Devoir surveillé n°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Série de restes

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n \geq n_0} a_n$ une série à termes réels. Dans le cas où cette série converge, on note R_n le reste de rang n de cette série, c'est-à-dire $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout entier $n \geq n_0$.

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ dans plusieurs cas.

I Cas d'une série géométrique

On se donne $q \in \mathbb{R}$ et on pose $a_n = q^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (on a donc $n_0 = 0$).

1 Pour quelles valeurs de q la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge-t-elle ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de cette partie.

2 Exprimer R_n en fonction de q et n.

3 En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ converge et calculer sa somme.

II Cas d'une série de Riemann

On se donne dans cette partie $\alpha \in \mathbb{R}$ et on pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a donc $n_0 = 1$).

4 Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$ converge-t-elle ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de cette partie.

5 A l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\mathrm{R}_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}}$.

6 En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{R}_n$ converge.

III Cas de la série harmonique alternée

Dans cette partie, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a donc $n_0 = 1$). On note également S_n la somme partielle de rang n de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$, c'est-à-dire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$.

$\boxed{7}$ Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{8}$ En déduire que $S_n = -\ln(2) + (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$.

$\boxed{9}$ En déduire la convergence et la somme de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$.

$\boxed{10}$ Exprimer R_n à l'aide d'une intégrale puis, à l'aide d'une intégration par parties, déterminer deux constantes réelles α et β telles que $\alpha > 1$ et $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^{n+1}\beta}{n+1} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

$\boxed{11}$ En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} R_n$.

Problème 2 – Puissances de matrices

I Un anneau de matrices

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1 Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

2 Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3 On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que $(\mathrm{I}_3, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2)$ est une base de $\mathcal{A}$.

4 Exprimer M^3 en fonction de I_3 et M.

II Trace de puissances

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 4$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+1} - 4u_n$.

5 Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_k, b_k, c_k tels que $\mathrm{M}^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix}$.

6 Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_k) et deux relations de récurrence liant les suites (b_k) et (c_k).

7 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle z_k le nombre complexe $z_k = b_k + ic_k$. Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k et montrer que $b_k = \mathrm{Re}\big((1+i)^k\big)$.

8 Retrouver ce dernier résultat en trouvant une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite (b_k).

9 Montrer que la suite (u_n) est à valeurs entières.

10 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^n)$.

11 Soit p un nombre premier. Montrer que pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.

12 En déduire que p divise u_p.

Exercice 1 ★★ **Sommation d'Abel (d'après CCP MP 2014)**

Soient $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\geq n_0}$ deux suites complexes. On définit alors deux suites $(\mathrm{A}_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{A}_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$
$$\forall n \geq n_0,\ b_n = \mathrm{B}_{n+1} - \mathrm{B}_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k\mathrm{B}_k = \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$ pour tout entier $n \geq n_0$.

2. Dans cette question, on suppose que la suite (A_n) est bornée et que (B_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle.

a. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} b_n$ converge.

b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n\mathrm{B}_n$ converge.

c. En déduire en particulier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} (-1)^n\mathrm{B}_n$ converge. On n'utilisera pas le critère spécial des séries alternées.

3. Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$. On donnera le résultat sous la forme $re^{i\varphi}$ où $(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2$.

b. Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$.
On précisera notamment dans les cas de convergence s'il s'agit ou non de convergence absolue. De même, dans les cas de divergence, on précisera s'il s'agit ou non de divergence grossière.

4. Montrer que si la suite (B_n) converge vers 0, si la suite (A_n) est bornée et si la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} b_n$ est absolument convergente, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n\mathrm{B}_n$ est convergente.