Semaine du 13/01

1 Cours

2 Cours

Espaces préhilbertiens réels (révisions de MPSI)

Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien Théorème de Riesz : représentation des formes linéaires d'un espace euclidien. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Propriétés de l'adjonction : linéarité, adjoint d'une composée, involutivité. Si u est un endomorphisme d'un espace euclidien de base **orthornomée** $\mathcal{B}$, alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top$. Si F est un sous-espace stable par un endomorphisme u, alors $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u^*.

Matrices orthogonales Une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $\mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$. Une matrice est orthogonale si et seulement si la famille de ses lignes ou de ses colonnes est orthonormée pour le produit canonique. Groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Matrices orthogonales positives et négatives. Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Isométries vectorielles Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations des isométries parmi les endomorphismes d'un espace euclidien : conservation du produit scalaire, l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée est une base orthonormée, l'adjoint est égal à l'inverse. Groupe orthogonal O(E). Isométries vectorielles directes et indirectes. Groupe spécial orthogonal SO(E).

3 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz notamment dans le cas des produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Orthonormaliser une famille libre à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.
- Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
- Calculer un projeté orthogonal.
- Calculer la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Connaître les différentes caractérisations des isométries vectorielles : adjoint, conservation du produit scalaire, conservation de la norme, conservation du caractère orthonormé des bases.
- Déterminer l'adjoint d'un endomorphisme en utilisant la définition.
- Utiliser le lien entre adjonction et transposition.
- Utiliser de préférence des bases orthonormées par défaut.
- Calculer la matrice d'un projecteur orthogonal ou d'une symétrie orthogonale.

4 Questions de cours

Banque CCP Exercices 76, 77, 78, 80, 81, 82

Retour sur le DS n°07 Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $\mathrm{J} = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur J.

   On note alors $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathrm{J}$.
2. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur J.
3. Etudier alors sa convergence uniforme sur J.
4. Déterminer $\ell = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.