INTERROGATION ÉCRITE N°07

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-nx})$. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

   Posons $f_n : x \mapsto \ln(1+e^{-nx})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est décroissante et positive sur $[1,+\infty[$. Ainsi

   $$\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = f_n(1) = \ln(1+e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$$

   La série géométrique $\sum e^{-n}$ est une série à termes positifs convergente car $0 \leq e^{-1} \leq 1$. On en conclut que $\sum \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ convrge. Ainsi $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformement sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{+\infty} f_n = \begin{cases} \ln 2 & si\ n = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$. Par théorème d'interversion série/limite,

   $$\lim_{+\infty} \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = \ln 2$$

   ∎

2. On pose $f_n : x \mapsto e^{-nx}$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Il est clair que $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notamment, $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

   ∎

3. Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $(1/n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Notons $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n$. Soit $a > 0$. Toujours d'après le critère spéciale,

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, +\infty[,\ |\mathrm{R}_n(x)| \leq f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(a)$$

   Par conséquent,

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \|\mathrm{R}_n\|_\infty \leq f_{n+1}(a)$$

   Or $\lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(a) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = 0$. La suite (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$ de sorte que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. ∎

4. Soit $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

   Posons $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$.

   - *$\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ (séries de Riemann).*
   - *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et*

     $$\forall x \in]1, +\infty[,\ f_n'(x) = -\frac{\ln n}{n^x}$$

   - *Soit $a > 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{\ln n}{n^a}$. Or pour $\gamma \in]0, 1[$, $\dfrac{\ln n}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$. Or $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ est une série à termes positifs convergente donc $\sum \|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge. On en déduit que $\sum f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.*

   Les points précédents montrent que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]1, +\infty[$. De plus,

   $$\forall x \in]1, +\infty[,\ \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$

   ∎