

PROBABILITÉS

Lois usuelles

Bernoulli Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ 1 - p & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad \mathbb{E}(X) = p \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p) \quad G_X(t) = 1 - p + pt$$

Binomiale Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \mathbb{E}(X) = np \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p) \quad G_X(t) = (1 - p + pt)^n$$

Uniforme Si $X \sim \mathcal{U}(E)$, alors

$$X(\Omega) = E \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\text{card } E}$$

L'espérance et la variance n'ont de sens que si $E \subset \mathbb{R}$ et la fonction génératrice que si $E \subset \mathbb{N}$.

Géométrique Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1 - p}{p^2} \quad G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}$$

Poisson Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad \mathbb{E}(X) = \lambda \quad \mathbb{V}(X) = \lambda \quad G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

Espérance, variance, covariance

Espérance Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Variance Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Covariance Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2.

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Formules

Formule des probabilités totales Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, \mathcal{S} un système complet d'événements et B un événement. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{A \in \mathcal{S}} \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$$

Formule de transfert Soient X une variable aléatoire discrète et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Fonctions génératrices

Espérance Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Alors X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$$

Variance Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Alors X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et, dans ce cas,

$$\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

Inégalités

Inégalité de Markov Soient X une variable aléatoire discrète réelle *positive* d'espérance finie et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev Soient X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$