Révisions Oraux

Suites

Solution 1

1. Posons $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. φ est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et une étude rapide montre que φ est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. De plus, pour tout entier $n \geq 3$,

$$-\infty = \lim_{0^+} \varphi < \frac{1}{n} < \frac{1}{e} = \varphi(e) \qquad \text{et} \qquad \varphi(e) > \frac{1}{n} > 0 = \lim_{+\infty} \varphi$$

donc le théorème des valeurs intermédiaires montre que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, l'une sur $]0, e[$ et l'autre sur $]e, +\infty[$.
Autrement dit, pour $n \geq 3$, il existe bien deux solutions u_n et v_n à l'équation (E_n) et $0 < u_n < e < v_n$.

2. Pour tout $n \geq 3$, $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$. On en déduit que $0 \leq \ln(u_n) \leq \frac{e}{n}$ puis $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$ par encadrement. Par continuité de l'exponentielle en 0, $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^0 = 1$.

3. Comme (u_n) converge vers 1 i.e. $(u_n - 1)$ converge vers 0

$$\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + (u_n - 1))}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1$$

Solution 2

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$. La fonction f_n est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f_n(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$. L'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires.
Remarquons pour la suite que $f_n(x_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que

$$f_n(x_{n+1}) = f_{n+1}(x_{n+1}) - \frac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} \leq 1 = f_n(x_n)$$

Par stricte croissance de f_n, on a donc $x_{n+1} \leq x_n$.
La suite (x_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge.

3. On peut calculer $x_2 = \sqrt{3} - 1 < 1$. La suite (x_n) est donc à valeurs dans $[0, 1[$ à partir du range 2.
Soit $f : x \mapsto -\ln(1 - x)$. L'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $n \geq 2$,

$$\left| f(x_n) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x_n^k \right| \leq \max_{[0,x_n]} |f^{(n+1)}| \cdot \frac{x_n^{n+1}}{(n+1)!}$$

Puisque $f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f(x_n) - 1| = |f(x_n) - f_n(x_n)| \leq \frac{x_n^{n+1}}{(n+1)(1-x_n)^{n+1}} \leq \frac{x_2^{n+1}}{(n+1)(1-x_2)^{n+1}}$$

Puisque $x_2 \in]0, 1[$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_2^{n+1}}{(n+1)(1-x_2)^{n+1}} = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$. On en déduit alors sans peine que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1 - \frac{1}{e}$.

Solution 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f_n : x \mapsto \cos x - nx$. f_n est dérivable et $f_n'(x) = -\sin x - n < 0$ pour tout $x \in [0,1]$. f_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = cos(1) - n < 0$. On en déduit que f_n s'annule une unique fois sur $[0,1]$. D'où l'existence et l'unicité de x_n.

2. On a $\cos x_n = nx_n$ et donc $x_n = \dfrac{\cos x_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $|x_n| \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis que (x_n) converge vers 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $f_n \geq f_{n+1}$ sur $[0,1]$. Donc $f_n(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$. La stricte décroissance de f_n implique que $x_{n+1} \leq x_n$. Par conséquent la suite (x_n) est décroissante.

4. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que cos est continue en 0, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos 0 = 1$. Donc $x_n = \dfrac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

5. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $x_n = \dfrac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. On en déduit que $x_n - \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^3}$.

Solution 4

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x) - x| \leq \max_{\mathbb{R}} |\sin^{(3)}| \cdot \frac{|x|^3}{6}$$

On en déduit que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{k}{n^2} - \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{6n^6} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{6n^6} = \frac{1}{6n^2}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right) = 0$$

Comme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Polynômes

Solution 5

S'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \dfrac{m\pi}{n}$, alors $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{2n} - 2(-1)^m\mathrm{X}^n + 1$.

- Si m est pair,

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X}^n - 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{X} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Il faut alors distinguer suivant la parité de n.
Si n est pair, alors

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)^2 \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(\mathrm{X}^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
Si n est impair, alors

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)^2 \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathrm{X}^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

- Si m est impair,
$$\mathrm{P} = (\mathrm{X}^n+1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} - e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}\right)^2$$
qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Il faut alors distinguer suivant la parité de n.
Si n est pair, alors
$$\mathrm{P} = \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(\mathrm{X}^2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+1\right)^2$$
qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
Si n est impair, alors
$$\mathrm{P} = (\mathrm{X}+1)^2\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1}\left(\mathrm{X}^2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+1\right)^2$$
qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Dans toutes les expressions précédentes, on convient qu'un produit indexé sur le vide vaut 1 et les facteurs sont bien irréductibles car les cosinus ne valent ni 1 ni -1.
On suppose maintenant qu'il n'existe pas d'entier $m\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{m\pi}{n}$. Remarquons que
$$\mathrm{P} = \left(\mathrm{X}^n - e^{ni\theta}\right)\left(\mathrm{X}^n - e^{-ni\theta}\right)$$
On a
$$\mathrm{X}^n - e^{ni\theta} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} - e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$
et par conjugaison
$$\mathrm{X}^n - e^{-ni\theta} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} - e^{-i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$
La décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est donc
$$\mathrm{P} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} - e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} - e^{-i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$
On en déduit que la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est
$$\mathrm{P} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right)$$
Les facteurs sont bien irréductibles car la condition $\theta\notin\frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$ assure qu'aucun des cosinus ne vaut 1 ou -1.

Solution 6

Supposons que P soit réductible sur $\mathbb{Q}$. Alors il existe des polynômes Q et R non constants de $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}=\mathrm{QR}$. Puisque $\deg\mathrm{Q}+\deg\mathrm{R} = \deg\mathrm{P} = 3$, l'un de ces deux polynômes est donc de degré 1. Ceci implique alors que P admet une racine rationnelle ; notons la p/q avec $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et $p\wedge q = 1$. On a alors
$$(p/q)^3+3(p/q)^2+2=0$$
ou encore
$$p^3+3p^2q+2q^3=0$$
Comme q divise $3p^2q+2q^3$, q divise également p^3. Comme $p\wedge q=1$, ceci impose $q=1$. On a alors $p^3+3p^2+2=0$. A nouveau, p divise p^3+3p^2 donc p divise 2. Ainsi $p/q\in\{-1,1,-2,2\}$ mais on vérifie qu'aucun de ces quatre entiers n'est racine de P.
On a montré par l'absurde que P était irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Solution 7

1. Soit P un tel polynôme. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(x) = \overline{\mathrm{P}(x)} = \overline{\mathrm{P}}(x)$. Les polynômes P et $\overline{\mathrm{P}}$ coïncident sur $\mathbb{R}$ qui est infini donc il sont égaux. Ainsi $\mathrm{P} = \overline{\mathrm{P}}$ i.e. $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
   Réciproquement tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ vérifie $\mathrm{P}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

2. Soit P un tel polynôme. P est forcément non nul : notons $n = \deg \mathrm{P}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\mathrm{P}(z)\overline{\mathrm{P}(z)} = 1$ ou encore $\mathrm{P}(z)\overline{\mathrm{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$. On en déduit que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\mathrm{P}(z)z^n\overline{\mathrm{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = z^n$. Posons $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^n\overline{\mathrm{P}}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$. Q est bien un polynôme et pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\mathrm{P}(z)\mathrm{Q}(z) = z^n$. Comme $\mathbb{U}$ est infini, $\mathrm{PQ} = \mathrm{X}^n$. Ainsi P divise X^n et $\deg \mathrm{P} = n$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\mathrm{P} = \lambda\mathrm{X}^n$. Mais la condition $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset (\mathbb{U})$ impose alors $\lambda \in \mathbb{U}$.
   Réciproquement, tout polynôme de la forme $\lambda\mathrm{X}^n$ avec $\lambda \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}$ convient.

3. Soit P un tel polynôme et posons $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{X}^k$ avec $a_0, \dots, a_n$ dans $\mathbb{C}$ a priori. Soient $x_0, \dots, x_n$ des rationnels distincts deux à deux. Posons $y_k = \mathrm{P}(x_k)$ pour $0 \leq k \leq n$. Notons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \left(x_i^j\right)_{0 \leq i,j \leq n}$. Ainsi $\mathrm{MA} = \mathrm{Y}$. M est une matrice de Vandermonde inversible puisque les x_k sont distincts deux à deux. Comme M est à coefficients dans $\mathbb{Q}$, M^{-1} l'est également. Enfin, Y est aussi à coefficients dans $\mathbb{Q}$ par hypothèse et finalement $\mathrm{A} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Y}$ est à coefficients rationnels. Ainsi $\mathrm{P} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$.
   Réciproquement tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ convient évidemment.

   > **Remarque.** La preuve qui précède est valable pour tout sous-corps de $\mathbb{C}$ (et pas seulement pour $\mathbb{Q}$). En effet, tout sous-corps de $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{Q}$ et est donc infini : on peut toujours trouver $n+1$ scalaires $x_0, \dots, x_n$ distincts deux à deux dans ce sous-corps quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Solution 8

En multipliant la seconde équation par xyz, on obtient $xy + yz + zx = 0$. Notons $a = xyz$. En utilisant les relations coefficients/racines d'un polynôme, on peut affirmer que x, y, z sont les racines du polynôme $\mathrm{X}^3 - a$. Ce sont donc les racines cubiques de a qui ont toutes le même module.

Solution 9

1. Simple calcul.

2. On peut clairement choisir $\mathrm{P}_0 = 2$ et $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et deux polynômes P_n et P_{n-1} adéquats. En vertu de la question précédente, le polynôme $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{XP}_n - \mathrm{P}_{n-1}$ convient. Par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z^n) = \mathrm{P}_n(f(z))$.
   On vérifie alors aisément par récurrence double que la suite de polynômes (P_n) définie par $\mathrm{P}_0 = 2$, $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}$ et $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{XP}_n - \mathrm{P}_{n-1}$ vérifie $\deg \mathrm{P}_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que le coefficient dominant de P_n vaut 1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit Q un polynôme vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z^n) = \mathrm{Q}(f(z))$. Alors $\mathrm{Q}(f(z)) = \mathrm{P}_n(f(z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Ainsi $\mathrm{Q} - \mathrm{P}_n$ admet tous les complexes de $f(\mathbb{C}^*)$ pour racines. Or $f(\mathbb{C}^*)$ est infini (par exemple, la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante). Donc $\mathrm{Q} - \mathrm{P}_n = 0$ i.e. $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_n$.

4. On trouve sans difficulté $f(z_k^n) = 0$. On en déduit que $\mathrm{P}_n(f(z_k)) = 0$ i.e. $\mathrm{P}_n\left(2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = 0$. Comme cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, les réels $2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont n racines distinctes de P_n. Or P_n est de degré n et de coefficient dominant 1 donc
$$\mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$

5. **a.** On sait que $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{XP}_n - \mathrm{P}_{n-1}$ donc $\mathrm{P}_{n+1}(0) = -\mathrm{P}_{n-1}(0)$.
   b. Or $\mathrm{P}_0(0) = 2$ donc $\mathrm{P}_{2n}(0) = 2(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $\mathrm{P}_1(0) = 0$ donc $\mathrm{P}_{2n+1}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Notons A_n le produit de l'énoncé. Alors $(-2)^n\mathrm{A}_n = \mathrm{P}_n(0)$. Donc $\mathrm{A}_{2n+1} = 0$ et $\mathrm{A}_{2n} = \frac{2(-1)^n}{(-2)^{2n}} = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}$.

7. Notons B_n la somme de l'énoncé. Par le changement d'indice $k \mapsto n-1-k$, $B_n = -B_n$ donc $B_n = 0$.

Solution 10

Soit P un tel polynôme. En substituant 0 à X dans la condition de l'énoncé, on trouve $P(0) = 0$. Puis en substituant -1 à X, on trouve $P(-1) = 0$. En substituant -2 à X, on trouve $P(-2) = 0$. Enfin, en substituant -3 à X, on trouve $P(-3) = 0$. On ne peut pas aller plus loin. Ainsi P est divisible par $X(X+1)(X+2)(X+3)$. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$. La condition de l'énoncé donne $X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X+1)$ et donc $Q(X) = Q(X+1)$ par intégrité de $\mathbb{R}[X]$. On montre par récurrence que tout entier naturel est racine de $Q - Q(0)$ donc Q est constant. Ainsi P est de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Réciproquement tout polynôme de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie bien la condition de l'énoncé.

Solution 11

---

1. Il est clair que $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker} u$. Réciproquement, soit $P \in \operatorname{Ker} u$. Alors $P(X+1) - P(X) = 0$. Ainsi $P(n+1) = P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis $P(n) = P(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Aisni $P - P(0)$ admet une inifinité de racines (tous les entiers naturels) : il est nul et $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}_0[X]$.

2. Il suffit de remarquer que $\deg N_k = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi $(N_0, \dots, N_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes à degrés étagés et $\dim E = n+1$ donc c'est une base de E.

3. On trouve $u(N_0) = 0$ et $u(N_k) = N_{k-1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

4. D'après la question précédente, $u^{n+1}(N_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Comme $(N_0, \dots, N_n)$ est une base de E, $u^{n+1} = 0$. Or $u^n(N_n) = N_0 = 1 \neq 0$ donc u est nilpotent d'indice $n+1$.

5. On a clairement $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais $\dim \operatorname{Ker} u = 1$ d'après la première question donc $\dim \operatorname{Im} u = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après le théorème du rang. Ainsi $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Remarquons que $H = \{P \in E,\ P(0) = 0\}$ est un hyperplan de E en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle. Comme $\operatorname{Ker} u$ est une droite non incluse dans H, H est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. D'après le cours, u induit un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} u$. Pour tout $P \in \operatorname{Im} u$, il existe donc un unique $Q \in H$ tel que $u(Q) = P$ i.e. pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe un unique $Q \in E$ tel que $u(Q) = P$ et $Q(0) = 0$.

Algèbre générale

Solution 12

---

1. Cf. cours.

2. On a clairement $I \subset A$. Supposons que $1_A \in I$. Par définition d'un idéal, pour tout $a \in A$, $1_A \times a \in I$ i.e. $A \subset I$. Ainsi $I = A$.

3.
   - $0_A = a0_A \in I_a$.
   - Soit $(x, y) \in A^2$. Alors $ax + ay = a(x+y) \in I_a$.
   - Soit $x \in A$. Alors pour tout $y \in A$, $(ax)y = a(xy) \in I_a$.

   On en déduit que I_a est bien un idéal de A.

4. Supposons que A est un corps. Soit I un idéal non nul de A. Alors il existe $a \in I$ tel que $a \neq 0_A$. Mais comme A est un corps, a est inversible. Par conséquent, $1_A = aa^{-1} \in I$ car I est un idéal de A. D'après une question précédente, $I = A$.
   Réciproquement supposons que les seuls idéaux de A soient $\{0_A\}$ et A. Soit a un élément non nul de A. On sait que I_a est un idéal de A. On ne peut avoir $I_a = \{0_A\}$ sinon on aurait $a = 0_A$. Ainsi $I_a = A$. Notamment $1_A \in I_a$. Il existe donc $x \in A$ tel que $ax = 1_A$. Ainsin a est inversible et A est un corps.

Solution 13

Soit $(x, y) \in A^2$ tel que $xy = 0$. Comme $\{0\}$ est un idéal premier par hypothèse, $x = 0$ ou $y = 0$, ce qui prouve que A est intègre.
Pour $x \in A$, on notera $\langle x \rangle$ l'idéal engendré par x. Soit $x \in A$. L'idéal $\langle x^2 \rangle$ est premier et $x^2 \in \langle x^2 \rangle$ donc $x \in \langle x^2 \rangle$. Il existe donc $y \in A$ tel que $x = x^2 y$ ou encore $x(1 - xy) = 0$. Notamment, si $x \neq 0$, on a $xy = 1$ par intégrité de A et donc x est inversible.

Solution 14

1. $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{Z}$.
   Le sous-groupe engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ autrement dit l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

2. Puisque Γ est discret, il existe un élément z_0 de Γ^* de module minimal. Mais par hypothèse $\lambda z_0 \in \Gamma^*$ donc $|\lambda| \geq 1$. Mais on a également $\frac{1}{\lambda}\Gamma = \Gamma$ donc $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \geq 1$. On en déduit que $|\lambda| = 1$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = e^{i\theta}$.
   De plus, $z_1 = \lambda z_0 + \frac{1}{\lambda} z_0 \in \Gamma$ et $z_1 = 2\cos\theta z_0$. Supposons que $2\cos\theta \notin \mathbb{Z}$ et posons $z_2 = z_1 - \lfloor 2\cos\theta \rfloor) z_0$. Alors $z_2 \in \Gamma$ puisque Γ est un groupe. De plus, $z_2 \neq 0$ et $|z_2| < |z_0|$, ce qui contredit la définition de z_0. Finalement $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$. On a donc $\cos\theta \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ et ainsi $\lambda^4 = 1$ ou $\lambda^6 = 1$.

3. Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la matrice
   $$\mathrm{B}^n \mathrm{A} \mathrm{B}^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{2n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   appartient à Γ. Comme Γ est discret, la matrice I_2 est isolée et donc $|\lambda| = 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$.
   Réciproquement si $\lambda = 1$, on montre que Γ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ donc Γ est discret. Si $\lambda = -1$, Γ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ donc Γ est à nouveau discret.

Solution 15

On a $2^p \equiv 1[k]$ donc $\bar{2}^p = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Notons r l'ordre de 2 dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$. La remarque précédente montre que r divise p. Or p est premier et on ne peut évidemment pas avoir $r = 1$ donc $r = p$. Puisque k est premier, $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}$ et l'ordre de $\bar{2}$ divise le cardinal de $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ i.e. p divise $k-1$. Enfin, $2^p - 1$ est impair donc k également i.e. 2 divise $k-1$. Puisque p est impair, $2 \wedge p = 1$ donc $2p$ divise $k-1$ i.e. $k \equiv 1[2p]$.

Solution 16

Remarquons déjà que G est commutatif. En effet, si $(x, y) \in \mathrm{G}^2$, alors $(xy)^2 = e$ où e est le neutre. Ainsi $xyxy = e$ puis en multipliant par yx à droite, $xy = yx$.
Comme G est fini, il admet une partie génératrice minimale $\{g_1, \dots, g_r\}$. On montre alors que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r & \longrightarrow & \mathrm{G} \\ (\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_r) & \longmapsto & g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_r^{\varepsilon_r} \end{array}\right.$ est un isomorphisme de groupes. On en déduit que $|\mathrm{G}| = |(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r| = 2^r$.

Solution 17

1. Comme $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\det(\mathrm{A}(h)) = a^h \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. Ainsi $\mathrm{E} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. On vérifie de plus que
   $$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{A}(h + k) = \mathrm{A}(h)\mathrm{A}(k)$$
   donc A est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Notamment, $\mathrm{E} = \operatorname{Im} \mathrm{A}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Enfin, $\operatorname{Ker} \mathrm{A} = \{0\}$ donc A est injectif et $\mathrm{E} = \operatorname{Im} \mathrm{A}$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

2. On a $\mathrm{A}'(h) = \begin{pmatrix} a^h \ln(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{V} = \mathrm{A}'(0) = \begin{pmatrix} \ln(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tout d'abord, $\exp(t \ln a) = a^t$. Puis, en posant $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$N^2 = 0$ donc $\exp(tN) = I_2 + tN$. En raisonnant par blocs,

$$\exp(tV) = \begin{pmatrix} a^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(t)$$

Solution 18

---

1. 1 n'est pas d'ordre fini dans $\mathbb{Z}$ donc $\mathbb{Z}$ est de caractéristique 0.
   L'ordre de $\overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est n donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est de caractéristique n.

2. Supposons que A est de caractéristique n. Remarquons que $n \cdot 1_A = 0_A$ même si $n = 0$. Soit $x \in A$. Alors
$$nx = n(1_A \times x) = (n \cdot 1_A)x = 0_A \times x = 0_A$$

3. Supposons que A est de caractéristique non nulle n. Soit d un diviseur positif de n. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel $n = dk$. Alors
$$(d \cdot 1_A) \times (k \cdot 1_A) = (kd)1_A = n \cdot 1_A = 0_A$$
   Comme A est intègre $d \cdot 1_A = 0_A$ ou $k \cdot 1_A = 0_A$. Dans le premier cas, d divise l'ordre de 1_A, à savoir n donc $d = n$. Dans le second cas, $k = n$ i.e. $d = 1$.
   De plus, comme A n'est pas nul, A ne peut être de caractéristique 1 de sorte que $n \geq 2$. Ainsi n est premier.

4. Puisque A est commutatif, il est clair que $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$ pour tout $(x, y) \in A^2$. De plus, $f(1_A) = 1_A$.
   Soit $(x, y) \in A^2$. Comme x et y commutent, on a par la formule du binôme de Newton
$$f(x + y) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k}$$
   Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$. Puisque $k \in [\![1, p-1]\!]$, p ne peut diviser k de sorte que $p \wedge k = 1$ d'après le lemme de Gauss. Ainsi p divise $\binom{p}{k}$ puis $\binom{p}{k} x^k y^{n-k} = 0_A$ d'après la deuxième question. On en déduit que $f(x + y) = f(x) + f(y)$. f est donc bien un endomorphisme d'anneau.
   Si f est intègre, il est clair que $\operatorname{Ker} f = \{0_A\}$ donc f est injectif. Si A est de plus fini, f est bijectif : c'est donc un automorphisme de l'anneau A.

5. Comme $\mathbb{K}$ est fini, $1_{\mathbb{K}}$ est d'ordre fini. Ainsi la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas nulle. Comme un corps est intègre, sa caractéristique est un nombre premier p.
   On vérifie que si $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $k \equiv l[p]$, alors $kx = lx$ pour tout $x \in \mathbb{K}$. Ceci permet de définir une loi externe $\cdot$ sur $\mathbb{K}$ en posant $\overline{k} \cdot x = kx$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{K}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est bien un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel. Comme $\mathbb{K}$ est fini, il possède a fortiori une base $(e_1, \dots, e_n)$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (k_1, \dots, k_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} k_i e_i \end{array}\right.$ est alors bijective (c'est un isomorphisme).
   On en déduit que $\operatorname{card} \mathbb{K} = p^n$.

Algèbre linéaire

Solution 19

---

1. Si P_1 et P_2 sont deux polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \alpha u_n + P_1(n) = \alpha u_n + P_2(n)$$
   alors $P_1(n) - P_2(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $P_1 - P_2$ admet une infinité de racines : il est nul. Donc $P_1 = P_2$.

2. Notons F l'ensemble des suites de la forme $(\mathrm{P}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$. Comme $\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F en est également un. Notons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1} - \alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$. f est un endomorphisme et $\mathrm{S}_p = f^{-1}(\mathrm{F})$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. Soient $u, v \in \mathrm{S}_p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors $\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \alpha(\lambda u_n + \mu v_n) + (\lambda \mathrm{P}_u + \mu \mathrm{P}_v)(n)$. Par l'unicité montrée à la première question, on a $\mathrm{P}_{\lambda u + \mu v} = \lambda \mathrm{P}_u + \mu \mathrm{P}_v$.
Soit $u \in \mathrm{S}_p$. Dire que $u \in \operatorname{Ker} \phi$ équivaut à dire que $\mathrm{P}_u = 0$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \alpha u_n$. $\operatorname{Ker} \phi$ est donc l'ensemble des suites géométriques de raison α. Ainsi la suite $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendre $\operatorname{Ker} \Phi$. Puisque $\alpha \neq 0$, cette suite est non nulle, c'est donc une base de $\operatorname{Ker} \phi$.

4. Par définition de S_p, $\operatorname{Im} \phi = \mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$. Notons u_k la suite de terme général n^k. On a $\phi(u_k) = \mathrm{R}_k$. Comme $\alpha \neq 1$, $\deg \mathrm{R}_k = k$. On en déduit que $(\mathrm{R}_0, \dots, \mathrm{R}_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$. La famille $(u_0, \dots, u_p)$ est donc libre et $\operatorname{vect}(u_0, \dots, u_p)$ est en somme directe avec $\operatorname{Ker} \phi$. Notons u la suite de terme général α^n. La famille $(u, u_0, \dots, u_p)$ est donc libre. Par le théorème du rang $\dim \mathrm{S}_p = \dim \operatorname{Ker} \phi + \operatorname{rg} \phi = p + 2$. On en déduit que $(u, u_0, \dots, u_p)$ est une base de S_p.

5. Dans ce cas, $p = 1$ et $\alpha = 2$. La question précédente montre que (u_n) est de la forme $u_n = a \cdot 2^n + bn + c$. On va déterminer a, b, c à partir des 3 premiers termes de la suite. On calcule $u_1 = 3$, $u_2 = 11$. On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} a + c = -2 \\ 2a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 11 \end{cases}$$

On trouve $a = 3$, $b = 2$ et $c = -5$. Ainsi $u_n = 3 \cdot 2^n + 2n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 20

1. Posons $\mathrm{L} : g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto f \circ g$ et $\mathrm{R} : g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto g \circ f$. Alors $\Phi = \mathrm{L} - \mathrm{R}$. De plus, L et R sont des endomorphismes de E qui commutent. En effet, pour tout $g \in \mathrm{E}$, $\mathrm{L} \circ \mathrm{R}(g) = \mathrm{R} \circ \mathrm{L}(g) = f \circ g \circ f$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\Phi^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \mathrm{L}^{p-k} \circ \mathrm{R}^k$$

On en déduit que pour tout $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$,

$$\Phi^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$$

Dans la formule écrite au rang $p = 2n - 1$, pour $0 \leq k \leq p$, on a soit $k \geq n$, soit $p - k \geq n$ donc tous les termes de la somme précédente sont nuls. Φ est donc nilpotent d'indice inférieur ou égal à $2n - 1$.

2. Soit $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} a$. a induit un isomorphisme $\tilde{a}$ de S sur $\operatorname{Im} a$. Soit T un supplémentaire de $\operatorname{Im} a$. On pose $b(x) = \tilde{a}^{-1}(x)$ pour $x \in \operatorname{Im} a$ et $b(y) = 0$ pour $y \in \mathrm{T}$. Ainsi on a bien $a \circ b \circ a = a$.

> **Remarque.** On peut aussi raisonner matriciellement. Notons A la matrice de a dans une base de E. On sait qu'il existe $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$ où $n = \dim \mathrm{E}$, $r = \operatorname{rg}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{J}_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $\mathrm{J}_r^2 = \mathrm{J}_r$, on obtient $\mathrm{ABA} = \mathrm{A}$ en posant $\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{J}_r\mathrm{P}^{-1}$. Il suffit de prendre pour b l'endomorphisme de E dont la matrice est B dans la base précédente.

Montrons que Φ est d'ordre $2n - 1$ exactement. Pour $p = 2n - 2$ et $0 \leq k \leq p$, on a soit $k \leq n$, soit $p - k \leq n$ sauf pour $k = n - 1$. Ainsi

$$\Phi^{2n-2}(g) = (-1)^{n-1} \binom{2n-2}{n-1} f^{n-1} \circ g \circ f^{n-1}$$

D'après ce qui précéde, il existe $g_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que

$$f^{n-1} \circ g_0 \circ f^{n-1} = f^{n-1}.$$

Par conséquent, $\Phi^{2n-2}(g_0) = f^{n-1} \neq 0$.

Solution 21

1. Comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2$, tout élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ – en particulier Id – peut s'écrire comme la somme d'un élément de H_1 et d'un élément de H_2.

2. On compose l'identité $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$ par p_1 une fois à gauche et une fois à droite pour obtenir :
$$p_1^2 + p_1 \circ p_2 = p_1 \qquad\qquad p_1^2 + p_2 \circ p_1 = p_1$$
On additionne ces deux égalités de sorte que
$$2p_1^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 2p_1$$
Mais comme $p_1 \in \mathrm{H}_1$ et $p_2 \in \mathrm{H}_2$, $p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0$. Ainsi $2p_1^2 = 2p_1$ et finalement $p_1^2 = p_1$. Donc p_1 est un projecteur.
Quitte à échanger p_1 et p_2, on démontre de même que p_2 est un projecteur.

3. Soit $f \in \mathrm{H}_1$. On a donc $f \circ p_2 + p_2 \circ f = 0$. Comme p_2 est un projecteur, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de p_2 est $\mathrm{P}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_r \end{array}\right)$ où $r = \mathrm{rg}\, p_2$. Notons $\mathrm{F} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ la matrice de f dans cette même base $\mathcal{B}$ avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. On a donc $\mathrm{FP}_2 + \mathrm{P}_2\mathrm{F} = 0$, ce qui entraîne $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$. Par conséquent, $\mathrm{F} = \left(\begin{array}{c|c} 0_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & \mathrm{D} \end{array}\right)$. Notons Φ l'isomorphisme qui associe à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $\Phi(\mathrm{H}_1) \subset \mathrm{G}$ où G est le sous-espace vectoriel des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ où $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. Par conséquent $\dim \mathrm{H}_1 \leq \dim \mathrm{G}$. Or $\dim \mathrm{G} = (n-r)^2$. Ainsi $\dim \mathrm{H}_1 \leq (n-r)^2 = (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$.
On prouve de la même manière que $\dim \mathrm{H}_2 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2$.

4. Comme $\mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\dim \mathrm{H}_1 + \dim \mathrm{H}_2 = n^2$. On déduit de la question précédente que
$$n^2 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$$
Comme $n - \mathrm{rg}\, p_1 \geq 0$ et $n - \mathrm{rg}\, p_2 \geq 0$,
$$(n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2 \leq [(n - \mathrm{rg}\, p_1) + (n - \mathrm{rg}\, p_2)]^2 = [2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2$$
On sait que $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$. Donc $\mathrm{rg}(p_1 + p_2) = n$. Or c'est un exercice classique que de montrer que $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 \geq \mathrm{rg}(p_1 + p_2)$. On en déduit que $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 \geq n$. De plus $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 \leq 2n$ donc
$$[2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2 \leq n^2$$
Finalement,
$$n^2 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2 \leq [2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2 \leq n^2$$
On en déduit que $[2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2 = n^2$ i.e. $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 = n$ et que $n^2 = (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$. Notons $r = \mathrm{rg}\, p_1$. On a alors $n^2 = (n-r)^2 + r^2$ i.e. $r(n-r) = 0$. Deux cas se présentent.
   - Si $r = 0$, alors $p_1 = 0$ et donc $p_2 = \mathrm{Id}$. On a alors $\dim \mathrm{H}_1 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2 = 0$. Donc $\mathrm{H}_1 = \{0\}$. Par conséquent $\mathrm{H}_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
   - Si $r = n$, alors $p_1 = \mathrm{Id}$. On a alors $\dim \mathrm{H}_2 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 = 0$. Donc $\mathrm{H}_2 = \{0\}$. Par conséquent $\mathrm{H}_1 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

   Réciproquement, on vérifie que ces deux couples $(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ vérifient bien les hypothèses de l'énoncé.

Solution 22

On applique le théorème du rang à $u_{|\,\mathrm{Ker}(u+v)}$. Alors
$$\dim \mathrm{Ker}(u+v) = \dim \mathrm{Ker}(u_{|\,\mathrm{Ker}(u+v)}) + \dim \mathrm{Im}(u_{|\,\mathrm{Ker}(u+v)})$$
D'une part,
$$\mathrm{Ker}(u_{|\,\mathrm{Ker}(u+v)}) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}\, v$$
D'autre part, soit $y \in \mathrm{Im}(u_{|\,\mathrm{Ker}(u+v)})$. Il existe donc $a \in \mathrm{Ker}(u+v)$ tel que $y = u(a)$. Or $u(a) + v(a) = 0_{\mathrm{F}}$ donc $y = -v(a) \in \mathrm{Im}(v)$ donc $y \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$ donc $\mathrm{Im}(u_{|\,\mathrm{Ker}(u+v)}) \subset \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$ puis $\dim \mathrm{Im}(u_{|\,\mathrm{Ker}(u+v)}) \leq \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v))$.
On en déduit le résultat voulu.

Solution 23

On supposera que a, b, c et m sont des paramètres *réels*.

$$\begin{cases} a^2x + a^3y + az = m \\ a^2x + y + az = m \\ x + ay + a^2z = m \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (a^3-1)y = 0 \\ a^2x + y + az = m & \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ x + ay + a^2z = m \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (a^3-1)y = 0 \\ (1-a^3)y + a(1-a^3)z = (1-a^2)m & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - a^2\mathrm{L}_1 \\ x + ay + a^2z = m \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (a^3-1)y = 0 \\ a(1-a^3)z = (1-a^2)m \\ x + ay + a^2z = m \end{cases}$$

On distingue alors des cas.
Si $a = 1$,
$$(\mathcal{S}) \iff x + y + z = m$$
L'ensemble des solutions est le plan affine $(m, 0, 0) + \mathrm{vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$.
Si $a = 0$
$$\cos \iff \{y = 00 \quad = mx = m$$
Le système n'admet de solutions que si $m = 0$ et dans ce cas, l'ensemble des solutions est la droite vectorielle $\mathrm{vect}(0, 1, 0)$.
Si $a \notin \{0, 1\}$,
$$(\mathcal{S}) \begin{cases} (a^2+a+1)y = 0 \\ a(1+a+a^2)z = (1+a)m \\ x + ay + a^2z = m \end{cases}$$
On a supposé a réel de sorte que $a^2 + a + 1 > 0$. L'unique solution du système est alors $\left(\dfrac{(1+a-a^3)m}{1+a+a^2}, 0, \dfrac{(1+a)m}{1+a+a^2}\right)$.

Solution 24

1. f est linéaire par linéarité de l'intégrale.
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a
   $$f(\mathrm{X}^k) = \frac{1}{k+1}((\mathrm{X}+1)^{k+1} - \mathrm{X}^{k+1}) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\binom{k+1}{l}\mathrm{X}^l$$
   Ainsi $\deg f(\mathrm{X}^k) = k \leq n$ et $f(\mathrm{X}^k) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Par linéarité, $f(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
   f induit bien un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

2. L'expression de $f(\mathrm{X}^k)$ trouvée à la question précédente montre que la matrice de f_n dans la base canonique est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux valent $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{k+1}{k} = 1$ pour k variant de 0 à n. Le déterminant de f_n vaut donc 1.

Solution 25

Pour une matrice A, on notera A_{ij} le coefficient en position (i, j) et $\tilde{\mathrm{A}}_{ij}$ la matrice A privée de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

1. Notons U_n l'ensemble des matrices de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Faisons l'hypothèse de récurrence suivante :

   HR(n) : étant donné une matrice de U_n, on peut rendre cette matrice inversible en changeant $n - 1$ coefficients ou moins.

HR(1) est évidemment vraie puisqu'une matrice de U_1 est évidemment inversible.
Supposons HR(n) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in U_{n+1}$. Quitte à changer $n-1$ coefficients de la matrice $\tilde{A}_{11}$, on peut la rendre inversible. Notons A' la matrice ainsi obtenue. Si A' est inversible, alors HR($n+1$) est vraie. Sinon, puisque $\det A' = \sum_{i=1}^{n+1} A'_{i1} \det \tilde{A}'_{i1} = 0$. Notons A'' la matrice A' où on a changé A'_{11} en son opposé. Alors

$$\begin{aligned}
\det(A'') &= \sum_{i=1}^{n+1} A''_{i1} \det \tilde{A}''_{i1} \\
&= -A'_{11} \det \tilde{A}'_{11} + \sum_{i=2}^{n+1} A'_{i1} \det \tilde{A}'_{i1} \\
&= -2A'_{11} \det \tilde{A}'_{11} + \sum_{i=1}^{n+1} A'_{i1} \det \tilde{A}'_{i1} \\
&= -2A'_{11} \det \tilde{A}'_{11} + \det A' = -2A'_{11} \det \tilde{A}'_{11}
\end{aligned}$$

Puisque $A'_11 = \pm 1$ et $\tilde{A}'_{11}$ est inversible, $\det(A'') \neq 0$ et donc A'' est inversible, ce qui prouve que HR($n+1$) est vraie.
Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrons maintenant qu'il existe des matrices de U_n pour lesquelles il faut changer exactement $n-1$ coefficients afin de les rendre inversibles. Il suffit de considérer une matrice de U_n dont toutes les colonnes sont égales au signe près. Considérons par exemple la matrice A de U_n dont tous les coefficients valent 1. Il faut au moins changer 1 coefficient dans $n-1$ colonnes sinon deux colonnes sont égales et la matrice n'est pas inversible.

2. On a évidemment $\operatorname{card} U_n = 2^{n^2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{A \in U_n} (\det A)^2 &= \sum_{A \in U_n} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \right)^2 \\
&= \sum_{A \in U_n} \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \right)^2 + \sum_{\substack{(\sigma,\tau) \in \mathfrak{S}_n^2 \\ \sigma \neq \tau}} \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} A_{i\tau(i)} \right] \\
&= \sum_{A \in U_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \right)^2 + \sum_{\substack{(\sigma,\tau) \in \mathfrak{S}_n^2 \\ \sigma \neq \tau}} \sum_{A \in U_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} A_{i\tau(i)}
\end{aligned}$$

Comme la signature est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de même que les coefficients d'une matrice A de U_n, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \right)^2 = \operatorname{card} \mathfrak{S}_n = n!$$

Soient maintenant $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma \neq \tau$. Il existe donc $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(j) \neq \tau(j)$. L'application de U_n dans lui-même changeant le coefficient $A_{j\sigma(j)}$ en son opposé est une involution et laisse le coefficient $A_{i,\tau(i)}$ inchangé de sorte que la somme $\sum_{A \in U_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} A_{i\tau(i)}$ est égale à son opposé et est donc nulle.
Finalement la moyenne recherchée, à savoir $\frac{1}{\operatorname{card} U_n} \sum_{A \in U_n} (\det A)^2$ vaut $n!$.

Solution 26

1. Soient x et y deux réels distincts. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ est $x-y \neq 0$ donc cette matrice est inversible. On en déduit que la matrice $\begin{pmatrix} f(1) & f(1) \\ f(x) & f(y) \end{pmatrix}$ est également inversible. Son déterminant $f(1)(f(x) - f(y))$ est donc non nul. En particulier, $f(x) \neq f(y)$.
Ceci prouve l'injectivité de f.

2. On montrer d'abord que $f(0)=0$. Comme f est surjective, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $0=f(x)$. La matrice $\begin{pmatrix} x \end{pmatrix}$ n'est alors pas inversible donc $x=0$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\neq x+y$. Alors la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ a pour déterminant $z-x-y \neq 0$ et est donc inversible. La matrice $\begin{pmatrix} f(1) & f(0) & f(1) \\ f(0) & f(1) & f(1) \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) & 0 & f(1) \\ 0 & f(1) & f(1) \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{pmatrix}$ est donc également inversible et a pour déterminant $f(1)^2(f(z)-f(x)-f(y))$. Ainsi $f(z) \neq f(x)+f(y)$.
Par surjectivité de f, $f(x)+f(y)$ admet un antécédent u par f. Si on avait $u \neq x+y$, alors on aurait $f(u) \neq f(x)+f(y)$, ce qui contredit ce qui précède. Ainsi $u=x+y$ et $f(x)+f(y)=f(u)=f(x+y)$.

3. On va montrer que f n'est ni majorée ni minorée. Comme elle est continue, elle sera surjective en vertu du théorème des valeurs intermédiaires.
Comme f est continue et injective, f est strictement monotone. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer f strictement croissante. Comme $f(0)=0$, f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour $x \in \mathbb{R}^*$, la matrice $\begin{pmatrix} x+1/x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ est inversible. On en déduit que $\begin{pmatrix} f(x+1/x) & f(1) \\ f(1) & f(x) \end{pmatrix}$ est également inversible. En particulier, l'application continue $\varphi : x \mapsto f(x)f(x+1/x)-f(1)^2$ ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Puisque f est strictement croissante, $\varphi(1)=f(1)(f(2)-f(1))>0$. Ainsi φ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $f(x+1/x)>f(1)^2/f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or f est continue en 0 et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\lim\limits_{0^+} f = 0^+$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x+1/x)=+\infty$.
De la même manière, la matrice $\begin{pmatrix} x+1/x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ est inversible. On en déduit comme précédemment que l'application $\psi : x \mapsto f(x)f(x+1/x)-f(-1)^2$ ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$. Par ailleurs, $\psi(-2)=f(-1)(f(-2)-f(-1))>0$ par stricte croissance de f, donc ψ est strictement positive sur $\mathbb{R}_-^*$. On en déduit que $f(x+1/x)<f(-1)^2/f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ (attention au signe de $f(x)$). Cecei permet aussi de conclure que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x+1/x)=-\infty$.
Finalement, f n'est ni bornée ni majorée et elle est donc surjective en vertu du théorème des valeurs intermédiaires.
La question précédente montre alors que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)=f(x)f(y)$ et on prouve classiquement que f est une fonction linéaire. De plus, f est non nulle car injective.
Réciproquement, supposons que f soit linéaire non nulle. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x)=\lambda x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit A une matrice d'ordre n inversible. Alors la matrice A′ telle que définie dans l'énoncé est également inversible puisque $\det(A')=\lambda^n \det(A)$.

Solution 27

Il est clair que si $x=y$, alors $D=0$. Réciproquement, supposons $D=0$. Notons M la matrice dont D est le déterminant. Alors $M^\top$ n'est pas inversible. Il existe alors un élément $X=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}^\top$ non nul du noyau de M. On posant $P=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+a_4X^4$, l'égalité $M^\top X=0$ donne $P(x)=P'(x)=P(y)=P'(y)=P''(y)=0$. Si $\neq y$, alors P compte au cinq racines avec multiplicité ce qui est absurde puisque $\deg P \leq 4$ et $P \neq 0$. Ainsi $x=y$.

Solution 28

Remarquons tout d'abord que si deux des a_i sont égaux, le déterminant définissant $D(x)$ admet deux colonnes identiques, il est donc nul. On supposera donc par la suite les a_i distincts deux à deux.
Remarquons que $\dfrac{P(x)}{x-a_i}=\prod\limits_{j\neq i}(x-a_j)$ est polynomiale en x de degré $n-1$. En développant le déterminant par rapport à la première ligne, on voit que D est polynomiale en x de degré inférieur ou égal à $n-1$ (on peut notamment la prolonger par continuité en les a_i).
Pour $1 \leq i \leq n$, notons Δ_i le déterminant de Vandermonde des complexes $a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n$. On a donc $\Delta_i = \prod\limits_{\substack{1\leq j<k\leq n \\ j\neq i, k\neq i}} (a_k-a_j)$.
On va calculer $D(a_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. La première ligne du déterminant définissant $D(a_i)$ a tous ses coefficients nuls hormis le $i^{\text{ème}}$ qui vaut

$\prod_{j \neq i}(a_j - a_i)$. En développant par rapport à cette ligne, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(a_i) = \left((-1)^{i-1}\prod_{j\neq i}(a_j-a_i)\right)\Delta_i &= \left((-1)^{i-1}\prod_{j<i}(a_j-a_i)\right)\left(\prod_{j>i}(a_j-a_i)\right)\left(\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ j\neq i,k\neq i}}(a_k-a_j)\right)\\
&= \left(\prod_{j<i}(a_i-a_j)\right)\left(\prod_{j>i}(a_j-a_i)\right)\left(\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ j\neq i,k\neq i}}(a_k-a_j)\right)\\
&= \left(\prod_{j<i}(a_i-a_j)\right)\left(\prod_{i<k}(a_k-a_i)\right)\left(\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ j\neq i,k\neq i}}(a_k-a_j)\right)
\end{aligned}$$

On peut partitionner l'ensemble $\{(j,k)\in[\![1,n]\!]^2 \mid j<k\}$ en 3 parties suivant que $j\neq i$ et $k\neq i$ ou bien $j=i$ et $k>i$ ou bien $k=i$ et $j<i$. On a donc

$$\mathrm{D}(a_i) = \prod_{1\leq j<k\leq n}(a_k-a_j)$$

Autrement dit $\mathrm{D}(a_i)=\delta$ pour $1\leq i\leq n$ où δ représente le déterminant de Vandermonde de $a_1,\dots,a_n$. Le polynôme $\mathrm{D}-\delta$ est donc de degré inférieur ou égal à $n-1$ et admet n racines distinctes (les a_i sont supposés distincts deux à deux) : il est donc nul. On a donc $\mathrm{D}(x)=\delta$ pour tout $x\in\mathbb{C}$.

Arithmétique

Solution 29

L'ensemble de l'énoncé est formé des entiers de la forme $u_n = \sum_{k=0}^{n} 10^k$ pour $n\in\mathbb{N}$. On a facilement $u_n = \frac{1}{9}(10^{n+1}-1)$. Remarquons que si $p=3$, alors p divise 111 par exemple.
Soit p un entier premier différent de 2, 3 et 5. Alors $10 = 2\times 5$ est premier avec p. D'après le petit théorème de Fermat, $10^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ donc p divise $10^{p-1}-1$. Comme $p\neq 3$, p est premier avec 9. On sait que 9 divise $10^{p-1}-1$ puisque $\frac{1}{9}(10^{p-1}-1)=u_{p-2}\in\mathbb{N}$. Donc $9p$ divise $10^{p-1}-1$ i.e. p divise u_{p-2}.

Solution 30

Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ un éventuel couple vérifiant $n(n+1)(n+2)=m^2$.

Si n est pair, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p$. On en déduit que

$$4p(2p+1)(p+1)=m^2$$

Ainsi 2 divise m^2 et donc m puisque 2 est premier. Il existe donc $q\in\mathbb{N}$ tel que $m=2q$. On en déduit que

$$p(2p+1)(p+1)=q^2$$

Or p, $2p+1$ et $p+1$ sont premiers entre eux deux à deux (il existe des relations de Bézout évidentes entre ces entiers) et on prouve alors classiquement que p, $2p+1$ et $p+1$ sont des carrés d'entiers en considérant les puissances de leurs facteurs premiers dans leurs décompositions en facteurs premiers. En particulier, il existe des entiers naturels c et d tels que $p=c^2$ et $p+1=d^2$. Ainsi $d^2-c^2=1$ i.e. $(d+c)(d-c)=$. On en déduit $d-c=d+c=1$ et donc $c=0$ et $d=1$. Il s'ensuit que $n=0$ puis $m=0$.

Si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$. On en déduit que

$$2(2p+1)(p+1)(2p+3) = m^2$$

Ainsi 2 divise m^2 et donc m puisque 2 est premier. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2q$. On en déduit que

$$(2p+1)(p+1)(2p+3) = 2q^2$$

Donc 2 divise $(2p+1)(p+1)(2p+3)$. Comme $2p+1$ et $2p+3$ sont impairs, 2 divise $p+1$ et donc p est impair. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2r+1$. Il s'ensuit que

$$(4r+3)(r+1)(4r+5) = q^2$$

$r+1$ est premier avec $4r+3$ et $4r+5$ en vertu de relations de Bézout évidentes. De plus $(4r+5)-(4r+3) = 2$ donc le pgcd de $4r+3$ et $4r+5$ vaut 1 ou 2. Puisque $4r+3$ et $4r+5$ sont impairs, leur pgcd vaut 1 i.e. ces entiers sont premiers entre eux. Finalement, $r+1$, $4r+3$ et $4r+5$ sont premiers entre eux deux à deux et sont donc des carrés d'entiers comme précédemment. En particulier, il existe des entiers naturels c et d tes que $4r+3 = c^2$ et $4r+5 = d^2$. Ainsi $d^2 - c^2 = 2$ i.e. $(d+c)(d-c) = 2$. On en déduit que $d-c = 1$ et $d+c = 2$ i.e. $c = \frac{1}{2}$ et $d = \frac{3}{2}$ ce qui contredit le fait que c et d sont des entiers.

On en déduit finalement que la seule solution de l'équation $n(n+1)(n+2) = m^2$ est le couple $(0,0)$.

Solution 31

---

1. Supposons que les c_i admettent un facteur premier commun p. Puisque p divise c_1, il divise l'un des entiers $a_2, \dots, a_r$ en vertu du lemme d'Euclide. Quitte à réordonner les a_i, on peut supposer qu'il s'agit de a_2. Mais p divise également c_2 donc il divise l'un des entiers $a_1, a_3, \dots, a_r$. En notant a_j cet entier ($j \neq 2$), p serait un diviseur commun de a_2 et a_j, ce qui contredit le fait que ces entiers sont premiers entre eux par hypothèse. Ainsi $a_1, \dots, a_r$ n'admettent pas de diviseur premier commun : ils sont premiers entre eux dans leur ensemble.

2. D'après la première question et le théorème de Bezout, il existe $(u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{Z}^r$ tel que $\sum_{k=1}^{r} u_k c_k = 1$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{bu_k}{a_k} = \frac{b}{a_1 \dots a_r}$$

Notons respectivement q_k et x_k le quotient et le reste de la division euclidienne de bu_k par a_k. Alors on a bien $0leqx_k < a_k$ et

$$\sum_{k=1}^{r} q_k + \frac{x_k}{a_k} = b$$

ou encore

$$b = y + \sum_{k=1}^{r} \frac{x_k}{a_k}$$

en posant $y = \sum_{k=1}^{r} q_k$.
Reste à montrer l'unicité. Soit donc $(y', x'_1, \dots, x'_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ tel que

$$[\forall k \in [\![1,r]\!],\ 0 \leq x'_k < a_k \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{a_1 \dots a_r} = y' + \sum_{k=1}^{r} \frac{x'_k}{a_k}$$

Ainsi

$$y - y' = \sum_{k=1}^{r} \frac{x'_k - x_k}{a_k}$$

ou encore

$$(y'-y)a_1 \dots a_r = \sum_{k=1}^{r} c_k(x'_k - x_k)$$

Fixons $j \in [\![1,r]\!]$. Puisque a_j divise chacun des c_i avec $i \neq j$, l'égalité précédente montre que a_j divise $c_j(x'_j - x_j)$. Comme a_j est premier avec chacun des a_i avec $i \neq j$, il est également premier avec leur produit c_j. En vertu du lemme de Gauss, a_j divise donc $x'_j - x_j$. Or $-a_j < x'_j - x_j < a_j$ donc $x'_j - x_j = 0$ i.e. $x'_j = x_j$. Ceci étant valable pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, on en déduit alors immédiatement que $y' = y$.

Solution 32

1. Supposons que l'ensemble $\mathcal{Q}$ des nombres premiers p tels que $p \equiv 3[4]$ soit fini. Posons alors $\mathrm{N} = \prod_{p\in\mathcal{Q}} p$ (on convient que $\mathrm{N} = 1$ si $\mathcal{Q} = \emptyset$) et $n = 4\mathrm{N} - 1$. Comme n est impair, les diviseurs premiers de n sont impairs et donc congrus à 1 ou 3 modulo 4. Comme $n \equiv 3[4]$, les diviseurs premiers de n ne peuvent pas tous être congrus à 1 modulo 4. Il existe donc un diviseur premier q de n tel que $q \equiv 3[4]$. Si q appartenait à $\mathcal{Q}$, q diviserait N et donc également $4\mathrm{N} - n = 1$, ce qui est impossible. Ainsi $q \notin \mathcal{Q}$, ce qui est absurde. L'ensemble $\mathcal{Q}$ est donc infini.

2. On sait que pour tout $u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $u^{p-1} = 1$ (petit théorème de Fermat). Posons $\mathrm{U} = u^{\frac{p-1}{2}}$ (U est bien défini car $p-1$ est pair). On a donc $\mathrm{U}^2 = 1$ i.e. $(\mathrm{U}+1)(\mathrm{U}-1) = 0$. Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, il est intègre et donc $\mathrm{U} = \pm 1$.

3. Le polynôme $\mathrm{X}^{p-1} - 1$ considéré comme un polynôme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ possède $p-1$ racines en vertu du petit théorème de Fermat (à savoir tous les éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$). Or $\mathrm{X}^{p-1} - 1 = \left(\mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(\mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$ donc chaque racine de $\mathrm{X}^{p-1} - 1$ est racine de $\mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}} - 1$ ou de $\mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}} + 1$. Ces deux derniers polynômes sont de degré $\frac{p-1}{2}$ donc possèdent au plus $\frac{p-1}{2}$ racines. C'est donc qu'ils possèdent exactement $\frac{p-1}{2}$ racines.
Le nombre de $u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tels que $u^{\frac{p-1}{2}} = -1$ vaut donc $\frac{p-1}{2}$.

4. D'après la question précédente, il existe $u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tel que $u^{\frac{p-1}{2}} = -1$.
Si $p \equiv 1[4]$, on peut définir $\mathrm{U} = u^{\frac{p-1}{4}}$ et on a alors $\mathrm{U}^2 = -1$. -1 est donc bien un carré.
Si $p \equiv 3[4]$, $-1 = u^{\frac{p-1}{2}} = u\mathrm{U}^2$ avec $\mathrm{U} = u^{\frac{p-3}{4}}$. Supposons que -1 soit un carré. Alors $u = (-1)(\mathrm{U}^{-1})^2$ est également un carré i.e. il existe $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tel que $u = x^2$. Mais alors $u^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} = 1 \neq -1$. On aboutit à une contradiction donc -1 n'est pas un carré.

5. On vérifie que K est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de dimension 2 engendrée par I_2 et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mais ce n'est pas vraiment ce qui est suggéré par la question.
Montrons que K est également un corps. On raisonne par analyse/synthèse. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x & yu \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathrm{K}^*$ i.e. $(x, y) \neq (0, 0)$.
Supposons que M admette un inverse $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} x' & y'u \\ y' & x' \end{pmatrix}$. Alors $\begin{cases} xx' + uyy' = 1 \\ xy' + x'y = 0 \end{cases}$. On en déduit que $\begin{cases} x'(x^2 - uy^2) = x \\ y'(uy^2 - x^2) = y \end{cases}$. Une condition nécessaire à l'existence d'un inverse est donc $x^2 - uy^2 \neq 0$.
Si $x = 0$, alors $y \neq 0$ et donc $x^2 - uy^2 = -uy^2 \neq 0$ (on a évidemment $u \neq 0$). Si $x \neq 0$, alors $x^2 = uy^2$ impliquerait que u est un carré et on a vu que c'était impossible. On a donc bien $x^2 - uy^2 \neq 0$.
Puisque $x^2 - uy^2 \neq 0$, il existe (x', y') tel que $\begin{cases} x'(x^2 - uy^2) = x \\ y'(uy^2 - x^2) = y \end{cases}$. Posons alors $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} x' & y'u \\ y' & x' \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{MM}' = \begin{pmatrix} xx' + uyy' & u(xx' + yy') \\ xx' + yy' & xx' + uyy' \end{pmatrix}$.
Or

$$(x^2 - uy^2)(xx' + uyy') = xx'(x^2 - uy^2) + uyy'(x^2 - uy^2) = x^2 - uy^2$$
$$(x^2 - uy^2)(xy' + x'y) = xy'(x^2 - uy^2) + yx'(x^2 - uy^2) = -xy + xy = 0$$

Comme $x^2 - uy^2 \neq 0$, $xx' + uyy' = 1$ et $xy' + x'y = 0$. On a alors bien $\mathrm{MM}' = \mathrm{I}_2$.

> **Remarque.** K est un donc un corps à p^2 élément. On peut prouver que tous les corps à p^2 éléments lui sont isomorphes.
> De manière plus générale, si p est un nombre premier et $n \in \mathbb{N}$, on montre qu'il existe un unique corps à p^n éléments à isomorphisme près.

Solution 33

Soient p et q deux nombres premiers consécutifs avec $p < q$.
Si $p = 2$, alors $q = 3$ et $p + q = 5$ ne peut être le produit de deux nombres premiers.

Si $p > 2$, alors p et q sont impairs donc $p+q$ est pair. Supposons qu'il existe deux nombres premiers a et b tels que $p+q=ab$. Comme $p+q$ est pair, un des deux nombres premiers a et b est égal à 2 par unicité de la décomposition en facteurs premiers. Supposons sans perte de généralité que $a=2$. Alors $b=\dfrac{p+q}{2}$ est un nombre premier strictement compris entre p et q, ce qui contredit le fait que p et q sont des nombres premiers consécutifs.

Solution 34

---

1. $\mathrm{N}(1)=\mathrm{N}(1\cdot 1)=\mathrm{N}(1)^2$ donc $\mathrm{N}(1)\in\{0,1\}$. Mais $\mathrm{N}(x)=0 \implies x=0$ donc $\mathrm{N}(1)=1$. De la même manière, $\mathrm{N}(-1)^2=\mathrm{N}(1)=1$ donc $\mathrm{N}(-1)\in\{-1,1\}$. Or N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $\mathrm{N}(-1)=1$.

2. Supposons que $q=\dfrac{c}{d}$ avec $(c,d)\in(\mathbb{Z}^*)^2$. On a donc $ad=bc$ donc $\nu_p(ad)=\nu_p(bc)$ i.e $\nu_p(a)+\nu_p(d)=\nu_p(b)+\nu_p(c)$ ou enfin $\nu_p(a)-\nu_p(b)=\nu_p(c)-\nu_p(d)$.

3. Les deux premiers axiomes sont automatiquement vérifiés. Remarquons que l'aultramétrie implique directement le troisième axiome. Soit $(m,n)\in(\mathbb{Z}^*)^2$. Si m et n sont premiers entre eux, m et n n'ont pas de facteur premier commun donc $\nu_p(m)=0$ ou $\nu_p(n)=0$. Par conséquent, $\nu_p(m+n)\geq 0=\min(\nu_p(m),\nu_p(n))$. Dans le cas général, posons $d=m\wedge n$ et m' et n' tels que $m=dm'$ et $n=dn'$. Alors $m'\wedge n'=1$. Par conséquent,

   $$\nu_p(m+n)=\nu_p(d(m'+n'))=\nu_p(d)+\nu_p(m'+n')\geq\nu_p(d)+\min(\nu_p(m'),\nu_p(n'))=\min(\nu_p(d)+\nu_p(m'),\nu_p(d)+\nu_p(n'))=\min(\nu_p(dm'),\nu_p(dn'))$$

   Enfin soit $(q,r)\in\mathbb{Q}^2$. Si $p=0$ ou $q=0$, l'inégalité $\nu_p(q+r)\geq\min(\nu_p(q),\nu_p(r))$ est trivialement vérifiée. Sinon, il existe $(a,b,c,d)\in(\mathbb{Z}^*)^4$ tel que $q=\dfrac{a}{b}$ et $r=\dfrac{c}{d}$. Alors $\nu_p(q+r)=\nu_p(ad+bc)-\nu_p(bd)$. D'après ce qui précède, $\nu_p(ad+bc)\geq\min(\nu_p(ad),\nu_p(bc))$ donc

   $$\nu_p(q+r)\geq\min(\nu_p(ad),\nu_p(bc))-\nu_p(bd)=\min(\nu_p(ad)-\nu_p(bd),\nu_p(bc)-\nu_p(bd))=\min(\nu_p(a)-\nu_p(b),\nu_p(c)-\nu_p(d))=\min(\nu_p(q),\nu_p(r))$$

   Puisque $p\geq 1$, on en déduit automatiquement que $|q+r|_p\leq\max(|q|_p,|q|_r)$.

4. On montre par récurrence que $\mathrm{N}(n)\leq 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ensuite, $\mathrm{N}(-n)=\mathrm{N}(-1)\mathrm{N}(n)=\mathrm{N}(n)$ donc $\mathrm{N}(n)\leq 1$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
   Notons $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si $\mathrm{N}(p)=1$ pour tout $p\in\mathbb{P}$, la décomposition en facteurs premiers montre alors que $\mathrm{N}(n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$. Mais alors pour $q=\dfrac{a}{b}$ avec $(a,b)\in(\mathbb{Z}^*)^2$, $\mathrm{N}(q)=\mathrm{N}(bq)=\mathrm{N}(a)=1$ donc N est triviale. Il existe donc $p\in\mathbb{P}$ tel que $\mathrm{N}(p)<1$.
   Soit $a\in\mathbb{Z}$ premier avec p. Alors il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $au+pv=1$. Par ultramétrie, $\max(\mathrm{N}(au),\mathrm{N}(pv))\geq\mathrm{N}(1)=1$. Mais puisque au et bv sont entiers, $\mathrm{N}(au)\leq 1$ et $\mathrm{N}(bv)\leq 1$. Ainsi $\max(\mathrm{N}(au),\mathrm{N}(pv))=1$. Mais $\mathrm{N}(pv)=\mathrm{N}(p)\mathrm{N}(v)<1$ car $\mathrm{N}(p)<1$ et $\mathrm{N}(v)\leq 1$ donc $\mathrm{N}(a)\mathrm{N}(u)=\mathrm{N}(au)=1$. A nouveau, $\mathrm{N}(a)\leq 1$ et $\mathrm{N}(u)\leq 1$ donc $\mathrm{N}(a)=\mathrm{N}(u)=1$. On a donc montré que $\mathrm{N}(a)=1$ pour tout entier a premier avec p.
   La décomposition en facteurs irréductibles nous apprend alors que $\mathrm{N}(n)=\mathrm{N}(p)^{\nu_p(n)}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Si $q=\dfrac{a}{b}$ avec $(a,b)\in(\mathbb{Z}^*)^2$, alors $\mathrm{N}(b)\mathrm{N}(q)=\mathrm{N}(bq)=\mathrm{N}(a)$ donc $\mathrm{N}(q)=\dfrac{\mathrm{N}(a)}{\mathrm{N}(b)}=\dfrac{\mathrm{N}(p)^{\nu_p(a)}}{\mathrm{N}(p)^{\nu_p(b)}}=\mathrm{N}(p)^{\nu_p(a)-\nu_p(b)}=\mathrm{N}(p)^{\nu_p(q)}$. Posons alors $\alpha=-\dfrac{\ln(\mathrm{N}(p))}{\ln(p)}$. On a bien $\alpha>0$ car $\mathrm{N}(p)<1$ et $p>1$. De plus, $\mathrm{N}(p)=\dfrac{1}{p^\alpha}$. D'après ce qui précède,

   $$\forall q\in\mathbb{Q},\ \mathrm{N}(q)=\mathrm{N}(p)^{\nu_p(a)}=p^{-\alpha\nu_p(q)}=|q|_p^\alpha$$

Solution 35

Première méthode : On fixe un entier a impair et on fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathrm{HR}(n):\ a^{2^{n-1}}\equiv 1\,[2^n]$$

Initialisation : Puisque a est impair, $a\equiv 1[2]$ et HR(1) est vraie. **Hérédité :** Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Alors $a^{2^{n-1}}-1$ est divisible par 2^n. De plus $a^{2^{n-1}}+1$ est pair car a est impair. Ainsi $a^{2^n}-1=(a^{2^{n-1}}-1)(a^{2^{n-1}}+1)$ est divisible par $2^n\times 2=2^{n+1}$ i.e. $a^{2^n}\equiv 1\left[2^{n+1}\right]$ de sorte que $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$. **Deuxième méthode :** On fixe $n\in\mathbb{N}^*$. Comme a est impair, $a\wedge 2^n=1$. D'après le petit théorème de Fermat, $a^{\varphi(2^n)}\equiv 1[2^n]$. Or $\varphi(2^n)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$ donc $a^{2^{n-1}}\equiv 1[2^n]$.

Solution 36

1. Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps
$$x^2 = x \iff x(x-1) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x = 1)$$

2. Comme $34 = 2 \times 17$ et $2 \wedge 17 = 1$, on peut considérer l'isomorphisme d'anneaux naturel φ de $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. Alors
$$x^2 = x \iff \varphi(x^2) = \varphi(x) \iff \varphi(x)^2 = \varphi(x)$$
En posant $\varphi(x) = (y, z)$, ceci équivaut à $y^2 = y$ et $z^2 = z$. D'après la question précédente, on a donc
$$x^2 = x \iff (y, z) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$
Il s'agit donc maintenant de trouver les antécédents de $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ par φ. Les solutions de $x^2 = x$ sont par conséquent 0, 18, 17 et 1.

> **Remarque.** On confond ici les entiers avec leurs classes modulo 34, ce qui est très mal.

> **Remarque.** Si on n'est pas à l'aise avec les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut raisonner en termes de congruence. Il s'agit en fait de résoudre $k^2 \equiv k[34]$ dans $\mathbb{Z}$. Cette équation équivaut à $34 \mid k^2 - k$ ou encore $2 \times 17 \mid k(k-1)$. Comme $2 \wedge 17 = 1$, ceci équivaut au système $\begin{cases} 2 \mid k(k-1) \\ 17 \mid k(k-1) \end{cases}$. Mais comme 2 et 17 sont premiers, ceci équivaut à
> $$\begin{cases} 2 \mid k \text{ ou } 2 \mid k-1 \\ 17 \mid k \text{ ou } 17 \mid k-1 \end{cases}$$
> ou encore à
> $$\begin{cases} 2 \mid k \\ 17 \mid k \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2 \mid k-1 \\ 17 \mid k \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2 \mid k \\ 17 \mid k-1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2 \mid k-1 \\ 17 \mid k-1 \end{cases}$$
> et finalement à
> $$\begin{cases} k \equiv 0[2] \\ k \equiv 0[17] \end{cases} \text{ou} \begin{cases} k \equiv 1[2] \\ k \equiv 0[17] \end{cases} \text{ou} \begin{cases} k \equiv 0[2] \\ k \equiv 1[17] \end{cases} \text{ou} \begin{cases} k \equiv 1[2] \\ k \equiv 1[17] \end{cases}$$
> Des solutions particulières de chacun de ces systèmes sont respectivement 0, 17, 18 et 1 donc, comme $2 \wedge 17 = 1$, on prouve classiquement que l'ensemble des solutions recherchées est $\{0, 1, 17, 18\} + 34\mathbb{Z}$.

Solution 37

1. On sait que $(\mathbb{F}_p, +, \times)$ est un corps et que $(\mathbb{F}_p^*, \times)$ est un groupe. Ainsi $(\mathcal{C}, \times)$ est également un groupe puisque c'est l'image de $\mathbb{F}_p^*$ par l'endomorphisme de groupe $x \mapsto x^2$.

2. On trouve $\mathcal{C} = \left\{\overline{1}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{5}, \overline{3}\right\}$.

3. D'après un résultat sur les polynômes interpolateurs de Lagrange :
$$P = \sum_{i=1}^{d} P(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$
Il existe donc des entiers $m_1, \dots, m_d$ tels que
$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i\right) P = \sum_{i=1}^{n} m_i P(a_i) \prod_{j \neq i} (X - a_j)$$
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i\right) P(n) = \sum_{i=1}^{n} m_i P(a_i) \prod_{j \neq i} (n - a_j)$$
Puisque p divise les $P(a_i)$, p divise le membre de droite. Les a_i étant distincts modulo p, aucun des facteurs $a_j - a_i$ n'est divisible par p. Comme p est premier, le lemme d'Euclide permet d'affirmer que p divise $P(n)$.

4. Soit $y \in \mathcal{C}$. Il existe donc $x \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $y = x^2$. Alors $y^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} = \overline{1}$ car $\mathbb{F}_p^*$ est un groupe multiplicatif d'ordre $p-1$.
Montrons ensuite que $\operatorname{card} \mathcal{C} = \dfrac{p-1}{2}$. Soit $(x, y) \in \left(\mathbb{F}_p^*\right)^2$. Alors $x^2 = y^2 \iff (x-y)(x+y) = 0 \iff x = \pm y$. De plus, y et $-y$ sont distincts car $p \neq 2$. Ainsi tout élément de $\mathbb{C}$ admet exactement deux antécédents par l'application $x \in \mathbb{F}_p^* \mapsto x^2$. Comme cette application est d'image $\mathcal{C}$ par définition, le lemme des bergers permet de conclure que $\operatorname{card} \mathbb{F}_p^* = 2 \operatorname{card} \mathcal{C}$ i.e. $\operatorname{card} \mathcal{C} = \dfrac{p-1}{2}$.
Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}} - 1$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{F}_p \setminus \mathcal{C}$ tel que $a^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$. Comme $\deg \mathrm{P} = \operatorname{card} \mathcal{C} = \dfrac{p-1}{2}$, la question précédente montrerait que $\mathrm{P}(n)$ est divisible par p pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui est évidemment absurde (prendre $n = 0$ par exemple).

Remarque. L'énoncé essaie de rester dans le cadre du programme et évite de parler de l'anneau des polynômes $\mathbb{F}_p[\mathrm{X}]$. Si l'on s'autorise ce petit écart du programme, les choses sont plus simples. On peut encore affirmer qu'un polynôme non nul de $\mathbb{F}_p[\mathrm{X}]$ possède au plus autant de racines que son degré. Le polynôme $\mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}} - 1$ possède donc au plus $\dfrac{p-1}{2}$ racines dans $\mathbb{F}_p$. Tous les éléments de $\mathcal{C}$ sont des racines de $\mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}} - 1$ et $\operatorname{card} \mathcal{C} = \dfrac{p-1}{2}$ donc $\mathcal{C}$ est exactement l'ensemble des racines de $\mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}}$.

Solution 38

Le polynôme $\mathrm{P} - 7$ admet les λ_i pour racines donc il est divisible par les $\mathrm{X} - \lambda_i$. Comme les λ_i sont distincts, les $\mathrm{X} - \lambda_i$ sont premiers entre eux deux à deux. On en déduit que $(\mathrm{X}-\lambda_1)(\mathrm{X}-\lambda_2)(\mathrm{X}-\lambda_3)(\mathrm{X}-\lambda_4)$ divise $\mathrm{P} - 7$. On montre classiquement que le quotient d'un polynôme à coefficients entiers par un polynôme unitaire à coefficients entiers est un polynôme à coefficients entiers. Il existe donc un polynôme Q à coefficients entiers tel que

$$\mathrm{P} = 7 + (\mathrm{X}-\lambda_1)(\mathrm{X}-\lambda_2)(\mathrm{X}-\lambda_3)(\mathrm{X}-\lambda_4)\mathrm{Q}$$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{P}(n) = 14$ alors

$$7 = (n-\lambda_1)(n-\lambda_2)(n-\lambda_3)(n-\lambda_4)\mathrm{Q}(n)$$

Comme $\mathrm{Q}(n)$ et les $n - \lambda_i$ sont entiers, les $n - \lambda_i$ seraient quatre diviseurs de 7 distincts deux à deux dont le produit divise 7. Or 7 possède pour diviseurs -1, 1, -7 et 7 mais le produit de ces quatre entiers ne divise évidemment pas 7.
Ainsi l'équation $\mathrm{P}(n) = 14$ ne possède pas de solution entière.

Intégrales impropres

Solution 39

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t$$

On raisonne par récurrence sur n. La propriété est vraie pour $n = 0$, car si f est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\, \mathrm{d}t$$

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. A fortiori, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ donc on peut écrire

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t$$

En intégrant par parties,

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t = -\left[\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, \mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, \mathrm{d}t$$

ce qui permet de conclure.

2. On peut déjà effectuer le changement de variable $t = u^2$ pour «simplifier» l'intégrale. L'intégrale de l'énoncé est alors de même nature que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$. L'intégrale converge en 0 puisque $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est prolongeable par continuité en 0. De plus, sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = -\left[\frac{\cos u}{u}\right]_\pi^{+\infty} - \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Le crochet converge puisque, cos étant bornée, $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{\cos u}{u} = 0$. La deuxième intégrale converge également puisque $\dfrac{\cos u}{u^2} \underset{u\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$. On peut alors en conclure que l'intégrale de Dirichlet converge et donc l'intégrale de l'énoncé également.

> **Remarque.** Le changement de variable initiale n'était pas nécessaire. On aurait pu directement remarque que $\dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, d'où l'intégrabilité en 0 et procéder à une intégration par parties en écrivant $\dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t} = \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}c \cdot \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

3. Posons $f : t \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1} (f(t) - f(n))\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $t \in [n, n+1]$

$$|f(t) - f(n)| \leq |t-n| \max_{[n,t]} |f'| \leq \max_{[n,n+1]} |f'|$$

Or $f'(t) = \dfrac{\cos(\sqrt{t})}{2t^{3/2}} - \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t^2}$ donc, pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2} \leq \frac{3}{2t^{3/2}} \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

Ainsi, pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$|f(t) - f(n)| \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)\right| \leq \int_n^{n+1} |f(t) - f(n)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq1} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge (absolument) par comparaison à une série de Riemann. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n\geq1} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq1} f(n)$ également.

Solution 40

Notons F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ s'annulant en 0. On a donc $\mathrm{F}' + \mathrm{F} = \varphi$. Par variation de la constante, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{F}(x) = e^{-x} \int_0^x e^t \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \lambda e^{-x}$$

Notons ℓ la limite de φ en $+\infty$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x \varphi(t) e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^x \ell e^t\,\mathrm{d}t + \int_0^x (\varphi(t) - \ell) e^t\,\mathrm{d}t = \ell(e^x - 1) + \int_0^x (\varphi(t) - \ell) e^t\,\mathrm{d}t$$

Puisque $(\varphi(t)-\ell)e^t \underset{t\to+\infty}{=} o(e^t)$, que $t \mapsto e^t$ est positive et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^t \, dt$ diverge, on a par intégration des relations de comparaison

$$\int_0^x (\varphi(t)-\ell)e^t \, dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t \, dt\right)$$

ou encore

$$\int_0^x (\varphi(t)-\ell)e^t \, dt \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$$

Ainsi

$$\int_0^x \varphi(t)e^t \, dt \underset{x\to+\infty}{=} \ell e^x + o(e^x)$$

puis

$$\mathrm{F}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ell + o(1)$$

Ainsi F admet également pour limite ℓ en $+\infty$. Puisque $f = \varphi - \mathrm{F}$, f admet pour limite 0 en $+\infty$.

Solution 41

---

1. Posons $g = f' + af$ de sorte que f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$. Par variation de la constante, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = e^{-ax}\int_0^x e^{at}g(t) \, dt + \lambda e^{-ax}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $g \underset{+\infty}{=} o(1)$,

$$\int_0^x e^{at}g(t) \, dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x |e^{at}| \, dt\right)$$

Or pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x |e^{at}| \, dt = \int_0^x e^{\mathrm{Re}(a)t} \, dt = \frac{1}{\mathrm{Re}(a)}\left(e^{\mathrm{Re}(a)x} - 1\right)$$

On en déduit que

$$\int_0^x e^{at}g(t) \, dt \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\mathrm{Re}(a)x})$$

puis finalement que

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-ax}\int_0^x e^{at}g(t) \, dt = 0$$

Par ailleurs, il est clair que $\lim_{x\to+\infty} e^{-ax} = 0$ puisque $\mathrm{Re}(a) < 0$. Finalement, on a bien $\lim_{+\infty} f = 0$.

> **Remarque.** On peut aussi introduire la fonction $\varphi : x \mapsto e^{ax}f(x)$. On a alors $\varphi'(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{ax})$. Ainsi
>
> $$\varphi(x) - \varphi(0) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x |e^{at}| \, dt\right)$$
>
> On en déduit sans peine que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} e^{\mathrm{Re}(a)x}$ i.e. $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} e^{ax}$ puis $\lim_{+\infty} f = 0$.

2. Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $g = f' - jf$. Alors $g' - \overline{j}g = f'' + f' + f$ admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $\mathrm{Re}(\overline{j}) < 0$, la première question montre que g admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $g = f' - jf$ et $\mathrm{Re}(j) < 0$, la première question montre à nouveau que f admet une limite nulle en $+\infty$.

3. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ dont les racines sont toutes de parties réelles strictement négatives et D l'opérateur de dérivation. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n = \deg P$) telle que $\lim_{+\infty} P(D)(f) = 0$, alors $\lim_{+\infty} f = 0$. Il suffit de raisonner par récurrence sur le degré n de P.

Si $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$ dont les racines sont de parties réelles strictement négatives et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{+\infty} P(D)(f) = 0$. Soit a une racine de P. On peut donc écrire $P = (X - a)Q$ avec $\deg Q = n$. Posons $g = Q(a)(f)$. Alors $g' - ag = P(D)(f)$ admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $\mathrm{Re}(a) < 0$, la première question montre que $\lim_{+\infty} g = 0$. Or $g = Q(D)(f)$ et $\deg Q = n$ donc, par hypothèse de récurrence, $\lim_{+\infty} f = 0$. Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 42

---

1. D'après la théorème fondamental de l'analyse, $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = g(x)$$

donc $\lim_{x\to 0} g(x) = F'(0) = f(0)$.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |F(x)| = \left|\int_0^x 1 \cdot f(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x f(t)^2\,dt} \leq \sqrt{x}\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt}$$

En posant $C = \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |g(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{x}}$$

donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties,

$$\int_0^x g(t)^2\,dt = \int_0^x \frac{1}{t^2}F(t)^2\,dt = -\left[\frac{F(t)^2}{t}\right]_0^x + 2\int_0^x \frac{F(t)F'(t)}{t}\,dt$$

L'intégration par parties est légitime car, par continuité de F en 0,

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)^2}{t} = \lim_{t\to 0} g(t)F(t) = g(0)F(0) = 0$$

Ainsi

$$\int_0^x g(t)^2\,dt = -\frac{F(x)^2}{x} + 2\int_0^x g(t)f(t)\,dt \leq 2\int_0^x g(t)f(t)\,dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^x g(t)^2\,dt \leq 2\sqrt{\int_0^x g(t)^2\,dt}\sqrt{\int_0^x f(t)^2\,dt} \leq 2C\sqrt{\int_0^x g(t)^2\,dt}$$

puis

$$\int_0^x g(t)^2\,dt \leq 4C^2$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x g(t)^2\,dt$ est croissante (intégrande positive) et majorée donc admet une limite en $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)^2\,dt$ converge donc i.e. g est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Solution 43

1. Soit $x \in \mathrm{I}$. $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et $\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. L'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge donc et f est définie sur I.

2. On peut remarquer que
$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$
donc f est dérivable sur I d'après le théorème fondamental de l'analyse et
$$\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

3. On sait que $\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc
$$f(x) - f(1) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x)$$
Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+} -\ln(x) = +\infty$,
$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$$
Par intégration par parties
$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Comme $\dfrac{e^{-t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^{-t}}{t}\right)$ et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge,
$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$
Ainsi
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$$

4. Tout d'abord, f est continue sur I. De plus, $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc $f(x) \underset{x\to0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Enfin, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées. Ainsi f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Par intégration par parties,
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t)\,\mathrm{d}t$$
Cette intégration par parties est légitime car
$$tf(t) \underset{t\to0^+}{\sim} -t\ln t \qquad \text{et} \qquad tf(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$$
de sorte que
$$\lim_{t\to0^+} tf(t) = \lim_{t\to+\infty} tf(t) = 0$$
Ainsi
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tf'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Solution 44

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge puisque $\displaystyle\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Alors, en posant

$$\mathrm{G}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{G}(x) = 0$. Par conséquent,

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(7x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarquons que

$$\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t\to0^+}{=} \frac{1}{t} + \mathcal{O}(1)$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ converge. Notons C sa valeur. Alors en posant pour $x > 0$

$$\mathrm{H}(x) = \int_x^1 \left(\frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

on a $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \mathrm{H}(x) = \mathrm{C}$. Par conséquent,

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{H}(7x) - \mathrm{H}(x) + \int_x^{7x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{H}(7x) - \mathrm{H}(x) + \ln(7) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \mathrm{C} - \mathrm{C} + \ln(7) = \ln(7)$$

Solution 45

1. Posons $f(x,t) = \dfrac{\ln t}{x^2+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Si $x \neq 0$, $f(x,t) \underset{t\to0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$ et $f(x,t) \underset{t\to0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ par croissance comparées donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin, $\dfrac{1}{t} \underset{t\to0^+}{=} o\left(\dfrac{\ln t}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto f(0,t)$ n'est pas intégrable au voisinage de 0^+.
Le domaine de définition de F est donc $\mathbb{R}^*$.

2. Effectuons le changement de variable $u = 1/t$:

$$\mathrm{F}(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = -\mathrm{F}(1)$$

Ainsi $\mathrm{F}(1) = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Effectuons le changement de variable $t = ux$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2+(ux)^2} \cdot x\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)+\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x}\left(\ln(x)\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{\pi\ln x}{2} + \mathrm{F}(1)\right) \\
&= \frac{\pi\ln x}{2x}
\end{aligned}$$

Comme F est clairement paire, $F(x) = \dfrac{\pi \ln|x|}{2|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Solution 46

---

1. Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(at)}{t} \, \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de variable $u = at$ dans la première intégrale

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \int_a^{ax} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

Enfin, d'après la relation de Chasles,

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t - \int_1^a \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

2. Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme f est continue, elle admet un minimum m_x et un maximum M_x sur le segment $[x, ax]$. Alors

$$m_x \int_x^{ax} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t \leq \mathrm{M}_x \int_x^{ax} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

ou encore

$$m_x \ln(a) \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t \leq \mathrm{M}_x \ln(a)$$

Si $a > 1$,

$$m_x \leq \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t \leq \mathrm{M}_x$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c_x \in [x, a_x]$ tel que

$$f(c_x) = \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

ou encore

$$\int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t = f(c_x) \ln(a)$$

Ceci est encore valable si $a = 1$ (prendre $c_x = x$ par exemple). Comme $c_x \geq x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(c_x) = \ell$ de sorte que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \ell \ln(a)$$

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$ converge et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \ell \ln(a) - \int_1^a \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

Solution 47

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto f(t)e^{-t/n}$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc u_n est défini. Cette application est également continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(t)e^{-t/n} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ de sorte que v_n est défini.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque l'intégrale définissant v_n converge, on peut écrire que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)e^{-t/n} \, \mathrm{d}t$$

Mais en effectuant un changement de variable dans chaque intégrale, on obtient

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} f(t + k\pi)e^{-(t+k\pi)/n} \, \mathrm{d}t$$

Par π-périodicité de f, on en déduit que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} \int_0^{\pi} f(t)e^{-t/n} \, \mathrm{d}t = u_n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = u_n a_n$$

avec

$$a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = \frac{1}{1 - e^{-\pi/n}}$$

3. Il s'agit jute d'un équivalent classique, à savoir $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$. On en déduit immédiatement que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\pi}$.

4. Remarquons tout d'abord que comme $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t) \, \mathrm{d}t = 0$,

$$u_n = \int_0^{\pi} f(t)(e^{-t/n} - 1) \, \mathrm{d}t$$

On remarque que $e^{-t/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{t}{n}$, ce qui permet de conjecturer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\pi} tf(t) \, \mathrm{d}t$ (ce qui précède n'est en aucun cas une preuve). On en déduirait alors la limite de (v_n). On propose alors deux méthodes.

Avec le théorème de convergence dominée. Posons $f_n : t \mapsto (e^{-t/n} - 1)f(t)$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq |f|$ sur $[0, \pi]$ et $|f|$ est évidemment intégrable sur $[0, \pi]$. D'après le théorème de convergence dominée, (u_n) converge vers 0.

On remarque ensuite que la suite de fonctions (nf_n) converge simplement vers la fonction $t \mapsto -f(t)$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in [0, \pi], \ |nf_n(t)| = n(1 - e^{-t/n})|f(t)| \leq t|f(t)|$$

en utilisant la convexité de exp. La fonction $t \mapsto t|f(t)|$ est à nouveau intégrable sur le segment $[0, \pi]$ donc, par convergence dominée, (nu_n) converge vers $-\displaystyle\int_0^{\pi} tf(t) \, \mathrm{d}t$. Puisque $v_n = a_n u_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\pi}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} tf(t) \, \mathrm{d}t$.

Sans le théorème de convergence dominée. Remarquons que f est continue donc bornée sur le segment $[0, \pi]$ (elle est même bornée sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est π-périodique). En notant M un majorant de $|f|$ sur $[0, \pi]$,

$$|u_n| \leq \mathrm{K} \int_0^{\pi} (1 - e^{-t/n}) \, \mathrm{d}t = \mathrm{K}\left(\pi + n(e^{-\pi/n} - 1)\right)$$

Or via le même équivalent usuel que précédemment,

$$\lim_{n\to+\infty} n(e^{-\pi/n} - 1) = -\pi$$

de sorte que (u_n) converge bien vers 0.

On constate que

$$u_n + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} tf(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(t)\left(e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n}\right) \mathrm{d}t$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$\left|e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n}\right| \leq \frac{t^2}{2n^2}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient donc

$$\left|u_n + \frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\mathrm{K}}{2n^2}\int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{K}\pi^3}{6n^2}$$

En particulier,

$$u_n + \frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

A fortiori

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Via l'équivalent de (a_n) précédemment trouvé, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Solution 48

De manière plus générale, posons $\mathrm{J}_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln(t)^p\,\mathrm{d}t$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. $\mathrm{J}_{n,0}$ est clairement définie et, pour $p > 0$, $t^n \ln(t)^p \underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc $t \mapsto t^n \ln(t)^p$ est intégrable sur $]0,1]$. $\mathrm{J}_{n,p}$ est donc également définie pour $p > 0$.
Par intégration par parties, lorsque $p > 0$,

$$\int_0^1 t^n \ln(t)^p\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)^p\right]_0^1 - \frac{p}{n+1}\int_0^1 t^n \ln(t)^{p-1}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime car la seconde intégrale, à savoir $\mathrm{J}_{n,p-1}$ converge. De plus, le crochet est nul par croissances comparées. Ainsi

$$\mathrm{J}_{n,p} = -\frac{p}{n+1}\mathrm{J}_{n,p-1}$$

Par une récurrence facile

$$\mathrm{J}_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p}\mathrm{J}_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

En particulier,

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Solution 49

Supposons f intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par décroissance de f,

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} f(x)\,\mathrm{d}t = xf(x)$$

et

$$\int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{x/2}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{xf(x)}{2}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leq xf(x) \leq 2\int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge donc $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{2x} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ de sorte que $\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} f(t)\,dt = 0$. Pour les mêmes raisons, $\lim_{x\to 0}\int_{x/2}^x f(t)\,dt = 0$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ par encadrement.

La réciproque est fausse. On peut par exemple considérer $f(x) = \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$. f est bien décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ mais f n'est pas intégrable en $+\infty$ puisque f admet pour primitive $x \mapsto \ln(\ln(x+2))$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln(\ln(x+2)) = +\infty$.

Convexité

Solution 50

---

1. Posons $z = (\varphi_1 - \varphi_2)^2$. On a successivement
$$z' = 2(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2)'$$
puis
$$z'' = 2\left[(\varphi_1 - \varphi_2)'\right]^2 + 2(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2)'' = 2\left[(\varphi_1 - \varphi_2)'\right]^2 + f(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \geq 0$$
2. On en déduit que z est convexe. Puisque $\varphi_1(a) = \varphi_2(b) = 0$, $\varphi \leq 0$ sur $[a,b]$. De plus, $z = (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \geq 0$ sur $[a,b]$. On en déduit que $z = 0$ sur $[a,b]$ i.e. $\varphi_1 = \varphi_2$.

Solution 51

Par une première intégration par parties
$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,dt = [f(t)\sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt = -\int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt$$
Par une seconde intégration par parties
$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,dt = [f'(t)\cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(t)\cos t\,dt = f'(2\pi) - f'(0) - \int_0^{2\pi} f''(t)\cos t\,dt$$
Enfin,
$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f''(t)\,dt - \int_0^{2\pi} f''(t)\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} f''(t)(1-\cos t)\,dt$$
Puisque f est convexe sur $[0,2\pi]$, $f''(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,2\pi]$. De plus, $1 - \cos t \geq 0$ pour tout $t \in [0,2\pi]$. Finalement
$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,dt \geq 0$$

Solution 52

La courbe de f étant située au-dessus de ses cordes, on obtient en comparant l'aire d'un trapèze à une intégrale
$$\forall x \in [0,1],\ x\frac{f(x)+f(0)}{2} \leq \int_0^x f(t)\,dt$$

> **Remarque.** Si l'examinateur n'est pas convaincu par cet argument géométrique, on peut affirmer qu'un paramétrage de la corde passant par les points de la courbe d'abscisses 0 et x est
> $$t \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x-0}t + f(0)$$
> Ainsi
> $$\forall t \in [0,x],\ \frac{f(x)-f(0)}{x}t + f(0) \leq f(t)$$

et donc

$$\int_0^x \left(\frac{f(x)-f(0)}{x}t+f(0)\right) \mathrm{d}t \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne le résultat escompté.

Puisque $f(0)=1$, on a donc

$$\forall x\in[0,1],\ x\frac{f(x)+1}{2} \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose alors $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant sur $[0,1]$,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4} \leq \int_0^1 \mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 \mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(1)-\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$$

En reprenant le résultat précédent, on a donc

$$\frac{3}{2}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4} \leq \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore

$$3\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}$$

Par ailleurs,

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

donc

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \geq \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{4}$$

En reprenant la dernière inégalité, on obtient bien

$$3\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq 2\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

ou encore

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Solution 53

---

1. L'inégalité $\mathrm{H}(p)\geq 0$ est claire car pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $p_i\geq 0$ et $\ln(p_i)\geq 0$ car tous les p_i sont inférieurs à 1. Remarquons que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle y est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\ln'' :\ x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ y estpositive.

   Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^n p_i=1$

$$\sum_{i=1}^n p_i\ln\left(\frac{1}{p_i}\right) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}\cdot p_i\right)$$

   ou encore

$$\mathrm{H}(p)\leq\ln(n)$$

2. Toujours par concavité de ln,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{q_i}{p_i}\right) = \ln(1) = 0$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Solution 54

---

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp''(x) = \exp(x) > 0$ donc exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. L'inégalité est clairement vraie lorsque l'un des x_i est nul. SUpposons donc tous les x_i strictement psoitifs. Par concavité de ln,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Puis par croissance de l'exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ou encore

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3. Comme S est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top SX \geq 0$. Soit λ une valeur propre (nécessairement réelle) de S et X un vecteur propre associé. Alors $X^\top SX = \lambda X^\top X = \lambda\|X\|^2 \geq 0$. Comme X n'est pas nul, $\|X\|^2 > 0$ donc $\lambda \geq 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$.
Récirpoquement, supposons $\mathrm{Sp}(S) \in \mathbb{R}_+$. On sait qu'il existe P orthogonale telle que $S = PDP^\top$ où D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$X^\top SX = (P^\top X)^\top D(P^\top X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i^2 \geq 0$$

en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D et $Y = P^\top X$.

4. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S. D'après la deuxième question,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ce qui signifie $(\det(S))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\mathrm{tr}(S)$.

5. Remarquons que $M^\top M$ est une matrice symétrique. De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top(M^\top M)X = \|MX\|^2 \geq 0$ donc $\mathrm{Sp}(M^\top M) \subset \mathbb{R}_+$ d'après la troisième question. D'après la question précédente,

$$\det(M^\top M)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\mathrm{tr}(M^\top M)$$

On conclut en remarquant que $\det(M^\top M) = \det(M^\top)\det(M) = \det(M)^2$.

Solution 55

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\{f(x_1)+f(x_2),\ x_1+x_2 = x\}$ est non vide et minorée par 0. On peut donc poser $h(x) = \inf\{f(x_1)+f(x_2),\ x_1+x_2 = x\}$.
Soit $(x, y) \in E_h$. On a donc $y > h(x)$. Mais par définition de h, il existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1+x_2 = x$ et $y > f(x_1)+f(x_2) \geq h(x)$. Soit $\varepsilon = y - f(x_1) - f(x_2)$ et posons alors $y_1 = f(x_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ et $y_2 = f(x_2) + \frac{\varepsilon}{2}$. On a bien $(x_1, y_1) \in E_f$ et $(x_2, y_2) \in E_g$. Ainsi

$(x,y)=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\in E_f+E_g$.
Soit $(x,y)\in E_f+E_g$. Il existe donc $(x_1,y_1)\in E_f$ et $(x_2,y_2)\in E_g$ tel que $(x,y)=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$. On a alors $y=y_1+y_2>f(x_1)+f(x_2)\geq h(x)$ puisque $x=x_1+x_2$. Ainsi $(x,y)\in E_h$.
Par double inclusion, $E_h=E_f+E_g$.
L'unicité vient du fait que h est uniquement définie par E_h. En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\inf\{y,\ (x,y)\in E_f\}$.

2. On prouve classiquement que $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ est convexe si et seulement si E_φ est convexe. On prouve de même que si A et B sont deux parties convexes de $\mathbb{R}^2$, alors A + B est convexe.
Ainsi, si f et g sont convexes, E_f et E_g le sont et, par conséquent, $E_h=E_f+E_g$ est également convexe. Finalement, h est convexe.

3. Prenons $f=g=1+\sin$. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}h(x)&=\inf\{2+\sin(x_1)+\sin(x_2),\ x_1+x_2\in\mathbb{R}\}\\&=2+\inf_{y\in\mathbb{R}}\left(\sin\left(\frac{x}{2}+y\right)+\sin\left(\frac{x}{2}-y\right)\right)\\&=2+2\inf_{y\in\mathbb{R}}\left(\sin\frac{x}{2}\cos y\right)\\&=2-2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\end{aligned}$$

f et g sont bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ tandis que h ne l'est pas.

Suites et séries de fonctions

Solution 56

1. Soit $x\in\pi\mathbb{Z}$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=0$.
Soit maintenant $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Alors $|\cos x|<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\cos^n x=0$ puis $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.
Finalement la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2. Posons $x_n=\frac{1}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
D'une part, $n\sin(x_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$. D'autre part, $\cos^n(x_n)=e^{n\ln(\cos(1/n))}$ et

$$\ln(\cos(1/n))\underset{n\to+\infty}{=}\ln(1+o(1/n))=\underset{n\to+\infty}{=}o(1/n))$$

de sorte que $\cos^n(x_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$.
Finalement, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n)=1\neq 0$ donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément.
Soit maintenant $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Alors pour tout $x\in\left[a,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$|f_n(x)|\leq n\cos^n(a)\sin(a)$$

donc

$$|f_n|_\infty\leq n\cos^n(a)\sin(a)$$

(c'est même une égalité) donc $\lim_{n\to+\infty}|f_n|=0$ puisque $0\leq\cos a<1$. Ainsi (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[a,\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Méthode n°1
Remarquons tout d'abord que f_n est positive et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{n}{n+1}\left[\cos^{n+1}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{n}{n+1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est continue en 0, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|g(x) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in [0, \alpha]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t)-g(0)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)|g(t)-g(0)|\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t)-g(0)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)\varepsilon\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g-g(0)\|_\infty\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\varepsilon\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g-g(0)\|_\infty\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} + \|g-g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g-g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $\|g-g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$. On en déduit que pour $n \geq N$,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t = 0$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t = \frac{ng(0)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(0)$$

Méthode n°2
L'application $t \mapsto \cos^{n+1} t$ est bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ donc, par changement de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\int_0^1 f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))\,\mathrm{d}u$$

La fonction $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction constante égale à $f(0)$ car f est continue en 0. De plus, g est bornée $[0, 1]$ (continue sur un segment) donc $u \mapsto g(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ est dominée par une constante (clairement intégrable sur le segment $[0, 1]$). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g(\sqrt[n+1]{u})\,\mathrm{d}u = \int_0^1 g(0)\,\mathrm{d}u = g(0)$$

On en conclut immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(0)$$

Solution 57

1. On remarque tout d'abord que les f_n sont définies sur $]-1,+\infty[$. On calcule un développement limité de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x)-f_n(x) &= \frac{1}{n+1+x} - 2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{n+1+x} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \left(-\frac{1}{4}-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, on en déduit que $\sum_{n\geq1} f_{n+1}-f_n$ converge simplement sur $]-1,+\infty[$.

2. La convergence simple de la série $\sum_{n\geq1} f_{n+1}-f_n$ équivaut à la convergence simple de la suite (f_n) vers une fonction f. Notons f sa limite et posons $g_n = f_{n+1}-f_n$. g_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x\in]-1,+\infty[$:

$$g_n'(x) = -\frac{1}{2(n+1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

De plus, pour $x\in]-1,+\infty[$

$$|g_n'(x)| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

ce qui prouve que $\sum_{n\geq1} g_n'$ converge normalement. Comme $\sum_{n\geq1} g_n$ converge simplement vers une fonction g, on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$. De plus, en utilisant un télescopage, $g = f - f_1$. Comme f_1 est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Comme $\sum_{n\geq1} g_n$ converge normalement, cette série converge uniformément. Par conséquent, la suite (f_n) converge uniformément. Par conséquent :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, par une intégration facile :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \left(2\sum_{k=1}^n \sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) - 2\sqrt{n} \\ &= 2\sqrt{n+1}-2-2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - 2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -2$.

Solution 58

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{-nx}$ et $\sum e^{-nx}$ est une série à termes positifs convergente (série géométrique de raison $e^{-x} \in [0,1[$). Ainsi la série $\sum \dfrac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ converge. f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais f est manifestement impaire donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On utilise ensuite une comparaison à une intégrale. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh}(xt)}$ est décroissante de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}(xt)} \leq f(x) \leq \frac{1}{\operatorname{sh} x} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}(xt)}$$

Une primitive de $\dfrac{1}{\operatorname{sh}}$ étant $t \mapsto \ln(\operatorname{th}(x/2))$, on trouve

$$-\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq f(x) \leq \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

On montre aisément que $\ln\left(\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln x$ et on sait que $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x} \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to0^+}{=} o\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$, on en déduit que

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$$

Comme f est impaire, on peut affirmer que

$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{\ln|x|}{x}$$

> **Remarque.** On peut également remarquer que pour $x \in]0,1]$, par le changement de variable $u = xt$,
>
> $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}(xt)} = \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{sh} u} = \frac{1}{x}\int_x^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{sh} u} + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{sh} u}$$
>
> Mais $\dfrac{1}{\operatorname{sh} u} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u}$, $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u}$ diverge, donc
>
> $$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{sh} u} \underset{x\to0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln x$$
>
> On en déduit donc que
>
> $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}(xt)} \underset{x\to0^+}{=} -\frac{\ln x}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$
>
> et on peut alors à nouveau conclure que $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\dfrac{\ln x}{x}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4e^{-2nx}$ et $\sum e^{-2nx}$ est une série à termes positifs convergente (série géométrique de raison $e^{-2x} \in [0,1[$). Ainsi la série $\sum \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ converge. g est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais g est manifestement impaire donc g est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Posons ensuite $u_n(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_0 u_n = \dfrac{1}{n^2}$. De plus, sh est convexe sur $\mathbb{R}_+$ donc $\operatorname{sh} x \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et donc $\dfrac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)} \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et même pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (parité). On en déduit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^*$. On peut alors utiliser le théorème d'interversion limite/série

$$\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ou encore $\lim_{x\to 0} x^2 g(x) = \pi^2/6$. Par conséquent,

$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$$

Solution 59

---

1. On raisonne par récurrence. Tout d'abord, g_0 est bornée. Si on suppose g_n bornée pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\forall x \in [0,1],\ |g_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |g_n(1-t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x \|g_n\|_\infty\ \mathrm{d}t = x\|g_n\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty$$

Notamment, g_{n+1} est bornée. On a donc montré par récurrence que g_n est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En fait, on a montré plus précisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $|g_{n+1}(x)| \leq x\|g_n\|_\infty$. Ainsi pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|g_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |g_n(1-t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x (1-t)\|g_{n-1}\|_\infty\ \mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)\|g_{n-1}\|_\infty\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$$

Par conséquent, $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$.

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g_{2n}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}\|g_0\|_\infty$ et $\|g_{2n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}\|g_1\|_\infty$. On vérifie alors qu'en prenant $\mathrm{K} = \max(\|g_0\|_\infty, \sqrt{2}\|g_1\|_\infty)$, on a $\|g_n\|_\infty \leq \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{2}^n}$.

> **Remarque.** On calcule aisément $\|g_0\|_\infty = \|g_1\|_\infty = 1$ de sorte que $\mathrm{K} = \sqrt{2}$.

Comme la série $\sum \frac{1}{\sqrt{2}^n}$ est une série géométrique convergente, il en est de même de la série $\sum \|g_n\|_\infty$. Par conséquent, la série $\sum g_n$ converge normalement sur $[0,1]$ et donc simplement. La fonction G est bien définie sur $[0,1]$.
Tout d'abord, g_0 est dérivable de dérivée nulle. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est également dérivable d'après le théorème fondamental de l'analyse et $g_n'(x) = g_{n-1}(1-x)$. La série $\sum g_n'$ converge donc normalement et donc uniformément. On en déduit que G est dérivable et que

$$\forall x \in [0,1],\ \mathrm{G}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_{n-1}(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(1-x) = \mathrm{G}(1-x)$$

Cette égalité montre à nouveau que G′ est dérivable et que

$$\forall x \in [0,1],\ \mathrm{G}''(x) = -\mathrm{G}'(1-x) = -\mathrm{G}(x)$$

3. Il existe donc $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{G} = \alpha\cos + \beta\sin$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(0) = 0$ donc $\mathrm{G}(0) = g_0(0) = 1$. De plus, $\mathrm{G}'(1) = \mathrm{G}(0) = 1$. On en déduit que $\alpha = 1$ et $-\alpha\sin(1) + \beta\cos(1) = 1$ puis que $\beta = \frac{1+\sin(1)}{\cos(1)}$.

Solution 60

---

1. Supposons qu'il existe une telle suite. Notamment

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 2$$

On en déduit notamment que $a_n^2 \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^4 = 4$$

de sorte que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n^2 - a_n^4 = 0$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2(2 - a_n^2) = 0$$

Notre remarque initiale montre qu'il s'agit d'une somme de termes positifs. Par conséquent, $a_n = 0$ ou $a_n^2 = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 2$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p^2 = 2$ et $a_n = 0$ pour tout entier naturel $n \neq p$. Mais alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^6 = a_p^6 = 2^3 = 8 \neq 6$$

On a donc montré par l'absurde qu'il n'existe pas de suite vérifiant la condition de l'énoncé.

2. Supposons qu'il existe une telle suite (a_n). Alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 1$$

Puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = \frac{1}{4}$$

on a $a_n^2 \leq \frac{1}{4}$ i.e. $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Posons $\varphi_n(k) = k^2 a_n^k$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq 2$

$$|\varphi_n(k)| = k^2 |a_n|^{k-2} |a_n|^2 \leq \frac{k^2}{2^{k-2}} a_n^2$$

La suite $(k^2/2^{k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc est bornée. On en déduit qu'il existe M tel que pour tout $^n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq 2$

$$|\varphi_n(k)| \leq \mathrm{M} a_n^2$$

Comme la série $\sum_{a_n^2}$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to+\infty} \varphi_n(k) = 0$ par la majoration précédente. Par le théorème de la double limite,

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 0$$

ce qui contredit le fait que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 1$$

Solution 61

---

1. Posons $f_n : t \mapsto \ln(1 + e^{nt})$. Si $t \in \mathbb{R}_+$, alors la suite $(f_n(t))$ ne converge pas vers 0 donc la série $\sum f_n(t)$ diverge. Si $t \in \mathbb{R}_-^*$, alors $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nt}$ et la série $\sum e^{-nt}$ est une série géométrique à termes positifs convergente (de raison $e^{-t} \in]0,1[$). Par conséquent, la série $\sum f_n(t)$ converge.
Finalement, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

2. On sait que $0 \leq \ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{nt}$$

Fixons $a \in \mathbb{R}_-^*$. Alors pour tout $t \in]-\infty, a]$,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{nt} \leq e^{na}$$

et donc $\|f_n\|_\infty \leq e^{na}$ où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme uniforme sur $]-\infty, a]$. A nouveau, la série géométrique $\sum e^{na}$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $]-\infty, a]$. A fortiori, elle converge uniformément sur $]-\infty, a]$. Par ailleurs, f_n admet pour limite 0 en $-\infty$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\ln 2$ si $n = 0$. Le théorème d'interversion limite/série permet alors d'affirmer que

$$\lim_{-\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{-\infty} f_n = \ln 2$$

3. En étudiant la fonction $u \mapsto \ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}$, on prouve que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+u) \geq u - \frac{u^2}{2}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*,\ f_n(t) \geq e^{nt} - \frac{1}{2}e^{2nt}$$

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*,\ f(t) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{nt} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{2nt} = \frac{1}{1-e^t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{2t}} = \frac{1+2e^t}{2(1-e^{2t})}$$

Puisque $\lim_{t\to 0^-} \frac{1+2e^t}{2(1-e^{2t})} = +\infty$, $\lim_{0^-} f = +\infty$.

Solution 62

---

1. Soit $t \in]0,1[$. Puisque $-t^b \in]-1,0[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-t^b)^n = \frac{1}{1+t^b}$. On en déduit que

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

avec $u_n(t) = (-1)^n t^{a-1+nb}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $a - 1 + nb > -1$, $|u_n|$ est intégrable sur $]0,1]$ et

$$\int_0^1 |u_n|(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{a-1+nb} = \frac{1}{a+nb}$$

La série $\sum \frac{1}{a+nb}$ diverge. On ne peut donc pas apppliquer le théorème d'intégration terme à terme.

3. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{S_N}(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n t^{a-1+nb}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{a-1}\cdot\frac{1-(-1)^{\mathrm{N}+1}t^{(\mathrm{N}+1)b}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t \qquad \text{(somme des termes d'une suite géométrique)} \\
&= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t - (-1)^{\mathrm{N}+1}\int_0^1 \frac{t^{a-1+(\mathrm{N}+1)b}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{a-1+(\mathrm{N}+1)b}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{a-1+(\mathrm{N}+1)b}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{a+(\mathrm{N}+1)b}$$

Ainsi, par théorème des gendarmes

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(\mathrm{N}+1)b}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t = 0$$

de sorte que

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$$

4. On déduit de la question précédente que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}$$

5. D'après la question précédente, en prenant $a=1$ et $b=3$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$$

On décompose $\frac{1}{1+X^3}$ en éléments simples. Il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$F = \frac{1}{1+X^3} = \frac{1}{X+1}X^2 - X + 1 = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$

On trouve $a=((X+1)F)(-1)=\frac{1}{3}$. De plus $\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0 = a+b$ donc $b=-\frac{1}{3}$. Enfin, $F(0)=1=a+c$ donc $c=\frac{2}{3}$. On peut réécrire sous la forme

$$F(X) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{X+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{X-2}{X^2-X+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{X+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{X^2-X+1}$$

On calcule successivement

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+1} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$$

$$\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt = \left[\ln(t^2-t+1)\right]_0^1 = 0$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Solution 63

---

1. Remarquons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'_{n+1}=f_n$. On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ est que $f_n^{(k)}=f_{n-k}$. Remarquons également que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}(a)=0$ i.e. pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(a)=0$.
Fixons $x\in[a,b]$ et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f_n entre a et x.

$$\left|f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \le \max_{[a,x]}|f_n^{(n)}|\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Or pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$,

$$f_n^{(k)}(a) = f_{n-k}(a) = 0$$

et $f_n^{(n)}=f$ donc

$$|f_n(x)| \le \max_{[a,x]}|f|\frac{(x-a)^n}{n!} \le \|f\|_\infty\frac{(b-a)^n}{n!}$$

Par conséquent

$$\|f_n\|_\infty \le \|f\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!}$$

Comme la série exponentielle $\sum \frac{(b-a)^n}{n!}$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

2. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement vers $\mathrm{F}-f$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$, c'est-à-dire la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_{n-1}$ converge normalement sur $[a,b]$. On en déduit que $\mathrm{F}-f_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que

$$(\mathrm{F}-f)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \mathrm{F}$$

La fonction $\varphi :\ x\mapsto e^{-x}(\mathrm{F}(x)-f(x))$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$\varphi'(x) = -e^{-x}(\mathrm{F}(x)-f(x)) + e^{-x}(\mathrm{F}-f)'(x) = -e^{-x}(\mathrm{F}(x)-f(x)) + e^{-x}\mathrm{F}(x) = e^{-x}f(x)$$

Ainsi φ est une primitive de $x\mapsto e^{-x}f(x)$ sur $[a,b]$. Par ailleurs

$$\varphi(a) = e^{-a}(\mathrm{F}(a)-f(a)) = 0$$

car $f_n(a)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\forall x\in[a,b],\ \varphi(x) = \int_a^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\forall x\in[a,b],\ \mathrm{F}(x) = f(x) + e^x\int_a^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Solution 64

---

1. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Via des développements limités usuels :

$$x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n(x)$ converge. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ u_n'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}$$

On montre classiquement que

$$\frac{1}{n+1} \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$$

donc

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \le u_n'(x) \le \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

ou encore

$$\frac{x-1}{(n+1)(n+x)} \le u_n'(x) \le \frac{x}{n(n+x)}$$

Ainsi

$$|u_n'(x)| \le \frac{x+1}{n^2}$$

Soit $a\in\mathbb{R}_+$.

$$\forall x\in[0,a],\ |u_n'(x)| \le \frac{a+1}{n^2}$$

La série $\sum u_n'$ converge donc normalement sur $[0,a]$. Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ et, par suite, sur $\mathbb{R}_+$.

3. On a clairement $u_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit immédiatement que $f(1) = 0$.
Les u_n' sont clairement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g' l'est également. Par ailleurs, $f'(x) = g'(x) - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions croissantes. On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$g'(x+1) - g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x+1) - u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+x} = 0$, $g'(x+1)-g'(x) = \frac{1}{x+1}$ par télescopage. Posons $\psi(x) = f(x+1)-f(x)-\ln(x) = g(x+1)-g(x)-\ln(x+1)$.
Alors ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\psi'(x) = g'(x+1) - g'(x) - \frac{1}{x+1} = 0$$

Ainsi ψ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais comme $\psi(x) = g(x+1) - g(x) - \ln(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, ψ est en fait prolongebale par continuité (et même prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'on a vu que g était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. En notant encore ψ ce prolongement, $\psi(0) = g(1) - g(0) - \ln(0+1) = 0$. Par conséquent, ψ est constamment nulle sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

4. Posons $f_n(x) = x\ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$.
Soit $x \in]0,1]$. Par convexité de la fonction de f,

$$\frac{f(n+x) - f(n)}{x} \leq \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1)-n} = \ln(n)$$

ou encore

$$f(n+x) \leq x\ln(n) + f(n)$$

Par ailleurs, par télescopage

$$f(n) = f(n) - f(1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) - f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = -\ln(n) + \ln(n!)$$

et

$$f(n+x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1+x) - f(k+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(x+k) = -\ln(x+n) + \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$$

On en déduit que

$$f(x) - \ln(x+n) + \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k) \leq x\ln(n) - \ln(n) + \ln(n!)$$

ou encore

$$f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \leq f_n(x)$$

Toujours par convexité de f,

$$\ln(n-1) = \frac{f(n) - f(n-1)}{n-(n-1)} \leq \frac{f(n+x) - f(n)}{x}$$

ou encore

$$x\ln(n-1) + f(n) \leq f(n+x)$$

ce qui équivaut à

$$x\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + x\ln(n) + f(n) \leq f(n+x)$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient

$$f_n(x) \leq f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) - x\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Finalement

$$f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \leq f_n(x) \leq f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) - x\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

On procède par récurrence, et on note $\mathcal{P}_p$ l'assertion

$$\forall x \in]p, p+1], \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

On vient de montrer que $\mathcal{P}_0$ est vraie. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_p$ est vraie. Donnons-nous alors $x \in]p, p+1]$ et remarquons que

$$f_n(x+1) - f_n(x) = \ln(x) - \ln\left(\frac{x+n+1}{n}\right)$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x+1) = f(x) + \ln(x) = f(x+1)$$

Ceci prouve que $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Solution 65

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $|u_n(x)| \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$. La série $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$ converge en tant que série exponentielle. La série $\sum |u_n(x)|$ converge donc par majoration. La série $\sum u_n(x)$ converge donc (absolument). On en déduit que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2. D'après la question précédente, $\|u_n\|_\infty \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$. A nouveau, la série $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$ donc la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge par majoration. La série $\sum u_n$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $v_n(x) = \frac{\alpha^n e^{inx}}{n!} = \frac{(\alpha e^{ix})^n}{n!}$. La série $\sum v_n(x)$ est une série exponentielle. Elle converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = e^{\alpha e^{ix}} = e^{\alpha \cos x} e^{i\alpha \sin x}$$

Ainsi

$$\mathrm{C}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(v_n(x)) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right) = e^{\alpha\cos x}\cos(\alpha \sin x)$$

4. **a.** Fixons $n \in \mathbb{N}$.
Remarquons que les fonctions u_n sont paires et donc C également. Par conséquent, $x \mapsto \sin(nx)\cos(nx)$ est impaire et $\mathrm{J}_n = 0$.
Posons ensuite $w_k(x) = \cos(nx)u_k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k(x) = \cos(nx)\mathrm{C}(x)$. De plus, $\|w_k\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$ donc $\sum w_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\sum w_k$ converge uniformément sur le *segment* $[-\pi, \pi]$. Enfin, les w_k sont bien continues sur $[-\pi, \pi]$. On peut donc affirmer que

$$\mathrm{J}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} w_k(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) \,\mathrm{d}x$$

D'après l'indication de l'énoncé

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha^k}{2k!}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x))\,\mathrm{d}x$$

On en déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n = 0 \\ \frac{\pi\alpha^n}{n!} & \text{si } k = n \neq 0 \end{cases}$$

Par conséquent, $\mathrm{I}_0 = 2\pi$ et $\mathrm{I}_n = \frac{\pi\alpha^n}{n!}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

b. On en déduit immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\cos^2(nx) = \dfrac{1+\cos(2nx)}{2}$ de sorte que

$$\frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^n}{n!} + \frac{1}{2}\cdot u_n(2x)$$

Or les séries $\sum \dfrac{\alpha^n}{n!}$ et $\sum u_n(2x)$ convergent donc $\sum \dfrac{\alpha^n\cos^2(nx)}{n!}$ converge également. Ainsi S est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(2x) = \frac{e^\alpha}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{C}(2x) = \frac{e^\alpha}{2} + \frac{1}{2}e^{\alpha\cos 2x}\cos(\alpha\sin(2x))$$

Solution 66

---

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n+1}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées.

2. Posons $f_n :\ \mapsto (-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n+1}$. Alors $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n+1}$ donc la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$. Néanmoins, en vertu du critère spécial des séries alternées et en notant $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$,

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}_+,\ |\mathrm{R}_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$$

donc

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}_+,\ \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \|f_{n+1}\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \frac{1}{n+2}$$

donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

3. Les fonctions f_n étant continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\sum f_n$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}_+$, S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par ailleurs, $\lim_{+\infty} f_n = \delta_{n,0}$ donc d'après le théorème de la double limite, $\lim_{+\infty}\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{+\infty} f_n = 1$.

4. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x\mapsto\lambda e^x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de la forme $x\mapsto\lambda(x)e^x$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui donne $\lambda'(x)e^x = -\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ou encore $\lambda'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. On peut donc choisir, $\lambda(x) = \ln(1+e^{-x})$. Les solutions sont donc les fonctions

$$x\mapsto\lambda e^x + \ln(1+e^{-x})e^x$$

avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

5. Remarquons que les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f_n'(x) = -(-1)^n\dfrac{ne^{-nx}}{n+1}$. Soit $a>0$. Alors $\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{ne^{-na}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Ainsi S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{ne^{-nx}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nx} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n+1} = -\frac{1}{1+e^{-x}} + \mathrm{S}(x) = -\frac{e^x}{e^x+1} + \mathrm{S}(x)$$

Ainsi S est solution de l'équation différentielle de la question précédente sur $\mathbb{R}_+^*$. Il existe donc $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}(x) = \lambda e^x + \ln(1+e^{-x})e^x$$

Or $\ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ donc $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})e^x = 1$. Comme $\lim_{+\infty}\mathrm{S} = 1$, on a alors $\lambda = 0$. Finalement

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}(x) = \ln(1+e^{-x})e^x$$

Par continuité de S et $x\mapsto\ln(1+e^{-x})e^x$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \mathrm{S}(x) = \ln(1+e^{-x})e^x$$

Solution 67

1. Si $x>0$, $v_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2)$ par croissances comparées donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(x)$ converge.
   Si $x<0$, alors $v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(x)$ diverge grossièrement.
   Enfin, $v_n(0)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(0)$ diverge grossièrement.
   Finalement, le domaine de définition de S est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors v_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $v_n'(x)=(\ln(n)-n)v_n(x)\leq 0$ donc v_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, v_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[a,+\infty[$, $0\leq v_n(x)\leq v_n(a)$ donc $\|v_n\|_{\infty,[a,+\infty[}\leq v_n(a)$. D'après la première question, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(a)$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge normalement et a fortiori uniformément sur $[a,+\infty[$.
   Par conséquent, S est continue sur $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*}[a,+\infty[=\mathbb{R}_+^*$.

3. Fixons $a\in\mathbb{R}_+^*$. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $v_n(x)=e^{(\ln(n)-n)x}$ et $\ln(n)-n<0$ donc $\lim_{+\infty} v_n=0$. Par théorème de la double limite, $\lim_{+\infty}\mathrm{S}=0$.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{0^+} v_n=1$. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ convergeait uniformément sur $]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1$ convergerait, ce qui est évidemment faux. Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

5. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, v_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ v_n'(x)=(\ln(n)-n)v_n(x)$$

   Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on obtient par décroissance de v_n,

$$|v_n'(x)|=(n-\ln(n))v_n(x)\leq nv_n(x)\leq nv_n(a)=n^{a+1}e^{-na}$$

   A nouveau, $n^{a+1}e^{-na}\underset{n\to+\infty}{=}o(1/n^2)$ par croissances comparées, ce qui permet de conclure que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$. On en déduit que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*}[a,+\infty[=\mathbb{R}_+^*$.

Solution 68

1. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. La suite $((-1)^n u_n(x))$ est décroissante de limite nulle. La série $\sum u_n(x)$ converge donc en vertu du critère spécial des séries alternées. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Posons $\mathrm{R}_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$. En vertu du critère spécial des séries alternées,

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ |\mathrm{R}_n(x)|\leq|u_{n+1}(x)|=\frac{1}{n+1+x}\leq\frac{1}{n+1}$$

     On en déduit que $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}\leq\frac{1}{n+1}$ puis $\lim_{n\to+\infty}\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}=0$. Ceci signifie que $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par théorème de transfert, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x+1) = \frac{1}{x} - f(x+1)$$

Comme f est continue en 1, on peut écrire $f(x) \underset{x\to0^+}{=} \frac{1}{x} - f(1) + o(1)$. A fortiori, $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.
Remarquons maintenant que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}(x)$$

donc

$$2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) + u_{n+1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)(x+n+1)}$$

Posons $v_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{(x+n)(x+n+1)}$. On peut montrer comme précédemment que $\sum v_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ grâce au critère spécial des séries alternées. Mais encore plus simplement, $\|v_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ donc $\sum v_n$ converge normalement et a fortiori uniformément sur $[1,+\infty[$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} v_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = 0$ par théorème d'interversion série/limite. On en déduit que $2f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + o(1)$. A fortiori, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

3. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{n+x-1}\,\mathrm{d}t$$

On ne peut malheureusement pas appliquer le théorème d'interversion terme à terme. Posons donc

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k+x-1}\,\mathrm{d}t$$

de sorte que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(x)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n(x) &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k+x-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{x-1} \cdot \frac{1-(-t)^n+1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{t^{x-1}\,\mathrm{d}t}{1+t} + (-1)^n \int_0^1 t^{n+x}1+t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or

$$0 \le \int_0^1 t^{n+x}1+t\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^{n+x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+x+1}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{n+x}1+t\,\mathrm{d}t = 0$. On en déduit que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}\,\mathrm{d}t}{1+t}$$

Solution 69

1. La série $\sum f_n$ converge uniformément donc simplement sur X et la suite (R_n) de ses restes converge uniformément sur X vers la fonction nulle i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\mathrm{R}_n\|_\infty = 0$. Puisque $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$, $f_n = \mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n$ puis, par inégalité triangulaire, $\|f_n\|_\infty \leq \|\mathrm{R}_{n-1}\|_\infty + \|\mathrm{R}_n\|_\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ i.e. (f_n) converge uniformément sur X vers la fonction nulle.

2. Supposons que la série $\sum f_{n+1} - f_n$ converge uniformément sur X. Notons S sa somme. Alors la suite (S_n) des sommes partielles converge uniformément vers S sur X. Par télescopage, $\mathrm{S}_n = f_{n+1} - f_0$ donc $\|f_n - (\mathrm{S} + f_0)\|_\infty = \|\mathrm{S}_{n-1} - \mathrm{S}\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc (f_n) converge uniformément sur X vers $\mathrm{S} + f_0$.
   Réciproquement, supposons que (f_n) converge uniformément sur X. Notons f sa limite. Dans ce cas, $\|\mathrm{S}_n - (f - f_0)\|_\infty = \|f_{n+1} - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi (S_n) converge uniformément sur X vers $f - f_0$. Par définition, $\sum f_{n+1} - f_n$ converge uniformément sur X.

Solution 70

1. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $(e^{-\lambda_n x})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puisque $x > 0$. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ converge i.e. la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Supposons que la série $\sum f_n$ converge uniformémement sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors la suite (f_n) convergerait uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\lambda_n} \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite de terme général $f_n(1/\lambda_n) = (-1)^n e^{-1}$ ne converge pas vers 0.
   La série $\sum f_n$ ne converge donc pas uniformémement sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. D'après le critère spécial des séries alternées
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ |\mathrm{S}(t)| \leq e^{-\lambda_0 t}$$
   Or $t \mapsto e^{-\lambda_0 t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc S également.
   Toujours d'après le critère des séries alternées,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\mathrm{S}(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq e^{-\lambda_{n+1} t}$$
   donc
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{+\infty} \left(\mathrm{S}(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right) \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|\mathrm{S}(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_{n+1} t}\ \mathrm{d}t$$
   ou encore
   $$\left|\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\lambda_k}\right| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}}$$
   On obtient alors en passant à la limite
   $$\int_0^{+} \mathrm{S}(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

Solution 71

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $\left(\dfrac{1}{x+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle de sorte que la série $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. La série $\sum u_n(x)$ converge donc et
   $$\forall x \in [a, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n}$$

La suite des restes $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ i.e. la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Les u_n étant continues sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

via le changement d'indice $k \mapsto k-1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'une part,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$$

D'autre part,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

En additionnant ces deux inégalités,

$$2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^k}{x+k} - \frac{(-1)^k}{x+k+1}\right] = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A nouveau, la série $\sum \frac{(-1)^n x}{(x+n+1)(x+n)}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Notamment,

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}\right| \leq \frac{1}{(x+1)x}$$

On en déduit d'après la question précédente que

$$2f(x) - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

A fortiori

$$2f(x) - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

5. D'après la question **2**,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1)$$

Comme f est continue en 1,

$$f(x) \underset{x\to0^+}{=} \frac{1}{x} - f(1) + o(1)$$

A fortiori

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Tout d'abord, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$ converge puisque $\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $x-1 > -1$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que

$$\forall t \in [0,1[,\ \frac{1}{1+t} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k\right] + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{k+x-1}\,\mathrm{d}t\right] + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k}\right] + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \frac{t^{n+x}}{1+t} \leq t^{n+x}$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{n+x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+x+1}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{n+x}\,\mathrm{d}t = 0$$

de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

i.e.

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Solution 72

---

1. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite de terme général $\dfrac{1}{n+x}$ décroît vers 0 donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge. Ainsi S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Posons $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, les u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivées $u_n' : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ vérifie à nouveau le critère des séries alternées. Cette série converge donc et on peut majorer la valeur absolue du reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)\right| \leq \frac{1}{(n+1+x)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

   Le reste converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ i.e. la série $\sum u_n'$ converge uniformément. Par conséquent, S est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

2. Toujours d'après le critère spécial des séries alternées, $\mathrm{S}'(x)$ est du signe du premier terme de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$, c'est-à-dire du signe de $-\dfrac{1}{x^2}$. Par conséquent, S′ est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ de sorte que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par changement d'indice

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x} = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x+1} = \frac{1}{x} - \mathrm{S}(x+1)$$

Comme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est a fortiori continue en 1. Ainsi $x \mapsto S(x+1)$ admet une limite finie en 0. Comme $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.
Par décroissance de S, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$S(x+1) \leq S(x) \leq S(x-1)$$

puis

$$S(x+1) + S(x) \leq 2S(x) \leq S(x-1) + S(x)$$

ou encore

$$\frac{1}{x} \leq 2S(x) \leq \frac{1}{x-1}$$

On en déduit sans peine à l'aide du théorème des gendarmes que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Solution 73

---

1. Soit $x \in J$. Puisque $x > 0$, la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur J.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty,J} = \sup_{x\in J} \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum \|f_n\|_{\infty,J}$ diverge également. Autrement dit, $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

3. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur J, il suffit de montrer que la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n$. D'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in J,\ |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Ainsi

$$\|R_n\|_{\infty,J} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,J} = 0$ i.e. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur J.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{+\infty} f_n = 0$ et $\lim_{+\infty} f_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $J = [1, +\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{+\infty} \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

5.
   a. Il s'agit à nouveau du critère spécial des séries alternées.

   b. Remarquons que

$$\forall x \in J,\ \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right)$$

De plus,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| = \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{\sqrt{1+nx}-\sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx}\right)\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathrm{J}, \left|\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{\mathrm{K}}{x^{3/2}}$$

en posant $\mathrm{K} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. On en déduit bien que

$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Intégrales à paramètres

Solution 74

1. Soit $x \in \pi\mathbb{Z}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors $|\cos x| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cos^n x = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Finalement la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2. Posons $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
D'une part, $n\sin(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'autre part, $\cos^n(x_n) = e^{n\ln(\cos(1/n))}$ et

$$\ln(\cos(1/n)) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(1 + o(1/n)) = \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n))$$

de sorte que $\cos^n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 1 \neq 0$ donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément.
Soit maintenant $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors pour tout $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$|f_n(x)| \leq n\cos^n(a)\sin(a)$$

donc

$$\|f_n\|_\infty \leq n\cos^n(a)\sin(a)$$

(c'est même une égalité) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0$ puisque $0 \leq \cos a < 1$. Ainsi (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. **Méthode n°1**
Remarquons tout d'abord que f_n est positive et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{n}{n+1}\left[\cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est continue en 0, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|g(x) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in [0, \alpha]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\, dt\right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)|\, dt \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)|g(t) - g(0)|\, dt + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)|\, dt \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)\varepsilon\, dt + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty\, dt \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\varepsilon\, dt + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty\, dt \\
&\leq \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} + \|g - g(0)\|_\infty \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g - g(0)\|_\infty \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, dt
\end{aligned}$$

Comme (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, dt = 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $\|g - g(0)\|_\infty \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, dt \leq \varepsilon$. On en déduit que pour $n \geq N$,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\, dt\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\, dt = 0$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\, dt = \frac{ng(0)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\, dt = g(0)$$

Méthode n°2
L'application $t \mapsto \cos^{n+1} t$ est bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ donc, par changement de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\, dt = \frac{n}{n+1} \int_0^1 f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))\, du$$

La fonction $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction constante égale à $f(0)$ car f est continue en 0. De plus, f est bornée $[0, 1]$ donc $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ est dominée par une constante (clairement intégrable sur le segment $[0, 1]$). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(\sqrt[n+1]{u})\, du = \int_0^1 f(0)\, du = f(0)$$

On en conclut immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(0)$$

Solution 75

On pose $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ dans la suite.

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3n}}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et u_n est bien définie.
La fonction f_0 est constante égale à 1. Elle n'est évidemment pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc u_0 n'est pas définie.

2. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n| = f_n \leq f_1$ et f_1 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc (u_n) converge vers 0 d'après le théorème de convergence dominée.

3. La suite (f_n) est décroissante donc la suite (u_n) l'est aussi. De plus (u_n) converge vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.
Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$-\frac{1}{2+t^3} = \frac{-\frac{1}{1+t^3}}{1+\frac{1}{1+t^3}} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(1+t^3)^k} + \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(1+t^3)^{n+1}}}{1+\frac{1}{1+t^3}}$$

Ainsi

$$\left|\int_0^{+\infty} -\frac{\mathrm{d}t}{2+t^3} - \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|-\frac{1}{2+t^3} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(1+t^3)^k}\right|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}}{1+\frac{1}{1+t^3}}\,\mathrm{d}t \leq u_{n+1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$, on en déduit que

$$\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n (-1)^k u_k = -\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2+t^3}$$

4. On effectue d'abord le changement de variable $u = t/\sqrt[3]{2}$. Alors

$$\mathrm{S} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}$$

On décompose en éléments simples : il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{1}{\mathrm{X}^3+1} = \frac{1}{(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1)} = \frac{\alpha}{\mathrm{X}+1} + \frac{\beta\mathrm{X}+\gamma}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}$$

Alors $\alpha = ((\mathrm{X}+1)\mathrm{F}(\mathrm{X}))(-1) = \frac{1}{3}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{F}(x) = 0 = \alpha+\beta$ donc $\beta = -\frac{1}{3}$. Enfin, $\mathrm{F}(0) = \alpha+\gamma = 1$ donc $\gamma = \frac{2}{3}$. Ainsi

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{X}+1} - \frac{\mathrm{X}-2}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{X}+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\mathrm{X}-1}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\mathrm{X}-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^3} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty}$$

Or $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}} = 1$ (utiliser un équivalent) donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Finalement, $\mathrm{S} = \dfrac{\pi\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{3}}$.

Solution 76

Remarquons que l'intégrale définissant a_n est bien définie puisque $f(t)\dfrac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} \underset{t\to0}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $f(t)\dfrac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-nt}\right)$ car f est bornée.

Par le changement de variable $u = nt$,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} f(u/n)\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}t$$

La suite de fonctionz de terme général $g_n : u \mapsto f(u/n)\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ converge simplement vers $u \mapsto f(0)\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car f est continue en 0. De plus, comme f est bornée, il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in \mathbb{R}_+^*,\ |g_n(u)| \leq \mathrm{M}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$$

Or $\varphi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ($\varphi(u) \underset{u\to0^+}{\sim} 1/\sqrt{u}$ et $\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{=} o(e^{-u})$) donc, par théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(0)\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

On en déduit que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

> **Remarque.** On peut préciser que par le changement de variable $t = \sqrt{u}$,
>
> $$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

Solution 77

Posons $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(x/t)\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarquons déjà que l'intégrale définissant $\mathrm{F}(x)$ est bien définie. Tout d'abord, $\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to0^+}{\sim} -\ln(t)$ donc $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+. On va maintenant justifier que $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ est prolongeable par continuité en 1, pour justifier l'existence de $\mathrm{G}(x)$ pour $x > 1$. En effet,

$$\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to1}{\sim} \frac{t-1}{t^2-1} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{t+1} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{2}$$

Finalement G est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et le théorème fondamental de l'analyse montre alors que $\mathrm{G}'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et que $\mathrm{G}'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Ensuite, nous allons montrer que G est continue en 0. En effet, puisque $\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to0}{\sim} -\ln(t)$ et que l'intégrale définissant $\mathrm{G}(x)$ converge, $\mathrm{G}(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\displaystyle\int_0^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$. Or $\displaystyle\int_0^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = x\ln x - x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$ de sorte que $\lim\limits_0 \mathrm{G} = 0 = \mathrm{G}(0)$.

On va ensuite montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$. Posons $u(x,t) = \dfrac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $u(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ et $u(x,t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$;

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$,
$$|u(x,t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2}$$
- la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi/2}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente à $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$).

On peut donc affirmer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On va maintenant montrer que F est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

- pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $u(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ et $u(x,t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$;
- u admet une dérivée par rapport à sa première variable sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$;
- pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$,
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{(t^2+a^2)(1+t^2)}$$
- la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(t^2+a^2)(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente à $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ en $+\infty$).

On peut donc affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\ dt}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$
A l'aide d'une décomposition en éléments simples, pour $x \neq 1$
$$\frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{t^2+x^2} - \frac{t}{t^2+1}\right)$$
On en déduit que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ F'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\left(\frac{t^2+x^2}{1+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$
Ainsi F′ et G′ coïncident sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et comme elles sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, elles coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, F et G sont égales à une constante près sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $\lim\limits_0 F = F(0) = 0$ puisqu'on a montré que F était continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc en 0 et $\lim\limits_0 G = 0$. La contante en question est donc nulle : F et G coïncident donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution 78

---

1. La linéarité de R provient de la linéarité de l'intégration. La linéarité de S provient de la linéarité de l'intégration et de la dérivation.
Soit $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Fixons $a \in \mathbb{R}_+$. L'application $x \mapsto h(x\sin t)$ est clairement continue sur $[0,a]$ pour tout $t \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et l'application $t \mapsto h(x\sin t)$ est clairement continue par morceaux (et même continue) sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ pour tout $x \in [0,a]$. De plus h étant continue sur le segment $[0,a]$, elle est bornée sur $[0,a]$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall (x,t) \in [0,a] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right], |h(x\sin t)| \leq M$$
La fonction constante égale à M étant clairement intégrable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, R$(h)$ est continue sur $[0,a]$ et, par suite sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Remarquons que $S(g)(x) = g(0) + xR(g')(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme g' est continue sur $\mathbb{R}_+$, ce qui précède montre que $R(g')$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc $S(g)$ également.

2. On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\sin(t)\,dt \\
&= \left[-\sin^{n+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\,dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1-\sin^2(t))\,dt \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}
\end{aligned}$$

Ainsi $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

3. La relation précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$. La suite de terme général $(n+1)W_{n+1}W_n$ est donc constante égale à son premier terme $W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.
Posons $f_n : x \mapsto x^n$. Un calcul évident montre que $R(f_0) = f_0$ et que $S(f_0) = f_0$, ainsi $S \circ R(f_0) = f_0$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Un calcul non moins évident montre que $R(f_n) = \frac{2}{\pi}W_n f_n$ et $S(f_n) = nW_{n-1}f_n$. Ainsi $S \circ R(f_n) = nW_nW_{n-1}\frac{2}{\pi}f_n = f_n$ puisque $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
Comme toute fonction polynomiale est combinaison linéaire des f_n, on obtient par linéarité de $S \circ R$, $S \circ R(P) = P$ pour tout polynôme P.

4. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montrons que $R(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto g(x\sin t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$ de dérivée $x \mapsto \sin(t)g'(x\sin t)$. Pour tout $x \in [0, a]$, $t \mapsto g(x\sin t)$ et $t \mapsto \sin(t)g'(x\sin t)$ sont continues par morceaux (et même continues) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Enfin, g' est continue sur le segment $[0, a]$, elle y est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,t) \in [0,a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], |\sin(t)g'(x\sin t)| \leq M\sin(t)$$

Comme $t \mapsto \in (t)$ est clairement intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut conclure que $R(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$ et par suite sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ R(g)'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)g'(x\sin t)\,dt$$

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. On notera $\|\cdot\|_{[0,x]}$ la norme uniforme sur $[0, x]$. Par inégalité triangulaire

$$|S \circ R(g)(x)| \leq |R(g)(0)| + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} |R(g)'(x\sin t)|\,dt \leq |R(g)(0)| + x\frac{\pi}{2}\|R(g)'\|_{[0,x]}$$

Mais pour tout $y \in [0, x]$

$$|R(g)'(y)| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)g'(y\sin t)\,dt\right| \leq \frac{2}{\pi}\|g'\|_{[0,x]}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \frac{2}{\pi}\|g'\|_{[0,x]}$$

Ainsi

$$\|R(g)'\|_{[0,x]} \leq \frac{2}{\pi}\|g'\|_{[0,x]}$$

puis

$$|S \circ R(g)(x)| \leq |g(0)| + x\|g'\|_{[0,x]}$$

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de polynômes convergeant uniformément vers g' sur $[0, x]$. On pose alors $P_n(x) = g(0) + \int_0^x Q_n(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. La suite (P_n) est également une suite de polynômes. On peut appliquer l'inégalité précédente à $g - P_n$, ce qui donne

$$|S \circ R(g - P_n)(x)| \leq |(g - P_n)(0)| + x\|(g - P_n)'\|_{[0,x]}$$

ou encore, par linéarité de $S \circ R$, de l'évaluation en 0 et de la dérivation

$$|S \circ R(g) - S \circ R(P_n)(x)| \leq |g(0) - P_n(0)| + x\|g' - P_n'\|_{[0,x]}$$

et finalement

$$|S \circ R(g) - P_n(x)| \leq x\|g' - Q_n\|_{[0,x]}$$

car $S \circ R(P_n) = P_n$ d'après la question précédente et car $P_n' = Q_n$ et $P_n(0) = g(0)$ par construction des P_n. Puisque (Q_n) converge uniformément vers g' sur $[0, x]$, $\lim_{n\to+\infty} \|g' - Q_n\|_{[0,x]} = 0$. Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = S \circ R(g)(x)$$

Enfin comme Q_n converge uniformément vers g' sur $[0, x]$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = g(0) + \lim_{n\to+\infty} \int_0^x Q_n(t)\,dt = g(0) + \int_0^x g'(t)\,dt = g(x)$$

Par unicité de la limite, $S \circ R(g)(x) = g(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $S \circ R(g) = g$.

Solution 79

1. Posons $f(x, t) = \dfrac{e^{-tx}}{t+1}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x, t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc $x \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   - Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\dfrac{te^{-tx}}{t+1}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
   - Donnons-nous $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   $$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq e^{-ta}$$
   et $t \mapsto e^{-ta}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. De plus,
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{t+1}\,dt$$
   Notamment
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -g'(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Effectuons le changement de variable $u = xt$:
   $$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u+x}\,du = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}\,du$$
   De plus,
   $$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}} = e^{-u}$$
   et
   $$\forall (u, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}\right| \leq e^{-u}$$

Comme $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$$

On en déduit que $\mathrm{g}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

> **Remarque.** On peut aussi intégrer par parties pour $x > 0$:
>
> $$\begin{aligned} x\mathrm{g}(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-tx}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\left[\frac{e^{-tx}}{1+t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
>
> Or pour tout $x > 0$,
>
> $$0 \le \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$
>
> donc, d'après le théorème des gendarmes,
>
> $$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 0$$
>
> puis
>
> $$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{g}(x) = 1$$
>
> ou encore
>
> $$\mathrm{g}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Solution 80

1. Tout d'abord, F est clairement paire puisque cos l'est.
Posons $f : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{t\to0^+} f(x,t) = \frac{x^2}{2}$ car $\cos u \underset{u\to0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Ainsi $t \mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0. Par ailleurs, comme cos est bornée, $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{e^{-t}}{t^2}\right)$. A fortiori, $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{F}(x)$ est bien défini. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Puisque $|\sin'| = |\cos| \le 1$, sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème des accroissements finis. Notamment, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u) - \sin(0)| \le |u-0|$ i.e. $|\sin u| \le |u|$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$. De plus,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = |\cos(xt)e^{-t}| \le e^{-t}$$

et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On peut remarquer que $F''(x)$ est la partie réelle de

$$\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}\,dt = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$$

Ainsi $F''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

> **Remarque.** On aurait aussi pu procéder à une double intégration par parties.

Remarquons que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\,dt$$

En particulier, $F'(0) = 0$.

> **Remarque.** On aurait aussi pu remarquer que F étant paire, F' est impaire et donc $F'(0) = 0$.

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \arctan x + F'(0) = \arctan(x)$$

Enfin, on a clairement $F(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) &= F(0) + \int_0^x \arctan(t)\,dt \\
&= [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t\,dt}{1+t^2} \qquad \text{par intégration par parties} \\
&= x\arctan x - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)
\end{aligned}$$

Solution 81

---

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x^2}$$

Posons $\varphi : (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1] \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.

$$\forall (x,t) \in [0,1]\times\mathbb{R},\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2$$

et $t \mapsto 2$ est évidemment intégrable sur $[0,1]$. Ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$$

On en déduit que $f^2 + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in [0,1],\ (f^2+g)'(x) = 2f'(x)f(x) + g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt - 2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$$

En effectuant le changement de vatiable $u = tx$,

$$x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-x^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent, $(f^2+g)'$ est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de sorte que f^2+g est constante sur $\mathbb{R}$. Enfin,

$$(f^2+g)(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

donc f^2+g est constante égale à $\frac{\pi}{4}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Il est clair que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1],\ 0 \leq \varphi(x,t) \leq e^{-x^2}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$$

On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} g = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f^2 = \frac{\pi}{4}$. Comme f est clairement à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{+\infty} f = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Autrement dit,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Solution 82

Dans la suite, on pose $\varphi(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$.

1. **a.**
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|\varphi(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est la dérivée de arctan qui admet une limite finie en $+\infty$).

Ainsi f est continue (et a fortiori définie) sur $\mathbb{R}_+$.

b. Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la domination précédente.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| = \frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq e^{-xt^2} \leq e^{-at^2}$$

et $t \mapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ($e^{-at^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$).

Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$ et donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. **a.** On peut de plus affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = f(x) - \int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$$

Via le changement de variable $u = t\sqrt{x}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

d'après le résultat admis. Ainsi f est bien solution de l'équation différentielle $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

b. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \varphi(x)e^x$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (variation de la constante). On aboutit à $\varphi'(x)e^x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ ou encore $\varphi'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Comme $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0^+ et on peut donc choisir $\varphi(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \lambda e^x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Comme f est continue en 0 et comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \frac{\pi}{2}e^x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

On peut éventuellement rajouter que par le changement de variable $u = \sqrt{t}$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi}{2}e^x - \sqrt{\pi}e^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Et comme $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\pi}e^x \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

> **Remarque.** Cette expression finale n'est pas forcément «meilleure» que l'expression initiale...

Solution 83

1. Posons $f(x,t) = \ln(t)e^{-xt}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{=} o(1/\sqrt{t})$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en 0^+. Si $x > 0$, alors $\ln(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ par croissances comparées donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en $+\infty$. Si $x \leq 0$, alors $1 \underset{t\to+\infty}{=} o(f(x,t))$. Or $t \mapsto 1$ n'est pas intégrable en $+\infty$ donc $t \mapsto f(x,t)$ non plus. Comme $t \mapsto f(x,t)$ est positive au vosinage de $+infty$, l'intégrale définissant $\mathrm{F}(x)$ diverge en $+\infty$.
En conclusion le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

2. On vérifie lé théorème de dérivation des intégrales à paramètre.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\ln(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$,

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq t|\ln t|e^{-at} = \varphi(t)$$

   Or $\varphi(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ et, par croissances comparées, $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*}[a,+\infty[=\mathbb{R}_+^*$.

3. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\mathrm{F}'(x)=-\int_0^{+\infty}t\ln(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

On procède à une intégration par parties.

$$\mathrm{F}'(x)=\frac{1}{x}\left[t\ln(t)e^{-xt}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}(\ln(t)+1)e^{-xt}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{x}\mathrm{F}(x)-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{x}\mathrm{F}(x)-\frac{1}{x^2}$$

Ainsi F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'+\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x^2}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\mathrm{vect}(x\mapsto 1/x)$. Par variation de la constante, une solution particulière de l'équation avec second membre est $x\mapsto-\frac{\ln(x)}{x}$. L'ensemble des solutions de l'équations avec second membre est donc $(x\mapsto-\frac{\ln(x)}{x})+\mathrm{vect}(x\mapsto 1/x)$.

> **Remarque.** En effectuant le changement de variable $u=xt$, on obtient bien
>
> $$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{F}(x)=-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{\mathrm{F}(1)}{x}$$
>
> On peut montrer que $\mathrm{F}(1)=-\gamma$ où γ désigne la constante d'Euler.

Solution 84

Posons $\varphi(x,t)=e^{-t}\operatorname{sh}(x\sqrt{t})$ pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.

1. Remarquons tout d'abord que f est impaire. Soit alors $x\in\mathbb{R}_+$. On prouve aisément que $\lim_{t\to+\infty}e^{-t/2}\operatorname{sh}(x\sqrt{t})=0$ donc $\varphi(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$. A fortiori $\varphi(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Par conséquent, $t\mapsto\varphi(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et finalement sur $\mathbb{R}$ par imparité.

2. Rappelons que

$$\forall u\in\mathbb{R},\ \operatorname{sh}u=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On en déduit que

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\ \varphi(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}e^{-t}t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}$$

Il s'agit maintenant d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Posons

$$\mathrm{I}_n=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{4n}\mathrm{I}_{n-1}$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{4^n n!}\mathrm{I}_0$$

et à l'aide d'une dernière intégration par parties

$$\mathrm{I}_0=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

One en déduit que

$$\mathrm{I}_n=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \int_0^{+\infty} \left|\frac{x^{2n+1}e^{-t}t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}\right| \mathrm{d}t$ i.e. la série $\sum \mathrm{I}_n x^{2n+1}$ converge en tant que série exponentielle. On en déduit donc via le théorème d'intégration terme à terme que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}_n x^{2n+1}$$

3. On peut enfin rajouter que

$$\mathrm{I}_n = \frac{x\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^{2n}n!} = \frac{x\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{x^2}{4}}$$

Solution 85

1. Soit $x \in [-1, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1[$

$$\frac{1-t}{1-xt^3} = (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty}(xt^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-t)x^n t^{3n}$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \left|(1-t)x^n t^{3n}\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)x^n t^{3n} \mathrm{d}t = x^n\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

et $\frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum \int_0^1 \left|(1-t)x^n t^{3n}\right| \mathrm{d}t$ converge. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (1-t)x^n t^{3n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

2. En prenant $x = 1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^3} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Solution 86

1. Par intégration par parties, $\mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathrm{I}_0 = 1$, on obtient aisément $\mathrm{I}_n = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Soi $x \in \mathbb{R}$. Comme $\sum a_n$ converge (absolument), la suite (a_n) converge vers 0. A fortiori, elle est bornée. On en déduit que $\frac{a_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n!}\right)$. Comme la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini, il en est de même de la série $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{a_n x^n e^{-x}}{n!}\right| \mathrm{d}x = \frac{|a_n|}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x = |a_n|$$

Comme la série $\sum |a_n|$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^n e^{-x}}{n!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^n e^{-x}}{n!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Solution 87

1. Puisque $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln x$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)\ln(1-x)$. En posant $u = 1-x$, $\ln(x)\ln(1-x) = \ln(1-u)\ln(u)$. Comme $\lim\limits_{u\to 0}\ln(1-u)\ln(u) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x)\ln(1-x) = 0$. Ainsi $x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$ donc elle est intégrable sur le segment $[0,1]$: I est bien définie.

2. C'est du cours
$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$
Le rayon de convergence est 1.

3. Pour $x \in]0,1[$,
$$\ln(x)\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n\ln(x)$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{1}{n}x^n\ln(x)$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, elle est donc intégrable sur $[0,1]$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto -\frac{x^n}{n}\ln(x)$ est positive sur $]0,1]$. On peut donc appliquer le théorèmpe d'intégration terme à terme positif :
$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{I}_n$$
où $\mathrm{I}_n = -\int_0^1 x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x$. Par intégration par parties
$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\ln(x)\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$$
L'intégration par parties est légitimée par le fait que $\lim\limits_{x\to 0}x^{n+1}\ln(x) = \lim\limits_{x\to 1}x^{n+1}\ln(x) = 0$.
Ainsi
$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$$

4. On procède à une décomposition en éléments simples :
$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$
Comme la série télescopique $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et la série de Riemann converge,
$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = 2 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Solution 88

1. Posons $\varphi(t) = \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$. φ est continue sur $]0,1[$.
De plus, $\varphi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -\ln(t)$ donc $\varphi(t) \underset{t\to 0^+}{=} \frac{1}{\sqrt{t}}$.
Par ailleurs, $\varphi(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (t-1)\ln(1-t)$ donc $\lim\limits_{t\to 1^-}\varphi(t) = 0$.
Tout ceci montre que φ est intégrable sur $]0,1[$ donc l'intégrale I converge.

2. Pour $t \in]0,1[$,
$$\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{t^n}{n}$$

donc

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$$

avec

$$u_n(t) = -\frac{\ln(t)t^{n-1}}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u_n(t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, u_n est intégrable sur $]0,1]$. De plus, u_n est positive sur $]0,1]$ donc on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme positif

$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\, \mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 u_n(t)\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(t)t^{n-1}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{n^2}\left[\ln(t)t^n\right]_0^1 + \frac{1}{n^2}\int_0^1 t^{n-1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^3}$$

Ainsi

$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

On peut confirmer avec Python.

```
>>> from numpy import log
>>> from scipy.integrate import quad
>>> quad(lambda t:log(t)*log(1-t)/t,0,1)[0]
1.2020569031596005
>>> sum([1/n**3 for n in range(1,1001)])
1.2020564036593442
```

Solution 89

1. Remarquons que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq 1$ donc $0 \leq a_n \leq 1$. On en déduit que $\mathrm{R} \geq 1$.

2. Si les u_n sont continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ et si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\, \mathrm{d}t$$

3. Soit $x \in]-1,1[$. Posons $u_n : t \in [0,1] \mapsto \frac{(xt)^n}{1+t}$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$|u_n(t)| = \frac{|x|^n t^n}{1+t} \leq |x|^n$$

et la série $\sum |x|^n$ converge donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt)^n}{1+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1-xt)}\, \mathrm{d}t$$

Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{(1+t)(1-xt)} = \frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{x}{1-xt}\right)$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x}\left(\left[\ln(1+t)\right]_0^1 - \left[\ln(1-xt)\right]_0^1\right) = \frac{\ln(2) - \ln(1-x)}{1+x}$$

Remarque. On peut en fait faire différemment de que ce qui est suggéré par l'énoncé. En effet, on remarque que

$$a_n + a_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t}\, dt = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Donc, en notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en remarquant que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la primitive nulle en 0 de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on obtient

$$xf(x) + f(x) - a_0 = -\ln(1-x)$$

et donc

$$f(x) = \frac{\ln(2) - \ln(1-x)}{1+x}$$

puisque $a_0 = \ln(2)$.

Solution 90

1. f est clairement continue sur $]0,1]$. De plus, $f \underset{x\to 0^+}{\sim} (\ln x)^2$. Par croissances comparées, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}$. Comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$, il en est de même de f.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est clairement continue sur $]0,1]$. Comme $u_0(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} (\ln x)^2$, on conclut comme à la question précédente que u_0 est intégrable sur $]0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{0^+} u_n = 0$ donc u_n est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$: elle est donc intégrable sur $]0,1]$. Posons $\mathrm{I}_n = \int_0^1 u_n(x)\, dx$. Comme $x \mapsto x^{2n+1}\ln(x)^2$ admet une limite nulle en 0^+, on peut intégrer par parties :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1}(\ln x)^2\right]_0^1 - \frac{2}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\, dx = -\frac{2}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\, dx$$

A nouveau, $x \mapsto x^{2n+1}\ln(x)$ admet une limite nulle en 0^+ donc on peut à nouveau intégrer par parties :

$$\mathrm{I}_n = -\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1}\ln(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\, dx\right) = \frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^1 x^{2n}\, dx = \frac{2}{(2n+1)^3}$$

3. Remarquons que pour tout $x \in]0,1]$,

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$$

Remarquons que u_n est positive sur $[0,1]$ de sorte que $|(-1)^n u_n| = u_n$. On a vu que u_n était intégrable sur $]0,1]$ et que $\mathrm{I}_n = \int_0^1 u_n(x)\, dx = \frac{2}{(2n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \mathrm{I}_n$ converge également. D'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,1]$ et $\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

4. Notons S_n et R_n la somme partielle et le reste de rang n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$. Cette série vérifie de manière évidente le critère spécial des séries alternées donc

$$|\mathrm{I} - \mathrm{S}_n| = |\mathrm{R}_n| \leq \frac{2}{(2(n+1)+1)^3} = \frac{2}{(2n+3)^3}$$

Pour que S_n soit une valeur approchée de I à ε près, il suffit donc de choisir n tel que $\frac{2}{(2n+3)^3} \leq \varepsilon$ i.e. $2n+3 \geq \sqrt[3]{2/\varepsilon}$ ou encore $n \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2/\varepsilon} - 3\right)$.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from numpy import log, ceil, abs
>>> I=quad(lambda x:log(x)**2/(1+x**2),0,1)[0]
>>> def valeur(eps):
...     n=int(ceil(((2/eps)**(1/3)-3)/2))
...     return sum([2*(-1)**k/(2*k+1)**3 for k in range(n+1)])
...
>>> for eps in (.1,.01,.001,.0001,.00001):
...     abs(I-valeur(eps))
...
np.float64(0.06210770748126082)
np.float64(0.004033633407186654)
np.float64(0.0005564157597381936)
np.float64(4.5210712852350454e-05)
np.float64(5.1161537582000705e-06)
```

Solution 91

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, f_n est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le cours. On en déduit que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et donc que J_n converge.
On peut ensuite appliquer le théorème de convergence dominée : la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que (J_n) converge vers $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = 0$.

   Remarque. On peut procéder plus simplement en remarquant que pour tout entier $n \geq 2$,
$$0 \leq J_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(}x+1)^n = \frac{1}{n-1}$$

2. On remarque que poue tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$f_n'(x) = -f_n(x) - nf_{n+1}(x)$$
En intégrant sur $\mathbb{R}_+$, on obtient
$$J_n + nJ_{n+1} = f_n(0) - \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$$
Puisque $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} nJ_{n+1} = 0$. Ainsi $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

3. **a.** D'après la question précédente,
$$\frac{|J_{n+1}|}{|J_n|} = \frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{1}{nJ_n} - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum J_n z^n$ vaut 1.

   b. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n f_n$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque f_n l'est.
   - $\sum z^n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ (série géométrique) vers la fonction
$$\varphi : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 - \frac{z}{x+1}} = \frac{(x+1)e^{-x}}{x+1-z}$$

- La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} |z^n f_n(x)| \, \mathrm{d}x = |z|^n \mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{=} o(|z|^n)$$

  Or $\sum |z|^n$ converge puisque $|z| < 1$ donc $\sum \mathrm{I}_n$ converge.

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{J}_n z^n = \int_0^{+\infty} \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-x}}{x+1-z} \, \mathrm{d}x$$

Remarque. A nouveau, on peut raisonner de manière plus rudimentaire à l'aide de sommes partielles.

$$\sum_{k=0}^{n} z^k \mathrm{J}_k = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\frac{z}{x+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{z}{x+1}} e^{-x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-x}}{x+1-z} \, \mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{x+1}\right)^{n+1} e^{-x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{1-\frac{z}{x+1}}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{x+1}\right)^{n+1} e^{-x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{1-\frac{z}{x+1}} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{1-|z|} \mathrm{J}_{n+1}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|^{n+1}}{1-|z|} \mathrm{J}_{n+1} = 0$, ce qui permet de conclure.

Solution 92

Posons $\varphi(x,t) = \dfrac{1}{t^x(1+t)}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x,t) \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ et $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ donc l'intégrale définissant f est définie si et seulement si $x < 1$ et $x+1 > 1$ i.e. $0 < x < 1$.

2. On va d'abord modifier l'expression de f pour simplifier le raisonnement. Soit $x \in]0,1[$. D'après la relation de Chasles

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

En effectuant le changement de variable $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ dans la seconde intégrale :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}(1+t)}$$

Posons

$$g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

Alors g est définie sur $[0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = g(x) + g(1-x)$$

On va donc étudier les limites de g en 0^+ et 1^-.

$$g(x) = \int_0^1 \frac{(1+t)-t}{t^x(1+t)} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{-x} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{1-x} - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

Par ailleurs, puisque $1-x > 0$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t} \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2)$$

donc

$$g(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$$

Enfin, on vérifie aisément que g est croissante et positive donc bornée au voisinage de 0. On en déduit que

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$$

et, comme $f(x) = f(1-x)$,

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

Réduction

Solution 93

Déterminons dans un premier temps le noyau de ϕ. Comme (a, b) est libre

$$\begin{aligned} & x \in \operatorname{Ker}\phi \\ \iff & \langle a \mid x\rangle = \langle b \mid x\rangle = 0 \\ \iff & x \in \operatorname{vect}(a,b)^\perp \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{vect}(a,b)^\perp$.
Par ailleurs, comme a et b sont unitaires,

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= (1+\langle a \mid b\rangle)(a+b) \\ \phi(a-b) &= (1-\langle a \mid b\rangle)(a+b) \end{aligned}$$

Ainsi si $\langle a \mid b\rangle = 0$,

$$\operatorname{Ker}(\phi - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{vect}(a+b, a-b) = \operatorname{vect}(a,b)$$

et sinon

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\left(\phi - (1+\langle a \mid b\rangle)\,\mathrm{Id}_E\right) &= \operatorname{vect}(a+b) \\ \operatorname{Ker}\left(\phi - (1-\langle a \mid b\rangle)\,\mathrm{Id}_E\right) &= \operatorname{vect}(a-b) \end{aligned}$$

Pour récapituler, 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\operatorname{vect}(a,b)^\perp$.
Si $\langle a \mid b\rangle = 0$, 1 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\operatorname{vect}(a,b)$.
Si $\langle a \mid b\rangle \neq 0$, $1+\langle a \mid b\rangle$ et $1-\langle a \mid b\rangle$ sont valeurs propres et leurs sous-espaces propres associés respectifs sont $\operatorname{vect}(a+b)$ et $\operatorname{vect}(a-b)$. Dans tous les cas, la somme des dimensions de ces sous-espaces propres est égale à la dimension de E donc on a bien trouvé toutes les valeurs propres de ϕ. On peut également en conclure que ϕ est diagonalisable. On aurait aussi pu constater que ϕ est un endomorphisme symétrique pour justifier qu'il était diagonalisable. En effet, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle \phi(x) \mid y\rangle = \langle x \mid \phi(y)\rangle = \langle a \mid x\rangle\langle a \mid y\rangle + \langle b \mid x\rangle\langle b \mid y\rangle$$

Solution 94

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et M un vecteur propre associé. Alors $M + \operatorname{tr}(M)I_n = \lambda M$ puis en considérant la trace des deux membres, $(n+1)\operatorname{tr}(M) = \lambda\operatorname{tr}(M)$. Si $\lambda = n+1$ ou $\operatorname{tr}(M) = 0$. Si $\operatorname{tr}(M) = 0$ alors $M = \lambda M$ et donc $\lambda = 1$. Ainsi $\operatorname{Sp}(u) \subset \{1, n+1\}$.
Déterminons les sous-espaces propres associés à ces potentielles valeurs propres. Clairement, le sous-espace associé à la valeur propre 1 est l'hyperplan des matrices de traces nulles. De plus, I_n est clairement un vecteur propre associé à la valeur propre $n+1$ donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $n+1$ est $\operatorname{vect}(I_n)$ puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> **Remarque.** On constate que u est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> **Remarque.** Si $n = 1$, 1 n'est en fait pas valeur propre puisqu'alors le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle est le sous-espace nul.

Solution 95

Remarquons tout d'abord que pour $S \in GL_n(\mathbb{C})$, $\overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$.
Commençons par le sens le plus simple : supposons qu'il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\overline{S}^{-1}$. Dans ce cas,

$$A\overline{A} = S\overline{S}^{-1}\overline{S\overline{S}^{-1}} = S\overline{S}^{-1}\overline{S}S^{-1} = I_n$$

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur n.
Si $n = 1$, alors $A = (\lambda)$ avec $|\lambda| = 1$. On a donc $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Il suffit alors de prendre $S = \left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)$.
On suppose maintenant la propriété vraie à un rang $n-1 \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A\overline{A} = I_n$.
Montrons d'abord que toutes les valeurs propres de A sont de module 1. Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P + iQ$. Ainsi $(P+iQ)(P-iQ) = I_n$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient $P^2 + Q^2 = I_n$ et $QP - PQ = 0$. Ainsi P et Q commutent et trigonalisent dans une base commune i.e. il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et $U, V \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ telles que $P = RUR^{-1}$ et $Q = RVR^{-1}$. Posons $T = U + iV$. On a donc $A = RTR^{-1}$ et $\overline{A} = R\overline{T}R^{-1}$. La diagonale de T contient les valeurs propres de A. Comme $A\overline{A} = I_n$, on en déduit que toutes les valeurs propres de A sont de module 1.
Soit λ une valeur propre de A (il en existe toujours une complexe). On a donc $|\lambda| = 1$. On a à nouveau $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $\mu = e^{\frac{i\theta}{2}}$, de sorte que $\frac{\mu}{\overline{\mu}} = 1$. Soit X un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ. Dans ce cas, $\overline{X}$ est également un vecteur propre de X associé à la valeur propre λ. En effet, $AX = \lambda X$ donc $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$ puis $A\overline{AX} = \overline{\lambda}A\overline{X}$. Puisque $A\overline{A} = I_n$, on obtient $\overline{X} = \overline{\lambda}A\overline{X}$ puis $A\overline{X} = \lambda\overline{X}$ puisque $\frac{1}{\overline{\lambda}} = \lambda$. On peut supposer X réel. En effet, les vecteurs $X + \overline{X}$ et $i(X - \overline{X})$ sont réels et l'un des deux est non nul. L'un de ces deux vecteurs est donc un vecteur propre réel associé à la valeur propre λ. On peut compléter X en une base de $\mathbb{C}^n$ à l'aide de vecteurs réels (ceux de la base canonique, par exemple). Notons P la matrice de cette base dans la base canonique. Posons $B = P^{-1}AP$. Cette matrice est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \lambda & Y^{\mathsf{T}} \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right)$ avec $Y \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On a $B\overline{B} = P^{-1}AP\overline{P}^{-1}\overline{AP} = I_n$ car $\overline{P} = P$ et $\overline{P}^{-1} = P^{-1}$ (P est à coefficients réels). On en déduit que $C\overline{C} = I_n$. D'après notre hypothèse de récurrence, il existe $T \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $C = T\overline{T}^{-1}$.
Montrons qu'il existe $Z \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $Z - \lambda\overline{Z} = Y^{\mathsf{T}}\overline{T}$. Puisque $B\overline{B} = 0$, on a en particulier $\lambda\overline{Y}^{\mathsf{T}}T + Y^{\mathsf{T}}\overline{T} = 0$. Notons $\varphi(z) = z + \lambda\overline{z}$ et $\psi(z) = z - \lambda\overline{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. φ et ψ sont des endomorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. On vérifie que $\varphi \circ \psi = 0$ en utilisant $|\lambda| = 1$. On a donc $\operatorname{Im}\psi \subset \operatorname{Ker}\varphi$. φ et ψ ne sont pas nuls donc $\dim \operatorname{Im}\psi \geq 1 \geq \dim \operatorname{Ker}\varphi$. Ainsi $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$. Les composantes de $Y\overline{T}$ sont dans $\operatorname{Ker}\varphi$ donc dans $\operatorname{Im}\psi$, ce qui justifie l'existence de Z.
Posons alors $U = \left(\begin{array}{c|c} \mu & Z^{\mathsf{T}} \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right)$. On a alors $\overline{U}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\overline{\mu}} & -\frac{1}{\mu}\overline{Z}^{\mathsf{T}}\overline{T}^{-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right)$. On vérifie alors que $U\overline{U}^{-1} = B$. Il suffit alors de poser $S = PUP^{-1}$ pour avoir $A = S\overline{S}^{-1}$.

Solution 96

1. **Première méthode.** Il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $C = P^{-1}BP$ soit trigonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de C i.e. les valeurs propres de B. La matrice $\chi_A(C)$ est également triangulaire et a pour coefficients diagonaux $\chi_A(\lambda_1), \dots, \chi_A(\lambda_n)$. Les spectres de A et B étant disjoints, ces coefficients sont non nuls, ce qui prouve que $\chi_A(C)$ est inversible. Or les matrices $\chi_A(B)$ et $\chi_A(C)$ sont semblables puisque $\chi_A(C) = \chi_A(P^{-1}BP) = P^{-1}\chi_A(B)P$. Donc $\chi_A(B)$ est également inversible.

   Deuxième méthode. Avec les mêmes notations, $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Ainsi $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n}(B - \lambda_i I_n)$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \notin \operatorname{Sp}(B)$ donc $B - \lambda_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe, $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

2. On montre par récurrence que $A^nX = XB^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre ensuite le résultat voulu par bilinéarité du produit matriciel. On a notamment $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$. Or $\chi_A(A) = A$ d'après Cayley-Hamilton donc $X\chi_A(B) = 0$. Comme $\chi_A(B)$ est inversible, $X = 0$.

3. Considérons l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & AX - XB \end{array} \right.$. Φ est clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la question précédente montre que $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. que Φ est injectif. Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, Φ est également surjectif, ce qui prouve le résultat voulu.

Solution 97

Supposons que les les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B de A et B soient premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe $(U, V) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $U\chi_A + V\chi_B = 1$. En évaluant cette égalité en B, on obtient $U(B)\chi_A(B) = I_n$ car $\chi_B(B) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. La matrice $\chi_A(B)$ est donc inversible. Soit alors $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$. On montre alors aisément par récurrence que $A^kX = XB^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on en déduit alors que $P(A)X = XP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Notamment, $X\chi_A(B) = \chi_A(A)X = 0$ à nouveau par le théorème de Cayley-Hamilton. Mais on a vu que $\chi_A(B)$ était inversible donc $X = 0$.

Supposons que χ_A et χ_B ne soient pas premiers entre eux. Il ont donc une racine commune λ, qui est également une valeur propre commune de A et B. C'est également une valeur propre de B^T puisque

$$\det(B^T - \lambda I_n) = \det((B - \lambda I_n)^T) = \det(B - \lambda I_n) = 0$$

Il existe donc des matrices colonnes U et V non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telles que $AU = \lambda U$ et $B^TV = \lambda V$. La deuxième égalité peut s'écrire $V^TB = \lambda V^T$ en transposant. On en déduit que $AUV^T = UV^TB = \lambda UV^T$. On a donc $AX = XB$ en posant $X = UV^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il est alors aisé de voir que la matrice X est non nulle car U et V ne le sont pas.

Solution 98

Notons A, B, et C les matrices de f, g et h dans une base de E. On a alors $CB = AC$. Comme C est de rang r, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $C = PJ_rQ^{-1}$, où J_r désigne traditionnellement la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis les r premiers coefficients diagonaux qui valent 1. On a donc $PJ_RQ^{-1}B = APJ_RQ^{-1}$ ou encore $J_r(Q^{-1}BQ) = (P^{-1}AP)J_r$. Comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, on peut supposer pour simplifier que $J_rB = AJ_r$. En effectuant un calcul par blocs, on trouve que A et B sont respectivements de la forme $\begin{pmatrix} M & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} M & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ où M est un bloc carré de taille r. On en déduit que χ_M, qui est bien un polynôme de degré r, divise χ_A et χ_B et donc également χ_f et χ_g.
La réciproque est fausse dès que $n \geq 2$. En effet, on peut encore raisonner matriciellement en considèrant A la matrice nulle et B une matrice non nulle nilpotente. Alors $\chi_A = \chi_B = X^n$ de sorte que χ_A et χ_B ont un facteur commun de degré n (à savoir X^n). Mais il n'existe évidemment pas de matrice C de rang n (i.e. inversible) telle que $CB = AC$ car AC est nulle tandis que CB ne l'est pas (C est inversible et B est non nulle).

Solution 99

---

1. La matrice A de u dans la base $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\chi_u(X) = (X-1)^{2n+1} - 1$$

2. $\chi_u(0) = -2 \neq 0$ donc 0 n'est pas valeur propre de u et u est inversible.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ i.e. $(u - \mathrm{Id_E})^{2n+1} = \mathrm{Id_E}$. Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} u^k = \mathrm{Id_E}$$

ou encore

$$u \circ \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} (-1)^{2n-k} u^k = 2\,\mathrm{Id_E}$$

Ainsi en posant $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} (-1)^{2n-k} \mathrm{X}^k$, on a bien $u^{-1} = \mathrm{P}(u)$.

3. Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u. Autrement dit,

$$\mathrm{Sp}(u) = 1 + \mathbb{U}_{2n+1} = \left\{1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}},\ k \in [\![0, 2n]\!]\right\} = \left\{2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![0, 2n]\!]\right\}$$

4. Comme $\operatorname{card} \mathbb{U}_{2n+1} = 2n+1$ et $\deg \chi_u = 2n+1$, toutes les valeurs propres de u sont simples (on en déduit également que u est diagonalisable, ce qui n'est pas demandé). D'après les liens entre les coefficients et les racines d'un polynôme

$$\prod_{k=0}^{2n} 2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^{2n+1}\chi_u(0) = 2$$

En notant P_n le produit à calculer,

$$2^{2n+1}\mathrm{P}_n \prod_{k=0}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = 2$$

Comme $\sum_{k=0}^{2n} k = n(2n+1)$,

$$\prod_{k=0}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = e^{in\pi} = (-1)^n$$

Finalement,

$$\mathrm{P}_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$$

Solution 100

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M}^3 - \mathrm{M}^2 - \mathrm{M} - 2\mathrm{I}_n = 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2 = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-j)(\mathrm{X}-\bar{j})$ est un polynôme annulateur de M. On en déduit que $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \{2, j, \bar{j}\}$. De plus, P est simplement scindé donc M est diagonalisable.
Notons p, q, r les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - 2\mathrm{I}_n)$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - j\mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - \bar{j}\mathrm{I}_n)$. On a donc $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 2p + qj + r\bar{j} = 0$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on en déduit $2p - \frac{q}{2} - \frac{r}{2} = 0$ et $q - r = 0$ puis $2p = q = r$. Ainsi $n = p + q + r = 5p$ est un multiple de 5.
On peut alors affirmer que M est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(2, j, j, \bar{j}, \bar{j})$.
Réciproquement soit $n \in \mathbb{N}^*$ un multiple de 5 et considérons une matrice M semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(2, j, j, \bar{j}, \bar{j})$. Alors $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \frac{n}{5}\mathrm{tr}(\mathrm{D}) = 0$. De plus, P(M) est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \mathrm{diag}(\mathrm{P}(2), \mathrm{P}(j), \mathrm{P}(j), \mathrm{P}(\bar{j}), \mathrm{P}(\bar{j})) = \mathrm{diag}(0, 0, 0, 0, 0)$. On a donc bien $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0$.

> **Remarque.** Si n n'est pas un multiple de 5, il n'existe pas de matrice vérifiant les conditions de l'énoncé.

Solution 101

On remarque que $\mathrm{C}^3 - \mathrm{C}^2 - 3\mathrm{C} = 0$. Ainsi $\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 3)$ est un polynôme scindé à racines simples (le polynôme de degré 2 n'admet évidemment pas 0 pour racine et est de disciminant strictement positif). Par conséquent C est diagonalisable et donc semblable à une matrice diagonale D. On voit alors aisément que $\mathrm{A} = 3\mathrm{C} - \mathrm{C}^2$ est semblable à la matrice diagonale $3\mathrm{D} - \mathrm{D}^2$ et que $\mathrm{B} = \mathrm{C}^2 - 2\mathrm{C}$ est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D}$. A et B sont donc diagonalisables.

Solution 102

Simplification du problème : Comme M est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle $P^\top MP = D$ où D est diagonale de la forme $\left(\begin{array}{c|c|c} D_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & D_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$ où D_1 et D_2 sont des matrices diagonales à coefficients respectivement strictement positifs et strictement négatifs. On peut alors trouver une matrice diagonale inversible Δ telle que $\Delta D \Delta = 2I$ avec $I = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I_q & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$. En posant $Q = P\Delta$, on a donc $Q^\top MQ = 2I$. Alors $A + A^\top = M$ si et seulement si $Q^\top AQ + (Q^\top AQ)^\top = I$. Comme Q est inversible, $\operatorname{rg} Q^\top AQ = \operatorname{rg} A$. On peut donc supposer par la suite que $M = 2I$.

Remarquons que $A + A^\top = 2I$ si et seulement si A est de la forme $I + N$ où N est une matrice antisymétrique. Le problème revient alors à trouver les rangs maximal et minimal de $A = I + N$ quand N décrit l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cas $p = q = 0$: Dans ce cas $I = 0$. Si on prend $N = 0$, alors $A = 0$ et $\operatorname{rg} A = 0$. Le rang minimal recherché est donc 0.

Notons T_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée d'une sous-diagonale de 1, d'une sur-diagonale de -1 et de 0 ailleurs. T_n est bien antisymétrique. Si n est pair $\operatorname{Ker} T_n = \{0\}$ et donc $\operatorname{rg} T_n = n$. Le rang maximal recherché est donc n. Si n est impair, $\operatorname{Ker} T_n = \operatorname{vect}((1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1)^\top)$. Donc $\operatorname{rg} T_n = n - 1$. De plus, pour toute matrice antisymétrique N, $\det N = \det(N^\top) = (-1)^n \det N = -\det N$ donc $\det N = 0$. Ainsi $\det N \leq n - 1$. Le rang maximal recherché est donc $n - 1$.

Cas $p \neq 0$ ou $q \neq 0$: Les matrices A sont de la forme $\left(\begin{array}{c|c|c} I_p + A_1 & -B^\top & -C^\top \\ \hline B & -I_q + A_2 & -D^\top \\ \hline C & D & A_3 \end{array}\right)$ où A_1, A_2 et A_3 sont antisymétriques de taille respectives p, q et $n - p - q$. C'est un exercice classique que de montrer que toute matrice somme de la matrice identité et d'une matrice antisymétrique est inversible. Ainsi $I_p + A_1$ et $-I_q + A_2$ sont inversibles. Si $n - p - q$ est pair, prenons B, C et D nulles et $A_3 = T_{n-p-q}$. D'après ce qui précède, A_3 est inversible et donc $\operatorname{rg} A = n$. Si $n - p - q$ est impair, on garde la même matrice à une exception près : l'un des blocs C et D est de taille non nulle (p et q ne sont pas tous deux nuls), on le remplace par un bloc dont un coefficient vaut 1 et on garde les autres coefficients nuls. Une étude du noyau de la matrice A ainsi formée montre que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ et donc A est inversible. On a à nouveau $\operatorname{rg} A = n$. Dans tous les cas, le rang maximal recherché est donc n.

Revenons au cas général : on a vu que $I_p + A_1$ et $-I_q + A_2$ étaient inversibles. Donc $\operatorname{rg} A \geq \max(p, q)$. Prenons maintenant A_1, A_2, A_3, C et D nulles. Prenons pour B la matrice formée d'une diagonale de 1 et de zéros ailleurs (attention B n'est pas néceesairement une matrice carrée, la diagonale en question est celle débutant en haut à gauche de la matrice). Si $p \leq q$, alors les p premières colonnes de A sont les opposées des p suivantes. De plus les q colonnes suivant les p premières sont linéairement indépendantes donc $\operatorname{rg} A = q$. Si $p \geq q$, on se retrouve dans la situation inverse et $\operatorname{rg} A = p$. On a donc $\operatorname{rg} A = \max(p, q)$. Le rang minimal recherché est donc $\max(p, q)$.

> **Remarque.** Le couple d'entiers (p, q) est uniquement associé à la matrice M. On l'appelle la signature de la forme quadratique canoniquement associée à la matrice symétrique M.

Solution 103

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans une base de E. A est également une matrice à coefficients complexes et on montre classiquement que le rang de A en tant que matrice complexe est le même que le rang de A en tant que matrice complexe. En effet, si $r = \operatorname{rg} A$, il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PJ_{r,n}Q$ avec $J_{r,n}$ la matrice carrée de taille n comportant des 1 sur les r premiers coefficients diagonaux et des 0 partout ailleurs. Or P, Q appartiennent également à $GL_n(\mathbb{C})$ donc le rang de A est également r en tant que matrice complexe.
Le polynôme $X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples (sur $\mathbb{C}$). A est donc diagonalisable et $\operatorname{Sp}(A) \subset \{0, -i, +i\}$. Notons p et q les dimensions repectives de $\operatorname{Ker}(A - iI_n)$ et $\operatorname{Ker}(A + iI_n)$. On a donc $\operatorname{tr}(A) = (p - q)i$. Or A est à coefficients réels donc $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{R}$. Ainsi $p = q$. De plus, $\operatorname{rg}(A) = p + q = 2p$. Donc $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A)$ est pair.

Solution 104

1. On montre par exemple aisément que c'est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $M \in G$. Puisque le morphisme de groupe $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ M & \longmapsto & M^n \end{array}\right.$ ne peut être injectif puisque $\mathbb{Z}$ est infini et que G est fini. Son noyau contient donc un entier non nul n tel que $M^n = I_2$. On peut même supposer n positif quitte à le changer en son opposé.
Puisque le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annule M, M est diagonalisable. On peut également ajouter que ses valeurs propres sont des racines de l'unité et en particulier des complexes de module 1.

Si M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ses valeurs propres ne peuvent être que 1 ou -1. Dans ce cas, M est semblable à I_2, $-I_2$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dans tous les cas, $M^6 = I_2$.
Si M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, elle l'est quand même dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont des complexes de module 1 conjugués puisque M est à coefficients réels. M est donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Puisque la trace est un invariant de similitude, $2\cos\theta = \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{Z}$. Puisque cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, $\cos\theta \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$.

- Si $\cos\theta = \pm 1$, $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \pm 1$ et on est ramené au cas précédent (en fait, M serait diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et on a supposé que ce n'était pas le cas).
- Si $\cos\theta = \frac{1}{2}$, alors $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Il est alors clair que $M^{12} = I_2$.
- Si $\cos\theta = \frac{-1}{2}$, alors $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Il est alors clair que $M^{12} = I_2$.
- Si $\cos\theta = 0$, alors $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Il est alors clair que $M^{12} = I_2$.

Solution 105

1. Puisque $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Ainsi pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = \pm 1$ et, a fortiori, $\lambda_k \equiv 1[2]$. Puisque $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, $\operatorname{tr}(A) \equiv n[2]$.

2. Les valeurs propres de A ne peuvent pas toutes être égales à 1 ou -1 sinon, A serait semblable à I_n ou $-I_n$ et donc égale à I_n ou $-I_n$. En notant a le nombre de valeurs propres égales à 1 et b le nombre de valeurs propres égales à -1. On a donc $a + b = n$, $1 \leq a \leq n - 1$ et $1 \leq b \leq n - 1$. Ainsi $\operatorname{tr}(A) = a - b$ est compris entre $-n + 2$ et $n - 2$ i.e. $|\operatorname{tr}(A)| \leq n - 2$.

Solution 106

1. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = (X - 2)(X - 3) - 2 = X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4)$$

Ainsi A est diagonalisable et le spectre de A est $\operatorname{Sp}(A) = \{1, 4\}$. On vérifie que

$$Ax_1 = x_1 \qquad \text{avec} \qquad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et que

$$Ax_2 = 4x_2 \qquad \text{avec} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme A est de taille 2, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 4 dont donc de dimension 1. Ce sont respectivement $\operatorname{vect}(x_1)$ et $\operatorname{vect}(x_2)$.
De plus, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Alors $AM = M^3 = MA$. Alors $AMx_1 = MAx_1 = Mx_1$ donc Mx_1 est un vecteur propre de A. Comme le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\text{vect}(x_1)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Mx_1 = \lambda x_1$. Donc $\lambda^2 x_1 = M^2 x_1 = Ax_1 = x_1$ puis $\lambda^2 = 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$ et $Mx_1 = \pm x_1$. De même, $Ax_2 = \pm 2x_2$. On peut alors affirmer que

$$M = P\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Réciproquement ces quatres matrices conviennent.

> **Remarque.** Les quatre matrices en question sont
>
> $$\pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 107

On calcule $\chi_A = (X-2)(X-1)^2$, $E_2(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi A est diagonalisable. De même, $\chi_B = (X-2)(X-1)^2$, $E_2(B) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ mais $E_1(B) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donc B n'est pas diagonalisable. Donc A et B ne sont pas semblables même si elles ont mêmes valeurs propres et même polynôme caractéristique.

Solution 108

1. On trouve $\chi_A = X^2 + 7X - 8 = (X+8)(X-1)$. De plus, $E_{-8}(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_1(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Alors en posant $Y = P^{-1}XP$, l'équation $X^3 = A$ équivaut à $Y^3 = D$. Supposons que $X^3 = A$ i.e. $Y^3 = D$. Alors Y commute avec $Y^3 = D$. En notant, $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $YD = DY$ donne $b = c = 0$. Par conséquent, Y est diagonale. L'équation $Y^3 = D$ équivaut $a^3 = -8$ et $d^3 = 1$ i.e. $a = -2$ et $d = 1$ ou encore $Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'unique solution de l'équation $X^3 = A$ est alors

$$P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 109

1. On trouve $A = aI_3 + bJ + cJ^2$.

2. On trouve $\chi_J = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$. Comme χ_J est scindé à racines simples, J est diagonalisable.

3. Les sous-espaces propres associés à 1, j et j^2 sont respectivement engendrés par $\omega_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$. Remarquons que $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ car J est diagonalisable.

Enfin, $A\omega_0 = (a+b+c)\omega_0$, $A\omega_1 = (a+bj+cj^2)\omega_1$, $A\omega_2 = (a+bj^2+cj^4)\omega_2$ donc $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ est également une base de vecteurs propres de A. Ainsi A est diagonalisable. En posant $P = a + bX + cX^2$, $D = \begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 \\ 0 & P(j) & 0 \\ 0 & 0 & P(j^2) \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, $A = QDQ^{-1}$.

Solution 110

1. Notons $u_1, \dots, u_p$ les endomorphismes canoniquement associés à $A_1, \dots, A_p$.

   a. Les sous-espaces propres de u_1 sont stables par u_2 car u_1 et u_2 commutent. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)$. Comme u_2 est diagonalisable, il induit un endomorphisme diagonalisable de $E_\lambda(u_1)$. Notons $\mathcal{B}_\lambda$ une base de diagonalisation de cet endomorphisme. Comme $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)} E_\lambda(u_1)$, la concaténation des bases $\mathcal{B}_\lambda$ est une base de $\mathcal{B}_\lambda$. On vérifie sans peine que c'est une base de diagonalisation commune de u_1 et u_2. On en déduit alors que A_1 et A_2 sont simultanément diagonalisables.

   b. On note $HR(p)$ l'assertion :

   > si $u_1, \dots, u_p$ sont des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux, alors ils sont simultanément diagonalisables.

   $HR(1)$ est évidemment vraie. Supposons $HR(p)$ vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Soient alors $u_1, \dots, u_{p+1}$ des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{p+1})$. Alors $E_\lambda(u_{p+1})$ est stable par $u_1, \dots, u_p$. Les endomorphismes de $E_\lambda(u_{p+1})$ induits âr $u_1, \dots, u_p$ sont encore diagonalisables et commutent deux à deux. On peut ainsi trouver une base commune $\mathcal{B}_\lambda$ de diagonalisation de ces endomorphismes induits. A nouveau, la concaténation des base $\mathcal{B}_\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{p+1})$ est une base commune de diagonalisation de $u_1, \dots, u_{p+1}$ de sorte que $HR(p+1)$ est vraie. Ainsi $HR(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrons que G est commutatif. Remarquons que $A^{-1} = A$ pour tout $A \in G$. Soit $(A, B) \in G^2$. Alors $AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$. Comme le polynôme simplement scindé $X^2 - 1$ annule tous les éléments de G, ceux-ci sont tous diagonalisables. On peut de plus préciser que le spectre de chaque élement de G est inclus dans $\{-1, 1\}$.
   Si l'on considère une partie finie F de G de cardinal p, la question précédente montre qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ diagonalisant tous les éléments de F. L'application $M \in A \mapsto P^{-1}MP$ est une injection de A dans le groupe D_n des matrices diagonales à coefficients diagonaux égaux à ± 1. Ainsi $p \leq 2^n$.
   Ainsi G est fini de cardinal inférieur à 2^n.

   > **Remarque.** On peut préciser la réponse même si ce n'est pas utile pour la question suivante. Il existe une matrice P diagonalisant tous les éléments de G. Le morphisme $M \in G \mapsto P^{-1}MP$ est une injection de G dans D donc G est isomorphe à un sous-groupe de D. Son cardinal divise donc 2^n. Il existe ainsi $k \in [\![0, p]\!]$ tel que $\operatorname{card} G = 2^k$.

3. Notons S_n l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = I_n$. On définit de la même manière S_m. Supposons qu'il existe un isomorphisme φ de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $GL_m(\mathbb{C})$. On vérifie sans peine que φ induit une bijection de S_n sur S_m. Les sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$ inclus dans S_n sont donc isomorphes aux sous-groupes de $GL_m(\mathbb{C})$ inclus dans S_m. Notamment, le sous-groupe D_n défini dans la question précédente est isomorphe à un sous-groupe de $GL_m(\mathbb{C})$ inclus dans S_m. Ainsi S_m contient un sous-groupe d'ordre 2^n. D'après la question précédente, on a donc $2^n \leq 2^m$. Mais de manière symétrique $2^m \leq 2^n$ donc $n = m$.

Solution 111

Supposons u diagonalisable et donnons-nous un sous-espace vectoriel F de E stable par u. Puisque u est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u. A fortiori, ce polynôme annule la restriction $u_{|F}$ de u à F, qui est donc lui même diagonalisable.
De plus, on a clairement $\mathrm{Sp}(u_{|F}) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et $E_\lambda(u_{|F}) \subset E_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{|F})$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{|F})$, notons alors G_λ un supplémentaire de $E_\lambda(u_{|F})$ dans $E_\lambda(u)$. Remarquons que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{|F})$, G_λ est stable par u puisque c'est un sous-espace vectoriel du sous-espace propre $E_\lambda(u)$.
Posons finalement

$$G = \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{|F})} G_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \setminus \mathrm{Sp}(u_{|F})} E_\lambda(u) \right)$$

D'après notre dernière remarque, G est stable par u. Puisque u et $u_{|F}$ sont diagonalisables, $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ et $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{|F})} E_\lambda(u_{|F})$. On en déduit que $E = F \oplus G$.

Supposons que tout sous-espace vectoriel de E stable par u admette un supplémentaire dans E stable par u. Posons alors $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. F étant stable par u, il admet un supplémentaire G stable par u. Supposons que $\mathrm{G} \neq \{0_\mathrm{E}\}$. Alors $\chi_{u_{|\mathrm{G}}}$ étant scindé dans $\mathbb{C}$, $u_{|\mathrm{G}}$ possède une valeur propre et donc un vecteur propre x associé. Alors $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est non nul, ce qui contredit le fait que F et G soient en somme directe. Ainsi $\mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$ puis $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, ce qui prouve que u est diagonalisable.

Le résultat ne persiste pas si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Par exemple, si u est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle non congru à 0 modulo π, les seuls sous-espaces stables par u sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$ qui admettent donc bien des supplémentaires stables par u. Néanmoins, u n'est pas diagonalisable.

Solution 112

1. **a.** Comme f est bijectif, A est inversible. Alors

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{AB}} &= \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A}(\mathrm{XA}^{-1} - \mathrm{B})) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{XA}^{-1} - \mathrm{B}) \\ &= \det(\mathrm{XA}^{-1} - \mathrm{B})\det(\mathrm{A}) = \det((\mathrm{XA}^{-1} - \mathrm{B})\mathrm{A}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{BA}) = \chi_{\mathrm{BA}}\end{aligned}$$

   b. Supposons que $f \circ g$ est diagonalisable. Alors AB est diagonalisable et il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Alors $\mathrm{BA} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{PD}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{P})^{-1}$. Donc BA est diagonlisable et $g \circ f$ également.

2. **a.** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$. Si $\lambda \neq 0$, considérons un vecteur propre x associé à λ. Alors $f \circ g(x) = \lambda x$. Remarquons que $g(x) \neq 0_\mathrm{E}$ car $\lambda x \neq 0_\mathrm{E}$. De plus, $g \circ f(g(x)) = \lambda g(x)$ donc λ est un vecteur propre de $g \circ f$. Si $\lambda = 0$, alors $f \circ g$ n'est pas inversible. Ainsi $\det(f \circ g) = 0$. Par conséquent $\det(g \circ f) = \det(g)\det(g) = \det(f)\det(g) = \det(f \circ g) = 0$. Donc $g \circ f$ n'est pas inversible et $0 \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$. On a donc montré que $\mathrm{Sp}(g \circ f) \subset \mathrm{Sp}(f \circ g)$. En inversant les rôles de f et g, on a l'inclusion réciproque de sorte que $\mathrm{Sp}(f \circ g) = \mathrm{Sp}(g \circ f)$.

   b. Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. AB est diagonale donc diagonalisable mais BA ne l'est pas. En effet, la seule valeur propre de BA est 0, donc, si BA était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc elle serait nulle, ce qu'elle n'est pas.

Solution 113

1. D'une part, $f = f \circ g - g = (f - \mathrm{Id_E}) \circ g$ donc $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$. D'autre part, $g = f \circ g - f = f \circ (g - \mathrm{Id_E})$ donc $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$. On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\, g \leq \dim \mathrm{Ker}\, f$ et que $\dim \mathrm{Im}\, g \leq \dim \mathrm{Im}\, f$. Mais, d'après le théorème du rang, on a également

$$\dim \mathrm{Im}\, g = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{Ker}\, g \geq \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$$

   donc $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Im}\, g$. Or $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$ donc $\mathrm{Im}\, g = \dim \mathrm{Im}\, f$. D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, g = \dim \mathrm{Ker}\, f$. Or $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ donc $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, f$.

2. Comme g est diagonalisable, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de E. Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i. Alors $f \circ g(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$ i.e. $(\lambda_i - 1)f(e_i) = \lambda_i e_i$. On ne peut avoir $\lambda_i = 1$ sinon on devrait avoir $\lambda_i = 0$ car $e_i \neq 0_\mathrm{E}$. Ainsi $f(e_i) = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} e_i$. Les e_i sont donc également des vecteurs propres de f et comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, f est diagonalisable.

   Ensuite, $f \circ g(e_i) = \lambda_i f(e_i) = \dfrac{\lambda_i^2}{\lambda_i - 1} e_i$ donc $f \circ g$ est aussi diagonalisable pour les mêmes raisons. On peut également affirmer que $\mathrm{Sp}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}\, \varphi$ avec $\varphi : t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \dfrac{t^2}{t-1}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\varphi'(t) = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant.

t	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de φ	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Ainsi $\mathrm{Sp}(f\circ g)\subset \operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}\setminus]0,4[$.

Solution 114

1. La linéarité de Φ est évidente. Pour montrer que $\Phi(\mathbb{R}_n[X])\subset\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de montrer que $\Phi(X^k)\in\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ car $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Alors, en convenant qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle
   $$\Phi(X^k)=(X+1)X^k-X(X+1)^k=(1-k)X^k-\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}X^j\in\mathbb{R}_n[X]$$
   Φ est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. D'après la question précédente, la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les $1-k\in[\![0,n]\!]$. On peut donc affirmer que les valeurs propres de Φ sont ces mêmes coefficients diagonaux. Φ possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et $\dim\mathbb{R}_n[X]=n+1$ donc Φ est diagonalisable. De plus, on peut préciser que tous les sous-espaces propres de Φ sont de dimension 1.

   Recherchons maintenant les éléments propres de Φ. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Posons $\Gamma_k=\prod_{i=0}^{k-1}X-i$ (en particulier $\Gamma_0=1$). On vérifie aisément que $\Phi(\Gamma_k)=(1-k)\Gamma_k$. Comme les sous-espaces propres de Φ sont de dimension 1, le sous-espace propre associé à la valeur propre $1-k$ est la droite vectorielle $\operatorname{vect}(\Gamma_k)$.

Solution 115

Puisque $\operatorname{rg}(A)=1$, 0 est valeur propre de A et $\dim E_0=\dim\operatorname{Ker}A=n-1$. Ainsi X^{n-1} divise χ_A. On a alors $\chi_A=X^{n-1}(X-\lambda)$. Comme la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, $\lambda=\operatorname{tr}(A)$.
Si $\lambda=0$, alors A n'est pas diagonalisable puisque la multiplicité de 0 dans χ_A n'est pas égale à la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
Si $\lambda\neq0$, alors λ est valeur propre de A. Comme E_0 et E_λ sont en somme directe, $\dim E_0+\dim E_\lambda\leq n$ i.e. $\dim E_\lambda\leq 1$. De plus, $\dim E_\lambda\geq1$ donc $\dim E_\lambda=1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est alors égale à n et A est diagonalisable.

Solution 116

1. Supposons $x\neq0$ et soit $M\in E_x$. Alors
   $$-\frac{1}{x}M(M+I_n)=-\frac{1}{x}(M+I_n)M=I_n$$
   donc $M\in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1}=-\frac{1}{x}(M+I_n)$.
   Soit $M\in E_0$. Alors $M^2+M=0$. Si M est inversible, alors, en multipliant par M^{-1}, $M=-I_n$ et $-I_n$ est bien inversible. La seule matrice inversible de E_0 est $-I_n$.
2. Remarquons que $P_x=X^2+X+x$ est un polynôme annulateur de toutes les matrices de E_x.
   Si le discriminant de P_x est strictement négatif i.e. $x>\frac{1}{4}$, alors les matrices de E_x ne possèdent pas de valeur propre réelle et ne sont donc pas diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Si le discriminant de P_x est strictement positif i.e. $x<\frac{1}{4}$, alors P_x est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples donc toutes les matrices de E_x sont diagonalisables.
   Si $x=\frac{1}{4}$, $P_{\frac{1}{4}}=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2$. On vérifie que $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ appartient à $E_{\frac{1}{4}}$ mais n'est pas diagonalisable.

   Ainsi E_x ne contient que des matrices diagonalisables si et seulement si $x<\frac{1}{4}$.
3. Remarquons que $P_{-2}=(X-1)(X+2)$. Les spectres des matrices de E_{-2} sont inclus dans $\{1,-2\}$. Leurs traces peuvent donc valoir $1+1=2$, $1-2=-1$ et $-2-2=-4$. Il existe effectivement des matrices de E_{-2} dont les traces valent 2, -1 et -4, à savoir $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ainsi $T = \{2, -1, -4\}$ et $\operatorname{card} T = 3$.

Solution 117

1. On a $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + 2g$ avec $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$. Comme $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et g sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f en est un également.

2. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = 3M$$
$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = -M$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$
$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer (détailler si cela ne semble pas clair) que

$$\operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$
$$\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

On en déduit que f est diagonalisable, que ses valeurs propres sont 3 et -1 et que les sous-espaces propres associés respectifs sont $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. Déjà répondu à la question précédente.

4. Comme la trace et le déterminant d'un endomorphisme trigonalisable sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité et comme f est diagonalisable,

$$\operatorname{tr}(f) = 3 \cdot \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + (-1) \cdot \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = 3\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n(n+2)$$
$$\det(f) = 3^{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \cdot (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Solution 118

Posons $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_M = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X+2)$. Comme χ_M est scindé à racines simples, M est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}$, $E_1(M) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(M) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On en déduit notamment que $D = P^{-1}MP$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule aussi aisément $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On propose ensuite plusieurs manières de procéder.

Méthode n°1. A est diagonalisable donc il existe une base $(U_1, \dots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres respectivement associées. En s'inspirant de la réduction de M, on vérifie qu'en posant $X_i = \begin{pmatrix} 2U_i \\ U_i \end{pmatrix}$ et $Y_i = X_i = \begin{pmatrix} U_i \\ U_i \end{pmatrix}$, $BX_i = \lambda_i X_i$ et $BY_i = 2\lambda_i Y_i$. Ainsi les X_i et les Y_i sont des vecteurs propres de B. On vérifie manitenant que $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$. Puisque cette famille compte $2n$ éléments, il sufit de montrer sa liberté. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^{2n}$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^n \beta_i Y_i = 0$$

En raisonnant par blocs, on a donc

$$2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i U_i = 0 \tag{L$_1$}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i U_i = 0 \tag{L$_2$}$$

En considérant $(L_1)-(L_2)$, on obtient $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_i = 0$ et en considérant $2(L_2)-(L_1)$, on otient $\sum_{i=1}^{n}\beta_i U_i = 0$. Comme $(U_1,\dots,U_n)$ est libre, les α_i et les β_i sont nuls. Ainsi $(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de B : B est diagonalisable.

Méthode n°2. Comme A est diagonalisable, il existe $Q\in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $\Delta = P^{-1}QP$ soit diagonale. En s'inspirant de la réduction de A, on pose $R = \begin{pmatrix} 2Q & Q \\ Q & Q\end{pmatrix}$. On vérifie alors que R est inversible d'inverse $R = \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1}\end{pmatrix}$. On vérifie ensuite que

$$R^{-1}BR = \begin{pmatrix} Q^{-1}AQ & 0 \\ 0 & 2Q^{-1}AQ\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta\end{pmatrix}$$

$R^{-1}BR$ est donc bien une matrice diagonale : B est donc diagonalisable.

Solution 119

---

1. On calcule le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
\chi_{A_m}(X) &= \begin{vmatrix} X+m+1 & -m & -2 \\ m & X-1 & -m \\ 2 & -m & X+m-3 \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} X+m-1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ X+m-1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_3\\
&= (X+m-1)\begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} && \text{en factorisant la première colonne}\\
&= (X+m-1)\begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 0 & 0 & X+m-1 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_1\\
&= (X+m-1)^2(X-1)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(A_m) = \{1, 1-m\}$.
Comme la multiplicité de 1 dans A_m vaut 1, on en déduit que $\dim E_1(A_m) = 1$ puis

$$E_1(A_m) = \mathrm{Ker}(A_m - I_n) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -m-2 & m & 2 \\ -m & 0 & m \\ -2 & m & 2-m\end{pmatrix} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Si $m=0$, $\mathrm{Sp}(A_0) = \{1\}$ et on vient alors de déterminer l'unique sous-espace propre de A_0.

Supposons donc $m \neq 0$ et déterminons $\mathrm{E}_{1-m}(\mathrm{A}_m)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{1-m}(\mathrm{A}_m) &= \mathrm{Ker}(\mathrm{A}_m + (m-1)\mathrm{I}_n) \\
&= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ -m & m & m \\ -2 & m & 2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ -m & m & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\
&= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ -m & m & m \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ 2-m & 0 & m-2 \end{pmatrix} && \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1
\end{aligned}$$

On en déduit que si $m \neq 2$,

$$\mathrm{E}_{1-m}(\mathrm{A}_m) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{car } m \neq 0$$

Et si $m = 2$,

$$\mathrm{E}_{1-m}(\mathrm{A}_m) = \mathrm{E}_{-1}(\mathrm{A}_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

On récapitule.

Cas $m = 0$ $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_0) = \{1\}$ et $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}_0) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Cas $m = 2$ $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_2) = \{-1, 1\}$, $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}_2) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{E}_{-1}(\mathrm{A}_2) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Cas $m \notin \{0, 2\}$ $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_m) = \{1, 1-m\}$, $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}_m) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{E}_{1-m}(\mathrm{A}_m) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2. On peut par exemple utiliser le fait que A_m est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 3. On en déduit que A_m est diagonalisable si et seulement si $m = 2$.
De plus, A_m est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{A}_m)$ i.e. $m \neq 1$.

3. Dans le cas où A_m est diagonalisable i.e. $m = 2$, une base de vecteurs propres est $\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On peut donc choisir $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 120

1. On calcule $\chi_A = X^3 - X - 1$. On étudie sur $\mathbb{R}$ la fonction polylomiale $x \mapsto \chi_A(x)$.

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$\chi_A'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$\chi_A(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9} - 1$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9} - 1$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $\chi_A(-1/\sqrt{3}) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$ et $\chi_A(1) = -1 < 0$, les variations de χ_A et le théorème des valeurs intermédiaires montrent que χ_A ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$ en un réel $a > 1$.
Comme χ_A est un polynôme à coefficients réels de degré 3, χ_A possède encore deux racines complexes non réelles conjuguées (et donc distinctes). On en déduit que χ_A est simplement scindé sur $\mathbb{C}$ de sorte que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2. Comme A est diagonalisable, A est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A. On montre sans peine que A^n est alors semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les puissances $n^{\text{èmes}}$ des valeurs propres de A. La trace étant un invariant de similitude, $\operatorname{tr}(A^n) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda^n$. Comme A est à coefficients entiers, A^n l'est également et sa trace est notamment un entier.

   > **Remarque.** La trigonalisabilité suffit pour aboutir au même résultat.

3. Notons $\mu = re^{i\theta}$ et $\overline{\mu} = re^{-i\theta}$ les deux autres valeurs propres conjuguées de A ($r > 0$). D'après la question précédente et un peu de trigonométrie,
$$|\sin(\pi a^n)| = |\sin(\pi(\mu^n + \overline{\mu}^n))| = |\sin(2\pi r^n \cos(n\theta))| \leq 2\pi r^n |\cos(n\theta)| \leq 2\pi r^n$$
Or λ, μ et $\overline{\mu}$ sont les racines de $\chi_A = X^3 - X - 1$ donc, d'après les liens coefficients/racines, $\lambda\mu\overline{\mu} = 1$ i.e. $ar^2 = 1$. Comme $a > 1$, $0 < r < 1$. On en déduit que $\sum r^n$ converge. La majoration précédente montre que la série $\sum \sin(\pi a^n)$ converge (absolument).

Solution 121

Posons $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors $\chi_M = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. On prouve alors que $M = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On va maintenant s'inspirer de la diagonlisation de M pour effectuer celle de B. Comme A est diagonalisable, il existe une matrice inversible Q et une matrice inversible D telles que $A = QDQ^{-1}$. Posons alors $R = \begin{pmatrix} 2Q & Q \\ Q & Q \end{pmatrix}$. On vérifie alors que R est inversible et que $R^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1} \end{pmatrix}$ puis que
$$B = R\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix}R^{-1}$$
Ainsi B est bien diagonalisable.

Solution 122

1. Récurrence.

2. Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto MB - BM$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Phi(A^k) = kA^k$. Or Φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie donc il possède un nombre fini de valeurs propres. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Ainsi A est nilpotente.

Solution 123

Notons $\mathcal{N}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes et $\mathcal{T}$ celui des matrices de trace nulle. Comme une matrice nilpotente admet 0 comme seule valeur propre, sa trace est nulle. Ainsi $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$. Notons $(\mathrm{E}^{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $\mathcal{T}$ est un hyperplan, on montre aisément qu'il possède pour base la concaténation des familles

$$(\mathrm{E}^{i,j})_{1\leq i\neq j\leq n} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{E}^{i,i}+\mathrm{E}^{i,i+1}-\mathrm{E}^{i+1,i}-\mathrm{E}^{i+1,i+1})_{1\leq i\leq n-1}$$

Les matrices $\mathrm{E}^{i,j}$ pour $i \neq j$ sont clairement nilpotentes (triangulaires strictes). Les matrices $\mathrm{E}^{i,i}+\mathrm{E}^{i,i+1}-\mathrm{E}^{i+1,i}-\mathrm{E}^{i+1,i+1}$ le sont également puisque la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente (carré nul). On en déduit que $\mathcal{T} \subset \mathcal{N}$.

Solution 124

---

1. La condition n'est pas suffisante. Il existe des endomorphismes de rang 1 qui ne sont pas des projecteurs. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, on peut par exemple définir f en posant $f(e_1)=2e_1$ et $f(e_i)=0_{\mathrm{E}}$ pour $i\in[\![2,n]\!]$. Alors f est clairement de rang 1 et $f\circ f(e_1)=4e_1\neq f(e_1)$ donc f n'est pas un projecteur.
La condition n'est pas non plus nécessaire. Il existe des projecteurs de rang différent de 1. On peut par exemple considérer l'endomorphisme nul.

2. On a alors $\dim\operatorname{Ker} f = n-1$. 0 est donc valeur propre de f et sa multiplicité dans χ_f est au moins égale à $n-1$. Il existe donc $\alpha\in\mathbb{K}$ tel que $\chi_f = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-\alpha)$. Or
$$\operatorname{tr}(f) = 0\times(n-1)+1\times\alpha=\alpha$$
donc $\alpha=1$. Ainsi 1 est valeur propre de f. De plus, $\dim\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})=1$ et $\dim\operatorname{Ker} f = n-1$ donc f est diagonalisable et $\mathrm{E}=\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})\oplus\operatorname{Ker} f$. Si on note $(e_1,\dots,e_n)$ une base adaptée à cette décomposition en somme directe, il est clair que $f^2(e_1)=e_1=f(e_1)$ et $f^2(e_i)=0_{\mathrm{E}}=f(e_i)$ pour $i\in[\![2,n]\!]$ donc f est un projecteur.

3. Notons $(\mathrm{E}^{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices $\mathrm{E}^{i,i}$ pour $1\leq i\leq n$ sont bien de rang 1 et de trace 1 de même que les matrices $\mathrm{E}^{i,i}+\mathrm{E}^{i,j}$ pour $1\leq i\neq j\leq n$. On vérifie que ces n^2 matrices forment bien une famille libre et donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les endomorphismes de E dont les matrices dans une base donnée de E sont ces matrices forment alors également une base de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ et ce sont des projecteurs d'après la question précédente.

Solution 125

Remarquons que X^n-1 est un polynôme annulateur de A donc le polynôme minimal π_{A} divise X^n-1. De plus, il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à n sinon la famille $(\mathrm{I}_n,\mathrm{A},\mathrm{A}^2,\dots,\mathrm{A}^{n-1})$ serait libre. On en déduit que $\pi_{\mathrm{A}}=\mathrm{X}^n-1$. Or π_{A} divise χ_{A} et $\deg\chi_{\mathrm{A}}=n$ donc $\chi_{\mathrm{A}}=\pi_{\mathrm{A}}=\mathrm{X}^n-1$. Les valeurs propres de A sont donc les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et sont toutes de multiplicités 1. Ainsi

$$\operatorname{tr}(\mathrm{A})=\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}}=\frac{e^{2i\pi}-1}{e^{\frac{2i\pi}{n}}-1}=0$$

Solution 126

On notera classiquement π_{M} le polynôme minimal d'une matrice M.

1. Posons $n=\deg\pi_{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{P}=\mathrm{X}^n\pi_{\mathrm{A}}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$. Comme A est inversible, le coefficient constant de π_{A} est non nul et $\deg\mathrm{P}=n$. P est un polynôme annulateur de A^{-1} donc $\pi_{\mathrm{A}^{-1}}$ divise P. En particulier, $\deg\pi_{\mathrm{A}^{-1}}\leq n$. De même, en posant $p=\deg\pi_{\mathrm{A}^{-1}}$ et $\mathrm{Q}=\mathrm{X}^p\pi_{\mathrm{A}^{-1}}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$, $\deg\mathrm{Q}=p$ et on trouve que π_{A} divise Q. En particulier, $\deg\pi_{\mathrm{A}}\leq p$.
Finalement, $\deg\Pi_{\mathrm{A}^{-1}}=\deg\mathrm{P}$. En notant a le coefficient constant (non nul) de π_{A}, on a $\pi_{\mathrm{A}^{-1}}=\frac{1}{a}\mathrm{P}$ car $\pi_{\mathrm{A}^{-1}}$ est unitaire par convention.

2. Puisque pour tout polynôme P et toute matrice M à coefficients réels
$$\mathrm{P}(\mathrm{M})=0\iff\mathrm{P}(\mathrm{M})^{\top}=0\iff\mathrm{P}(\mathrm{M}^{\top})=0$$
A et $\mathrm{A}^{\top}=\mathrm{A}^{-1}$ ont le même polynôme minimal. Si ce polynôme minimal était de degré impair, il admettrait une racine réelle λ. Ainsi A admettrait λ pour valeur propre. Soit X un vecteur propre associé à cette valeur propre. On a donc $\mathrm{AX}=\lambda\mathrm{X}$ et donc $\|\mathrm{AX}\|=\|\lambda\mathrm{X}\|=|\lambda|\|\mathrm{X}\|$ où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Mais comme A est orthogonale, $\|\mathrm{AX}\|=\|\mathrm{X}\|$ d'où $\lambda=\pm1$ ($\|\mathrm{X}\|\neq0$ car un vecteur propre est non nul). Ceci contredit l'énoncé. C'est donc que le polynôme minimal de A est de degré pair.

Solution 127

1. Les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires et les autres colonnes sont toutes colinéaires à la seconde. Ainsi $\mathrm{rg}(A) = 2$ puis $\dim \mathrm{Ker}(A) = n - 2$.

2. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

3. Comme A est diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre 0 est la dimension du sous-espace propre associé, c'est-à-dire $n - 2$.

4. Remarquons que $\chi_A(1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Via l'opération $C_1 \leftarrow 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$, $\chi_A(1) = \begin{vmatrix} \alpha & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha$ où $\alpha = -\sum_{k=2}^{n} k^2 < 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \chi_A(x) = +\infty$, χ_A admet une racine $\lambda > 1$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - \mu)$. Mais $\mathrm{tr}(A) = 1 = \lambda + \mu$ donc $\mu = 1 - \lambda$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ avec $\lambda > 1$.

5. Comme A est diagonalisable, π_A est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de A. Ainsi $\pi_A = X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda) = X^3 - X^2 + \lambda(1 - \lambda)X$ est un polynôme annulateur de A. Or $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - 1 + \lambda)$ donc, comme vu à la question précédente,
$$\lambda(1 - \lambda) = \chi_A(1) = -\sum_{k=2}^{n} k^2$$
Finalement, un polynôme annulateur de A est $X^3 - X^2 - \left(\sum_{k=2}^{n} k^2\right)X$.

Solution 128

1. On sait que le rang de B est le rang de la famille de ses colonnes. Comme les n dernières colonnes de B sont également les n dernières, le rang de B est celui de $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$. Mais le rang de B est également le rang de la famille de ses lignes donc $\mathrm{rg}\, B = \mathrm{rg}\, A$.

2. Une récurrence simple montre que $B^p = \begin{pmatrix} A^p & A^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. De plus, $B^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

   Soit $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p \in \mathbb{R}[X]$. Alors
$$\begin{aligned} P(B) &= a_0 I_{2n} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p B^p \\ &= a_0 \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \begin{pmatrix} A^p & A^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) - a_0 I_n \\ 0 & a_0 I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   car $a_0 = P(0)$.

3. Comme A est diagonalisable, le polynôme minimal π_A de A est scindé à racines simples.
Supposons que A n'est pas inversible. Alors $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ donc 0 est racine de π_A i.e. $\pi_A(0) = 0$. D'après la question précédente, $\pi_A(B) = 0$ et donc B est diagonalisable puisque π_A est scindé à racines simples.
Supposons que A est inversible. Alors 0 n'est pas racine de π_A. Le polynôme $P = X\pi_A$ est donc encore scindé à racines simples et annule B d'après la question précédente. B est encore diagonalisable.

Solution 129

---

1. On calcule le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
\chi_{A_m}(X) &= \begin{vmatrix} X+m+1 & -m & -2 \\ m & X-1 & -m \\ 2 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X+m-1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ X+m-1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\
&= (X+m-1)\begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} && \text{en factorisant la première colonne} \\
&= (X+m-1)\begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 0 & 0 & X+m-1 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (X+m-1)^2(X-1)
\end{aligned}$$

On traite d'abord le cas $m = 0$. Alors $\chi_{A_0} = (X-1)^3$. Comme π_{A_0} divise χ_{A_0} et est unitaire, π_{A_0} vaut $(X-1)$, $(X-1)^2$ ou $(X-1)^3$. On $M \neq I_3$, $\pi_{A_0} \neq X-1$. Un calcul montre que $(A_0 - I_3)^2 = 0$ donc $\pi_{A_0} = (X-1)^2$.
On suppose ensuite $m \neq 0$. Puisque $\mathrm{Sp}(A_m) = \{1, 1-m\}$ et π_{A_m} divise χ_{A_m}, π_{A_m} vaut $(X-1)(X+m-1)$ ou $(X-1)(X+m-1)^2$. Un calcul donne

$$(A - I_3)(A + (m-1)I_3) = \begin{pmatrix} m(2-m) & 0 & m(m-2) \\ 0 & 0 & 0 \\ m(2-m) & 0 & m(m-2) \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est nulle que si $m = 2$. On en déduit que $\pi_{A_2} = (X+1)(X-1)$ et si $m \neq 2$, $\pi_{A_m} = (X-1)(X+m-1)^2$.
On récapitule :

- $\pi_{A_0} = (X-1)^2$;
- $\pi_{A_2} = (X-1)(X+1)$;
- $\pi_{A_m} = (X-1)(X+m-1)^2$ si $m \notin \{0, 2\}$.

Solution 130

$X^n - 1$ est un polynôme annulateur de A. Comme $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre, il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à n. Ainsi $\pi_A = X^n - 1$. De plus $\pi_A \mid \chi_A$ et $\deg \chi_A = n$ donc $\chi_A = \pi_A = X^n - 1$. Le coefficient de X^{n-1} dans χ_A est $-\operatorname{tr}(A)$. Comme $n \geq 2$, $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Solution 131

---

1. On a clairement $\chi_M = \chi_A^2$ (déterminant triangulaire par blocs). Les polynômes χ_M et χ_A ont donc les mêmes racines. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(M)$.

2. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} \mathrm{A}^n & 0 \\ n\mathrm{A}^n & \mathrm{A}^n \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & 0 \\ \mathrm{AP}'(\mathrm{A}) & \mathrm{P}(\mathrm{A}) \end{pmatrix}$$

3. Supposons que M soit diagonalisable. Son polynôme minimal π_M est donc scindé à racines simples. D'après la question précédente, π_M et $\mathrm{X}\pi'_\mathrm{M}$ annulent A. Ainsi π_A divise π_M et $\mathrm{X}\pi'_\mathrm{M}$. Comme π_M est scindé à racines simples, $\pi_\mathrm{M} \wedge \pi'_\mathrm{M} = 1$. Or π_A divise π_M donc $\pi_\mathrm{A} \wedge \pi'_\mathrm{M} = 1$ également. D'après le lemme de Gauss, π_A divise X i.e. $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}$ puis $\mathrm{A} = 0$.
Réciproquement, si $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{M} = 0$ est diagonalisable.

Solution 132

1. On vérifie que pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{G}_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathrm{E}))$. Ainsi $u \mapsto \mathrm{G}_u$ est bien à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathrm{E}))$.
Il est clair que $u \mapsto \mathrm{G}_u$ est linéaire. De plus, $\mathrm{G}_{\mathrm{Id}_\mathrm{E}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$, $\mathrm{G}_{u \circ v} = \mathrm{G}_u \circ \mathrm{G}_v$. Ainsi $u \mapsto \mathrm{G}_u$ est bien un morphisme d'algèbres.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{G}_u = 0$. Alors $u = \mathrm{G}_u(\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = 0$ donc $u \mapsto \mathrm{G}_u$ est injectif.
On montre de la même manière que $u \mapsto \mathrm{D}_u$ est un morphisme d'algèbres injectif.

2. Démonstration laissée au lecteur. C'est en fait vrai pour tout morphisme d'algèbres $\Phi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$: pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\Phi(\mathrm{P}(x)) = \mathrm{P}(\Phi(x))$.

3. D'après une question précédente, $\mathrm{P}(\mathrm{G}_u) = 0 \iff \mathrm{G}_{\mathrm{P}(u)} = 0$. Mais, par injectivité de $u \mapsto \mathrm{G}_u$, $\mathrm{G}_{\mathrm{P}(u)} = 0 \iff \mathrm{P}(u) = 0$. Ainsi u et G_u ont le même idéal annulateur et également le même polynôme minimal i.e. $\pi_{\mathrm{G}_u} = \pi_u$.
On montre de la même manière que $\pi_{\mathrm{D}_u} = \pi_u$.

4. Il suffit d'utiliser la question précédente et le fait qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

5. Si u est diagonalisable, G_u et D_u le sont également. Comme G_u et D_u commutent, on montre classiquement qu'ils sont simultanément diagonalisables i.e. il existe une base de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ constituée de vecteurs propres communs à G_u et D_u. C'est aussi une base de vecteurs propres de $\mathrm{G}_u - \mathrm{D}_u$ qui est donc aussi diagonalisable.

6. On s'inspire des questions précédentes. Si u est nilpotent alors $\pi_u = \Pi_{\mathrm{G}_u} = \Pi_{\mathrm{D}_u} = \mathrm{X}^p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, donc G_u et D_u sont nilpotents. Comme ils commutent,

$$(\mathrm{G}_u - \mathrm{D}_u)^{2p-1} = \sum_{k=0}^{2p-1} \binom{2p-1}{k} \mathrm{G}_u^k \mathrm{D}_u^{2p-1-k}$$

Tous les termes de cette somme sont nuls puisque si $k \geq p$, $\mathrm{G}_u^k = 0$ et si $k < p$, $2p - 1 - k \geq p$ et $\mathrm{D}_u^{2p-1-k} = 0$. Donc $\mathrm{G}_u - \mathrm{D}_u$ est nilpotent.

Séries et familles sommables

Solution 133

Remarquons que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x}\,\mathrm{d}x$ converge. En effet, $\sin(\pi x) = \sin(\pi(1 - x)) \underset{x \to 1}{\sim} \pi(1 - x)$ donc $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{1 - x}$ est prolongeable en une fonction φ continue sur le segment $[0, 1]$.

Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} - \mathrm{S}_n &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k\right) \sin(\pi x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1-x} \sin(\pi x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^{n+1} \varphi(x)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Comme φ est continue et positive sur le segment $[0,1]$, il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 \leq \varphi(x) \leq \mathrm{M}$ pour tout $x \in [0,1]$. On en déduit que

$$0 \leq \mathrm{I} - \mathrm{S}_n \leq \mathrm{M} \int_0^1 x^{n+1}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{M}}{n+2}$$

Donc $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{I}$ via le théorème des gendarmes.

Solution 134

On sait, du moins j'espère, que

$$u_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Par une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{u_n} = 6\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right)$$

On pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On montre classiquement qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} &= 6\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{2k+1}\right) \\
&= 6\left(\mathrm{H}_n + \mathrm{H}_{n+1} - 1 - 4\left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right)\right) \\
&= 6\left(\mathrm{H}_n + \mathrm{H}_{n+1} - 1 - 4\left(\mathrm{H}_{2n+1} - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{H}_n\right)\right) \\
&= 6\left(3\mathrm{H}_n + \mathrm{H}_{n+1} - 4\mathrm{H}_{2n+1} + 3\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 6\left(3\ln(n) + 3\gamma + \ln(n+1) + \gamma - 4\ln(2n+1) - 4\gamma + 3 + o(1)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 6\left(\ln\left(\frac{n^3(n+1)}{(n+1/2)^4}\right) + 3 - 4\ln(2) + o(1)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 6\left(3 - 4\ln(2)\right) + o(1)
\end{aligned}$$

car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(n+1)}{(n+1/2)^4} = 1$. On en déduit que $\sum \frac{1}{u_n}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = 6\left(3 - 4\ln(2)\right)$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from math import log
>>> def somme(n):
...         s=0
...         S=0
...         for k in range(1,n+1):
...                 s += k**2
...                 S += 1/s
...         return S
...
>>> somme(1000), 6*(3-4*log(2))
(1.364466169557005, 1.3644676665613131)
```

Solution 135

1. C'est du cours.

2. **a.** Supposons $\lambda \neq 0$. Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ et $\sum u_n$ diverge. Si $\lambda \in \{-\infty, +\infty\}$, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang donc $\sum u_n$ diverge.
Par l'absurde, $\lambda = 0$.

   b. Remarquons que (u_n) est positive puisqu'elle est décroissante de limite nulle.
Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Par décroissance de (u_n),

$$0 \leq 2nu_{2n} = 2\sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} \leq 2\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = 2(S_{2n} - S_n)$$

   Comme $\sum u_n$ converge, $(S_{2n} - S_n)$ converge vers 0 puis $(2nu_{2n})$ également via le théorème des gendarmes. Par ailleurs,

$$0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = 2nu_{2n} + u_{2n}$$

   A nouveau, $((2n+1)u_{2n+1})$ converge vers 0 par le théorème des gendarmes. On peut alors conclure que (nu_n) converge vers 0 puisque c'est le cas pour ses suites extraites $(2nu_{2n})$ et $((2n+1)u_{2n+1})$.

   c. Remarquons que

$$n(u_n - u_{n+1}) = (nu_n - (n+1)u_{n+1}) + u_{n+1}$$

   Puisque la suite (nu_n) converge, la série télescopique $\sum nu_n - (n+1)u_{n+1}$ converge. De plus, $\sum u_{n+1}$ converge par hypothèse. Ainsi, $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge comme somme de deux séries convergentes. On peut rajouter que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty}(nu_n - (n+1)u_{n+1}) + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

Solution 136

Pour simplifier l'exercice, on remarquera que, via le changement de variable $u = \tan x$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\, du$$

1. Pour tout $u \in [0,1]$, $0 \leq \frac{u^n}{1+u^2} \leq u^n$ donc

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 u^n\, du = \frac{1}{n+1}$$

   D'après le théorème des gendarmes, (I_n) converge vers 0.

2. Il est clair que

$$\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2} = \int_0^1 u^n \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}$$

3. Remarquons que

$$(-1)^n \mathrm{I}_{2n} + (-1)^n \mathrm{I}_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

donc en posant $v_n = (-1)^n \mathrm{I}_{2n}$,

$$v_n - v_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

La série télescopique $\sum v_n - v_{n+1}$ converge puisque (v_n) converge vers 0. On en déduit que $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n - v_{n+1} = v_0 - \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

> **Remarque.** On aurait aussi pu utiliser le critère spécial des séries alternées pour montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge.

4. Pour tout $u \in [0,1]$,

$$\frac{u^n}{1+u^2} \leq \frac{u^{n+1}}{1+u^2}$$

donc $\mathrm{I}_{n+1} \leq \mathrm{I}_n$. La suite (I_n) converge vers 0 en décroissant donc la série $\sum (-1)^n \mathrm{I}_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{I}_k$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}(-1)^k u^k}{1+u^2} \, \mathrm{d}u && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} \, \mathrm{d}u && \text{somme des termes d'une suite géométrique} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)(1+u^2)} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} \, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

On prouve comme précédemment que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} \, \mathrm{d}u \leq \int_0^1 u^{n+1} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n+2}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} \, \mathrm{d}u = 0$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{I}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)(1+u^2)}$$

Par une décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-u}{1+u^2} + \frac{1}{1+u}\right)$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2}\left[\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \ln(1+u)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \mathrm{I}_n = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$$

On vérifie avec Python.

```
>>> from numpy import pi, log
>>> from scipy.integrate import quad
>>> I=lambda n:quad(lambda u:u**n/(1+u**2),0,1)[0]
>>> S=sum([(-1)**n*I(n) for n in range(1000)])
>>> S, pi/8+log(2)/4
(0.5657357520891468, np.float64(0.5659858768387105))
```

Solution 137

Pour tout entier $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{n-1}\left(2 - e^{\frac{1}{n}}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{n}}\left(2 - e^{\frac{1}{n}}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par conséquent $\sum v_n$ converge.
Mais comme $v_n = \ln(nu_n) - \ln((n-1)u_{n-1})$, on peut affirmer grâce au lien entre suite et série télescopique que la suite $(\ln(nu_n))$ converge. Notons ℓ sa limite. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} nu_n = e^\ell$ i.e. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^\ell}{n}$. Comme la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

Solution 138

---

1. La fonction $f : x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ est strictement décroissante sur $]0,1]$ (elle est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto -\frac{e^x}{x}$). Comme $\frac{e^t}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t}$, $\int_0^1 \frac{e^t}{t}$ diverge. Puisque $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est positive, $\lim_{0^+} f = +\infty$. Par ailleurs, $f(1) = 0$. Enfin, f est continue sur $]0,1]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $f(u_n) = n$.
2. D'après la question précédente, f induit une bijection strictement décroissante de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$. Sa bijection réciproque est donc également strictement décroissante. Comme $u_n = f^{-1}(n)$, (u_n) est strictement décroissante. de plus, $\lim_{0^+} f = +\infty$ donc $\lim_{+\infty} f^{-1} = 0$. Par conséquent, (u_n) converge vers 0.
3. Remarquons que

$$v_n = \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{u_n}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{u_n}^1 \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Comme $\lim_{t\to0} \frac{e^t-1}{t} = 1$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Comme (u_n) converge vers 0,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$$

4. Posons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} -n + \mathrm{I} + o(1)$ puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\mathrm{I}}}{n}$. On en déduit que $\sum u_n$ diverge.

Solution 139

On va raisonner par récurrence. Notons $\mathcal{P}_p$ l'assertion

> Pour tout $n \in [\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]$, a_n est défini et $a_n = 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} = 2^p$

$\mathcal{P}_0$ est évidemment vraie. Supposons $\mathcal{P}_p$ vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Soit alors $n \in [\![2^{p+1}, 2^{p+2}-1]\!]$. Alors $\lfloor n/2 \rfloor \in [\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]$ donc a_n est bien défini et

$$a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2 \cdot 2^p = 2^{p+1} = 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}$$

de sorte que $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.
Ainsi $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
Comme la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$ est à termes positifs, elle converge ou diverge vers $+\infty$. Il suffit donc de considérer une suite extraite de la suite (S_n) de ses sommes partielles pour déterminer sa nature et sa somme éventuelle.

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_{2^{p+1}-1} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{a_j^2} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{(2^k)^2} = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^k}{(2^k)^2} = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}$$

Ainsi $\mathrm{S}_{2^{p+1}-1}$ est la somme partielle de rang p de la série géométrique $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \mathrm{S}_{2^{p+1}-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$ converge et que sa somme est 2.

> **Remarque.** On aurait aussi pu utiliser le théorème de sommation par paquets à la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et à la partition $\mathbb{N}^* = \displaystyle\bigsqcup_{p\in\mathbb{N}} [\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]$.

Solution 140

1. Avec les notations de l'énoncé, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n\mathrm{S}_n = 1$. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ est à termes positifs donc la suite (S_n) converge ou diverge vers $+\infty$.
Supposons qu'elle converge. Alors elle converge vers une limite ℓ strictement positive ($\mathrm{S}_n \geq \mathrm{S}_1 = a_1^2 > 0$). Alors (a_n) converge vers $1/\ell$. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ divergerait alors grossièrement, ce qui contredirait la convergence de la suite (S_n).
Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ diverge et la suite (S_n) converge vers $+\infty$. Puisque $a_n = \dfrac{a_n\mathrm{S}_n}{\mathrm{S}_n}$, (a_n) converge vers 0.

2. La suite (S_n) est clairement croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [\mathrm{S}_{n-1}, \mathrm{S}_n]$. Alors, par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$(\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1})\mathrm{S}_{n-1}^2 \leq \int_{\mathrm{S}_{n-1}}^{\mathrm{S}_n} t^2\,\mathrm{d}t \leq (\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1})\mathrm{S}_n^2$$

ou encore, en posant $u_n = \displaystyle\int_{\mathrm{S}_{n-1}}^{\mathrm{S}_n} t^2\,\mathrm{d}t$,

$$a_n^2\mathrm{S}_{n-1}^2 \leq u_n \leq a_n^2\mathrm{S}_n^2$$

On rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n\mathrm{S}_n = 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^2\mathrm{S}_n^2 = 1$. De plus,

$$a_n^2\mathrm{S}_{n-1}^2 = a_n^2(\mathrm{S}_n - a_n)^2 = a_n^2\mathrm{S}_n^2 - 2\mathrm{S}_n a_n^3 + a_n^4$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n\mathrm{S}_n = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^2\mathrm{S}_{n-1}^2 = 1$. D'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 1.

3. Remarquons que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_0^{\mathrm{S}_n} t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{S}_n^3}{3}$$

Par sommation de relation de comparaison pour les séries divergentes à termes positifs, $\sum_{k=1}^{n} u_n \sim n$. On en déduit que $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$ et, comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{S}_n}$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

Solution 141

1. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$ et que la série $\sum 1$ est une série à termes positifs divergente,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \ell + o\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right)$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{=} n\ell + o(n)$$

et enfin

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell$$

2. **a.** $f(x) - x \underset{x\to0^+}{\sim} -\lambda x^\alpha$ donc $x \mapsto f(x) - x$ est de même signe que $x \mapsto -\lambda x^\alpha$ au voisinage de 0^+. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x \mapsto f(x) - x$ est négative sur $[0, \varepsilon]$ et ne s'annule qu'en 0.

b. Par hypothèse, f est positive sur $[0, \varepsilon]$. Comme 0 est le seul point fixe de f sur $[0, \varepsilon]$, $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur cet intervalle puisqu'elle y est continue. Or $f(x) - x \underset{x\to0^+}{\sim} -\lambda x^\alpha$ donc $x \mapsto f(x) - x$ est négative sur $[0, \varepsilon]$. On en déduit que

$$\forall x \in [0, \varepsilon],\ 0 \le f(x) \le x \le \varepsilon$$

On en déduit alors aisément que (u_n) est à valeurs dans $[0, \varepsilon]$ et décroissante. Elle converge donc d'après le théorème de convergence monotone ar contnuité de f, (u_n) converge vers l'unique point fixe de f sur $[0, \varepsilon]$, à savoir 0.

c. Tout d'abord, $\alpha > 1$ donc $x^{\alpha-1} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$. On peut alors utiliser le développement limité usuel de $(1+u)^\beta$ lorsque u tend vers 0 :

$$f(x)^{1-\alpha} \underset{x\to0}{=} x^{1-\alpha}\left(1 - \lambda x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})\right)^{1-\alpha} \underset{x\to0}{=} x^{1-\alpha}\left(1 + (\alpha-1)\lambda x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})\right) \underset{x\to0}{=} x^{1-\alpha}1 + (\alpha-1)\lambda + o(1)$$

d. Comme (u_n) converge vers 0

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n)^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} = (\alpha-1)\lambda$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} = (\alpha-1)\lambda$$

D'après la première question

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{1-\alpha} - u_k^{\alpha} = (\alpha-1)\lambda$$

ou encore

$$u_n^{1-\alpha} - u_0^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\alpha-1)\lambda n$$

Or $\lim_{n\to+\infty} (\alpha-1)\lambda n = +\infty$ de sorte que

$$u_n^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\alpha-1)\lambda n$$

et enfin

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ((\alpha-1)\lambda n)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

e. Dans le cas de la fonction $x \mapsto \sin x$, on a $\lambda = \frac{1}{6}$, $\alpha = 3$ donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Dans le cas de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, on a $\lambda = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$ donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

Solution 142

1. Puisque cos est bornée, $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. En particulier, (v_n) converge vers 0. Par conséquent, $(\cos(v_{n-1}))$ converge vers 1 puis $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Puisque la série harmonique est une série à termes positifs divergente, la série $\sum v_n$ diverge également.
2. Il suffit de constater que cette série vérifie le critère des séries alternées.
3. Il nous faut un développement asymptotique de (v_n). On remarque que $v_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{v_{n-1}^2}{n}\right)$. Or $v_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $v_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Par conséquent, $(-1)^n v_n = \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Puisque la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et que la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série à termes positifs convergente, la série $\sum (-1)^n v_n$ converge également.

Solution 143

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \cos\left(-n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \sin\left(-\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum u_n$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.

Solution 144

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + u_n \end{aligned}$$

avec $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par conséquent, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge.

> **Remarque.** Pourtant, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. La condition de positivité est donc nécessaire pour le critère de convergence par équivalence.

Solution 145

1. Puisque (a_n) converge vers 0,

$$\ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{=} a_n - \frac{a_n^2}{2} + \mathcal{O}(a_n)^3 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie le critère spécial des séries alternées donc converge. La série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge. Enfin la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. On en déduit que la série $\sum \ln(1+a_n)$ diverge vers $-\infty$.

2. Par propriété du logarithme

$$\ln\left(\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(1+a_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Par passage à l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)\right) = 0$$

Solution 146

1. Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\ln(n) - \ln(n-1) = -\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathcal{O}(x^2)$ donc

$$\ln(n) - \ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2. Posons $u_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 2$. D'après la question précédente, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge. Notamment la suite des sommes partielles admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ i.e.

$$\sum_{k=2}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$$

Or

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

avec $\gamma = 1 - \ell$.

Solution 147

Remarquons que

$$\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k+1}^{2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\underset{k\to+\infty}{=}\frac{2}{k^3}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est un série à termes positifs convergente,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k+1}^{2}=\frac{1}{2(n+1)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}$$

Solution 148

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'une part,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n+1}{3n+3}$$

D'autre part,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Par concavité de ln,

$$\frac{1}{3}\ln(3n+3)+\frac{2}{3}\ln(3n)\leq\ln\left(\frac{1}{3}(3n+3)+\frac{2}{3}\cdot 3n\right)=\ln(3n+1)$$

Ainsi

$$\ln(3n+1)-\ln(3n+3)\geq\frac{2}{3}\ln(3n)-\frac{2}{3}\ln(3n+3)=\frac{2}{3}\ln(n)-\frac{2}{3}\ln(n+1)$$

On conclut en par croissance de l'exponentielle.

2. D'après la question précédente, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est croissante. Notamment, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{u_n}{v_n}\geq\frac{u_1}{v_1}=\frac{1}{3}$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geq\frac{1}{3}v_n$. Or $\sum\frac{1}{3}v_n$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum u_n$ diverge.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$w_n=-\frac{2}{3}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ln\left(1-\frac{2}{3(n+1)}\right)$$

Puisque $\ln(1+u)\underset{u\to0}{\sim}u+\mathcal{O}(u^2)$, on en déduit que $w_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$. Comme $\sum\frac{1}{(n+1)^2}$ est une série à termes positifs convergente, $\sum w_n$ converge (absolument).

4. Il existe donc $\ell\in\mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n-1}w_k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$$

Par télescopage, ceci signifie que

$$\frac{2}{3}\ln(n)+\ln(u_n)-\ln(u_1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$$

Par passage à l'exponentielle

$$n^{\frac{2}{3}}u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}u_1e^{\ell}=\frac{1}{3}e^{\ell}$$

En posant $\mathrm{C}=\frac{1}{3}e^{\ell}$ et $a=\frac{2}{3}$, on a bien le résultat voulu.

Solution 149

1. Notons J_n l'intégrale à calculer. Tout d'abord, $J_0 = 2\pi^2$ et, si $n \neq 0$, on intégre par parties

$$\int_0^{2\pi} te^{-int} \, dt = -\frac{1}{in}\left[te^{-int}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} e^{-int} \, dt = \frac{2i\pi}{n}$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m)\in I^2} \frac{a_n b_m}{n+m} &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{(n,m)\in I^2} a_n b_m \int_0^{2\pi} te^{-i(n+m)t} \, dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} t \sum_{(n,m)\in I^2} a_n b_m e^{-int}e^{-imt} \, dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} t\left(\sum_{n\in I} a_n e^{-int}\right)\left(\sum_{m\in I} b_m e^{-imt}\right) dt
\end{aligned}$$

Posons $f(t) = \sum_{n\in I} a_n e^{-int}$ et $g(t) = \sum_{m\in I} b_m e^{-imt}$. Par inégalité, triangulaire,

$$\sum_{(n,m)\in I^2} \frac{a_n b_m}{n+m} = \left|\sum_{(n,m)\in I^2} \frac{a_n b_m}{n+m}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{t}\,|f(t)|\right)\left(\sqrt{t}\,|g(t)|\right) dt$$

puis, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{(n,m)\in I^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi} t\,|f(t)|^2 \, dt \int_0^{2\pi} t\,|g(t)|^2 \, dt}$$

Calculons ensuite

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} t|f(t)|^2 \, dt &= \int_0^{2\pi} tf(t)\overline{f(t)} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} t\left(\sum_{n\in I} a_n e^{-int}\right)\left(\sum_{m\in I} a_m e^{imt}\right) dt \\
&= \sum_{(n,m)\in I^2} a_n a_m \int_0^{2\pi} te^{-i(n-m)t} \, dt \\
&= \sum_{(n,m)\in I^2} a_n a_m J_{n-m}
\end{aligned}$$

Or pour $n \neq m$, J_{n-m} est imaginaire pur et l'intégrale qu'on calcule est réelle de sorte que

$$\int_0^{2\pi} t|f(t)|^2 \, dt = \sum_{n\in I} a_n^2 J_0 = 2\pi^2 \sum_{n\in I} a_n^2$$

De la même manière,

$$\int_0^{2\pi} t|g(t)|^2 \, dt = 2\pi^2 \sum_{n\in I} b_m^2$$

On en déduit le résultat demandé.

3. Soit K une partie finie de $(\mathbb{N}^*)^2$. Il existe une partie finie I de $\mathbb{N}^*$ telle que $K \subset I^2$. Alors

$$\sum_{(n,m)\in K} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \pi\sqrt{\sum_{n\in I} a_n^2 \sum_{n\in I} b_n^2} \leq \pi\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n^2}$$

Ceci étant valide pour toute partie finie K de $(\mathbb{N}^*)^2$,

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n^2} < +\infty$$

La famille $\left(\dfrac{a_n b_m}{n+m}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est donc sommable et

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \sum_{(n,m)\in\mathrm{K}} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n^2}$$

Séries entières

Solution 150

---

1. On sait que $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n x^n$ vaut donc 1 d'après la règle de d'Alembert.

2. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et que la série à termes positifs $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge. Il n'y a donc pas convergence en 1.
   Comme sin est croissante sur $[0,1]$, la suite (u_n) est décroissante. De plus, elle converge vers 0. Le critère spécial des séries alternées permet d'affirmer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$ converge. Il y a donc convergence en -1.

3. **Première méthode.** La fonction sin est concave sur $[0,1]$. On en déduit que $\sin(x) \geq \sin(1)x$ pour $x \in [0,1]$. Par conséquent, pour $x \in [0,1[$,
   $$f(x) \geq \sin(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \geq \sin(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\sin(1)\ln(1-x)$$
   On en déduit par minoration que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Deuxième méthode. Les fonctions $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ sont croissantes sur $[0,1[$. Ainsi f est-elle également croissante sur $[0,1[$. Notamment elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 1^-. Fixons $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Comme les f_n sont positives sur $[0,1[$,
   $$\forall x \in [0,1[,\ f(x) \geq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n(x)$$
   Les deux membres admettant une limite lorsque x tend vers 1^- (le deuxième membre est une somme *finie*), on obtient par passage à la limite :
   $$\ell \geq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
   La série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge vers $+\infty$ donc, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\ell \geq +\infty$ i.e. $\ell = +\infty$.

4. Pour $x \in [0,1[$,
   $$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{n+1} = u_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (u_n - u_{n-1})x^n$$
   Première méthode. Pour $x \in [0,1]$,
   $$|(u_n - u_{n-1})x^n| \leq u_{n-1} - u_n$$
   Comme la série télescopique $\sum u_{n-1} - u_n$ converge, la série de fonctions de terme général $x \mapsto (u_n - u_{n-1})x^n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,1]$. On peut alors appliquer le théorème d'interversion limite série
   $$\lim_{x\to1^-} \sum_{n=2}^{+\infty} (u_n - u_{n-1})x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x\to1^-} (u_n - u_{n-1})x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = -u_1$$

On en déduit que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 0$. **Deuxième méthode.** La série entière $\sum(u_n - u_{n-1})x^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 puisque $(u_n - u_{n-1})$ est convergente (vers 0) donc bornée (on peut même montrer que le rayon de convergence vaut exactement 1). De plus, la série télescopique $\sum u_n - u_{n-1}$ converge puisque la suite (u_n) converge. On peut alors appliquer le théorème de convergence radial d'Abel pour affirmer que

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=2}^{+\infty}(u_n - u_{n-1})x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = -u_1$$

On en déduit que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 0$.

Solution 151

1. Remarquons que r_n est la somme partielle d'une série de Riemann.
   - Si $\beta > 1$, (r_n) converge vers un réel strictement positif donc (b_n) également. On en déduit que $R = 1$.
   - Si $\beta = 1$, on montre par comparaison série/intégrale que $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ i.e. $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$. Le critère de d'Alembert montre que $R = 1$.
   - Si $\beta < 1$, on montre à nouveau par comparaison série/intégrale que $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}$ i.e. $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1-\beta)n^{\beta-1}$. Le critère de d'Alembert montre à nouveau que $R = 1$.
2. Etudions maintenant la convergence en 1.
   - Si $\beta > 1$, (b_n) ne converge pas vers 0 donc $\sum b_n$ diverge grossièrement.
   - Si $\beta = 1$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$ donc, a fortiori, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ de sorte que $\sum b_n$ diverge.
   - Si $\beta < 1$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\beta}{n^{1-\beta}}$ donc $\sum b_n$ converge si et seulement si $1-\beta > 1$ i.e. $\beta < 0$.

   Pour récapituler, $\sum b_n$ converge si et seulement si $\beta < 0$.
   Etudions maintenant la convergence en -1.
   - Supposons $\beta > 1$. La suite (b_n) converge alors vers un réel strictement positif. La suite $((-1)^n b_n)$ ne tend donc pas vers 0 et la série $\sum(-1)^n b_n$ diverge grossièrement.
   - Supposons $\beta \leq 1$. La suite (r_n) croît vers $+\infty$ donc la suite (b_n) décroît vers 0. Le critère des séries alternées assure la convergence de la série $\sum(-1)^n b_n$.

Solution 152

1. Pour tout entier $n \geq 2$,
$$\frac{|(-1)^{n+1}\ln(n+1)|}{|(-1)^n\ln(n)|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
   D'aprè la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\ln(n)x^n$ vaut 1.
2. Soit $x \in]-1,1[$.
$$\begin{aligned}(1+x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln(n)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln(n)x^{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(n+1)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(n)x^{n+1} \qquad \text{par changement d'indice et car } \ln(1)=0\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{S}(x) = \frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$$

3. **Première méthode.** Soit $x \in [0,1]$. La suite de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$ décroît vers 0 donc la série $\sum_{n\geq1}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Elle converge et on peut majorer son reste en valeur absolue

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)x^{k+1}\right| \leq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)x^{n+2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Le reste converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$. La série entière $\sum_{n\geq1}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$ converge donc uniformément sur $[0,1]$: elle est donc continue sur $[0,1]$. En particulier, elle est continue en 1 de sorte que

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Deuxième méthode. Comme la suite $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ est décroissante de limite nulle, la série $\sum(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$ vaut 1 (utiliser la règle de d'Alembert par exemple). D'après le théorème de convergence radiale d'Abel,

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$, on en déduit par produit que

$$\lim_{x\to1}\mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

4. Posons $\mathrm{S}_\mathrm{N} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. On sait déjà que (S_N) converge. Pour déterminer sa limite, il suffit donc de déterminer la limite de $(\mathrm{S}_{2\mathrm{N}})$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{2\mathrm{N}} &= \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln(2n+1) + \ln(2n-1) - 2\ln(2n)\\
&= \ln(2\mathrm{N}+1) + 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln(2n-1) - 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln(2n)\\
&= \ln(2\mathrm{N}+1) + 2\sum_{n=1}^{2\mathrm{N}}\ln(n) - 4\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln(2n)\\
&= \ln(2\mathrm{N}+1) + 2\ln((2\mathrm{N})!) - 4\mathrm{N}\ln(2) - 4\ln(\mathrm{N}!)\\
&= \ln\left(\frac{(2\mathrm{N}+1)((2\mathrm{N})!)^2}{2^{4\mathrm{N}}(\mathrm{N}!)^4}\right)
\end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling,

$$\mathrm{N}! \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi\mathrm{N}}\cdot\mathrm{N}^{\mathrm{N}}\cdot e^{-\mathrm{N}}$$

donc

$$((2\mathrm{N})!)^2 \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} 4\pi\mathrm{N}(2\mathrm{N})^{4\mathrm{N}}e^{-4\mathrm{N}}$$
$$(\mathrm{N}!)^4 \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} 4\pi^2\mathrm{N}^2\mathrm{N}^{4\mathrm{N}}e^{-4\mathrm{N}}$$

de sorte que

$$\frac{(2\mathrm{N}+1)((2\mathrm{N})!)^2}{2^{4\mathrm{N}}(\mathrm{N}!)^4} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\mathrm{S}_{2\mathrm{N}} = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

puis

$$\lim_{x\to1}\mathrm{S}(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

Solution 153

1. On prouve aisément par récurrence que (a_n) est strictement positive. De plus, un argument de concavité montre que $\ln(1+x)\leq x$ pour tout $x\in]-1,+\infty[$: la suite (a_n) est donc décroissante. D'après le théorème de convergence monotone, (a_n) converge vers $\ell\in\mathbb{R}_+$. Par continuité de $f : x\mapsto\ln(1+x)$, $\ln(1+\ell)=\ell$. Une étude rapide de $x\mapsto\ln(1+x)-x$ montre que 0 est l'unique point fixe de f. AInsi $\ell=0$.

2. Comme (a_n) converge vers 0, $\ln(1+a_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}a_n$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nz^n$ vaut 1.

3. Il s'agit d'étudier la convergence en -1 et 1.
La série $\sum(-1)^na_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées car (a_n) est décroissante de limite nulle : cette série converge.
Remarquons que

$$\ln(1+a_n)\underset{n\to+\infty}{=}a_n-\frac{a_n^2}{2}+o(a_n^2)\underset{n\to+\infty}{=}a_n\left(1-\frac{a_n}{2}+o(a_n)\right)$$

Par conséquent

$$\frac{1}{a_{n+1}}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{1-\frac{a_n}{2}+o(a_n)}=\frac{1}{a_n}\left(1+\frac{a_n}{2}+o(a_n)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}+o(1)$$

Ainsi $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}$. Or la série $\sum\frac{1}{2}$ diverge. Par sommation de relation d'équivalence pour des séries à termes positifs divergentes, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}$$

ou encore

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_0}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{2}$$

Ainsi

$$\frac{1}{a_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{2}$$

puis

$$a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n}$$

On en déduit que la série $\sum a_n$ diverge par critère de Riemann.

Le domaine de définition de $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donc $]-1,1]$.

Solution 154

Par souci de simplicité, on confondra les fractions rationnelles et leurs fonctions rationnelles associées.

Montrons tout d'abord qu'une fraction rationnelle est développable en série entière en 0 si et seulement si elle n'admet pas 0 pour pôle.
Si une fraction rationnelle est développable en série entière en 0, il est clair qu'elle n'admet pas 0 pour pôle.
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Il est clair que $\dfrac{1}{\mathrm{X}-a}$ est développable en série entière en 0. Par dérivations successives, $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-a)^n}$ est également développable en série entière en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant une décomposition en éléments simples, on prouve qu'une fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle est développable en série entière en 0 de rayon de convergence le minimum des modules de ses pôles.

Soient $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions développables en série entière en 0 et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fractions rationnelles de $\mathbb{C}(\mathrm{X})$ n'admettant pas 0 pour pôle. $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$.
Notons T l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui à une fonction développable en série entière associe la suite des coefficients de son développement en série entière. T est bien définie par unicité du développement en série entière. De plus, T est clairement linéaire et injective.
Notons enfin S l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui à une suite (u_n) associe la suite (u_{n+1}).

Remarquons qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire si et seulement si il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul tel que $(u_n) \in \operatorname{Ker} \mathrm{P}(\mathrm{S})$. On en déduit en particulier que l'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. En effet, si (u_n) et (v_n) sont récurrentes linéaires, il existe $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $(u_n) \in \operatorname{Ker} \mathrm{P}(\mathrm{S})$ et $(v_n) \in \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$. Mais alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$\lambda(u_n) + \mu(v_n) \operatorname{Ker} \mathrm{P}(\mathrm{S}) + \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S}) \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{PQ})(\mathrm{S})$$

et donc $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$ est récurrente linéaire.

Soit $\mathrm{G} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Alors $\mathrm{T}(\mathrm{G})$ est une suite presque nulle donc récurrente linéaire.
Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On montre classiquement que

$$\operatorname{Ker}\left(\mathrm{S} - \frac{1}{a} \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}\right) = \left\{\left(\frac{\mathrm{P}(n)}{a^n}\right), \mathrm{P} \in \mathbb{C}_{r-1}[\mathrm{X}]\right\}$$

Puisque $\mathrm{T}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}-a}\right) = \left(-\dfrac{1}{a^{n+1}}\right)$ et que

$$\frac{1}{(\mathrm{X}-a)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(\frac{1}{\mathrm{X}-a}\right)^{(r-1)}$$

on obtient en dérivant $(r-1)$ fois la série entière définissant $\dfrac{1}{\mathrm{X}-a}$:

$$\mathrm{T}\left(\frac{1}{(\mathrm{X}-a)^r}\right) = \left((-1)^r \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} \frac{1}{a^{n+r}}\right)$$

On a donc bien $\mathrm{T}\left(\dfrac{1}{(\mathrm{X}-a)^r}\right)$ de la forme $\left(\dfrac{\mathrm{P}(n)}{a^n}\right)$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_{r-1}[\mathrm{X}]$. Ainsi

$$\mathrm{T}\left(\frac{1}{(\mathrm{X}-a)^r}\right) \in \operatorname{Ker}\left(\mathrm{S} - \frac{1}{a} \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}\right) = \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$$

avec $\mathrm{Q} = \left(\mathrm{X} - \dfrac{1}{a}\right)^r$. On en déduit que $\mathrm{T}\left(\dfrac{1}{(\mathrm{X}-a)^r}\right)$ est récurrente linéaire.
Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$. Alors F est la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Ce qui précède montre que $\mathrm{T}(\mathrm{F})$ est récurrente linéaire.

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{D}$ telle que $\mathrm{T}(f)$ soit une suite récurrente linéaire. Alors il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul tel que $\mathrm{T}(f) \in \operatorname{Ker} \mathrm{P}(\mathrm{S})$. Posons $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n\mathrm{Q}$ où $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ n'admet pas 0 pour racine. D'après le lemme des noyaux $\mathrm{T}(f) \in \operatorname{Ker} \mathrm{S}^n + \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$. $\mathrm{T}(f)$ est donc la somme d'une suite presque nulle et d'une suite de $\operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$. Il existe donc $\mathrm{G} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $g \in \mathcal{D}$ tels que $f = \mathrm{G} + g$ avec $\mathrm{G} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{T}(g) \in \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$.

Si Q est constant (non nul), alors $\mathrm{T}(g)$ est nulle et g est nulle par injectivité de T. Dans ce cas, $f = \mathrm{G} \in \mathcal{F}$.
Sinon, on écrit la décomposition en facteurs irréductibles de Q :

$$\mathrm{Q} = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_i)^{r_i}$$

où les a_i sont non nuls. Posons $q = \deg \mathrm{Q}$. On montre que $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S}) = q$ en considérant l'isomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^q \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, \dots, u_{q-1}) \end{array} \right.$.
La famille $\mathcal{B} = \left(\dfrac{1}{(\mathrm{X} - a_i)^{k_i}} \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq k_i \leq r_i}}$ est libre et T est injective donc la famille $\mathrm{T}(\mathcal{B})$ est libre. De plus, on a montré plus haut que

$$\mathrm{T}\left(\frac{1}{(\mathrm{X} - a_i)^{r_i}} \right) \in \operatorname{Ker} \left(\mathrm{S} - \frac{1}{a_i} \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^n} \right)^{r_i} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$$

Ainsi $\mathrm{T}(\mathcal{B})$ est une famille de vecteurs de $\operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$. De plus, elle possède q éléments : c'est donc une base de $\operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$. Ainsi $\mathrm{T}(g) \in \operatorname{vect}(\mathrm{T}(\mathcal{B})) = \mathrm{T}(\operatorname{vect}(\mathcal{B}))$. Par injectivité de T, $g \in \operatorname{vect}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$ puis $f = \mathrm{G} + g \in \mathcal{F}$.

En conclusion, les suites recherchées sont les suites récurrentes linéaires.

Solution 155

---

1. L'unicité provient du fait que deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini ($\mathbb{C}$ en l'occurrence) sont égaux.
   Tout d'abord, la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{\mathrm{P}(n) z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini car la suite de terme général $\dfrac{\mathrm{P}(n) z^n}{n!}$ est bornée pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   Posons $\mathrm{P}_k = \prod_{i=0}^{k-1} (\mathrm{X} - i)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ($\mathrm{P}_0 = 1$). On remarque que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

   $$e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}_k(n) z^n}{n!} = z^k$$

   De plus, $\deg \mathrm{P}_k = k$ et on montre alors classiquement que $(\mathrm{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Il existe donc une suite presque nulle (a_k) de complexes telle que $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{P}_k$. En posant $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k$, on a donc

   $$e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(n) z^n}{n!} = \mathrm{Q}(z)$$

2. La question précédente montre que u est bien une application de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ dans lui-même. On vérifie sans peine sa linéarité (on l'a en fait déjà utilisé). On a même montré que l'endomorphisme u envoie la base $(\mathrm{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ sur la base canonique de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$: c'est donc un automorphisme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

3. Notons λ une valeur propre de u et P un polynôme associé à cette valeur propre. Posons $d = \deg \mathrm{P}$. Il existe alors $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ tel que $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{P}_k$ puisque $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_d)$ est une base de $\mathbb{C}_d[\mathrm{X}]$. Notamment $a_d \neq 0$ puisque $\deg \mathrm{P} = d$. Or $u(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$ donc en identifiant le coefficient de X^d dans $u(\mathrm{P})$ et $\lambda \mathrm{P}$, on obtient $a_d = \lambda a_d$ et donc $\lambda = 1$. On a donc $\sum_{k=0}^{d} a_k (\mathrm{P}_k - \mathrm{X}^k) = 0$. Si l'on suppose $d \geq 2$, on obtient $\sum_{k=2}^{d} a_k (\mathrm{P}_k - \mathrm{X}^k)$ car $\mathrm{P}_0 = \mathrm{X}^0$ et $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^1$. Or $\deg \mathrm{P}_k - \mathrm{X}^k = k - 1$, donc la famille $(\mathrm{P}_2 - \mathrm{X}^2, \dots, \mathrm{P}_d - \mathrm{X}^d)$ est libre de sorte $a_2 = \dots = a_d = 0$, ce qui contredit le fait que $a_d \neq 0$. Ainsi $d \leq 1$. Donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est inclus dans $\mathbb{C}_1[\mathrm{X}]$. On vérifie sans peine l'inclusion réciproque.
   La seule valeur propre de u est donc 1 et le sous-espace propre associé est $\mathbb{C}_1[\mathrm{X}]$.

Solution 156

---

1. Soit $z \in \mathrm{D}$. Puisque les a_n sont réels, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$. Ainsi, si $z \in \mathbb{R}$,

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}) = f(z)$$

de sorte que $f(z) \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si $z \in \mathrm{D}$ et $f(z) \in \mathbb{R}$, alors

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = f(z)$$

et donc $z = \overline{z}$ par injectivité de f, puis $z \in \mathbb{R}$.

2. Posons $\mathrm{H}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\mathrm{H}^- = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$. D'après la question précédente, $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \mathrm{H}^+ \sqcup \mathrm{H}^-$. Or f est continue sur D et $\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+$ est une partie connexe par arcs (et même convexe) de D en tant qu'intersection de deux convexes. Ainsi $f(\mathrm{D})$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En particulier, $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+) \subset \mathrm{H}^+$ ou $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+) \subset \mathrm{H}^-$.
De plus, pour $r \in]-1,1[$,

$$\mathrm{Im}(f(ir) = r + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_{2n+1} r^{2n+1}$$

En particulier, $\mathrm{Im}(f(ir)) \underset{r \to 0}{\sim} r$. Puisque deux fonctions équivalentes en 0 sont de même signe au voisinage de 0, il existe $r \in]0,1[$ tel que $\mathrm{Im}(f(ir)) > 0$. On en déduit donc que $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+) \subset \mathrm{H}^+$.
De la même manière, $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^-) \subset \mathrm{H}^+$ ou $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^-) \subset \mathrm{H}^-$. A nouveau, $\mathrm{Im}(f(ir)) \underset{r \to 0}{\sim} r$ et donc il existe $r \in]-1,0[$ tel que $\mathrm{Im}(f(ir)) < 0$, de sorte que $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^-) \subset \mathrm{H}^-$.
On rappelle enfin que $f(\mathrm{D} \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ d'après la question précédente.

Soit alors $z \in \mathrm{D}$. Si $\mathrm{Im}(z) > 0$, alors $\mathrm{Im}(f(z)) > 0$ puisque $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+) \subset \mathrm{H}^+$. Réciproquement, si $\mathrm{Im}(f(z)) > 0$, on a nécessairement $\mathrm{Im}(z) > 0$ puisque $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+) \subset \mathrm{H}^+$ et $f(\mathrm{D} \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$

3. Pour simplifier, posons $a_1 = 1$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))\sin(n\theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k r^k \sin(k\theta)\sin(n\theta)$$

Posons $g_k : \theta \mapsto a_k r^k \sin(k\theta)\sin(n\theta)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in [0,\pi]$,

$$|g_k(\theta)| \leq |a_k| r^k$$

Comme la série entière définissant $f(r)$ converge absolument, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} g_k$ converge normalement sur $[0,\pi]$. On en déduit que

$$\mathrm{I}_n(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{\pi} \sin(k\theta)\sin(n\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sin(k\theta)\sin(n\theta) = \cos((k-n)\theta) - \cos((k+n)\theta)$$

On en déduit notamment que

$$\int_0^{\pi} \sin(k\theta)\sin(n\theta)\ \mathrm{d}\theta = \delta_{k,n}$$

Finalement, $\mathrm{I}_n(r) = a_n r^n$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [0,1[$. Par inégalité triangulaire,

$$|a_n| r^n = |\mathrm{I}_n(r)| \leq \int_0^{\pi} |\mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))||\sin(n\theta)|\ \mathrm{d}\theta \leq n \int_0^{\pi} |\mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))| \sin\theta\ \mathrm{d}\theta$$

D'après les questions **1** et **2**, $\mathrm{Im}(z) \geq 0 \implies \mathrm{Im}(f(z)) \geq 0$. Or pour $\theta \in [0,\pi]$, $\mathrm{Im}(re^{i\theta}) = r\sin\theta \geq 0$ donc $\mathrm{Im}(f(re^{i\theta})) \geq 0$. On en déduit donc que

$$|a_n| r^n \leq n \int_0^{\pi} \mathrm{Im}(f(z)) \sin\theta\ \mathrm{d}\theta = n a_1 r^1 = nr$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient bien $|a_n| \leq n$.

Montrons maintenant le résultat stipulant que $|\sin(n\theta)| \leq n \sin\theta$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$. On peut en fait montrer que $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin\theta|$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, ce qui donne le résultat par positivité de sin sur $[0, \pi]$. On procède par récurrence. Le résultat est évidemment vrai lorsque $n = 0$. Supposons le vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin(n\theta)\cos\theta + \sin\theta\cos(n\theta)| \leq |\sin(n\theta)| + |\sin\theta| \leq (n+1)|\sin\theta|$$

ce qui permet de conclure la récurrence.

Solution 157

---

1. On rappelle que S(E) désigne l'ensemble des permutations de E et que $\operatorname{card} S(E) = n!$. Notons $S_k(E)$ l'ensemble des permutations de E possédant exactement k points fixes. Alors $S(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} S_k(E)$. Se donner une permutation à k point fixes correspond à se donner une partie de E à k éléments qui formeront les k points fixes et un dérangement des $n-k$ élémenst restants. Ainsi $\operatorname{card} S_k(E) = \binom{n}{k} D_{n-k}$. Or,

$$\operatorname{card} S(E) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card} S_k(E)$$

donc

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

2. On a clairement $D_n \leq n!$ donc $0 \leq \frac{D_n}{n!} \leq 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$ est donc supérieur ou égal à 1, ce qui justifie que f est définie sur $]-1, 1[$.

3. On sait que la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini et a pour somme e^x. Par conséquent, par produit de Cauchy

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1, 1[,\ e^x f(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{D_k}{k!}\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{d'après la première question} \\
&= \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

Autrement dit

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

4. D'une part,

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

D'autre part, en utilisant un nouveau produit de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-x}}{1-x} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

5. Puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$, la dernière égalité peut aussi s'écrire

$$D_n = n!\left(\frac{1}{e} - R_n\right)$$

en posant

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Comme la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n!}$ vérifie clairement le critère des séries alternées,

$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

Ainsi

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{n+1} \leq D_n \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{n+1}$$

Pour $n \geq 2$, on a

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{2} < \frac{n!}{e} - \frac{1}{3} \leq D_n \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{3} \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$$

donc D_n est bien la partie entière de $\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2}$.

Lorsque $n = 1$, on peut remarquer que R_1 est du signe de $\dfrac{(-1)^1}{1!} = -1$ donc négatif. Ainsi $-\dfrac{1}{2} \leq R_1 \leq 0$ donc

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{2} < \frac{n!}{e} \leq D_n \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$$

A nouveau, D_n est bien la partie entière de $\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2}$.

Solution 158

---

1. Notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion de l'énoncé. Il est clair que $u_1(x) = 1 + x$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}_n$ vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x (u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2))\ dt$$

Or

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \int_0^x (u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2))\ dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\ dt = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ converge, la série télescopique $\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$ converge également donc la suite $(u_n(x))$ converge. La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers une certaine fonction u.

2. Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que

$$\forall t \in [0, x/2],\ 0 \leq u_{n+1}(t) - u_n(t) \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$$

A nouveau la série $\sum \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$ converge donc la série de fonctions $\sum u_{n+1} - u_n$ converge normalement sur $[0, x/2]$. A fortiori, elle converge uniformément sur $[0, x/2]$. On en déduit que la suite (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[0, x/2]$. On peut alors affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x u_n(t/2)\ \mathrm{d}t = 2 \lim_{n\to+\infty} \int_0^{x/2} u_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{x/2} u(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x u(t/2)\ \mathrm{d}t$$

Or

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t/2)\ \mathrm{d}t$$

donc par passage à la limite

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t/2)\ \mathrm{d}t$$

La fonction u est bien solution de (E).

3. Soit u une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ est solution de (E). Il existe donc $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. Comme la série entière $\sum a_n t^n$ converge normalement sur le segment $[0, x/2]$,

$$\int_0^x u(t/2)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{x/2} u(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{x/2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\ \mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{x/2} a_n t^n\ \mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{2^n(n+1)}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{2^n(n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1} x^n}{2^{n-1} n}$$

Par unicité du développement en série entière, $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1} n}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!}$$

Réciproquement, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!}$ pssoède bien un rayon de convergence infini (règle de d'Alembert ou comparaison à la série exponentielle) et ce qui précède montre que sa somme est effctivement solution de (E).

Solution 159

---

1. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ vaut 1. Par conséquent, si $|t| > \sqrt{2}$, la série $\sum f_n(t)$ diverge grossièrement et si $|t| < \sqrt{2}$, elle converge. Si $|t| = \sqrt{2}$, la série $\sum f_n(t)$ diverge (série de Riemann).
Finalement, $\mathrm{D} =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

2. On sait que pour $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc, par intégration d'une série entière, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$.
Ainsi, pour $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = -\ln(1-(t^2-1)) = -\ln(2-t^2)$$

3. Remarquons que

$$\max_{[0,1]} |f_n| = |f_n(0)| = \frac{1}{n+1}$$

et $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge. La série $\sum f_n$ ne converge donc pas normalement sur $[0,1]$.

4. Lorsque $t \in [0,1]$, la suite de terme général $\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}$ est décroissante et converge vers 0. La série $\sum g f_n(t)$ vérifie donc le critère spécial des séries alternées. En particulier,

$$\forall t \in [0,1], \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \le |f_{n+1}(t)| = \frac{(1-t^2)^{n+2}}{n+2} \le \frac{1}{n+2}$$

Le reste de la série $\sum f_n$ converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$ i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

5. Comme la série $\sum f_n$ converge uniformément sur le *segment* $[0,1]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge vers $-\int_0^1 \ln(2-t^2)\, dt$.

6. Il s'agit d'un simple calcul.

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \ln(2-t^2)\, dt &= -\int_0^1 \ln(\sqrt{2}-t)\, dt - \int_0^1 \ln(\sqrt{2}+t)\, dt \\
&= -\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}} \ln u\, du - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1} \ln u\, du \qquad \text{par changement de variable} \\
&= -[u\ln u - u]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}} - [u\ln u - u]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1} \\
&= 2 - 2\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from numpy import log, sqrt
>>> I=quad(lambda t: -log(2-t**2),0,1)[0]
>>> J=2-2*sqrt(2)*log(sqrt(2)+1)
>>> print(I,J)
-0.49290096056092203 -0.49290096056092203
```

Solution 160

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que les a_n ne soient pas tous nuls. Posons $m = \min\{n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0\}$. Alors

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k z^p = z^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+m} z^k$$

Posons alors $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+m} z^k$ de sorte que

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ f(z) = z^m g(z)$$

Par conséquent,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f(z_p) = z_p^m g(z_p)$$

Mais comme la suite (z_p) ne s'annule pas,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ g(z_p) = 0$$

g est évidemment développable en série entière donc continue en 0. Notamment, $\lim_{z\to 0} g(z) = g(0) = a_p \neq 0$. Mais comme (z_p) converge vers 0, la continuité de g en 0, montre que $g(0) = \lim_{p\to+\infty} g(z_p) = 0$, ce qui est contradictoire.

Finalement, la suite (a_n) est nulle.

2. Notons R le rayon de convergence commun de f et g. Alors $f - g$ est développable en série entière et son rayon de convergence au moins égal à R. D'après la question précédente, tous les coefficients du développement en série entière de $f - g$ son nuls. Autrement dit $f - g$ est nul sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. Ainsi f et g coïncident sur leur disque ouvert de convergence commun.

Solution 161

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|w_n\|_\infty = \dfrac{|\alpha|^n}{n} \leq |\alpha|^n$. Or $|\alpha| < 1$ donc $\sum \|al|^n$ converge donc $\sum w_n$ converge normalement et donc simplement sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, w_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $w_n'(x) = -\alpha^n \sin(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $\|w_n'\|_\infty = |\alpha|^n$ et donc $\sum w_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. On en déduit que W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{W}'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} w_n'(x) \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \sin(nx) \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \sin(nx) \\
&= -\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{inx}\right) \\
&= -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{ix}}\right) \qquad \text{car } |\alpha e^{ix}| < 1 \\
&= -\frac{\alpha \sin x}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}
\end{aligned}$$

2. On en déduit qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{W}(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) + \mathrm{C}$$

D'après un développement en série entière usuel,

$$\mathrm{W}(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n} = -\ln(1-\alpha)$$

On en déduit que $\mathrm{C} = 0$. La série $\sum w_n$ converge vers W uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$ donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right) \mathrm{d}x &= -2\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{W}(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -2\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_n(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Solution 162

1. Posons $q = \operatorname{card} \mathbb{K}$ et notons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré n. Posons $\mathrm{P}_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{\mathrm{P} \in \mathcal{P}_k} \frac{1}{1 - t^{\deg \mathrm{P}}}$ pour $t \in [0, 1[$,
$$\ln(\mathrm{P}_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mathrm{P} \in \mathcal{P}_k} -\ln(1 - t^k)$$
Or il est clair que $\operatorname{card} \mathcal{P}_k$ est inférieur ou égal au nombre de polynômes unitaires de degré k, c'est-à-dire q^k, donc
$$0 \leq \ln(\mathrm{P}_n(t)) \leq \sum_{k=1}^{n} -q^k \ln(1 - t^k)$$
Or pour $t \in [0, 1[$, $-q^k \ln(1 - t^k) \underset{k \to +\infty}{\sim} (qt)^k$. On en déduit que la série de terme général $-q^k \ln(1 - t^k)$ converge pour $t \in [0, \frac{1}{q}[$. Il en est donc de même pour la suite $(\ln(\mathrm{P}_n(t)))$ et donc pour le produit infini définissant $\zeta(t)$. La fonction ζ est donc définie sur $\left[0, \frac{1}{q}\right[$.

2. On va montrer que pour $t \in \left[0, \frac{1}{q}\right[$,
$$\zeta(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^k t^k$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{Q}_n$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré inférieur ou égal à n. Fixons $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et remarquons que
$$\prod_{\mathrm{P} \in \mathcal{Q}_\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{M}} t^{k \deg \mathrm{P}} = \sum_{k \in [\![0, \mathrm{M}]\!]^{\mathcal{Q}_n}} t^{\deg \mathrm{Q}_k}$$
avec $\mathrm{Q}_k = \prod_{\mathrm{P} \in \mathcal{Q}_n} \mathrm{P}^{k_\mathrm{P}}$. Tout d'abord, on sait que tout polynôme unitaire de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ s'écrit de manière unique sous la forme $\prod_{\mathrm{P} \in \mathcal{P}} \prod_{k \in \mathbb{N}^{(\mathcal{P})}} \mathrm{P}^{k_\mathrm{P}}$ (où $\mathbb{N}^{(\mathcal{P})}$ désigne classiquement l'ensemble des familles presque nulles de $\mathbb{N}^{\mathcal{P}}$). De plus, il existe exactement q^n polynômes unitaires de degré n. On en déduit :
$$\prod_{\mathrm{P} \in \mathcal{Q}_\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{M}} t^{k \deg \mathrm{P}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} q^n t^n$$
Enfin la décomposition en facteurs irréductibles unitaires d'un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de degré inférieur ou égal à N fait intervenir des polynômes irréductibles unitaires de degré au plus N donc
$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} q^n n t^n \leq \prod_{\mathrm{P} \in \mathcal{Q}_\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{M}} t^{k \deg \mathrm{P}}$$
En faisant tendre M vers $+\infty$, on obtient
$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} q^n t^n \leq \prod_{\mathrm{P} \in \mathcal{Q}_\mathrm{N}} \frac{1}{1 - t^{\deg \mathrm{P}}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} q^n t^n$$
Il suffit alors de faire tendre N vers $+\infty$ pour avoir le résultat voulu.

> **Remarque.** On a en fait prouvé que $\zeta(t) = \frac{1}{1 - qt}$ pour $t \in \left[0, \frac{1}{q}\right[$.

Solution 163

Remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car le discriminant du trinôme $\mathrm{X}^2 - \sqrt{2}\mathrm{X} + 1$ est strictement négatif. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} = \frac{2x - \sqrt{2}}{\left(x - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(x - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)} = \frac{1}{x - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{1}{x - e^{-\frac{i\pi}{4}}} = -\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{1 - xe^{-\frac{i\pi}{4}}} - \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{1 - xe^{\frac{i\pi}{4}}}$$

Or on sait que pour tout nombre complexe z tel que $z < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Ainsi pour tout $x \in]-1,1[$

$$f'(x) = -e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-\frac{ni\pi}{4}} - e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{ni\pi}{4}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{-\frac{ni\pi}{4}} - \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{\frac{ni\pi}{4}} = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^{n-1}$$

Comme $f(0) = 0$, on obtient en intégrant,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n} x^n$$

Solution 164

1. Posons $u_n(x) = e^{-n+n^2 ix}$. Les u_n sont clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $u_n^{(k)}(x) = n^{2k} i^k e^{-n+n^2 ix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n^{(k)}\|_\infty = n^{2k}e^{-n}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{2k}e^{-n}$ converge ($n^{2k}e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2)$). La série $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Supposons que g soit développable en série entière. Il existerait donc $\mathrm{R} > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[,\ g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

D'après la question précédente

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0) = i^k \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k} e^{-n}$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\right| = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k}e^{-n} \geq \frac{k^{2k}e^{-k}}{k!} = \frac{k^k}{k!} \cdot k^k e^{-k} \geq k^k e^{-k}$$

Notamment pour $r > 0$,

$$\left|\frac{g^{(k)}(0)}{k!} r^k\right| \geq \left(\frac{kr}{e}\right)^k$$

donc

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{g^{(k)}(0)}{k!} r^k\right| = +\infty$$

ce qui contredit la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} r^k$. g n'est donc pas développable en série entière.

Solution 165

1. On décompose en éléments simples :

$$f(z) = \frac{1}{(1-2z)(1-3z)} = \frac{3}{1-3z} - \frac{2}{1-2z}$$

D'une part

$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^n$$

avec rayon de convergence $\frac{1}{3}$.
D'une part

$$\frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$$

avec rayon de convergence $\frac{1}{2}$.
Par conséquent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(3^{n+1} - 2^{n+1})z^n$$

Et comme $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$, le rayon de convergence est $\min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

2. Remarquons que

$$g(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln(1 - x)$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{2^n n}$$

avec rayon de convergence 2 et

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

avec rayon de convergence 1. Ainsi

$$g(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} + \frac{1}{n}\right)x^n$$

avec rayon de convergence $\min(1, 2) = 1$.

3. Tout d'abord

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n + 1)!}$$

avec rayon de convergence infini. Par «primitivation»

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n + 1)!(4n + 3)}$$

avec rayon de convergence infini également.

Solution 166

---

1. Supposons qu'une telle fonction f existe. On montre alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = f(q^n x)\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + q^k x}{1 - q^k x}$$

Fixons $x \in]-1, 1[$. Comme $q \in]-1, 1[$, $\lim_{n\to+\infty} f(q^n x) = f(0) = 1$ par continuité de f en 0. Posons $u_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + q^k x}{1 - q^k x}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que la suite $(u_n(x))$ est strictement positive. De plus,

$$\ln(u_n + 1(x)) - \ln(u_n(x)) = \ln(1 + q^n x) - \ln(1 - q^n x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2q^n x$$

On en déduit que la série télescopique $\sum \ln(u_n + 1(x)) - \ln(u_n(x))$ converge. Par conséquent, la suite $(\ln(u_n(x)))$ converge puis la suite $(u_n(x))$ converge également. Ona donc nécessairement $f(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$, ce qui permet de conclure à l'unicité de f.

Posons maintenant $u_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + q^k x}{1 - q^k x}$ pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme précédemment, pour tout $x \in]-1, 1[$, la suite $(u_n(x))$ converge vers un réel que l'on note $f(x)$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$, $u_{n+1}(x) = \frac{1 + x}{1 - x}u_n(qx)$ donc $f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}f(qx)$ par passage à la limite.

Démontrons enfin que f est continue en 0 (en fait sur $]-1,1[$). Tout d'abord, les fonctions $\ln\circ u_{n+1} - \ln\circ u_n$ sont continues sur $]-1,1[$. Fixons $a \in [0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-a,a]$,

$$|\ln(u_{n+1}(x)) - \ln(u_n(x))| \leq 2\max\{\ln(1+|q|^n a), -\ln(1-|q|^n a)\} \leq 2|q|^n a$$

On en déduit que la série $\sum \ln\circ u_{n+1} - \ln\circ u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a,a]$. Ainsi sa somme $\ln\circ f$ est continue sur $]-1,1[$. Par continuité de l'exponentielle, f est donc également continue sur $]-1,1[$ et donc a fortiori en 0.

2. Supposons que f soit développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$. Notons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ son développement en série entière. Puisque $(1-x)f(x) = (1+x)f(qx)$ pour tout $x \in]-r,r[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^{n+1}$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} q^{n-1} x^n$$

ou enfin

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n q^n - a_{n-1} q^{n-1}) x^n$$

Par unicité du développement en série entière

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n - a_{n-1} = a_n q^n - a_{n-1} q^{n-1}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1-q^{n-1}}{1-q^n} a_{n-1}$$

De plus, on a $a_0 = f(0) = 1$.
Réciproquement, considérons la suite (a_n) telle que $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1-q^{n-1}}{1-q^n} a_{n-1}$$

Comme $q \in]-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = 1$. D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1. Posons alors $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$. Alors $g(0) = 1$ et g est continue sur $]-1,1[$ donc en 0. Par ailleurs, en reprenant «à l'envers» ce qui précède, on montre que

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \frac{1+x}{1-x} g(qx)$$

D'après l'unicité prouvée à la première question, $f = g$. Ainsi f est développable en série entière et cette série entière a pour rayon de convergence 1.

> **Remarque.** La deuxième question prouve en fait la partie «existence» de la première question. En étant un peu malin, on aurait pu rechercher une fonction f développable en série entière dans la première question.

Solution 167

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{H}_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$. Comme ces deux séries entières ont pour rayon de convergence 1, le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{H}_n x^n$ est supérieur ou égal à 1. De plus, (H_n) ne converge pas vers 0 donc le rayon de convergence est inférieur ou égal à 1 : il vaut donc 1. Enfin, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{H}_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x}\right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Solution 168

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si la suite extraite $(a_{n^2} r^{n^2})$ est bornée (les autres termes sont nuls), c'est-à-dire si et seulement si la suite $(q^n r^{n^2})$ est bornée. Or

$$q^n r^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln(r) + n\ln(q)\right)$$

On en déduit que $(q^n r^{n^2})$ diverge vers $+\infty$ si $r > 1$ ou si $r = 1$ et $q > 1$ et qu'elle est bornée sinon.
Le rayon de convergence vaut donc toujours 1.

Solution 169

1. C'est du cours. La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x^{2n}$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1+x^2}$. Par intégration, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ a également pour rayon de convergence 1 et pour somme $\arctan(x)$, ce qui répond à la question.

2. Une simple application de la règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence vaut 1.

3. f est bien dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{2k-1} = x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x^{2k+1}} 2k+1 = x\arctan(x)$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x t\arctan(t)\ \mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{x^2\arctan(x)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2\arctan(x)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan(x) \end{aligned}$$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$,

$$\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}\right| \leq \frac{1}{4k^2-1}$$

Or la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{4k^2-1}$ converge (équivalent + critère de Riemann) donc la série entière définissant f converge normalement sur $[-1,1]$.

5. La convergence normale et donc uniforme sur $[-1,1]$ permet d'appliquer le théorème d'interversion limite/série. Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Solution 170

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{t}{(2+t^2)^{n+1}}\right]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 \frac{t^2\ \mathrm{d}t}{(2+t^2)^{n+2}} \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)(a_n - 2a_{n+1}) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$4(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n + \frac{1}{3^{n+1}}$$

puis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{4(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)3^{n+1}a_n}$$

Or pour $t \in [0,1]$

$$\frac{1}{(2+t^2)^{n+1}} \geq \frac{1}{3^{n+1}}$$

donc

$$a_n \geq \frac{1}{3^{n+1}}$$

Par conséquent,

$$4(n+1)3^{n+1}a_n \geq 4(n+1)$$

de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4(n+1)3^{n+1}a_n} = 0$$

puis

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 2.

2. Notons $f(x)$ la somme de cette série entière.
Soit $x \in]-2,2[$. En reprenant la relation obtenue à la première question

$$4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$$

ou encore

$$4f'(x) = 2xf'(x) + f(x) + \frac{1}{3-x}$$

puis

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}f(x) + \frac{1}{2(2-x)(3-x)}$$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2(2-x)}f(x)$ sur $]-2,2[$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{2-x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On applique alors la méthode de variation de la constante et on recherche une solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y' = \frac{1}{2(2-x)}y + \frac{1}{2(2-x)(3-x)}$$

de la forme $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{2-x}}$ avec φ dérivable sur $]-2,2[$ ce qui donne

$$\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2(2-x)(3-x)}$$

ou encore

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-x}(3-x)} = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{2-x}^2}$$

On peut alors choisir

$$\varphi(x) = -\arctan(\sqrt{2-x})$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{2-x}} - \frac{\arctan(\sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}}$$

Or

$$f(0) = a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi/2 - \arctan(\sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)$$

Solution 171

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.
On effectue maintenant une décomposition en éléments simples :

$$\frac{n^2+4n-1}{n+2} = n+2-\frac{5}{n+2}$$

Ainsi pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$,

$$\frac{n^2+4n-1}{n+2} x^n = (n+1)x^n + x^n - \frac{5}{x^2} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

La série géométrique $\sum x^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

En considérant la dérivée de cette série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Et en en considérant une primitive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) - x$$

Finalement,

$$\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n+2} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)} + \frac{5(\ln(1-x)+x)}{x^2}$$

La somme vaut $-\frac{1}{2}$ lorsque $x = 0$.

Probabilités

Solution 172

---

1. Notons Y_i la variable aléatoire valant 1 si la i-ème ampoule est annulée et 0 sinon. Les Y_i sont des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_i mutuellement indépendantes et $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Ainsi $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i$ et $\mathbb{V}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i - p_i^2$.

2. Dans ce cas, $\mathbb{V}(Y) = m - \sum_{i=1}^{n} p_i^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} 1 \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \geq \frac{m^2}{n}$$

De plus, cette inégalité est une égalité lorsque tous les p_i sont égaux à $\frac{m}{n}$. $\mathbb{V}(Y)$ est donc maximale dans ce cas et alors Y suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{m}{n}$.

Solution 173

Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ puisque X et Y le sont. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $\{Z \geq k\} = \{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}$ donc par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}\left(\{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}\right) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k)$$

Puisque $\{X \geq k\} = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} \{X = k\}$,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p_1)^{n-1}p_1 = (1-p_1)^{k-1}$$

> **Remarque.** On aurait pu se passer du calcul de somme de série puisqu'une loi géométrique représente la loi du premier succès.

De la même manière

$$\mathbb{P}(Y \geq k) = (1-p_2)^{k-1}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}$$

On constate enfin que

$$\{Z \geq k\} = \{Z = k\} \sqcup \{Z \geq k+1\}$$

donc

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1) = (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1} - (1-p_1)^k(1-p_2)^k$$

Solution 174

1. Remarquons que

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\right)$$

Ainsi par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left((1-p)^{n-1}p\right)^2 = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{2n} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

2. X + Y est à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Remarquons que

$$\{X + Y = n\} = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} \left(\{X = k\} \cap \{Y = n-k\}\right)$$

A nouveau par indépednace de X et Y,

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}p = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

> **Remarque.** On aurait aussi pu utiliser les fonctions génératrices de X et Y.

3. Puisque $\{Z > n\} = \bigsqcup_{k \geq n+1} \{Z = k\}$,

$$\mathbb{P}(Z > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p = p(1-p)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = (1-p)^n$$

> **Remarque.** Ceci est cohérent avec l'interprétation de la loi géométrique comme loi du premier succès.

4. On remarque que

$$\{Z > X + Y\} = \bigsqcup_{n \geq 2} (\{Z > n\} \cap \{X + Y = n\})$$

Par indépendance de Z et X + Y,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z > X + Y) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n)\mathbb{P}(X + Y = n) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^n (n-1) p^2 (1-p)^{n-2} \\
&= p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(1-p)^{2n-2} \\
&= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{2n} \\
&= p^2(1-p)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{2(n-1)} \\
&= \frac{p^2(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$ pour $t \in]-1, 1[$. En simplifiant

$$\mathbb{P}(Z > X + Y) = \frac{(1-p)^2}{(2-p)^2}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> import numpy.random as rd
>>>
>>> p=.2
>>> n=10000
>>> X=rd.geometric(p,n)
>>> Y=rd.geometric(p,n)
>>> Z=rd.geometric(p,n)
>>> sum(Z>X+Y)/n
np.float64(0.2008)
>>> (1-p)**2/(2-p)**2
0.19753086419753088
```

Solution 175

---

1. La loi de X est une loi géométrique de paramètre 1/2.

2. Notons B l'événement consitant à obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience. Alors

$$B = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} (B \cap \{X = n\})$$

Or

$$\mathbb{P}(B \cap X = n) = \mathbb{P}_{X=n}(B)\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}$$

Comme

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on obtient par intégration

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(B) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from random import random
>>> from math import log
>>>
>>> def simul():
...     nb=1
...     while random()<.5:
...         nb+=1
...     return random()<1/nb
...
>>> N=10**5
>>> sum([simul() for n in range(N)])/N
0.69218
>>> log(2)
0.6931471805599453
```

Solution 176

1. X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(Y=n) = (1-p)^{n-1}p$$

2. **a.** U et V sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$. Soit alors $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$.
Traitons d'abord le cas où $m = 0$. Alors

$$\{(U,V) = (n,0)\} = \{X = n\} \cap \{Y = n\}$$

donc, par indépendance de X et Y

$$\mathbb{P}((U,V) = (n,0)) = \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=n) = p^2(1-p)^{2n-2}$$

Traitons maintenant le cas $m > 0$. Alors

$$\{(U,V) = (n,m)\} = (\{X = n+m\} \cap \{Y = n\})$$

A nouveau, par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}((U,V) = (n,m)) = \mathbb{P}(X=n+m)\mathbb{P}(Y=n) = p^2(1-p)^{2n+m-2}$$

En intervertissant X et Y, on trouve que si $m < 0$,

$$\mathbb{P}((U,V) = (n,m)) = p^2(1-p)^{2n-m-2}$$

Dans tous les cas,

$$\mathbb{P}((\mathrm{U},\mathrm{V}) = (n,m)) = p^2(1-p)^{2n+|m|-2}$$

On retrouve alors les lois marginales.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{U}=n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U}=n,\mathrm{V}=m)\\ &= p^2(1-p)^{2n-2} + 2\sum_{m=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n+m-2}\\ &= p^2(1-p)^{2n-2} + 2p^2(1-p)^{2n-1}\sum_{m=1}^{+\infty}(1-p)^{m-1}\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(1-p)^{m-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{U}=n) = p(1-p)^{2n-2}(2-p) = \left((1-p)^2\right)^{n-1}\left(1-(1-p)^2\right)$$

Notamment, U suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2$.
De la même manière

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{V}=m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U}=n,\mathrm{V}=m)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n+|m|-2}\\ &= p^2(1-p)^{|m|}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2(n-1)}\\ &= p^2(1-p)^{|m|}\cdot\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)^{|m|}}{2-p}\end{aligned}$$

b. Il s'agit d'une simple vérification :

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z},\ \mathbb{P}(\mathrm{U}=n)\mathbb{P}(\mathrm{V}=m) = p(1-p)^{2n-2}(2-p)\cdot\frac{p(1-p)^{|m|}}{2-p} = p^2(1-p)^{2n+|m|-2} = \mathbb{P}(\{\mathrm{U}=n\}\cap\{\mathrm{V}=m\})$$

3. L'énoncé suppose implicitement que U et V sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$. Puisque $\mathrm{X} = \mathrm{U} + \max(\mathrm{V},0)$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{U} - \min(\mathrm{V},0)$, X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Posons $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Par indépendance de U et V d'une part et de X et Y d'autre part,

$$\mathbb{P}(\mathrm{U}=n)\mathbb{P}(\mathrm{V}=0) = \mathbb{P}(\mathrm{U}=n,\mathrm{V}=0) = \mathbb{P}(\mathrm{X}=n,\mathrm{Y}=n) = p_n^2$$

De même,

$$\mathbb{P}(\mathrm{U}=n)\mathbb{P}(\mathrm{V}=1) = \mathbb{P}(\mathrm{U}=n,\mathrm{V}=1) = \mathbb{P}(\mathrm{X}=n+1,\mathrm{Y}=n) = p_np_{n+1}$$

Par hypothèse ces deux quantités ne sont pas nulles, donc en divisant membre à membre

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{V}=1)}{\mathbb{P}(\mathrm{V}=0)}$$

La suite de terme général $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ est donc constante i.e. la suite (p_n) est géométrique. En notant $1-p$ sa raison, $p_n = (1-p)^{n-1}p_1$.
Mais comme $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, $p_1 = p$. Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = (1-p)^{n-1}p$$

donc X et Y suivent bien la loi géométrique de paramètre p.
On a vu plus haut que $1-p = \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{V}=1)}{\mathbb{P}(\mathrm{V}=0)}$ i.e. $p = 1-\dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{V}=1)}{\mathbb{P}(\mathrm{V}=0)}$.

Solution 177

1. **a.** Les variables aléatoires Y_k sont mutuellement indépendantes.
   On a clairement $Y_1 = 1$.

   b. Y_k suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$. On en déduit que $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{n}{n-k+1}$ et que $\mathbb{V}(Y_k) = \frac{\frac{k-1}{n}}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2} = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}$.

2. On a clairement $X = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = nH_n$$

3. Par comparaison série/intégrale, on obtient classiquement $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$.

Solution 178

Pour $1 \leq i \leq 6$, notons p_i (resp. q_i) la probabilité d'obtenir i en lançant le premier (resp. le deuxième) dé. De même, pour $2 \leq i \leq 12$, notons r_i la probabilité d'obtenir i en lançant deux dés. On a la relation suivante : $r_k = \sum_{i+j=k} p_i q_j$.

Notons $P = \sum_{i=1}^{6} p_i X^{i-1}$, $Q = \sum_{i=1}^{6} q_i X^{i-1}$ et $R = \sum_{i=2}^{12} q_i X^{i-2}$. La relation précédente signifie que $R = PQ$. S'il y avait équiprobabilité sur les sommes, on aurait $r_i = \frac{1}{11}$ pour $2 \leq i \leq 12$ i.e. $R = \frac{1}{11} \sum_{i=0}^{10} X^i$.

Les racines de R sont les racines $11^{\text{èmes}}$ de l'unité privées de 1. Aucune de ces racines n'est réelle. De plus, $\deg P \leq 5$ et $\deg Q \leq 5$. Puisque $\deg R = \deg PQ = 10$, $\deg P = \deg Q = 5$. Puisque 5 est impair, les polynômes P et Q admettent chacun au moins une racine réelle en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, d'où une contradiction.

Il est donc impossible de piper deux dés de manière à avoir équiprobabilité sur les sommes.

Solution 179

1. Il est néceessaire et suffisant d'avoir $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$ et $\mathbb{P}(\{n\}) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On prend donc $\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$.

2. Comme $A_r = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{rn\}$,

$$\mathbb{P}(A_r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{rn\}) = \frac{1}{r^s}$$

3. Soient $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers distincts. Comme les p_i sont premiers entre eux deux à deux,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{p_i} = A_q$$

   avec $q = \prod_{i=1}^{n} p_i$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{p_i}\right) = \mathbb{P}(A_q) = \frac{1}{q^s} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_{p_i})$$

   Les A_p pour $p \in \mathcal{P}$ sont donc mutuellement indépendants.

4. A_p est l'ensemble des multiples de p strictement positifs i.e. l'ensemble des entiers naturels non nuls divisibles par p. Ainsi $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls ne possédant aucun diviseur premier. Il est donc clair que $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p} = \{1\}$.

On montre classiquement que les $\overline{A_p}$ pour $p \in \mathcal{P}$ sont également mutuellement indépendants. Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_{p_i}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{p_i^s}$$

Posons $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_{p_i}}$. La suite (B_n) est décroissante pour l'inclusion et

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \overline{A_{p_i}} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}$$

Par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{p_i^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} 1 - \frac{1}{p^s}$$

> **Remarque.** La notion de produit indexé sur un ensemble infini n'est pas au programme. Il faudrait établir pour les produits une théorie similaire à celle des familles sommables pour donner un sens précis à ce produit infini.

Finalement

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p\in\mathcal{P}} 1 - \frac{1}{p^s}$$

et donc

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

5. Supposons que la famille $\left(\frac{1}{p}\right)_{p\in\mathcal{P}}$ soit sommable. Comme il s'agit d'une famille positive, ceci équivaut à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p_n}$. Comme $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{1}{p_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(1-\frac{1}{p_n})$. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\ln(1-\frac{1}{p_n})$ converge. Notons $S_n = \sum_{i=1}^{n} -\ln\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$. Alors (S_n) converge vers un réel ℓ. Par conséquent

$$e^{S_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell}$$

Mais pour tout $s > 1$,

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^s}} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$$

donc, en passant à la limite, $\zeta(s) \leq e^{\ell}$ pour tout $s > 1$.
On montre alors que $\lim_{1^+} \zeta = +\infty$ pour aboutir à une contradiction. On peut par exemple utiliser une comparaison série/intégrale :

$$\forall s > 1,\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1}$$

Solution 180

1. Notons $S_{j,k}$ la somme de l'énoncé. Si $\omega^j = 1$, autrement dit si k divise j, $S_{j,k} = k$. Sinon, $S_{j,k} = \dfrac{\omega^k - 1}{\omega - 1} = 0$.

2. X_n suit clairement la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(k \mid X_n) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{S_{j,k}}{k}\mathbb{P}(X = j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{S_{j,k}}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{j} \qquad \text{car } X_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2) \\
&= \frac{1}{2^n k} \sum_{j=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{n}{j}\omega^{\ell j} \\
&= \frac{1}{2^n k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\omega^{\ell j} \qquad \text{car les deux sommes sont finies} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{2^n}(1 + \omega^\ell)^n
\end{aligned}$$

Lorsque $\ell = 0$, $\dfrac{1}{2^n}(1 + \omega^\ell)^n = 1$ et lorsque $\ell \in [\![1, k-1]\!]$,

$$\left|1 + \omega^\ell\right| = 2\left|\cos \frac{\pi\ell}{k}\right| < 2$$

Ainsi, dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}(1 + \omega^\ell)^n = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(k \mid X_n) = \frac{1}{k}$$

ce qui est conforme à l'intuition.

Solution 181

1. Le premier tirag eétant effectué, on tire des jetons jusqu'à obtention d'un jeton différent du premier jeton tiré. A chaque tentative, la probabilité de réussite est de $\dfrac{2}{3}$. On en déduit que $Y - 1 \sim \mathcal{G}(2/3)$.

2. Par conséquent, Y est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et

$$\forall n \geq 2,\ \mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y - 1 = n - 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n-1}}$$

3. On sait alors que $\mathbb{E}(Y - 1) = \dfrac{3}{2}$ et $\mathbb{V}(Y - 1) = \dfrac{3}{4}$. Donc $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{5}{2}$ et $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{3}{4}$.

4. Remarquons que (Y, Z) est à valeurs dans $\left\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2,\ 2 \leq k < \ell\right\} \cup \{(+\infty, +\infty)\}$. De plus, pour $2 \leq k < \ell$,

$$\mathbb{P}((Y, Z) = (k, \ell)) = \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(Z = \ell \mid Y = k) = \frac{2}{3^{k-1}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}}$$

5. $\mathbb{Z}$ est à valeurs dans $[\![3, +\infty]\!]$. Pour tout entier $\ell \geq 3$,

$$\mathbb{P}(Z = \ell) = \sum_{k=2}^{\ell-1} \mathbb{P}((Y, Z) = (k, \ell)) = \sum_{k=2}^{\ell-1} \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}} = \frac{2^{\ell-1}}{3^{\ell-1}}\left(1 - \frac{1}{2^{\ell-2}}\right)$$

On peut vérifier avec Python.

```python
from random import randint

def Z():
    X=randint(1,3)
    Y=randint(1,3)
    n=2
    while X==Y:
        Y=randint(1,3)
        n+=1
    Z=randint(1,3)
    n+=1
    while Y==Z or X==Z:
        Z=randint(1,3)
        n+=1
    return n

def frequencies(l):
    proba_theorique = lambda i: 2**(i-1)/3**(i-1)*(1-1/2**(i-2))
    proba_empirique = lambda i: l.count(i)/len(l)
    return [(proba_theorique(i), proba_empirique(i)) for i in range(3,max(l)+1)]
```

```
>>> frequencies([Z() for _ in range(100000)])
[(0.2222222222222222, 0.22267), (0.2222222222222222, 0.22117), (0.1728395061728395, 0.17327),
↪ (0.1234567901234568, 0.12389), (0.0850480109739369, 0.08669), (0.05761316872427984, 0.05584),
↪ (0.03871361073007164, 0.03852), (0.025910684346898336, 0.02558), (0.017307659740215753,
↪ 0.01737), (0.011549729885349455, 0.01163), (0.007703583276412622, 0.00785),
↪ (0.005136976635223854, 0.00512), (0.003425069240465493, 0.00335), (0.0022835188770824145,
↪ 0.00239), (0.001522392379201194, 0.00155), (0.0010149437398495463, 0.00111),
↪ (0.0006766343222492809, 0.00064), (0.00045109126894938174, 0.00051), (0.00030072808622731934,
↪ 0.00026), (0.00020048558201634563, 0.00028), (0.00013365711841027467, 9e-05),
↪ (8.910476685108673e-05, 7e-05), (5.9403184982136813e-05, 4e-05), (3.9602125681895316e-05,
↪ 8e-05), (2.6401417908087134e-05, 2e-05), (1.760094553433262e-05, 0.0),
↪ (1.1733963776979923e-05, 0.0), (7.82264254712823e-06, 0.0), (5.215095041132692e-06, 1e-05)]
```

Solution 182

1. Si n voitures sont passés en 1H, chacune de ces voitures a une probabilité $\frac{1}{m}$ de chosir le gucihet n°1. Ainsi la loi de X conditionnée par l'événement $N = n$ est une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{m}$. Autrement dit

$$\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}$$

2. D'après la formule des probailités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n)$$

Or $\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = 0$ lorsque $k > n$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n + k)\mathbb{P}(N = n + k) \\
&= \sum_{n=}^{+\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} \\
&= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

3. On reconnaît la somme d'une série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{\lambda\left(1-\frac{1}{m}\right)}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\frac{\lambda}{m}} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!}$$

Par conséquent, X suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{m}$.

4. C'est du cours : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \dfrac{\lambda}{m}$.

Solution 183

1. L'application $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t^n e^{-t^2} \underset{\pm+\infty}{=} \dfrac{1}{t^2}$ par croissances comparées. donc l'intégrale I_n converge par comparaison à une intégrale de Riemann.

2. Remarquons que

- $t \mapsto t^{n+1}/(n+1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $t \mapsto e^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2} = 0$.

Donc, par intégration par parties

$$I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t^{n+2}}{n+1} e^{-t^2}\, dt$$

ou encore

$$2I_{n+2} = (n+1)I_n$$

Comme $t \mapsto te^{-t^2}$ est impaire, $I_1 = 0$. Ainsi $I_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, On montre également que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

3. On utilise la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=n)\mathrm{I}_n \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \mathrm{I}_n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n} \mathrm{I}_{2n}}{(2n)!} \\
&= e^{-\lambda}\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^{2n}n!} \\
&= e^{-\lambda}\sqrt{\pi}e^{\frac{\lambda^2}{4}} \\
&= \sqrt{\pi}e^{-\lambda+\frac{\lambda^2}{4}}
\end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de transfert est justifiée a posteriori puisque le calcul précédent montre que la série à termes postifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)\mathrm{I}_n$ converge.

Solution 184

On note respectivement P_n et F_n le nombre de «piles» et de «faces» obtenus en n coups. En remarquant que $\mathrm{P}_n+\mathrm{F}_n = n$, l'événement $\mathrm{P}_n = 2\mathrm{F}_n$ est également l'événement $3\mathrm{F}_n = n$. Remarquons que, F_n étant à valeurs entières, l'événement $3\mathrm{F}_n = n$ est vide si n n'est pas multiple de 3. Si on note A l'événement dont on recherche la probabilité, alors $\overline{\mathrm{A}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\mathrm{F}_{3n} = n\}$. $\mathrm{F}_{3n} = n$

Notons $\mathrm{T} = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{F}_{3n} = n\}$. On convient que $\mathrm{T} = \infty$ siF_{3n} n'est jamais égal à n.

Posons $\mathrm{S}_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{F}_{3n} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}}$ et $\mathrm{S}_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T} = n)$.

On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n-k})\mathbb{P}(\mathrm{T} = k)$$

$\mathrm{S}_1 = 1 + \mathrm{S}_1\mathrm{S}_2$

$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$

Finalement

$\mathbb{P}(\mathrm{T} = \infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T} = n) = 1 - \mathrm{S}_2 = \frac{1}{\mathrm{S}_1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3}$

Solution 185

---

1. **a.** Le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{n}$.

b. Notons A l'ensemble des tirages possibles et A_k le nombre de tirages dans lesquels figurent k boules blanches. Alors $\mathrm{A} = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k$.

De plus, se donner un tirage dans A_k équivaut à choisir k boules parmi les n boules blanches et $n-k$ boules parmi les n noires. Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \mathrm{card}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}(\mathrm{A}_k) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

2. **a.** Pour que la puce se retrouve en O, il faut qu'elle est sauté autant de fois à gauche qu'à droite et le nombre de sauts doit donc être pair. Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n+1}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si le nombre de sauts est $2n$, il y faut placer n sauts à droite parmi les $2n$ sauts, le reste des sauts étant à gauche. Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) = \binom{2n}{\cdot}\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

b. D'après la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} = \frac{2^{2n}}{=}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

puis

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) = 0$.

3. **a.** Pour se retrouver à l'origine, il faut, pour les mêmes raisons que précédemment, un nombre pair de déplacements horizontaux et un nombre pair de déplacements verticaux. Ainsi pour se retrouver à l'origine en $2n$ coups :

- on fixe un nombre $2k$ ($k \in [\![0, n]\!]$) de déplacements horizontaux (les $2n - 2k$ déplacements restants sont horizontaux) ;
- on choisit k déplacements à doite parmi les $2k$ déplacements horizontaux (les k déplacements restants étant à gauche) ;
- on choisit $n - k$ déplacements vers le haut parmi les $2n - 2k$ déplacements verticaux (les $n - k$ déplacements restants étant vers le bas).

Finalement

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}^2$$

b. On avait trouvé précédemment

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

donc

$$\binom{2n}{n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^{2n}}{\pi n}$$

puis

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$$

et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) = 0$.

Solution 186

---

1. Posons $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{(n^2+n+1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que $\mathrm{R} = +\infty$.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)+2n+1}{n!}t^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^n}{(n-2)!}t^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+2}}{n!}t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} \\
&= t^2e^t + 2te^t + e^t = (t^2+2t+1)e^t
\end{aligned}$$

3. **a.** On doit avoir $\mathrm{G_X}(1) = 1$ donc $\lambda = \dfrac{1}{4e}$.

b. On sait que $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1)$. Or $\mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(t) = \lambda(t^2+4t+3)e^t$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 2$.

Par ailleurs, $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}''_{\mathrm{X}}(1) + \mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1) - \mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1)^2$. Or $\mathrm{G}''_{\mathrm{X}}(t) = \lambda(t^2+6t+7)e^t$ donc $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \dfrac{7}{2} + 2 - 2^2 = \dfrac{3}{2}$.

Equations différentielles

Solution 187

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$, il s'agit de résoudre l'équation différentielle $X' = AX$. Ces solutions sont de la forme $t \mapsto \exp(tA)X_0$ avec $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Procédons à la réduction de A.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -6 & 0 \\ 3 & X+6 & 0 \\ 3 & 6 & X+5 \end{vmatrix} = (X+5)\begin{vmatrix} X-3 & 6 \\ 3 & X+6 \end{vmatrix} = X(X+3)(X+5)$$

Ainsi, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -3, -5\}$. Des vecteurs propres associés aux valeurs propres $0, -3, -5$ sont respectivement $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$. En posant $Y = P^{-1}X$, le système $X' = AX$ équivaut à $Y' = DY$. L'ensemble des solutions de ce système est $\mathrm{vect}(Y_1, Y_2, Y_3)$ avec $Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 : t \mapsto e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y_3 : t \mapsto e^{-5t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que l'ensemble des solutions du système $X' = AX$ est $\mathrm{vect}(X_1, X_2, X_3)$, avec $X_1 = PY_1$, $X_2 = PY_2$ et $X_3 = PY_3$, c'est-à-dire $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 : t \mapsto e^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_3 : t \mapsto e^{-5t}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution 188

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de $A(t)$ est

$$\chi_{A(t)} = X^2 - \mathrm{tr}(A(t))X + \det(A(t)) = X^2 - 2X + (1-t^2) = (X-1-t)(X-1+t)$$

Les valeurs propres de $A(t)$ sont donc $1+t$ et $1-t$.

2. On remarque $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1+t$ et que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1-t$. Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}A(t)P = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = D(t)$$

3. En posant $X = P^{-1}Y$ le système équivaut à $X' = D(t)X$. Si on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système équivaut à $\begin{cases} x' &= (1+t)x \\ y' &= (1-t)y \end{cases}$. On en déduit que les solutions de $X' = D(t)X$ sont les fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{t+t^2/2} \\ \mu e^{t-t^2/2} \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de $Y' = A(t)Y$ sont donc les fonctions

$$t \mapsto \mathrm{P}\begin{pmatrix} \lambda e^{t+t^2/2} \\ \mu e^{t-t^2/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{t+t^2/2} + \mu e^{t-t^2/2} \\ -2\lambda e^{t+t^2/2} - \mu e^{t-t^2/2} \end{pmatrix}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Solution 189

Première version

On écrit le système sous la forme $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t)$ avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$. On calcule

$$\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\lambda + \det(\mathrm{A}) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

Comme χ_{A} est scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{4, -1\}$. On trouve sans peine que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le système $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$ équivaut donc à $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY} + \mathrm{C}(t)$ avec $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}(t)$. On trouve sans peine $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{C}(t) = \begin{pmatrix} 4t - e^t \\ -2t + e^t \end{pmatrix}$. En posant $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, le système $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY} + \mathrm{C}(t)$ équivaut à

$$\begin{cases} u' - 4u = 4t - e^t \\ v' + v = -2t + e^t \end{cases}$$

On résout séparément ces deux équations différentielles. Les solutions de la première sont les fonctions

$$t \mapsto ae^{4t} - t - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^t,\ a \in \mathbb{R}$$

tandis que les solutions de la seconde sont les fonctions

$$t \mapsto be^{-t} - 2t + 2 + \frac{1}{2}e^t,\ b \in \mathbb{R}$$

On en déduit que les solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t)$ sont les fonctions

$$t \mapsto \mathrm{P}\begin{pmatrix} ae^{4t} - t - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^t \\ be^{-t} - 2t + 2 + \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{4t} + be^{-t} - 3t + \frac{7}{4} + \frac{5}{6}e^t \\ ae^{4t} + 2be^{-t} - 5t + \frac{15}{4} + \frac{4}{3}e^t \end{pmatrix}$$

Deuxième version

On résout d'abord l'équation homogène. On trouve comme précédemment que $\mathrm{X}_1 : t \mapsto e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}_2 : t \mapsto e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment une base du sous-espace vectoriel des solutions du système homogène. On recherche une solution particulière du système avec second membre. On cherche donc une solution de la forme $\lambda_1\mathrm{X}_1 + \lambda_2\mathrm{X}_2$ où λ_1 et λ_2 sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\lambda_1'(t)\mathrm{X}_1(t) + \lambda_2'(t)\mathrm{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)e^{4t} + \lambda_2'(t)e^{-t} = 2t \\ \lambda_1'(t)e^{4t} + 2\lambda_2'(t)e^{-t} = e^t \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = 4te^{-4t} - e^{-3t} \\ \lambda_2'(t) = e^{2t} - 2te^t \end{cases}$$

A l'aide d'intégration par parties, on peut choisir

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = -te^{-4t} - \frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \lambda_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - 2te^{t} + 2e^{t} \end{cases}$$

On en déduit donc qu'une solution de l'équation avec second membre est

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} -3t + \frac{7}{4} + \frac{5}{6}e^t \\ -5t + \frac{15}{4} + \frac{4}{3}e^t \end{pmatrix}$$

Solution 190

---

1. Remarquons que $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On cherche trois vecteurs C_1, C_2 et C_3 tels que $AC_1 = 2C_1$, $AC_2 = 2C_2 + C_1$ et $AC_3 = 2C_3$. On choisit un vecteur C_2 qui n'est pas dans $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$, par exemple $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose ensuite $C_1 = AC_2 - C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $C_1 \in \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ i.e. $AC_1 = 2C_1$ (c'est forcément le cas puisque $(A - 2I_3)^2 = 0$). On choisit ensuite un dernier vecteur C_3 dans $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ non colinéaire à C_1, par exemple, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $A = PTP^{-1}$.

2. En posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, le système $X'(t) = AX(t)$ équivaut à $Y'(t) = TY(t)$. Les solutions de ce système sont les fonctions

$$t \mapsto \exp(tT)Y_0,\ Y_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

   Or $T = 2I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices I_3 et N commutent et $N^2 = 0$ de sorte que

$$\exp(tT) = e^{2t}(I_3 + tN) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

   Ainsi les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont les fonctions

$$t \mapsto P\exp(tT)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

   ou encore

$$\begin{cases} f(t) = ae^{2t} + b(t+1)e^{2t} \\ g(t) = -ae^{2t} - bte^{2t} + ce^{2t} \\ h(t) = ae^{2t} + bte^{2t} \end{cases}$$

Solution 191

1. On recherche une solution polynomiale de degré 2. On trouve sans difficulté $x \mapsto x^2 + \frac{1}{9}$.

2. On pose $z(t) = y(x) = y(e^t)$ ou encore $y(x) = z\ln(x)$. On trouve sans peine que y est solution de $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution de $4z'' - 12z' + 9z = 0$ sur $\mathbb{R}$.
L'équation homgène associée $4z'' - 12z' + 9z = 0$ admet pour polynôme caractéristique $4X^2 - 12X + 9 = (2X - 3)^2$ donc ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto (At + B)e^{\frac{3t}{2}}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto (A\ln(x) + B)x^{\frac{3}{2}}$. D'après la première question, les solutions de l'équation différentielle $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions
$$x \mapsto x^2 + \frac{1}{9} + (A\ln(x) + B)x^{\frac{3}{2}}$$
avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

3. En effectuant cette fois-ci le changement de variable $x = -e^t$, on trouve de la même manière que les solutions de l'équation différentielle $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions
$$x \mapsto x^2 + \frac{1}{9} + (A\ln(-x) + B)(-x)^{\frac{3}{2}}$$
avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Solution 192

1. On a $f' = \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = -q - f^2$. f vérifie donc $f^2 + f' = -q$.

2. Supposons que f s'annule. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. On en déduit $y'(x_0) = 0$. Comme $y'' = -qy \leq 0$, y est concave sur $\mathbb{R}_+$. On a donc $y(x) \leq y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = y(x_0)$. Supposons qu'il existe $x_1 > x_0$ tel que $y(x_1) < y(x_0)$. D'après l'inégalité des pentes,
$$\forall x \geq x_1 \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0}$$
ou encore, en posant $c = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0} < 0$
$$y(x) \leq c(x - x_0) + f(x_0)$$
On en déduirait que $\lim_{+\infty} y = -\infty$, ce qui contredirait la stricte positivité de f sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit par l'absurde que $y(x_1) = y(x_0)$ pour tout $x_1 \in]x_0, +\infty[$.
Ainsi y est constante sur $[x_0, +\infty[$ puis $qy = -y'' = 0$ sur $[x_0, +\infty[$ et enfin, comme y ne s'annule pas, q est nulle sur $[x_0, +\infty[$, ce qui contredit l'énoncé. f ne s'annule donc pas.

3. Puisque $f' = -q - f^2$ et que q est à valeurs positives, f' est négative sur $\mathbb{R}_+$: f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Comme f ne s'annule pas, l'équation différentielle $f^2 + f' = -q$ peut se réécrire $\left(\frac{1}{f}\right)' = q + 1$. Comme q est positive, on a donc $\left(\frac{1}{f}\right)' \geq 1$. L'inégalité des accroissements finis donne alors $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(0)} \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On en déduit notamment que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ et donc que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, f est positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme f ne s'annule pas, elle est en fait strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

4. On a vu à la question précédente que $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(0)} \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On en déduit que $0 < f(x) \leq \frac{1}{\frac{1}{f(0)} + x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ puis $f(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Notamment f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, comme f' est négative, on a pour tout

$x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x |f'(x)|\, \mathrm{d}x = -\int_0^x f'(x)\, \mathrm{d}x = f(0) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$$

car on a montré que f est de limite nulle en 0. Ceci prouve que f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, $q = -f^2 - f'$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur cet intervalle.

5. Comme $f(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on a $\int_{[x,+\infty[} f^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ par intégration d'une relation de domination. Enfin puisque f a une limite nulle en 0, $\int_{[x,+\infty[} f' = f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$. Puisque $q = -f^2 - f'$, on en déduit que $\int_{[x,+\infty[} q \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution 193

Il suffit de montrer que f s'annule au moins une fois sur tout intervalle du type $[A, +\infty[$. En effet, pour $A = 0$, on trouve que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$. Si on suppose que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $\mathbb{R}_+$, disons n fois, et en notant $x_1, \dots, x_n$ les zéros de f sur $\mathbb{R}_+$, on aboutit à une contradiction en choisissant $A > \max\{x_i \,|1 \leq i \leq n\}$.
Soit donc $A \in \mathbb{R}$. Supposons que f ne s'annule pas sur $[A, +\infty[$. Quitte à changer f en $-f$ qui est aussi solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$, on peut supposer $f > 0$ sur $[A, +\infty[$.
Comme q est non identiquement nulle et positive, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $q(a) > 0$. Posons $c = \frac{q(a)}{2}$. Par continuité de q, il existe $\alpha > 0$ tel que $q \geq c > 0$ sur $[a - \alpha, a + \alpha]$. On peut supposer $\alpha \leq \frac{T}{2}$ où T est une période de q. Comme q est périodique et positive, on a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{A+kT}^{A+(k+1)T} q(t)\, \mathrm{d}t \geq 2\alpha c$$

Supposons que $f' \geq 0$ sur $[A, +\infty[$. Alors f est croissante sur $[A, +\infty[$ et donc $f \geq f(A) > 0$ sur $[A, +\infty[$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f'(A + nT) &= f'(A) - \int_A^{A+nT} q(t)f(t)\, \mathrm{d}t \\ &\geq f'(A) - f(A)\int_A^{A+nT} q(T)\, \mathrm{d}t \\ &\geq f'(A) - 2n\alpha c f(A) \end{aligned}$$

Comme $\alpha c f(A) > 0$, on obtient que $f'(A + nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui contredit notre hypothèse selon laquelle $f' \geq 0$ sur $[A, +\infty[$. Ainsi il existe $B \geq A$ tel que $f'(B) < 0$.
Or $f'' = -qf \geq 0$ sur $[A, +\infty[$ donc f' est décroissante sur $[A, +\infty[$. En particulier, $f' \leq f'(B) < 0$ sur $[B, +\infty[$. Pour $x \geq B$, on a donc

$$f(x) = f(B) + \int_B^x f'(t)\, \mathrm{d}t \leq f(B) + f'(B)(x - B)$$

Puisque $f'(B) < 0$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui contredit notre hypothèse suivant laquelle $f > 0$ sur $[A, +\infty[$. On en déduit donc que f s'annule sur $[A, +\infty[$.

Solution 194

1. On peut trouver une suite injective (x_n) de zéros de f. Comme $[0, 1]$ est compact, on peut supposer que (x_n) converge quitte à considérer une suite extraite. Notons $\ell \in [0, 1]$ sa limite. Comme deux termes consécutifs x_n et x_{n+1} de cette suite sont distincts, en appliquant le théorème de Rolle, il existe y_n strictement compris entre x_n et x_{n+1} tel que $f'(y_n) = 0$. Par encadrement, (y_n) converge également vers ℓ. Par continuité de f et f', $f(\ell) = f'(\ell) = 0$.

2. Soit f une solution de (E) s'annulant une infinité de fois sur $[0, 1]$. D'après la question précédente, il existe $\ell \in [0, 1]$ tel que f est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ f(\ell) = f'(\ell) = 0 \end{cases}$. La fonction nulle est également solution de ce problème de Cauchy. Par unicité de la solution de ce problème, f est nulle. Ainsi l'unique solution de (E) s'annulant une infinité de fois est la fonction nulle.

Solution 195

Supposons que $A^\top$ possède une valeur propre λ strictement positive. Notons u un vecteur propre associé. Posons $\varphi(t) = u^\top x(t)$. Comme $\ell : y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto u^\top y$ est une forme linéaire, φ est également de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = u^\top x'(t) = u^\top A x(t) = (A^\top u)^\top x(t) = \lambda u^\top x(t) = \lambda\varphi(t)$$

Ainsi $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mais comme $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$. On ne peut avoir $\varphi(0) \neq 0$ sinon $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = \pm\infty$ puisque $\lambda > 0$. Ainsi $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ou encore $\ell(x(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Si $A^\top$ ne possède aucune valeur propre strictement positive, on peut néanmoins affirmer que $A^\top$ possède une valeur propre complexe λ non réelle de partie réelle strictement positive car $\operatorname{tr}(A^\top) = \operatorname{tr}(A) > 0$. On note à nouveau u un vecteur propre associé.

Attention ! u est un vecteur à coefficients *complexes* donc on va devoir raisonner un peu différemment que dans le cas précédent.

Comme précédemment, $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. A nouveau, $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Si $\varphi(0) \neq 0$, $|\varphi(t)| = |\varphi(0)|e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On ne peut plus poser $\lambda : y \mapsto u^\top y$ car λ serait alors à valeurs dans $\mathbb{C}$ et ne serait pas une forme linéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Néanmoins, il existe $(v, w) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $u = v + iw$. Comme $u^\top x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que x est à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $v^\top x(t) = w^\top x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut donc poser au choix $\lambda : y \mapsto v^\top y$ ou $\lambda : y \mapsto w^\top y$.

Solution 196

1. **a.** On a $W' = u''v - uv'' = (q - p)uv$.

   b. Supposons que v ne s'annule pas sur $[a, b]$. Comme u et v sont continues, elles restent de signe constant respectivement sur $]a, b[$ et $[a, b]$. Quitte à changer u en $-u$ et/ou v en $-v$ (qui sont aussi solution des mêmes équations différentielles que u et v), on peut supposer $u > 0$ sur $]a, b[$ et $v > 0$ sur $[a, b]$. Alors $W' \geq 0$ sur $[a, b]$ et donc W est croissante sur $]a, b[$. De plus, $W(a) = u'(a)v(a)$ et $W(b) = u'(b)v(b)$. On a $u'(a) \geq 0$ et $u'(b) \leq 0$ en considérant la limite du taux de variation de u en a^+ et b^-. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, on ne peut avoir $u'(a) = 0$ ou $u'(b) = 0$ sinon u serait nulle. Par conséquent, $u'(a) > 0$ et $u'(b) < 0$. Ainsi $W(a) > 0$ et $W(b) < 0$ ce qui contredit la décroissance de W. On en déduit que v s'annule sur $[a, b]$.

2. **a.** Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $u : x \mapsto \sin(M(x - a))$ vérifie $u'' + M^2u = 0$. De plus, u s'annule en a et $a + \dfrac{\pi}{M}$ mais ne s'annule pas sur $\left]a, a + \dfrac{\pi}{M}\right[$. On déduit de la question précédente que f s'annule sur $\left[a, a + \dfrac{\pi}{M}\right]$.

   b. Soit $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{M}\right[$. La fonction $v : x \mapsto \sin(M(x - a + \varepsilon))$ vérifie $v'' + M^2v = 0$. La question précédente montre que v s'annule sur $[a, b]$. Comme v ne s'annule pas sur $\left[a, \dfrac{a}{+}\dfrac{\pi}{M} - \varepsilon\right[$, on a $b \geq a + \dfrac{\pi}{M} - \varepsilon$ i.e. $b - a \geq \dfrac{\pi}{M} - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{M}\right[$, $b - a \geq \dfrac{\pi}{M}$.

Topologie

Solution 197

1. Remarquons déjà que l'existence de la valeur d'adhérence (x', y') est justifiée par la compacité de K^2. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (x', y'). Remarquons alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|g^n(x') - x\| = \|g^n(x') - g^n(x_n)\| \leq \|x' - x_n\| \qquad \text{et} \qquad \|g^n(y') - y\| = \|g^n(y') - g^n(y_n)\| \leq \|y' - y_n\|$$

   car g et donc g^n est 1-lipschitzienne. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(g^{\varphi(n)}(x') - g^{\varphi(n)}(y')) - (x - y)\| \leq \|g^{\varphi(n)}(x') - x\| + \|g^{\varphi(n)}(y') - y\| \leq \|x' - x_{\varphi(n)}\| + \|y' - y_{\varphi(n)}\|$$

   Ainsi la suite $(g^{\varphi(n)}(x') - g^{\varphi(n)}(y'))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x - y$, qui est bien une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n\in\mathbb{N}}$.

2. A nouveau, le fait que g soit 1-lipschitzienne montre que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante. Elle est également minorée donc elle converge.
La question précédente et la continuité de la norme montrent que $\|x-y\|$ est une valeur d'adhérence de cette même suite. C'est donc que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|x-y\|$.
Si l'on reprend la première question,

$$\|g^{n+1}(x')-g(x)\| \leq \|g^n(x')-x\| = \|g^n(x')-g^n(x_n)\| \leq \|x'-x_n\| \qquad \text{et} \qquad \|g^{n+1}(y')-g(y)\| \leq \|g^n(x')-x\| = \|g^n(y')-g^n(y_n)\| \leq \|y'-y_n\|$$

On en déduit comme précédemment que $g(x) - g(y)$ est encore une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc également de la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit que $\|g(x) - g(y)\| = \|x-y\|$.
g est donc bien une isométrie.

3. Fixons $y \in \mathrm{E}$. La suite $(g^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact K donc on peut en extraire une suite $g(^{\varphi(n)}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. La suite $(g^{\varphi(n+1)}(y) - g^{\varphi(n)}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0. Mais comme g est une isométrie,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y) - y\| = \|(g^{\varphi(n+1)}(y) - g^{\varphi(n)}(y))\|$$

donc la suite $(g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ car φ est strictement croissante donc $g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)$ appartient à $g(\mathrm{K})$. On en déduit que $y \in \overline{g(\mathrm{K})}$. Mais comme g est continue et K est compact, $g(\mathrm{K})$ est compact donc fermé. Ainsi $\overline{g(\mathrm{K})} = g(\mathrm{K})$ et $y \in g(\mathrm{K})$. L'application g est donc surjective. Pour le contre-exemple, on peut considérer l'espace vectoriel E des suites bornées muni de la norme infinie ainsi que la boule unité K. L'application g qui à une suite $u \in \mathrm{E}$ associe la suite v définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est clairement une isométrie. De plus, K est stable par K mais g n'est clairement pas surjective.

Solution 198

---

1. L'application $\phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}\right.$ est continue comme composée des applications continues $(x,y) \mapsto x-y$ et $x \mapsto \|x\|$. Comme K^2 est compact comme produit de compacts, $\phi(\mathrm{K}^2)$ est un compact de $\mathbb{R}$. En particulier, $\phi(\mathrm{K})$ est majoré et contient sa borne supérieure. Ainsi $\delta(\mathrm{K})$ existe et la borne supérieure le définissant est atteinte.

2. Remarquons tout d'abord que le symétrique par rapport à a d'un point x de E est $2a-x$.
Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_a$. Pour $y \in \mathrm{E}$, notons $\phi_y : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}\right.$. On a

$$\mathrm{T(B)} = \mathrm{B} \cap \left(\bigcap_{y\in\mathrm{B}} \phi_y^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})\right]\right)\right)$$

Comme ϕ_y est continue pour tout $y \in \mathrm{B}$, les $\phi_y^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})\right]\right)$ sont fermés. Ainsi T(B) est fermé comme intersection de fermés. De plus, $\mathrm{T(B)} \subset \mathrm{B}$ avec B compact donc T(B) est compact.
Montrons que T(B) est symétrique par rapport à a. Soit $x \in \mathrm{T(B)}$. On veut donc montrer que $2a - x \in \mathrm{T(B)}$. Or pour tout $y \in \mathrm{B}$:

$$\|(2a-x)-y\| = \|x-(2a-y)\| \leq \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})$$

car $x \in \mathrm{T(B)}$ et $2a - y \in \mathrm{B}$ par symétrie de B par rapport à a. Ainsi $2a - x \in \mathrm{T(B)}$. Donc $\mathrm{T(B)} \in \mathcal{S}_a$.

3. Soient $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_a$ et $(x,y) \in \mathrm{T(B)}^2$. A fortiori, $(x,y) \in \mathrm{B}^2$ de sorte que, par définition de T(B) $\|x-y\| \leq \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})$. On en déduit que $\delta(\mathrm{T(B)}) \leq \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})$. On peut alors montrer par récurrence que $\delta(\mathrm{B}_n) \leq \frac{1}{2^n}\delta(\mathrm{B}_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Posons $\tilde{\mathrm{B}} = \bigcap_{n\geq 0} \mathrm{B}_n$. Alors $\tilde{\mathrm{B}}$ est fermé comme intersection de fermés et $\tilde{\mathrm{B}}$ est inclus dans le compact B_0 donc il est compact. Puisque $\tilde{\mathrm{B}} \subset \mathrm{B}_n$, $\delta(\tilde{\mathrm{B}}) \leq \delta(\mathrm{B}_n) \leq \frac{1}{2^n}\delta(\mathrm{B}_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\delta(\tilde{\mathrm{B}}) = 0$. Si $\mathrm{B}_0 = \varnothing$, alors clairement $\tilde{\mathrm{B}} = \varnothing$. Montrons maintenant que si $\mathrm{B}_0 \neq \varnothing$, alors $\tilde{\mathrm{B}} = \{a\}$. Soit $x \in \tilde{\mathrm{B}}$. Alors x et $2a - x$ appartiennent à $\tilde{\mathrm{B}}$ puisque tous les $\mathrm{T}_n(\mathrm{B})$ sont symétriques par rapport à a. En particulier, $\|x-(2a-x)\| = 0$ puis $a = x$.

4. Soient u une isométrie et $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On pose alors $\mathrm{B}_0 = \{x, y\}$ et on définit la suite (B_n) comme précédemment. Posons $m = \dfrac{x+y}{2}$ de sorte que B_0 est symétrique par rapport à m. Alors, comme précédemment, $\bigcap_n \in \mathbb{N}\mathrm{B}_n = \{m\}$.
Montrons maintenant que si B est un compact de E, alors $\mathrm{T}(u(\mathrm{B})) \subset u(\mathrm{T}(\mathrm{B}))$. Soit en effet $x \in \mathrm{T}(u(\mathrm{B}))$. En particulier, $x \in u(\mathrm{B})$ donc il existe $a \in \mathrm{T}(\mathrm{B})$ tel que $x = u(a)$. De plus, pour tout $y \in u(\mathrm{B})$, $\|x-y\| \leq \dfrac{1}{2}\delta(u(\mathrm{B}))$ donc pour tout $b \in \mathrm{B}$, $\|u(a)-u(b)\| \leq \dfrac{1}{2}\delta(u(\mathrm{B}))$. Or u est une isométrie donc $\|u(a)-u(b)\| = \|a-b\|$ et on montre facilement que $\delta(u(\mathrm{B})) = \delta(\mathrm{B})$. Finalement $\|a-b\| \leq \dfrac{1}{2}\delta(\mathrm{B})$ pour tout $b \in \mathrm{B}$ i.e. $a \in \mathrm{T}(\mathrm{B})$. Ainsi $x = u(a) \in u(\mathrm{T}(\mathrm{B}))$.
On en déduit alors par récurrence que $\mathrm{T}^n(u(\mathrm{B}_0)) \subset u(\mathrm{T}^n(\mathrm{B}_0))$ i.e. $\mathrm{C}_n \subset u(\mathrm{B}_n)$ en posant $\mathrm{C}_n = \mathrm{T}^n(u(\mathrm{B}_0))$. Finalement,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} u(\mathrm{B}_n)$$

Mais comme u est injective en tant qu'isométrie,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} u(\mathrm{B}_n) = u\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = u(\{a\}) = \{u(a)\}$$

Mais $\mathrm{C}_0 = \{u(x), u(y)\}$ est symétrique par rapport à $n = \dfrac{u(x)+u(y)}{2}$ donc on montre comme à la question précédente que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n = \{n\}$. Finalement, $\{n\} \subset \{u(a)\}$ donc $n = u(a)$. u conserve bien les milieux.

Solution 199

---

1. Tout d'abord, f est continue sur K car lipschitzienne. L'application $\varphi : x \in \mathrm{K} \mapsto \|f(x)-x\|$ est allors elle-même continue par continuité de la norme. Elle admet donc un minimum sur le compact K atteint en $a \in \mathrm{K}$. Supposons que $f(a) \neq a$. D'après la propriété vérifiée par f, on aurait alors $\varphi(f(a)) < \varphi(a)$, ce qui est contradictoire. Ainsi $f(a) = a$ et f admet un point fixe.
Supposons maintenant que f possède deux points fixes a et b. Comme $a \neq b$, $\|f(a)-f(b)\| < \|a-b\|$ i.e. $\|a-b\| < \|a-b\|$, ce qui est absurde. Ainsi f possède un unique point fixe.

2. Notons a l'unique point fixe de f. La suite de terme général $\|x_n - a\|$ est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc. Notons m sa limite. Soit alors ℓ une valeur d'adhérence de la suite (x_n). On peut alors extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\psi(n)})$ convergeant vers ℓ.
La suite de terme général $\|x_{\psi(n)} - a\|$

- converge vers m en tant que suite extraite de la suite de terme général $\|x_n - a\|$;
- converge vers $\|\ell - a\|$ par continuité de la norme.

Ainsi $m = \|\ell - a\|$.
De même, la suite de terme général $\|x_{\psi(n)+1} - a\|$

- converge vers m en tant que suite extraite de la suite de terme général $\|x_n - a\|$;
- converge également vers $\|f(\ell) - a\|$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\psi(n)+1} - a\| = \|f(x_{\psi(n)}) - a\|$ et que f est continue.

Ainsi $m = \|f(\ell) - a\|$.
Supposons que $\ell \neq a$. Alors

$$m = \|f(\ell) - a\| = \|f(\ell) - f(a)\| < \|\ell - a\| = m$$

ce qui est absurde. Ainsi $\ell = a$.
La suite (x_n) est donc à valeurs dans un compact et ne possède que a comme unique valeur d'adhérence : elle converge donc vers a.

3. On peut par exemple considérer $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2+1}$. f n'admet clairement aucun point fixe. Par contre, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$,

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\right| = \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} = \frac{|x-y| \cdot |x+y|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}}$$

Or, par stricte croissance de la racine carrée et inégalité triangulaire

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} > \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| \geq |x+y|$$

On en déduit que
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Solution 200

Tout d'abord les deux maxima sont bien définies car B et S sont des compacts et $z \mapsto |\mathrm{P}(z)|$ est continue.

Tout d'abord, $\mathrm{S} \subset \mathrm{B}$ donc $\max_{z\in\mathrm{B}} |\mathrm{P}(z)| >= \max_{z\in\mathrm{S}} |\mathrm{P}(z)|$. Supposons que l'inégalité soit stricte. Le maximum de $|\mathrm{P}|$ sur B est alors atteint en un point z_0 qui n'appartient pas à S, autrement dit un point intérieur à B.

Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}^{(k)}(z_0) = 0$, alors P est constant d'après la formule de Taylor. De même, si $\mathrm{P}(z_0) = 0$, P est le polynôme constant nul. Mais on a alors clairement $\max_{z\in\mathrm{B}} |\mathrm{P}(z)| = \max_{z\in\mathrm{S}} |\mathrm{P}(z)|$, ce qui contredit notre hypothèse.

Ainsi $\mathrm{P}(z_0) \neq 0$ et on peut poser $p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}^{(k)}(z_0) \neq 0\right\}$. D'après la formule de Taylor, il existe un polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{P}(z) = \mathrm{P}(z_0) + \frac{\mathrm{P}^{(p)}(z_0)}{p!}(z - z_0)^p + \mathrm{Q}(z - z_0)(z - z_0)^{p+1}$$

Notamment,
$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{P}(z_0 + re^{i\theta}) = \mathrm{P}(z_0)\left(1 + \frac{\mathrm{P}^{(p)}(z_0)}{p!\mathrm{P}(z_0)} r^p e^{ip\theta} + \frac{\mathrm{Q}(re^{i\theta})}{\mathrm{P}(z_0)} r^{p+1} e^{i(p+1)\theta}\right)$$

Posons $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{P}^{(p)}(z_0)}{p!\mathrm{P}(z_0)}$ et $\mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}(z_0)}$.
$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{P}(z_0 + re^{i\theta}) = \mathrm{P}(z_0)\left(1 + \mathrm{A} r^p e^{ip\theta} + \mathrm{R}(re^{i\theta} r^{p+1} e^{i(p+1)\theta}\right)$$

Choisissons θ de telle sorte que $\mathrm{A}e^{ip\theta} = |\mathrm{A}|$. Par inégalité triangulaire,
$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ |\mathrm{P}(z_0 + re^{i\theta})| \geq |\mathrm{P}(z_0)|\left(1 + |\mathrm{A}|r^p - |\mathrm{R}(re^{i\theta})|r^{p+1}\right) = |\mathrm{P}(z_0)|\left(1 + r^p(|\mathrm{A}| - |\mathrm{R}(re^{i\theta})|r\right)$$

Ainsi
$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ |\mathrm{P}(z_0 + re^{i\theta})| - |\mathrm{P}(z_0)| \geq |\mathrm{A}||\mathrm{P}(z_0)|r^p - |\mathrm{R}(re^{i\theta})|r^{p+1} = r^p\left(|\mathrm{A}||\mathrm{P}(z_0)| - |\mathrm{R}(re^{i\theta})|r\right)$$

Comme R est continue et $|\mathrm{A}||\mathrm{P}(z_0)| \neq 0$,
$$r^p\left(|\mathrm{A}||\mathrm{P}(z_0)| - |\mathrm{R}(re^{i\theta})|r\right) \underset{r\to 0^+}{\sim} |\mathrm{A}||\mathrm{P}(z_0)|r^p$$

Notamment, $r \mapsto |\mathrm{P}(z_0 + re^{i\theta})| - |\mathrm{P}(z_0)|$ est strictement positive au voisinage de 0^+. Comme z_0 est intérieur à B, il existe $r > 0$ tel que $z_0 + re^{i\theta} \in \mathrm{B}$ et $|\mathrm{P}(z_0 + re^{i\theta})| - |\mathrm{P}(z_0)| > 0$, ce qui contredit le fait que $|\mathrm{P}|$ admet son maximum sur B en z_0.

On conclut donc par l'absurde que $\max_{z\in\mathrm{B}} |\mathrm{P}(z)| = \max_{z\in\mathrm{S}} |\mathrm{P}(z)|$.

Solution 201

On raisonne par récurrence sur n.

Soit A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}$. A est donc un intervalle vérifiant $\bar{\mathrm{A}} = \mathbb{R}$. On a donc $\sup \mathrm{A} = \sup \bar{\mathrm{A}} = +\infty$ et $\inf \mathrm{A} = \inf \bar{\mathrm{A}} = -\infty$. Ainsi $\mathrm{A} = \mathbb{R}$.

Supposons la propriété à montrer vraie à un rang $n - 1 \geq 1$. Soit alors A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}^n$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. On va montrer que $\mathrm{A} \cap \mathrm{H}$ est une partie convexe et dense de H.

D'abord $\mathrm{A} \cap \mathrm{H}$ est convexe comme intersection de deux convexes.

On munit alors $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note u un vecteur unitaire normal à H. Soit $x \in \mathrm{H}$ et $\varepsilon > 0$.

Posons $a = x + \dfrac{\varepsilon}{2}u$. Par densité de A dans $\mathbb{R}^n$, il existe $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|b - a\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On a alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\|u\| = 1$:
$$\langle b, u\rangle = \langle b - a, u\rangle + \langle a, u\rangle \geq -\|b - a\|\|u\| + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 > 0$$

Posons $c = x - \dfrac{\varepsilon}{2}u$. Par densité de A dans $\mathbb{R}^n$, il existe $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|d - c\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On a alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\|u\| = 1$:
$$\langle d, u\rangle = \langle d - c, u\rangle + \langle c, u\rangle \leq \|d - c\|\|u\| - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 < 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'application $t \mapsto \langle (1 - t)b + td, u\rangle$ s'annule en un point $t_0 \in]0, 1[$. Posons $e = (1 - t_0)b + t_0 d$. On a donc $e \in \mathrm{H}$ et $e \in \mathrm{A}$ par convexité de A. De plus,
$$\|b - x\| \leq \|b - a\| + \|a - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et

$$\|d-x\| \leq \|d-c\| + \|c-x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|e-x\| = (\leq (1-t_0)\|b-x\| + t_0\|d-x\| < (1-t_0)\varepsilon + t_0\varepsilon = \varepsilon$$

Ceci achève de prouver la densité de $A \cap H$ dans H.
D'après notre hypothèse de récurrence, $A \cap H = H$. Or $\mathbb{R}^n$ est égal à la réunion de ses hyperplans. Donc $A = \mathbb{R}^n$.

> **Remarque.** L'énoncé est faux en dimension infinie. $\mathbb{R}[X]$ est une partie convexe (en tant que sous-espace vectoriel) et dense (d'après le théorème de Stone-Weierstrass) de $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Pourtant, $\mathbb{R}[X]$ est d'intérieur vide. En effet, $\mathbb{R}[X]$ est l'union des $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont des fermés d'intérieur vide en tant que sous-espaces vectoriels de dimension finie. On conclut par le théorème de Baire.

Solution 202

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \dots, \beta_n$ sont des réels strictement positifs, on montre que

$$\det\left(\left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) = \frac{\left(\prod_{1\leq i<j\leq n} \alpha_i - \alpha_j\right)\left(\prod_{1\leq i<j\leq n} \beta_i - \beta_j\right)}{\prod_{1\leq i,j\leq n} \alpha_i + \beta_j} \tag{1}$$

Pour des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ d'un espace préhilbertien E, on pose $Gram(x_1, \dots, x_n) = \det\left((x_i|x_j)_{1\leq i,j\leq n}\right)$. On montre que si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre de vecteurs de E et u un vecteur de E, alors

$$d\left(x, \operatorname{vect}(u_1, \dots, u_n)\right)^2 = \frac{Gram(u_1, \dots, u_n, u)}{Gram(u_1, \dots, u_n)} \tag{2}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on notera $f_\alpha \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$. On a donc pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $(f_\alpha|f_\beta) = \dfrac{1}{\alpha+\beta+1}$.

$(i) \implies (ii)$ Comme la suite (a_n) est croissante, soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Si elle converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{a_n}$ est grossièrement divergente. Supposons donc que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$. En utilisant (1) et (2), on montre que

$$d_n^2 = d(f_0, \operatorname{vect}(f_{a_0}, \dots, f_{a_n}))^2 = \frac{\prod_{i=0}^n a_i^2}{\prod_{i=0}^n (1+a_i)^2} = \left(\prod_{i=0}^n \frac{a_i}{1+a_i}\right)^2$$

et donc

$$d_n = \prod_{i=0}^n \frac{a_i}{1+a_i}$$

Comme $\operatorname{vect}((f_{a_n})_{n\in\mathbb{N}})$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, (d_n) converge vers 0. En passant au logarithme, on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)$ diverge vers $+\infty$. Puisque (a_n) diverge vers $+\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{a_n}$ diverge donc également.

$(ii) \implies (i)$ Fixons $p \in \mathbb{N}$. En utilisant à nouveau (1) et (2), on trouve

$$d_{p,n}^2 = d(f_p, \operatorname{vect}(f_{a_0}, \dots, f_{a_n})^2 = \frac{1}{2p+1}\left(\prod_{i=0}^n \frac{a_i - p}{1+p+a_i}\right)^2$$

et donc

$$d_{p,n} = \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \prod_{i=0}^n \frac{|a_i - p|}{1+p+a_i}$$

S'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $a_i = p$, alors $d_{p,n} = 0$ pour tout $n \geq i$. Dans le cas contraire, on a

$$\ln d_{p,n} = -\frac{1}{2}\ln(2p+1) + \sum_{i=0}^n \ln\left|\frac{a_i - p}{1+p+a_i}\right|$$

On distingue à nouveau plusieurs cas :

– Si (a_n) converge vers un réel l, on montre que la suite $\left(\left|\dfrac{a_n-p}{1+p+a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel positif strictement inférieur à 1 (distinguer les cas $l \leq p$ et $l > p$). La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left|\dfrac{a_n-p}{1+p+a_n}\right|$ diverge donc grossièrement vers $-\infty$. On en déduit que $d_{p,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

– Si (a_n) diverge vers $+\infty$, alors

$$\ln\left|\frac{a_n-p}{1+p+a_n}\right| \sim -\frac{2p+1}{1+p+a_n} \sim -\frac{2p+1}{a_n}$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{a_n}$ diverge vers $+\infty$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left|\dfrac{a_n-p}{1+p+a_n}\right|$ diverge également vers $+\infty$ et, à nouveau, $d_{p,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Bref, dans tous les cas $d_{p,n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P à coefficients réels tels que $\|f-\mathrm{P}\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On montre facilement que $\|f-\mathrm{P}\|_2 \leq \|f-\mathrm{P}\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Si P est nul c'est fini, puisqu'alors P appartient à $\mathrm{vect}\big((f_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}\big)$. Sinon, posons $\mathrm{P} = \sum_{p=0}^{n} a_p f_p$. Posons $\mathrm{M} = \max\{|a_p|, 0 \leq p \leq n\}$. Pour $p \in [\![0,n]\!]$, il existe $g_p \in \mathrm{vect}\big((f_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}\big)$ tel que $\|f_p - g_p\|_2 < \dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{M}(n+1)}$. Posons alors $g = \sum_{p=0}^{n} a_p g_p$. Alors, par inégalité triangulaire

$$\|\mathrm{P}-g\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n} |a_p|\|f_p - g_p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

A nouveau par inégalité triangulaire

$$\|f-g\|_2 \leq \|f-\mathrm{P}\|_2 + \|\mathrm{P}-g\|_2 < \varepsilon$$

ce qui prouve la densité de $\mathrm{vect}\big((f_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

Solution 203

1. Tout d'abord $0 \in \mathrm{F} \subset \overline{\mathrm{F}}$. Soient $(x,y) \in \overline{\mathrm{F}}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe donc deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans F convergeant respectivement vers x et y. Alors $(\lambda x_n + \mu y_n)$ est une suite à valeurs dans F (puisque c'est un sous-espace vectoriel de E) convergeant vers $\lambda x + \mu y$. Ainsi $\lambda x + \mu y \in \overline{\mathrm{F}}$. Par conséquent, $\overline{\mathrm{F}}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. On a $\mathrm{H} \subset \overline{\mathrm{H}} \subset \mathrm{E}$. Supposons H non fermé i.e. $\overline{\mathrm{H}} \neq \mathrm{H}$. Il existe donc $u \in \overline{\mathrm{H}} \setminus \mathrm{H}$. Soit alors $x \in \mathrm{E}$. Puisque H est un hyperplan, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ sur E. Puisque $u \notin \mathrm{H}$, $\varphi(u) \neq 0$. Posons alors $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$ et $h = x - \lambda u$. Alors $\varphi(h) = 0$ donc $h \in \mathrm{H} \subset \overline{\mathrm{H}}$. De plus, $u \in \overline{\mathrm{H}}$. Puisque $\overline{\mathrm{H}}$ est un sous-espace vectoriel de E, $x = h + \lambda u \in \overline{\mathrm{H}}$. Finalement, $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{H}}$ i.e. H est dense dans E.

Solution 204

Clairement, N est positive, homogène et vérifie l'inégalité triangulaire. Soit alors $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 0$. Alors $\mathrm{P}(\alpha_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Puisque $\deg \mathrm{P} \leq n$, $\mathrm{P} = 0$. Ainsi N est bien une norme.
Supposons que N soit une norme euclidienne. Alors pour tout $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$,

$$\mathrm{N}(\mathrm{P}+\mathrm{Q})^2 + \mathrm{N}(\mathrm{P}-\mathrm{Q})^2 = 2\mathrm{N}(\mathrm{P})^2 + 2\mathrm{N}(\mathrm{Q})^2$$

Par interpolation de Lagrange, il existe deux polynômes P et Q tels que $\mathrm{P}(\alpha_k) = \delta_{k,0}$ et $\mathrm{Q}(\alpha_k) = \delta_{k,n}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Puisque $n \neq 0$, $\mathrm{N}(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) = \mathrm{N}(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) = 2$ tandis que $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = \mathrm{N}(\mathrm{Q}) = 1$, ce qui contredit l'égalité précédente.

Solution 205

1. **a.** Supposons que la suite (x_n) converge faiblement vers x et x'. Soit $y \in \mathrm{E}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x', y\rangle = 0$. Par différence, $\langle x' - x, y\rangle = 0$. Ainsi $x' - x \in \mathrm{E}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$ et $x = x'$.

b. Supposons que (x_n) converge fortement vers x. Soit $y \in \mathrm{E}$. Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\|\|y\|$$

On en défuit immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$. Ainsi (x_n) converge faiblement vers x.

2. Supposons que (x_n) converge fortement vers x. Alors, d'après la question précédente, (x_n) converge faiblement vers x. De plus, par inégalité triangulaire,

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
Supposons maintenant que (x_n) converge faiblement vers x et $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Remarquons que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2$. De plus, (x_n) converge faiblement vers x $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, x\rangle = 0$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, x\rangle = \|x\|^2$. Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|^2 = 0$$

ce qui prouve que (x_n) converge fortement vers x.

3. Supposons que E soit de dimension finie.
Soit donc une suite (x_n) convergeant faiblement vers x. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Par convergence faible, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, e_i\rangle = 0$. De plus, la base $(e_1, \dots, e_n)$ étant orthonormée, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x_n - x, e_i\rangle^2$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|^2 = 0$$

ou encore $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$.

4. Considérons $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, que l'on munit de sa norme usuelle (somme des produits des coefficients), c'est-à-dire

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2 \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{k!} \cdot \frac{\mathrm{Q}^{(k)}(0)}{k!}$$

On considère alors la suite (X^n). Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\langle \mathrm{X}^n, \mathrm{P}\rangle = 0$ dès lors que $n > \deg \mathrm{P}$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \langle \mathrm{X}^n, \mathrm{P}\rangle = 0$, ce qui permet d'affirmer que (X^n) converge faiblement vers 0. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\mathrm{X}^n\| = 1$ donc la suite (X^n) ne peut converger fortement vers 0.

Solution 206

---

1. Pour tout $f \in \mathrm{E}$,

$$\|f\|_2^2 = \int_{[0,1]} f^2 \leq \int_{[0,1]} \|f\|_\infty^2 = \|f\|_\infty^2$$

Par conséquent, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

2. Les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ induisent des normes sur V. Comme V est de dimension finie, ces normes sont équivalentes et on en déduit l'inégalité demandée.

3. On peut munir V du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_{[0,1]} fg$. On se donne une famille libre de V à p éléments. On peut alors l'orthonormaliser en une famille $(f_1, \dots, f_p)$. Soit $x \in [0, 1]$. Alors pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x)\right)^2 \leq \|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i\|_\infty^2 \leq n^2 \|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i\|_2^2$$

Or la famille $(f_1, \dots, f_p)$ étant orthonormale, $\|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2$. L'astuce consiste à prendre maintenant $\lambda_i = f_i(x)$ pour $1 \leq i \leq p$. On obtient alors

$$\left(\sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2\right)^2 \leq n^2 \sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2 \leq n^2$$

Il suffit alors d'intégrer entre 0 et 1 pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{p} \|f_i\|^2 \leq n^2$$

La famille $(f_1, \dots, f_p)$ étant normée, on aboutit à $p \leq n^2$, ce qui prouve que V est nécessairement de dimension finie et que $\dim \mathrm{V} \leq n^2$.

Solution 207

---

1. N_∞ est la norme de la convergence uniforme. On en déduit sans peine que N et N_1 sont également des normes.

2. Posons $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. On a clairement $\mathrm{N}_\infty(f_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant, $\mathrm{N}(f_n) = \mathrm{N}_1(f_n) = n^2 - n + 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc N_∞ n'est équivalente ni à N ni à N_1.

3. Soit $x \in [0,1]$. Par intégration par parties

$$\int_0^x \sin(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(x-t)f'(t)]_0^x + \int_0^x \cos(x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $f \in \mathrm{E}$, $f'(0) = 0$ de sorte que le crochet est nul. Par une seconde intégration par parties,

$$\int_0^x \sin(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = [\cos(x-t)f(t)]_0^x - \int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Finalement

$$\int_0^x \sin(x-t)(f(t)+f''(t))\,\mathrm{d}t = [\cos(x-t)f(t)]_0^x = f(x) - f(0)\cos x = f(x)$$

car $f(0) = 0$ puisque $f \in \mathrm{E}$.

4. On a clairement $\mathrm{N} \leq \mathrm{N}_1$.
Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathrm{E}$

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)(f(t)+f''(t))\,\mathrm{d}t$$

puis

$$|f(x)| \leq \int_0^x |\sin(x-t)||f(t)+f''(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \mathrm{N}(f) = x\mathrm{N}(f) \leq \mathrm{N}(f)$$

Par conséquent $\mathrm{N}_\infty(f) \leq \mathrm{N}(f)$. Par ailleurs,

$$\mathrm{N}_\infty(f'') = \mathrm{N}_\infty(f''+f-f) \leq \mathrm{N}(f) + \mathrm{N}_\infty(f)$$

puis $\mathrm{N}_\infty(f'') - \mathrm{N}_\infty(f) \leq \mathrm{N}(f)$. Finalement

$$\mathrm{N}_1(f) = \mathrm{N}_\infty(f'') - \mathrm{N}_\infty(f) + 2\mathrm{N}_\infty(f) \leq 3\mathrm{N}(f)$$

Ainsi $\mathrm{N} \leq \mathrm{N}_1 \leq 3\mathrm{N}$ donc N et N_1 sont équivalentes.

Solution 208

1. La forme linéaire $\phi : f \in \mathrm{E} \mapsto f(0)$ est continue puisque pour tout $f \in \mathrm{E}$, $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$. De même, la forme linéaire $\psi : f \in \mathrm{E} \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est également continue puisque pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\left|\int_0^1 f(t)\,ft\right| \leq \|f\|_\infty$.
On en déduit que $\phi^{-1}(\{0\})$ et $\psi^{-1}([1,+\infty[)$ sont fermés en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. Enfin, A est fermé en tant qu'intersection de ces deux fermés.

2. Soit $f \in \mathrm{A}$. Supposons $\|f\|_\infty \leq 1$. Alors $|f(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$. En particulier, $f \leq 1$ sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq 1$. Mais puisque $f \in \mathrm{A}$, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 1$. Finalement $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ ou encore $\int_0^1 (1-f(t))\,\mathrm{d}t = 0$. L'application $1-f$ est positive, continue et d'intérgrale nulle sur $[0,1]$: elle est donc nulle i.e. f est constante égale à 1, ce qui contredit le fait que $f(0) = 0$.
On a donc montré par l'absurde que $\|f\|_\infty > 1$.

3. On vérifie que f_n est bien continue en α donc continue sur $[0,1]$. On a bien également $f_n(0) = 0$. Enfin, par la relation de Chasles,
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)t\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^1 \left(1+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}t = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
Il suffit donc de choisir $\alpha = \frac{2}{n+1}$ pour avoir $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ de sorte que $f_n \in \mathrm{A}$. On vérifie également que $\frac{2}{n+1} \in]0,1]$.

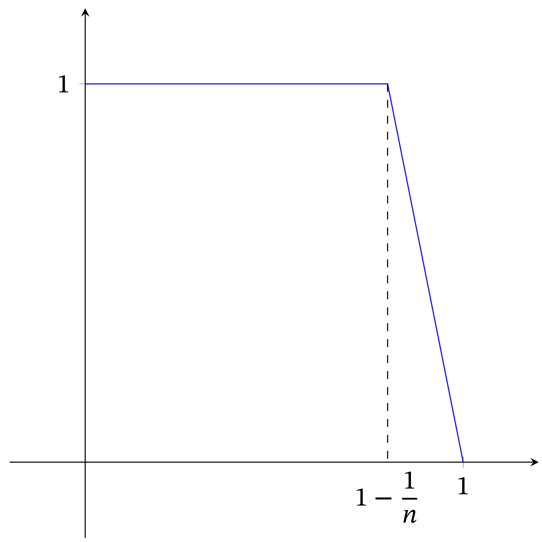
4. Puisque pour tout $f \in \mathrm{A}$, $\|f\|_\infty > 1$, $d(0,\mathrm{A}) \geq 1$. De plus, en définissant f_n comme dans la question précédente
$$d(0,\mathrm{A}) \leq \|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$$
Par passage à la limite, $d(0,\mathrm{A}) \leq 1$. Finalement, $d(0,\mathrm{A}) = 1$.

Solution 209

1. L'application $\varphi : f \in \mathrm{E} \mapsto f(1)$ est une forme linéaire. De plus, pour tout $f \in \mathrm{E}$, $|\varphi(f)| = |f(1)| \leq \|f\|_\infty$ donc φ est continue lorsque l'on munit E de la norme $\|\|_\infty$. Ainsi 0 est ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ par l'application continue φ.

2. L'application $\psi : f \in \mathrm{E} \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire. De plus, pour tout $f \in \mathrm{E}$,
$$|\psi(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1$$
Ainsi ψ est à nouveau continue si l'on unit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Par conséquent, F est fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ comme image réciproque du fermé $\mathbb{R}_-$ par l'application continue ψ.

3. Pour montrer que 0 n'est pas ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$, on va montrer que $\mathrm{E} \setminus \mathrm{O}$ n'est pas fermé pour cette même norme. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f_n : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1-\frac{1}{n} \\ n-nx & \text{sinon} \end{cases}$$



On vérifie aisément que $f_n \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{O}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, en notant f la fonction constante égale à 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|f - f_n\| = \frac{1}{2n}$$

Donc (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais $f \in 0$. D'après la caractérisation séquentielle des fermés, $\mathrm{E} \setminus \mathrm{O}$ n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ et O n'est donc pas ouvert pour cette norme.

Solution 210

1. Evident.
2. Supposons que $|b| > 1$. Alors
$$\frac{|f(\mathrm{X}^n)|}{\|\mathrm{X}^n\|} = |b|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
D'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, f n'est pas continue.
Supposons $|b| \leq 1$. Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$. Par inégalité triangulaire,
$$|f(\mathrm{P})| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k||b|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = \|\mathrm{P}\|$$
D'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, f est continue.
On en déduit de plus que $|||f||| \leq 1$. Mais comme
$$|||f||| \geq \frac{|f(1)|}{\|1\|} = 1$$
on a donc $|||f||| = 1$.

Solution 211

Remarquons déjà que $\mathrm{T}_\omega(f)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ puisque le dénominateur ne s'annule pas (stricte positivité de l'intégrale).

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\mathrm{T}_\omega(f)(x) = \frac{x}{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t} \cdot \frac{\int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t}{x}$$
Comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de ω, on a par définition du nombre dérivé en 0 :
$$\lim_{x\to0} \frac{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t}{x} = \omega(0) > 0$$

De même,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\omega(t)\,dt}{x} = \omega(0)f(0)$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{T}_\omega(f)(x) = f(0)$$

de sorte que $\mathrm{T}_\omega(f)$ est bien prolongeable par continuité en 0.

2. T_ω est clairement linéaire. Soit $f \in \mathcal{C}([0,a],\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{T}_\omega(f)$ est continue sur $]0,a]$ comme quotient de fonctions continues (et même $\mathcal{C}^1$), le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. La question précédente montre que $\mathrm{T}_\omega(f)$ est continue en 0. Ainsi $\mathrm{T}_\omega(f) \in \mathcal{C}^0([0,a],\mathbb{R})$. T_ω est donc un endomorphisme de $\mathcal{C}([0,a],\mathbb{R})$.
De plus, par inégalité triangulaire et positivité de ω,

$$\forall x \in [0,a],\ |\mathrm{T}_\omega(f)(x)| \leq= \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\,dt} \int_0^x |f(t)|\omega(t)\,dt \leq= \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\,dt} \int_0^x \|f\|_\infty \omega(t)\,dt = \|f\|_\infty$$

Autrement dit, $\|\mathrm{T}_\omega(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ donc T_ω est continu en vertu de la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.
Soit $k \in \operatorname{Ker} \mathrm{T}_\omega$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \int_0^x f(t)\omega(t)\,dt = 0$$

puis en dérivant,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x)\omega(x) = 0$$

et comme ω ne s'annule pas,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = 0$$

Mais comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment en 0, $f = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} \mathrm{T}_\omega = \{0\}$ et T_ω est injectif.

3. **a.** T_ω est injectif et $f \neq 0$ donc $\lambda \neq 0$. Comme $\mathrm{T}_\omega(f) = \lambda f$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1}{\lambda \int_0^x \omega(t)\,dt} \int_0^x f(t)\omega(t)\,dt$$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (théorème fondamental de l'analyse), le dénominateur ne s'annulant pas.
Posons $\Omega(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Alors Ω est une primitive de ω donc, en dérivant sur $\mathbb{R}^*$ la relation

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda\Omega(x)f(x) = \int_0^x f(t)\omega(t)\,dt$$

on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\omega(x)}{\Omega(x)} f(x)$$

Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation différentielle

$$y' = \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\omega}{\Omega} y$$

Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ de cette équation différentielle sont les fonctions

$$x \mapsto \mathrm{C}\Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R}$$

b. Il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{C}\Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \exp\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(\Omega(x))\right)$$

et $\lim_{x\to 0^+} \Omega(x) = 0$ donc si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$,

$$\lim_{x\to 0^+} \Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = +\infty$$

Comme f est continue en 0, ceci impose que $C = 0$. Mais f n'est pas nulle donc on a nécessairement $\lambda \in [0,1]$. On a vu à la question précédente que $\lambda \neq 0$ donc $\lambda \in]0,1]$.

Solution 212

Commençons par supposer A inversible. Puisque l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto A^{-1}MA$ est linéaire et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, cette application est continue. On en déduit que $A^{-1}\exp(AB)A = \exp(A^{-1}ABA) = \exp(BA)$. Ainsi $\exp(AB)$ et $\exp(BA)$ sont semblables ; elles ont donc même polynôme caractéristique.
Revenons au cas général. On montre classiquement que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$. L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto MB$ est linéaire donc continue puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. L'application exp est également continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Enfin, l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \det(M - \lambda I_n)$ est aussi continue puisque $\det(M - \lambda I_n)$ est polynomial en les coefficients de M. Par composition, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \det(\exp(MB) - \lambda I_n) = \chi_{\exp(MB)}(\lambda)$ est continue. De même, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_{\exp(MB)}(\lambda)$. D'après cas A inversible, ces deux applications continues coïncident sur l'ensemble dense $GL_n(\mathbb{C})$. On en déduit qu'elles sont égales sur tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi $\chi_{\exp(AB)}(\lambda) = \chi_{\exp(BA)}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ puis $\chi_{\exp(AB)} = \chi_{\exp(BA)}$.

Espaces préhilbertiens réels

Solution 213

Soit S_n l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de norme 1. Pour $A \in \S_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$, on pose $\varphi_A(X) = X^\top AX$.
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe une base orthonormée $(E_1, \dots, E_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle A diagonalise. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, notons λ_i la valeur propre de A associée à E_i. Soit $X \in S_n$. Il existe donc $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$ et $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. On a alors $\varphi_A(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. On a alors $\varphi(X) \leq \left(\max_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i\right)\sum_{i=1}^n x_i^2 = \Phi(A)$. De plus, notons j l'indice de la plus grande valeur propre de A, on a alors $\varphi_A(E_j) = \lambda_j = \Phi(A)$. Par conséquent, $\Phi(A) = \max_{X\in S_n} \varphi_A(X)$.
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0,1]$.

$$\Phi(\lambda A + (1-\lambda)B) = \max_{X\in S_n} \varphi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(X) = \max_{X\in S_n}(\lambda\varphi_A(X) + (1-\lambda)\varphi_B(X)$$

Puisque $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$, on a pour tout $X \in S_n$

$$\lambda\varphi_A(X) + (1-\lambda)\varphi_B(X) \leq \lambda \max_{X\in S_n} \varphi_A(X) + (1-\lambda)\max_{X\in S_n} \varphi_B(X) = \lambda\Phi(A) + (1-\lambda)\Phi(B)$$

Il suffit alors de passer au maximum pour $X \in S_n$ pour obtenir

$$\Phi(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda\Phi(A) + (1-\lambda)\Phi(B)$$

Autrement dit, Φ est convexe.

Solution 214

Comme A est symétrique, elle diagonalise dans une base orthonormale i.e. il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^\top AP = D$ avec D diagonale. Posons $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c|c} P & P \\ \hline P & -P \end{array}\right)$. On vérifie que $Q \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$. De plus, $Q^\top BQ = \left(\begin{array}{c|c} D + I_n & 0 \\ \hline 0 & D - I_n \end{array}\right)$. Ceci prouve que B est diagonalisable et que ses valeurs propres sont les $\lambda \pm 1$ où $\lambda \in Sp(A)$.

Solution 215

Supposons (i). Alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.

Posons également $E_{i,j} = e_ie_j^\top + e_je_i^\top$. On montre aisément que $(E_{i,j})_{1\le i\le j\le n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
L'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM + MA \end{array} \right.$$

est bien définie et c'est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $1 \le i \le j \le n$, $\Phi(E_{i,j}) = (\lambda_i + \lambda_j)E_{i,j}$. L'application Φ est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les $\lambda_i + \lambda_j$ pour $1 \le i \le j \le n$. Aucune de ces valeurs propres n'est nulle donc Φ est un automorphisme. On en déduit la proposition (ii).

> **Remarque.** On peut raisonner différemment. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^\top$. Fixons $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'équation $AM + MA = B$ équivaut à $DN + ND = C$ en posant $N = P^\top MP$ et $C = P^\top BP$. Cette équation équivaut à
>
> $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (\lambda_i + \lambda_j)N_{i,j} = C_{i,j}$$
>
> Comme $\lambda_i + \lambda_j \ne 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'équation admet donc bien une unique solution N. Comme C est symétrique, N l'est également et donc M aussi. L'équation $AM + MA = B$ admet donc bien une unique solution symétrique.

Supposons (ii). Considérons l'application Ψ qui à $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associe l'unique matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM + MA = B$. On vérifie aisément que Ψ est un automorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $I_n = \Psi(\Psi^{-1}(I_n))$ est l'unique matrice telle que $AI_n + I_nA = \Psi^{-1}(I_n)$. Ainsi $A = \frac{1}{2}\Psi^{-1}(I_n) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On reprend alors le raisonnement de la première implication. L'endomorphisme Φ (qui n'est autre que Ψ^{-1}) est alors un automorphisme. Ses valeurs propres, à savoir les $\lambda_i + \lambda_j$ ne peuvent être nulles.

Solution 216

Il est clair que si S est nulle, $S + D$ est semblable à D.
Supposons maintenant que $S + D$ est semblable à D. On rappelle que $X \mapsto \mathrm{tr}(X^\top X)$ est une norme euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $S + D$ est semblable à D, $(S + D)^2$ est également semblable à D^2 et ces deux matrices ont même trace. Ainsi

$$\mathrm{tr}(D^2) = \mathrm{tr}((S + D)^2) = \mathrm{tr}(S^2) + \mathrm{tr}(SD) + \mathrm{tr}(DS) + \mathrm{tr}(D^2)$$

On vérifie aisément que SD a une diagonale nulle donc $\mathrm{tr}(SD) = \mathrm{tr}(DS) = 0$. Ainsi $\mathrm{tr}(S^2) = \mathrm{tr}(S^\top S) = 0$ puis $S = 0$ via la norme euclidienne citée plus haut.

Solution 217

---

1. M est symétrique réelle donc M est diagonalisable. De plus, M est nilpotente donc sa seule valeur propre est 0. On en déduit que $M = 0$.
2. Comme M et $M^\top$ commutent, $(M^\top M)^n = M^n(M^\top)^nM^n = 0$. Comme $M^\top M$ est symétrique réelle, $M^\top M = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\mathrm{tr}(M^\top M) = 0$. On en déduit que $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 = 0$ puis $M_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ (somme nulle de termes positifs). Ainsi $M = 0$.

Solution 218

---

1. Notons p_u le projecteur orthogonal sur $\mathrm{vect}(u)$. Remarquons que $p_u(e_i) = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, e_i \right\rangle \frac{u}{\|u\|}$. Ainsi $\|p_u(e_i)\| = \frac{|\langle u, e_i\rangle|}{\|u\|}$. Posons alors $u = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\|e_i\|^2}$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est orthogonale, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\langle u, e_k\rangle = 1$. Donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\|p_u(e_k)\| = \frac{1}{\|u\|}$. Les projetés orthogonaux de $e_1, \dots, e_n$ sur $\mathrm{vect}(u)$ ont donc toute la même norme.
2. Soit u un vecteur répondant aux conditions de l'énoncé. Notons N la norme commune des vecteurs $p_u(e_1), \dots, p_u(e_n)$. On a donc $N = \frac{|\langle e_i, u\rangle|}{\|u\|}$ pour $1 \le i \le n$.
   Comme la base $\left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right)_{1\le i\le n}$ est orthonormale, on a :

   $$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle e_i, u\rangle^2}{\|e_i\|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{N^2\|u\|^2}{\|e_i\|^2}$$

Comme u est non nul, on obtient :

$$\mathrm{N} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|e_i\|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ceci prouve que N est indépendante de u et nous donne bien une expression de N en fonction de $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$.

Solution 219

1. Tout d'abord, pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$, $\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ par croissances comparées donc $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle$ est bien défini. La bilinéarité et la positivité sont évidentes. Soit enfin $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle = 0$. Comme $t \mapsto \mathrm{P}^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}_+$, cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi P admet une infinité de racines puis $\mathrm{P} = 0$.

2. Notons I_n l'intégrale à calculer. Par intégration par parties, $\mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Or $\mathrm{I}_0 = 1$ donc $\mathrm{I}_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On orthonormalise la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de F via le procédé de Gram-Schmidt. On pose

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_0 &= \frac{1}{\|1\|} = 1 \\
\mathrm{P}_1 &= \frac{\mathrm{X} - \langle \mathrm{P}_0, \mathrm{X}\rangle \mathrm{P}_0}{\sqrt{\|\mathrm{X}\|^2 - \langle \mathrm{P}_0, \mathrm{X}\rangle^2}} = \frac{\mathrm{X} - \mathrm{I}_1\mathrm{P}_0}{\sqrt{\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_1^2}} = \mathrm{X} - 1 \\
\mathrm{P}_2 &= \frac{\mathrm{X}^2 - \langle \mathrm{P}_0, \mathrm{X}^2\rangle \mathrm{P}_0 - \langle \mathrm{P}_1, \mathrm{X}^2\rangle \mathrm{P}_1}{\sqrt{\|\mathrm{X}^2\|^2 - \langle \mathrm{P}_0, \mathrm{X}^2\rangle^2 - \langle \mathrm{P}_1, \mathrm{X}^2\rangle^2}} = \frac{\mathrm{X}^2 - \mathrm{I}_2\mathrm{P}_0 - (\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_2)\mathrm{P}_1}{\sqrt{\mathrm{I}_4 - \mathrm{I}_2^2 - (\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_2)^2}} = \frac{1}{2}\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1
\end{aligned}$$

   Alors $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ est une base orthonormée de F.

4. Comme $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ est une base orthonormée de F, le projeté orthogonal de X^3 sur F est

$$\langle \mathrm{P}_0, \mathrm{X}^3\rangle \mathrm{P}_0 + \langle \mathrm{P}_1, \mathrm{X}^3\rangle \mathrm{P}_1 + \langle \mathrm{P}_2, \mathrm{X}^3\rangle \mathrm{P}_2 = \mathrm{I}_3\mathrm{P}_0 + (\mathrm{I}_4 - \mathrm{I}_3)\mathrm{P}_1 + (\mathrm{I}_5/2 - 2\mathrm{I}_4 + \mathrm{I}_3)\mathrm{P}_2 = 9\mathrm{X}^2 - 18\mathrm{X} + 6$$

5. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t\right| = |\langle \mathrm{P}, 1\rangle| \leq \|\mathrm{P}\|\|1\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \mathrm{P}^2(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

Solution 220

Comme E est ouvert, un minimum de f est forcément un minimum local et donc un point critique. Pour $x \in \mathrm{E}$, $\nabla f(x) = 2\sum_{i=1}^{p}(x - x_i)$. L'unique point critique de f sur E est donc $m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i$. Il suffit donc de vérifier que m est bien un minimum : il sera nécessairement unique. Pour $x \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^{p} \|x - m + m - x_i\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i\rangle + \|m - x_i\|^2\right) \\
&= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^{p} m - x_i \right\rangle \\
&= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m)
\end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{p} m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m.

Solution 221

1. Remarquons que l'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ est bien définie car $P(t)Q(t)e^{-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} o(1/t^2)$.

(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique.

(ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale.

(iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive par positivité de l'intégrale.

(iv) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2}\, dt = 0$. Comme $t \mapsto P(t)e^{-t^2}$ est continue, elle est nulle sur $]-\infty, +\infty[$. Par conséquent, P admet une infinité de racines (tous les réels) puis $P = 0$.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Remarquons que $t \mapsto t^{2n+1}e^{-t^2}$ est impaire donc $A_{2n+1} = 0$.
Par intégration par parties

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{n+1} \left[t^{n+1} e^{-t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} e^{-t^2}\, dt \right)$$

L'intégration par parties est légitimée par le fait que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} t^{n+1}e^{-t^2} = 0$. On en déduit que

$$A_n = \frac{2}{n+1} A_{n+2}$$

ou encore

$$A_{n+2} = \frac{n+1}{2} A_n$$

Comme $A_0 = 1$, on en déduit que

$$A_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

3. On peut orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$ via le processus de Gram-Schmidt.

> **Remarque.** Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace euclidien E, on peut l'orthonormaliser en une base orthonormée en posant
>
> $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f_k = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i}{\left\| e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i \right\|} = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i}{\sqrt{\|e_k\|^2 - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle^2}}$$

(i) $\|1\|^2 = A_0 = 1$ donc on pose $P_0 = 1$.

(ii) $\langle 1, X \rangle = A_1 = 0$ et $\|X\|^2 = A_2 = \frac{1}{2}$ donc on pose $P_1 = X\sqrt{2}$.

(iii) $\langle 1, X^2 \rangle = A_2 = \frac{1}{2}$, $\langle X, X^2 \rangle = A_3 = 0$ et $\|X^2\|^2 = A_4 = \frac{3}{4}$ donc on pose $P_2 = \dfrac{2(2X^2-1)}{\sqrt{5}}$.

(P_0, P_1, P_2) est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Si p désigne le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned}
d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 &= \|X^3 - p(X^3)\|^2 \\
&= \|X^3\|^2 - \|p(X^3)\|^2 \\
&= \|X^3\|^2 - \langle X^3, P_0 \rangle^2 - \langle X^3, P_1 \rangle^2 - \langle X^3, P_2 \rangle^2 \\
&= A_6 - A_3^2 - 2A_4 \qquad \text{car } X^3P_2 \text{ est impair} \\
&= \frac{15}{8} - \frac{3}{2} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

donc $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Solution 222

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ laissant $(\mathbb{R}_+)^n$ invariant. On notera $(C_j)_{1\leq j\leq n}$ la famille des vecteurs colonnes de A et $(L_i)_{1\leq i\leq n}$ la famille des vecteurs lignes de A. Notons $(E_i)_{1\leq j\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $E_i \in (\mathbb{R}_+)^n$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = AE_i \in (\mathbb{R}_+)^n$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Autrement dit A est à coefficients positifs.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Supposons $A_{ij} \neq 0$, c'est-à-dire $A_{ij} > 0$ puisque A est à coefficients positifs. Soit $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$.

$$\langle L_i, L_k\rangle = \sum_{l=1}^n A_{il}A_{kl} \geq A_{ij}A_{kj}$$

car A est à coefficients positifs. Or la famille des vecteurs lignes de A est orthonormée donc $\langle L_i, L_k\rangle = 0$. On en déduit que $A_{kj} = 0$. En raisonnant sur les colonnes de A, on démontre de la même manière que pour $k \in [\![1,n]\!]\,, \setminus\{j\}$, $A_{ik} = 0$.
Ceci signifie que chaque ligne et chaque colonne comporte au plus un coefficient non nul. Puisque les vecteurs lignes et colonnes de A sont normés, chaque ligne et chaque colonne possède exactement un coefficient non nul valant ± 1, en fait 1 car A est à coefficients positifs. Ainsi A est une matrice de permutation.
Réciproquement, toute matrice de permutation est bien orthogonale et laisse stable $(\mathbb{R}_+)^n$.

Solution 223

Soient $y \in \operatorname{Im} v$ et $z \in \operatorname{Ker} v$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = v(x)$ i.e. $y = x - u(x)$. On a également $v(z) = 0_E$ i.e. $z = u(z)$.

$$(y|z) = (x - u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|u(z)) = 0$$

car u conserve le produit scalaire. On a donc prouvé que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont orthogonaux.
En particulier, ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v = \dim E$, donc $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont supplémentaires.

Solution 224

---

f et g sont deux rotations. Si l'une des deux est l'identité, alors on peut toujours considérer que f et g sont deux rotations de même axe.
Supposons maintenant f et g distinctes de l'identité. Soit u un vecteur directeur de l'axe de f. Comme f et g commutent, $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$. Donc $g(u)$ appartient à l'axe de f, c'est-à-dire $\operatorname{vect}(u)$. Mais comme g est une isométrie, $\|g(u)\| = \|u\|$ et donc $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$.
Si $g(u) = u$, alors u est un vecteur de l'axe de g. f et g sont donc deux rotations de même axe.
Si $g(u) = -u$, notons v un vecteur directeur de l'axe de g de sorte que $g(v) = v$. Puisque g est une isométrie $\langle g(u), g(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ et donc $\langle u, v\rangle = 0$. Les axes de f et g sont donc orthogonaux. Comme $g(u) = -u$, g est une rotation d'angle π autrement dit une symétrie orthogonale par rapport à son axe. On a également $g(f(v)) = f(v)$ donc $f(v)$ appartient à l'axe de g et on a à nouveau $f(v) = v$ ou $f(v) = -v$. On ne peut avoir $f(v) = v$ puisque v n'appartient pas à l'axe de f (il lui est orthogonal et non nul). Ainsi $f(v) = -v$, ce qui prouve que f est une rotation d'angle π donc une symétrie orthogonale par rapport à son axe.

Solution 225

---

1. Soit $(x,y) \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \times \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)$. Alors $f(x) = x$ et il existe $a \in E$ tel que $y = f(a) - a$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(a) - a\rangle = \langle x, f(a)\rangle - \langle x, a\rangle = \langle f(x), f(a)\rangle - \langle x, a\rangle = 0$$

car $f \in O(E)$. Ainsi $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)^\perp$.
De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = \dim E - \dim \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E) = \dim \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)^\perp$$

Par conséquent, $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)^\perp$.

2. Supposons que $(f - \operatorname{Id}_E)^2 = 0$. Alors $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$. D'après la question précédente, on a donc $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)^\perp$. Ainsi $F \subset \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)^\perp = \{0_E\}$ puis $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E) = \{0_E\}$ i.e. $f = \operatorname{Id}_E$.

> **Remarque.** On peut également directement en terme d'adjoint sans utiliser la question précédente. Comme $f \in O(E)$, $f^* = f^{-1}$. Remarquons alors que
>
> $$(f - \operatorname{Id})^* \circ (f - \operatorname{Id}_E) = f^* \circ f - f - f^* + \operatorname{Id}_E = 2\operatorname{Id}_E - f - f^{-1} = -f^{-1} \circ (f - \operatorname{Id}_E)^2 = 0$$

Alors pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\|f(x)-x\|^2 = \langle f(x)-x, f(x)-x\rangle = \langle x, (f-\mathrm{Id_E})^* \circ (f-\mathrm{Id_E})(x)\rangle = 0$$

puis $f = \mathrm{Id_E}$.

Solution 226

---

1. Si A est symétrique $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}$ et donc $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$. On en déduit que a est une symétrie orthogonale.

2. **Première méthode.** Remarquons que

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A}^\top)^2 + \mathrm{A}^\top - \mathrm{I}_n = (\mathrm{A}^2+\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)^2 + (\mathrm{A}^2+\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) - \mathrm{I}_n$$

Après simplification, on obtient

$$\mathrm{A}^4 + 2\mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_n = 0$$

Ainsi $\mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X} - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)^3$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi $\mathrm{Sp(A)} \subset \{-1, 1\}$. On en déduit que 0 est la seule valeur propre de $\mathrm{A}^\top - \mathrm{A} = \mathrm{A}^2 - \mathrm{I}_n$. Autrement dit, $\mathrm{M} = \mathrm{A}^\top - \mathrm{A}$ est nilpotente. Comme $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} - \mathrm{I}_n$, $\mathrm{A}^\top$ commute avec A puis $\mathrm{M}^\top$ commute avec M. On en déduit que $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est également nilpotente. Comme $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est symétrique réelle, elle est également diagonalisable donc nulle. Ainsi

$$\|\mathrm{M}\|^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}) = 0$$

puis $\mathrm{M} = 0$. Ceci signifie que $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}$ et on est ramené à la question précédente : a est à nouveau une symétrie orthogonale.

Deuxième méthode. Posons $\mathrm{S} = \dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top}{2}$ et $\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{A}^\top}{2}$. Alors $\mathrm{A} = \mathrm{S}+\mathrm{T}$ et S et T sont respectivement symétrique et antisymétrique. Comme A et $\mathrm{A}^\top$ commutent, S et T commutent également. L'égalité $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} - \mathrm{I}_n$ peut alors s'écrire

$$\mathrm{S} - \mathrm{T} = \mathrm{S}^2 + \mathrm{T}^2 + 2\mathrm{ST} + \mathrm{S} + \mathrm{T} - \mathrm{I}_n$$

ou encore

$$\mathrm{S}^2 + \mathrm{T}^2 + 2\mathrm{ST} + 2\mathrm{T} = \mathrm{I}_n$$

Remarquons que ST est antisymétrique. Comme toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique,

$$\begin{cases} \mathrm{S}^2 + \mathrm{T}^2 = \mathrm{I}_n \\ \mathrm{ST} + \mathrm{T} = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \mathrm{S}^2 + \mathrm{T}^2 = \mathrm{I}_n \\ \mathrm{S}^2\mathrm{T}^2 = \mathrm{T}^2 \end{cases}$$

Comme S^2 et T^2 sont symétriques et diagonalisables, elles possèdent une base commune de vecteurs propres. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ leurs valeurs propres respectives, on a alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \lambda\mu &= \mu \end{cases}$$

On en déduit sans peine que $\lambda_i = 1$ et $\mu_i = 0$. Ainsi $\mathrm{T}^2 = 0$ et $\mathrm{S}^2 = \mathrm{I}_n$. De plus,

$$\|\mathrm{T}\|^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{T}^\top\mathrm{T}) = \mathrm{tr}(-\mathrm{T}^2) = 0$$

donc $\mathrm{T} = 0$. Ainsi $\mathrm{A} = \mathrm{S} = \mathrm{A}^\top$ et $\mathrm{A}^2 = \mathrm{S}^2 = \mathrm{I}_n$. a est donc une symétrie orthogonale.

Solution 227

---

1. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Alors $\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$. En développant, on obtient
$$\langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle$$
puis $\langle u(y), x\rangle = -\langle u(x), y\rangle$ car $\langle u(x), x\rangle = \langle u(y), y\rangle = 0$.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. On note A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. On a alors $\mathrm{A}_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. D'après ce qui précède,
$$\mathrm{A}_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle u(e_i), e_j\rangle = -\mathrm{A}_{j,i}$$
Ainsi A est antisymétrique.

2. Soit $x \in (\operatorname{Ker} u)^\perp$. Alors pour tout $y \in \operatorname{Ker} u$,
$$\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = -\langle x, 0_\mathrm{E}\rangle = 0$$
donc $u(x) \in (\operatorname{Ker} u)^\perp$ et $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ est stable par u.

3. On choisit une base orthonormale de $\operatorname{Ker} u$ et une base orthnormale de $(\operatorname{Ker} u)^\perp$. La concaténation de ces deux bases est une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix}$ où $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ avec $r = \dim(\operatorname{Ker} u)^\perp = n - \dim \operatorname{Ker} u = \operatorname{rg} u$. Or $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = \operatorname{rg}(\mathrm{N})$ donc N est inversible.

4. Comme A est antisymétrique, N l'est également. Ainsi $\det(\mathrm{N}) = \det(\mathrm{N}^\top) = \det(-\mathrm{N}) = (-1)^r \det(\mathrm{N})$. Comme N est inversible, $\det(\mathrm{N}) \neq 0$ donc $(-1)^r = 1$ et $r = \operatorname{rg}(u)$ est pair.

Solution 228

Remarquons que $\phi = p + q$ où p et q sont les projecteurs orthogonaux respectifs sur $\operatorname{vect}(a)$ et $\operatorname{vect}(b)$. Ainsi ϕ est un endomorphisme auto-adjoint comme somme d'endomorphismes auto-adjoints. En particulier, ϕ est diagonalisable. On va de toute façon s'en rendre compte en déterminant les éléments propres de ϕ.
Remarquons déjà que ϕ est nulle sur $(\operatorname{vect}(a) + \operatorname{vect}(b))^\perp$. Ainsi $(\operatorname{vect}(a) + \operatorname{vect}(b))^\perp \subset \operatorname{Ker} \phi$. Réciproquement si $x \in \operatorname{Ker} \phi$, $\langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b = 0$ de sorte que $\langle a, x\rangle = \langle b, x\rangle = 0$ car la famille (a, b) est libre. Ainsi $x \in \operatorname{vect}(a)^\perp \cap \operatorname{vect}(b)^\perp = (\operatorname{vect}(a) + \operatorname{vect}(b))^\perp$. Finalement, $\operatorname{Ker} \phi = (\operatorname{vect}(a) + \operatorname{vect}(b))^\perp$.
La nature géométrique de ϕ incite fortement à penser que $a+b$ et $a-b$ sont vecteurs propres. En effet, ces deux vecteurs sont non nuls puisque a et b sont non colinéaires et un calcul simple montrer que $\phi(a) = a + \langle a, b\rangle b$ et $\pi(b) = b + \langle a, b\rangle b$ donc $\phi(a + b) = (1 + \langle a, b\rangle)(a + b)$ et $\phi(a-b) = (1-\langle a, b\rangle)(a-b)$. Donc $a+b$ et $a-b$ sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres $1+\langle a, b\rangle$ et $1-\langle a, b\rangle$. Si $\langle a, b\rangle \neq 0$, ces valeurs propres sont distinctes : les sous-espaces propres associées à ces valeurs propres sont donc de dimension 1 puisqu'on a déjà vu que le noyau i.e. le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 était de dimension $n-2$. Ces sous-espaces propres sont donc respectivement $\operatorname{vect}(a + b)$ et $\operatorname{vect}(a - b)$. Si $\langle a, b\rangle = 0$, alors le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 contient $\operatorname{vect}(a + b, a - b) = \operatorname{vect}(a, b)$ et est en fait exactement égal à celui-ci puisque la diemnsion de $\operatorname{vect}(a, b)$ est 2 et que $\operatorname{Ker} \phi$ est déjà de dimension $n-2$.

Récapitulons. Dans tous les cas, 0 est valeur propre de ϕ et le sous-espace propre associé est $(\operatorname{vect}(a) + \operatorname{vect}(b))^\perp$. Si $\langle a, b\rangle \neq 0$, ϕ possède deux valeurs propres supplémentaires $1 + \langle a, b\rangle$ et $1 - \langle a, b\rangle$ et les sous-espaces propres respectivement associés sont $\operatorname{vect}(a + b)$ et $\operatorname{vect}(a - b)$. Si $\langle a, b\rangle = 0$, ϕ possède 1 comme seule valeur propre en sus de 0 et le sous-espace propre associé est $\operatorname{vect}(a, b)$. Il est d'ailleurs géométriquement clair dans ce cas que ϕ induit l'identité sur $\operatorname{vect}(a, b)$.

Solution 229

1. Pour tout $x \in \mathrm{E}$,
$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle^2 \geq 0$$
donc v est positif. Supposons maintenant que $\langle f(x), x\rangle = 0$. Tous les termes de la somme précédente étant positifs, ils sont tous nuls. Ainsi x est orthogonal à chacun des u_k et donc au sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, c'est-à-dire E. Ainsi $x = 0_\mathrm{E}$.

2. Considérons une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de E. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres assocciées à ces vecteurs propres. Ces valeurs propres sont toutes strictement positives. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe un unique endomorphisme g de E tel que $g(e_i) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i$. On a clairement $g^2(e_i) = \dfrac{1}{\lambda_i} e_i = f^{-1}(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est

une base de E, $g^2 = f^{-1}$.
Soit $(x, y) \in E^2$. Alors

$$\langle g(x), y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$

donc g est auto-adjoint. Les valeurs propres de g sont les réels strictement positifs $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ donc v est défini positif.

3. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$u_i = f(f^{-1}(u_i)) = \sum_{k=1}^{n}\langle f^{-1}(u_i), u_k\rangle u_k$$

Mais comme $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, $\langle f^{-1}(u_i), u_k\rangle = \delta_{i,k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Alors, comme g est auto-adjoint,

$$\langle g(u_i), g(u_j)\rangle = \langle g^2(u_i), u_j\rangle = \langle f^{-1}(u_i), u_j\rangle = \delta_{i,j}$$

Ainsi $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est bien une base orthonormée de E.

Solution 230

On note $n = \dim E$ dans ce qui suit.

1. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} & x \in \mathrm{Im}(u)^\perp \\ \iff & \forall y \in E,\ \langle x, u(y)\rangle = 0 \\ \iff & forall y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = 0 \\ \iff & u(x) = 0_E \\ \iff & x \in \mathrm{Ker}(u) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Im}(u)^\perp = \mathrm{Ker}(u)$ mais, comme E est de dimension finie, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

2. Soit $x \in E$. Si $u(x) = 0$, il est clair que $\langle u(x), x\rangle = 0$. Réciproquement, supposons que $\langle u(x), x\rangle = 0$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\langle x, e_i\rangle^2 = 0$. Comme il s'agit d'une somme de termes positifs, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i\langle x, e_i\rangle^2 = 0$ ou encore $\lambda_i\langle x, e_i\rangle = 0$. Ainsi $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\langle x, e_i\rangle e_i = 0_E$.

3. **a.** D'une part, $u+v \in \mathcal{S}(E)$ car $\mathcal{S}(E)$ est un espace vectoriel. D'autre part, pour tout $x \in E$, $\langle (u+v)(x), x\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle v(x), x\rangle \geq 0$. On en déduit que $u + v \in \mathcal{S}^+(E)$.

b. Il est clair que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u+v)$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(u+v)$. Alors $\langle u(x), x\rangle + \langle v(x), x\rangle = \langle (u+v)(x), x\rangle = 0$. Les deux termes étant positifs, $\langle u(x), x\rangle = \langle v(x), x\rangle = 0$. D'après la question **2**, $u(x) = v(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.

c. On montre classiquement que, si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$. Comme u, v et $u + v$ sont auto-adjoints, la question **1** donne alors

$$\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Ker}(u + v)^\perp = (\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v))^\perp = \mathrm{Ker}(u)^\perp + \mathrm{Ker}(v)^\perp = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$$

Solution 231

1. Il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ leurs valeurs propres associés. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\exp(u)(e_i) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{u^p}{p!}\right)(e_i)$$

L'application $v \in \mathcal{L}(E) \mapsto v(e_i)$ est une application linéaire et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie donc cette application est continue. Ainsi

$$\exp(u)(e_i) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}u^p(e_i)$$

On montre aisément par récurrence que $u^p(e_i) = \lambda_i^p e_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\exp(u)(e_i) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^p}{p!} e_i = e^{\lambda_i} e_i$$

Ainsi $(e_1, \dots, e_n)$ est également une base orthonormée de vecteurs propres de $\exp(u)$ donc $\exp(u)$ est auto-adjoint. De plus, $\mathrm{Sp}(\exp(u)) = \left\{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right\} \subset \mathbb{R}_+^*$ donc $\exp(u)$ est défini positif.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de v. Notons $\mu_1, \dots, \mu_n$ les valeurs propres associées toutes strictement positives. Posons $\lambda_i = \ln(\mu_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. On peut définir un endomorphisme u en posant $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u donc u est auto-adjoint. La question précédente montre que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exp(u)(e_i) = e^{\lambda_i} e_i = \mu_i e_i = v(e_i)$$

Comme les endomorphismes v et $\exp(u)$ coïncident sur une base de E, ils sont égaux.
Supposons qu'il existe $w \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ tel que $v = \exp(u) = \exp(w)$. Notons $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de w et $\nu_1, \dots, \nu_n$ les valeurs propres associées. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. D'une part,

$$\langle \exp(u)(e_i), f_j \rangle = e^{\lambda_i} \langle e_i, f_j \rangle$$

mais comme $\exp(u)$ est auto-adjoint

$$\langle \exp(u)(e_i), f_j \rangle = \langle e_i, \exp(u)(f_j) \rangle = \langle e_i, \exp(w)(f_j) \rangle = e^{\nu_j} \langle e_i, f_j \rangle$$

Ainsi

$$e^{\lambda_i} \langle e_i, f_j \rangle = e^{\nu_j} \langle e_i, f_j \rangle$$

Si on a $\langle e_i, f_j \rangle = 0$, alors $\lambda_i \langle e_i, f_j \rangle = \nu_j \langle e_i, f_j \rangle$. Sinon $e^{\lambda_i} = e^{\nu_j}$ puis $\lambda_i = \nu_j$ par injectivité de exp. On a a nouveau $\lambda_i \langle e_i, f_j \rangle = \nu_j \langle e_i, f_j \rangle$. Ceci peut également s'écrire $\langle u(e_i), f_j \rangle = \langle e_i, w(f_j) \rangle$ ou encore $\langle u(e_i), f_j \rangle = \langle w(e_i), f_j \rangle$ car w est auto-adjoint. Ceci est valable pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E donc $u(e_i) = w(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est également une base de E, $u = w$.

Solution 232

1. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

Ainsi

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

2. La première implication est triviale. Supposons donc que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle s(x), s(y) \rangle = 0$$

Soient x et y deux vecteurs unitaires. Alors $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$. On en déduit que $\langle s(x + y), s(x - y) \rangle = 0$, ce qui donne, par linéarité de s, $\|s(x)\|^2 = \|s(y)\|^2$. Ainsi le carré de la norme de s est constant sur la sphère unité. Notons c cette constante. Soit $x \in \mathrm{E}$. Si $x = 0_{\mathrm{E}}$, alors $\|s(x)\|^2 = 0 = c\|x\|^2$. Sinon, $x/\|x\|$ est unitaire donc $\|s(x/\|x\|)\|^2 = c$ i.e. $\|s(x)\|^2 = c\|x\|^2$ par linéarité de s et homogénéité de la norme. Finalement, $\|s(x)\|^2 = c\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
Soit alors $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Par identité de polarisation,

$$\begin{aligned}
\langle s(x), s(y) \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|s(x) + s(y)\|^2 - \|s(x)\|^2 - \|s(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|s(x + y)\|^2 - \|s(x)\|^2 - \|s(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(c\|x + y\|^2 - c\|(x)\|^2 - c\|(y)\|^2\right) \\
&= c\langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

3. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifiant la condition de l'énoncé. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ tel que $\langle x, y\rangle = 0$. En considérant $\mathrm{V} = \mathrm{vect}(x)$, on a donc $y \in \mathrm{V}^\perp$. Ainsi $u(y) \in u(\mathrm{V})^\perp$. Notamment, $\langle u(x), u(y)\rangle = 0$. D'après la question précédente, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = c\langle x, y\rangle$$

En choisissant $x = y \neq 0_\mathrm{E}$, on constate que $c \geq 0$. Si $c \neq 0$, alors $v = u/\sqrt{c} \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ puisque

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle v(x), v(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Ainsi u est la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{c}$ et d'une isométrie vectorielle. C'est aussi vrai si $c = 0$ i.e. $u = 0$.
Réciproquement supposons que u est la composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ tels que $u = \lambda v$. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Soit ensuite $x \in \mathrm{V}^\perp$. Alors pour tout $y \in \mathrm{V}$,

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \lambda^2\langle v(x), v(y)\rangle = \lambda^2\langle x, y\rangle = 0$$

donc $u(x) \in u(\mathrm{V})^\perp$. On a donc bien $u(\mathrm{V}^\perp) \subset u(\mathrm{V})^\perp$.

Solution 233

---

1. **a.** La linéarité de $u \otimes v$ découle essentiellement de la bilinéarité du produit scalaire.
De plus, $\mathrm{Im}(u \otimes v) \subset \mathrm{vect}(u)$ donc $\mathrm{rg}(u \otimes v) \leq 1$. Par ailleurs, $(u \otimes v)(v) = \|v\|^2 u \neq 0_\mathrm{E}$ car u et v sont non nuls. Par conséquent, $\mathrm{rg}(u \otimes v) = 1$.

b. Soit λ une valeur propre de $u \otimes v$ et x un vecteur propre associé. Alors $\langle v|x\rangle u = \lambda x$. Si $\lambda \neq 0$, alors $x \in \mathrm{vect}(u)$. On en déduit que $\langle v|u\rangle u = \lambda u$ puis $\lambda = \langle v|u\rangle$ car $u \neq 0_\mathrm{E}$.
Si $\langle v|u\rangle \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}(u \otimes v) \subset \{0, \langle v|u\rangle\}$. De plus, $\mathrm{Ker}(u \otimes v) = \mathrm{vect}(v)^\perp$ et, ce qui précède montre que $\mathrm{Ker}(u \otimes v - \langle v|u\rangle \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{vect}(u)$. L'inclusion réciproque est triviale. En conclusion, $\mathrm{Sp}(u \otimes v) = \{0, \langle v|u\rangle\}$, $\mathrm{E}_0(u \otimes v) = \mathrm{vect}(v)^\perp$ et $\mathrm{E}_{\langle v|u\rangle}(u \otimes v) = \mathrm{vect}(u)$.
Si $\langle v|u\rangle = 0$, ce qui précède montre que $\mathrm{Sp}(u \otimes v) = \{0\}$ et $\mathrm{E}_0(u \otimes v) = \mathrm{vect}(v)^\perp$.

c. Si $\langle v|u\rangle \neq 0$, alors $u \otimes v$ est diagonalisable car $\dim \mathrm{E}_0(u \otimes v) + \dim \mathrm{E}_{\langle v|u\rangle}(u \otimes v) = \dim \mathrm{E} - 1 + 1 = \dim \mathrm{E}$.
Si $\langle v|u\rangle \neq 0$, $u \otimes v$ n'est pas diagonalisable car 0 est son unique valeur propre et $\dim \mathrm{E}_0(u \otimes v) = \dim \mathrm{E} - 1 < \dim \mathrm{E}$.

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors

$$(u \otimes v)^2(x) = \langle v|x\rangle(u \otimes v)(u) = \langle v|x\rangle\langle v|u\rangle u = \langle v|u\rangle(u \otimes v)(x)$$

Ainsi $(u \otimes v)^2 = \langle v|u\rangle(u \otimes v)$. On en déduit que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - \langle v|u\rangle\mathrm{X}$ annule $u \otimes v$. Si $\langle v|u\rangle \neq 0$, alors P est simplement scindé et $u \otimes v$ est diagonalisable. Si $\langle v|u\rangle = 0$, alors $(u \otimes v)^2 = 0$ et $u \otimes v$ est nilpotent. Il ne peut être diagonalisable car sinon il serait nul.

3. Supposons que g commute avec $u \otimes v$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$(u \otimes v) \circ g(x) = g \circ (u \otimes v)(x)$$

ou encore

$$\langle v|g(x)\rangle u = \langle v|x\rangle g(u)$$

Notamment, comme $v \neq 0_\mathrm{E}$, $g(u) = \alpha u$ avec $\alpha = \dfrac{\langle v|g(v)\rangle}{\|v\|^2}$. La dernière égalité peut également s'écrire

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \langle g^*(v)|x\rangle u = \alpha\langle v|x\rangle u$$

Comme $u \neq 0_\mathrm{E}$, on a donc $\langle g^*(v) - \alpha v|x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et donc $g^*(v) = \alpha v$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned}(u \otimes v) \circ g(x) &= \langle v|g(x)\rangle u = \langle g^*(v)|x\rangle u = \alpha\langle v|x\rangle u\\ g \circ (u \otimes v)(x) &= \langle v|x\rangle g(u) = \alpha\langle v|x\rangle u\end{aligned}$$

donc g et $u \otimes v$ commutent.

Calcul différentiel

Solution 234

1. On montre sans difficulté que D est un sous-espace vectoriel de E^*. On vérifie également sans peine que les formes linéaires $\varphi_i : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ appartiennent toutes à D. Elles sont calirement non nulles puisque $\varphi_i(e_i^*) = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2. Notons ψ l'application de l'énoncé. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\forall f \in E,\ \psi(\lambda a + \mu b)(f) = \mathrm{d}f(0) \cdot (\lambda a + \mu b) = \lambda\ \mathrm{d}f(0) \cdot a + \mu\ \mathrm{d}f(0) \cdot b = \lambda\psi(a)(f) + \mu\psi(b)(f)$$

car $\mathrm{d}f(0)$ est linéaire par définition. Ainsi $\psi(\lambda a + \mu b) = \lambda\psi(a) + \mu\psi(b)$ de sorte que ψ est linéaire.
Soit $a \in \operatorname{Ker}\psi$. Pour tout $f \in E$, $\psi(a)(f) = 0$. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^* \in E$ et $\mathrm{d}e_i^*(0) = e_i^*$ car e_i^* est linéaire. Ainsi

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \psi(a)(e_i^*) = 0 = e_i^*(a)$$

Par conséquent, $a = \sum_{i=1}^n e_i^*(a)e_i = 0$. L'application ψ est donc bien injective.

3. Soit $f \in E$. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$. Par composition, l'application $\xi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$ est dérivable et, d'après la règle de la chaîne,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \xi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)e_i^*(x)$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse

$$f(x) - f(0) = \xi(1) - \xi(0) = \int_0^1 \xi'(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\ \mathrm{d}t$$

Notons $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que $f_i : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\ \mathrm{d}t$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi

$$f = f(0)\mathbb{1} + \sum_{i=1}^n f_i e_i^*$$

On peut prouver à l'aide du théorème de dérivation des intégrales à paramètre que les f_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sont donc des éléments de E. Soit alors $\varphi \in D$.

$$\varphi(f) = f(0)\varphi(\mathbb{1}) + \sum_{i=1}^n \varphi(f_i e_i^*)$$

Tout d'abord,

$$\varphi(\mathbb{1}) = \varphi(\mathbb{1}^2) = 2\mathbb{1}(0)\varphi(\mathbb{1}) = 2\varphi(\mathbb{1})$$

donc $\varphi(\mathbb{1}) = 0$. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\varphi(f_i e_i^*) = f_i(0)\varphi(e_i^*) + e_i^*(0)\varphi(f_i) = \varphi(e_i^*)f_i$$

Ainsi

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i^*)f_i(0) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)^* \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i^*)\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \sum_{i=1}^n \varphi(e_i^*)\varphi_i$$

On a vu à la première question que les φ_i appartiennaient à D. Comme les $\varphi(e_i^*)$ sont des scalaires, on peut affirmer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ engendre D. De plus, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est l'image de la base $(e_1, \dots, e_n)$ par l'application linéaire injective ψ donc cette famille est libre : c'est une base de D.

Solution 235

1. Comme le produit scalaire est bilinéaire, g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et
$$\forall (x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \mathrm{d}g(x)\cdot h = 2\langle f(x)-a \mid \mathrm{d}f(x)\cdot h\rangle$$

2. Posons $\mathrm{M} = g(0)$. Puisque $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > \mathrm{A} \implies \|g(x)\| > \mathrm{M}$$
Comme la boule de centre 0 et de rayon A est compact, la fonction continue g admet un minimum m sur cette boule. De plus, comme 0 appartient à cette boule, $m \leq g(0) = \mathrm{M}$. Comme $f(x) > \mathrm{M}$ lorsque x n'appartient pas à cette boule, m est bien le minimum de g sur $\mathbb{R}^n$.

3. Notons x_0 le point où est atteient le minimum de g. Par conséquent, $\mathrm{d}g(x_0) = 0$. D'après la première question,
$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \langle f(x_0)-a \mid \mathrm{d}f(x_0)\cdot h\rangle = 0$$
Mais $\mathrm{d}f(x_0)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ injectif et donc également surjectif. Il s'ensuit que
$$\forall k \in \mathbb{R}^n,\ \langle f(x_0)-a \mid k\rangle = 0$$
puis $f(x_0)-a = 0$. Ainsi $f(x_0) = a$ de sorte que f est surjective.

Solution 236

1. Tout d'abord, par sous-multiplicativité de la norme, $\|\mathrm{H}\|^n \leq \|\mathrm{H}\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\|\mathrm{H}\| < 1$, la série géométrique $\sum \|\mathrm{H}\|^n$ converge. On en déduit que $\sum \mathrm{H}^n$ converge absolument puis que $\sum \mathrm{H}^n$ converge puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
Par ailleurs, par continuité de la multiplication matricielle à gauche,
$$(\mathrm{I}_n - \mathrm{H})\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}^n - \mathrm{H}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{H}^n = \mathrm{H}^0 = \mathrm{I}_n$$
Ainsi $\mathrm{I}_n - \mathrm{H}$ est inversible, d'inverse $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}^n$.

2. On remarque que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(\mathrm{M})$. Ainsi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. **a.** Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|\mathrm{H}\| < 1$. D'après ce qui précède
$$f(\mathrm{I}_n + \mathrm{H}) = (\mathrm{I}_n + \mathrm{H})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{H}^n = \mathrm{I}_n - \mathrm{H} + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{H}^n = f(\mathrm{I}_n) - \mathrm{H} + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{H}^n$$
Posons $\varphi(\mathrm{H}) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{H}^n$. Par continuité de la multiplication matricielle à gauche,
$$\varphi(\mathrm{H}) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{H}^{n+2} = \mathrm{H}^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{H}^n$$
Puis, par inégalité triangulaire et sous-multiplicativité de la norme,
$$\|\varphi(\mathrm{H})\| \leq \|\mathrm{H}\|^2 \left\|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{H}^n\right\| \leq \|\mathrm{H}\|^2 \sum_{n=0}^{+\infty}\|\mathrm{H}\|^n = \frac{\|\mathrm{H}\|^2}{1-\|\mathrm{H}\|}$$
Comme $\dfrac{\|\mathrm{H}\|}{1-\|\mathrm{H}\|} \xrightarrow[\mathrm{H}\to 0]{}$, $\varphi(\mathrm{H}) \underset{\mathrm{H}\to 0}{=} o(\mathrm{H})$ puis
$$f(\mathrm{I}_n + \mathrm{H}) \underset{\mathrm{H}\to 0}{=} \mathrm{I}_n - \mathrm{H} + o(\mathrm{H})$$
Comme l'application $\mathrm{H} \mapsto -\mathrm{H}$ est clairement linéaire, f est différentiable en I_n et $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) = -\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

b. Fixons $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|H\| < 1/\|M^{-1}\|$ de sorte que $\|M^{-1}H\| \leq \|M^{-1}\|\|H\| < 1$. On peut alors écrire :

$$f(M+H) = (M+H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} = f(M) - M^{-1}HM^{-1} + \varphi(M^{-1}H)M^{-1}$$

Mais, d'après la question précédente,

$$\|\varphi(M^{-1}H)M^{-1}\| \leq \|\varphi(M^{-1}H)\|\|M^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}H\|^2}{1-\|M^{-1}H\|}\|M^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}\|^3\|H\|^2}{1-\|M^{-1}\|\|H\|}$$

On en déduit alors que $\varphi(M^{-1}H)M^{-1} \underset{H\to 0}{=} o(H)$ et donc que

$$f(M+H) \underset{H\to 0}{=} f(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(H)$$

Comme l'application $H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$ est clairement linéaire, f est différentiable en M et $df(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 237

1. En vertu du théorème spectral, il existe une base orthornormée $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de f. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées à ces vecteurs propres. Soit alors $h \in E \setminus \{0_E\}$. Alors

$$h = \sum_{i=1}^n (e_i \mid h)e_i$$

puis

$$f(h) = \sum_{i=1}^n (e_i \mid h)f(e_i) = \sum_{i=1}^n (e_i \mid h)\lambda_i e_i$$

Mais comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthornormée

$$(f(h) \mid h) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(e_i \mid h)^2$$

Les λ_i sont strictement positifs et les $(e_i \mid h)$ ne peuvent être tous nuls car $h \neq 0_E$. Ainsi $(f(h) \mid h) > 0$.

2. **a. Première méthode.** Soit $(x,h) \in E^2$. Remarquons que

$$g(x+h) = \frac{1}{2}(f(x) \mid x) + \frac{1}{2}(f(x) \mid h) + \frac{1}{2}(f(h) \mid x) + \frac{1}{2}(f(h) \mid h) - (u \mid x) - (u \mid h)$$
$$g(x+h) = g(x) + (f(x) - u \mid h) + \frac{1}{2}(f(h) \mid h) \qquad \text{car } (f(h) \mid x) = (f(x) \mid h) \text{ en vertu de la symétrie de } f$$

Comme f est linéaire et que E est de dimension finie, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|f(z)\| \leq C\|z\|$ pour tout $z \in E$. D'après Cauchy-Schwarzn

$$|(f(h) \mid h) \leq \|f(h)\|\|h\| \leq C\|h\|^2$$

En particulier,

$$(f(h) \mid h) \underset{h\to 0}{=} o(h)$$

On en déduit que g est différentiable en x et que $dg(x)$ est l'application $h \mapsto (f(x) - u \mid h)$. On peut également affirmer que $\nabla g(x) = f(x) - u$.

Deuxième méthode L'application $\varphi : x \mapsto (u \mid x)$ est linéaire donc est différentiable sur E et $d\varphi = \varphi$. f et Id_E sont différentiables sur E en tant qu'applications linéaires, donc $\psi : x \mapsto (f(x) \mid x)$ est également différentiable sur E car le produit scalaire est bilinéaire. De plus, $df = f$ et $d\,\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$ de sorte que

$$\forall (x,h) \in E^2,\ d\psi(x) \cdot h = (f(h) \mid x) + (f(x) \mid h) = 2(f(x) \mid h)$$

Finalement, $g = \dfrac{1}{2}\psi - \varphi$ est également différentiable et

$$\forall (x,h) \in E^2,\ dg(x) \cdot h = (f(x) - u \mid h)$$

b. D'après la question précédente, les points critiques de g sont les vecteurs $z \in \mathrm{E}$ tels que $f(z) = u$. Mais comme $\mathrm{Sp}(f) \in \mathbb{R}_+^*$, f est inversible. L'unique point critique de g est donc $z_0 = f^{-1}(u)$.

c. En reprenant la question **2.a**,

$$\forall h \in \mathrm{E},\ g(z_0+h) = g(z_0) + (f(z_0) - u \mid h) + \frac{1}{2}(f(h) \mid h) = g(z_0) + \frac{1}{2}(f(h) \mid h)$$

D'après la première question

$$\forall h \in \mathrm{E},\ g(z_0+h) \geq g(z_0)$$

donc g admet bien un minimum global en z_0. Mais on a même prouvé que $(f(h) \mid h) > 0$ pour tout $h \in \mathrm{E}$ non nul donc $g(z_0+h) = g(z_0)$ si et seulement si $h = 0_{\mathrm{E}}$. On peut donc préciser que z_0 est l'unique point en lequel g admet son minimum global.

Solution 238

1. Comme T est ouvert, si F admet un extremum local sur T, il s'agira d'un point critique. Or pour $(x,y) \in \mathrm{T}$, $\mathrm{F}(x,y) = x(1-y)$ de sorte que pour $(x,y) \in \mathrm{T}$,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x,y) = 1-y \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(x,y) = -x$$

Puisque $0 < x < y < 1$ pour $(x,y) \in \mathrm{T}$, ces dérivées partielles ne s'annulent pas sur T : F n'admet pas d'extremum local sur T.

2. Remarquons que F est continue sur K. Si on n'est pas convaincu, on peut par exemple remarquer que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{K},\ \mathrm{F}(x,y) = \min(x,y)(1-\max(x,y))$$

De plus, les fonctions $(x,y) \mapsto \min(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \max(x,y)$ sont continues puisque

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \qquad \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$$

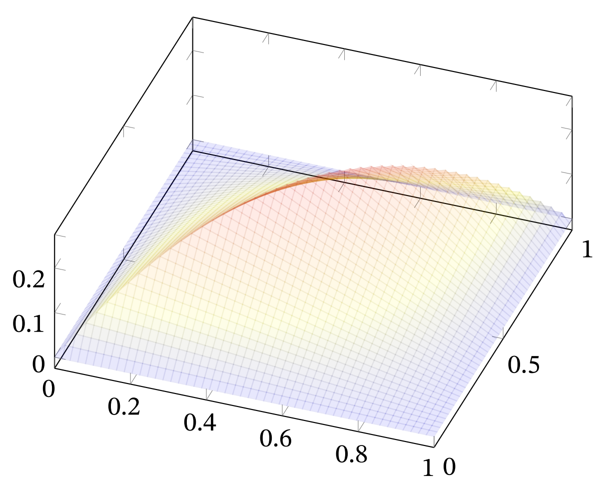
Comme $\mathrm{K} = [0,1]^2$ est compact comme produit de compacts, la fonction continue F admet un maximum et un minimum sur K. D'après la question précédente, ces extrema ne peuvent être atteints sur T, et par symétrie des rôles de x et y, ils ne peuvent pas non plus être atteints sur $\mathrm{T}' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < x < 1\}$. Par conséquent, ils sont atteints sur

$$(\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\}) \cup \Delta$$

Or

$$\forall y \in [0,1],\ \mathrm{F}(0,y) = 0$$
$$\forall x \in [0,1],\ \mathrm{F}(x,0) = 0$$
$$\forall t \in [0,1],\ \mathrm{F}(t,t) = t(1-t)$$

Une rapide étude montre que le minimum de $t \mapsto t(1-t)$ sur $[0,1]$ est 0 et que son maximum est $\frac{1}{4}$. On en déduit que $\max_{\mathrm{K}} \mathrm{F} = \frac{1}{4}$ et $\min_{\mathrm{K}} \mathrm{F} = 0$.



Remarque. On peut aussi pressentir que $\max_{K} F = \frac{1}{4}$. Dans ce cas, il suffit de constater que $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \begin{cases} x(1-y) \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) \leq y(1-y) \leq \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ceci prouve bien que $\max_{K} F = \frac{1}{4}$.

Solution 239

1. On prouve classiquement que $\varphi : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable sur E et que pour tout $x \in E$, $d\varphi(x)$ est l'application $h \mapsto 2\langle x, h\rangle$. L'application $\psi : x \mapsto f(x) - a$ est également différentiable et pour tout $x \in E$, $d\psi(x) = df(x)$. Par composition, $g = \varphi \circ \psi$ est différentiable sur E et
$$\forall (x,h) \in E^2,\ dg(x) \cdot h = d\varphi(\psi(x)) \circ d\psi(x) \cdot h = 2\langle f(x) - a, df(x) \cdot h\rangle$$

2. Pour tout $x \in E$, $g(x) \geq (\|f(x)\| - \|a\|)^2$. Comme $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$, on a également $\lim_{\|x\|\to+\infty} g(x) = +\infty$. Ainsi il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall x \in E,\ \|x\| \geq A \implies g(x) \geq g(0)$$
Par ailleurs, la boule B fermée de centre 0 et de rayon A est compact car E est de dimension finie. g est continue sur E car elle y est différentiable donc g admet un minimum m sur le compact B. Par définition de A, m est le minimum de g sur E.

3. Notons x_0 un point où g admet son minimum. On a alors $dg(x) = 0$ et donc
$$\forall h \in E,\ \langle f(x_0) - a, df(x_0) \cdot h\rangle = 0$$
ou encore
$$\forall h \in \operatorname{Im} df(x_0),\ \langle f(x_0) - a, h\rangle = 0$$
Comme $df(x_0)$ est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie E, elle est également surjective i.e. $\operatorname{Im} df(x_0) = E$. Ainsi
$$\forall h \in E,\ \langle f(x_0) - a, h\rangle = 0$$
On en déduit que $f(x_0) - a \in E^{\perp} = \{0_E\}$ i.e. $a = f(x_0)$. L'application f est donc surjective.

Solution 240

f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2$ donc elle admet un maximum et un minimum sur le compact S. Posons $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 - 1$ de sorte que $S = g^{-1}(\{0\})$. Alors f et g sont clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Notons $(a,b) \in S$ le point où f atteint son minimum/maximum. Comme $\nabla(a,b) = (2a, 2b) \neq (0,0)$ puisque $(a,b) \in S$, on peut appliquer le théorème des extrema liés : on résout le système $\begin{cases} \nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b) \\ g(a,b) = 0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} b = 2\lambda a \\ a = 2\lambda b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ ce qui donne $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$, on en déduit que $\max_{S} f = \frac{1}{2}$ et $\min_{S} f = -\frac{1}{2}$.

Solution 241

Remarquons que $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = 0\}$ est compact. Tout d'abord, $\mathcal{E}$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue g. On montre aisément que $xy \geq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit que pour $(x,y) \in \mathcal{E}$,

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2 - xy = 1$$

Ainsi $\mathcal{E}$ est inclus dans le disque de centre l'origine et de rayon $\sqrt{2}$. Notamment, $\mathcal{E}$ est bornée. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, $\mathcal{E}$ est compacte.

Soit (a,b) un extremum global de f sur $\mathcal{E}$. C'est a fortiori un extremum local. Comme $\nabla f(a,b)=(2,-1)\neq(0,0)$, $\nabla g(a,b)=(2a+b,a+2b)$ est colinéaire à $\nabla f(a,b)$. Ainsi $\begin{vmatrix} 2a+b & 2 \\ a+2b & -1 \end{vmatrix}=-2a-b-2(a+2b)=-4a-5b=0$. Comme $g(a,b)=0$, on obtient $b=\pm\frac{4}{\sqrt{21}}$. Ainsi $(a,b)=\pm\frac{1}{\sqrt{21}}(-5,4)$. Or

$$f\left(-\frac{5}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right)=-\frac{14}{\sqrt{21}}<\frac{14}{\sqrt{21}}=f\left(\frac{5}{\sqrt{21}},-\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

Donc f admet pour minimum $-\frac{14}{\sqrt{21}}$ atteint en $\left(-\frac{5}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$ et comme maximum $\frac{14}{\sqrt{21}}$ atteint en $\left(\frac{5}{\sqrt{21}},-\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$

Solution 242

---

1. Comme les applications $(x,y)\mapsto x^3-y^3$ et $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ sont polynomiales, elles sont continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ ne s'annule qu'en $(0,0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. De plus,

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x^3-y^3|\leq|x^3|+|y^3|\leq(|x|+|y|)(x^2+y^2)$$

donc

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ |f(x,y)|\leq\|(x,y)\|_1$$

Ainsi f est bien continue en $(0,0)$. Finalement, f est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. De la même manière, les applications polynomiales $(x,y)\mapsto x^3-y^3$ et $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{y^4+3x^2y^2+2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Par ailleurs,

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=1$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$,

$$\forall y\in\mathbb{R}^*,\ \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=-1$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$.
Enfin,

$$\forall y\in\mathbb{R}^*,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=0\neq1=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. De même,

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=0\neq-1=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas non plus continue en $(0,0)$.

3. Attention, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ peuvent ne pas être continues en $(0,0)$ mais pourtant y admettre des dérivées partielles.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\frac{1}{x}$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ n'est pas définie.
De même,

$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -\frac{1}{y}$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ n'est pas non plus définie.
Par contre,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0} = 0$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$ et

$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} = 0$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$.

Solution 243

---

1. Par composition, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on obtient leurs dérivées par la règle de la chaîne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$$

w_x n'est autre qu'une application partielle de f : elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall y \in \mathbb{R},\ w_x'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

2. Si $x = 0$, il suffit de prendre $y_0 = 0$ puisque $f(0,0) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par hypothèse,

$$\forall t \in [0,x],\ u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,t) > 0$$

Ainsi u est strictement croissante sur $[0,x]$ de sorte que $w_x(x) = f(x,x) = u(x) > u(0) = 0$. De même

$$\forall t \in [0,x],\ v'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,-t) - \frac{\partial f}{\partial y}(t,-t) < 0$$

Ainsi v est strictement décroissante sur $[0,x]$ de sorte que $w_x(-x) = f(x,-x) = v(x) < v(0) = 0$. Comme w_x est continue sur $[-x,x]$, il existe $y_x \in [-x,x]$ tel que $w_x(y_x) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. Par hypothèse,

$$\forall t \in [x,0],\ u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,t) > 0$$

Ainsi u est strictement croissante sur $[x,0]$ de sorte que $w_x(x) = f(x,x) = u(x) < u(0) = 0$. De même

$$\forall t \in [x,0],\ v'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(t,t) < 0$$

Ainsi v est strictement décroissante sur $[x,0]$ de sorte que $w_x(-x) = f(x,-x) = v(x) > v(0) = 0$. Comme w_x est continue sur $[-x,x]$, il existe $y_x \in [-x,x]$ tel que $w_x(y_x) = 0$.
Dans tous les cas, on a bien montré qu'il existe $y_x \in [-x,x]$ tel que $w_x(y_x) = 0$.
Enfin, $w_x'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc w_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et y_x est unique.

3. Par définition,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x, \varphi(x)) = w_x(\varphi(x)) = 0$$

D'après la règle de la chaîne, $x \mapsto f(x, \varphi(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Comme f est $\mathcal{C}^1$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues, de même que φ qui est même dérivable d'après l'énoncé. On en déduit que φ' est continue sur $\mathbb{R}$ i.e. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 244

Remarquons que $v = y - \frac{x^2}{2}$ et posons $g(u, v) = f(x, y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} - x\frac{\partial g}{\partial v}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v}
\end{aligned}$$

Enfin, $x + y = \frac{u^2}{2} + u + v$. Donc (E) équivaut à $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{u^2}{2} + u + v$. Ainsi

$$g(u, v) = \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} + uv + \varphi(v)$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors

$$f(x, y) = g\left(x, y - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x\left(y - \frac{x^2}{2}\right) + \varphi\left(y - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + xy + \varphi\left(y - \frac{x^2}{2}\right)$$

La condition $f(0, y) = 0$ donne $\varphi(y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
La solution recherchée est donc

$$f : (x, y) \mapsto -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + xy + \left(y - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^3}{3} + xy + y$$