Devoir à la maison n°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – CCP Maths 2 MP 2019

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

I Etude de quelques exemples

1 Justifier que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont même trace, même déterminant, même rang et même polynôme caractéristique.

2 On se donne deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que ces deux matrices ont même trace, même déterminant, même rang et même polynôme caractéristique.
Ces deux matrices sont-elles semblables ? On pourra vérifier que l'une d'entre elles est diagonalisable.
Ont-elles le même polynôme minimal ?

3 On se donne deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Etablir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

- en utilisant l'endomorphisme u associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E ;
- en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ.

4 Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

5 **Application.** Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de rang 1 vérifiant $u^2 \neq 0$. Démontrer que u est diagonalisable.
On pourra calculer U^2.

6 Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

7 On se donne $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.
Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.
Justifier que $2(\alpha+\beta)$ et $2(\alpha-\beta)$ sont aussi valeurs propres de A.
Préciser une base de vecteurs propres de A.
Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de A.

8 Démontrer que quels que soient les réels non nuls a et b et le réel λ, les matrices $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

II Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

9 Démontrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

10 Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R+xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $R + xS$ soit inversible.

11 Conclure que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12 **Application.** Démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

III Polynôme caractéristique et polynôme minimal

On s'intéresse dans cette partie à la proposition P_n :

> Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

13 En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, démontrer que la proposition P_n est vraie pour $n = 2$.
On admet qu'elle l'est également pour $n = 3$.

14 Démontrer que la proposition P_n est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.