Semaine du 17/03

1 Cours

Fonctions à valeurs vectorielles

Les fonction considérées sont des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

Dérivabilité Définition. La dérivabilité implique la continuité. Une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a. Coordonnées de la dérivée dans une base. Opérations : dérivabilité et dérivée d'une combinaison linéaire, de $\mathrm{L} \circ f$ où L est linéaire, de $\mathrm{B}(f, g)$ où B est bilinéaire (cas du produit scalaire), de $\mathrm{M}(f_1, \dots, f_n)$ où M est multilinéaire, de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et opérations.

Intégration Fonctions continues par morceaux. Définition de l'intégrale sur un segment à partir des fonctions coordonnées (indépendante de la base choisie). Propriétés : linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Sommes de Riemann. Dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

Suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles Interversion limite/intégration, série/intégration, limite/dérivation, série/dérivation. Dérivabilité et dérivée de $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(t\mathrm{A})$ où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tu)$ où $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Equations différentielles linéaires

Révisions de première année Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1. Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants.

2 Méthodes à maîtriser

- Résoudre une EDL scalaire d'ordre un avec second membre :
  1. Résoudre l'équation homogène.
  2. Rechercher une solution particulière (utilisation éventuelle de la méthode de variation de la constante).
  3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.
  4. Prise en compte d'une condition initiale éventuelle.
- Résoudre une EDL scalaire d'ordre deux à coefficients constants avec second membre :
  1. Résoudre l'équation homogène via l'équation caractéristique.
  2. Recherche d'une solution particulière (utilisation éventuelle du principe de superposition)
     (a) second membre $\mathrm{P}(t)e^{\alpha t}$ → solution particulière $\mathrm{Q}(t)e^{\alpha t}$
     (b) dans le cas de fonctions trigonométriques, passage en complexe pour se ramener au premier cas.
  3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.
  4. Prise en compte des conditions initiales éventuelles.

3 Questions de cours

Banque CCP Exos 3, 4, 42

Retour sur le DS n°13 Justifier la convergence de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exponentielle et dérivation Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(t\mathrm{A})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.