Devoir à la maison n°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Pour tout $(A, B) \in \mathbb{C}[X] \times (\mathbb{C}[X] \setminus \{0\})$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

2 On remarque que $A = 1 \times B + X - 1$ et $\deg(X-1) < 3 \leq n = \deg B$. On en déduit que le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B sont respectivement 1 et $X - 1$.

3 Notons $D = A \wedge B$. Puisque D divise A et B, D divise également $A - B = X - 1$. De plus, 1 est racine de A et B donc $X - 1$ divise A et B donc divise également leur PGCD. Comme D est unitaire par convention, $D = X - 1$.

4 D'après le cours,

$$A = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$$

et

$$B = X(X^{n-1} - 1) = X \prod_{\omega \in \mathbb{U}_{n-1}} (X - \omega)$$

5 Soit $(P_1, P_2, \lambda_1, \lambda_2) \in E^2 \times \mathbb{C}^2$. On écrit les divisions euclidiennes de AP_1 et AP_2 par B :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \text{ avec } \deg R_1 < \deg B = n$$
$$AP_2 = BQ_2 + R_2 \text{ avec } \deg R_2 < \deg B = n$$

Par définition de f, $f(P_1) = R_1$ et $f(P_2) = R_2$. De plus,

$$A(\lambda_1 P_1 + P_2) = B(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) + \lambda_1 R_2 + \lambda_2 R_2$$

et $\deg(\lambda_1 R_2 + \lambda_2 R_2) < n = \deg B$. Ainsi $\lambda_1 R_2 + \lambda_2 R_2$ est le reste de la division euclidienne de $A(\lambda_1 P_1 + P_2)$ par B. Autrement dit, $f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$. f est donc bien linéaire.
De plus, pour tout $P \in E$, $\deg f(P) < \deg B = n$ donc $f(P) \in E$. f est donc bien un endomorphisme de E.

6 Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. Alors

$$AX^k = X^{n+k} - X^k = X^k B + X^{k+1} - X^k$$

et $\deg(X^{k+1} - X^k) = k + 1 \leq n - 1 < \deg B$. Ainsi $f(X^k) = X^{k+1} - X^k$.

7 De même,

$$AX^{n-1} = X^{2n-1} - X^{n-1} = (X^{n-1} + 1)B - X^{n-1} + X$$

et $\deg(-X^{n-1} + X) = n - 1 < \deg B$. Ainsi $f(X^{n-1}) = -X^{n-1} + X$.

8 La matrice de f dans la base canonique de E est donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

9 Il est clair que $\operatorname{tr}(M) = -n$.

10 Les $n-1$ premières colonnes de M forment une famille échelonnée et donc libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On en déduit que $\operatorname{rg}(M) \geq n-1$. Par ailleurs, la somme des $n-1$ dernières colonnes de M est nulle : la famille des colonnes de M est donc liée. On en déduit que $\operatorname{rg}(M) \leq n-1$. Par conséquent, $\operatorname{rg}(M) = n-1$.

11 D'après la question précédente, les $n-1$ premières colonnes de M forment une base de Im(M). On en déduit que la famille $(f(X^k))_{0 \leq k \leq n-2}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$. Autrement dit, la famille $(X^{k+1} - X^k)_{0 \leq k \leq n-2}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

12 On a vu que la somme des $n-1$ dernières colonnes de M était nulle. Ceci signifie que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} M$. Autrement dit $P = \sum_{k=1}^{n-1} X^k \in \operatorname{Ker} f$. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f = 1$ donc (P) est une base de $\operatorname{Ker} f$.

13 Posons $F = \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}$. L'application $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{C}_{n-2}[X] & \longrightarrow & F \\ P & \longmapsto & (X-1)P \end{array}\right.$ est clairement linéaire et surjective. Comme $(X^k)_{0 \leq k \leq n-2}$ est une base de $\mathbb{C}_{n-2}[X]$, la famille $(X^k(X-1))_{0 \leq k \leq n-2}$ engendre F. Or on a vu que $(X^k(X-1))_{0 \leq k \leq n-2}$ est également une base de $\operatorname{Im} f$ comme vu précédemment. On en déduit que $F = \operatorname{Im} f$.

14 D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$. Il suffit donc de montrer que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ pour affirmer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.
Soit $Q \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Comme $Q \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(P)$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Q = \alpha P$. De plus, $Q \in \operatorname{Im} f = (X-1)\mathbb{C}_{n-2}[X]$ donc $X-1$ divise Q. On en déduit que $Q(1) = 0$. Ainsi $\alpha P(1) = 0$. Mais comme $P(1) = n-1 \neq 0$, $\alpha = 0$ puis $Q = 0$, ce qui conclut.

15 Il suffit de remarquer que les racines $z_1, \dots, z_n$ de P_j sont distinctes.

16 Par définition de f, il existe un polynôme Q_j tel que $AP_j = BQ_j + R_j$. Les racines de P_j sont les z_k pour $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$. Soit donc $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$.

$$R_j(z_k) = A(z_k)P_j(z_k) - B(z_k)Q_j(z_k) = 0$$

car $P_j(z_k) = B(z_k) = 0$.

17 La question précédente montre que pour tout $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$, $X - z_k$ divise R_j. Comme les z_k sont deux à deux distincts, les polynômes $X - z_k$ sont premiers entre eux deux à deux. On en déduit que $P_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (X - z_k)$ divise R_j. Comme $\deg P_j = n-1$ et $\deg R_j \leq n-1$ (reste d'une division euclidienne par B), il existe $\lambda_j \in \mathbb{C}$ tel que $R_j = \lambda_j P_j$ i.e. $f(P_j) = \lambda_j P_j$. P_j est donc un vecteur propre de f.

18 On rappelle que $AP_j = BQ_j + R_j = BQ_j + \lambda_j P_j$. Notamment,

$$A(z_j)P_j(z_j) = B(z_j)Q_j(z_j) + \lambda_j P_j(z_j) = \lambda_j P_j(z_j)$$

car z_j est une racine de B. Or $P_j(z_j) \neq 0$ donc $\lambda_j = A(z_j)$.

19 Tout d'abord, $A(z_j) = z_j^n - 1$. Mais comme z_j est une racine de B, $z_j^n = z_j$. Ainsi $\lambda_j = A(z_j) = z_j - 1$. Puisque $z_n = 0$, $\lambda_n = -1$.

20 Comme les z_j dont deux à deux distincts, les $\lambda_j = z_j - 1$ sont également deux à deux distincts. Ainsi f possède n valeurs propres distinctes : il est diagonalisable.

21 On sait alors que $\operatorname{tr}(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) - n$. D'après les relations coefficients racines, $\sum_{j=1}^{n} z_j$ est l'opposé du coefficient de X^{n-1} dans $B = X^n - X$. Comme $n \geq 3$, ce coefficient est nul. On en déduit que $\operatorname{tr}(f) = -n$.

22 On sait que $B = \prod_{j=1}^{n} (X - z_j)$. Comme $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n racines distinctes de χ_f, elles sont toutes de multiplicité 1 et

$$\chi_f = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j) = \prod_{j=1}^{n} (X + 1 - z_j) = B(X+1) = (X+1)^n - (X+1)$$

Avec la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\chi_f = (n-1)\mathrm{X} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{X}^k$$

23 Notons $\tilde{f}$ l'endomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$ induit par f. La matrice de f dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$ est $\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{\mathrm{M}} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ où $\tilde{\mathrm{M}}$ est la matrice de $\tilde{f}$ dans une base de $\mathrm{Im}\, f$. On en déduit que $\chi_f = \mathrm{X}\chi_{\tilde{f}}$ puis

$$\chi_{\tilde{f}} = (n-1) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{X}^{k-1}$$

Comme $\mathrm{rg}\, f = n-1$, $\chi_{\tilde{f}}(0) = (-1)^{n-1} \det \tilde{f}$ puis $\det \tilde{f} = (-1)^{n-1} n$.