Devoir à la maison n°07

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Etude dans un cas particulier

I.1 **I.1.a** On calcule le polynôme caractéristique de A : $\chi_A = (X+2)(X-1)^2$. Par conséquent le spectre de A est $\{-2;1\}$.

I.1.b On vérifie aisément que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en calculant son déterminant dans la base canonique. De plus, $Au_1 = u_1$, $Au_2 = u_2$ et $Au_3 = -2u_3$ donc u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de A.

I.1.c On vient de trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A donc A est diagonalisable.

I.1.d $Bu_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à u_1 et de même pour u_2 et u_3 donc aucun élément de $\mathcal{F}$ n'est vecteur propre de B donc a fortiori commun à A et B.

I.2 **I.2.a** $\chi_B = (X-2)^3$ (on développe par rapport à la deuxième ligne) donc le spectre de B est $\{2\}$.

I.2.b $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Les trois colonnes de cette matrice sont colinéaires à u_4 donc $\mathrm{I}m_2(B) \subset \mathrm{vect}(u_4)$ et u_4 est la première colonne donc $\mathrm{vect}(u_4) \subset \mathrm{I}m_2(B)$. Par conséquent $\mathrm{I}m_2(B) = \mathrm{vect}(u_4)$.
Le théorème du rang nous dit alors que $\dim E_2(B) = 2$.

I.2.c La somme des dimensions des sous espaces propres de B est égale à $2 < 3$ donc B n'est pas diagonalisable.

I.3 **I.3.a** $Bu_5 = 2u_5$ et $Au_5 = u_5$ donc $\mathrm{vect}(u_5) \subset E_1(A) \cap E_2(B)$.
$E_1(A)$ et $E_2(B)$ sont de dimension 2 donc cette intersection est de dimension 1 ou 2 (on a déjà un vecteur non nul dans l'intersection). Si elle est de dimension 2, alors $E_1(A) = E_2(B)$ ce qui est absurde car u_1 est dans $E_1(A)$ mais pas dans $E_2(B)$. Par conséquent l'intersection est de dimension 1 et $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{vect}(u_5)$.

I.3.b Comme u_3 n'est pas vecteur propre de B et qu'il engendre $E_{-2}(A)$, il n'y a pas de vecteur propre commun à A et B dans $E_{-2}(A)$. De plus, 2 est la seule valeur propre de B donc les vecteurs propres communs à A et B sont dans $E_1(A) \cap E_2(B)$.
D'après la question précédente, les vecteurs propres communs à A et B sont les vecteurs de la forme λu_5, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

I.4 **I.4.a** $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ donc $[A, B] = C$.

I.4.b On calcule le polynôme caractéristique de C. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+5 & -3 & 1 \\ 2 & \lambda-6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$. On remplace L_1 par $L_1 - L3$:

$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 2 & \lambda-6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$. On utilise la linéarité par rapport à la première ligne puis on remplace C_1 par $C_1 + C_3$:

$\chi_C(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & -2 \\ \lambda+6 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$. Enfin, on développe par rapport à la première ligne : $\chi_C(\lambda) = \lambda(\lambda-6)(6+\lambda)$.

χ_C est scindé à racines simples donc C est diagonalisable. De plus les valeurs propres de C sont -6, 0 et 6 donc C est semblable à D.
Le rangs de C et de D sont alors égaux et $\mathrm{rg}(C) = 2$.

Partie II – Condition nécessaire et conditions suffisantes

II.1 **II.1.a** Soient λ et μ tels que $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$. Alors $ABe = \mu Ae = \lambda\mu e$ et de même pour BAe donc $e \in \mathrm{Ker}([A,B])$.

II.1.b Le vecteur e n'est pas nul (car vecteur propre) donc $\dim \mathrm{Ker}[A,B] > 0$ d'après la question précédente. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}([A,B]) < n$.

II.2 On suppose $[A,B] = 0$. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A a au moins une valeur propre : soit $\lambda \in \mathrm{S}p(A)$. $[A,B] = 0$ donc $\mathrm{Ker}([A,B]) = \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A,B])$: A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3 **II.3.a** Soit $X \in E_\lambda(A)$. Par hypothèse $(AB - BA)X = 0$ soit $ABX = BAX$. Or $AX = \lambda X$ donc $A(BX) = \lambda BX$ ce qui signifie que $BX \in E_\lambda(A)$: $\psi : X \mapsto BX$ est une application de $E_\lambda(A)$ dans lui même. De plus, par propriété du produit matriciel, ψ est linéaire donc ψ est un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

II.3.b λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ est de dimension non nulle et comme $K = \mathbb{C}$, ψ a au moins une valeur propre : il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $X \in E_\lambda(A)$ non nul tels que $\psi(X) = \mu X$. On a donc $BX = \mu X$, $AX = \lambda X$ et X non nul : X est un vecteur propre commun à A et B.

II.4 En dimension 1, tous les vecteurs non nuls sont des vecteurs propres donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

II.5 **II.5.a** A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$ donc $E_\lambda(A)$ n'est pas inclus dans Ker(C) : il existe $u \in E_\lambda(A)$ tel que $u \notin \mathrm{Ker}(C)$: u est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifie $Au = \lambda u$ et $Cu \neq 0$.

II.5.b Par hypothèse Im C est de dimension 1 et $v = Cu$ est un vecteur non nul de cette image donc $\mathrm{Im}\, C = \mathrm{vect}(v)$.

II.5.c $v = Cu$ donc $v = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu$ soit $v = (A - \lambda I)(Bu)$: $v \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. La question précédente permet alors de dire que $\mathrm{Im}\, C \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$.

II.5.d Im C est de dimension 1 donc $1 \leq \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A))$.
λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ a une dimension non nulle et, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$.
Finalement

$$1 \leq \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$$

.

II.5.e A et $A - \lambda I_n$ commutent donc $[A, A - \lambda I_n] = 0$.
Par définition $[B, A - \lambda I_n] = B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B = BA - AB = -[A,B]$ d'où $[B, A - \lambda I_n] = -C$.
φ et ψ sont des applications linéaires par propriétés du produit matriciel.
Soit $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$: $X = (A - \lambda I_n)Y$ où $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Comme $[A, A - \lambda I_n] = 0$, $AX = (A - \lambda I_n)(AY)$ donc $AX \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. Par conséquent φ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.
De même $BX = (A - \lambda I_n)(BY) - CY$. $CY \in \mathrm{Im}\, C$ et $\mathrm{Im}\, C \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$ donc $CY \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$; on a aussi $(A - \lambda I_n)(BY) \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$ donc $BX \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. On en conclut que ψ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

II.5.f $\mathrm{Im}([\varphi,\psi]) \subset \mathrm{Im}(C)$ donc $\mathrm{rg}([\varphi,\psi]) \leq 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à φ et ψ, endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$ qui est de dimension non nulle et strictement inférieure à n : φ et ψ ont un vecteur propre commun. A fortiori A et B ont un vecteur propre commun.

II.6 $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vérifiée pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Soit E de dimension n.
Soit φ et ψ deux d'endomorphismes de E tels que $\mathrm{rg}([\varphi,\psi]) \leq 1$.
On considère A et B les matrices associées respectivement à φ et ψ dans une base de E, $C = AB - BA$.
Si $\mathrm{rg}(C) = 1$ et si A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$, alors, d'après la question **II.5**, A et B ont un vecteur propre commun : φ et ψ ont un vecteur propre commun ($K = \mathbb{C}$) donc A a au moins une valeur propre.
Si $\mathrm{rg}(C) = 1$ et A, B vérifient $\mathcal{H}$, alors d'après **II.3**, φ et ψ ont un vecteur propre commun.
Si $\mathrm{rg}(C) = 0$, alors $[A,B] = 0$ et, d'après les questions **II.2** et **II.3**, φ et ψ ont un vecteur propre commun.
On en déduit que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée.
Par récurrence, on peut conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Partie III – Etude d'un autre cas particulier

III.1 $g(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{2n} a_k \mathrm{X}^{2n-k}$. On pose $l = 2n - k$ pour obtenir $g(\mathrm{P}) = \sum_{l=0}^{2n} a_{2n-l}\mathrm{X}^l$.

III.2 Pour tout polynôme P, $\deg \mathrm{P}' \leq \deg \mathrm{P}$ et la dérivation des polynômes est linéaire donc f est un endomorphisme de E.
La question précédente prouve que g est une application de E dans E.
Si $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} g(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q}) &= \mathrm{X}^{2n}(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) \\ &= \mathrm{X}^{2n}\mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) + \mathrm{X}^{2n}\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) \\ &= g(\mathrm{P}) + \lambda g(\mathrm{Q}) \end{aligned}$$

donc g est linéaire. g est donc un endomorphisme de E.

III.3 **III.3.a** Soit P un vecteur propre de g et λ la valeur propre associée. $g(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P}$.
La question **III.1** prouve que g est injective donc λ ne peut pas être nul. Par conséquent P et $g(\mathrm{P})$ ont le même degré que l'on appelle d. (P n'est pas nul car vecteur propre).
On reprend les notations de la question **III.1**. $a_d \neq 0$ donc si $k = 2n - d$, $a_{2n-k} \neq 0$ et donc $\deg(g(\mathrm{P})) \geq 2n - d$.
Par conséquent $d \geq 2n - d$ et donc $\deg(\mathrm{P}) \geq n$.

III.3.b $g(\mathrm{X}^n) = \mathrm{X}^n$ et X^n n'est pas le polynôme nul donc X^n est un vecteur propre de g.

III.4 **III.4.a** $f^i(\mathrm{P}) = \mathrm{P}^{(i)}$. P′ est nul si et seulement P est un polynôme constant c'est-à-dire un polynôme de degré ≤ 0.
On suppose que $\ker f^i = \mathbb{C}_{i-1}[\mathrm{X}]$ pour un entier i entre 1 et $2n-1$.
$\mathrm{P} \in \ker f^{i+1}$ si seulement si $\mathrm{P}' \in \ker f^i$ donc si et seulement si $\mathrm{P}' \in \mathbb{C}_{i-1}[\mathrm{X}]$ donc $\ker f^{i+1} = \mathbb{C}_i[\mathrm{X}]$.
Par récurrence, pour tout i entre 1 et $2n$, $\ker f^i = \mathbb{C}_{i-1}[\mathrm{X}]$.

III.4.b Si P est non nul de degré $i-1$, alors $f^i(\mathrm{P}) = 0\mathrm{P}$ donc $0 \in \mathrm{S}p(f^i)$.
$(f^i)^{2n+1} = (f^{2n^1})^i$ et si $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, sa dérivée d'ordre $2n+1$ est nul donc X^{2n+1} est un polynôme annulateur de f^i. 0 est sa seule racine donc 0 est la seule valeur propre possible de f^i.
Finalement $\mathrm{S}p(f^i) = \{0\}$.

III.5 Si $i \geq n+1$, $f^i(\mathrm{X}^n) = 0\mathrm{X}^n$ donc X^n est vecteur propre de f^i. Avec la question **III.3.b**, on peut en déduire que X^n est un vecteur propre commun à f et g.
On suppose réciproquement que i est tel que f et g ont un vecteur propre commun.
Soit P un vecteur propre commun. D'après la question **III.3.a**, $\deg(\mathrm{P}) \geq n$ et d'après la question**III.4.b**, $\mathrm{P} \in \ker f^i$ donc d'après la question **III.4.a**, $\deg(\mathrm{P}) \leq i-1$. Ainsi, $n \leq i-1$ soit $i \geq n+1$.
Finalement f et g ont un vecteur propre commun si et seulement si $i \geq n+1$.

III.6 $\mathrm{A}_n = (\mathrm{A}_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2n+1}$ où pour i entre 2 et $2n$, $a_{i,i-1} = i-1$ et tous les autres coefficients nuls :

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour k entre 0 et $2n$, $g(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X}^{2n-k}$ donc $\mathrm{B}_n = (\mathrm{B}_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2n+1}$ où pour tout i entre 1 et $2n+1$, $b_{i,2n+2-i} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls.

III.7 **III.7.a** En prenant $n = 1$ dans la question précédente, on obtient bien $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par produit matriciel, $(\mathrm{A}_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(\mathrm{A}_1)^3$ est la matrice nulle.

III.7.b On trouve $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2.

$[(A_1)^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est aussi de rang 2.

III.7.c Quand $i = 2$, $i \geq 1+1$ donc $(A_1)^2$ et B_1 ont un vecteur propre commun alors que la condition de la question **II.6** n'est pas vérifiée ; celle-ci n'est donc pas nécessaire.
Quand $i = 1$, $\text{rg}([A_1, B_1]) < 3$ mais A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun donc la condition de la question **II.1.b** n'est pas suffisante.

Partie IV – Forme normale pour un vecteur propre

IV.1 $\dim E_\lambda(A) \geq 2$ donc on peut considérer deux vecteurs propres X et X′ formant une famille libre associés à la valeur propre λ : $X = (x_1, \cdots, x_n)$ et $X' = (x'_1, \cdots, x'_n)$.
Si $x_1 = 0$ alors $X \in \mathcal{N}$.
SI $x_1 \neq 0$, on pose $X'' = x'_1 X - x_1 X'$. Alors $X'' \in \mathcal{N}$ (la première composante de X'' est nulle), X'' n'est pas nul (car (X, X') est libre) et est dans $E_\lambda(A)$ donc X'' est un vecteur propre de A.
Dans tous les cas, A admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre λ.

IV.2 **IV.2.a** Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tel que $A_{1,2} = 1$, $A_{2,1} = -1$, tous les autres coefficients nuls (ceci est possible car $n \geq 2$). A n'est pas la matrice nulle et est antisymétrique donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0\}$.

IV.2.b Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour tous i et j, $M_{i,j} = -M_{j,i}$ donc en particulier les coefficients diagonaux $M_{i,i}$ sont nuls ; comme il y en a un par colonne, on en déduit que les colonnes de M sont des éléments de $\mathcal{N}$.

IV.2.c Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. La transposition est linéaire et $(AB)^\top = B^\top A^\top$ donc

$$\varphi(M)^\top = (AM)^\top + (MA^\top)^\top = M^\top A^\top + (A^\top)^\top M^\top = -MA^\top + AM^\top = -\varphi(M)$$

donc $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
De même

$$\psi(M)^\top = (AMA^\top)^\top = AM^\top A^\top - \psi(M)$$

φ et ψ sont donc des applications de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même. De plus, elles sont linéaires par propriétés du produit matriciel donc φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

IV.2.d Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

$$\varphi \circ \psi(M) = \varphi(AMA^\top) = A(AMA^\top) + (AMA^\top)A^\top = A^2MA^\top + AM(A^\top)^2$$

et par ailleurs

$$\psi \circ \varphi(M) = \psi(AM + MA^\top) = A(AM + MA^\top)A^\top = A^2MA^\top + AM(A^\top)^2$$

Par conséquent, pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $\varphi \circ \psi(M) = \psi \circ \varphi(M)$ donc $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

IV.3 **IV.3.a**

- $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $X_2^\top \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ donc $X_1X_2^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De même $X_2X_1^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus

$$\begin{aligned} B^\top &= (X_1X_2^\top)^\top - (X_2X_1^\top)^\top \\ &= X_2X_1^\top - X_1X_2^\top \end{aligned}$$

donc $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

- On suppose $B = 0$. Alors $X_1X_2^\top = X_2X_1^\top$. On multiplie à droite par $\overline{X_2}$ pour obtenir $X_1(X_2^\top\overline{X_2}) = X_2(X_1^\top\overline{X_2})$. Or $X_2^\top\overline{X_2}$ et $X_1^\top\overline{X_2}$ sont des scalaires et (X_1, X_2) est libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes) donc $X_2^\top\overline{X_2} = X_1^\top\overline{X_2} = 0$. En posant $X_2 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, cela nous donne $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 0$ et donc $X_2 = 0$ ce qui contredit le fait que X_2 soit un vecteur propre de A.
Par conséquent $B \neq 0$.

- Pour $i = 1$ ou $i = 2$, $\mathrm{AX}_i = \lambda_i \mathrm{X}_i$ donc $\mathrm{X}_i^\top \mathrm{A}^\top = \lambda_i \mathrm{X}_i^\top$.

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} + \mathrm{BA}^\top &= \mathrm{AX}_1\mathrm{X}_2^\top - \mathrm{AX}_2\mathrm{X}_1^\top + \mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top\mathrm{A}^\top - \mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top\mathrm{A}^\top \\ &= \lambda_1\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top - \lambda_2\mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top + \lambda_2\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top - \lambda_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top \\ &= \lambda_1\mathrm{B} + \lambda_2\mathrm{B}\end{aligned}$$

  d'où $\mathrm{AB} + \mathrm{BA}^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{B}$.
- De même

$$\begin{aligned}\mathrm{ABA}^\top &= (\mathrm{AX}_1)(\mathrm{X}_2^\top\mathrm{A}^\top) - (\mathrm{AX}_2)(\mathrm{X}_1^\top\mathrm{A}^\top) \\ &= \lambda_1\lambda_2\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2^\top - \lambda_2\lambda_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_1^\top\end{aligned}$$

  d'où $\mathrm{ABA}^\top = (\lambda_1\lambda_2)\mathrm{B}$.

IV.3.b A et I_n commutent donc $(\mathrm{A} - \lambda_1\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - \lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = \mathrm{A}^2\mathrm{B} - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{AB} + \lambda_1\lambda_2\mathrm{B}$. On multiplie la relation $\mathrm{AB}+\mathrm{BA}^\top = (\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{B}$ par A à gauche : $\mathrm{A}^2\mathrm{B}+\mathrm{ABA}^\top = (\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{AB}$ donc $(\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{I}_n)(\mathrm{A}-\lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = -\mathrm{ABA}^\top+\lambda_1\lambda_2\mathrm{B}$. Comme $\mathrm{ABA}^\top = (\lambda_1\lambda_2)\mathrm{B}$, on conclut $(\mathrm{A} - \lambda_1\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - \lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = 0$.

IV.3.c $\mathrm{B} \neq 0$ donc l'une au moins des colonnes de B est non nulle ; soit C une colonne de B non nulle. $(\mathrm{A}-\lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = 0$ donc $(\mathrm{A} - \lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{C} = 0_{n,1}$ soit $\mathrm{AC} = \lambda_2\mathrm{C}$. C n'est pas nulle donc C est un vecteur propre de A.
De plus $\mathrm{B} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ donc $\mathrm{C} \in \mathcal{N}$. C, une des colonnes de B, est donc un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.3.d $(\mathrm{A} - \lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{B} \neq 0$ donc il existe X une colonne de $(\mathrm{A} - \lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{B}$ non nulle. Il existe alors U une des colonnes de B telle que $\mathrm{X} = (\mathrm{A} - \lambda_2\mathrm{I}_n)\mathrm{U}$. D'après la question b., X est un vecteur propre de A (associé à la valeur propre λ_1 et λ_2 est une valeur propre de A, $\mathrm{U} \in \mathcal{N}$. Finalement X est donc un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.4 **IV.4.a** φ et ψ sont deux endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) = 0 \leq 1$ donc, d'après la partie II, φ et ψ ont un vecteur propre commun : il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ non nulle vecteur propre de φ et de ψ ; il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi(\mathrm{B}) = \alpha\mathrm{B}$ soit $\mathrm{AB} + \mathrm{BA}^\top = \alpha\mathrm{B}$ et il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{ABA}^\top = \beta\mathrm{B}$.

IV.4.b On multipliela relation $\mathrm{AB} + \mathrm{BA}^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{B}$ par A à gauche : $\mathrm{A}^2\mathrm{B} + \mathrm{ABA}^\top = \alpha\mathrm{AB}$ mais $\mathrm{ABA}^\top = \beta\mathrm{B}$ donc $\mathrm{A}^2\mathrm{B} + \beta\mathrm{B} = \alpha\mathrm{AB}$. En factorisant par B, on obtient $(\mathrm{A}^2 - \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = 0$.

IV.4.c Le polynôme $\mathrm{X}^2 - \alpha\mathrm{X} + \beta$ à coefficients complexes a deux racines (éventuellement confondues) donc il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{X}^2 - \alpha\mathrm{X} + \beta = (\mathrm{X} - \gamma)(\mathrm{X} - \delta)$. Alors $\mathrm{A}^2 - \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{I}_n = (\mathrm{A} - \alpha\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - \beta\mathrm{I}_n)$ et, la relation de la question précédente devient : $(\mathrm{A} - \gamma\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - \delta\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = 0$.

IV.4.d On suppose $(\mathrm{A} - \delta\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = 0$ donc, si $\mathrm{A} - \delta\mathrm{I}_n$ est inversible, alors $\mathrm{B} = 0$ ce qui est exclu donc $\mathrm{A} - \delta\mathrm{I}_n$ n'est pas inversible et $\delta \in \mathrm{S}p(\mathrm{A})$. Une colonne non nulle de B est alors un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.4.e Si $\delta = \lambda$ et $(\mathrm{A} - \delta\mathrm{I}_n)\mathrm{B} \neq 0$.
Soit X une colonne non nulle de $(\mathrm{A} - \delta\mathrm{I}_n)\mathrm{B}$ et U la colonne de B telle que $\mathrm{X} = (\mathrm{A} - \delta\mathrm{I}_n)\mathrm{U}$. $\mathrm{U} \in \mathcal{N}$, $\delta \in \mathrm{S}p(\mathrm{A})$ et $(\mathrm{A} - \gamma\mathrm{I}_n)\mathrm{X} = 0_{n,1}$ (d'après la question **IV.4.c**) donc X est un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.4.f A n'a qu'une valeur propre λ et $\delta \neq \lambda$ donc δ n'est pas valeur propre de A et $(\mathrm{A} - \delta\mathrm{I}_n)$ est inversible.
$\mathrm{A} - \gamma\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A} - \delta\mathrm{I}_n$ commutent donc si on multiplie à gauche la relation de la question **IV.4.c** par $(\mathrm{A} - \delta\mathrm{I}_n)^{-1}$, on obtient $(\mathrm{A} - \gamma\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = 0$.

IV.4.g On est alors revenu à la situation de la question **IV.4.d** et donc A possède un vecteur propre sous forme normale.
On considère une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque.
A a au moins une valeur propre.
Si A a une seule valeur propre, d'après les questions précédentes, A possède un vecteur propre sous forme normale.
Si A a au moins deux valeurs propres distinctes, alors d'après **IV.3**, A possède un vecteur propre sous forme normale.
On en conclut que, dans tous les cas, une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède un vecteur propre sous forme normale.