Devoir à la maison n°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 On pourrait calculer cette somme par passage en complexes, mais, comme l'expression de la somme est donnée, il suffit de la vérifier par récurrence.
On fixe $x \in]0, \pi]$. La relation est vraie pour $n = 0$ en convenant que $\mathrm{C}_0(x) = 0$. Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \mathrm{C}_{n+1}(x) &= \cos((n+1)x) + \frac{1}{2} + \mathrm{C}_n(x)\\ &= \cos((n+1)x) + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos((n+1)x) + \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

On sait de plus que $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) - \sin(b-a)$ donc

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos((n+1)x) = \sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

On en déduit finalement que

$$\frac{1}{2} + \mathrm{C}_{n+1}(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

La relation de l'énoncé est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Via l'équivalent $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$, on obtient $\dfrac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} n + \dfrac{1}{2}$.

> **Remarque.** On peut également utiliser la relation de la question précédente et la continuité de C_n en 0 pour obtenir le même résultat.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}$ est donc prolongeable en une fonction continue sur $[0, \pi]$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale J_n. De plus,

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \mathrm{C}_n(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\left[\sin(kx)\right]_0^\pi\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

3 Tout d'abord, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. De plus,

$$\varphi(x) = \frac{\cos(ax)-1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{-a^2x^2/2}{x/2} = -a^2x$$

Notamment $\varphi(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$. Enfin, pour $x \in]0,\pi]$,

$$\varphi'(x) = \frac{-a\sin(ax)\sin(x/2) - (\cos(ax)-1)\cos(x/2)/2}{\sin^2(x/2)}$$

D'une part

$$-a\sin(ax)\sin(x/2) \underset{x\to0}{\sim} -a^2x^2/2$$

ou encore

$$-a\sin(ax)\sin(x/2) \underset{x\to0}{=} -a^2x^2/2 + o(x^2)$$

et d'autre part,

$$(\cos(ax)-1)\cos(x/2) \underset{x\to0}{\sim} -a^2x^2/2$$

ou encore

$$(\cos(ax)-1)\cos(x/2) \underset{x\to0}{=} -a^2x^2/2 + o(x^2)$$

On en déduit que

$$-a\sin(ax)\sin(x/2) - (\cos(ax)-1)\cos(x/2)/2 \underset{x\to0}{=} o(x^2)$$

Comme $\sin^2(x/2) \underset{x\to0}{=} x^2/4$, on en déduit que $\varphi'(x) \underset{x\to0}{=} o(1)$ i.e. $\varphi'(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, φ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

4 Il s'agit du lemme de Riemann-Lebesgue. Quitte à confondre φ et son prolongement sur $[0,\pi]$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ (et $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$) de sorte qu'on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= -\frac{1}{n+1/2}\left[\varphi(x)\cos((n+1/2)x)\right]_0^\pi + \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos((n+1/2)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\varphi(0)}{n+1/2} + \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos((n+1/2)x)\,\mathrm{d}x \qquad = \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos((n+1/2)x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Par inégalité trangulaire,

$$|\mathrm{I}_n| \leq \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi |\varphi'(x)\cos((n+1/2)x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi |\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

5

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n u_k &= \int_0^\pi \cos(ax)\mathrm{C}_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \cos(ax)\left(\frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(ax)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(x)\sin((n+1/2)x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n
\end{aligned}$$

6 On a montré précédemment que $\mathrm{J}_n = \dfrac{\pi}{2}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$$

Ainsi la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$$

7 On utilise la formule de linéarisation $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ donc

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \cos((n+a)x)\, \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \cos((n-a)x)\, \mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+a}\left[\sin((n+a)x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n-a}\left[\sin((n-a)x)\right]_0^{\pi}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n\pi + a\pi)}{n+a} + \frac{\sin(n\pi - a\pi)}{n-a}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n\sin(a\pi)}{n+a} - \frac{(-1)^n\sin(a\pi)}{n-a}\right)\\
&= \frac{(-1)^n\sin(a\pi)}{2}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n-a}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n-1}a\sin(a\pi)}{n^2-a^2}
\end{aligned}$$

8 On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}a\sin(\pi a)}{n^2-a^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$$

Comme $a \in]0,1[$, $\sin(\pi a) \neq 0$ et on peut diviser la relation précédente par $\sin(\pi a)/2$ pour obtenir :

$$2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}$$

9 La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\frac{1}{1+t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$, il en est de même de $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. Notamment, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$ converge.

10 **10.a** Soient $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme $-t^\alpha \neq 1$, on peut appliquer la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-t^\alpha)^k = \frac{1-(-t^\alpha)^{n+1}}{1-(-t^\alpha)}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1}\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}$$

10.b Pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} \leq t^{(n+1)\alpha}$$

Par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{(n+1)\alpha}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)\alpha+1}$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t = 0$$

10.c D'après la question **10.a**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k\alpha}\, \mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t$$

ou encore

$$\mathrm{G}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t$$

Comme la suite de terme général $(-1)^{n+1}$ est bornée, la question précédente montre que

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}=\mathrm{G}(\alpha)$$

Ainsi la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}=\mathrm{G}(\alpha)$$

$\boxed{11}$ **11.a** On effectue en fait le changement de variable $t=u^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Comme $\alpha>1$, l'application $u\mapsto u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$ de dérivée $u\mapsto\frac{1}{1-\alpha}u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. On peut alors affirmer que

$$\mathrm{H}(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}\int_0^1\frac{u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\alpha-1}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}=\frac{1}{\alpha-1}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+1}=\frac{1}{\alpha-1}\mathrm{G}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

11.b D'après la question **10.c**,

$$\mathrm{H}(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}\mathrm{G}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)=\frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\frac{\alpha}{\alpha-1}+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\alpha+\alpha-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\alpha-1}$$

11.c D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\alpha)=\mathrm{G}(\alpha)+\mathrm{H}(\alpha)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\alpha+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}\\&=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n\alpha-1}-\frac{1}{n\alpha+1}\right)\\&=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}\end{aligned}$$

11.d Posons $a=\frac{1}{\alpha}$. Comme $\alpha>1$, $a\in]0,1[$ et on peut appliquer la question **8** :

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}/\alpha}{n^2-(1/\alpha)^2}=\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}-\alpha$$

ou encore

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\alpha}{n^2\alpha^2-1}=\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}-\alpha$$

et enfin

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}=\frac{\pi}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}-1$$

On en déduit comme annoncé que

$$\mathrm{F}(\alpha)=\frac{\pi}{\alpha\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$

```python
import numpy as np
import scipy.integrate as integr
import matplotlib.pyplot as plt

π=np.pi

def F(α):
    return integr.quad(lambda t:1/(1+t**α),0,np.inf)[0]

def S(α):
    return π/(α*np.sin(π/α))
```

```
>>> [(F(α),S(α)) for α in np.linspace(2.,10.,10)]
[(1.5707963267948966, np.float64(1.5707963267948966)), (1.2281517642692439,
↪  np.float64(1.2281517642691895)), (1.1252882556358892,
↪  np.float64(1.1252882556404917)), (1.0797264426171973, np.float64(1.079726442617534)),
↪  (1.0553534891220455, np.float64(1.0553534891220375)), (1.0407338400732362,
↪  np.float64(1.0407338400732362)), (1.0312554549270578,
↪  np.float64(1.0312554549270576)), (1.0247524604609213,
↪  np.float64(1.0247524604609213)), (1.0200938823165344,
↪  np.float64(1.0200938823165346)), (1.0166407384630542, np.float64(1.016640738463052))]
```