où $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Comme $[A, A - \lambda I_n] = 0$, $AX = (A - \lambda I_n)(AY)$ donc $AX \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. Par conséquent φ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.
De même $BX = (A - \lambda I_n)(BY) - CY$. $CY \in \mathrm{Im}\, C$ et $\mathrm{Im}\, C \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$ donc $CY \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$; on a aussi $(A - \lambda I_n)(BY) \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$ donc $BX \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. On en conclut que ψ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

9.f $\mathrm{Im}([\varphi, \psi]) \subset \mathrm{Im}(C)$ donc $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à φ et ψ, endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$ qui est de dimension non nulle et strictement inférieure à n : φ et ψ ont un vecteur propre commun. A fortiori A et B ont un vecteur propre commun.

$\boxed{10}$ $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vérifiée pour tout entier $k \in [\![1, n - 1]\!]$.
Soit E de dimension n.
Soit φ et ψ deux d'endomorphismes de E tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$.
On considère A et B les matrices associées respectivement à φ et ψ dans une base de E, $C = AB - BA$.
Si $\mathrm{rg}(C) = 1$ et si A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$, alors, d'après la question **9**, A et B ont un vecteur propre commun : φ et ψ ont un vecteur propre commun ($K = \mathbb{C}$) donc A a au moins une valeur propre.
Si $\mathrm{rg}(C) = 1$ et A, B vérifient $\mathcal{H}$, alors d'après **7**, φ et ψ ont un vecteur propre commun.
Si $\mathrm{rg}(C) = 0$, alors $[A, B] = 0$ et, d'après les questions **6** et **7**, φ et ψ ont un vecteur propre commun.
On en déduit que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée.
Par récurrence, on peut conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$\boxed{11}$ $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k}$. On pose $l = 2n - k$ pour obtenir $g(P) = \sum_{l=0}^{2n} a_{2n-l} X^l$.

$\boxed{12}$ Pour tout polynôme P, $\deg P' \leq \deg P$ et la dérivation des polynômes est linéaire donc f est un endomorphisme de E.

La question précédente prouve que g est une application de E dans E.
Si $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} g(P+\lambda Q) &= X^{2n}(P+\lambda Q)\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right) + X^{2n}Q\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= g(P) + \lambda g(Q) \end{aligned}$$

donc g est linéaire. g est donc un endomorphisme de E.

$\boxed{13}$ **13.a** Soit P un vecteur propre de g et λ la valeur propre associée. $g(P) = \lambda P$.
La question **11** prouve que g est injective donc λ ne peut pas être nul. Par conséquent P et $g(P)$ ont le même degré que l'on appelle d. (P n'est pas nul car vecteur propre).
On reprend les notations de la question **11**. $a_d \neq 0$ donc si $k = 2n-d$, $a_{2n-k} \neq 0$ et donc $\deg(g(P)) \geq 2n-d$. Par conséquent $d \geq 2n-d$ et donc $\deg(P) \geq n$.

13.b $g(X^n) = X^n$ et X^n n'est pas le polynôme nul donc X^n est un vecteur propre de g.

$\boxed{14}$ **14.a** $f^i(P) = P^{(i)}$. P′ est nul si et seulement P est un polynôme constant c'est-à-dire un polynôme de degré ≤ 0.
On suppose que $\ker f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$ pour un entier i entre 1 et $2n-1$.
$P \in \ker f^{i+1}$ si seulement si $P' \in \ker f^i$ donc si et seulement si $P' \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$ donc $\ker f^{i+1} = \mathbb{C}_i[X]$.
Par récurrence, pour tout i entre 1 et $2n$, $\ker f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

14.b Si P est non nul de degré $i-1$, alors $f^i(P) = 0P$ donc $0 \in Sp(f^i)$.
Remarquons que $f^{2n+1} = 0$ donc f est nilpotent. A fortiori, f^i est nilppotent puisque $(f^i)^{2n+1} = (f^{2n+1})^i = 0$. D'après le cours, $Sp(f^i) = \{0\}$.

$\boxed{15}$ Si $i \geq n+1$, $f^i(X^n) = 0X^n$ donc X^n est vecteur propre de f^i. Avec la question **13.b**, on peut en déduire que X^n est un vecteur propre commun à f et g.
On suppose réciproquement que i est tel que f et g ont un vecteur propre commun.
Soit P un vecteur propre commun. D'après la question **13.a**, $\deg(P) \geq n$ et d'après la question**14.b**, $P \in \ker f^i$ donc d'après la question **14.a**, $\deg(P) \leq i-1$. Ainsi, $n \leq i-1$ soit $i \geq n+1$.
Finalement f et g ont un vecteur propre commun si et seulement si $i \geq n+1$.

$\boxed{16}$ Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $f(X^k) = kX^{k-1}$ et $g(X^k) = X^{2n-k}$. On en déduit que

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{17}$ **17.a** En prenant $n = 1$ dans la question précédente, on obtient bien $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par produit matriciel, $(A_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A_1)^3$ est la matrice nulle.

17.b On trouve $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2.

$[(A_1)^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est aussi de rang 2.

17.c Quand $i = 2$, $i \geq 1+1$ donc $(A_1)^2$ et B_1 ont un vecteur propre commun alors que la condition de la question **10** n'est pas vérifiée ; celle-ci n'est donc pas nécessaire.
Quand $i = 1$, $\mathrm{rg}([A_1, B_1]) < 3$ mais A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun donc la condition de la question **5.b** n'est pas suffisante.

18 $\dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \geq 2$ donc on peut considérer deux vecteurs propres X et X′ formant une famille libre associés à la valeur propre λ : $\mathrm{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\mathrm{X}' = (x'_1, \cdots, x'_n)$.
Si $x_1 = 0$ alors $\mathrm{X} \in \mathcal{N}$.
Si $x_1 \neq 0$, on pose $\mathrm{X}'' = x'_1\mathrm{X} - x_1\mathrm{X}'$. Alors $\mathrm{X}'' \in \mathcal{N}$ (la première composante de X″ est nulle), X″ n'est pas nul (car $(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ est libre) et est dans $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ donc X″ est un vecteur propre de A.
Dans tous les cas, A admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre λ.

19 **19.a** Soit $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ tel que $\mathrm{A}_{1,2} = 1$, $\mathrm{A}_{2,1} = -1$, tous les autres coefficients nuls (ceci est possible car $n \geq 2$). A n'est pas la matrice nulle et est antisymétrique donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0\}$.

19.b Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Pour tous i et j, $\mathrm{M}_{i,j} = -\mathrm{M}_{j,i}$ donc en particulier les coefficients diagonaux $\mathrm{M}_{i,i}$ sont nuls ; comme il y en a un par colonne, on en déduit que les colonnes de M sont des éléments de $\mathcal{N}$.

19.c Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. La transposition est linéaire et $(\mathrm{AB})^\top = \mathrm{B}^\top\mathrm{A}^\top$ donc

$$\varphi(\mathrm{M})^\top = (\mathrm{AM})^\top + (\mathrm{MA}^\top)^\top = \mathrm{M}^\top\mathrm{A}^\top + (\mathrm{A}^\top)^\top\mathrm{M}^\top = -\mathrm{MA}^\top + \mathrm{AM}^\top = -\varphi(\mathrm{M})$$

donc $\varphi(\mathrm{M}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
De même

$$\psi(\mathrm{M})^\top = (\mathrm{AMA}^\top)^\top = \mathrm{AM}^\top\mathrm{A}^\top - \psi(\mathrm{M})$$

φ et ψ sont donc des applications de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même. De plus, elles sont linéaires par propriétés du produit matriciel donc φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

19.d Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

$$\varphi \circ \psi(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{AMA}^\top) = \mathrm{A}(\mathrm{AMA}^\top) + (\mathrm{AMA}^\top)\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^2\mathrm{MA}^\top + \mathrm{AM}(\mathrm{A}^\top)^2$$

et par ailleurs

$$\psi \circ \varphi(\mathrm{M}) = \psi(\mathrm{AM} + \mathrm{MA}^\top) = \mathrm{A}(\mathrm{AM} + \mathrm{MA}^\top)\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^2\mathrm{MA}^\top + \mathrm{AM}(\mathrm{A}^\top)^2$$

Par conséquent, pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $\varphi \circ \psi(\mathrm{M}) = \psi \circ \varphi(\mathrm{M})$ donc $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

20 **20.a**
- $\mathrm{X}_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{X}_2^\top \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ donc $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De même $\mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus

$$\begin{aligned}\mathrm{B}^\top &= (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top)^\top - (\mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top)^\top \\ &= \mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top - \mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top\end{aligned}$$

  donc $\mathrm{B} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
- On suppose $\mathrm{B} = 0$ de sorte que $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top = \mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top$. Posons $\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$. On a alors $\alpha_j\beta_i = \alpha_i\beta_j$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Comme X_1 est non nul en tant que vecteur propre, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$. Mais alors $\beta_j = \dfrac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\alpha_j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ i.e. $\mathrm{X}_2 = \dfrac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\mathrm{X}_1$. Mais la famille $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ est libre puisque X_1 et X_2 sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes. On aboutit à une contradiction de sorte que $\mathrm{B} \neq 0$.
- Pour $i \in \{1,2\}$, $\mathrm{AX}_i = \lambda_i\mathrm{X}_i$ donc $\mathrm{X}_i^\top\mathrm{A}^\top = \lambda_i\mathrm{X}_i^\top$.

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} + \mathrm{BA}^\top &= \mathrm{AX}_1\mathrm{X}_2^\top - \mathrm{AX}_2\mathrm{X}_1^\top + \mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top\mathrm{A}^\top - \mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top\mathrm{A}^\top \\ &= \lambda_1\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top - \lambda_2\mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top + \lambda_2\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top - \lambda_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top \\ &= \lambda_1\mathrm{B} + \lambda_2\mathrm{B}\end{aligned}$$

  d'où $\mathrm{AB} + \mathrm{BA}^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{B}$.
- De même

$$\begin{aligned}\mathrm{ABA}^\top &= (\mathrm{AX}_1)(\mathrm{X}_2^\top\mathrm{A}^\top) - (\mathrm{AX}_2)(\mathrm{X}_1^\top\mathrm{A}^\top) \\ &= \lambda_1\lambda_2\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top - \lambda_2\lambda_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top\end{aligned}$$

  d'où $\mathrm{ABA}^\top = (\lambda_1\lambda_2)\mathrm{B}$.

20.b A et I_n commutent donc $(\mathrm{A} - \lambda_1\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - \lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = \mathrm{A}^2\mathrm{B} - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{AB} + \lambda_1\lambda_2\mathrm{B}$. On multiplie la relation $\mathrm{AB} + \mathrm{BA}^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{B}$ par A à gauche : $\mathrm{A}^2\mathrm{B} + \mathrm{ABA}^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{AB}$ donc $(\mathrm{A} - \lambda_1\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - \lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = -\mathrm{ABA}^\top + \lambda_1\lambda_2\mathrm{B}$. Comme $\mathrm{ABA}^\top = (\lambda_1\lambda_2)\mathrm{B}$, on conclut $(\mathrm{A} - \lambda_1\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - \lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = 0$.

20.c $B \neq 0$ donc l'une au moins des colonnes de B est non nulle ; soit C une colonne de B non nulle. $(A - \lambda_2 I_n)B = 0$ donc $(A - \lambda_2 I_n)C = 0_{n,1}$ soit $AC = \lambda_2 C$. C n'est pas nulle donc C est un vecteur propre de A.
De plus $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ donc $C \in \mathcal{N}$. C, une des colonnes de B, est donc un vecteur propre de A sous forme normale.

20.d $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0$ donc il existe X une colonne de $(A - \lambda_2 I_n)B$ non nulle. Il existe alors U une des colonnes de B telle que $X = (A - \lambda_2 I_n)U$. Comme $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0$, on a également $(A - \lambda_1 I_n)X = 0$ donc X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1. A nouveau, comme B est antisymétrique, $U \in \mathcal{N}$. Or $X = (A - \lambda_2 I_n)U$ et $\lambda_2 \in \mathrm{Sp}(A)$ donc X est un vecteur propre de A sous forme normale.

$\boxed{21}$ **21.a** φ et ψ sont deux endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) = 0 \leq 1$ donc, d'après la partie II, φ et ψ ont un vecteur propre commun : il existe $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ non nulle vecteur propre de φ et de ψ ; il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi(B) = \alpha B$ soit $AB + BA^\top = \alpha B$ et il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $ABA^\top = \beta B$.

21.b On multiplie la relation $AB + BA^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)B$ par A à gauche : $A^2B + ABA^\top = \alpha AB$ mais $ABA^\top = \beta B$ donc $A^2B + \beta B = \alpha AB$. En factorisant par B, on obtient $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0$.

21.c Le polynôme $X^2 - \alpha X + \beta$ à coefficients complexes a deux racines (éventuellement confondues) donc il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $X^2 - \alpha X + \beta = (X - \gamma)(X - \delta)$. Alors $A^2 - \alpha A + \beta I_n = (A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)$ et, la relation de la question précédente devient : $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0$.

21.d On suppose $(A - \delta I_n)B = 0$ donc, si $A - \delta I_n$ est inversible, alors $B = 0$ ce qui est exclu donc $A - \delta I_n$ n'est pas inversible et $\delta \in \mathrm{Sp}(A)$. Une colonne non nulle de B est alors un vecteur propre de A sous forme normale (car B est antisymétrique).

21.e Puisque $(A - \delta I_n)B \neq 0$, $(A - \delta I_n)B$ possède une colonne non nulle. Autrement dit, il existe une colonne U de B telle que $X = (A - \delta I_n)U \neq 0$. Comme B est antisymétrique, $U \in \mathcal{N}$. De plus, $(A - \gamma I_n)X = 0$ (d'après la question **21.c**) donc X est un vecteur propre de A (associé à la valeur propre γ) sous forme normale.

21.f A n'a qu'une valeur propre λ et $\delta \neq \lambda$ donc δ n'est pas valeur propre de A et $(A - \delta I_n)$ est inversible.
$A - \gamma I_n$ et $A - \delta I_n$ commutent donc si on multiplie à gauche la relation de la question **21.c** par $(A - \delta I_n)^{-1}$, on obtient $(A - \gamma I_n)B = 0$.

21.g On est alors revenu à la situation de la question **21.d** et donc A possède un vecteur propre sous forme normale.
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque.
A a au moins une valeur propre.
Si A a une seule valeur propre, d'après les questions précédentes, A possède un vecteur propre sous forme normale.
Si A a au moins deux valeurs propres distinctes, alors d'après **20**, A possède un vecteur propre sous forme normale.
On en conclut que, dans tous les cas, une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède un vecteur propre sous forme normale.