Devoir à la maison n°08

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après CCP PSI 2012

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Etant donné un entier naturel $n \geq 2$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (resp. des matrices colonnes à n lignes), à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de A. On note A^T la transposée d'une matrice A.
Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(\mathrm{A})$ le déterminant de A, $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$ la trace de A, $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{A})$ le spectre complexe de A et si $\lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{A})$, on note $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ le sous-espace propre des vecteurs $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifient $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$.
On note également I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leq k \leq n$.
Enfin, pour tout nombre complexe z, $|z|$ désigne le module de z.

On dit qu'une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathcal{S})$ lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

Partie I –

Dans cette partie, on suppose $n = 3$. On note classiquement $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
On considère les points P, Q et R d'affixes respectifs 1, j et j^2. On note T l'intérieur du triangle PQR, bords non compris.

I.1 **I.1.a** Déterminer les équations cartésiennes des droites (PQ), (QR) et (RP).

I.1.b En déduire qu'un point d'affixe $x+iy$ appartient à T si et seulement si x et y vérifient les trois inégalités suivantes :

$$2x + 1 > 0 \qquad x - \sqrt{3}y - 1 < 0 \qquad x + \sqrt{3}y - 1 < 0$$

I.2 Dans cette question, on considère une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $(\mathcal{S})$.

I.2.a Montrer que 1 est valeur propre de A.

Dans la suite de la question **I.2**, on suppose que les autres valeurs propres de A sont des nombres complexes conjugués distincts λ et $\overline{\lambda}$ avec $0 < |\lambda| < 1$. On note $\lambda = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

I.2.b Exprimer $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$ en fonction de λ et $\overline{\lambda}$, puis en fonction de a et b.

I.2.c Montrer les inégalités $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) > 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$.

I.2.d En déduire l'inégalité $\mathrm{tr}(A)^2 < 3\,\mathrm{tr}(A^2)$.

I.2.e En déduire que $2a+1>0$ et $(a-\sqrt{3}b-1)(a+\sqrt{3}b-1)>0$.

I.2.f En déduire que le point d'affixe λ appartient à T.

I.3 Dans cette question, on se donne $\lambda = re^{i\theta}$ avec $r\in]0,1[$ et $\theta\in]0,\pi[$. On suppose que le point d'affixe λ appartient à T et on note

$$\alpha = \frac{1+2r\cos(\theta)}{3} \qquad \beta = \frac{1+2r\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}{3} \qquad \gamma = \frac{1+2r\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}{3}$$

I.3.a Montrer les égalités suivantes

$$\alpha = \frac{1+\lambda+\overline{\lambda}}{3} \qquad \beta = \frac{1+j\lambda+j^2\overline{\lambda}}{3} \qquad \gamma = \frac{1+j^2\lambda+j\overline{\lambda}}{3}$$

I.3.b On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$. Montrer que A vérifie la propriété $(\mathcal{S})$.

I.3.c Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2. Exprimer la matrice A en fonction de I_3, J et J^2.

I.3.d Déterminer les valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice J.

I.3.e En déduire que les valeurs propres de A sont 1, λ et $\overline{\lambda}$.

Partie II –

Dans toute cette partie, $A = (a_{i,j})$ désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{S})$.

II.1 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AU et en déduire que 1 est valeur propre de A.

II.2 Précision sur $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

II.2.a Soit une matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(B) = 0$.

II.2.a.i Justifier qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $BX = 0$.

II.2.a.ii Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \max\{|x_i|,\ i\in[\![1,n]\!]\}$. Justifier l'inégalité

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j\neq k} |b_{k,j}|$$

II.2.b Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. En appliquant la question **II.2.a** à la matrice $B = A - \lambda I_n$, montrer qu'il existe $k\in[\![1,n]\!]$ tel que $|a_{k,k}-\lambda| \leq 1 - a_{k,k}$. En déduire $|\lambda| \leq 1$.

II.2.c On suppose que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| = 1$ et on note $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$. Déduire de la question **II.2.b** que $\cos(\theta) = 1$, puis en déduire λ.

II.3 Dimension de $E_1(A)$.

II.3.a Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}^\top)$. En comparant le rang de $\mathrm{A} - \mathrm{I}_n$ et celui de $\mathrm{A}^\top - \mathrm{I}_n$, montrer que les sous-espaces $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$ et $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}^\top)$ ont même dimension.

II.3.b Soit $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\mathrm{V} \neq 0$, tel que $\mathrm{A}^\top\mathrm{V} = \mathrm{V}$.

II.3.b.i Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|v_i| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$.

II.3.b.ii En calculant $\sum_{i=1}^{n} |v_i|$, montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

II.3.b.iii On note $|\mathrm{V}| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{A}^\top|\mathrm{V}| = |\mathrm{V}|$, puis que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|v_i| > 0$.

II.3.c

II.3.c.i Soient $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui appartiennent à $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}^\top)$. En considérant la matrice $\mathrm{X} - \dfrac{x_1}{y_1}\mathrm{Y}$, déterminer la dimension de $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}^\top)$.

II.3.c.ii Justifier qu'il existe un vecteur unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui engendre $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}^\top)$, tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait $\omega_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

II.3.c.iii Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$.

II.3.d **Bilan des propriétés spectrales de A et de $\mathrm{A}^\top$.**
Citer les propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres de A et de $\mathrm{A}^\top$ qui ont été démontrées dans les questions précédentes de la deuxième partie.

II.4 A l'aide la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ définie en **II.3.c**, on considère l'application N définie de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathrm{N}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i|$$

II.4.a Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

II.4.b Montrer que pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $\mathrm{N}(\mathrm{AX}) \leq \mathrm{N}(\mathrm{X})$.

II.4.c Retrouver le résultat de la question **II.2.b** : pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, $|\lambda| \leq 1$.

II.5 **Ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de A.**

A l'aide la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$, on considère la forme linéaire $\Phi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$$

On note $\mathrm{Ker}(\Phi)$ le noyau de Φ.

II.5.a Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

II.5.b Justifier que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$.

II.5.c Soit $X \in E_\lambda(A)$ avec $\lambda \neq 1$. Montrer que $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

II.5.d En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de la matrice A.