Devoir à la maison n°19

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Solution 1

1. **a.** Voir le cours.

b. Comme f n'est pas inversible, son noyau n'est pas nul de sorte que 0 est valeur propre de f.
De plus, f est auto-adjoint donc diagonalisable. Si 0 était son unique valeur propre, il serait nul. Ainsi f admet au moins une valeur propre non nulle.

c. Soit $(x, y) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f$. Il existe alors $z \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(z)$. Comme f est auto-adjoint,

$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = \langle f(x), z\rangle = \langle 0_{\mathrm{E}}, z\rangle = 0$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux. Notamment, ils sont en somme directe. Enfin, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathrm{E}$. On en déduit que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

d. Soient $i \in [\![0, k]\!]$ et $x \in \mathrm{E}_i$. On sait que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux donc $p_j(x) = 0$ si $j \neq i$ et $p_i(x) = x$. Ainsi $x = \sum_{j=0}^{k} p_j$. Les endomorphismes Id_{E} et $\sum_{j=0}^{k} p_j$ coïncident donc sur chacun des sous-espaces propres de f. Comme f est diagonalisable, $\mathrm{E} = \bigoplus_{j=0}^{k} \mathrm{E}_j$ et donc $\sum_{j=0}^{k} p_j = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

e. Soit $(i, j) \in [\![0, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Puisque les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux :

$$\operatorname{Im} p_{=}\mathrm{E}_j \subset \mathrm{E}_i^{\perp} = \operatorname{Ker} p_i$$

Ainsi $p_i \circ p_j = \theta$.

f. Soit $x \in \mathrm{E}$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Im} p_j = \mathrm{E}_j$ donc $f \circ p_j = \lambda_j p_j$. D'après la question **1.d**,

$$f = f \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = f \circ \left(\sum_{j=0}^{k} p_j\right) = \sum_{j=0}^{k} f \circ p_j = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j$$

g. On sait que les sous-espaces propres de E sont orthogonaux et supplémentaires dans E. On en déduit notamment que $\mathrm{E}_0^{\perp} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{E}_k$. Par ailleurs, on a montré à la question **1.c** que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ étaient en somme directe et supplémentaires i.e.

$$\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f^{\perp}) = \mathrm{E}_0^{\perp} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{E}_j$$

Pour tout $x \in \mathrm{E}$,

- $x = \sum_{j=0}^{k} p_j(x)$;
- $p_0(x) \in \operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$;
- $\sum_{j=1}^{k} j_j(x) \in \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{E}_j = \operatorname{Im} f$.

On en déduit que $p(x) = \sum_{j=1}^{k} p_j(x)$ puis que $p = \sum_{j=1}^{k} p_j$.

2. **a.** On a d'une part $f = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$ car $\lambda_0 = 0$ et d'autre part $f^{\mathrm{I}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$. On en déduit que

$$f \circ f_{\mathrm{I}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} p_i \circ p_j$$

Or $p_i \circ p_j = \theta$ lorsque $i \neq j$ et $p_i^2 = p_i$ car p_i est un projecteur. On en déduit que

$$f \circ f^{\mathrm{I}} = \sum_{i=1}^{k} p_i = p$$

Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Alors

$$f(x) = p(y) \iff f(x) = f \circ f^{\mathrm{I}}(y) \iff f(x - f^{\mathrm{I}}(y)) = 0 \iff x - f^{\mathrm{I}}(y) \in \operatorname{Ker} f$$

b. On remarque que $\inf_{z \in \mathrm{E}} \|f(z) - y\| = d(y, \operatorname{Im} f)$. On sait alors que $\|f(x) - y\| = \inf_{z \in \mathrm{E}} \|f(z) - y\|$ si et seulement si $f(x)$ est le projeté orthogonal de y sur $\operatorname{Im} f$ i.e. $f(x) = p(y)$. On en déduit l'équivalence demandée avec la question précédente.

3. **a.** La matrice A de f dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique. On en déduit que f est auto-adjoint.
A n'est pas nulle donc f non plus.
La deuxième et la quatrième colonne de A sont égales donc A n'est pas inversible et f non plus.

b. Remarquons que $\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les deux premières colonnes de $\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3$ ne sont pas colinéaires et les deux dernières sont égales aux deux premières. On en déduit que $\operatorname{rg}(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_4) = 2$ puis $\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_4) = 2$. Ainsi $2 \in= \operatorname{Sp}(\mathrm{A})$ et $\dim \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = 2$. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et les multiplicités de ses valeurs propres sont donc égales aux dimensions des sous-espaces propres associés. On en déduit que 2 est une valeur propre de A de multiplicité 2.

c. Tout d'abord, 2 est une valeur propre de f de multiplicité 2. Comme f n'est pas inversible, 0 est aussi valeur propre de f. Comme f est diagonalisable, $\operatorname{tr}(f)$ est la somme des valeurs propres de f comptées avec multiplictés. On ne peut pas avoir $\operatorname{Sp}(f) = \{0, 2\}$, car alors $\operatorname{tr}(f) = 4 \neq 8 = \operatorname{tr}(f)$. On en déduit que f possède une autre valeur propre et que 0 et cette valeur propre sont de multiplicité 1. En étudiant la trace de A, cette dernière valeur propre est 4. Avec les notations de l'énoncé, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$.

d. D'après la question **1.f**, $f = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 2p_1 + 4p_2$. Ceci se traduit matriciellement par $\mathrm{A} = 2\mathrm{M}_1 + 4\mathrm{M}_2$.

e. On a déjà montré précédemment que λ_1 et λ_2 étaient des valeurs propres simples de f. Comme f est diagonalisable, les dimensions des sous-espaces propres sont égales à leurs multiplicités. Notamment $\dim \mathrm{E}_2 = 1$.

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_4(\mathrm{A})$. On en déduit que $e_1 - e_3 \in \mathrm{E}_4(f) = \mathrm{E}_2$. Comme $\dim \mathrm{E}_2 = 1$, $\mathrm{E}_2 = \operatorname{vect}(e_1 - e_3)$.

Comme (e_1, e_2, e_3, e_4) est orthonormée, $\|e_1 - e_3\|^2 = 2$, on peut alors choisir $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$.

f. Il suffit de constater que (v_2) est une base orthonormée de E_2.

g. On calcule

$$\begin{aligned}
p_2(e_1) &= (e_1 \mid v_2) v_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_3) \\
p_2(e_2) &= (e_2 \mid v_2) v_2 = 0 \\
p_2(e_3) &= (e_3 \mid v_2) v_2 = -\frac{1}{2}(e_1 - e_3) \\
p_2(e_4) &= (e_4 \mid v_2) v_2 = 0
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathrm{M}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. La matrice recherchée est

$$\mathrm{A}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\lambda_1}\mathrm{M}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\mathrm{M}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{M}_1 + \frac{1}{4}\mathrm{M}_2$$

Mais on sait que $\mathrm{A} = 2\mathrm{M}_1 + 4\mathrm{M}_2$ donc $\mathrm{M}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A} - 2\mathrm{M}_2$ puis

$$\mathrm{A}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{4}\mathrm{A} - \frac{3}{4}\mathrm{M}_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution 2

1. a. Le théorème fondamental de l'analyse nous apprend que F est une primitive de la fonction continue f. Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Supposons que f vérifie (E_1). Via le changement de variable affine $u = x - t$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \int_0^x (2x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = 1 - 2x\mathrm{F}(x) + \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$$

Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, $x \mapsto \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par opérations, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Supposons que f est solution de $(\mathcal{P})$. En évaluant (E_1) en 0, on obtient $f(0) = 1$. On a montré à la question précédente que f était de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, en dérivant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - 2x\mathrm{F}(x) + \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$$

on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2\mathrm{F}(x) - 2x\mathrm{F}'(x) + xf(x) = -2\mathrm{F}(x) - xf(x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + xf(x) + 2\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

Ainsi f est solution de $\mathcal{P}_1$.
Réciproquement, supposons que f est solution de $(\mathcal{P}_1)$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori continue sur $\mathbb{R}$. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = f(x) - 1 + \int_0^x (t+x)f(x-t)\,\mathrm{d}t = f(x) - 1 + 2x\mathrm{F}(x) + \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$$

Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) + xf(x) + 2\mathrm{F}(x) = 0$$

Ainsi g est constante sur $\mathbb{R}$. De plus, $g(0) = 0$ donc f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est solution de $(\mathcal{P}_1)$.

3. Il suffit de constater que $\mathrm{F}' = f$. D'après la question précédente, f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si $f = \mathrm{F}'$ est solution de $(\mathcal{P}_1)$ ce qui équivaut à F solution de $(\mathcal{P}_2)$.

4. **a.** Comme le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supposé infini, H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x\mathrm{H}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}''(x) + x\mathrm{H}'(x) + 2\mathrm{H}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n\right] x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n = 0$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}$$

De plus, $a_0 = \mathrm{H}(0) = 0$ et $a_1 = \mathrm{H}'(0) = 1$.

b. Comme $a_0 = 0$, la relation $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}$ montre que $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots 2} a_1 = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{H}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

5. On vérifie que $\mathrm{H} : x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}}$ est bien solution du problème $(\mathcal{P}_2)$. De plus, la solution de $(\mathcal{P}_2)$ est unique. En effet, si F est solution de $(\mathcal{P}_2)$, on a nécessairement $\mathrm{F}(0) = 0$ en évaluant la seconde relation en 0. Ainsi, toute solution de F est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$. Ainsi l'unique solution de $(\mathcal{P})$ est $\mathrm{H}' : x \mapsto (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$.