

# DEVOIR À LA MAISON N°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – D'après E3A Maths A MP 2006

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant 0.

On désigne par  $\mathcal{C}^0(I)$  l'espace vectoriel réel des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et on note :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

On désigne par  $\mathcal{C}^1(I)$  l'espace vectoriel réel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note également  $L^2(I)$  l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  intégrables sur  $I$  et on pose

$$\forall f \in L^1(I), \|f\|_1 = \int_I |f|$$

On note enfin  $L^2(I)$  l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  telles que  $f^2$  est intégrable sur  $I$  et on pose

$$\forall f \in L^2(I), \|f\|_2 = \sqrt{\int_I f^2}$$

### Partie I

- 1** Soient  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  et  $c$  un réel strictement positif. Démontrer que l'équation différentielle  $y' + cy = f$  admet une unique solution, notée  $\varphi(f)$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et vérifiant  $\varphi(f)(0) = 0$ .  
Démontrer que

$$\forall x \in I, \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t) dt$$

- 2** Prouver que l'application  $\varphi$  est linéaire sur  $\mathcal{C}^0(I)$ .

### Partie II

On suppose dans cette partie que l'intervalle  $I$  est un segment  $[a, b]$  avec  $a \leq 0 < b$ .

- 3** Démontrer qu'il existe des réels positifs  $M_1$  et  $M_2$  tels que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_1 \leq M_1 \|f\|_2 \leq M_2 \|f\|_\infty$$

- 4** Démontrer qu'il existe un réel positif  $M_0$  tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty$$

- 5** Démontrer qu'il existe un réel  $A$  positif tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq A\|f\|_1$$

En déduire que :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_1 \leq C\|f\|_1$$

- 6** Démontrer qu'il existe un réel  $B$  positif tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq B\|f\|_2$$

En déduire que :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq K\|f\|_2$$

- 7** L'application  $\varphi$  de  $\mathcal{C}^0([a, b])$  dans lui-même est-elle continue

**7.a** lorsque  $\mathcal{C}^0([a, b])$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  ?

**7.b** lorsque  $\mathcal{C}^0([a, b])$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  ?

**7.c** lorsque  $\mathcal{C}^0([a, b])$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_2$  ?

### Partie III

Dans cette partie,  $I$  désigne l'intervalle  $[0, +\infty[$  et, pour tout réel  $\lambda > 0$ ,  $f_\lambda$  est la fonction définie sur  $I$  par :

$$\forall x \in I, f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$$

- 8** Déterminer  $\varphi(f_\lambda)$ .
- 9** Démontrer que  $f_\lambda$  et  $\varphi(f_\lambda)$  sont intégrables sur  $I$ . Calculer  $\|f_\lambda\|_1$  et  $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$ .
- 10** Démontrer que  $f_\lambda^2$  et  $\varphi(f_\lambda)^2$  sont intégrables sur  $I$ . Calculer  $\|f_\lambda\|_2$  et  $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$ .
- 11** Démontrer que  $\varphi$  est un endomorphisme continu de  $L^1(I)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  et calculer sa norme subordonnée à la norme  $\|\cdot\|_1$ .
- 12** Soit  $f \in L^2(I)$ . On pose  $g = \varphi(f)$ . Démontrer que

$$\forall X > 0, \frac{g(X)^2}{2} + c \int_0^X g(t)^2 dt = \int_0^X f(t)g(t) dt$$

En déduire que  $\varphi$  est un endomorphisme continu de  $L^2(I)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_2$  et calculer sa norme subordonnée à la norme  $\|\cdot\|_2$ .

### Partie IV

$I$  désigne maintenant un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et  $H(I)$  est l'espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  telles que  $f^2$  et  $(f')^2$  soient intégrables sur  $I$ .

- 13** **13.a** Démontrer que si  $f$  et  $g$  sont dans  $H(I)$ , alors les fonctions  $fg$  et  $f'g'$  sont intégrables sur  $I$ .
- 13.b** Démontrer que l'application

$$\phi: \begin{cases} H(I)^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_I fg + \int_I f'g' \end{cases}$$

définit un produit scalaire.

**13.c** En déduire que l'application  $\| \cdot \|_H$  définit par

$$\forall f \in H(I), \|f\|_H = \sqrt{\int_I f^2 + \int_I (f')^2}$$

est une norme sur  $H(I)$ .

**14** On suppose, dans cette question, que  $\varphi$  est un endomorphisme continu de  $L^2(I)$  muni de la norme  $\| \cdot \|_2$ . On pose

$$K = \{f \in H(I), f(0) = 0\}$$

**14.a** Démontrer que, pour tout  $f \in L^2(I)$ ,  $\varphi(f)'$  est dans  $L^2(I)$  et  $\varphi(f)$  est dans  $K$ .  
Démontrer que

$$\exists A > 0, \forall f \in L^2(I), \|\varphi(f)\|_H \leq A\|f\|_2$$

**14.b** Démontrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $L^2(I)$  dans  $K$ .

**14.c** Démontrer que  $\varphi$  est continue de  $(L^2(I), \| \cdot \|_2)$  dans  $(K, \| \cdot \|_H)$ .

**14.d** Démontrer que  $\varphi^{-1}$  est continue de  $(K, \| \cdot \|_H)$  dans  $(L^2(I), \| \cdot \|_2)$ .