Devoir surveillé n°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 **E3A MP 2020**

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$\mathrm{P}_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$$

où $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

1. Montrer que, pour tout x réel, la suite $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Déterminer l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
On pourra utiliser la suite $(\ln(\mathrm{P}_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Soit $x \in \mathrm{J}$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. Etudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur J.

b. Démontrer que la fonction φ est continue sur J.

4. **a.** Prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{ch}}$.
On pourra utiliser un changement de variable.

b. En déduire l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$.

Exercice 2 **E3A MP 2021**

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0, 1]$ et f la fonction définie sur I par :

$$x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall x \in \mathrm{I}$, $f_0(x) = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.

2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.
Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.

3. Etudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0, 1]$ par $\varphi(t) = t\ln(t)$.

4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.

5. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I.

6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.

8. On pose $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'on a : $\mathrm{J} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Problème 1 – CCINP Maths 2 MP 2023

Partie I

1 **Un exemple**

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

2 On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :
si $P_1, P_2, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E, alors :

$$\mathrm{Ker}[T(u)] = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u)) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.
Justifier que $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$).

Démontrer que : $\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

3 Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.
On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1}P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.
Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1}P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$.

4 On pose alors, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.
Démontrer qu'on a les trois résultats suivants :

- pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \dots, m\}$, $p_i \circ p_j = 0$;
- $\sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{Id}_E$;
- et chaque p_i est un projecteur de E.

Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

5 Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

(avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $N_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{Id}_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace propre caractéristique associé à λ_i.
Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_m$.

6 Démontrer que $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \operatorname{Im} p_2 \oplus \dots \oplus \operatorname{Im} p_m$.

7 Démontrer que, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $N_i = \operatorname{Im} p_i$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

8 Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

9 On note toujours, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.
Donner sans détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$, puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

10 Démontrer que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

11 Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

11.a Justifier que la matrice A est diagonalisable et calculer la matrice A^2.

11.b En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A. On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.

11.c Calculer, pour tout entier naturel q, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.

12 On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[v]$ est égale au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v.

13 On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$.
Démontrer que la famille $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$.

14 Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

15 Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E, tels que, pour tout entier naturel q, on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q p_i$.

Nous allons étudier une "réciproque".

Soit u un endomorphisme de E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distincts, tels que, pour tout entier naturel q, on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$.
Démontrer que u est diagonalisable.