

# DEVOIR SURVEILLÉ N°11

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

1 Y suit une loi géométrique de paramètre  $q$ . Ainsi  $\mathbb{P}(Y = n) = p^{n-1}q$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2 C'est du cours :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{q} \qquad \mathbb{V}(Y) = \frac{p}{q^2}$$

3 Pour tout réel  $t$  tel que  $|t| < |a|$ ,

$$\frac{1}{t-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{t^n}{a^{n+1}}$$

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} -\frac{t^n}{a^{n+1}}$  vaut  $|a|$  (série géométrique).

4 D'après la question précédente, les applications  $t \mapsto \frac{1}{t-a}$  et  $t \mapsto \frac{1}{t-b}$  sont développables en séries entières de rayons de convergence respectifs  $|a|$  et  $|b|$ . Par produit de Cauchy,  $t \mapsto \frac{1}{(t-a)(t-b)}$  est développable en série entière de rayon de convergence  $R \geq \min(|a|, |b|) = |a|$ . Supposons que  $R > |a|$ . Alors cette série entière convergerait uniformément sur le disque centré en l'origine et de rayon  $|a|$ . D'après le théorème d'interversion série/limite,  $t \mapsto \frac{1}{(t-a)(t-b)}$  admettrait une limite finie en  $a$ , ce qui n'est pas le cas.

5 On procède comme à la question précédente. Par produit de Cauchy,  $t \mapsto \frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)}$  est développable en série entière de rayon de convergence  $R \geq \min(|a|, |b|, |c|) = |a|$ . Mais on a forcément  $R = |a|$  sinon  $t \mapsto \frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)}$  admettrait une limite finie en  $a$ .

6 Par indépendance,

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_2 &= \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2) = q^2 \\ p_3 &= \mathbb{P}(P_1 \cap C_2 \cap C_3) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}(C_3) = pq^2 \end{aligned}$$

7 On note  $\sqcup$  l'union *disjointe* d'événements.

$$\Omega = P_1 \sqcup C_1 = P_2 \sqcup C_2$$

donc

$$\Omega = P_1 \sqcup (C_1 \cap (P_2 \sqcup C_2)) = P_1 \sqcup (C_1 \cap P_2) \sqcup (C_1 \cap C_2)$$

Ainsi  $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$  est un système complet d'événements.

8 Soit un entier  $n \geq 3$ . On utilise la formule des probabilités totales :

$$p_n = \mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z = n \mid P_1)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(Z = n \mid C_1 \cap P_2)\mathbb{P}(C_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(Z = n \mid C_1 \cap C_2)\mathbb{P}(C_1 \cap C_2)$$

- Si l'événement  $P_1$  est réalisé, l'automate se retrouve au niveau 0 à l'issue de cette première étape. On en déduit que  $\mathbb{P}(Z = n \mid P_1) = p_{n-1}$ .
- Si l'événement  $C_1 \cap P_2$  est réalisé, l'automate se retrouve au niveau 0 à l'issue de ces deux premières étapes. On en déduit que  $\mathbb{P}(Z = n \mid C_1 \cap P_2) = p_{n-2}$ .
- On a clairement  $C_1 \cap C_2 = \{Z = 2\}$  donc  $\mathbb{P}(Z = n \mid C_1 \cap C_2) = 0$  car  $n \geq 3$ .

D'autre part, par indépendance,  $\mathbb{P}(C_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(P_2) = qp$  donc

$$p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}$$

**9** Soit  $t \in ]-1, 1[$ .

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n \\ &= p_1 t + p_2 t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (pp_{n-1} + pqp_{n-2}) t^n \\ &= q^2 t^2 + pt \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1} t^{n-1} + pqt^2 \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-2} t^{n-2} \\ &= q^2 t^2 + pt \sum_{n=2}^{+\infty} p_n t^n + pqt^2 \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n \\ &= q^2 t^2 + pt(G_Z(t) - p_1 t) + pqt^2 G_Z(t) \\ &= q^2 t^2 + ptG_Z(t) + pqt^2 G_Z(t) \end{aligned}$$

On en déduit bien que

$$(1 - pt - pqt^2)G_Z(t) = q^2 t^2$$

**10** Comme  $q = 1 - p$ ,  $Q(-1) = 1 + p - pq = 1 + p^2 > 0$  et  $Q(1) = 1 - p - pq = q^2 > 0$ . De plus,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} Q(t) = -\infty$  et  $t \mapsto Q(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $Q$  admet une racine  $a \in ]1, +\infty$  et une racine  $b \in ]-\infty, -1[$ . Comme  $\deg Q = 2$ ,  $a$  et  $b$  sont les deux racines de  $Q$ . Comme  $a > 1$ ,  $|a| > 1$ . De plus, vu les signes de  $a$  et  $b$  et d'après les liens coefficients racines,

$$|b| - |a| = -b - a = \frac{p}{pq} = \frac{1}{q} \geq 0$$

Finalement,  $|b| \geq |a| > 1$ .

**11** Le polynôme  $Q$  ne s'annule pas sur  $]b, a[$  donc il ne s'annule pas sur  $] -|a|, |a|[$  puisque  $] -|a|, |a|[ = ] -a, a[ \subset ]b, a[$ . Ainsi

$$\forall t \in ] -|a|, |a|[, G_Z(t) = \frac{q^2 t^2}{1 - pt - pqt^2} = \frac{q^2 t^2}{-pq(t-a)(t-b)} = -\frac{qt^2}{p(t-a)(t-b)}$$

D'après la question 4,  $t \mapsto -\frac{qt^2}{p(t-a)(t-b)}$  est développable en série entière sur  $] -|a|, |a|[$  : il existe donc une suite  $(a_n)$  telle que

$$\forall t \in ] -|a|, |a|[, -\frac{qt^2}{p(t-a)(t-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Par conséquent,

$$\forall t \in ] -1, 1[, G_Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Par unicité du développement en série entière,  $p_n = a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi

$$\forall t \in ] -|a|, |a|[, \frac{q^2 t^2}{1 - pt - pqt^2} = -\frac{qt^2}{p(t-a)(t-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = G_Z(t)$$

**12** La question précédente montre que  $G_Z$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -|a|, |a|[$ . Notamment elle est deux fois dérivable en  $1 \in ] -|a|, |a|[$ . Ainsi  $Z$  admet une espérance et une variance. De plus,

$$\forall t \in ] -|a|, |a|[, G'_Z(t) = \frac{2q^2 t(1 - pt - pqt^2) + q^2 t^2(p - 2pqt)}{(1 - pt - pqt^2)^2}$$

et

$$dE(Z) = G'_Z(1) = \frac{2q^2(1-p-pq) + q^2(p-2pq)}{(1-p-pq)^2}$$

Sachant que  $p = 1 - q$ , on obtient bien après simplification,  $E(Z) = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}$ .

**13** Remarquons que

$$E(Z) - E(Y) - 1 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q} - 1 = \frac{1-q^2}{q^2} \geq 0$$

car  $q < 1$ . Ainsi  $E(Z) \geq E(Y) + 1$ .

Ceci était prévisible : en effet, la première fois qu'on obtient la séquence CC, on a obtenu pour la première fois C au moins à l'instant précédent i.e.  $Z \geq Y + 1$ . Par croissance et linéarité de l'espérance,  $E(Z) \geq E(Y) + 1$ .

**14** La dernière colonne de A est nulle : ainsi 0 est valeur propre de A est un vecteur propre associé est  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**15** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . En développant par rapport à la dernière colonne puis en appliquant la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-p & 0 & -p & 0 \\ -q & t-q & 0 & 0 \\ 0 & -p & t & 0 \\ 0 & 0 & -q & t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t-p & 0 & -p \\ -q & t-q & 0 \\ 0 & -p & t \end{vmatrix} \\ &= t[t(t-p)(t-q) - p^2q] = t^4 - (p+q)t^3 + pqt^2 - p^2qt = t^4 - t^3 + pqt^2 - p^2qt \end{aligned}$$

**16** Pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$

$$\psi_A(t) = \det(I_4 - tA) = \det\left(t\left(\frac{1}{t}I_4 - A\right)\right) = t^4\chi_A(1/t) = 1 - t + pqt^2 - p^2qt^3$$

Ceci est encore valide pour  $t = 0$  puisque  $\psi_A(0) = \det(I_4) = 1$ .

**17** L'équation  $(E_t)$  équivaut à  $(I_4 - tA)S = L$ . Or  $\psi_A(0) = 1 \neq 0$  et  $\psi_A$  est continue donc il existe un voisinage V de 0 sur lequel  $\psi_A$  ne s'annule pas. Ainsi pour  $t \in V$ ,  $I_4 - tA$  est inversible et  $(E_t)$  admet donc une unique solution.

**18** Pour  $t \in V$ ,  $\psi_A(t) = \det(I_4 - tA) \neq 0$  donc, d'après la formule de la comatrice :

$$S = \frac{1}{\psi_A(t)} \text{com}(I_4 - A)^T L$$

Or  $\text{com}(I_4 - A)^T L$  est la première colonne de  $\text{com}(I_4 - A)^T$  i.e. la première ligne de  $\text{com}(I_4 - tA)$ . Comme on ne s'intéresse qu'à  $S_3$ , seul le dernier coefficient de cette ligne nous intéresse. Ainsi

$$S_3 = -\frac{1}{\psi_A(t)} \begin{vmatrix} -qt & 1-qt & 0 \\ 0 & -pt & 0 \\ 0 & 0 & -qt \end{vmatrix} = \frac{pq^2t^3}{1-t+pq^2t^2-p^2qt^3}$$

**19** Par invariance du déterminant par transposition,

$$\chi_{A^T}(\lambda) = \det(\lambda I_4 - A^T) = \det((\lambda I_4 - A)^T) = \det(\lambda I_4 - A) = \chi_A(\lambda)$$

Or  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  donc  $\chi_A(\lambda) = 0$ . Par conséquent,  $\chi_{A^T}(\lambda) = 0$  et  $\lambda \in \text{Sp}(A^T)$ .

**20** Si on note  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  est vecteur propre de  $A^T$ , alors

$$\begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 + qx_4 = \lambda x_3 \\ 0 = \lambda x_4 \end{cases}$$

Comme  $\lambda \neq 0$ , la dernière ligne donne  $x_4 = 0$  de sorte que

$$\begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \end{cases}$$

Ainsi  $(x_1, x_2, x_3)$  est solution de  $(\mathcal{H})$ . Mais  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  n'est pas nul en tant que vecteur propre et  $x_4 = 0$  donc  $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ .

**21** Remarquons que  $M > 0$  car  $x_1, x_2$  et  $x_3$  ne sont pas tous nuls.

(i) Supposons  $M = |x_3|$ . Puisque  $M > 0$ ,  $x_3 \neq 0$ . Alors la dernière ligne de  $(\mathcal{H})$  fournit  $\lambda = \frac{px_1}{x_3}$  donc  $|\lambda| = \frac{|x_1|}{|x_3|}p \leq p < 1$ .

(ii) Supposons  $M = |x_2|$  et  $M > |x_3|$ . Anouveau  $x_2 \neq 0$ . La deuxième ligne de  $(\mathcal{H})$  fournit  $\lambda = q + \frac{x_3}{x_2}p$ . Par inégalité triangulaire,  $|\lambda| \leq q + \frac{|x_3|}{|x_2|}p$ . Or  $p > 0$  et  $\frac{|x_3|}{|x_2|} < 1$  donc  $\frac{|x_3|}{|x_2|}p < p$  donc  $|\lambda| < q + p = 1$ .

(iii) Supposons  $M = |x_1|$ ,  $M > |x_2|$  et  $M > |x_3|$ . A nouveau,  $x_1 \neq 0$  et la première ligne de  $(\mathcal{H})$  fournit  $\lambda = p + \frac{x_2}{x_1}q$ . Le même raisonnement que précédemment donne  $|\lambda| < p + q = 1$ .

Dans tous les cas de figure,  $|\lambda| < 1$ .

**22**  $\chi_A$  est unitaire de degré 4 et 0 est racine de  $\chi_A$  donc il existe des complexes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que  $\chi_A = X(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$ . Remarquons que 0 est racine simple de  $\chi_A$  : en effet,  $\chi'_A(0) = -qp^2 \neq 0$ . Ainsi  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ne sont pas nuls. D'après les questions précédentes, quitte à réordonner les  $\lambda_i$ ,

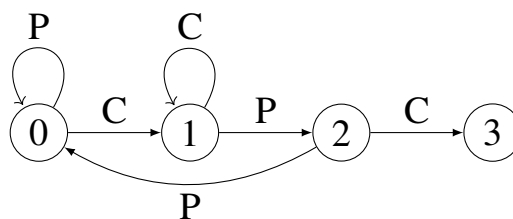
$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| < 1$$

**23** Pour  $t \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \psi_A(t) &= t^4 \chi_A(1/t) = t^4 \cdot \frac{1}{t} \left( \frac{1}{t} - \lambda_1 \right) \left( \frac{1}{t} - \lambda_2 \right) \left( \frac{1}{t} - \lambda_3 \right) \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left( t - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left( t - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left( t - \frac{1}{\lambda_3} \right) \end{aligned}$$

Le résultat est encore valide pour  $t = 0$  puisque  $\psi_A(0) = 1$ . Il suffit alors de poser  $\mu = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$  (les  $\lambda_i$  ne sont pas nuls),  $a = \frac{1}{\lambda_3}$ ,  $b = \frac{1}{\lambda_2}$  et  $c = \frac{1}{\lambda_1}$ .

**24**



**25** L'automate se trouve initialement au niveau 0 donc

$$p_{0,0} = 1$$

$$p_{0,1} = 0$$

$$p_{0,2} = 0$$

$$p_{0,3} = 0$$

Autrement dit  $S_0(0) = L$ .

**26** Il s'agit d'utiliser la formule des probabilités totales :

$$\forall i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, p_{n,i} = \mathbb{P}(E_{n,i}) = \sum_{j=0}^3 \mathbb{P}(E_{n,i} | E_{n-1,j}) \mathbb{P}(E_{n-1,j})$$

Il suffit alors d'observer le graphe déterminé à la question 24 pour obtenir les différentes probabilités conditionnelles :

$$\begin{array}{llll}
 \mathbb{P}(E_{n,0} | E_{n-1,0}) = p & \mathbb{P}(E_{n,0} | E_{n-1,1}) = 0 & \mathbb{P}(E_{n,0} | E_{n-1,2}) = p & \mathbb{P}(E_{n,0} | E_{n-1,3}) = 0 \\
 \mathbb{P}(E_{n,1} | E_{n-1,0}) = q & \mathbb{P}(E_{n,1} | E_{n-1,1}) = q & \mathbb{P}(E_{n,1} | E_{n-1,2}) = 0 & \mathbb{P}(E_{n,1} | E_{n-1,3}) = 0 \\
 \mathbb{P}(E_{n,2} | E_{n-1,0}) = 0 & \mathbb{P}(E_{n,2} | E_{n-1,1}) = p & \mathbb{P}(E_{n,2} | E_{n-1,2}) = 0 & \mathbb{P}(E_{n,2} | E_{n-1,3}) = 0 \\
 \mathbb{P}(E_{n,3} | E_{n-1,0}) = 0 & \mathbb{P}(E_{n,3} | E_{n-1,1}) = 0 & \mathbb{P}(E_{n,3} | E_{n-1,2}) = q & \mathbb{P}(E_{n,3} | E_{n-1,3}) = 0
 \end{array}$$

On en déduit les quatre formules demandées.

**27** Soit  $t \in ]-1, 1[$ . D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 S_0(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,0} t^n = p_{0,0} + p \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,0} t^n + p \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,2} t^n \\
 &= 1 + ptS_1(t) + ptS_2(t) \\
 S_1(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1} t^n = p_{0,1} + q \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,0} t^n + q \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,1} t^n \\
 &= qtS_0(t) + qtS_1(t) \\
 S_2(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,2} t^n = p_{0,2} + p \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,1} t^n \\
 &= ptS_1(t) \\
 S_3(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,3} t^n = p_{0,3} + q \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,2} t^n \\
 &= qtS_2(t)
 \end{aligned}$$

Autrement dit,  $S(t) = tAS(t) + L$ . La matrice colonne  $S(t)$  est donc bien solution de  $(E_t)$ .

**28** D'après la question 18, pour  $t$  au voisinage de 0,

$$G_T(t) = S_3(t) = \frac{pq^2 t^3}{1 - t + pqt^2 - p^2 qt^3}$$

D'après la question 23,

$$S_3(t) = \frac{pq^2 t^3}{\mu(t-a)(t-b)(t-c)}$$

avec  $1 < |a| \leq |b| \leq |c|$ . D'après la question 5,  $t \mapsto \frac{pq^2 t^3}{\mu(t-a)(t-b)(t-c)}$  est développable en série entière de rayon de convergence  $|a|$ .

Le même raisonnement que celui effectué à la question 11, montre que l'égalité

$$G_T(t) = \frac{pq^2 t^3}{1 - t + pqt^2 - p^2 qt^3}$$

est en fait valable pour  $t \in ]-|a|, |a|[$  et  $R_T = |a| > 1$ .

**29** A nouveau,  $G_T$  est deux fois dérivable en 1 puisque  $1 \in ]-R_T, R_T[$  donc  $T$  admet une espérance et une variance.

**30** Un calcul laborieux donne

$$\mathbb{E}(T) = G'_T(1) = \frac{1 + q - q^2}{q^2(1 - q)}$$

**31** Numérotions 0, 1, 2, 3, 4, 5 les six niveaux. On veut obtenir CCPPC.

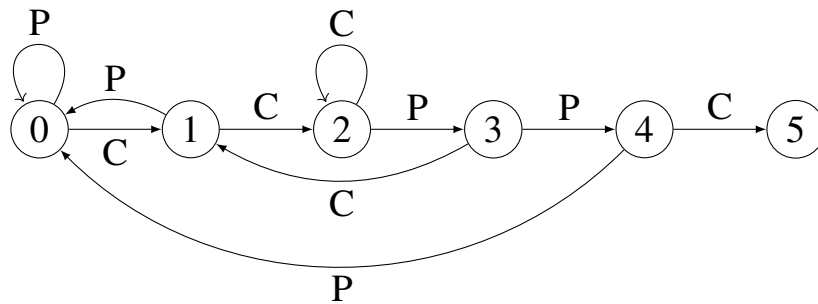
**Niveau 0** Si on obtient le premier C de CCPPC au passe au niveau 1 ; si on obtient un P, on reste au niveau 0.

**Niveau 1** On a déjà le premier C de CCPPC. Si on obtient le deuxième C de CCPPC, on passe au niveau 1 ; si on obtient un P on revient au niveau 0.

**Niveau 2** On a déjà le motif CC. Si on obtient le premier P de CCPPC, on passe au niveau 3. Si on obtient un C, on reste au niveau 2, puisqu'on a encore en cours le motif CC.

**Niveau 3** On a déjà le motif CCP. Si on obtient le deuxième P de CCPPC, on passe au niveau 4. Si on obtient un C, on retourne au niveau 1, puisqu'on a finalement le premier C de CCPPC.

**Niveau 4** On a déjà le motif CCPP. Si on obtient le C final, on passe au niveau 5. Si on obtient un P, on retourne au niveau 0, puisqu'on n'a même plus le premier C de CCPPC.



On obtient alors la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} p & p & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$