# Semaine du 09/02

## 1 Cours

### Révisions de probabilités MPSI

**Expérience aléatoire** Univers, issue, événement, événement élémentaire, événement contraire, événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

**Espaces probabilisés finis** Probabilité. Définition et propriétés (réunion, différence, croissance, événement contraire). Distribution de probabilités sur un ensemble. Probabilité uniforme.

**Probabilités conditionelles** Définition. Si A est un événement de probabilité non nulle, $\mathbb{P}_A$ est une probabilité. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes.

**Evénements indépendants** Couple d'événements indépendants. Famille d'événements mutuellement indépendants.

**Variable aléatoire** Définition. Loi d'une variable aléatoire. Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale. Loi conditionnelle.

**Couples et $n$-uplets de variables aléatoires** Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle. Extension aux $n$-uplets de variables aléatoires. Couples de variables aléatoires indépendantes. Variables aléatoires mutuellement indépendantes. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p$, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. Les images de deux variables aléatoires indépendantes sont indépendantes. Lemmes des coalitions.

**Espérance, covariance, variance** Définition et propriétés de l'espérance. Espérance des lois usuelles. Formule de transfert. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Définition et propriétés de la covariance. Variables aléatoires décorélées. Deux variables aléatoires indépendantes sont décorélées. Variance et écart-type : définition et propriétés. Variance des lois usuelles. Variance d'une somme de variables aléatoires décorrélées.

**Inégalités** Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

### Probabilités

**Ensembles dénombrables** Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble st fini ou dénombrable si et seulement s'il est en biejction avec une partie de $\mathbb{N}$. Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

**Univers probabilisé** Tribu. Stabilité par passage au complémentaire, intersection et union finie ou dénombrable. Espace probabilisable. Probabilité sur un espace probabilisable. Continuité croissante/décroissante. Sous-additivité : si $(A_n)$ est une suite d'événements, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Evénements négligeables/presque sûrs. Une union finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable. Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre. Si $\Omega$ est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur $\Omega$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ indexée par $\Omega$ et de somme 1. Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable. Probabilité définie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur $\Omega$.

**Probabilité conditionnelle et indépendance** Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes. Evénéments indépendants. Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ sont indépendants.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Modéliser une expérience aléatoire **concrète** (lancers de dés, tirages de boules, ...) à l'aide d'événements et de variables aléatoires : il s'agit essentiellement de **nommer** les événements et les variables aléatoires pertinents.
- **Partitionner** un événement pour en calculer la probabilité.
- Calculer les lois marginales à partir de la loi conjointe : $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.
- Utiliser la formule de transfert pour calculer l'**espérance** de l'**image** $Y = f(X)$ d'une variable aléatoire X de loi connue. Il est alors inutile de déterminer la loi de Y.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire à l'aide de la formule de transfert : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ et $\mathbb{E}(X^2)$ se calcule avec la formule de transfert.
- Appliquer la formule des probabilités totales à un système complet d'événements, typiquement $\{X = x\}_{x\in X(\Omega)}$ où X est une variable aléatoire. Application aux chaînes de Markov.

- Connaître les lois usuelles ainsi que leurs espérances et leurs variances.
- **Renverser** le conditionnement à l'aide de la formule de Bayes.

## 3 Questions de cours

**Banque CCP** Exos 95, 98, 101, 104, 105, 107, 109