Devoir à la maison n°05

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont laissées au lecteur. Concentrons-nous l'aspect défini. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$ i.e. $\int_0^1 P(t)^2 \, dt = 0$. Comme $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, elle est nulle sur $[0,1]$. Ainsi P possède une infinité de racines : il est nul.

2 **2.a** Remarquons que pour $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) = \|X^n - P\|^2$$

où $P = \sum_{k=0}^{n-1} x_k X^k$ et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. D'après le théorème de projection orthogonale, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$N_2(X_n - Q) = \min_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} N_2(X^n - P)$$

Il s'agit de la projection orthogonale de Q de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit que f admet un minimum en un unique $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ où $Q = \sum_{k=0} a_k X^k$. Comme $X^n - Q$ est normal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \langle X^n - Q, X^k\rangle = 0$$

ou encore

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \int_0^1 \left(t^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j\right) t^k \, dt = 0$$

ce qui peut enfin s'écrire

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{1}{n+k+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+k+1} = 0$$

2.b En réduisant au même dénominateur, il existe un polynôme P de dgré inférieur ou égal à n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [\![-n-1, -1]\!],\ F(x) = \frac{P(x)}{\prod_{j=1}^{n+1}(x+j)}$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [\![-n-1, -1]\!],\ F(x) \prod_{j=1}^{n+1}(x+j) = P(x)$$

D'après la question précédente, tout élément de $[\![0, n-1]\!]$ est un zéro de F et donc une racine de P. Comme $\deg P \leq n$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [\![-n-1, -1]\!],\ F(x) \prod_{j=1}^{n+1}(x+j) = a \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$$

En utilisant l'expression initiale de $\mathrm{F}(x)$, on trouve $\lim\limits_{x\to-n-1}(x+n+1)\mathrm{F}(x)=1$. En faisant tendre x vers $-n-1$ dans la dernière égalité, on obtient alors

$$(-1)^n n! = a(-1)^n \prod_{k=n+1}^{2n} k = a(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

On en déduit que $a = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

2.c Avec les notations précédentes,

$$m_n = \|\mathrm{X}^n - \mathrm{Q}\|^2 = \langle \mathrm{X}^n - \mathrm{Q}, \mathrm{X}^n\rangle + \langle \mathrm{X}^n - \mathrm{Q}, \mathrm{Q}\rangle$$

Or $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{X}^n - \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^\perp$ car Q est le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Ainsi $\langle \mathrm{X}^n - \mathrm{Q}, \mathrm{Q}\rangle = 0$ puis

$$m_n = \langle \mathrm{X}^n - \mathrm{Q}, \mathrm{X}^n\rangle = \int_0^1 \left(t^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j\right) t^n \,\mathrm{d}t$$

2.d On a donc

$$m_n = \frac{1}{2n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{n+k+1} = \mathrm{F}(n)$$

Puisque pour $x \in \mathbb{R} \setminus [\![-n-1, -1]\!]$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{a\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)}$$

on trouve

$$m_n = \mathrm{F}(n) = \frac{an!}{(2n+1)!/n!} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$$

$\boxed{3}$ **3.a** Soit $\mathrm{P} \in \mathcal{P}_n$. Par le changement de variable indiqué,

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{P})^2 = 2\int_0^1 \mathrm{P}(2t-1)^2 \,\mathrm{d}t$$

Or $\mathrm{P}(2\mathrm{X}-1)$ est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n. Il existe donc $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 2^n\left(\mathrm{X}^n - \sum_{k=0}^{n-1} x_k \mathrm{X}^k\right)$$

Ainsi

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{P})^2 = 2^{2n+1} f(x_0, \dots, x_{n-1}) \geq 2^{2n+1} m_n$$

puis

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{P}) \geq 2^n\sqrt{2m_n}$$

3.b Réciproquement, en posant $\mathrm{R} = \mathrm{X}^n - \mathrm{Q}$ puis $\mathrm{P} = 2^n\mathrm{R}\left(\dfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right)$, on obtient avec le même changement de variable

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = 2^n\mathrm{N}_2(\mathrm{R}) = 2^n\sqrt{2}\int_0^1 \mathrm{R}(t)^2 \,\mathrm{d}t = 2^n\sqrt{2}\|\mathrm{X}^n - \mathrm{Q}\| = 2^n\sqrt{2m_n}$$

Ainsi

$$\min_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}_n} \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = 2^n\sqrt{2m_n}$$

$\boxed{4}$ **4.a** Tout d'abord, $\deg \mathrm{T}_0 = 0$ et $\deg \mathrm{T}_1 = 1$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\deg \mathrm{T}_k = k$ et $\deg \mathrm{T}_{k-1} = \mathrm{T}_{k-1}$. Alors $\deg(2\mathrm{X}\mathrm{T}_k) = k+1 > k-1 = \deg \mathrm{T}_k$ donc $\deg \mathrm{T}_{k+1} = k+1$. Par récurrence double, $\deg \mathrm{T}_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, en notant c_k le coefficient dominant de T_k, on observe en étudiant les coefficients dominants de T_{k+1} et $2\mathrm{X}\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_{k-1}$ que $c_{k+1} = 2c_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $c_1 = 1$, $\deg \mathrm{T}_k = 2^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4.b Fixons $\theta \in \mathbb{R}$. Il est clair que $\mathrm{T}_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0\cdot\theta)$ et que $\mathrm{T}_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1\cdot\theta)$. Supposons que $\mathrm{T}_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ et $\mathrm{T}_{k-1}(\cos\theta) = \cos((k-1)\theta)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Alors on a

$$\cos((k+1)\theta) + \cos((k-1)\theta) = 2\cos\theta\cos(k\theta)$$

Ainsi

$$T_{k+1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_k(\cos(\theta)) - T_{k-1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos(k\theta) - \cos((k-1)\theta) = \cos((k+1)\theta)$$

On a donc prouvé par récurrence double que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$$

$\boxed{5}$ **5.a** Posons $Q_n = \frac{1}{2^{n-1}}T_n - P$ et $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$Q_n(x_k) = \frac{\cos(k\pi)}{2^{n-1}} - P(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P(x_k)$$

De plus, $-\frac{1}{2^{n-1}} < P(x_k) < \frac{1}{2^{n-1}}$ puisque $N_\infty(P) < \frac{1}{2^{n-1}}$. Ainsi si k est pair, $Q_n(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} - P(x_k) > 0$ et si k est impair, $Q_n(x_k) = -\frac{1}{2^{n-1}} - P(x_k) < 0$.
En particulier, $Q_n(x_k)Q_n(x_{k+1}) < 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme Q_n est continue sur $[-1, 1]$, Q_n s'annule sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Le polynôme Q_n possède au moins n racines. Le polynôme T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} et P est unitaire de degré n donc $\deg Q_n < n$. On en déduit que $Q_n = 0$ i.e. $P = \frac{T_n}{2^{n-1}}$. Ceci est impossible puisque $\left|\frac{T_n}{2^{n-1}}(x_k)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$ tandis que $N_\infty(P) < \frac{1}{2^{n-1}}$.

5.b La question précédente montre que pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, $N_\infty(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. On en déduit que $\inf_{P\in\mathcal{P}_n} N_\infty(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. De plus, $\frac{T_n}{2^{n-1}} \in \mathcal{P}_n$ de sorte que $N_\infty\left(\frac{T_n}{2^{n-1}}\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et $N_\infty(T_n/2^{n-1}) \geq |T_n(x_k)/2^{n-1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$ de sorte que

$$\min_{P\in\mathcal{P}_n} N_\infty(P) = N_\infty\left(\frac{T_n}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\boxed{6}$ **6.a** On prouve à nouveau par récurrence que U_k est un polynôme de degré k et de coefficient dominant 2^k.
Posons $V_k(X) = (-1)^k U_k(-X)$. Alors $V_0 = U_0 = 1$ et $V_1 = -U_1(-X) = 2X = U_1$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
V_{k+1}(X) &= (-1)^{k+1}U_{k+1}(-X) \\
&= (-1)^{k+1}\left(-2XU_k(-X) - U_{k-1}(-X)\right) \\
&= 2X(-1)^k U_k(X) - (-1)^{k-1}U_{k-1}(X) \\
&= 2XV_k(X) - V_{k-1}(X)
\end{aligned}$$

Ainsi les suites (U_k) et (V_k) possèdent les mêmes deux premiers termes et suivent la même relation de récurrence d'ordre 2 : elles sont égales.

6.b Si $\cos\theta = 1$, alors l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence possède 1 comme racine double. L'ensemble des suites recherchées est donc $\operatorname{vect}((1)_{k\in\mathbb{N}}, (k)_{k\in\mathbb{N}})$. Si $\cos\theta = -1$, alors l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence possède -1 comme racine double. L'ensemble des suites recherchées est donc $\operatorname{vect}\left(((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}, ((-1)^k k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$.
Dans le cas général, les racines de l'équations caractéristiques sont les complexes conjugués $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. L'ensemble des suites recherchées est donc $\operatorname{vect}((\cos(k\theta))_{k\in\mathbb{N}}, (\sin(k\theta))_{k\in\mathbb{N}})$.
Soit $\theta \in]0, \pi[$ de sorte que $-1 < \cos\theta < 1$. Comme la suite $(U_k(\cos\theta))$ suit la relation de récurrence de l'énoncé, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U_k(\cos\theta) = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque $U_0(\cos\theta) = 1$, $A = 1$ et comme $U_1(\cos\theta) = 2\cos\theta$, $A\cos\theta + B\sin\theta = 2\cos\theta$ puis $B = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$U_k(\cos\theta) = \cos(k\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(k\theta) = \frac{\cos(k\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(k\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}$$

De la même manière, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U_k(1) = A + kB$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque $U_0(1) = 1$ et $U_1(1) = 2$, $A = B = 1$ puis $U_k(1) = k + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Enfin, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U_k(1) = (-1)^k A + (-1)^k kB$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque $U_0(-1) = 1$ et $U_1(-1) = -2$, $A = B = 1$ puis $U_k(1) = (-1)^k(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

> **Remarque.** On aurait pu utiliser un argument de continuité pour déterminer $U_k(1)$ et $U_k(-1)$ (faire tendre θ vers 0 et π dans $U_k(\cos\theta)$).

6.c Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_{k+1}(\cos\theta) = \cos((k+1)\theta)$. En dérivant par rapport à θ, on obtient

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\sin(\theta)T'_{k+1}(\cos\theta) = -(k+1)\sin((k+1)\theta)$$

Puisque sin ne s'annule pas sur $]0,\pi[$,

$$\forall \theta \in]0,\pi[,\ T'_{k+1}(\cos\theta) = (k+1)\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta} = -(k+1)U_k(\cos\theta)$$

Ainsi les polynômes T'_{k+1} et $(k+1)U_k$ coïncident sur l'ensemble infini $\cos(]0,\pi[) =]-1,1[$: ils sont égaux.

$\boxed{7}$ **7.a** Soit $Q \in \mathcal{P}_n$. Alors $Q - P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il existe donc $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q - P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Par linéarité de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} (Q(x) - P(x))\operatorname{sgn}(P(x))\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-1}^{1} x^k \operatorname{sgn}(P(x))\,dx = 0$$

7.b Remarquons que pour tout $x \in [-1,1]$, $P(x)\operatorname{sgn}(P(x)) = |P(x)|$ et $Q(x)\operatorname{sgn}(P(x)) \le |Q(x)|$. Ainsi

$$N_1(Q) - N_1(P) \ge \int_{-1}^{1} (Q(x) - P(x))\operatorname{sgn}(P(x))\,dx = 0$$

7.c Par le changement de variable indiqué et par positivité de sin sur $[0,\pi]$,

$$N_1(U_n) = \frac{1}{n+1}\int_0^{(n+1)\pi} \left|U_n\left(\cos\frac{\theta}{n+1}\right)\right| \sin\left(\frac{\theta}{n+1}\right)\,d\theta = \frac{1}{n+1}\int_0^{(n+1)\pi} \left|U_n\left(\cos\frac{\theta}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\theta}{n+1}\right)\right|\,d\theta$$

Or $\sin(\alpha)U_n(\cos\alpha) = \sin((n+1)\alpha)$ pour tout $\alpha]in 0,\pi[$. Cette égalité est encore valide lorsque $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ par continuité de sin, cos et U_n. Ainsi, pour tout $\theta \in [0,(n+1)\pi]$,

$$U_n\left(\cos\frac{\theta}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\theta}{n+1}\right) = \sin\theta$$

Finalement,

$$N_1(U_n) = \frac{1}{n+1}\int_0^{(n+1)\pi} |\sin\theta|\,d\theta$$

puis, par π-périodicité de $|\sin|$,

$$N_1(U_n) = \int_0^{\pi} |\sin\theta|\,d\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta = 2$$

Par conséquent, $N_1(U_n/2^n) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Comme $U_n/2^n$ appartient à $\mathcal{P}_n$ et vérifie l'hypothèse de l'énoncé,

$$\forall Q \in \mathcal{P}_n,\ N_1(P) \ge N_1(U_n/2^n)$$

Ainsi $\min_{P\in\mathcal{P}_n} N_1(P) = N_1(U_n/2^n) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

$\boxed{8}$ **8.a** Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $U_n(c_j) = \frac{\sin(j\pi)}{\sin\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} = 0$. Comme $\deg U_n = n$, les racines de U_n sont exactement les c_j et ces racines sont simples. On sait également que le coefficient de U_n est 2^n de sorte que

$$U_n = 2^n \prod_{j=1}^{n} (X - c_j)$$

On en déduit que $U_n(c_j)$ est du signe de $(-1)^j$ sur l'intervalle $]c_{j+1},c_j[$.

8.b On sait que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$(-x)^k \operatorname{sgn}(U_n(-x)) = (-x)^k \operatorname{sgn}((-1)^n U_n(x)) = (-1)^{n+k} x^k \operatorname{sgn}(U_n(x)) = -x^k \operatorname{sgn}(U_n(x))$$

Ainsi l'intégrande dans I_k est impair. Comme l'intervalle d'intégration $[-1,1]$ est symétrique par rapport à 0, $I_k = 0$.

8.c D'après la relation de Chasles,

$$\mathrm{I}_k = \sum_{j=0}^{n} \int_{c_{j+1}}^{c_j} x^k \operatorname{sgn}(\mathrm{U}_n(x))\, \mathrm{d}x$$

Or on a vu que $\mathrm{U}_n(x)$ était du signe de $(-1)^j$ sur l'intervalle $]c_{j+1}, c_j[$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_k &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \int_{c_{j+1}}^{c_j} x^k\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(c_j^{k+1} - c_{j+1}^{k+1}) \qquad = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j c_j^{k+1} - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j c_{j+1}^{k+1}\right)\end{aligned}$$

Mais par changement d'indice,

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j c_{j+1}^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1} c_j^{k+1} = -\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j c_j^{k+1}$$

Or $c_{n+1} = -1 = -c_0$ donc $(-1)^{n+1}c_{n+1}^{k+1} = (-1)^{n+2+k}c_0^k = c_0^k$ de sorte que

$$\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j c_j^{k+1} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j c_j^{k+1}$$

On en déduit bien que

$$\mathrm{I}_k = \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j c_j^{k+1}$$

D'après une relation d'Euler,

$$c_j = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{ij\pi}{n+1}} + e^{-\frac{ij\pi}{n+1}}\right)$$

Avec la formule du binome de Newton,

$$c_j^{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p} e^{\frac{ijp\pi}{n+1}} e^{-\frac{ij(k+1-p)\pi}{n+1}} \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p} e^{\frac{ij(2p-k-1)\pi}{n+1}}$$

Par interversion de l'ordre de sommation, en posant $d_p = e^{\frac{i(2p-k-1)\pi}{n+1}}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_k &= \frac{2}{k+1}\sum_{p=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{k+1}{p} d_p^j \\ &= \frac{2}{k+1}\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}\sum_{j=0}^{n}(-d_p)^j\end{aligned}$$

Remarquons que pour $p \in [\![0, k+1]\!]$, $-k-1 \leq 2p-k-1 \leq k+1$. Mais comme $0 \leq k < n$, $-\pi < \dfrac{(2p-k-1)\pi}{n+1} < \pi$. En particulier, $-d_p \neq 1$ de sorte que

$$\mathrm{I}_k = \frac{2}{k+1}\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}\frac{1-(-d_p)^{n+1}}{1+d_p}$$

Or

$$(-d_p)^{n+1} = (-1)^{n+1}e^{i(2p-k-1)\pi} = (-1)^{n+2p-k} = (-1)^{n+k+2(p-k)} = 1$$

car $n+k$ est pair. Finalement, $\mathrm{I}_k = 0$.
En conclusion, $\mathrm{I}_k = 0$ quelque soit la valeur de k i.e. $\mathrm{U}_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse de l'énoncé.