

# GROUPES

## 1 Compléments sur les groupes

### Proposition 1.1 Intersection de sous-groupes

Soit  $(H_i)_{i \in I}$  une famille de sous-groupes d'un groupe  $G$ . Alors  $\bigcap_{i \in I} H_i$  est un sous-groupe de  $G$ .

### Définition 1.1 Sous-groupe engendré par une partie

Soit  $A$  une partie d'un groupe  $G$ . On appelle **sous-groupe engendré** par  $A$  l'intersection de tous les sous-groupes de  $G$  contenant  $A$  i.e. le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $A$ . On note ce sous-groupe  $\langle A \rangle$ .

**REMARQUE.** Si le sous-groupe engendré par  $A$  est  $G$ , on dit également que  $A$  est un **partie génératrice** de  $G$ .

### Proposition 1.2

Soit  $A$  une partie d'un groupe  $G$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_p^{\varepsilon_p}, p \in \mathbb{N}, (a_1, \dots, a_p) \in A^p, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \in \{-1, 1\}^p\} \\ &= \{a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_p^{n_p}, p \in \mathbb{N}, (a_1, \dots, a_p) \in A^p, (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}^p\} \end{aligned}$$

**REMARQUE.** Dans le cas où  $p = 0$ , on retrouve l'élément neutre.

### Exemple 1.1

- Le sous-groupe engendré par la partie vide est le sous-groupe trivial contenant le seul élément neutre.
- L'ensemble des transpositions de  $S_n$  engendrent  $S_n$ .

### Exercice 1.1

Montrer que le groupe orthogonal  $O(E)$  d'un espace euclidien  $E$  est engendré par les réflexions.

### Exercice 1.2

On note  $A_n$  l'ensemble des permutations de  $S_n$  de signature 1. Montrer que  $A_n$  est un sous-groupe de  $S_n$  engendré par les 3-cycles.

**Proposition 1.3 Sous-groupe engendré par un élément**

Soient  $G$  un groupe et  $x \in G$ . Le sous-groupe engendré par  $\{x\}$  est appelé plus simplement sous-groupe engendré par  $x$ . On le note  $\langle x \rangle$ .

**REMARQUE.** Si le sous-groupe engendré par  $x$  est  $G$ , on dit également que  $x$  est un **générateur** de  $G$ .

**Proposition 1.4**

Soient  $G$  un groupe et  $x \in G$ . Alors  $\langle x \rangle = \{x^k, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exemple 1.2**

- Les générateurs de  $(\mathbb{Z}, +)$  sont  $\pm 1$ .
- Les générateurs de  $\mathbb{U}_n$  sont les  $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$  avec  $k \wedge n = 1$ .

**Exercice 1.3 Partie génératrice et morphisme**

Soient  $f$  un morphisme d'un groupe  $G$  dans un groupe  $H$  et  $A$  une partie de  $G$ . Montrer que  $\langle f(A) \rangle = f(\langle A \rangle)$ .

**Proposition 1.5 Sous-groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$** 

Les sous-groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  sont les  $a\mathbb{Z}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$ .

## 2 Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

**Proposition 2.1**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La relation de congruence modulo  $n$  définit une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ .

**Définition 2.1  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** 

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  l'ensemble des classes d'équivalences de la relation de congruence modulo  $n$ .

**Notation 2.1**

On notera  $\bar{k}$  la classe de congruence de  $k$  modulo  $n$ .

**REMARQUE.** Par conséquent,  $\bar{k} = \{k + pn, p \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exemple 2.1**

Dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ,  $\overline{47} = \overline{2} = \overline{-8}$ .

**REMARQUE.** De manière générale,  $\overline{k} = \overline{m}$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si et seulement si  $k \equiv m[n]$ .

**Exercice 2.1**

Montrer que l'application  $\begin{cases} \llbracket 0, n-1 \rrbracket & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & \overline{k} \end{cases}$  est bijective.

**Proposition 2.2**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{k}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ . De plus,  $\text{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$ .

**Proposition 2.3 Addition sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** 

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit une addition sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  en posant

$$\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2, \overline{k} + \overline{l} = \overline{k+l}$$

**REMARQUE.** Il faut vérifier que la classe de congruence de  $k+l$  modulo  $n$  ne dépend que des classes de congruence de  $k$  et  $l$  modulo  $n$ , et non des entiers  $k$  et  $l$  choisis.

**Exemple 2.2**

Dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $\overline{7} + \overline{2} = \overline{9} = \overline{1}$ .

**Proposition 2.4 Structure de groupe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** 

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  est un groupe commutatif d'élément neutre  $\overline{0}$ .

**Exercice 2.2**

Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Montrer que l'application  $\begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ m & \longmapsto & \overline{mk} \end{cases}$  est un morphisme de groupes additifs.

**Proposition 2.5**

Soit  $(m, k, n) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^*$ . Alors  $m\overline{k} = \overline{mk}$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Théorème 2.1 Générateurs de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** 

Soit  $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ . Alors  $\overline{k}$  engendre le groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  si et seulement si  $k \wedge n = 1$ .

### 3 Ordre d'un élément d'un groupe

#### Définition 3.1 Ordre d'un élément

Un élément  $x$  d'un groupe  $G$  d'élément neutre  $e$  est dit d'**ordre fini** s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x^n = e$ . Dans ce cas, on appelle **ordre** de  $x$  l'entier  $\min\{n \in \mathbb{N}^*, x^n = e\}$ .

#### Exemple 3.1

L'élément neutre d'un groupe est le seul élément d'ordre 1.

#### Exemple 3.2

L'ordre d'un cycle de longueur  $p$  est  $p$ .

#### Exercice 3.1

Déterminer l'ordre de la permutation  $\sigma \in S_7$  telle que

$$\sigma(1) = 3 \quad \sigma(2) = 6 \quad \sigma(3) = 5 \quad \sigma(4) = 7 \quad \sigma(5) = 1 \quad \sigma(6) = 2 \quad \sigma(7) = 4$$

#### Exemple 3.3

Il est clair que l'ordre d'un élément est conservé par isomorphisme. On en déduit par exemple que  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  n'est pas isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ . Ces deux groupes sont commutatifs et de cardinal 4 mais le premier contient un élément d'ordre 4 tandis que le second ne possède que des éléments d'ordre 1 ou 2.

#### Définition 3.2 Ordre d'un groupe

Le cardinal d'un groupe est appelé l'**ordre** de ce groupe.

#### Exemple 3.4

$(S_n, \circ)$  est un groupe d'ordre  $n!$ .

#### Exercice 3.2

Soit  $x$  un élément d'ordre  $d$  d'un groupe  $G$ . Montrer que l'application  $\begin{cases} \llbracket 0, d-1 \rrbracket & \longrightarrow & \langle x \rangle \\ k & \longmapsto & x^k \end{cases}$  est bijective.

#### Proposition 3.1 Ordre et sous-groupe engendré par un élément

Soit  $x$  un élément d'un groupe  $G$ . Alors  $x$  est d'ordre fini si et seulement si  $\langle x \rangle$  est d'ordre fini. Dans ce cas, les ordres de  $x$  et  $\langle x \rangle$  sont égaux et  $\langle x \rangle = \{x^k, k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket\}$ , où  $d$  désigne l'ordre de  $x$ .

**REMARQUE.** Tout élément d'un groupe fini est donc d'ordre fini.

### Proposition 3.2

Soit  $x$  un élément d'ordre  $d$  d'un groupe  $G$  d'élément neutre  $e$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x^n = e \iff d \mid n$ .

### Exercice 3.3

Soient  $x$  un élément d'un groupe  $G$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . On suppose que  $x$  est d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $d$  l'ordre de  $x^k$ .

1. Montrer que  $n$  divise  $kd$ .
2. Montrer que  $d$  divise  $\frac{n}{n \wedge k}$ .
3. En déduire que  $d = \frac{n}{n \wedge k}$ .

### Exercice 3.4

Soit  $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ . On note  $d$  l'ordre de  $\bar{k}$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

1. Montrer que  $n$  divise  $kd$ .
2. Montrer que  $d$  divise  $\frac{n}{n \wedge k}$ .
3. En déduire que  $d = \frac{n}{n \wedge k}$ .

### Proposition 3.3

Soit  $x$  un élément d'un groupe fini  $G$ . Alors  $x$  est d'ordre fini et l'ordre de  $x$  divise l'ordre de  $G$ .

**REMARQUE.** Notamment, si  $x$  est un élément d'un groupe d'ordre  $n$  et d'élément neutre  $e$ , alors  $x^n = e$ .

### Théorème 3.1 Lagrange (hors-programme)

Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe fini  $G$ . Alors l'ordre de  $H$  divise l'ordre de  $G$ .

## 4 Groupes monogènes

### Définition 4.1 Groupe monogène

On dit qu'un groupe est **monogène** s'il est engendré par un de ses éléments.

**REMARQUE.** Un groupe monogène est fini ou dénombrable.

**Exemple 4.1**

Le groupe  $(\mathbb{Z}, +)$  est monogène puisqu'il est engendré par 1.

**Proposition 4.1**

Tout groupe monogène est commutatif.

**Théorème 4.1**

Un groupe est infini monogène si et seulement si il est isomorphe à  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Définition 4.2 Groupe cyclique**

On dit qu'un groupe est **cyclique** s'il est monogène et fini.

**REMARQUE.** Si  $G$  est un groupe cyclique d'ordre  $n$ , alors pour tout générateur  $x$  de  $G$ ,  $G = \{x^k, k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket\}$ .

**REMARQUE.** Un groupe d'ordre  $n$  est cyclique si et seulement si il possède un élément d'ordre  $n$ .

**Exemple 4.2**

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  est cyclique puisqu'il est fini et engendré par  $\bar{1}$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le groupe  $(\mathbb{U}_n, \times)$  est cyclique puisqu'il est fini et engendré par  $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ .
- Pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $S_n$  n'est pas cyclique puisqu'il n'est même pas commutatif.
- Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$  n'est pas cyclique : il est d'ordre  $n^2$  mais les ordres de ses éléments sont des diviseurs de  $n$ .

**Exercice 4.1**

Montrer que tout groupe d'ordre premier est cyclique.

**Théorème 4.2**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Un groupe est cyclique d'ordre  $n$  si et seulement si il est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .

**Exemple 4.3**

A nouveau,  $(\mathbb{U}_n, \times)$  est cyclique puisque l'application  $\begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ \bar{k} & \longmapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{cases}$  est bien définie et est un isomorphisme.

**Sous-groupes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** 

On peut prouver que les sous-groupes de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  sont cycliques. En effet, si  $H$  est un sous-groupe non nul de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , on peut montrer que  $H = \langle \overline{m} \rangle$  où  $m = \min\{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \overline{k} \in H\}$ .

Comme tout groupe cyclique d'ordre  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , on en déduit que les sous-groupes d'un groupe cyclique sont cycliques.

**Exercice 4.2**

Montrer que si  $G$  est un groupe cyclique d'ordre  $n$ , alors pour tout diviseur  $d$  de  $n$ , il existe un unique sous-groupe de  $G$  d'ordre  $d$ .