Endomorphismes d'un espace euclidien

Produits scalaires

Solution 1

Supposons que $\|\cdot\|$ soit une norme euclidienne associée à un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Alors

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2,\ \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2+\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

Supposons que $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme. Posons alors

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2,\ \langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$

Alors, pour tout $x\in\mathrm{E}$, on obtient par homogénéité de la norme :

$$\langle x,x\rangle=\frac{1}{4}\left(\|2x\|^2-\|0_{\mathrm{E}}\|^2\right)=\|x\|^2$$

Vérifions maintenant que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire.
Soit $x\in\mathrm{E}$. Alors $\langle x,x\rangle=\|x\|^2\geq 0$ et, si $\langle x,x\rangle=0$, alors $x=0_{\mathrm{E}}$ par séparation. Ainsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive.
De plus, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
Soit $(x,y,z)\in\mathrm{E}^3$. On applique quatre fois l'identité du parallélogramme :

$$\|x+z+y\|^2+\|x+z-y\|^2=2\|x+z\|^2+2\|y\|^2 \tag{1}$$
$$\|x-z+y\|^2+\|x-z-y\|^2=2\|x-z\|^2+2\|y\|^2 \tag{2}$$
$$\|y+z+x\|^2+\|y+z-x\|^2=2\|y+z\|^2+2\|x\|^2 \tag{3}$$
$$\|y-z+x\|^2+\|y-z-x\|^2=2\|y-z\|^2+2\|x\|^2 \tag{4}$$

En effectuant $(1)-(2)+(3)-(4)$ et en remarquant que $\|x+z-y\|=\|y-z-x\|$ et $\|x-z-y\|=\|y+z-x\|$, on obtient

$$2\|x+z+y\|^2-2\|x-z+y\|^2=2\|x+z\|^2-2\|x-z\|^2+2\|y+z\|^2-2\|y-z\|^2$$

puis en divisant par 8,

$$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$$

Soit $(x,y)\in\mathrm{E}^2$. L'égalité précédente permet de montrer que

$$\forall m\in\mathbb{Z},\ \langle mx,y\rangle=m\langle x,y\rangle$$

Soit alors $r\in\mathbb{Q}$. Il existe alors $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $r=\dfrac{m}{n}$. Alors

$$n\langle rx,y\rangle=\langle rnx,y\rangle=\langle mx,y\rangle=m\langle x,y\rangle$$

puis

$$\forall r\in\mathbb{Q},\ \langle rx,y\rangle=r\langle x,y\rangle$$

Par continuité de la norme, l'application $x\in\mathrm{E}\mapsto\langle x,y\rangle=\dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$ est continue. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$$

L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc linéaire à gauche puis bilinéaire par symétrie.
Finalement, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire et la norme $\|\cdot\|$ est bien euclidienne.

Bases orthonormales

Solution 2

1. Soit u l'endomorphisme de E tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. u transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe donc u est une isométrie vectorielle directe donc $\det(u) = 1$. Or $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

2. On a $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}}$. Donc $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}$.

   > **Remarque.** On en déduit que le déterminant dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base. Le déterminant de n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans une base orthonormée quelconque s'appelle le *produit mixte* de ces vecteurs et est noté $[x_1, \dots, x_n]$.

3. Cette application est linéaire car le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses variables et notamment par rapport à la dernière. De plus, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est donc une forme linéaire.

4. C'est tout simplement le théorème de Riesz.

5. Démontrons simplement la linéarité par rapport à la première variable. Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathrm{E}$, $x_1' \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1 + \mu x_1', x_2, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu \det_{\mathcal{B}}(x_1', x_2, \dots, x_n)$$

Notons $u = (\lambda x_1 + \mu x_1') \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$, $v = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ et $w = x_1' \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$. Ainsi pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle u, x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \mu \langle w, x \rangle$ i.e. $\langle u - (\lambda v + \mu w), x \rangle = 0$. Donc $u - (\lambda v + \mu w) \in \mathrm{E}^{\perp} = \{0\}$. On a donc $u = \lambda v + \mu w$, ce qui prouve bien la linéarité par rapport à la première variable. La linéarité par rapport aux autres variables se traite de la même manière.
Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathrm{E}$ tels que deux vecteurs parmi ceux-ci soient égaux. On a donc $\det(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ puisque le déterminant est une forme multilinéaire alternée. Ceci signifie que $\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}, x \rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Ainsi $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = 0$. L'application de l'énoncé est bien alternée.

Solution 3

1. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire puisque la dérivation et l'évaluation en a sont linéaires. Elle est évidemment positive. Soit enfin $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P} \rangle = 0$. On a donc $\mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \cdots = \mathrm{P}^{(n)}(a) = 0$. Ainsi a est une racine d'ordre au moins $n+1$ de P et $\deg \mathrm{P} \leq n$ donc $\mathrm{P} = 0$.

2. La famille $\left((\mathrm{X} - a)^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est clairement orthonormée. Puisqu'elle contient $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$, c'est une base.

Solution 4

1. En développant $\|x + y\|^2$, on prouve sans peine que

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

et l'on en déduit que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \langle y \mid e_i \rangle$$

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Posons

$$z = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i$$

On a

$$\begin{aligned}
\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle z \mid e_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i \mid e_k \right\rangle^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(\langle x \mid e_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \langle e_k \mid e_i \rangle \right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\langle x \mid e_k \rangle - \langle x \mid e_k \rangle)^2 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi $z = 0$.

3. D'après la question précédente, la famille $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est génératrice de E. Comme $n = \dim(\mathrm{E})$, cette famille est une base de E. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$e_k = \sum_{i=1}^{n} \langle e_k \mid e_i \rangle e_i$$

Ainsi, par identification des coordonées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$,

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \langle e_k \mid e_i \rangle = \delta_{k,i}$$

Comme cela est valable pour tout $1 \leq k \leq n$, on en déduit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Solution 5

Notons p_n le projecteur orthogonal sur $\mathrm{vect}(e_0, \dots, e_n)$. Soit $x \in \mathrm{E}$. On sait alors que $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$. D'après le théorème de Pythagore, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|^2 = \|p_n(x)\|^2 + \|x - p_n(x)\|^2$$

D'une part,

$$\|x - p_n(x)\|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et d'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|p_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x \rangle^2$$

Par passage à la limite

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle e_k, x \rangle^2$$

Solution 6

Le candidat averti aura bien entendu les polynômes de Tchebychev.

1. On va montrer par récurrence double que P_n est de degré n. On a bien $\deg \mathrm{P}_0 = 0$ et $\deg \mathrm{P}_1 = \mathrm{X}$. Supposons que $\deg \mathrm{P}_n = n$ et $\deg \mathrm{P}_{n+1} = n+1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $\deg 2\mathrm{XP}_{n+1} = n+2 > \deg \mathrm{P}_n = n$ donc $\deg \mathrm{P}_{n+2} = \max(\deg 2\mathrm{XP}_{n+1}, \deg \mathrm{P}_n) = n+2$. Par récurrence double, $\deg \mathrm{P}_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Notons c_n le coefficient dominant de P_n. En identifiant les coefficients de X^{n+2} dans la relation $\mathrm{P}_{n+2} = 2\mathrm{XP}_{n+1} - \mathrm{P}_n$, on obtient $c_{n+2} = 2c_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $c_{n+1} = 2c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (c_n) est donc géométrique à partir du rang 1. Puisque $c_1 = 1$, on a donc $c_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le terme dominant de P_n est donc 1 si $n = 0$ et $2^{n-1}\mathrm{X}^n$ sinon.

2. Fixons $\theta \in \mathbb{R}$. On procède à nouveau par récurrence double. Il est clair que $\mathrm{P}_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0\cdot\theta)$ et que $\mathrm{P}_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1\cdot\theta)$. Supposons que $\mathrm{P}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ et $\mathrm{P}_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1\theta)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos(\theta)\mathrm{P}_{n+1}(\cos\theta) - \mathrm{P}_n(\cos\theta) \\
&= 2\cos(\theta)\cos(n+1\theta) - \cos(n\theta) \\
&= \cos((n+1)\theta - \theta) + \cos((n+1)\theta + \theta) - \cos(n\theta) \qquad &= \cos((n+2)\theta)
\end{aligned}$$

Par récurrence double, $\mathrm{P}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Tout d'abord, $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue (par morceaux) sur $]-1,1[$. Remarquons que PQ est continue en -1 et 1 donc bornée au voisinage de -1 et 1. De plus, $\sqrt{1-t^2} = (1-t)^{1/2}\cdot(1+t)^{1/2}$ donc

$$\sqrt{1-t^2} \underset{t\to1^-}{\sim} \sqrt{2}(1-t)^{1/2}$$
$$\sqrt{(1-t^2)} = \underset{t\to-1^+}{\sim} \sqrt{2}(1+t)^{1/2}$$

puis

$$f(t) \underset{t\to1^-}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)$$
$$f(t) \underset{t\to-1^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(1+t)^{1/2}}\right)$$

Comme $1/2 < 1$, f est intégrable au voisinage de -1 et 1. L'intégrale définissant $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle$ est donc convergente.

4. Symétrie L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_k[X]^2,\ \langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$$

Bilinéarité Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\forall (P, Q, R) \in \mathbb{R}_k[X]^3,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \langle P, \lambda Q + \mu R\rangle &= \int_{-1}^{1} (\lambda P + \mu R)(t) Q(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt + \mu \int_{-1}^{1} R(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \\ &= \lambda\langle P, Q\rangle + \mu\langle P, R\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

Positivité Par positivité de l'intégrale,

$$\forall P \in \mathbb{R}_k[X],\ \langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \geq 0$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive.

Caractère défini Enfin soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$. Comme l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[-1, 1]$ et positive sur $]-1, 1[$, elle est nulle sur $]-1, 1[$. Ainsi P possède une infinité de racines : c'est le polynôme nul.

Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$.

5. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.Par formule de linéarisation

$$I_{m,n} = \int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((m-n)\theta)\ d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((m+n)\theta)\ d\theta$$

Si $m = n = 0$, $I_{0,0} = \pi$. Si $m = n \neq 0$, $I_{n,n} = \dfrac{\pi}{2}$. Si $m \neq n$, $I_{m,n} = 0$.

6. En effectuant le changement de variable $t = \cos\theta$ (cos effectue une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$),

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_{\pi}^{0} \frac{P(\cos\theta)Q(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \sin\theta\ d\theta = \int_0^{\pi} \frac{P(\cos\theta)Q(\cos\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta}}\sin\theta\ d\theta = \int_0^{\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\ d\theta$$

car sin est positive sur $]0, \pi[$.

Notamment, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\langle P_m, P_n\rangle = I_{m,n}$. Une base orthonormée $(Q_0, \dots, Q_k)$ de $\mathbb{R}_k[X]$ est donc donnée par $Q_0 = \dfrac{P_0}{\sqrt{\pi}}$ et $Q_n = \dfrac{P_n}{\sqrt{\pi/2}}$ pour $n \in [\![1, k]\!]$. En effet, pour tout $n \in [\![0, k]\!]$, $\deg Q_n = \deg P_n = n \leq k$ donc $Q_n \in \mathbb{R}_k[X]$. De plus, $\langle Q_m, Q_n\rangle = \delta_{m,n}$ donc $(Q_0, \dots, Q_k)$ est une famille orthonormée (et a fortiori libre) de $\mathbb{R}_k[X]$. Puisque $\dim \mathbb{R}_k[X] = k + 1$, c'est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

Sous-espaces orthogonaux

Solution 7

s est clairement linéaire et $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc s est une symétrie. Soit $S \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $A \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi $S^\top = S$ et $A^\top = -A$. Par conséquent $\langle S, A\rangle = \mathrm{tr}(S^\top A) = \mathrm{tr}(SA)$ et $\langle A, S\rangle = \mathrm{tr}(A^\top S) = -\mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(SA)$. Donc $\langle S, A\rangle = 0$. Ceci signifie que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ sont orthogonaux l'un à l'autre : s est une symétrie orthogonale.

Solution 8

1. Supposons $F \subset G$. Soit $x \in G^\perp$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de G et a fortiori de F donc $x \in F^\perp$. Ainsi $G^\perp \subset F^\perp$.
Supposons F et G de dimension finie et $G^\perp \subset F^\perp$. D'après ce qui précède, $(F^\perp)^\perp \subset (G^\perp)^\perp$. Mais F et G étant de dimension finie, $(F^\perp)^\perp = F$ et $(G^\perp)^\perp = G$.

2. On sait que $F \subset F + G$ donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ d'après la question précédente. De même, $G \subset F + G$ donc $(F+G)^\perp \subset G^\perp$. Ainsi $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $y \in F + G$. Il existe donc $(u, v) \in F \times G$ tel que $y = u + v$. Alors $\langle x, y\rangle = \langle x, u\rangle + \langle x, v\rangle$. Or $x \in F^\perp$ et $u \in F$ donc $\langle x, u\rangle = 0$. De même, $x \in G^\perp$ et $v \in G$ donc $\langle x, v\rangle = 0$. Ainsi $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in F + G$, $x \in (F+G)^\perp$. D'où $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.
Par double inclusion, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

3. $F \cap G \subset F$ donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ d'après la première question. De même, $F \cap G \subset G$ donc $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. On en déduit que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
Supposons E de dimension finie. Alors

$$\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$$

Or d'après la question précédente, $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$ donc

$$\begin{aligned}\dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F+G)^\perp \\ &= (\dim E - \dim F) + (\dim E - \dim G) - (\dim E - \dim(F+G)) \\ &= \dim E - (\dim F + \dim G - \dim(F+G)) \\ &= \dim E - \dim(F \cap G) = \dim(F \cap G)^\perp\end{aligned}$$

Puisqu'on a précédemment montré que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, on peut conclure que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Solution 9

---

1. Remarquons que pour tout $y \in E$, la forme linéaire $\varphi_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in E,\ |\varphi_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

de sorte que φ_y est continue d'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

2. On peut remarquer que

$$F = \{x \in E,\ \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\} = \bigcap_{y \in F} \varphi_y^{-1}(\{0_E\})$$

Pour tout $y \in E$, $\varphi_y^{-1}(\{0_E\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé (le sous-espace nul) par une application continue. Par conséquent, F est fermé comme intersection de fermés.
On peut aussi utiliser la caractérisation séquentielle des fermés si l'on préfère. Soit (x_n) une suite d'éléments de $F^\perp$ convergeant vers $x \in E$. Fixons $y \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_y(x_n) = \langle x_n, y\rangle = 0$. Par continuité de φ_y, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_y(x_n) = \varphi_y(x)$. Par unicité de la limite, $\langle x, y\rangle = \varphi_y(x) = 0$. Ceci étant valable pour tout $y \in F$, $x \in F^\perp$. Ainsi $F^\perp$ est fermé par caractérisation séquentielle de la limite.

3. On sait que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Or $(F^\perp)^\perp$ est fermé en applquant la question précédente à $F^\perp$. On sait que $\overline{F}$ est le plus grand fermé contenant F. Ainsi $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Projection orthogonale

Solution 10

Notons p la projection orthogonale sur $\text{vect}(u)$ et P sa matrice dans $\mathcal{B}$. Comme (u) est une base orthonormale de $\text{vect}(u)$, on a, pour $x \in E$, $p(x) = \langle x, u\rangle u$. Notons X le vecteur colonne associé à un vecteur x de E. On a $PX = (U^\top X)U = U(U^\top X) = UU^\top X$. La matrice de P dans $\mathcal{B}$ est donc UU^t.

Solution 11

---

1. Notons p_u le projecteur orthogonal sur vect(u). Remarquons que $p_u(e_i) = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, e_i \right\rangle \frac{u}{\|u\|}$. Ainsi $\|p_u(e_i)\| = \frac{|\langle u, e_i\rangle|}{\|u\|}$. Posons alors $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{\|e_i\|^2}$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est orthogonale, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\langle u, e_k\rangle = 1$. Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|p_u(e_k) = \frac{1}{\|u\|}$. Les projetés orthogonaux de $e_1, \dots, e_n$ sur vect(u) ont donc toute la même norme.

2. Soit u un vecteur répondant aux conditions de l'énoncé. Notons N la norme commune des vecteurs $p_u(e_1), \dots, p_u(e_n)$. On a donc $\mathrm{N} = \frac{|\langle e_i, u\rangle|}{\|u\|}$ pour $1 \leq i \leq n$.

   Comme la base $\left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right)_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormale, on a :

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle e_i, u\rangle^2}{\|e_i\|^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{N}^2\|u\|^2}{\|e_i\|^2}$$

   Comme u est non nul, on obtient :

$$\mathrm{N} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|e_i\|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

   Ceci prouve que N est indépendante de u et nous donne bien une expression de N en fonction de $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$.

Solution 12

- Prouvons que **1.** ⇒ **2.**

  Lorsque p est une projection orthogonale de E, on a $\mathrm{Im}(id_{\mathrm{E}} - p) = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$ donc, pour tout x et y dans E, $p(x) \perp y - p(y)$ ie

$$\langle p(x)|y\rangle = \langle p(x)|p(y)\rangle.$$

  Cette expression étant symétrique en (x, y), on a

$$\begin{aligned}\langle p(x)|y\rangle = \langle p(x)|p(y)\rangle = \langle p(y)|p(x)\rangle &= \langle p(y)|x\rangle \\ &= \langle x|p(y)\rangle\end{aligned}$$

- Prouvons que **2.** ⇒ **3.**

  Soit x dans E. Appliquons le **2.** à x et $y = p(x)$. On a

$$\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|p(x)\rangle = \langle x|p(x)\rangle.$$

  ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\| \cdot \|p(x)\|.$$

  Si $p(x) = 0$, l'inégalité **3.** est banalement vérifiée. Si $p(x) \neq 0$, $\|p(x)\| > 0$ et en divisant membre à membre l'inégalité précédente, on aboutit à

$$\|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

- Prouvons que **3.** ⇒ **1.**

  Soient $x \in \mathrm{Im}\, p$, $y \in \mathrm{Ker}\, p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $y = 0$, alors $x \perp y$.
  Supposons maintenant $y \neq 0$. D'une part,

$$\|p(x + \lambda y)\|^2 = \|x\|^2$$

  et d'autre part,

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

  D'après **2.**, $2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Le discriminant de ce trinôme du second degré en λ est donc négatif, ce qui impose $\langle x|y\rangle^2 \leq 0$ et donc $\langle x|y\rangle = 0$. On a donc $x \perp y$. On en déduit que $\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$ et donc que p est une projection orthogonale.

Solution 13

1. Soient $x \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)$ et $y \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u)$. Alors $u(x) = x$ et il existe $a \in E$ tel que $y = a - u(a)$. Ainsi
$$\langle x, y\rangle = \langle x, a - u(a)\rangle = \langle x, a\rangle - \langle x, u(a) = \langle x, a\rangle - \langle u(x), u(a)\rangle = 0$$
car u conserve le produit scalaire. Ainsi $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)$ et $\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u)$ sont orthogonaux. On conclut grâce au théorème du rang.

2. D'après la question précédente, il existe $y \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)$ et $a \in E$ tel que $x = y + a - u(a)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = y + u^k(a) - u^{k+1}(a)$. Par télescopage, $x_n = y + \frac{1}{n}(a - u^n(a))$. On a alors
$$\|x_n - y\| \leq \frac{\|a\| + \|u^n(a)\|}{n} = \frac{2\|a\|}{n}$$
car u^n conserve la norme. En passant à la limite, on obtient que (x_n) converge vers y qui est justement la projection de x sur $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)$ parallélement à $\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u)$.

Solution 14

1. Tout d'abord, pour $(P, Q) \in E^2$, $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ par croissances comparées donc $\langle P, Q\rangle$ est bien défini. La bilinéarité et la positivité sont évidentes. Soit enfin $P \in E$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$. Comme $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}_+$, cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi P admet une infinité de racines puis $P = 0$.

2. Notons I_n l'intégrale à calculer. Par intégration par parties, $I_n = nI_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Or $I_0 = 1$ donc $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On orthonormalise la base $(1, X, X^2)$ de F via le procédé de Gram-Schmidt. On pose
$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\|1\|} = 1\\
P_1 &= \frac{X - \langle P_0, X\rangle P_0}{\sqrt{\|X\|^2 - \langle P_0, X\rangle^2}} = \frac{X - I_1P_0}{\sqrt{I_2 - I_1^2}} = X - 1\\
P_2 &= \frac{X^2 - \langle P_0, X^2\rangle P_0 - \langle P_1, X^2\rangle P_1}{\sqrt{\|X^2\|^2 - \langle P_0, X^2\rangle^2 - \langle P_1, X^2\rangle^2}} = \frac{X^2 - I_2P_0 - (I_3 - I_2)P_1}{\sqrt{I_4 - I_2^2 - (I_3 - I_2)^2}} = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1
\end{aligned}$$
Alors (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormée de F.

4. Comme (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormée de F, le projeté orthogonal de X^3 sur F est
$$\langle P_0, X^3\rangle P_0 + \langle P_1, X^3\rangle P_1 + \langle P_2, X^3\rangle P_2 = I_3P_0 + (I_4 - I_3)P_1 + (I_5/2 - 2I_4 + I_3)P_2 = 9X^2 - 18X + 6$$

5. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left|\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt\right| = |\langle P, 1\rangle| \leq \|P\|\|1\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\,dt}$$

Solution 15

1. L'image de M est clairement engendrées par les deux premières colonnes de M qui sont linéairement indépendantes. Ainsi $\operatorname{rg}(M) = 2$.

2. D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} M = 2$. Ainsi 0 est valeur propre de M est la dimension du sous-espace propre associé est $n - 2$. Il est engendré par les $E_2 - E_i$ pour $3 \leq i \leq n$ où $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Le calcul (laborieux) du polynôme caractéristique donne $\chi_M = X^n - (n-1)X^{n-2}$. Ainsi M possède deux valeurs propres supplémentaires

qui sont $\pm\sqrt{n-1}$. On aurait aussi pu remarquer que $M^3 = (n-1)M$. Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\sqrt{n-1}$ et $-\sqrt{n-1}$ sont respectivement engendrés par $U = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Notons u et v les vecteurs canoniquement associés à U et V. Puisque $\pm\sqrt{n-1}$ sont les seules valeurs propres non nulles de f, il est clair que $\operatorname{Im} f$ est engendré par u et v. Remarquons que u et v sont orthogonaux (ce qui est normal puisque M est symétrique). En notant p le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} f$, on a donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(x) = \frac{\langle u, x\rangle}{\|u\|^2}u + \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v$$

Comme $\|u\|^2 = \|v\|^2 = 2(n-1)$, on obtient en notant P la matrice de p dans la base canonique,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ PX = \frac{1}{2n-2}\left((U^\top X)U + (V^\top X)V\right) = \frac{1}{2n-2}\left(UU^\top X + VV^\top X\right)$$

car $U^\top X$ et $V^\top X$ sont des scalaires. On en déduit que

$$P = \frac{1}{2n-2}\left(UU^\top + VV^\top\right) = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 16

---

1. L'application $(\cdot \mid \cdot)$ est clairement symétrique. Elle est également bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Pour $f \in E$, $(f \mid f) = \int_{-1}^{1} f(t)^2 \,\mathrm{d}t \geq 0$ par positivité de l'intégrale. De plus, si cette dernière intégrale est nulle, alors f^2 est nulle car elle est positive et continue sur $[-1, 1]$. Ainsi $(\cdot \mid \cdot)$ est définie positive. C'est donc un produit scalaire.

2. On note $\|\dot\|$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. Remarquons que $(u \mid v) = 0$ car uv est impaire. Ainsi $(u/\|u\|, v/\|v\|)$ est une base orthonormée de F. On calcule $\|u\|^2 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t = 2$ et $\|v\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$.

3. Le projeté orthogonal de w sur F est donc

$$p = \frac{(w \mid u)}{\|u\|^2}u + \frac{(w \mid v)}{\|v\|^2}v$$

Or

$$(w \mid u) = \int_{-1}^{1} e^t \,\mathrm{d}t = e^1 - e^{-1}$$

$$(w \mid v) = \int_{-1}^{1} te^t \,\mathrm{d}t = \left[te^t\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^t \,\mathrm{d}t = 2e^{-1}$$

Ainsi p est la fonction

$$t \mapsto \frac{e^1 - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}t$$

Le réel recherché est également

$$\inf_{f\in F} \|w - f\|^2 = d(w, F)^2$$

Or on sait d'après le cours que

$$d(w, F)^2 = \|w - p\|^2$$

Mais comme $p \perp w - p$, le théorème de Pythagore donne

$$d(w, \mathrm{F})^2 = \|w\|^2 - \|p\|^2$$

De plus,

$$p = \frac{(w \mid u)}{\|u\|^2} u + \frac{(w \mid v)}{\|v\|^2} v$$

et $u \perp v$ donc le théorème de Pythagore donne

$$\|p\|^2 = \frac{(w \mid u)^2}{\|u\|^2} + \frac{(w \mid v)^2}{\|v\|^2} = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})^2 + 6e^{-2} = \frac{1}{2}e^2 - 1 + \frac{13}{2}e^{-2}$$

Enfin

$$\|w\|^2 = \int_{-1}^{1} e^{2t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2})$$

puis

$$d(w, \mathrm{F})^2 = 1 - 7e^{-2}$$

Solution 17

---

1. Supposons que f soit un projecteur orthogonal. Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors $f(x)$ et $x - f(x)$ sont orthogonaux donc, d'après le théorème de Pythagore,
$$\|x\|^2 = \|f(x) + (x - f(x))\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|x - f(x)\|^2 \geq \|f(x)\|^2$$
Ainsi $\|f(x)\| \leq \|x\|$.
Réciproquement, supposons que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Soit alors $(x, y) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = y$ donc
$$\|y\|^2 = \|f(\lambda x + y)\|^2 \leq \|lax + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$
puis
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(\lambda) = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle \geq 0$$
Si $x = 0_{\mathrm{E}}$, alors $x \perp y$ et sinon, P est un trinôme du second degré de signe constant donc son discriminant est négatif. Ainsi $4\langle x, y\rangle^2 \leq 0$ puis $\langle x, y\rangle = 0$ et $x \perp y$ à nouveau. Ainsi $\operatorname{Ker} f \perp \operatorname{Im} f$ et f est un projecteur orthogonal.

2. Comme p et q sont des projecteurs orthogonaux,
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|p \circ q(x)\| \leq \|q(x)\| \leq \|x\|$$
Or $p \circ q$ est un projecteur donc c'est un projecteur orthogonal. On rappelle que tout projecteur orthogonal est auto-adjoint. Ainsi $(p \circ q)^* = p \circ q$ i.e. $q^* \circ p^* = p \circ q$ et enfin $q \circ p = p \circ q$.

Optimisation

Solution 18

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^{\pi} f(x)g(x)\, \mathrm{d}x$.On pose pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{a,b} : \left\{ \begin{array}{rcl} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx \end{array} \right.$$

et

$$\mathrm{F} = \left\{ f_{a,b},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{vect}(f_1, f_2)$$

avec $f_1 = f_{0,1}$ et $f_2 = f_{1,0}$. F est un sous-espace vectoriel de E et $\phi(a, b) = \|\sin - f_{a,b}\|^2$. Le minimum de ϕ est donc atteint quand $f_{a,b}$ est la projection orthogonale de sin sur F et vaut alors $d(x, \mathrm{F})^2 = \|\sin - p_{\mathrm{F}}(\sin)\|^2$ où p_{F} est la projection orthogonale sur F.

Première méthode

On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour orthonormaliser la famille (f_1, f_2). On pose donc $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ et $e_2 = \frac{g}{\|g\|}$ avec $g = f_2 - \langle f_2, e_1\rangle e_1$. Alors $p_F(\sin) = \langle \sin, e_1\rangle e_1 + \langle \sin, e_2\rangle e_2$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
\|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\
&= \|\sin\|^2 - \langle \sin, e_1\rangle^2 - \langle \sin, e_2\rangle^2 \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\langle \sin, g\rangle^2}{\|g\|^2} \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{(\langle \sin, f_2\rangle - \langle f_2, e_1\rangle\langle \sin, e_1\rangle)^2}{\|f_2\|^2 - \langle f_2, e_1\rangle^2} \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\left(\langle \sin, f_2\rangle - \frac{\langle f_2, f_1\rangle\langle \sin, f_1\rangle}{\|f_1\|^2}\right)^2}{\|f_2\|^2 - \frac{\langle f_2, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2}} \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\left(\|f_1\|^2\langle \sin, f_2\rangle - \langle f_2, f_1\rangle\langle \sin, f_1\rangle\right)^2}{\|f_1\|^2\left(\|f_1\|^2\|f_2\|^2 - \langle f_2, f_1\rangle^2\right)}
\end{aligned}$$

A l'aide éventuellement d'intégrations par parties, on trouve

$$\|\sin\|^2 = \frac{\pi}{2} \qquad \|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3} \qquad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5} \qquad \langle f_1, f_2\rangle = \frac{\pi^4}{4} \qquad \langle \sin, f_1\rangle = \pi \qquad \langle \sin, f_2\rangle = \pi^2 - 4$$

On trouve finalement

$$\min_{\mathbb{R}^2} \phi = d(x, F)^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$$

Seconde méthode

On sait qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_F(\sin) = af_2 + bf_1$. De plus, $\sin - p_F(\sin) \in F^\perp = \operatorname{vect}(f_1, f_2)^\perp$ donc

$$\begin{cases} \langle \sin - p_F(\sin), f_1\rangle = 0 \\ \langle \sin - p_F(\sin), f_2\rangle = 0 \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} a\langle f_2, f_1\rangle + b\|f_1\|^2 = \langle \sin, f_1\rangle \\ a\|f_2\|^2 + b\langle f_1, f_2\rangle = \langle \sin, f_2\rangle \end{cases}$$

Or on a trouvé précédemment que

$$\|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3} \qquad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5} \qquad \langle f_1, f_2\rangle = \frac{\pi^4}{4} \qquad \langle \sin, f_1\rangle = \pi \qquad \langle \sin, f_2\rangle = \pi^2 - 4$$

Ainsi

$$\begin{cases} \frac{\pi^4}{4}a + \frac{\pi^3}{3}b = \pi \\ \frac{\pi^5}{5}a + \frac{\pi^4}{4}b = \pi^2 - 4 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5} \qquad b = -\frac{12}{\pi^2} + \frac{240}{\pi^4}$$

A nouveau en vertu du théorème de Pythagore

$$\begin{aligned}
\|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\
&= \|\sin\|^2 - \|af_2 + bf_1\|^2 \\
&= \|\sin\|^2 - a^2\|f_2\|^2 - 2ab\langle f_1, f_2\rangle - b^2\|f_1\|^2 \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}
\end{aligned}$$

Solution 19

1. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle admet une borne inférieure.

2. Si $(\mathcal{S})$ admet une solution, alors $K = 0$. Les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont donc les éléments X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\|AX - B\|^2 = 0$ i.e. tels que $AX - B = 0$. Ce sont donc les solutions de $(\mathcal{S})$.

3. **Première méthode**
   Puisque $\{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} = \operatorname{Im} A$, on peut affirmer que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si AX est la projection de B sur Im A. Or AX est la projection de B sur Im A si et seulement si $AX - B$ est orthogonal à Im A. Or $AX - B$ est orthogonal à Im A si et seulement si il est orthogonal à chaque colonne de A puisque les colonnes de A engendrent Im A. Ainsi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $A^\top(AX - B) = 0$ i.e. si et seulement si X est solution de $(\mathcal{S}')$.
   Seconde méthode
   Supposons que X soit solution de $(\mathcal{S}')$ i.e. $A^\top(AX - B) = 0$. Alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\|AY - B\|^2 &= \|A(Y - X) + AX - B\|^2\\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2\langle A(Y - X), AX - B\rangle\\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2(Y - X)^\top A^\top(AX - B)\\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2\end{aligned}$$

   Ainsi X est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$.
   Supposons que X soit pseudo-solution de $(\mathcal{S})$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|A(X + \lambda Y) - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

   ou encore

$$\|(AX - B) + \lambda AY\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

   ce qui donne via une identité remarquable

$$2\lambda\langle AY, AX - B\rangle + \lambda^2\|AY\|^2 \geq 0$$

   Si on fixe Y, la dernière inégalité étant vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $\langle AY, AX - B\rangle = 0$. Ainsi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AY, AX - B\rangle = 0$ ou encore $\langle Y, A^\top(AX - B) = 0$, ce qui prouve que $A^\top(AX - B) = 0$ et que X est solution de $(\mathcal{S}')$.

4. Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. On a donc $AX = 0$ puis $A^\top AX = 0$ donc $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. Ainsi $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^\top A$.
   Soit maintenant $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. On a donc $A^\top AX = 0$ puis $X^\top A^\top AX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi $Y^\top Y = 0$ i.e. $\|Y\|^2 = 0$ donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$. D'où $X \in \operatorname{Ker} A$. Ainsi $\operatorname{Ker} A^\top A \subset \operatorname{Ker} A$.
   Finalement, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^\top A$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top A$ via le théorème du rang.

5. Si $\operatorname{rg}(A) = n$, alors $\operatorname{rg}(A^\top A) = n$. La matrice $A^\top A$ est une matrice carrée de taille n et de rang n le système $(\mathcal{S}')$ est donc de Cramer : il admet une unique solution i.e. $(\mathcal{S})$ admet une unique pseudo-solution.

Solution 20

Comme E est ouvert, un minimum de f est forcément un minimum local et donc un point critique. Pour $x \in E$, $\nabla f(x) = 2\sum_{i=1}^{p}(x - x_i)$.
L'unique point critique de f sur E est donc $m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i$. Il suffit donc de vérifier que m est bien un minimum : il sera nécessairement unique.
Pour $x \in E$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{i=1}^{p} \|x - m + m - x_i\|^2\\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i\rangle + \|m - x_i\|^2\right)\\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^{p} m - x_i\right\rangle\\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m)\end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{p} m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m.

Solution 21

Pour $x \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{p} \|x - m + m - x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i\rangle + \|m - x_i\|^2\right) \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^{p} m - x_i \right\rangle \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m) \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{p} m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m.

Solution 22

1. Remarquons que l'intégrale définissant $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle$ est bien définie car $\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} o(1/t^2)$.

(i) $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est clairement symétrique.

(ii) $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale.

(iii) $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est positive par positivité de l'intégrale.

(iv) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle = 0$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$. Comme $t \mapsto \mathrm{P}(t)e^{-t^2}$ est continue, elle est nulle sur $]-\infty, +\infty[$. Par conséquent, P admet une infinité de racines (tous les réels) puis $\mathrm{P} = 0$.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2. Remarquons que $t \mapsto t^{2n+1}e^{-t^2}$ est impaire donc $\mathrm{A}_{2n+1} = 0$.
Par intégration par parties

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{n+1} \left[t^{n+1}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \right)$$

L'intégration par parties est légitimée par le fait que $\lim_{t\to\pm\infty} t^{n+1}e^{-t^2} = 0$. On en déduit que

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$$

ou encore

$$\mathrm{A}_{n+2} = \frac{n+1}{2}\mathrm{A}_n$$

Comme $\mathrm{A}_0 = 1$, on en déduit que

$$\mathrm{A}_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

3. On peut orthonormaliser la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ via le processus de Gram-Schmidt.

> **Remarque.** Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace euclidien E, on peut l'orthonormaliser en une base orthonormée en posant
>
> $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f_k = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1}\langle f_i, e_k\rangle f_i}{\left\|e_k - \sum_{i=0}^{k-1}\langle f_i, e_k\rangle f_i\right\|} = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1}\langle f_i, e_k\rangle f_i}{\sqrt{\|e_k\|^2 - \sum_{i=0}^{k-1}\langle f_i, e_k\rangle^2}}$$

(i) $\|1\|^2 = A_0 = 1$ donc on pose $P_0 = 1$.

(ii) $\langle 1, X\rangle = A_1 = 0$ et $\|X\|^2 = A_2 = \frac{1}{2}$ donc on pose $P_1 = X\sqrt{2}$.

(iii) $\langle 1, X^2\rangle = A_2 = \frac{1}{2}$, $\langle X, X^2\rangle = A_3 = 0$ et $\|X^2\|^2 = A_4 = \frac{3}{4}$ donc on pose $P_2 = \frac{2(2X^2-1)}{\sqrt{5}}$.

(P_0, P_1, P_2) est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Si p désigne le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_2[X]$,

$$
\begin{aligned}
d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 &= \|X^3 - p(X^3)\|^2 \\
&= \|X^3\|^2 - \|p(X^3)\|^2 \\
&= \|X^3\|^2 - \langle X^3, P_0\rangle^2 - \langle X^3, P_1\rangle^2 - \langle X^3, P_2\rangle^2 \\
&= A_6 - A_3^2 - 2A_4 \qquad \text{car } X^3P_2 \text{ est impair} \\
&= \frac{15}{8} - \frac{3}{2} = \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

donc $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Solution 23

1. On vérifie que $s \in : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$ est une symétrie auto-adjointe. Ses sous-espaces propres, à savoir $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc supplémentaires et orthogonaux.

2. On remarque que $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R})^\perp$,

$$d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \|A\| = \sqrt{12}$$

3. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle (la trace) : c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i.e. un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

4. On remarque que I_n est un vecteur normal à H. Ainsi

$$d(M, H) = \frac{|\langle I_n, M\rangle|}{\|I_n\|} = \frac{|\operatorname{tr}(M)|}{\sqrt{n}}$$

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Solution 24

- Si $H = K$ alors $s_H = s_K$ et s_H et s_K commutent évidemment.
- Si $H^\perp \subset K$, alors on a également $K^\perp \subset H$. Soient $a, b \in E$ tels que $H = \operatorname{vect}(a)^\perp$ et $K = \operatorname{vect}(b)^\perp$. On a donc $a \in K$ et $b \in H$. De plus, a et b sont orthogonaux. Enfin, $(H \cap K)^\perp = H^\perp + K^\perp = \operatorname{vect}(a) \oplus \operatorname{vect}(b)$. Soit $x \in E$. Il existe donc $u \in H \cap K$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $x = u + \lambda a + \mu b$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
s_H \circ s_K(x) &= s_H(u + \lambda a - \mu b) = u - \lambda a - \mu b \\
s_K \circ s_H(x) &= s_K(u - \lambda a + \mu b) = u - \lambda a - \mu b
\end{aligned}
$$

  On a bien prouvé que s_H et s_K sommutent.

> **Remarque.** On a même prouvé que $s_H \circ s_K = s_K \circ s_H = s_{H\cap K}$.

- Réciproquement, si s_H et s_K commutent, soit à nouveau a tel que $H = \text{vect}(a)^\perp$. On a donc $s_H(a) = -a$. Par conséquent, $s_H \circ s_K(a) = s_K \circ s_H(a) = -s_K(a)$. Ceci implique que $s_K(a) \in H^\perp = \text{vect}(a)$. Comme s_K est une isométrie, on a $s_K(a) = a$ ou $s_K(a) = -a$. Si $s_K(a) = a$ alors $a \in K$ et donc $H^\perp \subset K$. Si $s_K(a) = -a$ alors $a \in K^\perp$, c'est-à-dire que $K = \text{vect}(a)^\perp = H$.

Solution 25

1. Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de E et f vérifiant la condition de l'énoncé. Alors
$$f(i) = f(j) \wedge f(k) \qquad f(j) = f(k) \wedge f(i) \qquad f(k) = f(i) \wedge f(j)$$
La famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc orthogonale. Par conséquent
$$\begin{aligned}\|f(i)\| &= \|f(j)\|\|f(k)\|\\ \|f(j)\| &= \|f(k)\|\|f(i)\|\\ \|f(k)\| &= \|f(i)\|\|f(j)\|\end{aligned}$$
Si l'un des vecteurs $f(i)$, $f(j)$, $f(k)$ est nul alors ces 3 vecteurs sont nuls et donc $f = 0$. Si les 3 vecteurs sont non nuls, on tire des 3 dernières relations que :
$$\|f(i)\| = \|f(j)\| = \|f(k)\| = 1$$
Comme de plus $f(i) = f(j) \wedge f(k)$, la famille $(f(i), f(j), f(k))$ est une base orthonormée directe. On a donc $f \in SO(E)$. Réciproquement, si $f = 0$ ou $f \in SO(E)$, alors f vérifie bien la condition de l'énoncé puisque les applications $(u, v) \mapsto f(u \wedge v)$ et $(u, v) \mapsto f(u) \wedge f(v)$ sont bilinéaires et que ces deux applications coïncident sur une base orthonormée directe. L'ensemble des endomorphismes recherché est donc $SO(E) \cup \{0\}$.

2. Tout le raisonnement précédent reste valable à l'exception près que $f(i) = -f(j) \wedge f(k)$ et la famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc une base orthonormée indirecte. f est donc soit l'endomorphisme nul soit une isométrie indirecte. L'ensemble recherché est donc $(O(E) \setminus SO(E)) \cup \{0\}$.

Solution 26

Notons P le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. On a $P = \{(3z - 2y, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$. Notons $u_1 = (-2, 1, 0)$ et $u_2 = (3, 0, 1)$. Notons s la symétrie de l'énoncé. On va déterminer les images des vecteurs de la base canonique par s. Un vecteur normal à P est $n = u_1 \wedge u_2 = (1, 2, -3)$. Le projeté orthogonal d'un vecteur u sur $P^\perp = \text{vect}(n)$ est donc $p(u) = \frac{\langle u, n\rangle}{\|n\|^2}n$. On a alors $s(u) = u - 2p(u) = u - 2\frac{\langle u, n\rangle}{\|n\|^2}n$. Il suffit alors d'appliquer à $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On trouve
$$s(e_1) = \frac{1}{7}(6, -2, 3) \qquad s(e_2) = \frac{1}{7}(-2, 3, 6) \qquad s(e_3) = \frac{1}{7}(3, 6, -2)$$
La matrice de s dans la base canonique est donc $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3\\ -2 & 3 & 6\\ 3 & 6 & -2\end{pmatrix}$.

Solution 27

Notons L_1, L_2, L_3 les lignes de A. La matrice A est une matrice de rotation si et seulement si la famille (L_1, L_2, L_3) est orthonormale et si $\det A = 1$.
La condition $\|L_1\| = 1$ équivaut à $a^2 = \frac{1}{6}$ i.e. $a = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.
La condition $\|L_2\| = 1$ équivaut à $b^2 = \frac{2}{3}$ i.e. $b = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}$.
La condition $\|L_3\| = 1$ équivaut à $c^2 = \frac{1}{6}$ i.e. $c = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.

La condition $\langle L_1, L_2\rangle = 0$ équivaut à $ab = -\frac{1}{3}$.
La condition $\langle L_1, L_3\rangle = 0$ équivaut à $ac = \frac{1}{6}$.
La condition $\langle L_2, L_3\rangle = 0$ équivaut à $bc = -\frac{1}{6}$.
La condition $\det A = 1$ équivaut à $-a + 2b - c = \sqrt{6}$.

Toutes ces conditions équivalent à $\begin{cases} a = \varepsilon\frac{1}{\sqrt{6}} \\ b = -\varepsilon\frac{2}{\sqrt{6}} \\ dC = \varepsilon\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -a + 2b - c = \sqrt{6} \\ \varepsilon = \pm 1 \end{cases}$. On trouve $\varepsilon = -1$ puis $a = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $c = -\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Solution 28

1. Soient s une réflexion de E, (u, v) une base de E, et $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice de s dans la base (u, v). Recherchons l'axe de s.

   Les vecteurs de l'axe sont les vecteurs de matrice colonne X dans la base (u, v) vérifiant $AX = X$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors

$$AX = X \iff \begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = x \\ x\sin\theta - y\cos\theta = y \end{cases} \iff \begin{cases} x(\cos\theta - 1) + y\sin\theta = 0 \\ x\sin\theta - y(\cos\theta + 1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -2x\sin^2\frac{\theta}{2} + 2y\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \\ 2x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2y\cos^2\frac{\theta}{2} = 0 \end{cases} \iff x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2} = 0$$

   La dernière équivalence est justifiée par le fait que $\sin\frac{\theta}{2}$ et $\cos\frac{\theta}{2}$ ne peuvent être simultanément nuls. Un vecteur directeur de l'axe est donc $\cos\frac{\theta}{2}u + \sin\frac{\theta}{2}v$. On en déduit que $\frac{\theta}{2}$ est l'angle orienté de droites entre l'axe des abscisses i.e. $\mathrm{vect}(u)$ et l'axe de la réflexion s (modulo π puisqu'il s'agit d'un angle orienté de droites).

2. Soit s_1 et s_2 deux réflexions de E. On peut choisir une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E de telle sorte que la matrice de s_1 dans cette base soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de s_2 dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. La matrice de s_1+s_2 dans $\mathcal{B}$ est donc $A = \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -1-\cos\theta \end{pmatrix}$. $s_1 + s_2$ est une réflexion si et seulement si la matrice A est orthogonale de déterminant -1. Ceci nous donne donc les conditions

$$\begin{cases} (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 1 \\ \sin^2\theta + (-1-\cos\theta)^2 = 1 \\ (1+\cos\theta)(-1-\cos\theta) - \sin^2\theta = -1 \end{cases}$$

   Un rapide calcul montre que chacune des équations de ce système équivaut à $2\cos\theta = -1$ i.e. $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. On a donc $\frac{\theta}{2} \equiv \pm\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$. Avec notre choix de base, l'axe de s_1 est l'axe des abscisses. A l'aide de la première question, on peut donc conclure que $s_1 + s_2$ est une réflexion si et seulement si l'angle non orienté de droites entre l'axe de s_1 et l'axe de s_2 vaut $\frac{\pi}{3}$.

Solution 29

Soient $y \in \operatorname{Im} v$ et $z \in \operatorname{Ker} v$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = v(x)$ i.e. $y = x - u(x)$. On a également $v(z) = 0_E$ i.e. $z = u(z)$.

$$(y|z) = (x - u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|u(z)) = 0$$

car u conserve le produit scalaire. On a donc prouvé que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont orthogonaux.
En particulier, ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v = \dim \mathrm{E}$, donc $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont supplémentaires.

Solution 30

1. L'application Φ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est positive par positivité de l'intégrale. Enfin, soit $f \in \mathrm{E}$ telle que $\Phi(f,f)=0$. On a donc $\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$. Comme l'application f^2 est positive et continue sur $[0,1]$, elle est nulle sur $[0,1]$. Par conséquent, f est également nulle sur $[0,1]$. De plus, f est une combinaison linéaire des fonctions 1-périodiques e_1, e_2, e_3. Donc f est aussi 1-périodique. Elle est alors nulle sur $\mathbb{R}$. L'application Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

2. Les calculs sont élémentaires :
$$
\begin{aligned}
\|e_1\|^2 &= 2\int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = 1\\
\|e_2\|^2 &= 2\int_0^1 \cos^2(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+\cos(4\pi t))\,\mathrm{d}t = 1\\
\|e_3\|^2 &= 2\int_0^1 \sin^2(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-\cos(4\pi t))\,\mathrm{d}t = 1\\
\langle e_1, e_2\rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = 0\\
\langle e_1, e_3\rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t = 0\\
\langle e_2, e_3\rangle &= 2\int_0^1 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(4\pi t)\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$
La base (e_1, e_2, e_3) est donc orthonormée.

3. **a.** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2 \in \mathrm{E}$. $\tau_x(\lambda f_1 + \mu f_2)$ est l'application $t \mapsto (\lambda f_1 + \mu f_2)(x-t)$, c'est-à-dire l'application $t \mapsto \lambda f_1(x-t) + \mu f_2(x-t)$ i.e. l'application $\lambda\tau_x(f_1) + \mu\tau_x(f_2)$. Ainsi τ_x est linéaire.
De plus, $\tau_x(e_1) = e_1$. De plus, pour $x, t \in \mathbb{R}$:
$$
\begin{aligned}
\cos(2\pi(x-t)) &= \cos(2\pi x)\cos(2\pi t) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi t)\\
\sin(2\pi(x-t)) &= \sin(2\pi x)\cos(2\pi t) - \cos(2\pi x)\sin(2\pi t)
\end{aligned}
$$
Autrement dit, $\tau_x(e_2) = \cos(2\pi x)e_2 + \sin(2\pi x)e_3$ et $\tau_x(e_3) = \sin(2\pi x)e_2 - \cos(2\pi x)e_3$. Donc $\tau_x(e_1)$, $\tau_x(e_2)$ et $\tau_x(e_3)$ appartiennent à $\operatorname{vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathrm{E}$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de E, on en déduit que $\tau_x(f) \in \mathrm{E}$ pour tout $f \in \mathrm{E}$. Ainsi f est bien un endomorphisme de E.

   b. Les calculs précédents montrent que la matrice de τ_x dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\mathrm{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi x) & \sin(2\pi x) \\ 0 & \sin(2\pi x) & -\cos(2\pi x) \end{pmatrix}$.

   c. On vérifie sans peine que M_x est orthogonale. Comme M_x est la matrice de τ_x dans une base orthonormale, on en déduit que τ_x est une isométrie vectorielle.

   d. On a $\det \mathrm{M} = -1$ donc τ_x est une isométrie vectorielle indirecte. Comme $\dim \mathrm{E} = 3$, τ_x est une réflexion ou une anti-rotation.

Cherchons les vecteurs invariants par τ_x. On résout le système $\mathrm{MX} = \mathrm{X}$ où $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{MX} = \mathrm{X} &\iff \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2\cos(2\pi x) + x_3\sin(2\pi x) = x_2 \\ x_2\sin(2\pi x) - x_3\cos(2\pi x) = x_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_2(\cos(2\pi x) - 1) + x_3\sin(2\pi x) = 0 \\ x_2\sin(2\pi x) - x_3(1 + \cos(2\pi x)) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2x_2\sin^2(\pi x) + 2x_3\sin(\pi x)\cos(\pi x) = 0 \\ 2x_2\sin(\pi x)\cos(\pi x) - 2x_3\cos^2(\pi x) = 0 \end{cases} \\
&\iff x_2\sin(\pi x) - x_3\cos(\pi x) = 0
\end{aligned}$$

Le sous-espace des vecteurs invariants par τ_x est donc le plan P_x d'équation $x_2\sin(\pi x) - x_3\cos(\pi x) = 0$ dans la base (e_1, e_2, e_3). τ_x est donc une réflexion. On peut également définir P_x par $\mathrm{P}_x = \mathrm{vect}(e_1, \cos(\pi x)e_2 + \sin(\pi x)e_3)$.

Solution 31

Notons r la rotation de l'énoncé. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}(0,0,1)$. L'image de $\mathcal{D}$ par r est une droite dirigée par $r(\vec{u})$. Notons $\vec{b} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$. Le vecteur $\vec{b}$ a donc pour coordonnées $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Notons Δ l'axe de la rotation. Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur Δ est $\vec{v} = (\vec{u}.\vec{b})\vec{b}$. Le vecteur $\vec{v}$ a donc pour coordonnées $\dfrac{1}{3}(1,1,1)$. On a alors $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{w} \in \Delta^\perp$. Le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $\dfrac{1}{3}(-1,-1,2)$. Mais alors $r(\vec{u}) = r(\vec{v}) + r(\vec{w}) = \vec{v} + r(\vec{w})$ car $\vec{v} \in \Delta$. Comme $\vec{w} \in \Delta^\perp$, $r(\vec{w}) = \cos\dfrac{\pi}{6}\vec{w} + \sin\dfrac{\pi}{6}\vec{b} \wedge \vec{w}$. Après calcul, le vecteur $r(\vec{w})$ admet pour coordonnées $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1)$. Ainsi $r(\vec{u})$ admet donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Solution 32

1. Les vecteurs $\vec{a}(1,1,1)$ et $\vec{b}(1,-1,0)$ sont des vecteurs du plan d'équation $x + y - 2z = 0$. Le vecteur $\vec{c}(1,1,-2)$ est normal à ce plan. On vérifie que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux. Posons $\vec{u}_1 = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, $\vec{u}_2 = \dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ et $\vec{u}_3 = \dfrac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}$. La famille (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormale de E et dans cette base, la matrice de s_1 est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de (u_1, u_2, u_3) dans la base canonique est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. La matrice de s_1 dans la base canonique est donc $\mathrm{M}_1 = \mathrm{PMP}^\mathsf{T} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Notons A la matrice de l'énoncé. A est clairement orthogonale et, en développant par rapport à la première ligne, $\det \mathrm{A} = 1$. f est donc une rotation. On a clairement $f(\vec{a}) = \vec{a}$ donc l'axe de f est $\mathrm{vect}(\vec{a})$. Notons θ l'angle de f si on dirige l'axe par $\vec{a}$. On a $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 1 + 2\cos\theta = 0$ donc $\theta \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. De plus, on a vu que $\vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et, si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{b}, f(\vec{b}), \vec{a}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$ donc $\sin\theta > 0$. On en déduit $\theta \equiv \dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

> **Remarque.** On peut raisonner plus géométriquement. Si on note $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ la rotation affine d'axe $O + \text{vect}(\vec{a})$ associée à f effectue une permutation circulaire des trois points A, B, C. Comme le vecteur $\vec{a}$ est normal au plan ABC, la restriction de la rotation à ce plan est une rotation plane d'angle θ. Il est alors évident que $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

3. Il suffit de poser $s_2 = s_1 \circ f$ et $s_3 = f \circ s_1$. Les matrices de s_2 et s_3 dans la base canonique sont donc respectivement $M_2 = M_1 A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M_3 = AM_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On trouve les plans plans de réflexions de s_2 et s_3 en résolvant $M_2X = X$ et $M_3X = X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve pour s_2 le plan d'équation $2x - y - z = 0$ et pour s_3 le plan d'équation $2y - x - z = 0$.

Solution 33

Supposons que f est une symétrie orthogonale. Alors f est une isométrie vectorielle et donc A est orthogonale i.e. $A^\top A = I_n$. De plus, f est une symétrie donc $A^2 = I_n$. On en déduit que $A^\top = A$ et donc A est symétrique. Réciproquement, supposons A orthogonale et symétrique. Alors f est une isométrie vectorielle. Or $A^\top A = I_n$ et $A^\top = A$ donc $A^2 = I_n$ et f est une symétrie. Il est alors classique de montrer que f est une symétrie orthogonale.

Solution 34

f et g sont deux rotations. Si l'une des deux est l'identité, alors on peut toujours considérer que f et g sont deux rotations de même axe.
Supposons maintenant f et g distinctes de l'identité. Soit u un vecteur directeur de l'axe de f. Comme f et g commutent, $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$. Donc $g(u)$ appartient à l'axe de f, c'est-à-dire $\text{vect}(u)$. Mais comme g est une isométrie, $\|g(u)\| = \|u\|$ et donc $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$.
Si $g(u) = u$, alors u est un vecteur de l'axe de g. f et g sont donc deux rotations de même axe.
Si $g(u) = -u$, notons v un vecteur directeur de l'axe de g de sorte que $g(v) = v$. Puisque g est une isométrie $\langle g(u), g(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ et donc $\langle u, v\rangle = 0$. Les axes de f et g sont donc orthogonaux. Comme $g(u) = -u$, g est une rotation d'angle π autrement dit une symétrie orthogonale par rapport à son axe. On a également $g(f(v)) = f(v)$ donc $f(v)$ appartient à l'axe de g et on a à nouveau $f(v) = v$ ou $f(v) = -v$. On ne peut avoir $f(v) = v$ puisque v n'appartient pas à l'axe de f (il lui est orthogonal et non nul). Ainsi $f(v) = -v$, ce qui prouve que f est une rotation d'angle π donc une symétrie orthogonale par rapport à son axe.

Solution 35

1. Soit $(x, y) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \times \text{Im}(f - \text{Id}_E)$. Alors $f(x) = x$ et il existe $a \in E$ tel que $y = f(a) - a$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(a) - a\rangle = \langle x, f(a)\rangle - \langle x, a\rangle = \langle f(x), f(a)\rangle - \langle x, a\rangle = 0$$

car $f \in O(E)$. Ainsi $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$.
De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \dim E - \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E) = \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$$

Par conséquent, $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$.

2. Supposons que $(f - \text{Id}_E)^2 = 0$. Alors $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. D'après la question précédente, on a donc $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$. Ainsi $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp = \{0_E\}$ puis $\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \{0_E\}$ i.e. $f = \text{Id}_E$.

> **Remarque.** On peut également directement en terme d'adjoint sans utiliser la question précédente. Comme $f \in O(E)$, $f^* = f^{-1}$. Remarquons alors que
>
> $$(f - \text{Id})^* \circ (f - \text{Id}_E) = f^* \circ f - f - f^* + \text{Id}_E = 2\,\text{Id}_E - f - f^{-1} = -f^{-1} \circ (f - \text{Id}_E)^2 = 0$$
>
> Alors pour tout $x \in E$,
>
> $$\|f(x) - x\|^2 = \langle f(x) - x, f(x) - x\rangle = \langle x, (f - \text{Id}_E)^* \circ (f - \text{Id}_E)(x)\rangle = 0$$

puis $f = \mathrm{Id}_E$.

Solution 36

Puisque O(E) est un groupe, $r \circ s$ est une isométrie vectorielle de E. Comme $\det(r \circ s) = \det(r)\det(s) = 1 \times -1 = -1$, $r \circ s$ est une isométrie vectorielle indirecte. Or E est un plan euclidien donc $r \circ s$ est une réflexion. Ainsi

$$= r \circ s \circ r \circ s = (r \circ s)^2 = \mathrm{Id}_E$$

d'où $s \circ r \circ s = r^{-1}$ et $r \circ s \circ r = s^{-1} = s$.

Solution 37

Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$ et $u^2 = -\mathrm{Id}_2$. Comme $u \in \mathcal{O}(E)$, $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$. De plus, $u^2 = -\mathrm{Id}_E$ donc $u^{-1} = -u$. Ainsi, $u^* = -u$ et, pour tout $x \in E$,

$$\langle x, u(x)\rangle = \langle u^*(x), x\rangle = \langle -u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle$$

de sorte que $\langle x, u(xx)\rangle = 0$.
Supposons que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$ et $\forall x \in E, \langle x, u(x)\rangle = 0$. Soit $x \in E$. Alors

$$0 = \langle x + u(x), u(x + u(x))\rangle = \langle x + u(x), u(x) - x\rangle = \|u(x)\|^2 - \|x\|^2$$

donc $\|u(x)\| = \|x\|$ et u est une isométrie.
Supposons que u est une isométrie et $\forall x \in E, \langle x, u(x)\rangle = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\|u^2(x) + x\|^2 &= \langle (u^2(x) + u(x)) + (x - u(x)), (u^2(x) - u(x)) + (u(x) + x)\rangle \\
&= \langle u^2(x) + u(x), u^2(x) - u(x)\rangle + \langle u^2(x) + u(x), u(x) + x\rangle + \langle x - u(x), u^2(x) - u(x)\rangle + \langle x - u(x), u(x) + x\rangle \\
&= \|u^2(x)\|^2 - \|u(x)\|^2 + \langle u(u(x) + x), u(x) + x\rangle - \langle x - u(x), u(x - u(x))\rangle + \|x\|^2 - \|u(x)\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \|x\|^2 + 0 - 0 + \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi $u^2(x) = -x$ puis $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

Solution 38

Posons $f_1 = (1, 0, -1, 0)$ et $f_2 = (0, 1, 0, -1)$. Remarquons que (f_1, f_2) est une base orthogonale de P. Notons p le projecteur orthogonal sur P. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$,

$$p(x) = \frac{\langle x, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 + \frac{\langle x, f_2\rangle}{\|f_2\|^2} f_2 = \frac{1}{2}\langle x, f_1\rangle f_1 + \frac{1}{2}\langle x, f_2\rangle f_2$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
p(e_1) &= \frac{1}{2} f_1 = \frac{1}{2}(1, 0, -1, 0) \\
p(e_2) &= \frac{1}{2} f_2 = \frac{1}{2}(0, 1, 0, -1) \\
p(e_3) &= -\frac{1}{2} f_1 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1, 0) \\
p(e_4) &= -\frac{1}{2} f_2 = \frac{1}{2}(0, -1, 0, 1)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_4}$,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s) = 2\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p) - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 39

Comme O est orthogonale, $\mathrm{O}^\top\mathrm{O} = \mathrm{I}_n$. On en déduit en particulier,

$$\mathrm{A}^\top\mathrm{A} + \mathrm{C}^\top\mathrm{C} = \mathrm{I}_p \qquad \mathrm{A}^\top\mathrm{B} + \mathrm{C}^\top\mathrm{D} = 0$$
$$\mathrm{B}^\top\mathrm{B} + \mathrm{D}^\top\mathrm{D} = \mathrm{I}_q \qquad \mathrm{B}^\top\mathrm{A} + \mathrm{D}^\top\mathrm{C} = 0$$

- Si $\det\mathrm{A} = \det\mathrm{D} = 0$, alors on a bien l'inégalité demandée.
- Si $\det\mathrm{D} \neq 0$, posons $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^\top & \mathrm{C}^\top \\ \hline \mathbf{0} & \mathrm{D}^\top \end{array}\right)$ et $\mathrm{N} = \mathrm{MO} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & \mathbf{0} \\ \hline \mathrm{D}^\top\mathrm{C} & \mathrm{D}^\top\mathrm{D} \end{array}\right)$. Les matrices M et N étant triangulaires par blocs, on a $\det\mathrm{M} = \det(\mathrm{A}^\top)\det(\mathrm{D}^\top) = \det\mathrm{A}\det\mathrm{D}$ et $\det\mathrm{N} = \det\mathrm{I}_p\det(\mathrm{D}^\top\mathrm{D}) = (\det\mathrm{D})^2$. De plus, $\det\mathrm{N} = \det(\mathrm{MO}) = \det\mathrm{M}\det\mathrm{O}$. On en déduit que $(\det\mathrm{D})^2 = \det\mathrm{A}\det\mathrm{D}\det\mathrm{O}$. Puisque $\det\mathrm{D} \neq 0$, $\det\mathrm{D} = \det\mathrm{A}\det\mathrm{O}$ et donc $(\det\mathrm{D})^2 = (\det\mathrm{A})^2(\det\mathrm{O})^2$. Or O est orthogonale donc $\det\mathrm{O} = \pm1$ et $(\det\mathrm{O})^2 = 1$. On a bien l'égalité demandée.
- Si $\det\mathrm{A} \neq 0$, posons $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^\top & \mathbf{0} \\ \hline \mathrm{B}^\top & \mathrm{D}^\top \end{array}\right)$ et $\mathrm{N} = \mathrm{MO} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^\top\mathrm{A} & \mathrm{A}^\top\mathrm{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathrm{I}_q \end{array}\right)$. Les matrices M et N étant triangulaires par blocs, on a $\det\mathrm{M} = \det(\mathrm{A}^\top)\det(\mathrm{D}^\top) = \det\mathrm{A}\det\mathrm{D}$ et $\det\mathrm{N} = \det(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})\det\mathrm{I}_q = (\det\mathrm{A})^2$. De plus, $\det\mathrm{N} = \det(\mathrm{MO}) = \det\mathrm{M}\det\mathrm{O}$. On en déduit que $(\det\mathrm{A})^2 = \det\mathrm{A}\det\mathrm{D}\det\mathrm{O}$. Puisque $\det\mathrm{A} \neq 0$, $\det\mathrm{A} = \det\mathrm{D}\det\mathrm{O}$ et donc $(\det\mathrm{A})^2 = (\det\mathrm{D})^2(\det\mathrm{O})^2$. On conclut comme précédemment en remarquant que $(\det\mathrm{O})^2 = 1$.

Solution 40

Première méthode. On a $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ où P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales. P est donc une matrice orthogonale. On a donc $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^\top$ puis $\mathrm{B} = \mathrm{P}^\top\mathrm{AP}$. Ainsi

$$\operatorname{tr}(\mathrm{B}^\top\mathrm{B}) = \operatorname{tr}(\mathrm{P}^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{P}\mathrm{P}^\top\mathrm{AP} = \operatorname{tr}(\mathrm{P}^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{AP}) = \operatorname{tr}((\mathrm{P}^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{A})\mathrm{P}) = \operatorname{tr}(\mathrm{P}(\mathrm{P}^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{A})) = \operatorname{tr}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})$$

Deuxième méthode. Notons u l'endomorphisme dont A et B sont les matrices dans deux bases orthonormales. Alors $\operatorname{tr}(u^* \circ u) = \operatorname{tr}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) = \operatorname{tr}(\mathrm{B}^\top\mathrm{B})$.

Solution 41

1. Notons $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{X}^\top\mathrm{X}$ est une matrice carrée réelle de taille 1 i.e. un réel et $\mathrm{X}^\top\mathrm{X} = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Ainsi $\mathrm{X}^\top\mathrm{X} \geq 0$ puisque les x_k sont des réels et $\mathrm{X}^\top\mathrm{X} = 0$ implique $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 0$ i.e. $\mathrm{X} = 0$.
2. Soit $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})$. On a donc $(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})\mathrm{X} = 0$ i.e. $\mathrm{MX} = -\mathrm{X}$. Ainsi $\mathrm{X}^\top\mathrm{MX} = -\mathrm{X}^\top\mathrm{X}$. Mais en transposant l'égalité $\mathrm{MX} = -\mathrm{X}$, on obtient $\mathrm{X}^\top\mathrm{M}^\top = -\mathrm{X}^\top$ et donc $\mathrm{X}^\top\mathrm{M} = \mathrm{X}^\top$ puisque $\mathrm{M}^\top = -\mathrm{M}$. Ainsi $\mathrm{X}^\top\mathrm{MX} = \mathrm{X}^\top\mathrm{X}$. Par conséquent, $\mathrm{X}^\top\mathrm{X} = -\mathrm{X}^\top\mathrm{X}$ et donc $\mathrm{X}^\top\mathrm{X} = 0$. D'après la question précédente, $\mathrm{X} = 0$. D'où $\operatorname{Ker}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M}) = \{0\}$ et $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ est inversible.
3. On a $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \left((\mathrm{I}_n + \mathrm{M})^{-1}\right)^\top (\mathrm{I}_n - \mathrm{M})^\top(\mathrm{I}_n - \mathrm{M})(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})^{-1}$. Or
$$\left((\mathrm{I}_n + \mathrm{M})^{-1}\right)^\top = \left((\mathrm{I}_n + \mathrm{M})^\top\right)^{-1} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{M})^{-1} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{I}_n - \mathrm{M})^\top = \mathrm{I}_n + \mathrm{M}$$
Ainsi $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{M})^{-1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})(\mathrm{I}_n - \mathrm{M})(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})^{-1}$. Or $\mathrm{I}_n - \mathrm{M}$ et $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ commutent donc
$$\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{M})^{-1}(\mathrm{I}_n - \mathrm{M})(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})^{-1} = \mathrm{I}_n$$
Ainsi A est orthogonale.

Solution 42

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ laissant $(\mathbb{R}_+)^n$ invariant. On notera $(\mathrm{C}_j)_{1\leq j\leq n}$ la famille des vecteurs colonnes de A et $(\mathrm{L}_i)_{1\leq i\leq n}$ la famille des vecteurs lignes de A. Notons $(\mathrm{E}_i)_{1\leq j\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathrm{E}_i \in (\mathbb{R}_+)^n$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{C}_i = \mathrm{AE}_i \in (\mathbb{R}_+)^n$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Autrement dit A est à coefficients positifs.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Supposons $A_{ij} \neq 0$, c'est-à-dire $A_{ij} > 0$ puisque A est à coefficients positifs. Soit $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$.

$$\langle L_i, L_k \rangle = \sum_{l=1}^{n} A_{il}A_{kl} \geq A_{ij}A_{kj}$$

car A est à coefficients positifs. Or la famille des vecteurs lignes de A est orthonormée donc $\langle L_i, L_k \rangle = 0$. On en déduit que $A_{kj} = 0$. En raisonnnant sur les colonnes de A, on démontre de la même manière que pour $k \in [\![1,n]\!], \setminus\{j\}$, $A_{ik} = 0$.
Ceci signifie que chaque ligne et chaque colonne comporte au plus un coefficient non nul. Puisque les vecteurs lignes et colonnes de A sont normés, chaque ligne et chaque colonne possède exactement un coefficient non nul valant ± 1, en fait 1 car A est à coefficients positifs. Ainsi A est une matrice de permutation.
Réciproquement, toute matrice de permutation est bien orthogonale et laisse stable $(\mathbb{R}_+)^n$.

Solution 43

Supposons $A = 0$. Alors il est clair que $A = \text{com}(A) = 0$.
Supposons $A \in SO(n)$. On sait que $\text{com}(A)A^\top = \det(A)I_n$. Puisque $A \in SO(n)$, $\det(A) = 1$ et $A^\top = A^{-1}$. Il s'ensuit que $\text{com}(A) = A$.
Supposons maintenant $A = \text{com}(A)$. Puisque $\text{com}(A)^\top A = \det(A)I_n$, $A^\top A = \det(A)I_n$.

- Si $\det(A) = 0$, $A^\top A = 0$ et, a fortiori, $\text{tr}(A^\top A) = 0$ et donc $A = 0$ puisque $(M,N) \mapsto \text{tr}(M^\top N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $\det(A) \neq 0$, alors $\text{tr}(A^\top A) = \text{tr}(\det(A)I_n) = n \det A$. En particulier, $\det(A) > 0$ à nouveau car $(M,N) \mapsto \text{tr}(M^\top N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs, $\det(A^\top A) = \det(\det(A)I_n)$ ou encore $\det(A)^2 = \det(A)^n$. Puisque $n \neq 2$ et $\det(A) > 0$, $\det(A) = 1$. Ainsi $A^\top A = I_n$ et $A \in SO(n)$.

Solution 44

1. On remarque que $A = (A^2)^\top = (A^\top)^2 = A^4$. Ainsi A est annulé par $P = X^4 - X = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$. Comme P est simplement scindé sur $\mathbb{C}$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. La question précédente montre que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, 1, j, \overline{j}\}$. Notons m_λ la multiplicité d'une valeur propre λ (on convient que $m_\lambda = 0$ si λ n'est pas valeur propre). Comme A est à coefficients réels, χ_A l'est également de sorte $m_{\overline{j}} = m_j$.
Comme A est diagonalisable,
$$\text{tr}(A) = 0 \cdot m_0 + 1 \cdot m_1 + j \cdot m_j + \overline{j} \cdot m_{\overline{j}} = m_0 - m_j \in \mathbb{Z}$$
puisque $j + \overline{j} = -1$. De même,
$$\det(A) = 0^{m_0} 1^{m_1} j^{m_j} \overline{j}^{m_{\overline{j}}} = 0^{m_0} (j\overline{j})^{m_j} = 0^{m_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } m_0 = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
car $j\overline{j} = 1$.

3. On a vu que $A^4 = A$. Mais comme A est inversible, $A^3 = I_2$. Ainsi $A^\top A = A^3 = I_2$. La matrice A est donc orthogonale. De plus, $\det(A) = 1$ donc $A \in SO_2(\mathbb{R})$. Ainsi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R(^te) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. De plus, $A^3 = R(3\theta) = I_2$ donc $3\theta \equiv 0[2\pi]$ i.e. $\theta \equiv 0[2\pi/3]$. Ainsi $A = R(0) = I_2$ ou $A = R\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ ou $A = R\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
Inversement, on vérifie que ces trois matrices conviennent.

Solution 45

1. Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
   - Rappelons qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $M^\top M = I_n$ (ou, de façon equivalente, $MM^\top = I_n$). Notamment toute matrice orthogonale est inversible i.e. $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

- $I_n \in O_n(\mathbb{R})$ car $I_n^\top I_n = I_n$.
- Soient $A, B \in O_n(\mathbb{R})$. Alors :
$$(AB)^\top(AB) = B^\top A^\top AB = B^\top I_n B = B^\top B = I_n$$
Donc $AB \in O_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors
$$(A^{-1})^\top A^{-1} = (A^\top)^\top A^\top = AA^\top = I_n$$
Donc $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Montrons maintenant que $T_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

- Si $A \in T_n^+(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n A_{i,i} > 0$, donc A est inversible. Ainsi $T_n^+(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.
- $I_n \in T_n^+(\mathbb{R})$ car I_n est triangulaire supérieure avec des $1 > 0$ sur la diagonale.
- Soient $A, B \in T_n^+(\mathbb{R})$. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure. De plus, les coefficients diagonaux de AB sont les produits des coefficients diagonaux de A et B : ils sont donc strictement positifs. Ainsi $AB \in T_n^+(\mathbb{R})$.
- L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure A est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de A : ils sont donc strictement positifs. Ainsi $A^{-1} \in T_n^+(\mathbb{R})$.

2. Soit $M \in O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R})$. Comme $M \in O_n(\mathbb{R})$, $M^{-1} = M^\top$. Comme $T_n^+(\mathbb{R})$ est un groupe $M^\top = M^{-1} \in T_n^+(\mathbb{R})$. On en déduit que M est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure : elle est donc diagonale. Posons $M = \operatorname{diag}(d_1, \dots, m_n)$. Alors $M^\top M = M^2 = I_n$ donc $d_i^2 = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Mais les coefficients diagonaux de M sont strictement positifs donc $d_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi $M = I_n$.
Réciproquement, $I_n \in O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R})$ donc $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.

3. La matrice A est la matrice de la base $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. Notons O la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'_{GS}$ ainsi que T la matrice de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}'_{GS}$. Par formule de changement de base, $A = OT$.
Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_{GS}$ sont orthonormées, la matrice O est orthogonale. Notons $\mathcal{B}'_{GS} = (f_1, \dots, f_n)$. Par procédé de Gram-Schmidt, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{vect}(e'_1, \dots, e'_i) = \operatorname{vect}(f_1, \dots, f_i)$ de sorte que T est triangulaire supérieure. Enfin, on rappelle que
$$f_i = \frac{1}{\mu_i}\left(e'_i - \sum_{j=1}^{i-1}\langle e', f_j\rangle f_j\right)$$
où
$$\mu_i = \|e'_i - \sum_{j=1}^{i-1}\langle e', f_j\rangle f_j\| > 0$$
Comme $(f_1, \dots, f_n)$ est orthonormée,
$$1 = \|f_i\|^2 = \frac{1}{\mu_i}\left\langle e'_i - \sum_{j=1}^{i-1}\langle e', f_j\rangle f_j, f_i\right\rangle = \frac{1}{\mu_i}\langle e'_i, f_i\rangle$$
ou encore
$$T_{i,i} = \langle e'_i, f_i\rangle = \mu_i > 0$$
On a donc bien $T \in T_n^+(\mathbb{R})$.

Adjoint

Solution 46

Si $f = 0$, alors $f^* = 0$ et $|||f||| = |||f^*||| = 0$.
Supposons maintenant $f \neq 0$. Soit x un vecteur unitaire de E. Alors
$$\begin{aligned}
\|f(x)\|^2 &= \langle f(x), f(x)\rangle \\
&= \langle f^* \circ f(x), x\rangle && \text{par définition de l'adjoint} \\
&\leq \|f^* \circ f(x)\|\|x\| && \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leq |||f^*|||\,|||f|||\,\|x\|^2 && \text{par définition de la norme subordonnée} \\
&\leq |||f^*|||\,|||f||| && \text{car } x \text{ est unitaire}
\end{aligned}$$

Puisque $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$, on a par passage à la borne supérieure,

$$|||f|||^2 \leq |||f^*|||\,|||f|||$$

et donc $|||f||| \leq |||f^*|||$ puisque $|||f||| > 0$.
En appliquant ce qui précède à f^* qui est également non nul, on obtient $|||f^*||| \leq |||f^{**}|||$. Or $f^{**} = f$ donc, par double inégalité, $|||f^*||| = |||f|||$.

Solution 47

---

1. Il est clair que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$. Alors $u^* \circ u(x) = 0$. En particulier, $\langle u^* \circ u(x), x\rangle = 0$ puis $\langle u(x), u(x)\rangle = 0$ par définition de l'adjoint. On en déduit que $u(x) = 0_{\mathrm{E}}$ par axiome de séparation. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(u)$ puis $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Par double inclusion, $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.

2. Puisque $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$, on en déduit d'après le théorème du rang que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^* \circ u)$. En appliquant ce résultat à u^* et en utilisant l'involutivité de l'adjonction, on obtient $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u \circ u^*)$. Enfin, en notant A la matrice de u dans une base orthonormée de E,
$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^\top) = \mathrm{rg}(u^*)$$

Solution 48

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u + u^*)$. Alors $\|u(x) + u^*(x)\|^2 = 0$. En développant, on obtient

$$\|u(x)\|^2 + \|u^*(x)\|^2 + 2\langle u(x), u^*(x)\rangle = 0$$

Mais par définition de l'adjoint, $\langle u(x), u^*(x)\rangle = \langle u^2(x), x\rangle$. Or $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$ donc $u^2 = 0$. Finalement

$$\|u(x)\|^2 + \|u^*(x)\|^2 = 0$$

et donc $u(x) = u^*(x) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u^*$. On montre classiquement que $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$. Or $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$ donc $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$. On en déduit que

$$x \in \mathrm{Ker}\, u \cap (\mathrm{Ker}\, u)^\perp = \{0\}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(u + u^*) = \{0\}$ et u est injectif et donc bijectif puisque E est de dimension finie.

Solution 49

Il est clair que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^*) \subset \mathrm{Ker}(f + f^*)$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(f + f^*)$, soit encore $f(x) = -f^*(x)$. Comme $(f^*)^* = f$, on a :

$$\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle = \langle x, f \circ f^*(x)\rangle$$

Or,

$$(f \circ f^*)(x) = f(f^*(x)) = f(-f(x)) = -f^2(x) = 0$$

car $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $\|f^*(x)\|^2 = 0$ puis $f^*(x) = 0$ et $f(x) = -f^*(x) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^*)$.
Par double inclusion, $\mathrm{Ker}(f + f^*) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^*)$.

Solution 50

Soit $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Posons $\mathrm{P} = g_{\mathrm{A}}^*(\mathrm{M})$. Alors, par définition de l'adjoint

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{N}\rangle = \langle g_{\mathrm{A}}^*(\mathrm{M}), \mathrm{N}\rangle = \langle \mathrm{M}, g_{\mathrm{A}}(\mathrm{N})\rangle = \langle \mathrm{M}, \mathrm{AN}\rangle$$

Par définition du produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathrm{M}, \mathrm{AN}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^\top \mathrm{AN}) = \mathrm{tr}((\mathrm{A}^\top \mathrm{M})^\top \mathrm{N}) = \langle \mathrm{A}^\top \mathrm{M}, \mathrm{N}\rangle$$

Ainsi $\langle \mathrm{P}, \mathrm{N}\rangle = \langle \mathrm{A}^\top \mathrm{M}, \mathrm{N}\rangle$ ou encore $\langle \mathrm{P} - \mathrm{A}^\top \mathrm{M}, \mathrm{N}\rangle = 0$. Ceci étant valable pour tout $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{P} - \mathrm{A}^\top \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^\perp = \{0\}$. Ainsi $g_{\mathrm{A}}^*(\mathrm{M}) = \mathrm{P} = \mathrm{A}^\top \mathrm{M}$. Finalement, $g_{\mathrm{A}}^* = g_{\mathrm{A}^\top}$.

Solution 51

---

1. Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors

$$\begin{aligned} & x \in \operatorname{Ker} u^* \\ \iff & u^*(x) = 0_{\mathrm{E}} \\ \iff & \forall y \in \mathrm{E},\ \langle u^*(x), y\rangle = 0 \\ \iff & \forall y \in \mathrm{E},\ \langle x, u(y)\rangle = 0 \\ \iff & \forall z \in \operatorname{Im} u,\ \langle x, z\rangle \\ \iff & x \in (\operatorname{Im} u)^{\perp} \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.
En appliquant cette égalité à u^*, on obtient $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u^*)^{\perp}$ car $(u^*)^* = u$. Mais comme E est de dimension finie, $(\operatorname{Ker} u)^{\perp} = \operatorname{Im} u^*$.

2. D'après le théorème du rang et la question précédente

$$\operatorname{rg}(u^*) = \dim \mathrm{E} - \dim \operatorname{Ker}(u^*) = \dim \operatorname{Ker}(u^*)^{\perp} = \dim \operatorname{Im}(u) = \operatorname{rg}(u)$$

Solution 52

---

1. En passant à l'adjoint dans l'égalité de l'énoncé, on obtient également

$$u^* \circ u + \alpha u^* + \beta u = 0$$

En soustrayant cette égalité de celle de l'énoncé, on obtient

$$(\alpha - \beta)(u - u^*) = 0$$

donc $u = u^*$. Finalement, $u^2 + \alpha u + \beta u = 0$ ou encore $u^2 = -(\alpha + \beta)u$.

- Si $\alpha + \beta \neq 0$, posons $\lambda = -(\alpha + \beta)$ et $p = \dfrac{1}{\lambda}u$. On a donc bien $u = \lambda p$. De plus,

$$p^2 = \frac{1}{\lambda^2}u^2 = \frac{1}{\lambda}u = p$$

Et enfin, comme $u = u^*$, $p = p^*$ donc p est un projecteur orthogonal.
- Si $\alpha + \beta = 0$, alors $u^* \circ u = u^2 = 0$. Ainsi

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle u^* \circ u(x), x\rangle = 0$$

donc $u = 0$ et on peut choisir $\lambda = 0$ et $p = 0$.

2.
- Supposons $\alpha = \beta \neq 0$. Soit $(x, y) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Im} u$. Il existe donc $z \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(z)$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(z)\rangle = \langle u^*(x), z\rangle$$

Or $u^* \circ u(x) = \alpha u(x) + \alpha u^*(x)$ donc $\alpha u^*(x) = 0_{\mathrm{E}}$ puisque $x \in \operatorname{Ker} u$ puis $u^*(x) = 0_{\mathrm{E}}$ acr $\alpha \neq 0$. Finalement $\langle x, y\rangle = 0$ puis $\operatorname{Ker} u \perp \operatorname{Im} u$.
- Supposons $\alpha = \beta = 0$. Alors $u^* \circ u = 0$ puis $u = 0$ comme montré précédemment. On a donc $\operatorname{Ker} u = \mathrm{E} \perp \{0_{\mathrm{E}}\} = \operatorname{Im} u$.

Solution 53

On se donne $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2,\ \operatorname{tr}(f^* \circ g) = \operatorname{tr}(\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f^* \circ g)) = \operatorname{tr}(\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f^*) \circ \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(g)) = \operatorname{tr}(\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)^{\mathsf{T}} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(g))$$

On conclut alors facilement car on sait que $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \operatorname{tr}(\mathrm{A}^{\mathsf{T}}\mathrm{B})$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 54

Dans ce qui suit, on note A la matrice de f dans une base orthonormée de E. Ainsi A^{T} est la matrice de f^* dans cette même base. On note également $n = \dim \mathrm{E}$.

1. La trace est invariante par transposition :
$$\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^\top) = \operatorname{tr}(f^*)$$

2. Le déterminant est invariant par transposition :
$$\det(f) = \det(A) = \det(A^\top) = \det(f^*)$$

3. On sait que
$$\chi_f = \chi_A = \det(XI_n - A) = \det((XI_n - A)^\top) = \det(XI_n - A^\top) = \chi_{A^\top} = \chi_{f^*}$$

4. Le spectre est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique : comme $\chi_f = \chi_{f^*}$, $\operatorname{Sp}(f) = \operatorname{Sp}(f^*)$.

5. Le rang est invariant par transposition
$$\dim(E_\lambda(f)) = \dim\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E) = \dim\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)\dim\operatorname{Ker}((A-\lambda I_n)^\top) = \dim\operatorname{Ker}(A^\top-\lambda I_n) = \dim\operatorname{Ker}(f^*-\lambda\operatorname{Id}_E) = \dim E_\lambda(f^*)$$

Solution 55

---

1. Notons $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, la matrice de u^* dans cette base est $M^\top = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
La condition $u^* \circ u = u \circ u^*$ donne $M^\top M = MM^\top$ ou encore
$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$
Notamment $b^2 = c^2$ donc $c = \pm b$. On ne peut avoir $b = c$ car sinon M serait symétrique et u serait alors diagonalisable car $\mathcal{B}$ est orthonormée. Notamment, χ_u serait scindé, ce qui n'est pas. On en déduit que $b \neq 0$ et $c = -b$. Or $ac + bd = ab + cd$ ce qui donne $a = d$ car $c = -b$ et $b \neq 0$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est donc bien de la forme annoncée.

2. Soit $\mathcal{B}$ une base *orthonormée* de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$. Comme F est stable par u, la matrice M de u dans cette base $\mathcal{B}$ est de la forme
$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$
avec A et C des matrices carrées. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est
$$M^\top = \left(\begin{array}{c|c} A^\top & 0 \\ \hline B^\top & C^\top \end{array}\right)$$
La condition $u^* \circ u = u \circ u^*$ donne $M^\top M = MM^\top$. En raisonnant par blocs, on obtient :
$$\left(\begin{array}{c|c} A^\top A & A^\top B \\ \hline B^\top A & B^\top B + C^\top C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA^\top + BB^\top & BC^\top \\ \hline CB^\top & CC^\top \end{array}\right)$$
Notamment, $B^\top B + C^\top C = CC^\top$ puis $\operatorname{tr}(B^\top B) + \operatorname{tr}(C^\top C) = \operatorname{tr}(CC^\top)$. Mais $\operatorname{tr}(C^\top C) = \operatorname{tr}(CC^\top)$ donc $\|B\|^2 = \operatorname{tr}(B^\top B) = 0$ puis $B = 0$. Ceci prouve que $F^\perp$ est stable par u.
On obtient alors également que $A^\top A = AA^\top$. Mais A est la matrice de u_F dans une base orthonormée de F donc $u_F^* \circ u_F = u_F \circ u_F^*$ ce qui prouve que u_F est un endomorphisme normal de F. De même, $C^\top C = CC^\top$ donc $U_{F^\perp}$ est un endomorphisme normal de $F^\perp$.

3. On raisonne par récurrence sur la dimension n de E. Si $n = 1$, le résultat est trivialement vrai et si $n = 2$, il est encore vrai d'après la première question.
Supposons le résultat vrai pour toute dimension de E inférieure ou égale à $n - 1 \in \mathbb{N}^*$. Soit alors u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E de dimension n.
Si u possède une valeur propre λ, on choisit un vecteur propre x associé à cette valeur propre. Alors u induit un endomorphisme normal de $\operatorname{vect}(x)^\perp$. On applique l'hypothèse de récurrence à cet endomorphisme induit, ce qui donne le résultat.
Si u ne possède pas de valeur propre, alors son polynôme minimal μ_u ne possède que des facteurs irréductibles de degré 2. Soit P un

tel facteur que l'on suppose unitaire. Il existe donc un polynôme Q tel que $\mu_u = \mathrm{PQ}$. Alors $\mathrm{P}(u)\circ \mathrm{Q}(u) = 0$ donc $\mathrm{P}(u)$ n'est pas inverse sinon $\mathrm{Q}(u) = 0$, ce qui contredit la minimalité de μ_u. Il existe donc $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que $\mathrm{P}(u)(x) = 0$. La famille $(x, u(x))$ est libre car u ne possède pas de valeur propre. De plus, il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d$. Alors $u^2(x) = -cu(x) - dx$ de sorte que $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(x, u(x))$ est stable par u. On sait que u_F est un endomorphisme normal de F. De plus, $\chi_{\mathrm{U_F}} = \mathrm{P}$ est irréductible donc, d'après la première question, sa matrice dans une base orthonormée de F est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme normal $u_{\mathrm{F}^\perp}$ ce qui permet de conclure.

Solution 56

---

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id_E}) &\iff u(x) = \lambda x \\
&\iff \|u(x) - \lambda x\|^2 = 0 \\
&\iff \langle u(x) - \lambda x, u(x) - \lambda x\rangle = 0 \\
&\iff \langle (u - \lambda\,\mathrm{Id_E})^* \circ (u - \lambda\,\mathrm{Id_E})(x), x\rangle = 0 \\
&\iff \langle (u^* - \lambda\,\mathrm{Id_E}) \circ (u - \lambda\,\mathrm{Id_E})(x), x\rangle = 0 \\
&\iff \langle (u - \lambda\,\mathrm{Id_E}) \circ (u^* - \lambda\,\mathrm{Id_E})(x), x\rangle = 0 \qquad \text{car } u^* \circ u = u \circ u^* \\
&\iff \langle (u - \lambda\,\mathrm{Id_E}) \circ (u - \lambda\,\mathrm{Id_E})^*(x), x\rangle = 0 \\
&\iff \langle (u - \lambda\,\mathrm{Id_E})^*(x), (u - \lambda\,\mathrm{Id_E})^*(x)\rangle = 0 \\
&\iff \|u^*(x) - \lambda x\|^2 = 0 \\
&\iff u^*(x) = \lambda x \\
&\iff x \in \mathrm{Ker}(u^* - \lambda\,\mathrm{Id_E})
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(u^*)$ et que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(u^*)$, $\mathrm{E}_\lambda(u) = \mathrm{E}_\lambda(u^*)$.

2. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u. Soient $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ et $y \in \mathrm{E}_\mu(u)$. Alors

$$\langle u(x), y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

Mais on a également,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Or d'après la question précédente, $y \in \mathrm{E}_\mu(u) = \mathrm{E}_\mu(u^*)$ donc $u^*(y) = \mu y$. On en déduit que $\lambda\langle x,y\rangle = \mu\langle x,y\rangle$ puis $\langle x,y\rangle = 0$ car $\lambda \neq \mu$. Ainsi $\mathrm{E}_\lambda(u) \perp \mathrm{E}_\mu(u^*)$.

Solution 57

---

1. Sachant que pour deux endomorphismes u et v de E, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$, on prouve aisément par récurrence que $(u^k)^* = (u^*)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Par linéarité de l'adjonction,

$$\mathrm{P}(u)^* = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (u^k)^* = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (u^*)^k = \mathrm{P}(u^*)$$

2. **Première méthode.** Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$,

$$\mathrm{P}(u) = 0 \iff \mathrm{P}(u)^* = 0 \iff \mathrm{P}(u^*) = 0$$

Ainsi u et u^* possèdent le même idéal annulateur. Comme le polynôme minimal est l'unique générateur unitaire de cet idéal, $\pi_u = \pi_{u^*}$.
Deuxième méthode. $\pi_u(u^*) = \pi_u(u)^* = 0^* = 0$ donc π_{u^*} divise π_u. En appliquant ceci à u^*, $\pi_{(u^*)^*} = \pi_u$ divise π_{u^*}. Comme π_u et π_{u^*} sont unitaires par définitions, $\pi_u = \pi_{u^*}$.

Solution 58

1. **a.** La linéarité de $u \otimes v$ découle essentiellement de la bilinéarité du produit scalaire.
De plus, $\mathrm{Im}(u\otimes v) \subset \mathrm{vect}(u)$ donc $\mathrm{rg}(u\otimes v) \leq 1$. Par ailleurs, $(u\otimes v)(v) = \|v\|^2 u \neq 0_{\mathrm{E}}$ car u et v sont non nuls. Par conséquent, $\mathrm{rg}(u \otimes v) = 1$.
b. Soit λ une valeur propre de $u \otimes v$ et x un vecteur propre associé. Alors $\langle v|x\rangle u = \lambda x$. Si $\lambda \neq 0$, alors $x \in \mathrm{vect}(u)$. On en déduit que $\langle v|u\rangle u = \lambda u$ puis $\lambda = \langle v|u\rangle$ car $u \neq 0_{\mathrm{E}}$.
Si $\langle v|u\rangle \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}(u\otimes v) \subset \{0, \langle v|u\rangle\}$. De plus, $\mathrm{Ker}(u\otimes v) = \mathrm{vect}(v)^\perp$ et, ce qui précède montre que $\mathrm{Ker}(u\otimes v - \langle v|u\rangle \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \subset \mathrm{vect}(u)$. L'inclusion réciproque est triviale. En conclusion, $\mathrm{Sp}(u\otimes v) = \{0, \langle v|u\rangle\}$, $\mathrm{E}_0(u\otimes v) = \mathrm{vect}(v)^\perp$ et $\mathrm{E}_{\langle v|u\rangle}(u\otimes v) = \mathrm{vect}(u)$.
Si $\langle v|u\rangle = 0$, ce qui précède montre que $\mathrm{Sp}(u \otimes v) = \{0\}$ et $\mathrm{E}_0(u \otimes v) = \mathrm{vect}(v)^\perp$.
c. Si $\langle v|u\rangle \neq 0$, alors $u \otimes v$ est diagonalisable car $\dim \mathrm{E}_0(u \otimes v) + \dim \mathrm{E}_{\langle v|u\rangle}(u \otimes v) = \dim \mathrm{E} - 1 + 1 = \dim \mathrm{E}$.
Si $\langle v|u\rangle \neq 0$, $u \otimes v$ n'est pas diagonalisable car 0 est son unique valeur propre et $\dim \mathrm{E}_0(u \otimes v) = \dim \mathrm{E} - 1 < \dim \mathrm{E}$.

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors
$$(u \otimes v)^2(x) = \langle v|x\rangle(u \otimes v)(u) = \langle v|x\rangle\langle v|u\rangle u = \langle v|u\rangle(u \otimes v)(x)$$
Ainsi $(u \otimes v)^2 = \langle v|u\rangle(u \otimes v)$. On en déduit que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - \langle v|u\rangle\mathrm{X}$ annule $u \otimes v$. Si $\langle v|u\rangle \neq 0$, alors P est simplement scindé et $u \otimes v$ est diagonalisable. Si $\langle v|u\rangle = 0$, alors $(u \otimes v)^2 = 0$ et $u \otimes v$ est nilpotent. Il ne peut être diagonalisable car sinon il serait nul.

3. Supposons que g commute avec $u \otimes v$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{E}$,
$$(u \otimes v) \circ g(x) = g \circ (u \otimes v)(x)$$
ou encore
$$\langle v|g(x)\rangle u = \langle v|x\rangle g(u)$$
Notamment, comme $v \neq 0_{\mathrm{E}}$, $g(u) = \alpha u$ avec $\alpha = \dfrac{\langle v|g(v)\rangle}{\|v\|^2}$. La dernière égalité peut également s'écrire
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \langle g^*(v)|x\rangle u = \alpha\langle v|x\rangle u$$
Comme $u \neq 0_{\mathrm{E}}$, on a donc $\langle g^*(v) - \alpha v|x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et donc $g^*(v) = \alpha v$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{E}$,
$$(u \otimes v) \circ g(x) = \langle v|g(x)\rangle u = \langle g^*(v)|x\rangle u = \alpha\langle v|x\rangle u$$
$$g \circ (u \otimes v)(x) = \langle v|x\rangle g(u) = \alpha\langle v|x\rangle u$$
donc g et $u \otimes v$ commutent.

Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Solution 59

Remarquons que $\phi = p + q$ où p et q sont les projecteurs orthogonaux respectifs sur $\mathrm{vect}(a)$ et $\mathrm{vect}(b)$. Ainsi ϕ est un endomorphisme auto-adjoint comme somme d'endomorphismes auto-adjoints. En particulier, ϕ est diagonalisable. On va de toute façon s'en rendre compte en déterminant les éléments propres de ϕ.
Remarquons déjà que ϕ est nulle sur $(\mathrm{vect}(a) + \mathrm{vect}(b))^\perp$. Ainsi $(\mathrm{vect}(a) + \mathrm{vect}(b))^\perp \subset \mathrm{Ker}\,\phi$. Réciproquement si $x \in \mathrm{Ker}\,\phi$, $\langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b = 0$ de sorte que $\langle a, x\rangle = \langle b, x\rangle = 0$ car la famille (a, b) est libre. Ainsi $x \in \mathrm{vect}(a)^\perp \cap \mathrm{vect}(b)^\perp = (\mathrm{vect}(a) + \mathrm{vect}(b))^\perp$. Finalement, $\mathrm{Ker}\,\phi = (\mathrm{vect}(a) + \mathrm{vect}(b))^\perp$.
La nature géométrique de ϕ incite fortement à penser que $a+b$ et $a-b$ sont vecteurs propres. En effet, ces deux vecteurs sont non nuls puisque a et b sont non colinéaires et un calcul simple montrer que $\phi(a) = a + \langle a, b\rangle b$ et $\pi(b) = b + \langle a, b\rangle b$ donc $\phi(a + b) = (1 + \langle a, b\rangle)(a + b)$ et $\phi(a-b) = (1-\langle a, b\rangle)(a-b)$. Donc $a+b$ et $a-b$ sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres $1+\langle a, b\rangle$ et $1-\langle a, b\rangle$. Si $\langle a, b\rangle \neq 0$, ces valeurs propres sont distinctes : les sous-espaces propres associées à ces valeurs propres sont donc de dimension 1 puisqu'on a déjà vu que le noyau i.e. le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 était de dimension $n - 2$. Ces sous-espaces propres sont donc respectivement $\mathrm{vect}(a + b)$ et $\mathrm{vect}(a - b)$. Si $\langle a, b\rangle = 0$, alors le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 contient $\mathrm{vect}(a + b, a - b) = \mathrm{vect}(a, b)$ et est en fait exactement égal à celui-ci puisque la diemnsion de $\mathrm{vect}(a, b)$ est 2 et que $\mathrm{Ker}\,\phi$ est déjà de dimension $n - 2$.

Récapitulons. Dans tous les cas, 0 est valeur propre de ϕ et le sous-espace propre associé est $(\text{vect}(a)+\text{vect}(b))^\perp$. Si $\langle a,b\rangle \neq 0$, ϕ possède deux valeurs propres supplémentaires $1+\langle a,b\rangle$ et $1-\langle a,b\rangle$ et les sous-espaces propres respectivement associés sont $\text{vect}(a+b)$ et $\text{vect}(a-b)$. Si $\langle a,b\rangle = 0$, ϕ possède 1 comme seule valeur propre en sus de 0 et le sous-espace propre associé est $\text{vect}(a,b)$. Il est d'ailleurs géométriquement clair dans ce cas que ϕ induit l'identité sur $\text{vect}(a,b)$.

Solution 60

1. Pour tout $x \in \mathrm{E}$,
$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k\rangle^2 \geq 0$$
donc v est positif. Supposons maintenant que $\langle f(x), x\rangle = 0$. Tous les termes de la somme précédente étant positifs, ils sont tous nuls. Ainsi x est orthogonal à chacun des u_k et donc au sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, c'est-à-dire E. Ainsi $x = 0_{\mathrm{E}}$.

2. Considérons une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E formée de vecteurs propres de E. Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres assocciées à ces vecteurs propres. Ces valeurs propres sont toutes strictement positives. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, il existe un unique endomorphisme g de E tel que $g(e_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}e_i$. On a clairement $g^2(e_i) = \frac{1}{\lambda_i}e_i = f^{-1}(e_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, $g^2 = f^{-1}$.
Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. Alors
$$\langle g(x), y\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}\langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$
donc g est auto-adjoint. Les valeurs propres de g sont les réels strictement positifs $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ donc v est défini positif.

3. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Alors
$$u_i = f(f^{-1}(u_i)) = \sum_{k=1}^n \langle f^{-1}(u_i), u_k\rangle u_k$$
Mais comme $(u_1,\dots,u_n)$ est libre, $\langle f^{-1}(u_i), u_k\rangle = \delta_{i,k}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors, comme g est auto-adjoint,
$$\langle g(u_i), g(u_j)\rangle = \langle g^2(u_i), u_j\rangle = \langle f^{-1}(u_i), u_j\rangle = \delta_{i,j}$$
Ainsi $(g(u_1),\dots,g(u_n))$ est bien une base orthonormée de E.

Solution 61

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Notons λ_i la valeur propre associée à e_i. Comme $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, on définit bien un endomorphisme g de E en posant $g(e_i) = \sqrt{\lambda_i}e_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On a alors clairement $g^2(e_i) = \lambda_i e_i = f(e_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, on a bien $g^2 = f$.
Enfin, la matrice de g dans la base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ est diagonale donc symétrique : g est donc un endomorphisme auto-adjoint.

Solution 62

Soit $x \in \text{Ker} f$ et $y \in \text{Im} f$. Il existe donc $z \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(z)$. Ainsi
$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = \langle f(x), z\rangle = \langle 0_{\mathrm{E}}, z\rangle 0$$
Ainsi $\text{Ker} f \subset (\text{Im} f)^\perp$. De plus, $\dim(\text{Im} f)^\perp = n - \dim \text{Im} f = \dim \text{Ker} f$ d'après le théorème du rang. Ainsi $\text{Ker} f = (\text{Im} f)^\perp$.

Solution 63

Comme f est auto-adjoint, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E qui diagonalise f.

$(i) \implies (iii)$ La condition (i) implique que les valeurs propres de f sont positives. Notons $e_1,\dots,e_n$ les éléments de $\mathcal{B}$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres associées. On définit h en posant $h(e_i) = \sqrt{\lambda_i}e_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On vérifie qu'on a bien $h = h^*$ et $f = h^2$.

$(iii) \implies (ii)$ Il suffit de prendre $g = h$.

$(ii) \implies (i)$ Pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\langle f(x), x\rangle = \langle g^* \circ g(x), x\rangle = \langle g(x), g(x)\rangle \geq 0$$

Solution 64

Supposons f défini positif. L'application $\varphi : (x, y) \in \mathrm{E}^2 \mapsto \langle f(x), y\rangle$ est un produit scalaire :

- la bilinéarité provient de la linéarité de f et de la bilinéarité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$;
- la symétrie provient de la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et du fait que f est autoadjoint ;
- pour $x \in \mathrm{E}$, $\langle f(x), x\rangle \geq 0$ et on a égalité uniquement si $x = 0_{\mathrm{E}}$..

La partie X est la boule unité fermée pour la norme associée au produit scalaire φ : elle est donc compacte pour cette norme puisque E est de dimension finie. Les normes étant toutes équivalentes en dimension finie, X est également compacte pour la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Supposons X bornée. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et x un vecteur propre associé. Comme X est bornée et $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, on peut choisir $r \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment grand tel que $rx \notin \mathrm{X}$. Alors $\langle f(rx), rx\rangle > 1$ i.e. $\lambda r^2\|x\|^2 > 1$ puis $\lambda > \dfrac{1}{r^2\|x\|^2} > 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$ et f est défini positif.

Solution 65

1. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propre de f. Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i. Comme $f \in \mathcal{S}^+(\mathrm{E})$, $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe un (unique) $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $g(e_i) = \sqrt{\lambda_i}e_i$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $g^2(e_i) = \lambda_i e_i = f(e_i)$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $g^2 = f$. De plus, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de g donc $g \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ d'après le théorème spectral.

2. L'endomorphisme g déterminé à la question précédente convient puisque $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathbb{R}_+$. Montrons son unicité. Supposons donc qu'il existe $(g, h) \in \mathcal{S}^+(\mathrm{E})^2$ tel que $f = g^2 = h^2$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\mathrm{X} - \sqrt{\lambda}$ et $\mathrm{X} + \sqrt{\lambda}$ sont premiers entre eux donc, d'après le lemme des noyaux,

$$\mathrm{Ker}(g^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$$

Mais comme $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Ker}(g + \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \{0\}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(g^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}(g - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$. De la même manière, $\mathrm{Ker}(h^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}(h - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$. Or $g^2 = h^2$ donc $\mathrm{Ker}(g - la \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}(h - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.
Par ailleurs, $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, g^2$. Mais si l'on se donne $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\, g^2$, alors

$$\|g(x)\|^2 = \langle g(x), g(x)\rangle = \langle x, g^* \circ g(x)\rangle = \langle x, g^2(x)\rangle = 0$$

donc $g(x) = 0$ puis $x \in \mathrm{Ker}\, g$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, g^2$. De même, $\mathrm{Ker}\, h = \mathrm{Ker}\, h^2$. Or $g^2 = h^2$ donc $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, h$. Finalement

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{Ker}(g - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}(h - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$$

Mais comme $\mathrm{Sp}(\mathrm{S}) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}_+$, S et T ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres. Comme g et h sont diagonalisables, ils sont égaux.

Solution 66

1. L'application u est clairement linéaire. De plus, pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$u(\mathrm{X}^k) = \int_0^1 (\mathrm{X} + t)^n t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} \int_0^1 t^{n-j+k} \,\mathrm{d}t\right) \mathrm{X}^j = \sum_{j=0}^n \frac{1}{n-j+k+1} \binom{n}{j} \mathrm{X}^j \in \mathrm{E}$$

donc $u \in \mathcal{L}(E)$.
Pour $(k, l) \in [\![0, n]\!]^2$, on a donc

$$\begin{aligned}
(u(X^k) \mid X^l) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n-j+k+1}\binom{n}{j}(X^j \mid X^l) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n-j+k+1} \cdot \frac{1}{j+l+1}\binom{n}{j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+k+1} \cdot \frac{1}{n-i+l+1}\binom{n}{n-i} && \text{par le changement de variable } i = n-j \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n-i+l+1} \cdot \frac{1}{i+k+1}\binom{n}{i} && = (X^k \mid u(X^l))
\end{aligned}$$

Par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire, on prouve alors aisément que $(u(P) \mid Q) = (P \mid u(Q))$ pour tout $(P, Q) \in E^2$. Ainsi u est bien auto-adjoint.

> **Remarque.** En admettant le théorème de Fubini pour les intégrales doubles (hors programme), on pouvait aussi raisonner de la manière suivante.
>
> $$\begin{aligned}
(u(P) \mid Q) &= \int_0^1 u(P)(t)Q(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+s)^n P(s)\,ds\right) Q(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+s)^n P(s)Q(t)\,ds\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+s)^n P(s)Q(t)\,dt\right) ds && \text{d'après le théorème de Fubini} \\
&= \int_0^1 P(s)\left(\int_0^1 (t+s)^n Q(t)\,dt\right) ds \\
&= \int_0^1 P(s)u(Q)(s)\,ds && = (P \mid u(Q))
\end{aligned}$$

2. C'est le théorème spectral.

3. Fixons $y \in \mathbb{R}$. Comme $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthonromée de E,

$$(X+y)^n = \sum_{k=0}^{n} ((X+y)^n \mid P_k)P_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 (t+y)^n P_k(t)\,dt\right) P_k = \sum_{k=0}^{n} u(P_k)(y)P_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(y)P_k$$

En évaluant en $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x)P_k(y)$$

Notamment, en choisissant $y = x$,

$$2^n x^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x)^2$$

En intégrant sur $[0, 1]$,

$$2^n \int_0^1 x^n\,dx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \int_0^1 P_k(x)^2\,dx$$

ou encore

$$\frac{2^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \|P_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = \operatorname{tr}(u)$$

car les vecteurs P_k sont unitaires.

> **Remarque.** On pouvait trouver la trace différemment. En effet, on a calculé
>
> $$u(\mathrm{X}^k) = \int_0^1 (\mathrm{X}+t)^n t^k \, \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^n \frac{1}{n-j+k+1}\binom{n}{j}\mathrm{X}^j$$
>
> Si on note A la matrice de u dans la base canonique, alors
>
> $$\mathrm{A}_{j,k} = \frac{1}{n-j+k+1}\binom{n}{j}$$
>
> On en déduit que
>
> $$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^n \mathrm{A}_{k,k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{2^n}{n+1}$$

Solution 67

Soit S_n l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de norme 1. Pour $\mathrm{A} \in \S_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$, on pose $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^\top \mathrm{AX}$.
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe une base orthonormée $(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle A diagonalise. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons λ_i la valeur propre de A associée à E_i. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n$. Il existe donc $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{E}_i$ et $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. On a alors $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. On a alors $\varphi(\mathrm{X}) \leq \left(\max_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i\right)\sum_{i=1}^n x_i^2 = \Phi(\mathrm{A})$. De plus, notons j l'indice de la plus grande valeur propre de A, on a alors $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_j) = \lambda_j = \Phi(\mathrm{A})$. Par conséquent, $\Phi(\mathrm{A}) = \max_{\mathrm{X}\in\mathrm{S}_n} \varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$.
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\Phi(\lambda\mathrm{A} + (1-\lambda)\mathrm{B}) = \max_{\mathrm{X}\in\mathrm{S}_n} \varphi_{\lambda\mathrm{A}+(1-\lambda)\mathrm{B}}(\mathrm{X}) = \max_{\mathrm{X}\in\mathrm{S}_n}(\lambda\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) + (1-\lambda)\varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X})$$

Puisque $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$, on a pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n$

$$\lambda\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) + (1-\lambda)\varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) \leq \lambda \max_{\mathrm{X}\in\mathrm{S}_n} \varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) + (1-\lambda)\max_{\mathrm{X}\in\mathrm{S}_n} \varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) = \lambda\Phi(\mathrm{A}) + (1-\lambda)\Phi(\mathrm{B})$$

Il suffit alors de passer au maximum pour $\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n$ pour obtenir

$$\Phi(\lambda\mathrm{A} + (1-\lambda)\mathrm{B}) \leq \lambda\Phi(\mathrm{A}) + (1-\lambda)\Phi(\mathrm{B})$$

Autrement dit, Φ est convexe.

Solution 68

Comme A est symétrique, elle diagonalise dans une base orthonormale i.e. il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ avec D diagonale. Posons $\mathrm{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P} & \mathrm{P} \\ \hline \mathrm{P} & -\mathrm{P}\end{array}\right)$. On vérifie que $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$. De plus, $\mathrm{Q}^\top\mathrm{BQ} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{D}+\mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{D}-\mathrm{I}_n\end{array}\right)$. Ceci prouve que B est diagonalisable et que ses valeurs propres sont les $\lambda \pm 1$ où $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

Solution 69

1. Puisque A est réelle symétrique positive, elle est diagonalisable. Notons $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A et λ_i la valeur propre associée au vecteur propre X_i pour chaque i dans $[\![1, n]\!]$.

   Soit X un vecteur propre de A^k associée à une valeur propre λ. Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathrm{X}_i$. Notons I l'ensemble des indices $i \in [\![1, n]\!]$ tels que $\alpha_i \neq 0$ de sorte que $\mathrm{X} = \sum_{i\in\mathrm{I}} \alpha_i\mathrm{X}_i$. Ainsi d'une part

   $$\mathrm{A}^k\mathrm{X} = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i^k \alpha_i \mathrm{X}_i$$

et d'autre part

$$A^kX = \lambda X = \sum_{i\in I} \lambda\alpha_i X_i$$

Comme $(X_i)_{i\in I}$ est une famille libre, $\lambda_i^k\alpha_i = \lambda\alpha_i$ pour tout $i \in I$. Or $\alpha_i \neq 0$ pour $i \in I$ donc $\lambda_i^k = \lambda$. De plus, A est symétrique positive donc les λ_i sont positifs : pour tout $i \in I$, $\lambda_i = \sqrt[k]{\lambda}$. Finalement

$$AX = \sum_{i\in I} \lambda_i\alpha_i X = \sqrt[k]{\lambda}\sum_{i\in I}\alpha_i X_i = \sqrt[k]{\lambda}X$$

et donc X est un vecteur propre de A.

2. Puisque $(A^k)^\top = (A^\top)^k = A^k$, A^k est symétrique. Il existe donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}A^kP$ soit diagonale. Les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de A^k et donc de A d'après la question précédente. En clair, $P^{-1}AP$ est également diagonale. Puisque $A^k = B^k$, le même raisonnement montre que $P^{-1}BP$ est également diagonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ ceux de $P^{-1}BP$. Puisque $\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP$ et $\left(P^{-1}BP\right)^k = P^{-1}B^kP$, on a $\lambda_i^k = \mu_i^k$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Mais puisque, A et B sont symétriques positives, leurs valeurs propres i.e. les λ_i et les μ_i sont positives. L'application $x \mapsto x^k$ étant injective sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi $P^{-1}AP = P^{-1}BP$ puis $A = B$.

3. Le résultat ne tient plus. Prendre par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $k = 2$.

Néanmoins, le résultat reste valable si A et B sont symétriques (non nécessairement positives) et si k est impair car dans ce cas $x \mapsto x^k$ est injective sur $\mathbb{R}$.

Solution 70

Première méthode
D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients positifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^\top$. Mais alors

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(PDP^\top B) = \mathrm{tr}(DP^\top BP) = \mathrm{tr}(DC)$$

en posant $C = P^\top BP$. La matrice C est évidemment symétrique et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$X^\top CX = X^\top P^\top BPX = (PX)^\top B(PX) \geq 0$$

car B est positive. Ainsi C est positive. En notant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$C_{ii} = E_i^\top CE_i \geq 0$$

puisque C est positive. Finalement

$$\mathrm{tr}(DC) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n D_{ij}C_{ji} = \sum_{i=1}^n D_{ii}C_{ii} \geq 0$$

Deuxième méthode
D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients positifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^\top$. En notant Δ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de A, et en posant $R = P\Delta P^\top$, on a $A = R^\top R$. De la même manière, on peut trouver $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = S^\top S$. Mais alors

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(R^\top RS^\top S) = \mathrm{tr}(SR^\top RS^\top) = \|RS^\top\|^2 \geq 0$$

où on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{tr}(X^\top Y)$ (il est classique de montrer que c'est bien un produit scalaire).

Solution 71

---

1. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors $A^\top A$ est une matrice symétrique donc elle est diagonalisable. Soit x un vecteur propre associée à une valeur propre λ de $A^\top A$. Alors $x^\top A^\top Ax = (Ax)^\top(AX) = \|Ax\|^2 \in \mathbb{R}_+$ et $x^\top A^\top Ax = \lambda x^\top x =$

$\lambda\|x\|^2$. Comme $\|x\|^2 \in \mathbb{R}_*^+$, $\lambda \geq 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+$ donc N(A) est bien définie.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{N}(\mu\mathrm{A}) = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(\mu^2\mathrm{A}^\top\mathrm{A})} = \sqrt{\max \mu^2 \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})} = \sqrt{\mu^2 \max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})} = |\mu|\sqrt{\max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})} = |\mu|\mathrm{N}(\mathrm{A})$$

donc N est bien homogène.
Supposons que $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = 0$. Alors $\max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) = 0$. Mais comme $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) = \{0\}$. Comme $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ est diagonalisable, $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = 0$. A fortiori, $\|\mathrm{A}\|^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) = 0$ où $\|\cdot\|$ désigne ici la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathrm{A} = 0$ et N vérifie l'axiome de séparation.
Soit enfin $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$. Notons λ la plus grande valeur propre de $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^\top(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ et x un vecteur propre associé à cettte valeur propre. Alors $\|(\mathrm{A}+\mathrm{B})x\|^2 = \lambda\|x\|^2$. Donc $\|(\mathrm{A}+\mathrm{B})x\| = \mathrm{N}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\|x\|$. Par ailleurs, $\|\cdot\|$ est une norme donc $\|(\mathrm{A}+\mathrm{B})x\| \leq \|\mathrm{A}x\|+\|\mathrm{B}x\|$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de $\mathrm{A}\top\mathrm{A}$. Alors

$$x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}^\top\mathrm{A}x = \sum_{i=1}^p x_i\lambda_i e_i$$

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$\|\mathrm{A}x\|^2 = x^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{A}x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 \leq \mathrm{N}(\mathrm{A})^2\sum_{i=1}^p x_i^2 = \mathrm{N}(\mathrm{A})^2\|x\|^2$$

Par conséquent, $\|\mathrm{A}x\| \leq \mathrm{N}(\mathrm{A})\|x\|$. De la même manière, $\|\mathrm{B}x\| \leq \mathrm{N}(\mathrm{B})\|x\|$ Finalement,

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\|x\| \leq \mathrm{N}(\mathrm{A})\|x\| + \mathrm{N}(\mathrm{B})\|x\|$$

et donc $\mathrm{N}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leq \mathrm{N}(\mathrm{A}) + \mathrm{N}(\mathrm{B})$ car $\|x\| > 0$.
N est bien une norme.

2. Soit x un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $(\mathrm{AB})^\top(\mathrm{AB})$. On a alors $\|\mathrm{AB}x\| = \mathrm{N}(\mathrm{A})\|x\|$ (cf. précédemment). De plus, $\|\mathrm{AB}x\| \leq \mathrm{N}(\mathrm{A})\|\mathrm{B}x\| \leq \mathrm{N}(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{B})\|x\|$ (cf. précédemment). Comme $\|x\| > 0$, $\mathrm{N}(\mathrm{AB}) \leq \mathrm{N}(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{B})$ donc N est bien une norme d'algèbre.

Solution 72

Remarquons qu'en remplaçant x par x/y, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ |ax^2 + bxy + cy^2| \leq |\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2|$$

Par continuité des deux membres sur $\mathbb{R}^2$, l'inégalité est également vraie sur l'adhérence de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$. Ainsi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |ax^2 + bxy + cy^2| \leq |\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2|$$

Posons $m = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B}/2 \\ \mathrm{B}/2 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ |u^\top m u| \leq |u^\top \mathrm{M} u|$$

En élevant au carré, on obtient

$$\forall u \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ \|u\|^2 u^\top m^2 u \leq \|u\|^2 u^\top \mathrm{M}^2 u$$

Notamment, en notant S la sphère unité de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$\forall u \in \mathrm{S},\ u^\top m^2 u \leq u^\top \mathrm{M}^2 u$$

Les matrices m et M sont symétriques réelles donc diagonalisables. Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres (éventuellement confondues) de m ainsi que Λ_1 et Λ_2 celles de M. Quitte à les échanger, on peut supposer $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ et $|\Lambda_1| \leq |\Lambda_2|$. En considérant des bases orthonormées de vecteurs propres de m et M, on montre classiquement que

$$\lambda_1^2 = \inf_{u \in \mathrm{S}} u^\top m^2 u \qquad \lambda_2^2 = \sup_{u \in \mathrm{S}} u^\top m^2 u$$
$$\Lambda_1^2 = \inf_{u \in \mathrm{S}} u^\top \mathrm{M}^2 u \qquad \Lambda_2^2 = \sup_{u \in \mathrm{S}} u^\top \mathrm{M}^2 u$$

L'inégalité précédente montre alors que $\lambda_1^2 \leq \Lambda_1^2$ et $\lambda_2^2 \leq \Lambda_2^2$. Puisque toutes ces quantités sont positives, $(\lambda_1\lambda_2)^2 \leq (\Lambda_1\Lambda_2)^2$. Or $\lambda_1\lambda_2 = \det(m) = ac - b^2/4$ et $\Lambda_1\Lambda_2 = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2/4$ de sorte que

$$(b^2 - 4ac)^2 \leq (\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC})^2$$

ou encore

$$|b^2 - 4ac| \leq |\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}|$$

Solution 73

Comme $\mathrm{M}^\mathsf{T}\mathrm{M}$ et $\mathrm{M}\mathrm{M}^\mathsf{T}$ sont symétriques réelles, leurs spectres sont inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}^\mathsf{T}\mathrm{M}) \setminus \{0\}$. Alors il existe $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $\mathrm{M}^\mathsf{T}\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$. On en déduit que

$$\|\mathrm{MX}\|^2 = \mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{M}^\mathsf{T}\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{XX}^\mathsf{T} = \lambda\|\mathrm{X}\|^2 \neq 0$$

car X et λ sont non nuls. Ainsi $\mathrm{MX} \neq 0$. Mais comme $\mathrm{M}^\mathsf{T}\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$, on a également $(\mathrm{MM}^\mathsf{T})\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{MX}$ de sorte que $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{MM}^\mathsf{T})$. On en déduit que

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{M}^\mathsf{T}\mathrm{M}) \setminus \{0\} \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{MM}^\mathsf{T}) \setminus \{0\}$$

En appliquant ce qui précède à M^T, on obtient l'inclusion réciproque et donc l'égalité.

Solution 74

Supposons (i). Alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Posons également $\mathrm{E}_{i,j} = e_ie_j^\mathsf{T} + e_je_i^\mathsf{T}$. On montre aisément que $(\mathrm{E}_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
L'application

$$\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AM} + \mathrm{MA} \end{array}\right.$$

est bien définie et c'est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$, $\Phi(\mathrm{E}_{i,j}) = (\lambda_i + \lambda_j)\mathrm{E}_{i,j}$. L'application Φ est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les $\lambda_i + \lambda_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$. Aucune de ces valeurs propres n'est nulle donc Φ est un automorphisme. On en déduit la proposition (ii).

> **Remarque.** On peut raisonner différemment. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\mathsf{T}$. Fixons $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'équation $\mathrm{AM} + \mathrm{MA} = \mathrm{B}$ équivaut à $\mathrm{DN} + \mathrm{ND} = \mathrm{C}$ en posant $\mathrm{N} = \mathrm{P}^\mathsf{T}\mathrm{MP}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{P}^\mathsf{T}\mathrm{BP}$. Cette équation équivaut à
>
> $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (\lambda_i + \lambda_j)\mathrm{N}_{i,j} = \mathrm{C}_{i,j}$$
>
> Comme $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'équation admet donc bien une unique solution N. Comme C est symétrique, N l'est également et donc M aussi. L'équation $\mathrm{AM} + \mathrm{MA} = \mathrm{B}$ admet donc bien une unique solution symétrique.

Supposons (ii). Considérons l'application Ψ qui à $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associe l'unique matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{AM} + \mathrm{MA} = \mathrm{B}$. On vérifie aisément que Ψ est un automorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{I}_n = \Psi(\Psi^{-1}(\mathrm{I}_n))$ est l'unique matrice telle que $\mathrm{AI}_n + \mathrm{I}_n\mathrm{A} = \Psi^{-1}(\mathrm{I}_n)$. Ainsi $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}\Psi^{-1}(\mathrm{I}_n) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On reprend alors le raisonnement de la première implication. L'endomorphisme Φ (qui n'est autre que Ψ^{-1}) est alors un automorphisme. Ses valeurs propres, à savoir les $\lambda_i + \lambda_j$ ne peuvent être nulles.

Solution 75

Soit (X, Y) un éventuel couple solution. Alors

$$\mathrm{X}^\mathsf{T} = \mathrm{X}^\mathsf{T}(\mathrm{Y}^\mathsf{T}\mathrm{XY}) = (\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{Y}^\mathsf{T}\mathrm{X})\mathrm{Y} = (\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{YX})^\mathsf{T}\mathrm{Y} = \mathrm{Y}$$

Par conséquent, $\mathrm{X}(\mathrm{XX}^\mathsf{T}) = \mathrm{I}_n$. On en déduit que XX^T est inversible et que $\mathrm{X} = (\mathrm{XX}^\mathsf{T})^{-1}$. Or XX^T est symétrique donc X également. D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{X} = \mathrm{PDP}^\mathsf{T}$. En reportant dans l'égalité $\mathrm{X}(\mathrm{XX}^\mathsf{T}) = \mathrm{I}_n$ i.e. $\mathrm{X}^3 = \mathrm{I}_n$, on obtient $\mathrm{D}^3 = \mathrm{I}_n$. Comme D est diagonale à coefficients *réels*, $\mathrm{D} = \mathrm{I}_n$ puis $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{I}_n$.
Réciproquement, le couple $(\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_n)$ convient. C'est donc l'unique solution du système.

Solution 76

Il est clair que si S est nulle, $\mathrm{S} + \mathrm{D}$ est semblable à D.

Supposons maintenant que $S + D$ est semblable à D. On rappelle que $X \mapsto \operatorname{tr}(X^\top X)$ est une norme euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $S + D$ est semblable à D, $(S + D)^2$ est également semblable à D^2 et ces deux matrices ont même trace. Ainsi

$$\operatorname{tr}(D^2) = \operatorname{tr}((S + D)^2) = \operatorname{tr}(S^2) + \operatorname{tr}(SD) + \operatorname{tr}(DS) + \operatorname{tr}(D^2)$$

On vérifie aisément que SD a une diagonale nulle donc $\operatorname{tr}(SD) = \operatorname{tr}(DS) = 0$. Ainsi $\operatorname{tr}(S^2) = \operatorname{tr}(S^\top S) = 0$ puis $S = 0$ via la norme euclidienne citée plus haut.

Solution 77

---

1. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^\top$. Comme $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de D sont positifs. On note alors $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ de sorte que $\Delta^2 = D$. Posons $B = P\Delta P^\top$. On vérifie asiément que B est symétrique et que $B^2 = A$.

2. La matrice B déterminé à la question précédente convient puisque $\operatorname{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$. Montrons son unicité. Supposons donc qu'il existe $(S, T) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$ tel que $A = S^2 = T^2$.
Première méthode. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $X - \sqrt{\lambda}$ et $X + \sqrt{\lambda}$ sont premiers entre eux donc, d'après le lemme des noyaux,
$$\operatorname{Ker}(S^2 - \lambda^2 I_n) = \operatorname{Ker}(S - \lambda I_n) \oplus \operatorname{Ker}(S + \lambda I_n)$$
Mais comme $\operatorname{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$, $\operatorname{Ker}(S+\lambda I_n) = \{0\}$. Ainsi $\operatorname{Ker}(S^2-\lambda^2 I_n) = \operatorname{Ker}(S-\lambda I_n)$. De la même manière, $\operatorname{Ker}(T^2-\lambda^2 I_n) = \operatorname{Ker}(T-\lambda I_n)$. Or $S^2 = T^2$ donc $\operatorname{Ker}(S - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(T - \lambda I_n)$.
Par ailleurs, $\operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} S^2$. Mais si l'on se donne $X \in \operatorname{Ker} S^2$, alors $\|SX\|^2 = X^\top S^2 X = 0$ donc $SX = 0$ puis $X \in \operatorname{Ker} S$. Ainsi $\operatorname{Ker} S = \operatorname{Ker} S^2$. De même, $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^2$. Or $S^2 = T^2$ donc $\operatorname{Ker} S = \operatorname{Ker} T$. Finalement
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{Ker}(S - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(T - \lambda I_n)$$
Mais comme $\operatorname{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ et $\operatorname{Sp}(T) \subset \mathbb{R}_+$, S et T ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres. Comme S et T sont diagonalisables, elles sont égales.
Deuxième méthode. Comme S est diagonalisable à valeurs propres positives, les valeurs propres de S sont les racines carrées des valeurs propres de S^2. Il en est de même pour T. Comme $S^2 = T^2$, S et T ont même spectre. Il existe donc $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(P, Q) \in O_n(\mathbb{R})^2$ tels que $S = PDP^\top$ et $T = QDQ^\top$. Comme $S^2 = T^2$, $PD^2P^\top = QD^2Q^\top$ ou encore $RD^2 = D^2R$ en posant $R = Q^\top P$. Comme $D^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$, $R_{i,j}\lambda_j^2 = \lambda_i^2 R_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Ceci peut encore s'écrire $R_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j + \lambda_i) = 0$. Remarquons que les λ_i sont positifs. Si $\lambda_i + \lambda_j > 0$, $R_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i)$ ce qui signifie $R_{i,j}\lambda_j = \lambda_i R_{i,j}$. Sinon $\lambda_i = \lambda_j = 0$ donc on a encore $R_{i,j}\lambda_j = \lambda_i R_{i,j}$. Finalement, $R_{i,j}\lambda_j = \lambda_i R_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On en déduit que $RD = DR$ ou encore $PDP^\top = QDQ^\top$ i.e. $S = T$.

Solution 78

---

1. M est symétrique réelle donc M est diagonalisable. De plus, M est nilpotente donc sa seule valeur propre est 0. On en déduit que $M = 0$.

2. Comme M et $M^\top$ commutent, $(M^\top M)^n = M^n(M^\top)^n M^n = 0$. Comme $M^\top M$ est symétrique réelle, $M^\top M = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\operatorname{tr}(M^\top M) = 0$. On en déduit que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 = 0$ puis $M_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ (somme nulle de termes positifs). Ainsi $M = 0$.

Solution 79

---

1. Tout d'abord, $A^\top A$ est clairement symétrique réelle. De plus,
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top(A^\top A)X = \|AX\|^2 \geq 0$$
Donc $A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Or $A^\top A \in GL_n(\mathbb{R})$ (considérer le déterminant par exemple) donc $A^\top A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A^\top A = PD^\top$ avec les λ_i strictement positifs. Si on pose $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $S = P\Delta P^\top$, on a bien $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A^\top A = S^2$.

2. Notons S la matrice de la question précédente et posons $Q = AS^{-1}$. Alors, comme $S^{\top} = S$,

$$Q^{\top}Q = (S^{-1})^{\top}A^{\top}AS^{-1} = (S^{\top})^{-1}S^2S^{-1} = I_n$$

donc $Q \in O_n(\mathbb{R})$.

3. Supposons qu'il existe $((Q,S),(R,T)) \in (O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2$ tel que $A = QS = RT$. En tranposant, on obtient $SQ^{\top} = TR^{\top}$. Ainsi

$$S^2 = SQ^{\top}QS = TR^{\top}RT = T^2$$

Première méthode. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le lemme des noyaux,

$$\operatorname{Ker}(S^2 - \lambda^2 I_n) = \operatorname{Ker}(S - \lambda I_n) \oplus \operatorname{Ker}(S + \lambda I_n)$$

Mais comme $\operatorname{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Ker}(S+\lambda I_n) = \{0\}$. Ainsi $\operatorname{Ker}(S^2-\lambda^2 I_n) = \operatorname{Ker}(S-\lambda I_n)$. De la même manière, $\operatorname{Ker}(T^2-\lambda^2 I_n) = \operatorname{Ker}(T-\lambda I_n)$. Or $S^2 = T^2$ donc $\operatorname{Ker}(S - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(T - \lambda I_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Mais comme $\operatorname{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\operatorname{Sp}(T) \subset \mathbb{R}_+^*$, S et T ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres. Comme S et T sont diagonalisables, elles sont égales.
Deuxième méthode. Comme S est diagonalisable à valeurs propres positives, les valeurs propres de S sont les racines carrées des valeurs propres de S^2. Il en est de même pour T. Comme $S^2 = T^2$, S et T ont même spectre. Il existe donc $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(P_1, P_2) \in O_n(\mathbb{R})^2$ tels que $S = P_1DP_1^{\top}$ et $T = P_2DP_2^{\top}$. Comme $S^2 = T^2$, $P_1D^2P_1^{\top} = P_2D^2P_2^{\top}$ ou encore $PD^2 = D^2P$ en posant $P = P_2^{\top}P_1$. Comme $D^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$, $P_{i,j}\lambda_j^2 = \lambda_i^2 P_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Ceci peut encore s'écrire $P_{i,j}(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_j+\lambda_i) = 0$. Mais comme $\lambda_i + \lambda_j > 0$, $P_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i)$ ce qui signifie $P_{i,j}\lambda_j = \lambda_i P_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On en déduit que $PD = DP$ ou encore $P_1DP_1^{\top} = P_2DP_2^{\top}$ i.e. $S = T$.

4. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite (A_p) à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ convergeant vers A. D'après la question précédente, il existe une suite (Q_p) à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})$ et une suite (S_p) à valeurs dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A_p = Q_pS_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Or $O_n(\mathbb{R})$ est compact donc il existe une suite extraite $(Q_{\varphi(p)})$ convergeant vers $Q \in O_n(\mathbb{R})$. Alors la suite de terme général $S_{\varphi(p)} = Q_{\varphi(p)}^{\top}A$ converge vers $S = Q^{\top}A$. En effet, l'application $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto X^{\top}A$ est continue car elle est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de dimension finie. Or $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{\varphi(p)} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $S \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$. On a alors bien $A = QS$ avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Le couple (Q,S) n'est pas nécessairement unique. En effet, si $A = 0$, on peut prendre $S = 0$ et Q quelconque dans $O_n(\mathbb{R})$.

Solution 80

Soit (S_n) une suite à valeurs dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ convergeant vers $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie donc il est fermé. Ainsi $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On peut également utiliser la continuité de la transposition (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie).
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X^{\top}S_pX \geq 0$. Or l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto X^{\top}MX$ est continue comme endomorphisme d'un espace de dimension finie. On en déduit que $\lim\limits_{p\to+\infty} X^{\top}S_pX = X^{\top}SX$ et donc $X^{\top}SX \geq 0$ par passage à la limite. On a donc bien $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Par caractérisation séquentielle, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.

Solution 81

---

1. $(A^{\top}A)^{\top} = A^{\top}(A^{\top})^{\top} = A^{\top}A$ donc $A^{\top}A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^{\top}A^{\top}AX = \|AX\|^2 \geq 0$ donc $A^{\top}A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. D'après le théorème spectral, il existe une matrice $V \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $V^{\top}A^{\top}AV$ soit une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $A^{\top}A$. Comme $r = \operatorname{rg}(A^{\top}A)$, r valeurs propres sont non nulles (et donc strictement positives) et $n - r$ sont nulles. Quitte à réordonner éventuellement les vecteurs propres, on a le résultat voulu.

3. Puisque $V^{\top}A^{\top}AV = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, on a notamment $V_2^{\top}A^{\top}AV_2 = 0$ et donc $\|AV_2\|^2 = 0$. On en déduit que $AV_2 = 0$.

4. On a $U_1^{\top}U_1 = I_r$. Les r colonnes de U_1 forment donc une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ que l'on peut compléter en une base orthonormée de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Autrement dit, il existe $U_2 \in \mathcal{M}_{m,m-r}(\mathbb{R}$ telle que $U = (U_1, U_2) \in O_m(\mathbb{R})$.

5. Un calcul par blocs donne bien $A = U\Sigma V^{\top}$.

Solution 82

1. Comme A est semblable à une matrice réelle triangulaire, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Notamment, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Alors $AX = \lambda X$ puis $X^\top AX = \lambda X^\top X$. En tranposant, on obtient $X^\top A^\top X = \lambda X^\top X$ i.e. $X^\top AX = -\lambda X^\top X$ car $A^\top = -A$. Ainsi $\lambda X^\top X = -\lambda X^\top X$ puis $\lambda = 0$ car $X^\top X = \|X\|^2 > 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
2. Comme 0 est l'unique valeur propre de A et χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, $\chi_A = X^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$.
3. Par conséquent, $(A^2)^n = A^{2n} = (A^n)^2 = 0$ donc A^2 est nilpotente. Sa seule valeur propre est donc 0. De plus, $(A^2)^\top = (A^\top)^2 = (-A)^2 = A^2$ donc A^2 est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable en vertu du théorème spectral. Comme 0 est son unique valeur propre, elle est semblable à la matrice nulle et est donc nulle.
4. Remarquons que $A^\top A = -A^2 = 0$. Notamment, $\|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^\top A) = 0$. On en déduit que $A = 0$.

Solution 83

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable.
2. On trouve sans difficulté $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2\}$, $E_0(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. **a.** On a clairement $\mathrm{rg}(A - I_n) = 2$ donc $\dim \mathrm{Ker}(A - I_n) = n - 2 \geq 1$. Ainsi 1 est valeur propre de A et on peut ajouter que $\dim E_1(A) = n - 2$.

   b. **Première méthode :** On pose $A - I_n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & C^\top \\ \hline C & 0 \end{array}\right)$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs donne alors aisément $(A - I_3)^3 = (n-1)(A - I_3)$. On en déduit que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $(\lambda - 1)^3 = (n-1)(\lambda - 1)$. De plus, si $\lambda \neq 1$, $(\lambda - 1)^2 = n - 1$.

   Deuxième méthode Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Alors $\sum_{i=1}^n x_i = \lambda x_1$ et pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, $x_1 + x_j = \lambda x_j$. En sommant ces $n-1$ dernières égalités, on obtient, $(n-1)x_1 + \sum_{j=2}^n x_j = \lambda \sum_{j=2}^n x_j$. En tenant compte de la première égalité, on obtient $(n-1)x_1 + \lambda x_1 - x_1 = \lambda(\lambda x_1 - x_1)$ ou encore $(\lambda - 1)^2 x_1 = (n-1)x_1$. On ne peut avoir $x_1 = 0$ sinon pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, $x_j = \lambda x_j$ puis $x_j = 0$ car $\lambda \neq 1$. Ceci entraîne $X = 0$, ce qui est absurde. On en conclut que $(\lambda - 1)^2 = n - 1$.

   c. On sait déjà que $\dim E_1(A) = n - 2$. D'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 1 + \sqrt{n-1}, 1 - \sqrt{n-1}\}$. Comme $\mathrm{tr}(A) = n$, $\alpha = 1 + \sqrt{n-1}$ et $\beta = 1 - \sqrt{n-1}$ sont tous deux valeurs propres de A et $\dim E_\alpha(A) = \dim E_\beta(A) = 1$.
   On trouve sans peine $E_1(A) = \mathrm{vect}(E_2 - E_3, E_2 - E_4, \dots, E_2 - E_n)$ en notant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On trouve également $E_\alpha(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_\beta(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Solution 84

1. On vérifie que la congruence est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.
   - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $I_n^\top A I_n = A$ et $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ donc la congruence est réflexive.

- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que B est congruente à A. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^\top AP$. Comme P est inversible, $P^\top$ l'est égalemente et $(P^\top)^{-1} = (P^{-1})^\top$. On en déduit que $A = (P^{-1})^\top BP^{-1}$ avec $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi A est congruente à B et la congruence est symétrique.
- Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que B est congruente à A et C est congruente à B. Il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{R})^2$ tel que $B = P^\top AP$ et $C = Q^\top BQ$. Alors $C = Q^\top P^\top APQ = (PQ)^\top A(PQ)$ et $PQ \in GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi C est congruente à A et la congruence est transitive.

2. **a.** Notons $J_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^\top$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A i.e. les coefficients diagonaux de D. On peut supposer $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ strictement positives et $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p,q}$ strictement positives. Si on pose Δ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}$ puis $\sqrt{-\lambda_{p+1}}, \dots, \sqrt{-\lambda_{p+q}}$ et enfin des 1, on a $\Delta J_{p,q}\Delta^\top = D$ puis $A = (P\Delta)J_{p,q}(P\Delta)^\top$ ou encore $A = Q^\top J_{p,q}Q$ avec $Q = (P\Delta)^\top \in GL_n(\mathbb{R})$ car P et Δ sont inversibles. Ainsi A et $J_{p,q}$ sont congruentes.

b. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de même signature (p, q), alors elles sont toutes deux congruentes à $J_{p,q}$. Comme la congruence est une relation d'équivalence, A et B sont elles-mêmes congruentes.

3. **a.** Il suffit de poser $E_+ = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(S) \cap \mathbb{R}_+^*} E_\lambda(S)$, $E_- = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(S) \cap \mathbb{R}_-^*} E_\lambda(S)$ et $E_0 = \mathrm{Ker}\, S$.

b. Soit $X \in E_+ \cap (G \oplus H)$. Comme $X \in E_+$, $X^\top SX \geq 0$ et comme $X \in G \oplus H$, $X^\top SX \leq 0$. Ainsi $X^\top SX = 0$ et donc $X = 0$ car $X \in E_+$. Donc E_+ et $G \oplus H$ sont en somme directe. Or $E_+ \oplus G \oplus H \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim E_+ + \dim(G \oplus H) \leq n$ i.e. $p + n - \dim F \leq n$ i.e. $p \leq \dim F$.
Soit $X \in F \cap (E_- \oplus E_0)$. Comme $X \in F$, $X^\top SX \geq 0$ et comme $X \in E_- \oplus E_0$, $X^\top SX \leq 0$. Ainsi $X^\top SX = 0$ et donc $X = 0$ car $X \in F$. Donc F et $E_- \oplus E_0$ sont en somme directe. Or $F \oplus E_- \oplus E_0 \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim F + \dim(E_- \oplus E_0) \leq n$ i.e. $\dim F + n - p \leq n$ i.e. $\dim F \leq p$. On en déduit que $p = \dim F$.
Soit $X \in E_- \cap (F \oplus H)$. Comme $X \in E_-$, $X^\top SX \leq 0$ et comme $X \in F \oplus H$, $X^\top SX \geq 0$. Ainsi $X^\top SX = 0$ et donc $X = 0$ car $X \in E_-$. Donc E_- et $F \oplus H$ sont en somme directe. Or $E_- \oplus F \oplus H \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim E_- + \dim(F \oplus H) \leq n$ i.e. $q + n - \dim G \leq n$ i.e. $q \leq \dim G$.
Soit $X \in G \cap (E_+ \oplus E_0)$. Comme $X \in G$, $X^\top SX \leq 0$ et comme $X \in E_+ \oplus E_0$, $X^\top SX \geq 0$. Ainsi $X^\top SX = 0$ et donc $X = 0$ car $X \in G$. Donc G et $E_+ \oplus E_0$ sont en somme directe. Or $G \oplus E_+ \oplus E_0 \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim G + \dim(E_+ \oplus E_0) \leq n$ i.e. $\dim G + n - q \leq n$ i.e. $\dim G \leq q$. On en déduit que $q = \dim G$.

4. Soient A et B deux matrices congruentes de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^\top AP$. Notons (p, q) la signature de A et (r, s) la signature de B.
On note $E_+ = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathbb{R}_+^*}$, $E_- = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathbb{R}_-^*}$ et $E_0 = \mathrm{Ker}\, A$. On a donc $\dim E_+ = p$ et $\dim E_- = q$.
Posons $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ PX \in E_+\}$, $G = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ PX \in E_-\}$ et $H = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ PX \in E_0\}$. On vérifie aisément que

- $\forall X \in F \setminus \{0\}$, $X^\top BX = (PX)^\top A(PX) > 0$;
- $\forall X \in G \setminus \{0\}$, $X^\top BX = (PX)^\top A(PX) < 0$;
- $\forall X \in H$, $X^\top BX = (PX)^\top A(PX) = 0$;
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G \oplus H$.

D'après la question précédente, $\dim F = r$ et $\dim G = s$. De plus, comme P est inversible, $\dim F = \dim E_+ = p$ et $\dim G = \dim E_- = q$. Ainsi $(r, s) = (p, q)$.

Solution 85

Remarquons déjà que φ est clairement bilinéaire.
Supposons que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$. Comme $\varphi(X, Y)$ est un scalaire,

$$\varphi(X, Y) = \varphi(X, Y)^\top = Y^\top A^\top X = Y^\top AX = \varphi(Y, X)$$

donc φ est symétrique. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X, X) = X^\top AX \geq 0$ et on a égalité que si $X = 0$. Ainsi φ est bien un produit scalaire.
Réciproquement, supposons que φ est un produit scalaire. Notons $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\varphi(E_i, E_j) = \varphi(E_j, E_i)$ i.e. $E_i^\top AE_j = E_j^\top AE_i$ i.e. $A_{j,i} = A_{i,j}$ donc A est symétrique. Enfin, $X\top AX \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec égalité si et seulement si $X = 0$ donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Solution 86

Première méthode. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients strictement positifs telles que $Q^\top AQ = \Delta$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de Δ et C la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_n}$. Alors, en notant $M = QC$, on a $M^\top AM = I_n$.
La matrice $M^\top BM$ est symétrique donc il existe $R \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $R^\top M^\top BMR = D$. Posons $P = MR$. On a bien $P^\top BP = D$ et $P^\top AP = R^\top(M^\top AM)R = R^\top R = I_n$ car $R \in O_n(\mathbb{R})$.
Deuxième méthode. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Il existe alors $(f, g) \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $g = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(g)$. Comme $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, f et g sont respectivement auto-adjoint défini positif et auto-adjoint pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
On prouve alors classiquement qu'en posant $(x \mid y) = \langle f(x), y\rangle$ pour $(x, y) \in E^2$, $(\cdot \mid \cdot)$ est aussi un produit scalaire sur E. Comme g est auto-adjoint pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $f^{-1} \circ g$ est auto-adjoint pour $(\cdot \mid \cdot)$. D'après le théorème spectral, il existe une base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E, orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, dans laquelle la matrice de g est une matrice diagonale D. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{E}$. Puisque $\mathcal{E}$ est orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, $P^\top AP = I_n$. Par ailleurs, la matrice de $f^{-1} \circ g$ dans la base $\mathcal{E}$ est D donc $P^{-1}A^{-1}BP = D$ i.e. $P^\top BP = D$.

Solution 87

1. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^\top$. Par continuité de l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PMP^\top$, $\exp(A) = P\exp(D)P^\top$. Or $\exp(D) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. Ainsi $\exp(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ telles que $B = P\Delta P^\top$. De plus, les μ_i sont strictement positifs. On peut donc poser $\lambda_i = \ln(\mu_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $A = PDP^\top$. La première question montre alors que $\exp(A) = P\exp(D)P^\top = P\Delta P^\top = B$.
Soit $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = \exp(A) = \exp(C)$. Il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $E = \operatorname{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n)$ telles que $C = QEQ^\top$. De plus $Q\exp(E)Q^\top = P\exp(D)P^\top$. En posant $R = P^\top Q$, on a donc $R\exp(E) = \exp(D)R$. Ainsi pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $R_{i,j}e^{\nu_j} = R_{i,j}e^{\lambda_i}$ i.e. $R_{i,j}(e^{\nu_j} - e^{\lambda_i}) = 0$ de sorte que $R_{i,j} = 0$ ou $e^{\lambda_i} = e^{\nu_j}$. Si $R_{i,j} = 0$, alors $R_{i,j}\nu_j = R_{i,j}\lambda_i$. Sinon, $e^{\lambda_i} = e^{\nu_j}$ puis $\lambda_i = \nu_j$ par injectivité de l'exponentielle. On a donc à nouveau $R_{i,j}\nu_j = R_{i,j}\lambda_i$. Ceci signifie que $RE = DR$ ou encore $QEQ^\top = PDP^\top$ i.e. $C = A$.

Solution 88

1. Tout d'abord, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par symétrie du produit scalaire. Soit alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
$$X^\top AX = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i x_j \langle f_i, f_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{j} x_i f_i, \sum_{j=1}^{n} x_j f_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \right\|^2 \ge 0$$
Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. Supposons $\det(A) = 0$. Alors $A \notin GL_n(\mathbb{R})$ puis $0 \in \operatorname{Sp}(A)$. On en déduit que A est symétrique positive mais pas définie positive. Autrement dit, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $X^\top AX = 0$. Le calcul de la question précédente montre que $\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \right\|^2 = 0$ i.e. $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0_E$. Comme X n'est pas nul, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.
Inversement, supposons la famille $(f_1, \dots, f_n)$ liée. Il existe alors $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0_E$ i.e. $\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \right\|^2 = 0$. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a à nouveau $X^\top AX = 0$ avec X non nul. On en déduit que A est symétrique positive mais pas définie positive. Ainsi $0 \in \operatorname{Sp}(A)$ puis $\det(A) = 0$.

Solution 89

Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Notons $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $X^\top MX \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notamment, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$M_{i,i} = E_i^\top ME_i \geq 0$$

Solution 90

1. L'application $s : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$ est clairement une symétrie. De plus,

$$\forall \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \langle s(M), N\rangle = \operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}((MN)^\top) = \operatorname{tr}(N^\top M^\top) = \operatorname{tr}(M^\top N^\top) = \langle M, s(N)\rangle$$

donc s est une symétrie auto-adjointe et donc une symétrie orthogonale. On en déduit que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

2. La transposition est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie. Ainsi la transposition est continue. En posant pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \exp(A)$. Par propriétés de la transposition,

$$S_n^\top = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A^\top)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(A^\top)$$

mais par continuité de la transposition et caractérisation séquentielle de la continuité, $\lim_{n\to+\infty} S_n^\top = \exp(A)^\top$. Par unicité de la limité, $\exp(A)^\top = \exp(A^\top)$.
Puisque $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(xB)^\top = \exp(xB^\top) = \exp(-xB) = \exp(xB)^{-1}$$

donc $\exp(xB) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Posons $\varphi(x) = \operatorname{tr}(A\exp(xB))$ pour $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, $\varphi(x) \leq \varphi(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi φ admet un maximum en 0. Par ailleurs, en notant $L : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(AM)$ et $\psi : x \mapsto \exp(xB)$, $\varphi = L \circ \psi$. D'après le cours, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et L est linéaire donc φ est également dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = L \circ \psi'(x) = L(B\exp(xB)) = \operatorname{tr}(AB\exp(xB))$$

Comme φ admet un maximum en 0, $\varphi'(0) = 0$ i.e. $\operatorname{tr}(AB) = 0$. On en déduit que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$. Ainsi, pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}UP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de sorte que

$$\operatorname{tr}(DU) = \operatorname{tr}(P^{-1}PU) = \operatorname{tr}(APUP^{-1}) \leq \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D)$$

En choisissant $U = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = 1$ si $\lambda_i \geq 0$ et $\varepsilon_i = -1$ sinon, on a bien $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de sorte que

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \operatorname{tr}(DU) \leq \operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| - \lambda_i \leq 0$$

Puisque les termes de cette somme sont positifs, ils sont tous nuls. Ainsi $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

4. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En reprenant les mêmes notations que précédemment,

$$\operatorname{tr}(AU) = \operatorname{tr}(PDP^{-1}U) = \operatorname{tr}(DV)$$

en posant $V = P^{-1}UP$. On a alors $\operatorname{tr}(DV) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{i,i}$. Puisque les colonnes de V sont de norme 1, on a $v_{i,i} \leq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Comme les λ_i sont positifs, $\lambda_i v_{i,i} \leq \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ puis $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ i.e. $\operatorname{tr}(DV) \leq \operatorname{tr}(D)$ ou encore $\operatorname{tr}(AU) \leq \operatorname{tr}(A)$.

Solution 91

Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$\|AX\|_2^2 = X^\top A^\top AX$$

Comme $A^\top A$ est symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(U_1, \dots, U_p)$ de vecteurs propres de $A^\top A$. Notons λ_i la valeur propre associée à U_i. Si $X = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_i$,

$$\|AX\|_2^2 = \|Y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \lambda_i \leq \max \operatorname{Sp}(A^\top A) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = \max \operatorname{Sp}(A^\top A)\|X\|_2^2$$

Ainsi

$$|||A||| \leq \sqrt{\max \operatorname{Sp}(A^\top A)}$$

Soit X un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ de $A^\top A$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est X. Alors

$$\|AX\|_2^2 = \|AX\|_2^2 = X^\top A^\top AX = \lambda X^\top X = \lambda\|X\|_2^2$$

Ainsi $|||A||| \leq \sqrt{\lambda}$. Par conséquent, $|||A||| = \max \operatorname{Sp}(A^\top A)$.

Solution 92

Tout d'abord, il est clair que C est bien symétrique.
D'après le théorème spectral, il existe des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ ainsi que des matrices orthogonales P et Q tels que $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^\top$ et $B = Q \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)Q^\top$. Ainsi

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ C_{i,j} = A_{i,j}B_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} P_{i,k}\lambda_k P_{j,k}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} Q_{i,l}\mu_l Q_{j,l}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda_k\mu_l P_{i,k}P_{j,k}Q_{i,l}Q_{j,l}$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
X^\top CX &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i C_{i,j} X_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} P_{i,k}\lambda_k P_{j,k}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} Q_{i,l}\mu_l Q_{j,l}\right) X_i X_j \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda_k\mu_l \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_{i,k}P_{j,k}Q_{i,l}Q_{j,l}X_iX_j \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda_k\mu_l \left(\sum_{i=1}^{n} P_{i,k}Q_{i,l}X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} P_{j,k}Q_{j,l}X_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda_k\mu_l \left(\sum_{i=1}^{n} P_{i,k}Q_{i,l}X_i\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Solution 93

1. On prouve classiquement que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

2. Posons $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k B^k}{k!}$. On sait que $S_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(xB)$. Par ailleurs, la transposition est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc la transposition est continue. Ainsi, $S_p^\top \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(xB)^\top$. Enfin, par propriétés de la transposition,

$$S_p^\top = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k (B^k)^\top}{k!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k (B^\top)^k}{k!} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(xB^\top) = \exp(-xB) = \exp(xB)^{-1}$$

Par unicité de la limité, $\exp(xB)^\top = \exp(xB)^{-1}$ i.e. $\exp(xB) \in O_n(\mathbb{R})$.

3. Posons $f(x) = \operatorname{tr}(\mathrm{A}\exp(x\mathrm{B}))$. D'après la question précédente et l'énoncé, $f(x) \leq f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi f admet un maximum en 0. L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x\mathrm{B})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \mathrm{B}\exp(x\mathrm{B})$ et l'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(\mathrm{AM})$ est linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \operatorname{tr}(\mathrm{AB}\exp(x\mathrm{B}))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme f admet un maximume en 0, $f'(0) = 0$ i.e. $\operatorname{tr}(\mathrm{AB}) = 0$ puis

$$\langle \mathrm{B}, \mathrm{A}\rangle = \operatorname{tr}(\mathrm{B}^\top \mathrm{A}) = \operatorname{tr}(-\mathrm{BA}) = -\operatorname{tr}(\mathrm{AB}) = 0$$

Ainsi $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
On peut alors aliquer le théorème spectral : il existe $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$. On a donc pour tout $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(\mathrm{DQ}) = \operatorname{tr}(\mathrm{P}^\top\mathrm{APQ}) = \operatorname{tr}(\mathrm{APQP}^\top) \leq \operatorname{tr}(\mathrm{A}) = \operatorname{tr}(\mathrm{D})$$

car $\mathrm{PQP}^\top = \mathrm{PQP}^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ($\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe). En notant $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et en prenant $\mathrm{Q} = \mathrm{I}_n - 2\mathrm{E}_{i,i}$ (avec $(\mathrm{E}_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), on obtient

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k - 2\lambda_i \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

i.e. $\lambda_i \geq 0$. Ainsi $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

> **Remarque.** On s'aperçoit a posteriori que l'on utilise que des matrices de réflexion. On rappelle que si X est un vecteur unitaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice du projecteur orthogonal sur vect(U) dans la base canonique est $\mathrm{UU}^\top$. La matrice de la réflexion d'hyperplan $\operatorname{vect}(\mathrm{U})^\perp$ est donc $\mathrm{I}_n - 2\mathrm{UU}^\top$. On peut également vérifier à la main que cette matrice est bien orthogonale. On peut donc écrire
>
> $$\operatorname{tr}(\mathrm{A}(\mathrm{I}_n - 2\mathrm{UU}^\top)) \leq \operatorname{tr}(\mathrm{A})$$
>
> ce qui donne
>
> $$\operatorname{tr}(\mathrm{AUU}^\top) \geq 0$$
>
> or $\operatorname{tr}(\mathrm{AUU}^\top) = \operatorname{tr}(\mathrm{U}^\top\mathrm{AU}) = \mathrm{U}^\top\mathrm{AU}$ en confondant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}$. On a donc $\mathrm{U}^\top\mathrm{AU} \geq 0$ pour tout vecteur unitaire U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit sans peine que $\mathrm{X}^\top\mathrm{AX} \geq 0$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ceci prouve que $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (après avoir montré que A était symétrique).

4. Réciproquement, supposons $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note à nouveau $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux positifs. Pour $\mathrm{U} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(\mathrm{AU}) = \operatorname{tr}(\mathrm{PDP}^\top\mathrm{U}) = \operatorname{tr}(\mathrm{DQ}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathrm{Q}_{i,i}$$

en posant $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^\top\mathrm{UP} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Comme les lignes (ou colonnes) de Q sont unitaires, $|\mathrm{Q}_{i,j}| \leq 1$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. A fortiori, $\mathrm{Q}_{i,i} \leq 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Comme les λ_i sont positifs,

$$\operatorname{tr}(\mathrm{AU}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathrm{Q}_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{tr}(\mathrm{D}) = \operatorname{tr}(\mathrm{A})$$

Polynômes orthogonaux

Solution 94

---

1. La symétrie de φ est évidente. La bilinéarité de φ provient de la linéarité de l'intégrale. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ donc φ est positive. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Comme P^2 est continue positive qur $[-1,1]$, on en déduit que P^2 est nulle sur $[-1,1]$. Le polynôme P^2 admet donc une infinité de racines : il est donc nul. Par conséquent, P est également nul. Ceci prouve que φ est définie.
φ est donc un produit scalaire.

2. 1 et -1 sont des racines de multiplicité n de Q_n. On en déduit que $\mathrm{Q}_n^{(k)}(-1) = \mathrm{Q}_n^{(k)}(1) = 0$ pour $k < n$.

3. Soit $k, l \in [\![0, n]\!]$ avec $k \neq l$. On peut supposer $k < l$.
Supposons $l \geq 1$ pour se donner une idée de la marche à suivre. On utilise une intégration par parties :

$$\langle \mathrm{P}_k, \mathrm{P}_l \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{Q}_k^{(k)}(t)\mathrm{Q}_l^{(l)}(t)\ \mathrm{d}t = \left[\mathrm{Q}_k^{(k)}(t)\mathrm{Q}_l^{(l-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{Q}_k^{(k+1)}(t)\mathrm{Q}_l^{(l-1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

Or $l-1 < l$ donc $\mathrm{Q}_l^{(l-1)}(-1) = \mathrm{Q}_l^{(l-1)}(1) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\langle \mathrm{Q}_k^{(k)}, \mathrm{Q}_l^{(l)} \rangle = -\langle \mathrm{Q}_k^{(k+1)}, \mathrm{Q}_l^{(l-1)} \rangle$.
On peut donc prouver à l'aide d'une récurrence finie que $\langle \mathrm{Q}_k^{(k)}, \mathrm{Q}_l^{(l)} \rangle = (-1)^l \langle \mathrm{Q}_k^{(k+l)}, \mathrm{Q}_l \rangle$. Or $k < l$ donc $k + l > 2k$. Puisque $\deg \mathrm{Q}_k = 2k$, $\mathrm{Q}_k^{(k+l)} = 0$. On a donc $\langle \mathrm{P}_k, \mathrm{P}_l \rangle = 0$.
Les P_k sont donc orthogonaux deux à deux. La famille $(\mathrm{P}_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc orthogonale. De plus, $\deg \mathrm{Q}_k = 2k$ donc $\deg \mathrm{P}_k = \deg \mathrm{Q}_k^{(k)} = k$. La famille $(\mathrm{P}_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de polynômes à degrés étagés : elle est donc libre. Comme elle comporte $n + 1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n + 1$, c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

4. Il est clair que L est linéaire. De plus, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$,

$$\deg((\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'') = \deg(\mathrm{X}^2 - 1) + \deg(\mathrm{P}'') \leq 2 + n - 2 = n$$

et

$$\deg(\mathrm{XP}') = \deg(\mathrm{X}) + \deg(\mathrm{P}') \leq 1 + n - 1 = n$$

On en déduit que $\deg(\mathrm{L}(\mathrm{P})) \leq n$ i.e. $\mathrm{L}(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Ainsi L est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{L}(\mathrm{P}), \mathrm{Q} \rangle &= \int_{-1}^{1} \left((t^2 - 1)\mathrm{P}''(t) + 2t\mathrm{P}'(t)\right)\mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)\mathrm{P}''(t)\mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t + 2\int_{-1}^{1} t\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

En intégrant par parties,

$$\int_{-1}^{1}(t^2-1)\mathrm{P}''(t)\mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t = \left[(t^2-1)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)\right] - \int_{-1}^{1} \mathrm{P}'(t)\left((t^2-1)\mathrm{Q}'(t) + 2t\mathrm{Q}(t)\right)\ \mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\ \mathrm{d}t - 2\int_{-1}^{1} t\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\langle \mathrm{L}(\mathrm{P}), \mathrm{Q} \rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2 - 1)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\ \mathrm{d}t$$

Cette dernière expression est invariante par échange de P et Q donc $\langle \mathrm{L}(\mathrm{P}), \mathrm{Q} \rangle = \langle \mathrm{P}, \mathrm{L}(\mathrm{Q}) \rangle$. Finalement, L est bien un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

5. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors $\mathrm{P}_k \in \mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$. Il est clair que $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ est stable par L donc $\mathrm{L}(\mathrm{P}_k) \in \mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$. Or $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ donc $\mathrm{L}(\mathrm{P}_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\langle \mathrm{L}(\mathrm{P}_k), \mathrm{P}_j \rangle}{\|\mathrm{P}_j\|^2}\mathrm{P}_j$. Mais comme L est auto-adjoint, $\langle \mathrm{L}(\mathrm{P}_k), \mathrm{P}_j \rangle = \langle \mathrm{P}_k, \mathrm{L}(\mathrm{P}_j) \rangle$. Or $\mathrm{L}(\mathrm{P}_j) \in \mathbb{R}_j[\mathrm{X}] = \mathrm{vect}(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_j)$ donc $\langle \mathrm{P}_k, \mathrm{L}(\mathrm{P}_j) \rangle = 0$ pour $j < k$ car $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ est orthonormée. Ainsi $\mathrm{L}(\mathrm{P}_k) = \frac{\langle \mathrm{L}(\mathrm{P}_k), \mathrm{P}_k \rangle}{\|\mathrm{P}_k\|^2}\mathrm{P}_k$ donc P_k est un vecteur propre de L.

Solution 95

1. Remarquons déjà que l'intégrale définissant $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle$ est bien définie car $t \mapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t^2} \underset{t \to \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement bilinéaire, symétrique et positive. Enfin, soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ vérifiant $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P} \rangle = 0$. Comme $t \mapsto \mathrm{P}(t)^2 e^{-t^2}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, elle y est constamment nulle. Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \mathrm{P}(t)^2$ est nulle sur $\mathbb{R}$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines : il est nul.
On a bien vérifié que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. La matrice de L dans la base canonique est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $0, -2, \dots, -2n$. Ainsi L admet pour valeurs propres les $n+1$ réels distincts $0, -2, \dots, -2n$. Comme $\dim \mathrm{E} = n+1$, on peut affirmer que L est diagonalisable.

3. Soient $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$. Alors

$$\langle \mathrm{L}(\mathrm{P}), \mathrm{Q} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{P}''(t) - 2t\mathrm{P}'(t))\mathrm{Q}(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}''(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - 2\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto \mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives $t \mapsto -2te^{-t^2}$ et $t \mapsto \mathrm{P}''(t)\mathrm{Q}(t) + \mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)$, on obtient par une intégration par parties :

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\left[\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t) + \mathrm{P}''(t)\mathrm{Q}(t)\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que

$$\langle \mathrm{L}(\mathrm{P}), \mathrm{Q} \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Comme cette expression est invariante par échange de P et Q,

$$\langle \mathrm{L}(\mathrm{P}), \mathrm{Q} \rangle = \langle \mathrm{P}, \mathrm{L}(\mathrm{Q}) \rangle$$

L est bien un endomorphisme auto-adjoint.

4. Notons $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique. On sait alors que $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ est une base orthonormée de E et que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{vect}(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_k) = \mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors $\mathrm{P}_k \in \mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$. Il est clair que $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ est stable par L donc $\mathrm{L}(\mathrm{P}_k) \in \mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$. Or $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_k)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ donc $\mathrm{L}(\mathrm{P}_k) = \sum_{j=0}^{k} \langle \mathrm{L}(\mathrm{P}_k), \mathrm{P}_j \rangle \mathrm{P}_j$. Mais comme L est auto-adjoint, $\langle \mathrm{L}(\mathrm{P}_k), \mathrm{P}_j \rangle = \langle \mathrm{P}_k, \mathrm{L}(\mathrm{P}_j) \rangle$. Or $\mathrm{L}(\mathrm{P}_j) \in \mathbb{R}_j[\mathrm{X}] = \mathrm{vect}(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_j)$ donc $\langle \mathrm{P}_k, \mathrm{L}(\mathrm{P}_j) \rangle = 0$ pour $j < k$ car $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ est orthonormée. Ainsi $\mathrm{L}(\mathrm{P}_k) = \langle \mathrm{L}(\mathrm{P}_k), \mathrm{P}_k \rangle \mathrm{P}_k$ donc P_k est un vecteur propre de L. Finalement, $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ est bien une base de E formée de vecteurs propres de L.

Divers

Solution 96

---

1. Soient $x, y, z \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle z, u(\lambda x + \mu y) \rangle &= -\langle u(z), \lambda x + \mu y \rangle && \text{par antisymétrie} \\
&= -\lambda \langle u(z), x \rangle - \mu \langle u(z), y \rangle && \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\
&= \lambda \langle z, u(x) \rangle + \mu \langle z, u(y) \rangle && \text{par antisymétrie}
\end{aligned}$$

On a donc $\langle z, u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu(y) \rangle = 0$ pour tout $z \in \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{E}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$, $u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu(y) = 0_\mathrm{E}$. D'où la linéarité de u.

2. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soient $x, y \in \mathrm{E}$. Alors $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$. Or, par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle$$

D'où l'antisymétrie de u.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ On a vu dans la question précédente que u était linéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans cette base. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_j), e_i \rangle e_i$ pour $1 \leq j \leq n$. On en déduit que $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Or, par antisymétrie de u, $\langle u(e_j), e_i \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle$ i.e. $a_{ij} = -a_{ji}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. On en déduit que A est antisymétrique.

$(iii) \Rightarrow (i)$ u est bien linéaire par hypothèse. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Soit $x \in \mathrm{E}$ et X la matrice colonne de x dans $\mathcal{B}$. Alors

$$\langle u(x), x\rangle = (\mathrm{MX})^\top \mathrm{X} = -\mathrm{X}^\top \mathrm{MX} = -\langle x, u(x)\rangle$$

On en déduit que $\langle u(x), x\rangle = 0$.

3. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et considérons Φ l'isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à un endomorphisme de E associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. D'après la question précédente, $\Phi(\mathrm{A}(\mathrm{E})) = \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ où $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques. On a donc également $\mathrm{A}(\mathrm{E}) = \Phi^{-1}(\mathrm{A}_n(\mathbb{R}))$ donc $\mathrm{A}(\mathrm{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ comme image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et $\dim \mathrm{A}(\mathrm{E}) = \dim \mathrm{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ car Φ est un isomorphisme.

4. Soient $x \in \operatorname{Ker} u$ et $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $z \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(z)$.

$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(z)\rangle = -\langle z, u(x)\rangle = -\langle z, 0_{\mathrm{E}}\rangle = 0$$

Ainsi $\operatorname{Im} u \subset (\operatorname{Ker} u)^\perp$. D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} u = n - \dim \operatorname{Ker} u = \dim(\operatorname{Ker} u)^\perp$. Ainsi $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

5. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Soient $x \in \mathrm{F}^\perp$. Alors, pour tout $y \in \mathrm{F}$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = 0$ car $u(y) \in \mathrm{F}$. Ainsi $u(x) \in \mathrm{F}^\perp$, ce qui prouve que $u(\mathrm{F}^\perp) \subset \mathrm{F}^\perp$.

Solution 97

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Si A est nulle, $\operatorname{rg} \mathrm{A} = 0$ et donc le rang de A est pair.
Sinon, notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on se donne une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = \mathrm{S} \oplus \operatorname{Ker} u$ où S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$. La matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$ est de la forme $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ \mathrm{C} & 0 \end{pmatrix}$ avec B carrée de taille $p = \dim \mathrm{S}$. Si on note P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, P est orthogonale et $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{P}^\top \mathrm{AP}$. On en déduit que A' est également antisymétrique et donc B est antisymétrique et C est nulle. On a donc $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{rg} \mathrm{A}' = \operatorname{rg} \mathrm{B}$ mais comme S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{rg} \mathrm{A}' = \dim \mathrm{S} = p$, ce qui prouve que B est inversible. Or $\det(\mathrm{B}^\top) = \det(-\mathrm{B}) = (-1)^p \det \mathrm{B}$ donc p est pair sinon on aurait $\det \mathrm{B} = 0$ et B non inversible.

Solution 98

---

1. Si A est symétrique $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}$ et donc $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$. On en déduit que a est une symétrie orthogonale.

2. **Première méthode.** Remarquons que

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A}^\top)^2 + \mathrm{A}^\top - \mathrm{I}_n = (\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} - \mathrm{I}_n)^2 + (\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} - \mathrm{I}_n) - \mathrm{I}_n$$

Après simplification, on obtient

$$\mathrm{A}^4 + 2\mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_n = 0$$

Ainsi $\mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X} - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)^3$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi $\operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{-1, 1\}$. On en déduit que 0 est la seule valeur propre de $\mathrm{A}^\top - \mathrm{A} = \mathrm{A}^2 - \mathrm{I}_n$. Autrement dit, $\mathrm{M} = \mathrm{A}^\top - \mathrm{A}$ est nilpotente. Comme $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} - \mathrm{I}_n$, $\mathrm{A}^\top$ commute avec A puis $\mathrm{M}^\top$ commute avec M. On en déduit que $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est également nilpotente. Comme $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est symétrique réelle, elle est également diagonalisable donc nulle. Ainsi

$$\|\mathrm{M}\|^2 = \operatorname{tr}(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}) = 0$$

puis $\mathrm{M} = 0$. Ceci signifie que $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}$ et on est ramené à la question précédente : a est à nouveau une symétrie orthogonale.

Deuxième méthode. Posons $\mathrm{S} = \dfrac{\mathrm{A} + \mathrm{A}^\top}{2}$ et $\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{A} - \mathrm{A}^\top}{2}$. Alors $\mathrm{A} = \mathrm{S} + \mathrm{T}$ et S et T sont respectivement symétrique et antisymétrique. Comme A et $\mathrm{A}^\top$ commutent, S et T commutent également. L'égalité $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} - \mathrm{I}_n$ peut alors s'écrire

$$\mathrm{S} - \mathrm{T} = \mathrm{S}^2 + \mathrm{T}^2 + 2\mathrm{ST} + \mathrm{S} + \mathrm{T} - \mathrm{I}_n$$

ou encore

$$\mathrm{S}^2 + \mathrm{T}^2 + 2\mathrm{ST} + 2\mathrm{T} = \mathrm{I}_n$$

Remarquons que ST est antisymétrique. Comme toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique,

$$\begin{cases} S^2 + T^2 = I_n \\ ST + T = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} S^2 + T^2 = I_n \\ S^2T^2 = T^2 \end{cases}$$

Comme S^2 et T^2 sont symétriques et diagonalisables, elles possèdent une base commune de vecteurs propres. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ leurs valeurs propres respectives, on a alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \begin{cases} \lambda + \mu & = 1 \\ \lambda\mu & = \mu \end{cases}$$

On en déduit sans peine que $\lambda_i = 1$ et $\mu_i = 0$. Ainsi $T^2 = 0$ et $S^2 = I_n$. De plus,

$$\|T\|^2 = \operatorname{tr}(T^\top T) = \operatorname{tr}(-T^2) = 0$$

donc $T = 0$. Ainsi $A = S = A^\top$ et $A^2 = S^2 = I_n$. a est donc une symétrie orthogonale.

Solution 99

---

1. Soit $(x, y) \in E^2$. Alors $\langle u(x + y), x + y\rangle = 0$. En développant, on obtient

   $$\langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle$$

   puis $\langle u(y), x\rangle = -\langle u(x), y\rangle$ car $\langle u(x), x\rangle = \langle u(y), y\rangle = 0$.
   Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. On note A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. On a alors $A_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. D'après ce qui précède,

   $$A_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle u(e_i), e_j\rangle = -A_{j,i}$$

   Ainsi A est antisymétrique.

2. Soit $x \in (\operatorname{Ker} u)^\perp$. Alors pour tout $y \in \operatorname{Ker} u$,

   $$\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = -\langle x, 0_E\rangle = 0$$

   donc $u(x) \in (\operatorname{Ker} u)^\perp$ et $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ est stable par u.

3. On choisit une base orthonormale de $\operatorname{Ker} u$ et une base orthnormale de $(\operatorname{Ker} u)^\perp$. La concaténation de ces deux bases est une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ où $N \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ avec $r = \dim(\operatorname{Ker} u)^\perp = n - \dim \operatorname{Ker} u = \operatorname{rg} u$. Or $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(N)$ donc N est inversible.

4. Comme A est antisymétrique, N l'est également. Ainsi $\det(N) = \det(N^\top) = \det(-N) = (-1)^r \det(N)$. Comme N est inversible, $\det(N) \neq 0$ donc $(-1)^r = 1$ et $r = \operatorname{rg}(u)$ est pair.

Solution 100

---

1. $s^* = (u^2)^* = (u^*)^2 = (-u)^2 = u^2 = s$ donc s est auto-adjoint.

2. Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors $\langle s(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2$. Mais par définition de l'adjoint,

   $$\langle s(x), x\rangle = \langle u^2(x), x\rangle = \langle u(x), u^*(x)\rangle = -\|u(x)\|^2 \geq 0$$

   Comme $\|x\|^2 > 0$ (x est non nul), $\lambda = -\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0$. Mais comme λ n'est pas nulle, $\lambda < 0$.

3. $u^2(x) = s(x) = \lambda x \in \mathrm{F}$ donc $u(\mathrm{F}) = \mathrm{vect}(u(x), u^2(x)) \subset \mathrm{F}$.

4. Posons $e_1 = \dfrac{x}{\|x\|}$. De plus, $u(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ car sinon $s(x) = \lambda x \neq 0$, ce qui est impossible puisque $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_{\mathrm{E}}$. On peut donc poser $e_2 = \dfrac{u(x)}{\|u(x)\|}$. Posons également $a = \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} > 0$. On a bien $u(e_1) = ae_2$ et

$$u(e_2) = \frac{u^2(x)}{\|u(x)\|} = \frac{s(x)}{\|u(x)\|} = \frac{\lambda\|x\|}{\|u(x)\|}e_1$$

Or on a vu précédemment que $\lambda = -\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2}$ donc $u(e_2) = -ae_1$. Enfin, les vecteurs e_1 et e_2 sont unitaires et

$$\langle x, u(x)\rangle = \langle u^*(x), x\rangle = -\langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle$$

donc $\langle x, u(x)\rangle = 0$ de sorte que (e_1, e_2) est bien une base orthonormée de F.

5. Comme F est stable par u, $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par $u^* = -u$ et donc par u également. On peut alors montrer par récurrence qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme convenue.

6. Toute matrice antisymétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a > 0$.

Solution 101

---

1. Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{X}^\top\mathrm{AX}$ est un scalaire,

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{AX} = (\mathrm{X}^\top\mathrm{AX})^\top = \mathrm{X}^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{X} = -\mathrm{X}^\top\mathrm{AX}$$

donc $\mathrm{X}^\top\mathrm{AX} = 0$.

2. **a.** Notons $(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors $\mathrm{E}_i^\top\mathrm{AE}_j = -\mathrm{E}_j^\top\mathrm{AE}_i$ i.e. $\mathrm{A}_{i,j} = -\mathrm{A}_{j,i}$. Ainsi A est antisymétrique.

b. Supposons que pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{X}^\top\mathrm{AX} = 0$. Soit $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$. Alors

$$(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^\top\mathrm{A}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = 0$$

En développant

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{AX} + \mathrm{X}^\top\mathrm{AY} + \mathrm{Y}^\top\mathrm{AX} + \mathrm{Y}^\top\mathrm{AY} = 0$$

et donc

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{AY} + \mathrm{Y}^\top\mathrm{AX} = 0$$

D'après la question précédente, A est antisymétrique.

Solution 102

Soit λ une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre (complexe) associé. Alors $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ puis $\overline{\mathrm{X}}^\top\mathrm{AX} = \lambda\overline{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X}$. Comme $\overline{\mathrm{A}}^\top = -\mathrm{A}$, on obtient en transposant et en conjuguant la dernière égalité : $\overline{\mathrm{X}}^\top\mathrm{AX} = -\overline{\lambda}\overline{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X}$. Comme $\mathrm{X}^\top\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n}|\mathrm{X}_i|^2 > 0$ (X est non nul), $\lambda = -\overline{\lambda}$ i.e. $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Solution 103

---

1. Comme n est impair,

$$\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^\top) = \det(-\mathrm{A}) = (-1)^n\det(\mathrm{A}) = -\det(\mathrm{A})$$

donc $\det(\mathrm{A}) = 0$.

2. Soit X un vecteur propre associé à λ. Alors $AX = \lambda X$ puis $X^\top AX = \lambda X^\top X$. En transposant, on obtient $X\top A^\top X = \lambda X^\top X$ ou encore $-X^\top AX = \lambda X^\top X$. On en déduit que $\lambda X^\top X = 0$ puis $\lambda = 0$ car $X^\top X = \|X\|^2 > 0$ (X est non nul).

3. **Première méthode.** Les valeurs propres complexes non réelles de A sont conjuguées deux à deux et de même multiplicité car χ_A est à coefficients réels. Comme A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$, $\det(A)$ est le produit des valeurs propres complexes de A. Ainsi $\det(A)$ est le produit de modules au carré et d'éventuels zéros. Dans tous les cas, $\det(A) \geq 0$.
Deuxième méthode. Soit $P = (-1)^n \chi_A = \det(A - XI_n)$. Alors $\lim\limits_{-\infty} P = +\infty$. Supposons que $\det(A) = P(0) < 0$. Comme P est continu, P s'annulerait sur $]-\infty, 0[$, ce qui est impossible d'après la question précédente. Ainsi $\det(A) \geq 0$.

> **Remarque.** D'après la première question, on aurait pu se restreindre au cas où n est pair.

Solution 104

Supposons que M est antisymétrique. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $P^\top MP$ est également antisymétrique. Elle est donc de diagonale nulle.
Supposons que pour toute matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$, $P^\top MP$ est de diagonale nulle. Il existe $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = A + S$ (il suffit de choisir $S = (M + M^\top)/2$ et $A = (M - M^\top)/2$). D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^\top SP = D$. Ainsi $P^\top MP = P^\top AP + D$. Par hypothèse, $P^\top MP$ est de diagonale nulle et la première implication montre que $P^\top AP$ est également de diagonale nulle. On en déduit que la matrice diagonale D est nulle. Ainsi $S = PDP^\top = 0$ et $M = A$ est antisymétrique.

Solution 105

1. La bilinéarité vient de la linéarité de la trace. De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(M^\top) = \operatorname{tr}(M)$. Par conséquent, $\operatorname{tr}(A^\top B) = \operatorname{tr}(B^\top A)$, d'où la symétrie. De plus,

$$\operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} b_{ij}$$

et en particulier

$$\operatorname{tr}(A^\top A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 \geq 0$$

Cette dernière somme ne s'annulant que si tous les a_{ij} sont nuls i.e. $A = 0$. L'application est donc définie positive.
On vérifie sans difficulté que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\operatorname{tr}(A)| = |\operatorname{tr}(I_n A)| \leq \|I_n\| \|A\|$$

On vérifie facilement que $\|I_n\| = \sqrt{n}$.

3. **a.** Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$(A|S) = \operatorname{tr}(A^\top S) = -\operatorname{tr}(AS)$$
$$(S|A) = \operatorname{tr}(S^\top A) = \operatorname{tr}(SA)$$

Or $\operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}(AS)$ donc $(A|S) = 0$. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont donc orthogonaux. On sait également que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On en déduit donc que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b. $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$ où p désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On trouve facilement que $p(A) = \dfrac{A^\top + A}{2}$. Ainsi

$$\|A - p(A)\| = \frac{1}{2}\|A - A^\top\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2}$$

en utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question.

4. Comme $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $U^\top U = UU^\top = I_n$.

$$\|UA\|^2 = \operatorname{tr}((UA)^\top UA) = \operatorname{tr}(A^\top U^\top UA) = \operatorname{tr}(A^\top A) = \|A\|^2$$
$$\|AU\|^2 = \operatorname{tr}((AU)^\top AU) = \operatorname{tr}(U^\top A^\top AU) = \operatorname{tr}(A^\top AUU^\top) = \operatorname{tr}(A^\top A) = \|A\|^2$$

5. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 &= \operatorname{tr}(B^\top A^\top AB) = \operatorname{tr}(A^\top ABB^\top) = \operatorname{tr}((A^\top A)^\top BB^\top)\\ &= (A^\top A|BB^\top) \leq \|A^\top A\|\|BB^\top\| = \|A^\top A\|\|B^\top B\|\end{aligned}$$

car $\|BB^\top\|^2 = \operatorname{tr}(BB^\top BB^\top) = \operatorname{tr}(B^\top BB^\top B) = \|B^\top B\|^2$. En utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question, on a :

$$\|A^\top A\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}\right)^2$$

Or pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a d'après Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} \leq \sqrt{S_i}\sqrt{S_j}$$

avec $S_i = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ pour $1 \leq i \leq n$. Ainsi

$$\|A^\top A\|^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} S_iS_j = \left(\sum_{i=1}^n S_i\right)\left(\sum_{j=1}^n S_j\right) = \left(\sum_{l=1}^n S_l\right)^2$$

Par conséquent,

$$\|A^\top A\| \leq \sum_{1\leq k,l\leq n} a_{kl}^2 = \|A\|^2$$

On a donc également $\|B^\top B\| \leq \|B\|^2$, ce qui nous donne finalement l'inégalité demandée.

Solution 106

Pour simplifier, on peut supposer $u_1, \dots, u_{n+1}$ unitaires de sorte que pour $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts, $(u_i \mid u_j) = \cos\alpha_n$.

Première méthode

Notons $u_1', \dots, u_n'$ les projections orthogonales de $u_1, \dots, u_n$ sur $\operatorname{vect}(u_{n+1})^\perp$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ $u_i' = u_i - (\cos\alpha_n)u_{n+1}$ et par le théorème de Pythagore, $\|u_i'\|^2 = \|u_i\|^2 - (\cos^2\alpha_n)\|u_{n+1}\|^2 = 1 - \cos^2\alpha_n$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts

$$(u_i' \mid u_j') = (u_i|u_j) - \cos\alpha_n\left((u_i|u_{n+1}) + (u_j|u_{n+1})\right) + \cos^2\alpha_n\|u_{n+1}\|^2 = \cos\alpha_n - \cos^2\alpha_n$$

Par conséquent,

$$\frac{(u_i' \mid u_j')}{\|u_i'\|\,\|u_j'\|} = \frac{\cos\alpha_n - \cos\alpha_n^2}{1 - \cos\alpha_n^2} = \frac{\cos\alpha_n}{1 + \cos\alpha_n}$$

Les vecteurs $u_1', \dots, u_n'$ font donc un angle constant α_{n-1} deux à deux. De plus, $\cos\alpha_{n-1} = \dfrac{\cos\alpha_n}{1+\cos\alpha_n}$ i.e. $\cos\alpha_n = \dfrac{\cos\alpha_{n-1}}{1-\cos\alpha_{n-1}}$. L'énoncé n'a de sens que pour $n \geq 2$. On trouve aisément $\alpha_2 = \dfrac{2\pi}{3}$. Posons $z_n = \dfrac{1}{\cos\alpha_n}$. La suite (z_n) vérifie la relation de récurrence $z_n = z_{n-1} - 1$. Puisque $z_2 = -2$, on trouve $z_n = -n$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi $\alpha_n = \arccos\left(-\dfrac{1}{n}\right)$.

Deuxième méthode

Puisque $\dim E = n$, les $n+1$ vecteurs $u_1, \dots, u_{n+1}$ forment une famille liée. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0_E$. Fixons $j \in [\![1, n+1]\!]$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(u_i \mid u_j) = (0_E \mid u_j) = 0$$

ou encore

$$\lambda_j + \sum_{i\neq j} \lambda_i \cos\alpha_n = 0$$

Posons $\Lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$. L'égalité précédente s'écrit encore

$$\lambda_j + (\Lambda - \lambda_j)\cos\alpha_n = 0$$

ce qui équivaut à

$$\lambda_j(1-\cos\alpha_n)+\Lambda\cos\alpha_n=0$$

En sommant ces égalités pour $j\in[\![1,n+1]\!]$, on obtient

$$\Lambda(1-\cos\alpha_n)+(n+1)\Lambda\cos\alpha_n=0$$

ou encore

$$\Lambda(1+n\cos\alpha_n)=0$$

Par ailleurs, il existe $j\in[\![1,n+1]\!]$ tel que $\lambda_j\neq0$ et on rappelle que $\lambda_j(1-\cos\alpha_n)+\Lambda\cos\alpha_n=0$. Si on avait $\Lambda=0$, on aurait donc $\cos\alpha_n=1$, ce qui est exclu par l'énoncé. Ainsi $\Lambda\neq0$, ce qui permet d'affirmer que $\cos\alpha_n=-\frac{1}{n}$. On cherche implicitement un angle α_n *non orienté* donc $\alpha_n=\arccos\left(-\frac{1}{n}\right)$.

Solution 107

Soit $X\in\operatorname{Ker}A$. On a donc $AX=0$ puis $A^\top AX=0$ donc $X\in\operatorname{Ker}A^\top A$. Ainsi $\operatorname{Ker}A\subset\operatorname{Ker}A^\top A$.
Soit maintenant $X\in\operatorname{Ker}A^\top A$. On a donc $A^\top AX=0$ puis $X^\top A^\top AX=0$. Notons $Y=AX$. Ainsi $Y^\top Y=0$. Or $Y^\top Y$ est la somme des carrés des composantes de Y donc $Y=0$ i.e. $AX=0$. D'où $X\in\operatorname{Ker}A$. Ainsi $\operatorname{Ker}A^\top A\subset\operatorname{Ker}A$.
Finalement, $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Ker}A^\top A$ et $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}A^\top A$ via le théorème du rang. En changeant A en $A^\top$, on a également $\operatorname{rg}A^\top=\operatorname{rg}AA^\top$. Or $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}A^\top$. Ainsi $\operatorname{rg}A^\top A=\operatorname{rg}AA^\top=\operatorname{rg}A$.

Solution 108

1. Évident.
2. On va montrer que F admet pour supplémentaire la droite vectorielle $\mathbb{R}_0[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   Soit $P\in\mathbb{R}_0[X]\cap F$. Alors il existe $(\lambda_n)\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ tel que $P=\sum_{n=1}^{+infty}\lambda_n(1+X^n)$. On a donc
   $$P=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_nX^n$$
   Mais comme $\deg P\leq0$, $\lambda_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et donc $P=0$. Ainsi F et $\mathbb{R}_0[X]$ sont en somme directe.
3. Soit $P\in F^\perp$. Posons $P=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$ avec $(a_n)\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Puisque $\langle P,1+X^n\rangle=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $a_0+a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   Mais comme la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, on en déduit que $a_0=0$ puis que $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Ainsi $P=0$ puis $F^\perp=\{0\}$.
   En particulier, $F\oplus F^\perp=F\neq\mathbb{R}[X]$ puisque F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.