Séries entières

1 Généralités

1.1 Définition d'une série entière et rayon de convergence

Définition 1.1 Série entière

On appelle **série entière** toute série de fonctions de la variable complexe ou réelle de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Remarque. On s'autorise un abus de notation en confondant z^n et la fonction $z \mapsto z^n$.

Lemme 1.1 Lemme d'Abel

Soient $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Si la suite $(a_n r^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ **converge absolument**.

Définition 1.2 Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle **rayon de convergence** de cette série entière la borne supérieure

$$\sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Remarque. Si la suite (a_n) est bornée, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.

Proposition 1.1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ **converge absolument**.
- Si $|z| > \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ **diverge grossièrement**.

Remarque. Si $|z| = \mathrm{R}$, on ne peut rien dire.

Corollaire 1.1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $\sum a_n z^n$ converge, alors $\mathrm{R} \geq |z|$.
- Si $\sum a_n z^n$ diverge, alors $\mathrm{R} \leq |z|$.

Remarque. Si la suite (a_n) ne converge pas vers 0, la série $\sum a_n$ diverge. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est inférieur ou égal à 1.

Exemple 1.1

Considérons la série entière $\sum \cos(n) z^n$. Notons R son rayon de convergence.

- La suite de terme général $\cos(n)$ est bornée donc $R \geq 1$.
- La suite $(\cos(n))$ ne converge pas vers 0. Donc $R \leq 1$.

Ainsi $R = 1$.

Rappel Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite réelle **strictement positive** telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Remarque. Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Attention ! La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ peut ne pas avoir de limite.

Proposition 1.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $R = \frac{1}{\ell}$

Remarque. $R = 0$ si $\ell = +\infty$ et $R = +\infty$ si $\ell = 0$.

Exemple 1.2

- La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1-z}$.
- La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini et a pour somme e^z.

Exercice 1.1

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{2n}{n} z^n$.

ATTENTION ! On ne peut pas toujours utiliser la règle de d'Alembert pour calculer le raon de convergence d'une série de cette manière. Par exemple, la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ peut ne pas avoir de limite ou la suite (a_n) peut s'annuler une infinité de fois.

Exemple 1.3

Considérons la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = 2^n$ si n est pair et $a_n = 3^n$ si n est impair. On note R son rayon de convergence.
La suite de terme général $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ n'admet pas de limite puisqu'elle prend alternativement les valeurs $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$.
Néanmoins la suite de terme général $u_n = \dfrac{a_n}{9^n}$ est bornée puisque $u_{2n} = \dfrac{4^n}{9^n} \leq 1$ et $u_{2n+1} = 3$. Ainsi $\mathrm{R} \geq \dfrac{1}{9}$. Mais si $r > \dfrac{1}{9}$, la suite de terme général $v_n = a_n r^n$ n'est pas bornée puisque la suite extraite de terme général $v_{2n+1} = 3 \cdot (9r)^n$ diverge vers $+\infty$. Ainsi le rayon de convergence vaut $\dfrac{1}{9}$.

Exemple 1.4 Série lacunaire

Considérons par exemple la série entière $\sum 2^n z^{n^2}$. C'est bien une série entière dans le sens où elle est de même nature et de même somme que la série $\sum a_n z^n$ avec $a_n = 2^{\sqrt{n}}$ si n est un carré d'entier et $a_n = 0$ sinon. On ne peut pas calculer le rayon de convergence en étudiant la limite de la suite (a_{n+1}/a_n) puisque (a_n) s'annule une infinité de fois. On peut néanmoins appliquer la règle de d'Alembert directement.

$$\frac{|2^{n+1} z^{(n+1)^2}|}{|2^n z^{n^2}|} = 2|z|^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

Ainsi le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.
On remarque notamment que $\dfrac{2^{n+1}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ mais le reayon de convergence ne vaut pas $\dfrac{1}{2}$.

Définition 1.3 Disque ouvert/intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- On appelle **disque ouvert de convergence** le disque $\mathrm{D}(0, \mathrm{R}) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < \mathrm{R}\}$.
- On appelle **intervalle ouvert de convergence** l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

REMARQUE. Si $\mathrm{R} = +\infty$, le disque ouvert de convergence est $\mathbb{C}$ tandis que l'intervalle ouvert de convergence est $\mathbb{R}$.

Convergence au bord du disque ouvert de convergence

On ne peut rien dire quant à la convergence d'une série entière au bord du disque ouvert de convergence. Par exemple, la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 (critère de d'Alembert). La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge tandis que la série harmonique alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge. On peut en fait montrer que si $|z| = 1$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ converge si et seulement si $z \neq 1$.

1.2 Comparaison de séries entières

Proposition 1.3

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- Si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geq R_b$.
- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
- Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Remarque. A fortiori, si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.

Proposition 1.4

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

1.3 Opérations sur les séries entières

Proposition 1.5 Somme de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Exercice 1.2

Montrer que si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$ et donner un exemple où $R > \min(R_a, R_b)$ dans le cas où $R_a = R_b$.

Exercice 1.3

On pose $a_n = 2^n$ si n est pair et $a_n = \frac{1}{n}$ si n est impair. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Définition 1.4 Produit de Cauchy de deux séries entières

On appelle **produit de Cauchy** de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

Proposition 1.6 Produit de Cauchy

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Alors le rayon de convergence R du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ de ces deux séries entières vérifie $\mathrm{R} \geq \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Exemple 1.5

On pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. On souhaite déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.
Il est clair que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ (somme partielle d'une série exponentielle). On en déduit que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut 1 par la règle de d'Alembert.
De plus, les rayons de convergence des séries entières $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum z^n$ sont respectivement $+\infty$ et 1. On en déduit par produit de Cauchy que

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,1),\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \frac{e^z}{1-z}$$

Exercice 1.4

On pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{H}_n x^n$ et calculer sa somme.

Exercice 1.5

Donner un exemple où $\mathrm{R} > \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$ et $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_b$.

2 Régularité de la somme

Proposition 2.1 Domaine de définition

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de somme $\mathrm{S}(z)$ et de rayon de convergence R. On note $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$) l'ensemble de définition complexe (resp. réel) de S, c'est-à-dire l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ (resp. $z \in \mathbb{R}$) tels que $\sum a_n z^n$ converge. Alors

- $\mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \subset \overline{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$;
- $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[\subset \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \subset [-\mathrm{R},\mathrm{R}]$.

Exercice 2.1

Déterminer le domaine définition réel de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Proposition 2.2 Convergence normale

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors pour tout réel $r < \mathrm{R}$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement le disque fermé de centre 0 et de rayon r.

Attention ! On ne peut pas affirmer qu'une série entière converge normalement sur le disque ouvert de convergence.

Exercice 2.2 comment=Formule de Cauchy

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme $f(z)$. Soit $r \in]0, \mathrm{R}[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

Corollaire 2.1 Continuité de la somme

La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence.

Proposition 2.3

L'application $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$.

A partir de maintenant, on s'intéreresse à la régularité de la somme d'une série entière d'une variable **réelle**.

Proposition 2.4 Primitive d'une série entière

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, R son rayon de convergence et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme. Soit F une primitive de f sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. Alors

- La série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ admet R pour rayon de convergence ;
- $\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Remarque. Le rayon de convergence de la série entière «primitivée» est le même que celui de la série entière initiale.

Exemple 2.1

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1+x}$. Puisque $x \mapsto \ln(1+x)$ est l'unique primitive nulle en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$,

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

Proposition 2.5 Dérivation terme à terme

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, R son rayon de convergence et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme. Alors

- la série entière $\sum n a_n x^{n-1}$ admet R pour rayon de convergence ;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$;
- $\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Exemple 2.2

On sait que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

En dérivant, on obtient

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

Corollaire 2.2 Dérivation terme à terme

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, R son rayon de convergence et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme. Alors

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$ admet R pour rayon de convergence ;
- $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$.

Exercice 2.3

Montrer que

$$\forall q \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1, 1[,\ \frac{1}{(1-x)^{q+1}} = \sum_{n=q}^{+\infty} \binom{n}{q} x^{n-q}$$

Corollaire 2.3 Expression des coefficients à l'aide des dérivées successives

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence non nul, et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Corollaire 2.4 Unicité des coefficients

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières. Si les sommes de ces deux séries entières coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. En particulier, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ sont des séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b strictement positifs dont les sommes coïncident sur un voisinage (réel ou complexe) de 0, alors $R_a = R_b$ et

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R_a = R_b \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Théorème 2.1 Convergence radiale (Abel)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Exemple 2.3

La série entière $\sum \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ admet 1 pour rayon de convergence et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Or $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées. D'après le théorème de convergence radiale d'Abel

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$

Attention ! Le fait que la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R ait une limite en R^- n'implique pas que $\sum a_n R^n$ converge. Par exemple, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1+x}$. De plus, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ admet bien une limite en 1 mais $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ diverge grossièrement.

Remarque. De manière générale, si la série $\sum a_n r^n$ converge pour un certain $r \in \mathbb{R}_+$, on peut toujours affirmer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to r^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$, même si r n'est pas le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. En effet, en notant R ce rayon de convergence, la convergence de la série $\sum a_n r^n$ assure que $R \geq r$. Si $R = r$, on est ramené au théorème de convergence radiale d'Abel à proprement parler. Si $r < R$, alors la continuité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ (et donc notamment en r) assure le résultat.

Exercice 2.4 Une réciproque du théorème d'Abel

Soit (a_n) une suite **positive** telle que la série entière $\sum a_n x^n$ possède un rayon de convergence $R > 0$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$ et on suppose que f admet une limite en R. Montrer que la série $\sum a_n R^n$ converge.

3 Fonctions développables en série entière et développements usuels

Définition 3.1 Fonction développable en série entière

Soient f une fonction d'une variable complexe à valeurs complexes et $r > 0$. On dit que f est **développable en série entière** sur le disque $\mathrm{D}(0, r)$ s'il existe une suite (a_n) telle que

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Proposition 3.1 Série géométrique

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \implies \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Proposition 3.2 Série exponentielle

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Exercice 3.1

La fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{z}$ est-elle développable en série entiere ?

Définition 3.2 Fonction développable en série entière

Soient f une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes et $r > 0$. On dit que f est **développable en série entière** sur $]-r, r[$ s'il existe une suite (a_n) telle que

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. Notamment une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.

Remarque. Une somme et un produit de fonctions développables en série entière est développable en série entière.

Remarque. Si deux fonctions développables en séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 coïncident sur un voisinage de 0, alors l'unicité du développement en série entière permet d'affirmer que $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2$ et que les deux fonctions coïncident sur $]-\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_1[=]-\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_2[$ ou $\mathrm{D}(0, \mathrm{R}_1) = \mathrm{D}(0, \mathrm{R}_2)$ suivant qu'il s'agit de fonctions d'une variable réelle ou complexe.

Définition 3.3 Série de Taylor

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. On appelle **série de Taylor** la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Proposition 3.3 Série de Taylor

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque. Autrement dit, toute fonction développable en série entière est égale à la somme de sa série de Taylor sur un voisinage de 0.

Remarque. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-r,r[$ ($r > 0$), alors, d'après la formule de Taylor-Young,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Attention ! Une fonction n'est pas toujours égale à la somme de sa série de Taylor sur un voisinage de 0. Par exemple, la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si x=0} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. f ne peut être égale à sa somme de sa série de Taylor sur aucun voisinage de 0 puisqu'elle n'est jamais constamment nulle sur un tel voisinage.

Proposition 3.4 Exemples de fonctions développables en série entière

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Remarque. On convient que

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)$$

En particulier, $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Remarque. Le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ est encore valable en 1 et celui de arctan est encore valable en -1.

Méthode **Calcul de la somme de $\sum \mathrm{P}(n)x^n$ où P est un polynôme**

On fait apparaître la série géométrique et ses dérivées.

Exemple 3.1

On souhaite calculer la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n^2+2n+3)x^n$.
Tout d'abord le rayon de convergence vaut 1 par la règle de d'Alembert.
On remarque ensuite que

$$n^2+2n+3 = n(n-1)+3n+3$$

Soit $x \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+2n+3)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
&= x^2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + 3x\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
&= x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) + 3x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{3}{1-x} \\
&= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x} \\
&= \frac{2x^2-3x+3}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Méthode **Calcul de la somme de $\sum \mathrm{F}(n)x^n$ où F est une fraction rationnelle**

On décompose F en éléments simples.

Exemple 3.2

On souhaite calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geq3} \frac{n+1}{n^2-3n+2}x^n$.
Tout d'abord le rayon de convergence vaut 1 par la règle de d'Alembert.
On remarque ensuite que

$$\frac{n+1}{n^2-3n+2} = \frac{3}{n-2} - \frac{2}{n-1}$$

Soit $x \in]-1,1[$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2-3n+2}x^n &= 3\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n-2} - 2\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} \\
&= 3x^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - 2x\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\
&= -3x^2\ln(1-x) + 2x(\ln(1-x)+x) \\
&= (2x-3x^2)\ln(1-x) + 2x^2
\end{aligned}$$

Méthode **Développer en série entière une fraction rationnelle**

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples.
On remarque alors que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |a| \implies \frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^n}$$

Le développement en série entière de $\dfrac{1}{(z-a)^p}$ peut être obtenu par dérivation.

Exemple 3.3 Développement en série entière d'une fraction rationnelle

Soit $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{X}^2 - 9\mathrm{X} + 5}{\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} + 2}$. La partie entière de cette fraction rationnelle est clairement nulle. On remarque que 1 est racine du dénominateur donc

$$(\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} + 2) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 2) = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+2)$$

Il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{\alpha}{\mathrm{X}-1} + \frac{\beta}{(\mathrm{X}-1)^2} + \frac{\gamma}{\mathrm{X}+2}$$

Comme -2 est pôle simple,

$$\gamma = \frac{\mathrm{P}(-2)}{\mathrm{Q}'(-2)} = \frac{27}{9} = 3$$

en notant $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{F}(x) = \alpha + \gamma = 1$ donc $\alpha = -2$. Enfin, $\mathrm{F}(0) = -\alpha + \beta + \dfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{5}{2}$ donc $\gamma = -1$.
Ainsi

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = -\frac{2}{\mathrm{X}-1} - \frac{1}{(\mathrm{X}-1)^2} + \frac{3}{\mathrm{X}+2} = \frac{2}{1-\mathrm{X}} - \frac{1}{(1-\mathrm{X})^2} + \frac{3}{1+\frac{\mathrm{X}}{2}}$$

On remarque alors que

$$\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

En dérivant

$$\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

Par ailleurs

$$\forall x \in]-2,2[, \ \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$$

On en déduit que F est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[, \ \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - n + 3 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}\right) x^n$$

Méthode **Déterminer un développement en série entière via une équation différentielle**

Pour déterminer le développement en série entière d'une fonction f, on peut montrer qu'elle vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux et en déduire une relation de récurrence sur les coefficients de cet éventuel développement en série entière.

Exemple 3.4

On souhaite montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière en l'origine et déterminer ce développement en série entière.
Comme arcsin et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sont développables en séries entières de rayon de convergence égal à 1, f est développable en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 par produit de Cauchy.
De plus, f est dérivable sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ou encore

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$$

Comme f est développable en série entière sur $]-1,1[$, il existe $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

En reportant dans l'équation différentielle précédente, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 1$$

ou encore

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)a_{n+1} - na_{n-1}\right] x^n = 1$$

Par unicité du développement en série entière, $a_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a_{n+1} - na_{n-1} = 0$$

Notamment,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} a_{2n-1}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Par ailleurs, $a_0 = f(0) = 0$ donc $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Finalement

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^{2n+1}$$