Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 On montre que $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
- $\forall(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^2$, $\mathrm{A} - \mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
- $\forall(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^2$, $\mathrm{AB} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ car les coefficients de AB sont des sommes de produits des coefficients de A et B.

2 **2.a** C'est en fait un résultat du cours : les inversibles d'un anneau forment un groupe.

2.b Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Remarquons que $\det(\mathrm{A}) = ad - bc \in \mathbb{Z}$.
Supposons que $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Il existe donc $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_2$. Ainsi $\det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{I}_2) = 1$. Mais $\det \mathrm{A}$ et $\det \mathrm{B}$ sont des entiers donc $\det \mathrm{A} = \pm 1$ i.e. $|ad - bc| = 1$.
Supposons que $|ad - bc| = 1$ i.e. $\det \mathrm{A} = \pm 1$. D'après la formule de la comatrice,

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \operatorname{com}(\mathrm{A})^\top = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

donc $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

3 **3.a** L'application $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \mapsto \det(\mathrm{M})$ est un morphisme du groupe $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \times)$ dans le groupe $(\{-1, 1\}, \times)$. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est donc un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ en tant que noyau de ce morphisme.

3.b En utilisant le fait que 3 et 5 sont premiers entre eux et le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\
\iff\ & 3d - 5c = 1 = 3 \times 2 - 5 \times 1 \\
\iff\ & 3(d - 2) = 5(c - 1) \\
\iff\ & \exists k \in \mathbb{Z},\ \begin{cases} c = 1 + 3k \\ d = 2 + 5k \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des couples recherchés est donc $\{(1 + 3k, 2 + 5k), k \in \mathbb{Z}\}$.

3.c De la même manière,

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \begin{cases} c = -1 + 3k \\ d = -2 + 5k \end{cases}$$

L'ensemble des couples recherchés est donc $\{(1 + 3k, 2 + 5k), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1 + 3k, -2 + 5k), k \in \mathbb{Z}\}$.

3.d Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Alors il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si il existe $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ad - bc = \pm 1$. D'après le théorème de Bézout, ceci équivaut à $a \wedge b = 1$.

$\boxed{4}$ **4.a** Tout d'abord, $\chi_S = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc S est diagonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(S) = \{i, -i\}$. On calcule $E_i(S) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-i}(S) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right)$. On a donc $S = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.
Puisque $\mathrm{Sp}(T) = \{1\}$, T n'est pas diagonalisable sinon on aurait $T = I_2$. T est déjà triangulaire donc il n'y a pas de matrice de passage à spécifier.
Enfin, $TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $\chi_{TS} = X^2 - X + 1 = (X + j)(X + \bar{j})$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Ainsi TS est diagonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(TS) = \{-j, -\bar{j}\}$. On calcule $E_{-j}(TS) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{j} \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-\bar{j}}(TS) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}\right)$. On a donc $TS = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\bar{j} & -j \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -\bar{j} \end{pmatrix}$.

4.b χ_S et χ_{TS} ne sont pas scindés sur $\mathbb{R}$ donc S et TS ne sont pas trigonalisables et encore moins diagonalisables.
T est trigonalisable mais pas diagonalisable pour les mêmes raisons qu'à la question précédente.

$\boxed{5}$ **5.a** A est annulé $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ qui est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$ donc les formes réduites diagonales possibles de A sont les matrices $\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}$.

5.b Comme $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\det A = 1$ donc A est semblable et donc égale à $\pm I_2$. Réciproquement, les matrices I_2 et $-I_2$ appartient bien à $SL_2(\mathbb{Z})$ vérifient bien l'égalité de l'énoncé. Les matrices $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = I_2$ sont I_2 et $-I_2$.

$\boxed{6}$ **6.a** A est annulé par $X^2+1 = (X-i)(X+i)$ qui est simplement scindé sur $\mathbb{C}$. Ainsi A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{i, -i\}$. Comme $\det(A) = 1$, $\mathrm{Sp}(A) = \{i, -i\}$ et A est donc semblable à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Comme la trace est un invariant de similitude, $\mathrm{tr}(A) = i + (-i) = 0$.

6.b Puisque $\mathrm{tr}(A) = 0$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. De plus, $\det(A) = 1 = -a^2 - bc$.

Réciproquement, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et $a^2 + bc = -1$, on a bien $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $A^2 = -I_2$.

Les matrices $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 = -I_2$ sont les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + bc = -1$.

$\boxed{7}$ **7.a** C'est un classique. Soient U et V deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $V = P^{-1}UP$ i.e. $PV = UP$. Il existe alors deux matrices Q et R de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $P = Q + iR$. On a alors $QV = UQ$ et $RV = UR$ en consiérant les parties réelles et imaginaires.
La fonction $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \det(Q + zR)$ est polynomiale. Comme $f(i) \neq 0$, f n'est pas nulle et possède donc un nombre fini de racines. Comme $\mathbb{R}$ est inifini, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f(\lambda) \neq 0$. Ainsi $S = P + \lambda Q \in GL_2(\mathbb{R})$. Comme $QV = UQ$ et $RV = UR$, on a encore $SV = US$ puis $V = S^{-1}US$. U et V sont donc bien semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7.b Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $A^2 = -I_2$. On a vu à la question **6.a** que A était semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On a vu également à la question **4.a** que S était semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à cette même matrice. Par transitivité de la similitude, A et S sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Mais comme ces deux matrices sont à coefficients réels, elles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

$\boxed{8}$ **8.a** Il est clair qu'un réseau engendré par une base $\mathcal{B}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est le sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ engendré par $\mathcal{B}$. Un réseau est donc un groupe additif.

8.b Il suffit de remarquer que $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta = \mathbb{Z}(-\alpha) + \mathbb{Z}\beta$. Le réseau engendré par (α, β) est égal au réseau engendré par $(-\alpha, \beta)$ et l'un des deux complexes $\frac{\alpha}{\beta}$ et $-\frac{\alpha}{\beta}$ possède une partie imaginaire strictement positive.

8.c Pour tout nombre complexe z, $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{\overline{az+b}}{\overline{cz+d}}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\frac{(az+b)\overline{cz+d} - \overline{az+b}(cz+d)}{(cz+d)\overline{cz+d}}\\
&= \frac{1}{2i}\frac{(az+b)(c\overline{z}+d) - (a\overline{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2}\\
&= \frac{1}{2i}\frac{(ac|z|^2+adz+bc\overline{z}+bd) - (ac|z|^2+ad\overline{z}+bcz+bd)}{|cz+d|^2}\\
&= \frac{1}{2i}\frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2}\\
&= \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\operatorname{Im}(z)
\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ **9.a** Remarquons que $\omega_1' \in \Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2$. De même, il existe $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2$. On a donc bien

$$\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = \mathrm{P}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. De la même manière, il existe $\mathrm{Q} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \mathrm{Q}\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}$$

Notons que P et Q sont les matrices de passages respectives de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$. Ces deux matrices sont donc inverses l'une de l'autre. Comme elles sont à coefficients entiers, elles sont en fait dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
En particulier, $ad - bc = \pm 1$. D'après la question précédente ;

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1'}{\omega_2'}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{a\omega_1/\omega_2+b}{c\omega_1/\omega_2+d}\right) = \frac{ad-bc}{|c\omega_1/\omega_2+d|^2}\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

Comme ω_1/ω_2 et ω_1'/ω_2' sont dans $\mathcal{H}$, leurs parties imaginaires sont strictement positives. On en déduit que $ad - bc > 0$ et donc que $ad - bc = 1$. Finalement, $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

9.b Réciproquement, supposons qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = \mathrm{P}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$$

Alors $\omega_1', \omega_2' \in \Lambda_{\mathcal{B}}$ puis $\Lambda_{\mathcal{B}'} \subset \Lambda_{\mathcal{B}}$. Mais on a également

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{P}^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ donc $\Lambda_{\mathcal{B}} \subset \Lambda_{\mathcal{B}'}$.
Par double inclusion, $\Lambda_{\mathcal{B}} = \Lambda_{\mathcal{B}'}$.

$\boxed{10}$ D'après les deux questions précédentes, $\Lambda_{\mathcal{B}} = \Lambda_{\mathcal{B}'}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 3 & 5\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ (on ne requiert pas $\omega_1'/\omega_2' \in \mathcal{H}$) i.e. $3d - 5c = 1$. D'après la question **3.c**, l'ensemble des couples (c,d) recherchés est $\{(1+3k, 2+5k), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1+3k, -2+5k), k \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxed{11}$ Soit $(\tau,\tau')\in\mathcal{H}^2$ tel que $\Lambda_\tau=\Lambda_{\tau'}$. D'après la question **9.a**, il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$ tel que

$$\begin{cases}\tau'=a\tau+b\\ 1=c\tau+d\\ ad-bc=1\end{cases}$$

Comme $(1,\tau)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, l'égalité $1=c\tau+d$ donne $c=0$ et $d=1$. Puisque $ad-bc=1$, $a=1$. Ainsi $\tau'=\tau+b$.
Réciproquement, s'il existe $b\in\mathbb{Z}$ tel que $\tau'=\tau+b$, on montre aisément que $\Lambda_{\tau'}=\Lambda_\tau$.

$\boxed{12}$ **12.a** Soit Λ un réseau. On a vu que Λ peut être engendré par une base (α,β) où $\tau=\dfrac{\alpha}{\beta}\in\mathcal{H}$. Il est clair que $\Lambda=\beta\Lambda_\tau$ donc Λ est semblable à Λ_τ.

12.b Soit $(\tau,\tau')\in\mathcal{H}^2$ tel que Λ_τ et $\Lambda_{\tau'}$ soient semblables. Il existe alors $\lambda\in\mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda_{\tau'}=\lambda\Lambda_\tau$. $\Lambda_{\tau'}$ est engendré par la base $(\tau',1)$ et $\lambda\Lambda_\tau$ est engendré par la base $(\lambda\tau,\lambda)$. De plus, $\dfrac{\tau'}{1}=\tau'\in\mathcal{H}$ et $\dfrac{\lambda\tau}{\lambda}=\tau\in\mathcal{H}$ donc, d'après la question **9.a**, il existe $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\begin{cases}\tau'=a\lambda\tau+b\lambda=(a\tau+b)\lambda\\ 1=c\lambda\tau+d\lambda=(c\tau+d)\lambda\end{cases}$. Ainsi

$$\tau'=\frac{\tau'}{1}=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\tau'=\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Posons $\lambda=\dfrac{1}{c\tau+d}$. Alors

$$\begin{pmatrix}\tau'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\tau\\la\end{pmatrix}$$

Les réseaux engendrés par les bases $(\tau',1)$ et $(\lambda\tau,\lambda)$ sont donc égaux d'après la question **9.a**. Ainsi $\Lambda_{\tau'}=\lambda\Lambda_\tau$ de sorte que $\Lambda_{\tau'}$ et Λ_τ sont semblables.

$\boxed{13}$ **13.a** Une similitude directe de centre O est une application de la forme $\mathrm{Z}\in\mathbb{C}\mapsto z\mathrm{Z}$ où $z\in\mathbb{C}$. On en déduit que l'application qui à $z\in\mathrm{S}(\lambda)$ associe la similitude $\mathrm{Z}\mapsto z\mathrm{S}$ établit une bijection de $\mathrm{S}(\lambda)$ sur l'ensemble des similitudes laissant stable le réseau Λ.

13.b On note (α,β) une base engendrant Λ.
Soit une homothétie de rapport $\lambda\in\mathbb{R}$ laissant stable Λ. Notamment, $\lambda\alpha\in\Lambda$ donc il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $\lambda\alpha=u\alpha+v\beta$. Comme λ, u et v sont des réels, on a donc $\lambda=u\in\mathbb{Z}$.
Réciproquement, si $\lambda\in\mathbb{Z}$, il est clair que $\lambda\Lambda\subset\Lambda$.
Ainsi $\mathrm{S}(\Lambda)\cap\mathbb{R}=\mathbb{Z}$.

13.c On vérifie que $\mathrm{S}(\Lambda)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

13.d Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors

$$z\in\mathrm{S}(\Lambda_{\mathcal{B}})\iff z\Lambda_{\mathcal{B}}\subset\Lambda_{\mathcal{B}}\iff\frac{z}{\omega_2}\Lambda_{\mathcal{B}}\subset\frac{1}{\omega_2}\Lambda_{\mathcal{B}}\iff z\Lambda_\tau\subset\Lambda_\tau\iff z\in\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$$

Ainsi $\mathrm{S}(\Lambda_{\mathcal{B}})=\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$.

13.e Soit $z\in\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$. Comme $1\in\Lambda_\tau$, $z=z\times1\in\Lambda_\tau$. Ainsi $\mathrm{S}(\Lambda_\tau)\subset\Lambda_\tau$.

$\boxed{14}$ **14.a** Soit $z\in\mathrm{S}(\Lambda_\tau)\backslash\mathbb{Z}$. Puisque $z\Lambda_\tau\subset\Lambda_\tau$, il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$ tel que $\begin{cases}z\tau=a\tau+b\\ z=c\tau+d\end{cases}$. Ainsi $c\tau^2+(d-a)\tau+b=0$. Mais comme $z\notin\mathbb{Z}$, $c\neq0$. Ainsi τ est bien racine d'un polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

14.b **14.b.i** On a $u\tau^2+v\tau+w=0$. Posons $z=u\tau$. Alors $z\notin\mathbb{R}$ puisque $\tau\notin\mathbb{R}$ et $u\neq0$. De plus, $z\tau=u\tau^2=-v\tau-w\in\Lambda_\tau$ et $z\times1=z=u\tau\in\Lambda_\tau$. Comme $(1,\tau)$ engendre Λ en tant que groupe, $z\Lambda_\tau\subset\Lambda_\tau$ i.e. $z\in\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$.

14.b.ii Supposons que $u=1$. Avec les notations de la question précédente, $z=u\tau=\tau\in\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$. De plus, il est clair que $1\in\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$. Comme $\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$ est un groupe additif, le sous-groupe engendré par $(1,\tau)$, à savoir Λ_τ est inclus dans $\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$. On a l'inclusion réciproque d'après la question **13.e**. Ainsi $\mathrm{S}(\Lambda_\tau)=\Lambda_\tau$.

$\boxed{15}$ **15.a** Soit $\tau\in\mathcal{H}$. D'après la question **8.c**,

$$\mathrm{Im}(g(\tau))=\frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}>0$$

donc $g(\tau)\in\mathcal{H}$.

15.b Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Pour tout $\tau \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\Phi(A) \circ \Phi(A')(\tau) &= \frac{a\frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'} + b}{c\frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'} + d}\\ &= \frac{a(a'\tau + b') + b(c'\tau + d')}{c(a'\tau + b') + d(c'\tau + d')}\\ &= \frac{(aa' + bc')\tau + ab' + bd'}{(ca' + dc')\tau + cb' + dd'}\end{aligned}$$

Or $AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ donc on a bien

$$\forall \tau \in \mathcal{H},\ \Phi(A) \circ \Phi(A')(\tau) = \Phi(AA')(\tau)$$

i.e. $\Phi(A) \circ \Phi(A') = \Phi(AA')$.
Par surjectivité de Φ, $\circ$ est bien une loi interne sur Γ.

15.c D'après la question précédente,

$$\Phi(A) \circ \Phi(A^{-1}) = \Phi(A^{-1}) \circ \Phi(A) = \Phi(I_2) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$$

Ainsi $\Phi(A)$ est bijective i.e. inversible pour la loi $\circ$ et $\Phi(A)^{-1} = \Phi(A^{-1}) \in \Gamma$.
On vérifie alors que Γ est un sous-groupe du groupe symétrique $S_{\mathcal{H}}$ (groupe des permutations de $\mathcal{H}$). En effet, les questions précédentes montrent que $\Gamma \subset S_{\mathcal{H}}$, Γ est stable par inversion et par composition. De plus, Γ n'est évidemment pas vide.

15.d Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors

$$\begin{aligned}&\Phi(A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\\ \iff& \forall \tau \in \mathcal{H},\ \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \tau\\ \iff& \forall \tau \in \mathcal{H},\ c\tau^2 + (d - a)\tau - b = 0\\ \iff& c = (d - a) = b = 0 \qquad \text{car } \mathcal{H} \text{ est infini}\\ \iff& a = d = \pm 1 \text{ ET } b = c = 0 \qquad \text{car } ad - bc = 1\\ \iff& A = \pm I_2\end{aligned}$$

Remarque. On a donc montré que le noyau du morphisme de groupes Φ est $\{I_2, -I_2\}$.

15.e **15.e.i** Soit $(A, A') \in SL_2(\mathbb{Z})^2$. Alors

$$\Phi(A) = \Phi(A') \iff \Phi(A'A^{-1}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \iff A'A^{-1} = \pm I_2 \iff A' = \pm A$$

15.e.ii On calcule $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $ST \neq \pm TS$ donc, d'après la question précédente, $\Phi(ST) \neq \Phi(TS)$ i.e. $\Phi(S)\Phi(T) \neq \Phi(T)\Phi(S)$. Γ n'est donc pas un groupe commutatif.

$\boxed{16}$ **16.a**

$$\begin{aligned}&z \in \mathcal{C}(\omega, R)\\ \iff& |z - \omega|^2 = R^2\\ \iff& (z - \omega)\overline{(z - \omega)} = R^2\\ \iff& z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \omega\overline{\omega} = R^2\\ \iff& |z|^2 - (\omega\overline{z} + \overline{\omega}z) + |\omega|^2 = R^2\end{aligned}$$

Le cercle $\mathcal{C}(\omega, R)$ est inlcus dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(\omega) > R$.

16.b Remarquons que pour tout $z \in \mathcal{H}$, $s(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\overline{z}}{|z|^2}$. De plus, s est une involution. Ainsi

$$\begin{aligned}
&z \in s(\mathcal{C}(\omega, \mathrm{R})) \\
\iff &s(z) \in \mathcal{C}(\omega, \mathrm{R}) \\
\iff &\frac{1}{|z|^2} + (\omega\frac{z}{|z|^2} + \overline{\omega}\frac{\overline{z}}{|z|^2}) + |\omega|^2 = \mathrm{R}^2 \\
\iff &1 + (\omega z + \overline{\omega z}) + |\omega|^2|z|^2 = \mathrm{R}^2|z|^2 \\
\iff &(|\omega|^2 - \mathrm{R}^2)|z|^2 + (\omega z + \overline{\omega z}) + 1 = 0 \\
\iff &(|\omega|^2 - \mathrm{R}^2)|z|^2 + (\omega z + \overline{\omega z}) + 1 = 0 \\
\iff &|z|^2 - (\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z) + \frac{1}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2} = 0 \qquad \text{en posant } \alpha = -\frac{\overline{\omega}}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2} \\
\iff &|z|^2 - (\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z) + |\alpha|^2 = |\alpha|^2 - \frac{1}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2} \\
\iff &|z|^2 - (\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z) + |\alpha|^2 = \mathrm{M}^2 \qquad \text{en posant } \mathrm{M} = \frac{\mathrm{R}}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2}
\end{aligned}$$

Ainsi $s(\mathcal{C}(\omega, \mathrm{R})) = \mathcal{C}(\alpha, \mathrm{M}) = \mathcal{C}\left(-\frac{\overline{\omega}}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2}, \frac{\mathrm{R}}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2}\right)$.

Remarque. On a bien $|\omega|^2 - \mathrm{R}^2 > 0$ puisque $|\omega| \geq \mathrm{Im}(\omega) > \mathrm{R}$.

$\boxed{17}$ **17.a** A nouveau, on utilise le fait que s est une involution et que $s(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ pour tout $z \in \mathcal{H}$. Soit $z \in \mathcal{H}$. Alors

$$\begin{aligned}
&z \in s(\mathcal{D}) \\
\iff &s(z) \in \mathcal{D} \\
\iff &\mathrm{Im}(s(z)) = \beta \\
\iff &-\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \beta \\
\iff &\mathrm{Im}(z) = \beta|z|^2 \\
\iff &\frac{z - \overline{z}}{2i} = \beta|z|^2 \\
\iff &|z|^2 - (\omega\overline{z} + \overline{\omega}z) = 0 \qquad \text{en posant } \omega = \frac{i}{2\beta} \\
\iff &|z|^2 - (\omega\overline{z} + \overline{\omega}z) + |\omega|^2 = \frac{1}{4\beta^2}
\end{aligned}$$

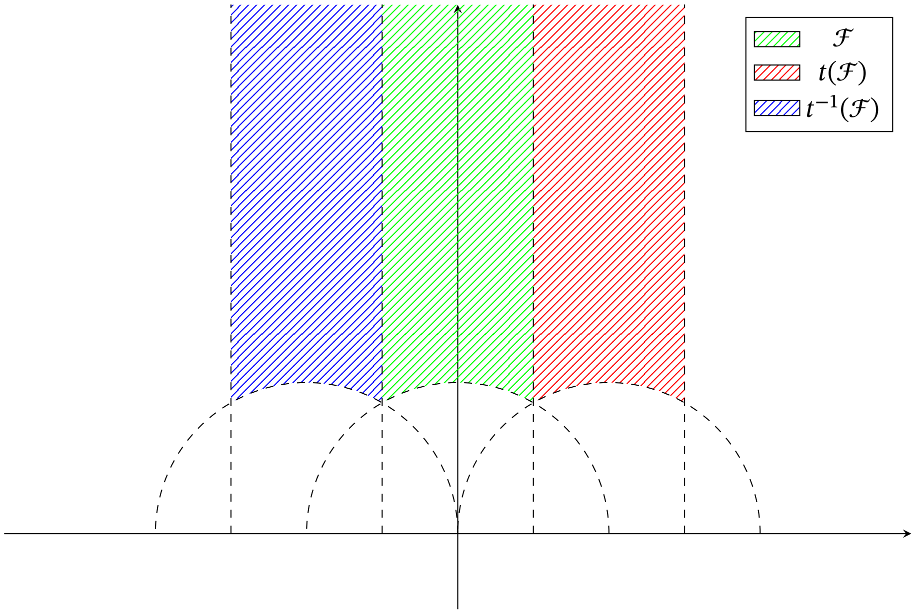
Ainsi $s(\mathcal{D}) = \mathcal{C}\left(\frac{i}{2\beta}, \frac{1}{2\beta}\right) \setminus \{0\}$.

17.b

$$\begin{aligned}
&z \in s(\mathcal{D}_+) \\
\iff &s(z) \in \mathcal{D}_+ \\
\iff &\mathrm{Re}(s(z)) = \alpha \\
\iff &-\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \alpha \\
\iff &-\mathrm{Re}(z) = \alpha|z|^2 \\
\iff &-\frac{z + \overline{z}}{2} = \alpha|z|^2 \\
\iff &|z|^2 - (\omega\overline{z} + \overline{\omega}z) = 0 \qquad \text{en posant } \omega = \frac{1}{2\alpha} \\
\iff &|z|^2 - (\omega\overline{z} + \overline{\omega}z) + |\omega|^2 = \frac{1}{4\alpha^2}
\end{aligned}$$

Ainsi $s(\mathcal{D})$ est le demi-cercle $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha}\right) \cap \mathcal{H}$.

18 Clairement, $\mathcal{F}$ est une demi-bande verticale privée d'un disque ouvert. On remarque que $t(z) = z+1$ pour tout $z \in \mathcal{H}$ donc $t(\mathcal{F})$ et $t^{-1}(\mathcal{F})$ sont respectivement les images de $\mathcal{F}$ par les translations de vecteurs d'affixes 1 et -1.



19 **19.a** Montrons que l'ensemble

$$K = \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2,\ |c\tau + d| \leq 1\}$$

est fini. Posons $\tau = \alpha + i\beta$ avec $\beta > 0$. Soit $(c,d) \in K$. Alors

$$|c\tau + d|^2 = (c\alpha + d)^2 + c^2\beta^2 \leq 1$$

Notamment, $|c| \leq \dfrac{1}{\beta}$ puis $|d| \leq |c\alpha + d| + |c\alpha| \leq 1 + \dfrac{|\alpha|}{\beta}$. L'ensemble K est donc bien fini. Considérons maintenant l'ensemble

$$L = \left\{(c,d) \in \mathbb{Z}^2,\ \exists(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \in G\right\}$$

L'ensemble $K \cap L$ est encore fini. De plus, $K \cap L$ n'est pas vide puisqu'il contient $(0,1)$. En effet, on a clairement $(0,1) \in K$ et $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} = \Phi(I_2) \in G$ de sorte que $(0,1) \in L$. On condidère alors $(c_0, d_0) \in K \cap L$ tel que

$$|c_0\tau + d_0| = \min_{(c,d)\in K\cap L} |c\tau + d|$$

Il existe donc $(a_0, b_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $A_0 \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $g_0 = \phi(A_0) \in G$. Soit alors $g \in G$. Comme $G \subset \Gamma$, il existe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $g = \Phi(A)$. Ainsi $(c,d) \in L$. Si $|c\tau + d| \leq 1$ alors $(c,d) \in K \cap L$ donc $|c\tau + d| \geq |c_0\tau + d_0|$. Si $|c\tau + d| > 1$, alors $|c\tau + d| > 1 \geq |c_0\tau + d_0|$ à nouveau. Ainsi, d'après la question **8.c**,

$$\mathrm{Im}(g(\tau)) = \frac{1}{|c\tau + d|^2} |\,\mathrm{Im}(z) \leq \frac{1}{|c_0\tau + d_0|^2} |\,\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(g_0(\tau))$$

19.b Puisque $t(z) = z + 1$ pour tout $z \in \mathcal{H}$, $t^m(\tau') = \tau' + m$ puis $\mathrm{Re}(t^m(\tau')) = \mathrm{Re}(\tau') + m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Il suffit alors de choisir $m = \lfloor 1/2 - \mathrm{Re}(\tau') \rfloor$ pour avoir $|\mathrm{Re}(t^m(\tau'))| \leq \dfrac{1}{2}$.

19.c Posons $\tau'' = t^m(\tau')$. Comme $g = s \circ \tau^m \in G$,

$$\mathrm{Im}(s(\tau'')) \leq \mathrm{Im}(g_0(\tau)) = \mathrm{Im}(\tau') = \mathrm{Im}(\tau' + m) = \mathrm{Im}(\tau'')$$

Or $s(\tau'') = -\dfrac{\overline{\tau''}}{|\tau''|^2}$ donc $\mathrm{Im}(s(\tau'')) = \dfrac{\mathrm{Im}(\tau'')}{|\tau''|^2}$. Finalement,

$$\frac{\mathrm{Im}(\tau'')}{|\tau''|^2} \leq \mathrm{Im}(\tau'')$$

puis $|\tau''| \geq 1$ puisque $\mathrm{Im}(\tau'') > 0$. Ainsi $\tau'' \in \mathcal{F}$.

$\boxed{\textbf{20}}$ Soit $g \in \Gamma$. On considère $\rho \in \mathring{\mathcal{F}}$. Posons $\tau = g(\rho)$ et adoptons les notations des questions précédentes. On a donc $\tau'' = t^m \circ g_0 \circ g(\rho) \in \mathcal{F}$. En contraposant le résultat admis, on a alors $t^m \circ g_0 \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. Ainsi $g = g_0^{-1} \circ t^{-m} \in \mathrm{G}$. Ainsi $\Gamma \subset \mathrm{G}$. L'inclusion réciproque étant évidente, $\Gamma = \mathrm{G}$.