DEVOIR À LA MAISON N°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 En développant par rapport à la première ligne, $\det(C_P) = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$. Ainsi C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2 Tout d'abord,

$$\chi_{C_P}(X) = \begin{vmatrix} X & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Première méthode. En numérotant $L_0, \dots, L_{n-1}$ les lignes de ce déterminant et en effectuant l'opération $L_0 \leftarrow \sum_{k=0}^{n-1} X^k L_k$, on obtient

$$\chi_{C_P}(X) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient $\chi_A(X) = P(X)$.
Deuxième méthode. En développant par le déterminant définissant $\chi_{C_P}(X)$ par rapport à sa dernière colonne, on obtient

$$\chi_{C_P}(X) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k D_k(X) + (X + a_{n-1}) \det(XI_{n-1})$$

avec

$$D_k(X) = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} X & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{matrix} & (\mathbf{0}) \\ \hline (\mathbf{0}) & \begin{matrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \end{array}\right|$$

où le bloc supérieur gauche est de taille k et le bloc inférieur droit est de taille $n-1-k$. Comme il s'agit d'un déterminant diagonal par blocs, on obtient $D_k(X) = (-1)^{n-1-k} X^k$ puis

$$\chi_{C_P}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^{n-1}(X + a_{n-1}) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = P(X)$$

3 S'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q = \chi_A$, alors A est unitaire de degré n. Réciproquement, si Q est unitaire de degré n, alors $Q = \chi_{C_Q}$ d'après la question précédente.
Finalement, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q = \chi_A$ si et seulement si Q est unitaire de degré n.

4 **4.a** De manière générale, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \det((XI_n - A)^\top) = \det(XI_n - A^\top) = \chi_{A^\top}$$

Comme le spectre d'une matrice est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.

4.b Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in E_\lambda(C_P^\top)$. On a alors

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ x_{k+1} = \lambda x_k$$

puis

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_k = \lambda^k x_0$$

Ainsi, en posant $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$,

$$E_\lambda(C_P^\top) \subset \mathrm{vect}(X_\lambda)$$

Notamment $\dim E_\lambda(C_P^\top) \leq 1$. Mais un sous-espace propre n'est pas nul donc $\dim E_\lambda(C_P^\top) \geq 1$. Finalement,

$$\dim E_\lambda(C_P^\top) = 1 = \dim \mathrm{vect}(X_\lambda)$$

L'inclusion précédente garantit alors que $E_\lambda(C_P^\top) = \mathrm{vect}(X_\lambda)$.

4.c Supposons P simplement scindé sur $\mathbb{K}$. Puisque $\chi_{C_P^\top} = \chi_{C_P} = P$, $C_P^\top$ est diagonalisable.

Réciproquement, supposons $C_P^\top$ diagonalisable. Alors $\chi_{C^\top} = P$ est sindé sur $\mathbb{K}$. La question précédente montre que tous les sous-espaces propres de $C_P^\top$ sont de dimension 1. Comme $C_P^\top$ est diagonalisable, les multilplicités des valeurs propres dans le polynôme caractéristique sont égales aux dimensions des sous-espaces propres associés. Ainsi toutes les racines de P sont simples. P est bien simplement scindé sur $\mathbb{K}$.

4.d P est alors scindé à racines simples. D'après la question **4.c**, $C_P^\top$ est diagonalisable. Avec les notations de la question **4.b**, $(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n})$ est une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de $C_P^\top$. Ces vecteurs sont les colonnes du déterminant de Vandermonde de l'énoncé, qui est donc non nul.

> **Remarque.** La notion de déterminant de Vandermonde figure dans le programme de MPSI. On sait que le déterminant de l'énoncé vaut $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$. Ce déterminant est clairement non nul si et seulement si les λ_i sont deux à deux distincts. Mais il s'agit de retrouver ce résultat dans cette question.

5 **5.a** On pose $P = X^{2002} - X^{2001} - X^{2000} - 1999$. Ce polynôme P est bien unitaire et on peut lui associer sa matrice compagnon $A = C_P \in \mathcal{M}_{2002}(\mathbb{R})$. Alors $\chi_A = P$ et le théorème de Cayley-Hamilton permet de conclure que $P(A) = 0$ i.e. $A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999 I_{2002}$.

5.b Comme $f^{n-1} \neq 0$, $\mathrm{Ker}\, f^{n-1} \subsetneq E$. Soit alors $x \in E \setminus \mathrm{Ker}\, f^{n-1}$. On vérifie que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est bien une base de E. Comme $\dim E = n$, il suffit de vérifier que cette famille est libre. Soit alors $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_E$. En appliquant successivement f^{n-1}, f^{n-2}, etc... à cette égalité, on trouve $\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} = \cdots = \lambda_0 = 0$.
La famille $\mathcal{B}$ est bien libre et c'est donc une base de E. La matrice de f dans cette base est alors bien une matrice compagnon.

Plus précisément, c'est la matrice $C_{X^n} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_{n-1} & 0 \end{array}\right)$.

6 Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors $(AX)_i = \lambda X_i$ i.e.

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$$

Par inégalité triangulaire

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}||x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\|X\|_\infty = r_i \|X\|_\infty$$

7 On reprend les notations de la question précédente. Il existe alors $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \|X\|_\infty$. Ainsi $|\lambda|\|X\|_\infty \leq r_{i_0}\|X\|_\infty$. Comme X est un vecteur propre, $X \neq 0$ puis $\|X\|_\infty > 0$. On en déduit que $|\lambda| \leq r_{i_0}$. Ainsi $\lambda \in D_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.
Par conséquent, $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

8 L'ensemble des racines de P est le spectre de C_P. Avec les notations des questions précédentes, $r_1 = |a_0|$ et $r_i = 1 + |a_i|$ pour $i \in [\![2, n]\!]$. Ainsi $D_i \subset D(0, R)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. D'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(C_P) \subset D(0, R)$. Les racines de P sont donc toutes dans le disque $D(0, R)$.

9 On cherche les racines du polynôme $P = X^a + X^b - X^c - X^d$ dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Comme les entiers a, b, c, d sont distincts et non nuls, on a $R = 2$ avec les notations de la question précédente. Ainsi la seule racine éventuelle de P dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ est 2 d'après la question précédente.
Supposons que 2 soit racine de P. Sans perte de généralité, on peut supposer $a < \min(b, c, d)$. Puisque $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$ i.e. $1 + 2^{b-a} = 2^{c-a} + 2^{d-a}$. Comme $b - a$, $c - a$ et $d - a$ sont des entiers strictement positifs, 2 divise 2^{b-a}, 2^{c-a} et 2^{d-a}. On en déduit que 2 divise 1 ce qui est absurde.
Finalement, l'équation $n^a + n^b = n^c + n^d$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

10 Soit λ une racine de P. Alors

$$\lambda^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k \lambda^k = 0$$

puis pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^{n+p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k \lambda^{n+k} = 0$$

ce qui signifie que $n \mapsto \lambda^n$ appartient à F.

11 L'application φ est clairement linéaire. Comme une suite de F est uniquement déterminée par ses p premiers termes, φ est bijective. Autrement dit φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{C}^p$ et $\dim F = \dim \mathbb{C}^p = p$.

12 **12.a** Soit $i \in [\![0, p-1]\!]$. Alors

$$e_i(p) = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k e_i(k) = -a_i$$

12.b Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k e_k = 0$. En évaluant cette égalité en $i \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient $\lambda_i = 0$. On en déduit que la famille $(e_0, \dots, e_{p-1})$ est libre. Comme $\dim F = p$, cette famille est une base de F.

> **Remarque.** On aurait aussi pu remarquer que $(e_0, \dots, e_{p-1})$ est l'image de la base canonique de $\mathbb{C}^p$ par l'isomorphisme φ^{-1}.

12.c Posons $v = \sum_{i=0}^{p-1} u(i) e_i$. Alors $\varphi(u) = \varphi(v) = (u(0), \dots, u(p-1))$. Comme φ est injective, $u = v$.

13 f est clairement linéaire donc f est un endomorphisme de E. Soit $u \in F$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u(n+p) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u(n+k)$$

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u(n+1+p) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u(n+1+k)$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u)(n+p) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f(u)(n+k)$$

donc $f(u) \in F$. Ainsi F est stable par f.

14 Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
g(e_j) &= \sum_{i=0}^{p-1} g(e_j)(i)e_i \quad \text{d'après la question } \textbf{12.c} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} e_j(i+1)e_i \\
&= e_j(p)e_p + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_{i+1,j}e_i \\
&= -a_j e_p + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_{i,j-1}e_i \qquad \text{d'après la question } \textbf{12.a} \\
&= \begin{cases} -a_0 e_p & \text{si } j = 0 \\ -a_j e_p + e_{j-1} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ceci signifie que la matrice de g dans la base $(e_0, \dots, e_{p-1})$ est C_P^T.

15 **15.a** Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $u_k : n \mapsto \lambda_k^n$ est un vecteur de F d'après la question **10**. De plus, u_k est clairement un vecteur propre de g pour la valeur propre λ_k. Les vecteurs $u_0, \dots, u_{p-1}$ étant associés à des valeurs propres distinctes, la famille $(u_0, \dots, u_{p-1})$ est libre. Comme $\dim F = p$, cette famille est une base de F.

15.b Il suffit de décomposer u dans la base $(u_0, \dots, u_{p-1})$.

16 Avec les notations des questions précédentes,

$$P = X^2 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc = (X-a)(X-b)(X-c)$$

Ainsi P admet trois racines réelles distinctes, à savoir a, b et c. D'après la question **15**, les suites (a^n), (b^n) et (c^n) forment une base de l'espace vectoriel de l'énoncé.

17 Si A est la matrice nulle, alors $\chi_A = X^n$ et $C_A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_{n-1} & 0 \end{array}\right) \neq 0$. A n'est alors évidemment pas semblable à C_A (dès que $n \geq 2$).

18 Soit $(U, V) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ vérifiant (*) et $U \neq V$. Alors $U - V = P^{-1}(C_U - C_V)P$. Seule la dernière colonne de $C_U - C_V$ est potentiellement non nulle donc $\text{rg}(U - V) = \text{rg}(C_U - C_v) \leq 1$. De plus, $U \neq V$ donc $\text{rg}(U - V) \geq 1$. Finalement, $\text{rg}(U - V) = 1$.

19 Posons par exemple $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $U - V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $\text{rg}(U - V) = 1$ mais $C_U = C_V = C_{(X-1)^2}$ donc (**) n'est pas vérifiée car sinon on aurait $U = V$. Comme $\chi_U = \chi_V = (X-1)^2$, $\chi_U \wedge \chi_V = (X-1)^2$.

20 Tout d'abord, $\text{rg}(u-v) = \text{rg}(U-V) = 1$. D'après le théorème du rang, $\dim H + \text{rg}(u-v) = \dim E$ donc $\dim H = n-1$ et H est bien un hyperplan vectoriel de E.

21 **21.a** Supposons que F soit inclus dans H. Alors $u_F = v_F$ donc $\chi_{v_F} = \chi_{v_F}$ divise χ_u et χ_v. Ceci contredit le fait que χ_u et χ_v sont premiers entre eux puisque $\deg \chi_{u_F} = \deg \chi_{v_F} = \dim F \geq 1$.

21.b Comme $H \subset F + H \subset E$, $n - 1 \leq \dim(F + H) \leq n$. Supposons $\dim(F + H) = n - 1 = \dim H$. Alors $H = F + H$ d'après l'inclusion précédente puis $F \subset F + H = H$, ce qui est contradictoire. Finalement, $\dim(F+H) = n$ i.e. $F+H = E$. Donnons-nous des bases $B_F = (f_1, \dots, f_p)$ de F et $(h_1, \dots, h_{n-1})$ de H. Comme $F+H = E$, la famille $(f_1, \dots, f_p, h_1, \dots, h_{n-1})$ engendre E. Comme $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre de vecteurs de E, un théorème du cours garantit qu'on peut compléter la famille B_F en une base B' de E à l'aide de certains des vecteurs h_i.

u et v coïncident sur H et F est stable par u et v donc les matrices de u et v dans la base B' sont de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ avec A et D des matrices carrées. On en déduit que $\chi_u = \chi_A\chi_D$ et $\chi_v = \chi_B\chi_D$. Comme $F \neq E$, $\deg \chi_D \geq 1$, et χ_D divise χ_u et χ_v, ce qui contredit le fait que $\chi_u \wedge \chi_v = 1$.

21.c Ce qui précède montre que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables à la fois par u et v sont $\{0\}$ et E.

22 **22.a** Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme u est un automorphisme de E, on peut écrire $G_j = u^{-j}(H)$. Comme u^{-j} est également un automorphisme, $\dim G_j = \dim H$ donc G_j est un hyperplan de E.

22.b $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$ est l'intersection de $n-1$ hyperplans de E donc, d'après le cours, $\dim\left(\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j\right) \geq n-(n-1) = 1$. Notamment, $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}$.

22.c On procède comme indiqué dans l'énoncé. Par définition de p, $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$ est libre mais $(y, u(y), \dots, u^p(y))$ ne l'est pas. Ceci signifie que $u^p(y) \in \text{vect}(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)) = F$. On en déduit alors que F est stable par u.
Supposons $p \leq n-1$. Alors $p-1 \geq \leq n-2$ de sorte que pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, $y \in G_j$ i.e. $u^j(y) \in H$. Ainsi $F \subset H$. Comme u et v coïncident sur H, ils coïncident également sur F. Comme F est stable par u, il l'est également par v. Ainsi F est un sous-espace stable par u et v. On en déduit que $F = \{0\}$ ou $F = E$ d'après la question **21.c**. Mais y est un vecteur non nul de F donc $F = E$. Puis $p = \dim F = \dim E = n$, ce qui contredit notre supposition. Ainsi $p \geq n$. Mais comme $(y, u(y) \dots, u^{p-1}(y))$ est une famille libre de vecteurs de E, $p \leq \dim E = n$. Ainsi $p = n$. La famille $(y, u(y), \dots, u^{n-1}(y))$ est donc une famille libre de n vecteurs de E : c'est une base de E.

22.d Puisque $u(e_j) = e_{j+1}$ pour tout $j \in [\![0, n-2]\!]$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}''$ est une matrice compagon C_P pour un certain polynôme P. Mais alors $\chi_U = \chi_u = \chi_{C_P} = P$ donc $C_P = C_U$.
Pour tout $j \in [\![0, n-2]\!]$, $e_j \in H$ par définition de y. Comme u et v coïncident sur H, on a $v(e_j) = u(e_j) = e_{j+1}$ et le même raisonnement que précédemment montre que la matrice de v dans la base $\mathcal{B}''$ est C_V.

22.e C_U et C_V sont les matrices des endomorphismes u et v dans la *même* base $\mathcal{B}''$. En notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}''$ vars la base $\mathcal{B}$. On a donc $U = P^{-1}C_UP$ et $V = P^{-1}C_VP$. Ainsi U et V vérifient (**).

$\boxed{23}$ **23.a** Puisque $\frac{1}{2}(X^n + 1) - \frac{1}{2}(X^n - 1) = 1$, $(X^n + 1) \wedge (X^n - 1) = 1$. D'après ce qui précède, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que les matrices de u et v dans cette base sont respectivement C_{X^n+1} et C_{X^n-1}. Ceci implique que $u(e_i) = v(e_i) = e_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $v(e_n) = -u(e_n) = 1$.

23.b Remarquons que $u(X) = X$ et $v(X) = X$. On en déduit que $w(X) = X$ pour tout $w \in G$. Comme w est un automorphisme, w induit une bijection σ_w de X i.e. une permutation de X. Notons S_X l'ensemble des permutations de X. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S_X \\ w & \longmapsto & \sigma_w \end{array}\right.$ est injective, car si deux endomorphismes de E coïncident sur X, ils coïncident à fortiori sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et sont égaux. On en déduit que $\operatorname{card} G \leq \operatorname{card} S_X = (2n)!$.