Devoir à la maison n°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Centrale Supélec 2009 Maths I PSI

On rappelle le résultat suivant : toute partie X non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément noté $\min X$.

On dira qu'une série à termes réels est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2).

Les parties I et II sont indépendantes.

I Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

et on se propose de construire une bijection $s : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{s(n)} = x.$$

$\boxed{1}$ On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(s_n)_{n\geq 1}$ et une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ de réels de la manière suivante :

- $p_0 = q_0 = 0,\ S_0 = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

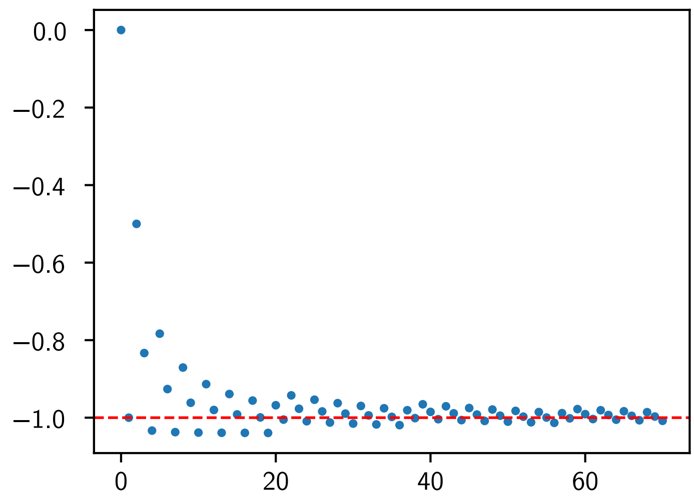
si $S_n > x$	$p_{n+1} = p_n$	$q_{n+1} = 1 + q_n$	$s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$
sinon	$p_{n+1} = 1 + p_n$	$q_{n+1} = q_n$	$s_{n+1} = 2p_{n+1}$

Dans les deux cas : $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$.

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

1.a Écrire une fonction `suite` qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie la liste $[s_1, s_2, \dots, s_n]$.

1.b En modifiant la fonction précédente pour qu'elle retourne le dessin simultané des points $(n, S_n)_{n\leq 70}$ et de la droite horizontale $y = x$, on obtient pour $x = -1$, $n = 70$ la figure suivante (graphique fourni).



Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

2 On pose $s(n) = s_n$. Prouver, pour $n \geq 1$, les propriétés suivantes :

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} \qquad p_n + q_n = n \qquad S_n = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)}$$

En déduire que s est injective.

3 **3.a** Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

3.b On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers $+\infty$.

3.b.i On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée. Utiliser la question **3.a** pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n > n_0$,

$$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

3.b.ii Déduire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3.c Justifier rapidement que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

3.d Déduire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même.

4 **4.a** Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$

4.b En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n > N$ tel que

$$|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$

4.c Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$.

4.d Soit $n \geq n_0$. On note

$$v_n = \max\left\{|S_n - x|, |u_{2p_n+1}|, |u_{2q_n+1-1}|\right\}$$

Démontrer que $(v_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

4.e Démontrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et conclure.

5 **5.a** Démontrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

5.b Donner un développement analogue pour

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

en fonction de γ.

5.c **5.c.i** Justifier, pour tout n tel que $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$, l'égalité :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

5.c.ii En déduire que

$$\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) - \ln 2 + o(1).$$

5.c.iii En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n.

5.c.iv Déterminer la limite de

$$\frac{|u_{s(1)}| + \cdots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + \cdots + |u_n|} \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

II Suites vérifiant (P_1) et (P_2)

$\boxed{6}$ Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1).

$\boxed{7}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

7.a Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite.

7.b Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $\mathrm{U}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Prouver, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, la relation :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n u_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} (a_n - a_{n+1})\mathrm{U}_n + a_\mathrm{N}\mathrm{U}_\mathrm{N}.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_2).

$\boxed{8}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge. Caractériser les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (P_1).

$\boxed{9}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n\varepsilon_n$ diverge. On définit par récurrence $(p_n), (\varepsilon_n), (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$p_0 = 0,\ \varepsilon_0 = 1,\ \mathrm{A}_0 = a_0,$$

et pour $n \geq 1$:

si $\mathrm{A}_{n-1} > p_{n-1}$	$p_n = 1 + p_{n-1}$	$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$
sinon	$p_n = p_{n-1}$	$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$

9.a Dans cette question seulement, on suppose $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{9}{4(n+1)}$ pour $n \geq 1$.
Déterminer les 6 premiers termes des suites $(p_n), (\varepsilon_n), (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Écrire une fonction `exemple` qui prend n et retourne la liste :

$$[(0, p_0, \varepsilon_0, \mathrm{A}_0), (1, p_1, \varepsilon_1, \mathrm{A}_1), \ldots, (n, p_n, \varepsilon_n, \mathrm{A}_n)].$$

9.b **9.b.i** Démontrer que pour tout entier naturel N, il existe un entier $n > \mathrm{N}$ tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).
En déduire qu'on peut définir une suite d'entiers (n_k) strictement croissante par

$$n_0 = 0$$
$$n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \quad \text{pour } k \geq 0$$

9.b.ii Dans le cas général, déterminer p_{n_k}, ε_{n_k}.
Prouver que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum a_n\varepsilon_n$ diverge.

9.b.iii Déterminer n_1, n_2 et n_3 pour l'exemple de la question **9.a**.

9.c Dans cette question seulement, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Écrire une fonction `indexer` qui prend en argument l'entier n et qui retourne la liste

$$[(0, n_0), (1, n_1), \dots, (q, n_q)],$$

où q est le plus grand entier des entiers k tel que $n_k \leq n$. Par exemple, l'appel de `indexer(10000)` retourne $[(0,0),(1,1),(2,2),(3,51)]$.

9.d **9.d.i** Soit $k \geq 3$ un indice tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'inégalité

$$k - 1 \leq \mathrm{A}_{n_k - 1} \leq k - 1 + \frac{1}{2^{k-1} n_k}$$

En déduire $n_{k+1} - 2 > n_k$.

9.d.ii Calculer explicitement la différence $\mathrm{A}_{n_{k+1}-1} - \mathrm{A}_{n_k - 1}$ en fonction de k, n_k, n_{k+1}.
En déduire, pour $k \geq 3$, l'inégalité

$$\frac{1}{2^k}\ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leq \mathrm{A}_{n_{k+1}-1} - \mathrm{A}_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k}\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$$

9.d.iii Déduire des deux questions précédentes, pour $k \geq 3$, l'inégalité

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leq \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$$

9.d.iv En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général $(\ln n_k - 2^k)$ puis prouver l'existence d'une constante $\mathrm{C} > 0$ tel que

$$n_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \mathrm{C}e^{2^k}$$

En déduire que

$$\mathrm{A}_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}$$

puis que

$$\mathrm{A}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n)}{\ln 2}$$

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

10 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels quelconque telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

10.a Prouver que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

10.b En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

11 Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n x_n$.

11.a Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

11.b Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de $\sum \varepsilon_n(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11.c Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

11.d Caractériser les suites vérifiant (P_2).