Devoir à la maison n°21

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – CCP PSI 2018

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, ($\mathbb{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

1 On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

2 Enoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

3 En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|X| \geq \alpha\big) \leq \frac{\mathbb{E}\big(|X|\big)}{\alpha}.$$

4 Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\big(S_n \geq \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\big) \leq \frac{\big(\mathbb{E}\big(e^{tX}\big)\big)^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbb{E}(e^{tX})$

5 Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1,1]$, $g_a(x) \geq 0$.

6 En déduire que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1,1],\ e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

7 En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \operatorname{ch} t.$$

8 Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

9 Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

10 En déduire que $\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

11 Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

12 On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega\ ;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement est que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

13 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\ ;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geq n,\ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.

Ecrire l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega\ ;\ \lim_{n \to \infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

14 Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(A) = 1$.