Devoir à la maison n°19

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – CCP MP 2019 Maths 1

Dans ce sujet, une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n x^n$ soit de rayon de convergence égal à 1.

I Propriétés

Soit une série de fonctions L_a : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$.

1 **1.a** Si $x \in]-1,1[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

1.b Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

1.c La série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1,1[$. Donner un exemple de suite (a_n) telle que la série L_a converge au moins en un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1,1[$.

2 Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $]-1,1[$.

3 On pose pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$.

3.a Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1,1[$.

3.b Démontrer ensuite que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

4 **Expression sous forme de série entière.**
On note $\mathrm{A} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

4.a Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathrm{A}}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in\mathrm{I}_n} u_{k,p}\right) \text{ où } \mathrm{I}_n = \{(k,p)\in\mathrm{A},\ kp=n\}$$

4.b Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p\in\mathrm{A})}$ est sommable.

4.c En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n \text{ où } b_n = \sum_{d\mid n} a_d$$

où la dernière somme porte sur les diviseurs positifs de n.

II Exemples

5 Dans cette question, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

6 Dans cette question, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \varphi(n)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

6.a Justifier que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \varphi(n)x^n$ est de rayon de convergence égal à 1.

6.b Ecrire une fonction `pgcd(a,b)` d'arguments deux entiers naturels a et b et renvoyant le pgcd de a et b. En déduire une fonction `indicatrice(n)` d'argument un entier naturel non nul n et renvoyant $\varphi(n)$ puis une fonction `somme(n)` d'argument un entier naturel non nul n et renvoyant $\sum_{d|n} \varphi(d)$.

6.c On admet que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

6.d Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

7 Etablir à l'aide du développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$ la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

8 Dans cette question et la suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver alors le résultat de la question **3.b**.

9 Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim -\frac{\ln(2)}{1-x}$. On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[$,

$$\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$$