Devoir à la maison n°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après CCP MP 2008 – Autour de la fonction zeta alternée de Riemann

On note F la fonction zeta alternée de Riemann définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

et ζ la fonction zeta de Riemann définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.
Mise à part la partie III qui utilise des résultats de la partie I, les parties sont dans une très large mesure indépendantes.

I Généralités

1 Déterminer le domaine de définition de ζ.

2 Déterminer le domaine de définition de F.

3 *Calcul de* F(1).

3.a Etablir le développement asymptotique suivant :

$$\ln(n) - \ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3.b En déduire l'existence d'un réel γ tel que

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (somme partielle de la série harmonique)

3.c En déduire que $F(1) = \ln(2)$.

4 On pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

5 *Dérivabilité de* F.

5.a Soit $x > 0$. Etudier les variations sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

5.b Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6 *Lien entre* ζ *et* F.
Calculer, pour $x > 1$, $\mathrm{F}(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$\mathrm{F}(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$$

puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq1} a_n$ et $\sum_{n\geq1} b_n$ est la série $\sum_{n\geq2} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.
Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geq2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geq1} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ par elle-même.
Cette étude va illustrer la fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.
Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

7 *Etude de la convergence.*

7.a On suppose $x > 1$. Indiquer, sans aucun calcul, la nature et la somme de la série produit $\sum_{n\geq2} c_n(x)$ en fonction de F.

7.b Démontrer que pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.
En déduire, pour $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geq2} c_n(x)$.

8 *Cas où* $x = 1$.
On suppose dans cette question que $x = 1$.

8.a Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{\mathrm{X}(n-\mathrm{X})}$.
En déduire une expression de $c_n(1)$ en fonction de $\dfrac{\mathrm{H}_{n-1}}{n}$.

8.b Déterminer la monotonie de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{H}_{n-1}}{n}\right)_{n\geq2}$.

8.c En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq2} c_n(1)$.

III Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1

9 *Développement asymptotique en* 1.

9.a Ecrire en fonction de $\ln(2)$ et $F'(1)$, le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

9.b En déduire deux réels a et b qui s'écrivent à l'aide de $\ln(2)$ et $F'(1)$ tels que l'on ait :

$$\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{=} \frac{a}{x-1} + b + o(1)$$

10 *Développement asymptotique en* 1 *(bis).* On considère la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ où v_n est définie sur $[1, 2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

10.a Justifier que pour $n \geq 1$ et $x \in [1, 2]$, on a :

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

10.b Justifier que pour $x \in [1, 2]$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n(x)$ converge et que le réel γ défini à la question **3.b** vérifie $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$.

10.c Exprimer, pour $x \in]1, 2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1 - x$.

10.d Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge uniformément sur $[1, 2[$ (on pourra utiliser le reste de la série).

10.e En déduire que

$$\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$

11 *Application.*
Déduire des résultats précédents une expression à l'aide de $\ln(2)$ et γ de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln(n)}{n}$$