Interrogation écrite n°10

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$. On justifiera par des calculs.

   On pose $q = 1 - p$ dans la suite. Rappelons que pour tout $x \in]-1,1[$, on obtient par dérivation d'une série entière :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

   Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}p = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

   Remarquons que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

   Par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-1}p = qp\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2qp}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p}$$

   On en déduit que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

∎

2. Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On justifiera par des calculs.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

   Remarquons que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

   Par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2$$

   On en déduit que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

∎

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la même loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

   Remarquons que $\{X = Y\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\{X = n\} \cap \{Y = n\})$. *Par σ-additivité,*

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y = n\})$$

   Mais comme $X \perp\!\!\!\perp Y$,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (q^{n-1}p)^2 = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} = \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p}{2 - p}$$

   On a posé $q = 1 - p$ *pour alléger les calculs.* ∎

4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer l'espérance de $Y = 2^X$.

   D'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{2\lambda} = e^{\lambda}$$

∎

5. Une urne contient initialement une boule blanche. On lance une pièce équilibrée : si on obtient «pile», on pioche une boule dans l'urne ; sinon, on rajoute une boule noire dans l'urne et on procède à un nouveau lancer. Quelle est la probabilité de piocher une boule blanche.

   Notons X *le nombre de lancers effectués et notons* B *l'événement consistant à tirer une boule blanche. Il est clair que* $X \sim \mathcal{G}(1/2)$ *et que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(B \mid X = n) = \frac{1}{n}$. *Comme* $\{X = n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est un système complet d'événements, on obtient avec la formule des probabilités totales :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \mid X = n)\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

∎