Devoir à la maison n°05

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – ESSEC 2000

Dans l'ensemble du problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On note $\mathcal{P}_n$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ formé des polynômes unitaires de degré n, c'est-à-dire de degré n et dont le coefficient de X^n est égal à 1.

L'objectif du problème est de déterminer des polynômes $\mathrm{P} \in \mathcal{P}_n$ réalisant le minimum sur $\mathcal{P}_n$ de chacune des trois expressions suivantes :

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \int_{-1}^{1} |\mathrm{P}(x)| \, \mathrm{d}x \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \sqrt{\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(x)^2 \, \mathrm{d}x} \qquad \mathrm{N}_\infty(\mathrm{P}) = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |\mathrm{P}(x)|$$

Les trois parties du problème sont consacrées à la résolution des trois problèmes ainsi définis. La partie I est indépendante des deux suivantes.

I Minimisation de $\mathrm{N}_2(\mathrm{P})$ pour $\mathrm{P} \in \mathcal{P}_n$

On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ le nombre réel suivant :

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t) \, \mathrm{d}t.$$

1 Montrer que l'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

2 On considère la fonction f associant à tout n-uplet $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 \left(t^n - x_{n-1}t^{n-1} - \dots - x_1 t - x_0\right)^2 \, \mathrm{d}t$$

2.a Citer le théorème garantissant l'existence et l'unicité de $(a_0, \dots, a_{n-1})$ réalisant le minimum m_n de f sur $\mathbb{R}^n$, et montrer que ces réels a_0, a_1, …, a_{n-1} vérifient :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \int_0^1 \left(t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \dots - a_1 t - a_0\right) t^k \, \mathrm{d}t = 0$$

On explicitera ces relations en calculant ces intégrales.

2.b On pose, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots, -n-1\}$:

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{a_{n-1}}{x+n} - \frac{a_{n-2}}{x+n-1} - \dots - \frac{a_1}{x+2} - \frac{a_0}{x+1}.$$

Établir l'existence d'un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots, -n-1\}$:

$$(x+n+1)(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)\mathrm{F}(x) = a\,x(x-1)\cdots(x-n+1),$$

puis déterminer a en fonction de $n!$ et $(2n)!$.

2.c Établir :

$$m_n = f(a_0, \dots, a_{n-1}) = \int_0^1 \left(t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \dots - a_1 t - a_0\right) t^n \, \mathrm{d}t$$

2.d En déduire que

$$m_n = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$$

$\boxed{3}$ On résout maintenant le problème de la minimisation de $\mathrm{N}_2(\mathrm{P})$ pour $\mathrm{P} \in \mathcal{P}_n$.

3.a Pour tout $\mathrm{P} \in \mathcal{P}_n$, effectuer le changement de variable $x = 2t - 1$ dans l'intégrale définissant $\mathrm{N}_2(\mathrm{P})$ et en déduire que :

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{P}) \geq 2^n \sqrt{2m_n}.$$

3.b En déduire le minimum de $\mathrm{N}_2(\mathrm{P})$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

II Minimisation de $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{P})$ pour P décrivant $\mathcal{P}_n$

On considère la suite de polynômes (T_k) définis par $\mathrm{T}_0(\mathrm{X}) = 1$, $\mathrm{T}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$, et pour $k \geq 1$:

$$\mathrm{T}_{k+1}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_k(\mathrm{X}) - \mathrm{T}_{k-1}(\mathrm{X}).$$

$\boxed{4}$ Étude des propriétés des polynômes T_k.

4.a Montrer que T_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant 2^{k-1} pour $k \geq 1$.

4.b Pour un réel θ, montrer que $\mathrm{T}_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{5}$ Minimisation de $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{P})$ lorque P décrit $\mathcal{P}_n$.

5.a Supposons qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{P}_n$ tel que :

$$\mathrm{N}_\infty(\mathrm{P}) = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |\mathrm{P}(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Préciser le signe de $\frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{T}_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) - \mathrm{P}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ pour $0 \leq k \leq n$ et en déduire une contradiction.

5.b En déduire le minimum de $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{P})$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

III Minimisation de $\mathrm{N}_1(\mathrm{P})$ pour P décrivant $\mathcal{P}_n$

On considère la suite de polynômes (U_k) définie par $\mathrm{U}_0(\mathrm{X}) = 1$, $\mathrm{U}_1(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}$, et pour $k \geq 1$:

$$\mathrm{U}_{k+1}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{U}_k(\mathrm{X}) - \mathrm{U}_{k-1}(\mathrm{X}).$$

$\boxed{6}$ Étude de propriétés des polynômes U_k.

6.a Préciser le degré et le coefficient dominant de U_k. Etablir de plus que $\mathrm{U}_k(-\mathrm{X}) = (-1)^k\mathrm{U}_k(\mathrm{X})$.

6.b Déterminer les suites (u_k) vérifiant $u_{k+1} - 2\cos\theta\, u_k + u_{k-1} = 0$. En déduire pour tout nombre $\theta \in]0, \pi[$ l'expression de $\mathrm{U}_k(\cos\theta)$ en fonction $\sin((k+1)\theta)$ et $\sin\theta$ puis déterminer les valeurs $\mathrm{U}_k(1)$ et $\mathrm{U}_k(-1)$.

6.c En dérivant $\mathrm{T}_{k+1}(\cos\theta) = \cos((k+1)\theta)$, exprimer $(k+1)\mathrm{U}_k$ en fonction de la dérivée de T_{k+1}.

$\boxed{7}$ Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\operatorname{sgn}(x)$ par :

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}_n$ tel que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \int_{-1}^{1} x^k \operatorname{sgn}(P(x))\,dx = 0 \tag{$\star$}$$

7.a Prouver que, pour tout polynôme $Q \in \mathcal{P}_n$,

$$\int_{-1}^{1} (Q(x) - P(x)) \operatorname{sgn}(P(x))\,dx = 0$$

7.b En déduire que $N_1(P) \leq N_1(Q)$.

7.c Calculer $N_1(U_n)$ par le changement de variable $x = \cos \dfrac{\theta}{n+1}$. En admettant que le polynôme $U_n/2^n$ satisfait l'hypothèse $(\star)$, en déduire le minimum de $N_1(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

$\boxed{8}$ On démontre pour terminer que $U_n/2^n$ satisfait bien l'hypothèse $(\star)$. On introduit $c_j = \cos \dfrac{j\pi}{n+1}$ où $0 \leq j \leq n+1$.

8.a Déterminer $U_n(c_j)$ et le signe de U_n sur chaque intervalle $]c_{j+1}, c_j[$.

8.b Pour $0 \leq k < n$, on pose

$$I_k = \int_{-1}^{1} x^k \operatorname{sgn}(U_n(x))\,dx.$$

On suppose $n+k$ impair. Déterminer la valeur de I_k en étudiant la parité de la fonction figurant sous le signe intégral.

8.c On suppose que $n+k$ est pair. Pouver que

$$I_k = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_j^{k+1}$$

En remarquant que $c_j = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{ij\pi}{n+1}} + e^{-\frac{ij\pi}{n+1}}\right)$, en déduire que $I_k = 0$ puis que $U_n/2^n$ satisfait bien l'hypothèse $(\star)$.