Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

A l'attention des 3/2

Les 3/2 pourront admettre le résultat des questions 8 et 31. Par ailleurs, toutes les variables aléatoires de l'énoncé pourront être considérées comme des «variables aléatoires de MPSI», c'est-à-dire des variables aléatoires définies sur un univers *fini*.

Problème 1

1 Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leq 2$ donc $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \geq \dfrac{1}{2^n}$. Ainsi $\mathrm{I}_n \geq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}$.

2 L'application $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ avec $2n \geq 2 > 1$. On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ sur $[0,+\infty[$ puis l'existence de K_n.
Il est clair que $\mathrm{K}_1 = [\arctan t]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2}$.

3 Supposons $n \geq 2$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $0 < 1+t \leq 1+t^2$ de sorte que $0 \leq \dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leq \dfrac{1}{(1+t)^n}$. Par croissabce de l'intégrale,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} = \frac{2}{2^n(n-1)}$$

Or $\dfrac{1}{2^n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^n n}$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$$

4 D'après la question précédente, $\mathrm{K}_n - \mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{2^n n}\right)$. A fortiori, $\mathrm{K} - n - \mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$. Mais d'après la question **1**, $\dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\mathrm{I}_n)$ donc $\mathrm{K}_n - \mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\mathrm{I}_n)$ i.e. $\mathrm{K}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_n$.

5 Par intégration par parties,

$$\mathrm{K}_n = \int_0^{+\infty} 1\cdot(1+t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[t(1+t^2)^{-n}\right]_0^{+\infty} + 2n\int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime car

$$\lim_{t\to+\infty} t(1+t^2)^{-n} = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_n &= 2n\int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2n\int_0^{+\infty} (1+t^2-1)(1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2n\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t - 2n\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2n\mathrm{K}_n - 2n\mathrm{K}_{n+1}
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\mathrm{K}_n = \mathrm{K}_{n+1} + \frac{1}{2n}\mathrm{K}_n$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ D'après la question précédnte, $\mathrm{K}_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}\mathrm{K}_n$. On montre par récurrence que $\mathrm{K}_n = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}(n-1)!^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la formule de Stirling, on montre que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{K}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Il suffit d'effectuer le changement de variable linéaire $u = \sqrt{n}t$.