

# DEVOIR À LA MAISON N°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

**1** Le problème de Cauchy  $\begin{cases} y' + cy = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$  admet une unique solution d'où l'unicité de la solution  $\varphi(f)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et vérifiant  $\varphi(f)(0) = 0$ . Remarquons qu'en posant  $\psi(x) = \varphi(f)(x)e^{cx}$  pour  $x \in I$ ,  $\psi$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et

$$\forall x \in I, \psi'(x) = e^{cx}(\varphi(f)'(x) + c\varphi(f)(x)) = e^{cx}f(x)$$

De plus,  $\psi(0) = 0$ . Ainsi  $\psi$  est l'unique primitive de  $x \mapsto e^{cx}f(x)$  s'annulant en 0. D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall x \in I, \psi(x) = \int_0^x e^{ct}f(t) dt$$

puis

$$\forall x \in I, \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct}f(t) dt$$

**2** Soient  $(f, g) \in \mathcal{C}^0(I)^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= e^{-cx} \int_0^x e^{ct}(\lambda f + \mu g)(t) dt \\ &= e^{-cx} \int_0^x e^{ct}(\lambda f(t) + \mu g(t)) dt \\ &= \lambda e^{-cx} \int_0^x e^{ct}f(t) dt + \mu e^{-cx} \int_0^x e^{ct}g(t) dt \\ &= \lambda \varphi(f)(x) + \mu \varphi(g)(x) \\ &= (\lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g))(x) \end{aligned}$$

Ainsi  $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$  et  $\varphi$  est bien linéaire sur  $\mathcal{C}^0(I)$ .

**3** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ . En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions  $|f|$  et 1 pour le produit scalaire  $(h, k) \mapsto \int_I hk$ , on obtient :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b 1 dt} = \sqrt{b-a} \|f\|_2$$

De plus,

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b f(t)^2 dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty^2 dt = (b-a) \|f\|_\infty^2$$

donc

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_\infty$$

On peut donc poser  $M_1 = \sqrt{b-a}$  et  $M_2 = b-a$ .

**4** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ .

$$\forall x \in I, |\varphi(f)(x)| = e^{-cx} \left| \int_0^x e^{ct} f(t) dt \right| \leq e^{-ca} \int_a^b e^{ct} |f(t)| dt \leq e^{-ca} \|f\|_\infty \int_a^b e^{ct} dt = e^{-ca} \frac{e^{cb} - e^{ca}}{c} \|f\|_\infty = \frac{e^{c(b-a)} - 1}{c} \|f\|_\infty$$

Par conséquent,  $\|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty$  avec  $M_0 = \frac{e^{c(b-a)} - 1}{c}$ .

**5** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ .

$$\forall x \in I, |\varphi(f)(x)| = e^{-cx} \left| \int_0^x e^{ct} f(t) dt \right| \leq e^{-ca} \int_a^b e^{ct} |f(t)| dt \leq e^{-ca} \int_a^b e^{cb} |f(t)| dt = e^{c(b-a)} \|f\|_1$$

Il suffit donc de poser  $A = e^{c(b-a)}$ .

En intégrant que  $[a, b]$ , on obtient

$$\|\varphi(f)\|_1 \leq A(b-a) \|f\|_1$$

Il suffit donc de poser  $C = A(b-a)$ .

**6** D'après les questions précédentes, il suffit de poser  $B = AM_1$ .

Alors

$$\forall x \in I, \varphi(f)(x)^2 \leq B^2 \|f\|_2^2$$

En intégrant sur  $[a, b]$ , on obtient,

$$\int_a^b \varphi(f)(x)^2 dx \leq (b-a) B^2 \|f\|_2^2$$

c'est-à-dire

$$\|\varphi(f)\|_2 \leq B\sqrt{b-a} \|f\|_2$$

Il suffit donc de poser  $K = B\sqrt{b-a}$ .

**7** Par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, les questions précédentes assurent que l'endomorphisme  $\varphi$  est continu pour chacune des normes  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ .

**8** Pour tout  $x \in I$ ,

$$\varphi(f_\lambda)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f_\lambda(t) dt = e^{-cx} \int_0^x e^{(c-\lambda)t} dt = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda x} - e^{-cx}}{c - \lambda} & \text{si } c \neq \lambda \\ x e^{-cx} & \text{si } c = \lambda \end{cases}$$

**9** D'après le cours, pour tout  $a > 0$ ,  $x \mapsto e^{-ax}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Notamment,  $f_\lambda$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . De même, si  $c \neq \lambda$ ,  $\varphi(f_\lambda)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}_+$ . Enfin,  $x \mapsto x e^{-x}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $x e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  donc  $f_c$  est aussi intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

De manière générale, pour  $a > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$ . Notamment, comme  $f_\lambda$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\|f_\lambda\|_1 = \frac{1}{\lambda}$ . Remarquons que, si  $\lambda \neq c$ ,  $\varphi(f_\lambda)$  est encore positive (numérateur et dénominateur de même signe). On en déduit que

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1/\lambda - 1/c}{c - \lambda} = \frac{1}{\lambda c}$$

Enfin,  $f_c$  est encore positive sur  $\mathbb{R}_+$  et, par intégration par parties,

$$\|\varphi(f_c)\|_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-cx} dx = -\frac{1}{c} [x e^{-cx}]_0^{+\infty} + \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} e^{-cx} dx = \frac{1}{c^2}$$

On a donc  $\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1}{\lambda c}$  de manière générale.

**10** Les mêmes arguments permettent de prouver que  $f_\lambda^2$  et  $\varphi(f_\lambda)^2$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}_+$ .

On trouve également comme à la question précédente que  $\|f_\lambda\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$  et que, lorsque  $\lambda \neq c$ ,

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_2^2 = \frac{1}{(c-\lambda)^2} \left( \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2c} - \frac{2}{\lambda+c} \right) = \frac{1}{2c\lambda(\lambda+c)}$$

donc  $\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}}$ . Par double intégration par parties, on obtient

$$\|\varphi(f_c)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2cx} dx = -\frac{1}{2c} [x^2 e^{-2cx}]_0^{+\infty} + \frac{1}{2c} \int_0^{+\infty} 2x e^{-2cx} dx = -\frac{1}{2c^2} [x e^{-2cx}]_0^{+\infty} + \frac{1}{2c^2} \int_0^{+\infty} e^{-2cx} dx = \frac{1}{4c^3}$$

de sorte que  $\|\varphi(f_c)\|_2 = \frac{1}{2\sqrt{c^3}}$ . On a donc  $\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}}$  de manière générale.

**11** Soit  $f \in L^1(I)$ .

$$\forall x \in I, |\varphi(f)(x)| = e^{-cx} \left| \int_0^x e^{-ct} f(t) dt \right| \leq e^{-cx} \int_0^x e^{-ct} |f(t)| dt \leq e^{-cx} \int_0^{+\infty} |f(t)| dt = e^{-cx} \|f\|_1$$

En intégrant sur  $\mathbb{R}_+$ , on obtient que  $\varphi(f) \in L^1(I)$  et

$$\|\varphi(f)\|_1 \leq \frac{1}{c} \|f\|_1$$

Par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires,  $\varphi$  est un endomorphisme continu de  $L^1(I)$ .

De plus,  $\|\varphi\| \leq \frac{1}{c}$ . Par ailleurs, pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\|\varphi\| \geq \frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_1}{\|f_\lambda\|_1} = \frac{1}{c}$$

donc  $\|\varphi\| = \frac{1}{c}$ .

**12** Fixons  $X > 0$ . Par définition de  $\varphi$ ,  $f = g' + cg$  puis  $g'g + cg^2 = fg$  en intégrant sur le segment  $[0, X]$ , on obtient

$$\int_0^X g'(t)g(t) dt + c \int_0^X g(t)^2 dt = \int_0^X f(t)g(t) dt$$

On remarque que  $\frac{1}{2}g^2$  est la primitive de  $gg'$  nulle en 0 donc

$$\frac{g(X)^2}{2} + c \int_0^X g(t)^2 dt = \int_0^X f(t)g(t) dt$$

Comme  $g(X)^2 \geq 0$ ,

$$c \int_0^X g(t)^2 dt \leq \int_0^X f(t)g(t) dt$$

puis, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$c \int_0^X g(t)^2 dt \leq \sqrt{\int_0^X f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^X g(t)^2 dt}$$

Si  $\int_0^X g(t)^2 dt \neq 0$ , on obtient en divisant par  $\sqrt{\int_0^X g(t)^2 dt}$  :

$$c \sqrt{\int_0^X g(t)^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^X f(t)^2 dt}$$

Mais cette inégalité est encore évidemment valide si  $\int_0^X g(t)^2 dt = 0$ . A fortiori, comme  $f^2$  est positive,

$$\sqrt{\int_0^X g(t)^2 dt} \leq \frac{1}{c} \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt} = \frac{1}{c} \|f\|_2$$

Mais comme  $g^2$  est positive, la fonction  $X \mapsto \sqrt{\int_0^X g(t)^2 dt}$  est croissante. De plus, elle est majorée par  $\frac{1}{c}\|f\|_2$  donc elle admet une limite en  $+\infty$ . Ceci signifie que  $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$  converge i.e.  $g = \varphi(f) \in L^2(I)$ . De plus,  $\|\varphi(f)\|_2 \leq \frac{1}{c}\|f\|_2$ . Ainsi  $\varphi$  est un endomorphisme continu de  $L^2(I)$  par caractérisation de la continuité des applications linéaires. On peut ajouter que  $\|\varphi\| \leq \frac{1}{c}$ . Mais pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\|\varphi\| \geq \frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}} = \frac{1}{c(\lambda+c)}$$

Passant à la limite lorsque  $\lambda$  tend vers  $0^+$ , on obtient  $\|\varphi\| \geq \frac{1}{c}$ . Finalement,  $\|\varphi\| = \frac{1}{c}$ .

**13** **13.a** Soit  $(f, g) \in H(I)^2$ . On sait que  $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ . Or  $f^2$  et  $g^2$  sont intégrables sur  $I$  donc  $fg$  l'est également. Pour la même raison,  $f'g'$  est intégrable sur  $I$ .

**13.b** L'application  $\phi$  est clairement symétrique. La bilinéarité de  $\phi$  provient de la linéarité de l'intégrale et de la dérivation. Enfin, si  $f$  vérifie  $\phi(f, f) = 0$ , alors  $\int_I f^2 + \int_I (f')^2 = 0$ . Comme il s'agit d'une somme de deux termes positifs,  $\int_I f^2 = \int_I (f')^2 = 0$ . Notamment,  $\|f\|_2 = 0$  donc  $f = 0$ . On a bien vérifié que  $\phi$  était un produit scalaire.

**13.c**  $\|\cdot\|_H$  est tout simplement la norme euclidienne associée au produit scalaire  $\phi$ .

**14** **14.a** Soit  $f \in L^2(I)$ . On a supposé que  $\varphi$  était un endomorphisme de  $L^2(I)$  donc  $\varphi(f) \in L^2(I)$ . Par conséquent  $\varphi(f)' = f - c\varphi(f) \in L^2(I)$ .

Ainsi  $\varphi(f) \in L^2(I)$  et  $\varphi(f)' \in L^2(I)$  donc  $\varphi(f) \in H(I)$ . De plus,  $\varphi(f)(0) = 0$  par définition donc  $\varphi(f) \in K$ .

Enfin, remarquons que

$$\forall g \in H(I), \|g\|_H^2 = \|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2$$

On a supposé que  $\varphi$  était continu pour la norme  $\|\cdot\|_2$ . On peut donc poser  $N = \|\varphi\|$ . D'après la remarque précédente,

$$\|\varphi(f)\|_H^2 = \|\varphi(f)\|_2^2 + \|\varphi(f)'\|_2^2$$

Tout d'abord,  $\|\varphi(f)\|_2 \leq N\|f\|_2$ . De plus, on rappelle que  $\varphi(f)' + c\varphi(f) = f$  de sorte que, par inégalité triangulaire,

$$\|\varphi(f)'\|_2 = \|f - c\varphi(f)\|_2 \leq \|f\|_2 + c\|\varphi(f)\|_2 \leq (1 + Nc)\|f\|_2$$

Finalement,

$$\|\varphi(f)\|_H^2 \leq (N^2 + (1 + Nc)^2)\|f\|_2^2$$

En posant  $A = \sqrt{N^2 + (1 + Nc)^2}$ , on a bien le résultat voulu.

**14.b** On a vérifié à la question précédente que  $\varphi$  était bien une application linéaire de  $L^2(I)$  dans  $\mathbb{K}$ .

Soit  $f \in \text{Ker } \varphi$ . Alors  $\varphi(f) = 0$  puis  $f = \varphi(f)' + c\varphi(f) = 0$ . Ainsi  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  et  $\varphi$  est injective.

Soit  $g \in K$ . Posons  $f = g' + cg$ . Puisque  $g$  et  $g'$  appartiennent à  $L^2(I)$ ,  $f$  également. De plus,  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y' + cy = 0$  et vérifie la condition initiale  $g(0) = 0$ . Par unicité de la solution à un problème de Cauchy,  $g = \varphi(f)$  et  $\varphi$  est surjective.

On peut donc conclure que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $L^2(I)$  dans  $K$ .

**14.c** Il suffit d'utiliser la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

**14.d** Soit  $g \in K$ . Posons  $f = \varphi^{-1}(g)$ . Alors  $g = \varphi(f)$  de sorte que  $f = g' + cg$ . Par inégalité triangulaire,

$$\|f\|_2 = \|g' + cg\|_2 \leq \|g'\|_2 + c\|g\|_2$$

Mais comme  $\|g\|_H^2 = \|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2$ , on a clairement  $\|g\|_2 \leq \|g\|_H$  et  $\|g'\|_2 \leq \|g\|_H$ . Ainsi

$$\|\varphi^{-1}(g)\|_2 = \|f\|_2 \leq (1 + c)\|g\|_H$$

A nouveau,  $\varphi^{-1}$  est continue par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.