Devoir à la maison n°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Dans tout le corrigé, on pose $f_n : x \mapsto e^{-xn^\alpha}$.

$\boxed{1}$ **1.a** Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-nx}$ est une série géométrique de raison e^{-x}. Elle ne converge donc que si $x > 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $S_1(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$.

1.b On sait que $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$. On en déduit que $S_1(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ puis que $\lim_{0^+} S_1 = +\infty$.

1.c Il est clait que $\lim_{x\to+\infty} S_1(x) = 1$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$S_1(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$$

$\boxed{2}$ **2.a** Soit $x \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-xn^\alpha} \geq 1$ donc $\sum e^{-n^\alpha}$ diverge grossièrement.

2.b Soit $x > 0$. On peut écrire $n^2 e^{-xn^\alpha} = (n^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}} e^{-xn^\alpha}$. On effectue alors le changement de variable $t = n^\alpha$ i.e. $n = t^{1/\alpha}$. Alors $n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et, par croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{2}{\alpha}} e^{-xt} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-xn^\alpha} = 0$.
Autrement dit, $e^{-xn^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc $\sum e^{-xn^\alpha}$ converge.

2.c Les questions précédentes montrent que le domaine de définition de S_α est $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\alpha > 0$.

$\boxed{3}$ **3.a** Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par croissance et positivité de l'exponentielle, $\|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} = f_n(\varepsilon)$. D'après la question précédente, $\sum f_n(\varepsilon)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge normalement.
A fortiori, $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[\varepsilon, +\infty[$ pour $\varepsilon > 0$. Comme les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que S_α est continue sur $\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*} [\varepsilon, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

3.b Soit deux réels x et y tels que $0 < x \leq y$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq f_n(y)$ donc $S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S_\alpha(y)$. On en déduit que S_α est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'après le théorème de la limite monotone, S_α admet une limite finie ou infinie en 0^+ et $+\infty$.

> **Remarque.** On peut préciser que la limite de S_α en 0^+ est finie ou égale à $+\infty$. De plus, comme S_α est clairement minorée par 0, sa limite en $+\infty$ est nécessairement finie.

3.c Remarquons que $\lim_{+\infty} f_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim_{+\infty} f_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$, on peut appliquer le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{+\infty} S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

3.d Soient $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. La somme définissant $S_\alpha(x)$ étant à termes positifs, $S_\alpha(x) \geq \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$. Par passage à la limite en 0^+ (on a vu que S_α possédait une limite ℓ en 0^+), on obtient $\ell \geq N + 1$.
Ceci étant valide pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\ell = +\infty$.

$\boxed{4}$ **4.a** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $t \mapsto e^{-xt^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall t \in [n, n+1],\ e^{-x(n+1)^2} \leq e^{-xt^2} \leq e^{-xn^2}$$

puis, par croissance de l'intégrale

$$e^{-x(n+1)^2} = \int_n^{n+1} e^{-x(n+1)^2}\ \mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\ \mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} e^{-xn^2}\ \mathrm{d}t = e^{-x(n+1)^2}$$

4.b D'après la question précédente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\ \mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2}$$

ou encore

$$\mathrm{S}_2(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\ \mathrm{d}t \leq \mathrm{S}_2(x)$$

Par le changement de variable linéaire $u = t\sqrt{x}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

4.c On a donc

$$\forall x > 0,\ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq \mathrm{S}_2(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1$$

Puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{0^+} \mathrm{S}_2 = +\infty$ par minoration.

De plus, $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1 \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ donc $\mathrm{S}_2(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

$\boxed{5}$ **5.a** Soit $x > 0$.

$$\mathrm{S}_2(x) - 1 - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2}$$

Or, pour tout entier $n \geq 2$, $n^2 \geq n$ puis $e^{-xn^2} \leq e^{-xn}$ de sorte que

$$\mathrm{S}_2(x) - 1 - e^{-x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn}$$

5.b On reconnaît la somme d'une série géométrique de raison e^{-x} :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn} = \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}}$$

De plus, $\mathrm{S}_2(x) - 1 - e^{-x} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2}$ est une somme de termes positifs donc

$$0 \leq \mathrm{S}_2(x) - 1 - e^{-x} \leq \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}}$$

puis

$$0 \leq e^x\left(\mathrm{S}_2(x) - 1 - e^{-x}\right) \leq \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

On en déduit à l'aide du théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \to +\infty} e^x\left(\mathrm{S}_2(x) - 1 - e^{-x}\right) = 0$$

ou encore

$$\mathrm{S}_2(x) - 1 - e^{-x} \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{-x})$$

ou enfin

$$\mathrm{S}_2(x) \underset{x \to +\infty}{=} 1 + e^{-x} + o(e^{-x})$$

Ceci signifie également que

$$\mathrm{S}_2(x) - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}$$

6 **6.a** Soit $x > 0$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-x(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\ \mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leq \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} \leq \int_{\mathrm{N}}^{+\infty} e^{-xt^2}\ \mathrm{d}t$$

6.b Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $u = xt^2$ i.e. $t = \sqrt{u/x}$, licite car $t \mapsto xt^2$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ strictement croissante de $[\mathrm{N}, +\infty[$ sur $[x\mathrm{N}^2, +\infty[$:

$$\int_{\mathrm{N}}^{+\infty} e^{-xt^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x\mathrm{N}^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u$$

Ainsi

$$\mathrm{S}_2(x) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} e^{-xn^2} = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leq \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} \leq \int_{\mathrm{N}}^{+\infty} e^{-xt^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x\mathrm{N}^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u$$

Enfin, pour tout $u \in [x\mathrm{N}^2, +\infty[$, $\dfrac{1}{\sqrt{u}} \leq \dfrac{1}{\mathrm{N}\sqrt{x}}$ donc

$$\int_{x\mathrm{N}^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u \leq \frac{1}{\mathrm{N}\sqrt{x}} \int_{x\mathrm{N}^2}^{+\infty} e^{-u}\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{\mathrm{N}\sqrt{x}} \left[e^{-u}\right]_{x\mathrm{N}^2}^{+\infty} = \frac{e^{-x\mathrm{N}^2}}{\mathrm{N}\sqrt{x}}$$

Finalement,

$$\mathrm{S}_2(x) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} e^{-xn^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x\mathrm{N}^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u \leq \frac{e^{-x\mathrm{N}^2}}{2\mathrm{N}x}$$

6.c Pour déterminer une valeur de $\mathrm{S}_2(x)$ à ε près, il suffit de prendre $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} e^{-xn^2}$ avec N choisi de telle sorte que $\dfrac{e^{-x\mathrm{N}^2}}{2\mathrm{N}x} < \varepsilon$.

```python
import numpy as np

def S2(x, ε):
    N = 1
    S = 1 + np.exp(-x)
    while np.exp(-x*N**2)/(2*N*x) >= ε:
        N += 1
        S += np.exp(-x*N**2)
    return S
```

```
>>> S2(1,1e-7)
np.float64(1.386318602399438)
```

7 **7.a** La fonction $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $e^{-u}u^{\alpha-1} \underset{u\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{u^{1-\alpha}}$. On en déduit que $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1 - \alpha < 1$ i.e. $\alpha > 0$. Comme cette fonction est positive, ceci signifie que $\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}\ \mathrm{d}u$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Par ailleurs, $e^{-u}u^{\alpha-1} \underset{u\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$. On en déduit que $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ quelle que soit la valeur de α. A fortiori, $\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\ \mathrm{d}u$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
On en déduit que $\Gamma(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
7.b Soit $\alpha > 0$. Les applications $u \mapsto -e^{-u}$ et $u \mapsto u^\alpha$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de sorte que, par intégration par parties,

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^\alpha\ \mathrm{d}u = -\left[e^{-u}u^\alpha\right]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\ \mathrm{d}u$$

Cette intégration par parties est légitime puisque les intégrales $\Gamma(\alpha+1)$ et $\Gamma(\alpha)$ convergent. De plus,

$$\lim_{u\to 0^+} e^{-u}u^\alpha = \lim_{u\to+\infty} e^{-u}u^\alpha = 0$$

donc $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
On calule sans peine $\Gamma(1) = 1$ et on en déduit par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7.c On effectue comme indiqué le changement de variable $u = xt^\alpha$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}(xt^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}x\alpha t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{I}(\alpha)$$

La nature d'une intégrale étant invariante par changement de variable, $\mathrm{I}(\alpha)$ converge.

$\boxed{8}$ **8.a** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$e^{-x(n+1)^\alpha} \leq e^{-xt^\alpha} \leq e^{-xn^\alpha}$$

puis

$$e^{-x(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} e^{-xt^\alpha} \leq e^{-xn^\alpha}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x(n+1)^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1} e^{-xt^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}$$

ou encore

$$\mathrm{S}_\alpha(x) - 1 \leq \mathrm{I}(\alpha) \leq \mathrm{S}_\alpha(x)$$

En vertu de la question précédente,

$$0 \leq \mathrm{S}_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}} \leq 1$$

8.b Pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}} \leq \mathrm{S}_\alpha(x)$$

Or $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^{1/\alpha}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{0^+}\mathrm{S}_\alpha = +\infty$ par minoration.
De plus,

$$\mathrm{S}_\alpha(x) \underset{x\to0^+}{=} \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}} + \mathcal{O}(1)$$

et, a fortiori,

$$\mathrm{S}_\alpha(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}}$$

$\boxed{9}$ **9.a** On effectue à nouveau le changement de variable $u = xt^\alpha$ ($t \mapsto xt^\alpha$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$) pour affirmer que

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}(xt^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}x\alpha t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \alpha x^{1/\alpha}\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit directement l'égalité demandée.

9.b On effectue maintenant une intégration par parties !

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u = -\left[e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]_x^{+\infty} + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1} = 0$ de sorte que

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u = e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u$$

Pour tout $u \geq x$,

$$x \cdot u^{\frac{1}{\alpha}-2}e^{-u} \leq u \cdot u^{\frac{1}{\alpha}-2}e^{-u}$$

ou encore

$$u^{\frac{1}{\alpha}-2}e^{-u} \leq \frac{1}{x}u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}$$

puis

$$0 \leq \int_x^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-2}e^{-u}\,\mathrm{d}u \leq \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Comme $1/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient donc

$$\int_x^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-2}e^{-u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u\right)$$

En reprenant l'égalité plus haut,

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{=} e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} + o\left(\int_x^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u\right)$$

Autrement dit

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

9.c D'après la question **9.a**,

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}}e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{e^{-x}}{\alpha x}$$

On en déduit que

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$$

$\boxed{10}$ **10.a** On effectue encore une comparaison série intégrale. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, $e^{-x(n+1)^\alpha} \leq e^{-xt^\alpha}$ puis, en intégrant,

$$e^{-x(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

et enfin

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x(n+1)^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

10.b L'inégalité précédente donne

$$0 \leq \mathrm{S}_\alpha(x) - 1 - e^{-x} \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

En particulier,

$$\mathrm{S}_\alpha(x) - 1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t\right)$$

Mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$ donc

$$\mathrm{S}_\alpha(x) - 1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{-x})$$

ce qui signifie que

$$\mathrm{S}_\alpha(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$$

Remarque. On peut montrer le même résultat beaucoup plus simplement. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^x(\mathrm{S}(x) - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{x(1-n^\alpha)}$$

On prouve sans difficulté qu'en psoant $g_n : x \mapsto e^{x(1-n^\alpha)}$, la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[1, +\infty[$. Par théorème d'interversion série/limite,

$$\lim_{x\to+\infty} e^x(\mathrm{S}_\alpha(x) - 1) = 1$$

ce qui permet de retrouver l'équivalent demandé.