

DEVOIR À LA MAISON N°18

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – Mines-Ponts Maths2 MP 2013 – Quelques propriétés géométriques du groupe orthogonal

Notations et définitions

Soit E un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note \langle, \rangle le produit scalaire de E et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. Si H est une partie de E , on appelle enveloppe convexe de H , notée $\text{conv}(H)$, la plus petite partie convexe de E contenant H , c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de E contenant H .

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^T la matrice transposée de A et $\text{tr}(A)$ la trace de A . On rappelle que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $UU^T = I$. On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite positive si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier \mathbb{R}^n et l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de \mathbb{R}^n est orthonormée. On note $\| \cdot \|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de \mathbb{R}^n : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|_2 = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|=1} \|AX\|$$

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

I Produit scalaire de matrices

On rappelle que $\text{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1 Montrer que pour toute base orthonormée (e_1, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n , on a la formule $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle$.
- 2 Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté \langle, \rangle .

On note $\| \cdot \|_1$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. *L'attention du candidat est attirée sur le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est désormais muni de deux normes différentes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$.*

- 3 Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer que $\langle A, B \rangle \geq 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B .

II Décomposition polaire

Soit f un endomorphisme de E . On note A la matrice de f dans une base orthonormée de E , et on note f^* l'adjoint de f .

- 4 Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de $A^T A$.
- 5 Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif h de E tel que $f^* \circ f = h^2$.
- 6 Montrer que la restriction de h à $\text{Im } h$ induit un automorphisme de $\text{Im } h$. On notera cet automorphisme \tilde{h} .
- 7 Montrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\text{Ker } h$ et $(\text{Im } f)^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\text{Ker } h$ sur $(\text{Im } f)^\perp$ qui conserve la norme.
- 8 À l'aide de \tilde{h} et v , construire un automorphisme orthogonal u de E tel que $f = u \circ h$.
- 9 En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive.
On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

III Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E , convexe et compacte, et soit $x \in E$. On note

$$d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|$$

- 10 Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1 - t)h_1\|^2$.
- 11 Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $\langle x - h_0, h - h_0 \rangle \leq 0$ pour tout $h \in H$. On pourra utiliser la même fonction q qu'à la question précédente.

Le vecteur h_0 s'appelle projeté de x sur H .

IV Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n . On dit que $x \in E$ est une combinaison convexe de p éléments $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$$

- 12 Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H .

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H .

Soit $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, \dots, x_p \in H$ avec $p \geq n+2$.

- 13 Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^p \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \mu_i = 0$$

On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_p - x_1)$.

- 14** En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H .
On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.
- 15** Si H est une partie compacte de E , montrer que $\text{conv}(H)$ est compact. On pourra introduire l'ensemble compact de \mathbb{R}^{n+1} défini par

$$\Lambda = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall i \in \{1, \dots, n+1\}, t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}$$

V Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

- 16** Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

On note \mathcal{B} la boule unité fermée de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

- 17** Montrer que $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est contenue dans \mathcal{B} .

On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{B}$ telle que M n'appartient pas à $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. On note N le projeté de M sur $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ défini à la partie III pour la norme $\|\cdot\|_1$, et on pose $A = (M - N)^\top$. On écrit enfin $A = US$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique réelle positive (question 9).

- 18** Montrer que pour tout $V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$, $\text{tr}(AV) \leq \text{tr}(AN) < \text{tr}(AM)$. En déduire que $\text{tr}(S) < \text{tr}(USM)$.
- 19** Montrer que $\text{tr}(MUS) \leq \text{tr}(S)$. On pourra appliquer le résultat de la question 1.
- 20** Conclure : déterminer $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

VI Points extrémaux

Un élément $A \in \mathcal{B}$ est dit extrémal dans \mathcal{B} si l'écriture $A = \frac{1}{2}(B + C)$, avec B, C appartenant à \mathcal{B} entraîne $A = B = C$. Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des points extrémaux de \mathcal{B} .

- 21** On suppose que $U \in O_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $U = \frac{1}{2}(V + W)$, avec V, W appartenant à \mathcal{B} . Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, les vecteurs VX et WX sont liés. En déduire que U est extrémal dans \mathcal{B} .

Soit A appartenant à \mathcal{B} mais n'appartenant pas à $O_n(\mathbb{R})$.

- 22** Montrer que l'on peut écrire A sous la forme $A = PDQ$, où P et Q sont deux matrices orthogonales et où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux d_1, d_2, \dots, d_n sont positifs ou nuls.
- 23** Montrer que $d_i \leq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, et qu'il existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $d_j < 1$.
- 24** En déduire qu'il existe deux matrices A_α et $A_{-\alpha}$ appartenant à \mathcal{B} telles que $A = \frac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$. Conclure.