Devoir à la maison n°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

```python
def suite(x,n):
    p,q,S=0,0,0
    l=[]
    for _ in range(n):
        if S>x:
            q+=1
            s=2*q-1
        else:
            p+=1
            s=2*p
        S+=(-1)**s/s
        l.append(s)
    return l
```

```
>>> suite(-1,70)
[1, 2, 3, 5, 4, 7, 9, 6, 11, 13, 8, 15, 17, 10, 19, 21, 12, 23, 25, 14, 27, 16, 29, 31,
↪ 18, 33, 35, 20, 37, 39, 22, 41, 43, 24, 45, 47, 26, 49, 28, 51, 53, 30, 55, 57, 32,
↪ 59, 61, 34, 63, 65, 36, 67, 69, 38, 71, 73, 40, 75, 42, 77, 79, 44, 81, 83, 46, 85,
↪ 87, 48, 89, 91]
```

1.b Tant que $S_n > x$, on lui ajoute des termes d'indices impairs (i.e. négatifs) de la suite u_n jusqu'à ce que $S_n \leq x$. Sinon on ajoute à $S_n$des termes d'indices pairs (i.e. positifs) jusqu'à ce que $S_n > x$. Comme (u_n) converge vers 0, on peut raisonnablement penser que (S_n) converge vers x.

2 On raisonnement par récurrence sur n.
Initialisation : Comme $S_0 = 0$, on a les deux cas suivants.
Si $x < 0$, alors $p_1 = 0$, $q_1 = s_1 = 1$ et $S_1 = -1$. On a donc bien $\{s(1)\} = \{1\} = \varnothing \cup \{2q_1 - 1\}$, $p_1 + q_1 = 1$ et $S_1 = u_{s(1)}$.
Si $x \geq 0$, $p_1 = 1$, $s_1 = 2$, $q_1 = 0$ et $S_1 = 1/2$. A nouveau, $\{s(1)\} = \{2\} = \{2p_1\} \cup \varnothing$, $p_1 + q_1 = 1$ et $S_1 = u_{s(1)}$.
Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geq 1$, on ait $\{s(1), \dots, s(n)\} = \{2, \dots, 2p_n\} \cup \{1, \dots, 2q_1 - 1\}$, $p_n + q_n = n$ et $S_n = u_{s(1)} + \cdots + u_{s(n)}$. Deux cas se présentent à nouveau.
Si $S_n > x$, alors $p_{n+1} = p_n$, $q_{n+1} = 1 + q_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$. Ainsi

$$\{s(1), \dots, s(n+1)\} = \{s(1), \dots, s(n)\} \cup \{2q_{n+1} - 1\} = \{2, \dots, 2p_n\} \cup \{1, \dots, 2q_{n+1} - 1\} = \{2, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, \dots, 2q_{n+1} - 1\}$$
$$p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n + 1 = n + 1$$
$$S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}} = u_{s(1)} + \cdots + u_{s(n)} + u_{s_{n+1}}$$

Si $S_n \leq x$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $q_{n+1} = q_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$. Ainsi

$$\{s(1), \dots, s(n+1)\} = \{s(1), \dots, s(n)\} \cup \{2p_{n+1}\} = \{2, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, \dots, 2q_n - 1\} = \{2, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, \dots, 2q_{n+1} - 1\}$$
$$p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n + 1 = n + 1$$
$$S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}} = u_{s(1)} + \cdots + u_{s(n)} + u_{s_{n+1}}$$

Par récurrence, on a donc bien le résultat voulu.
Remarquons alors que $\{2, \dots, 2p_n\}$ et $\{1, \dots, 2q_n - 1\}$ étant disjoints,

$$\operatorname{card}\{s(1), \dots, s(n)\} = \operatorname{card}\{2, \dots, 2p_n\} + \operatorname{card}\{1, \dots, 2q_n - 1\} = p_n + q_n = n$$

Notamment, si $s(n) = s(p)$, alors $\{s(1), \dots, s(n)\} = \{s(1), \dots, s(p)\}$ puis $n = p$, ce qui prouve que s est injective.

$\boxed{3}$ **3.a** Soit (u_n) une suite d'entiers convergeant vers ℓ. Il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq \mathrm{N}$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{3}$. Mais alors pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq \mathrm{N}$ et $p \geq \mathrm{N}$,

$$|u_n - u_p| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_p| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

Comme u_n et u_p sont deux entiers, $u_n = u_p$. Ainsi (u_n) est constante à partir du rang N.

3.b La suite (p_n) est clairement croissante. Comme on a supposé (p_n) majorée, elle converge. Elle est donc constante à partir d'un certain rang n_0. Pour tout $n \geq n_0$, on a donc $p_n = p_{n+1}$, ce qui signifie que $\mathrm{S}_n > x$. De plus, pour tout $n \geq n_0$, $q_{n+1} = q_n$ de sorte que $q_n = n - n_0 + q_{n_0}$. De plus, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ donc

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} u_{s_{k+1}} = \mathrm{S}_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{k+1} - 1} = \mathrm{S}_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} + 1}$$

La série $\sum_{k \geq n_0} \frac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} + 1}$ diverge vers $+\infty$ car $\frac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} + 1} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$. Ainsi (S_n) diverge vers $-\infty$, ce qui contredit le fait que $\mathrm{S}_n > x$ pour tout $n \geq n_0$.

3.c La suite (p_n) est croissante et non majorée : elle diverge vers $+\infty$.

$\boxed{4}$ Comme précédemment, la suite (q_n) est croissante. Si elle était majorée, elle convergerait et serait donc constante à partir d'un certain rang n_0. On aurait donc $\mathrm{S}_n \leq x$, $p_n = n - n_0 + p_{n_0}$ et $s_{n+1} = 2p_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$ puis

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2k - 2n_0 + 2p_{n_0} + 2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ceci contredit le fait que $\mathrm{S}_n \leq x$ pour $n \geq n_0$. Ainsi (q_n) est croissante et non majorée : elle diverge vers $+\infty$.

$\boxed{5}$