Semaine du 30/09

1 Cours

Espaces vectoriels normés

Normes Définition. Rappel sur les normes euclidiennes. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des applications bornées sur un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\ \mathrm{d}t} \qquad \|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f|$$

Distance associée à une norme. Boules et sphères. Définition de la convexité d'une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Convexité des boules. Equivalence de normes. Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Partie bornée, application bornée. Produit d'espaces vectoriels normés : norme produit.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une application est une norme, on peut essayer de l'exprimer à l'aide d'une norme connue.
- Calculer une norme uniforme d'une suite ou d'une fonction par une étude de cette suite ou de cette fonction.
- Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on exhibe une suite u tel que $\dfrac{\mathrm{N}_2(u_n)}{\mathrm{N}_1(u_n)}$ tende vers 0 ou $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite diverge, on peut extraire deux suites convergeant vers des limites différentes.

3 Questions de cours

Normes sur $\mathbb{K}^n$ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \qquad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

Normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$,

$$\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty \qquad \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty \qquad \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$$

Normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes entre elles.

Distance à une partie Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$. On pose $d(x,\mathrm{A}) = \inf_{a \in \mathrm{A}} \|x-a\|$ pour $x \in \mathrm{E}$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ |d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A})| \leq \|x-y\|$$