

DEVOIR SURVEILLÉ N°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 1.a

$$I(1, a) = \int_0^1 (1-x)^{a-1} dx = -\frac{1}{a} [(1-x)^a]_0^1 = \frac{1}{a}$$

1.b Par intégration par parties

$$I(b+1, a) = \int_0^1 x^b (1-x)^{a-b-1} dx = -\frac{1}{a-b} [x^b (1-x)^{a-b}]_0^1 + \frac{b}{a-b} \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-b} dx = \frac{b}{a-b} I(b, a)$$

1.c Fixons $a \in \mathbb{N}^*$. On a d'abord

$$I(1, a) = \frac{1}{a} = \frac{1}{1 \cdot \binom{a}{1}}$$

Supposons que $I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}}$ pour un certain $b \in \llbracket 1, a-1 \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} I(b+1, a) &= \frac{b}{a-b} I(b, a) \\ &= \frac{1}{(a-b) \binom{a}{b}} \\ &= \frac{1}{(a-b) \times \frac{a!}{b!(a-b)!}} \\ &= \frac{1}{(b+1) \frac{a!}{(b+1)!(a-b-1)!}} \\ &= \frac{1}{(b+1) \binom{a}{b+1}} \end{aligned}$$

Par récurrence, $I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}}$ pour tout $b \in \llbracket 1, a \rrbracket$.

2 2.a D'après la formule du binôme et la linéarité de l'intégrale,

$$I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1} \left(\sum_{k=0}^{a-b} \binom{a-b}{k} (-1)^k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \int_0^1 x^{b-1+k} dx = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$$

2.b Remarquons que

$$\frac{\Delta_a}{b \binom{a}{b}} = I(b, a) \Delta_a = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{\Delta_a}{k+b}$$

Or pour tout $k \in \llbracket 0, a-b \rrbracket$, $k+b \in \llbracket b, a \rrbracket \subset \llbracket 1, a \rrbracket$ donc $k+b$ divise $\Delta_a = \text{ppcm}(1, 2, \dots, a)$. Ainsi $\frac{\Delta_a}{b \binom{a}{b}} \in \mathbb{Z}$ donc

$b \binom{a}{b}$ divise Δ_a .

3 **3.a** D'après la question précédente, $n \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n} . Or Δ_{2n+1} est un multiple commun de $1, 2, \dots, 2n+1$ donc c'est a fortiori un multiple commun de $1, 2, \dots, 2n$ et donc de leur ppcm Δ_{2n} . Ainsi $n \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} .

Par ailleurs, $(2n+1) \binom{2n}{n} = (n+1) \binom{2n+1}{n+1}$ divise également Δ_{2n+1} d'après la question précédente.

3.b D'après la question précédente, $\text{ppcm} \left(n \binom{2n}{n}, (2n+1) \binom{2n}{n} \right) = \binom{2n}{n} \text{ppcm}(n, 2n+1)$ divise Δ_{2n+1} . Or n et $2n+1$ sont premiers entre eux en vertu de la relation de Bézout $1 \cdot (2n+1) - 2 \cdot n = 1$ donc $\forall n, 2n+1 = n(2n+1)$. Ainsi $n(2n+1) \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} .

3.c Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{n!}{(2n-k)!} = \prod_{m=1}^{n-k} \frac{k+m}{n+m} \leq 1$$

Ainsi $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par symétrie des coefficients binomiaux, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

3.d Par la formule du binôme

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1) \binom{2n}{n}$$

3.e Comme $n(n+1) \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} et comme il s'agit de deux entiers naturels non nuls,

$$\Delta_{2n+1} \geq n(n+1) \binom{2n}{n} \geq 4^n n$$

3.f Soit $n \geq 9$. Si n est impair, il existe un entier $k \geq 4$ tel que $n = 2k+1$. Alors

$$\Delta_n = \Delta_{2k+1} \geq 4^k k \geq 4^{k+1} \geq 2^{2k+1} = 2^n$$

Si n est pair, il existe un entier $k \geq 5$ tel que $n = 2k$. Comme Δ_{2k-1} divise Δ_{2k}

$$\Delta_{2k} \geq \Delta_{2k-1} \geq 4^{k-1}(k-1) \geq 4^k = 2^n$$

4 **4.a** D'après un résultat admis dans l'énoncé,

$$v_p(\Delta_n) = \max\{v_p(1), \dots, v_p(n)\}$$

Ainsi

$$p^{v_p(\Delta_n)} = \max\{p^{v_p(1)}, \dots, p^{v_p(n)}\}$$

Or pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p^{v_p(k)}$ divise k donc $p^{v_p(k)} \leq k \leq n$. Finalement, $p^{v_p(\Delta_n)} \leq n$.

4.b Soit $p \in \mathcal{P}$ tel que $p > n$. Alors pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p > n \geq k$ donc $v_p(k) = 0$ puis $v_p(\Delta_n) = \max\{v_p(1), \dots, v_p(n)\} = 0$. Ainsi

$$\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)}$$

4.c D'après les questions précédentes,

$$\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)} \leq \prod_{p \leq n} n = n^{\pi(n)}$$

5 On a vu précédemment que pour $n \geq 9$,

$$2^n \leq \Delta_n \leq n^{\pi(n)}$$

donc, par croissance du logarithme,

$$n \ln 2 \leq \pi(n) \ln(n)$$

et enfin

$$\pi(n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln n}$$

6 **6.a** Remarquons que

$$a! \binom{b}{a} = \prod_{b-a < k \leq b} k$$

Soit p un nombre premier tel que $a < p \leq b$. Comme $b/2 \leq a$, $b - a \leq a$ et donc $b - a < p \leq b$. D'après ce qui précède, p divise $a! \binom{b}{a}$. Mais, puisque $p > a$, p ne divise aucun des entiers $1, 2, \dots, a$ donc, en tant que nombre premier, il est premier avec chacun de ces entiers et donc avec leur produit également. Ainsi p est premier avec $a!$ donc p divise $\binom{b}{a}$ d'après le lemme de Gauss. Comme des nombres premiers sont toujours premiers entre eux deux à deux, le produit $\prod_{a < p \leq b} p$ divise $\binom{b}{a}$.

6.b Comme des coefficients binomiaux sont positifs,

$$2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{2m+1} = 2 \binom{2m+1}{m}$$

$$\text{Ainsi } \binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m} = 4^m.$$

6.c Il est clair que $\frac{2m+1}{2} < m+1 \leq 2m+1$. D'après la question **6.a**, $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$ divise donc $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$.

Ainsi

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m} \leq 4^m$$

6.d Notons P_n la propriété de l'énoncé. P_1 et P_2 sont évidemment vraies.

Supposons P_1, \dots, P_n vraies pour un certain entier $n \geq 2$.

Si $n+1$ n'est pas premier, alors

$$\prod_{p \leq n+1} p = \prod_{p \leq n} p \leq 4^n \leq 4^{n+1}$$

Si $n+1 \geq 3$ est premier, il est impair et il existe un entier $m \geq 2$ tel que $n+1 = 2m$. Alors

$$\prod_{p \leq n+1} p = \left(\prod_{p \leq m+1} p \right) \left(\prod_{m+1 < p \leq 2m} p \right) \leq \left(\prod_{p \leq m+1} p \right) \left(\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \right)$$

Puisque $m \geq 2$, $m+1 \leq 2m-1 = n$ donc on peut appliquer P_m . Ainsi, avec la question précédente

$$\prod_{p \leq n+1} p \leq 4^m \cdot 4^m = 4^{2m} = 4^{n+1}$$

Ceci conclut la récurrence.

7 **7.a** Remarquons que

$$e^m = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^m}{k!} \geq \frac{m^m}{m!}$$

Par conséquent, $m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$.

7.b Notons $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Comme cette suite une suite strictement croissante d'entiers naturels, $p_k \geq p_1 + k - 1 = k + 1 \geq k$. Ainsi

$$\pi(n)! = \prod_{k=1}^{\pi(n)} k \leq \prod_{k=1}^{\pi(n)} p_k$$

Mais, par définition de $\pi(n)$, $p_1, \dots, p_{\pi(n)}$ sont exactement les nombres premiers inférieurs ou égaux à n . Ainsi

$$\pi(n)! \leq \prod_{p \leq n} p \leq 4^n$$

D'après la question précédente,

$$\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)} \leq \pi(n)! \leq 4^n$$

donc, par croissance du logarithme,

$$\pi(n) \ln \pi(n) - \pi(n) \leq n \ln 4$$

8 **8.a** La fonction $f : x \mapsto x \ln x - x$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $f' = \ln$. Notamment, f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On sait que

$$0 < \ln(n_0) \leq \ln(1 + n_0) \leq n_0 \leq n_0 e$$

donc $\frac{n_0 e}{\ln n_0} \in [1, +\infty[$. La stricte croissance de f et la question précédente donnent :

$$f\left(\frac{n_0 e}{\ln n_0}\right) < f(\pi(n_0)) \leq n_0 \ln 4$$

ou encore

$$\frac{n_0 e}{\ln n_0} (\ln n_0 - \ln \ln n_0) \leq n_0 \ln 4$$

puis

$$\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0}$$

8.b On montre aisément que $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est croissante sur $]0, e]$ puis décroissante sur $[e, +\infty[$. Ainsi g est majorée par $g(e) = 1/e$. D'après la question précédente,

$$\frac{e - \ln 4}{e} < g(\ln n_0) \leq \frac{1}{e}$$

puis $e < 1 + \ln 4$, ce qui contredit les approximations fournies par l'énoncé. On a donc montré par l'absurde que

$$\forall n \geq 2, \pi(n) \leq \frac{ne}{\ln n}$$

9 Remarquons que U_k est l'ensemble des entiers de la forme mp^k où m est un entier compris entre 1 et $\frac{n}{p^k}$. On en déduit que $\#U_k = \lfloor n/p^k \rfloor$.

De plus, $\Omega_k = U_k \setminus U_{k+1}$. Or $U_{k+1} \subset U_k$ donc

$$\#\Omega_k = \#U_k - \#U_{k+1} = \lfloor n/p^k \rfloor - \lfloor n/p^{k+1} \rfloor$$

10 Tout d'abord,

$$\llbracket 1, n \rrbracket = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \#\Omega_k$$

donc, par sommation par paquets,

$$v_p(n!) = \sum_{a \in \llbracket 1, n \rrbracket} v_p(a) = \sum_{k \geq 0} \sum_{a \in \Omega_k} v_p(a) = \sum_{k \geq 0} \sum_{a \in \Omega_k} k = \sum_{k \geq 0} k \#\Omega_k$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k \geq 0} k (\lfloor n/p^k \rfloor - \lfloor n/p^{k+1} \rfloor) \\ &= \sum_{k \geq 0} k \lfloor n/p^k \rfloor - (k+1) \lfloor n/p^{k+1} \rfloor + \sum_{k \geq 0} \lfloor n/p^{k+1} \rfloor \end{aligned}$$

Ces opérations sont licites car les sommes en question ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. En effet, $\lfloor n/p^k \rfloor$ est nul pour k suffisamment grand. On a donc a fortiori par télescopage

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 0} \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

11 On rappelle que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc, comme tous les termes de la somme sont positifs,

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \geq \frac{n}{p} - 1$$

et

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \sum_{k \geq 1} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^{k-2}} = \frac{n}{p} + \frac{n/p^2}{1 - 1/p} = \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

Avec la formule de Legendre,

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

12 D'après le lemme d'Euclide, tout diviseur premier de $n!$ est un diviseur premier de l'un des entiers $1, 2, \dots, n$. Ainsi tous les facteurs premiers de $n!$ sont inférieurs ou égaux à n . Ainsi $n! = \prod_{p \leq n} p^{v_p(n!)}$. Par conséquent,

$$\ln(n!) = \sum_{p \leq n} v_p(n!) \ln p$$

et, avec l'encadrement de la question précédente, on obtient bien

$$n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leq n} \ln p < \ln n! \leq n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

13 **13.a** On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc, par dérivation terme à terme d'une série entière, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ puis $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. En choisissant $x = 1/2 \in]-1, 1[$,

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2$$

13.b Tout d'abord

$$\sum_{2^{r-1} < m \leq 2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \sum_{2^{r-1} < m \leq 2^r} \frac{\ln(2^r)}{m(m-1)} = r \ln 2 \sum_{2^{r-1} < m \leq 2^r} \frac{1}{m(m-1)}$$

Mais, par télescopage,

$$\sum_{2^{r-1} < m \leq 2^r} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{2^{r-1}} - \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^r}$$

Ainsi,

$$\sum_{2^{r-1} < m \leq 2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \frac{r \ln 2}{2^r}$$

13.c Par théorème de sommation par paquets pour une série à termes positifs,

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} = \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{2^{r-1} < m \leq 2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r \ln 2}{2^r} = 2 \ln 2 = \ln 4$$

La majoration prouve la convergence de la série à termes positifs $\sum \frac{\ln m}{m(m-1)}$.

13.d On procède à une comparaison série/intégrale. Par croissance de \ln ,

$$\ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt \leq \ln(k+1)$$

puis, par relation de Chasles

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq \int_1^n \ln t \, dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \sum_{k=2}^n \ln k$$

ou encore

$$\ln(n!) - \ln n \leq n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!)$$

et enfin

$$0 \leq \ln(n!) - (n \ln n - n + 1) \leq \ln n$$

Il existe donc $\theta_n \in [0, 1]$ tel que $\ln(n!) - (n \ln n - n + 1) = \theta_n \ln n$.

14 Posons $S_n = \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p}$. Avec les questions précédentes,

$$\begin{aligned} S_n &\geq \frac{1}{n} \ln n! - \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)} \\ &\geq \ln n - 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n} \ln n - \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \\ &> \ln n - 1 - \ln 4 \end{aligned}$$

15 De même,

$$S_n \leq \frac{1}{n} \ln n! + \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \ln p = \ln n - 1 + \frac{1}{n} + \frac{\Theta_n \ln n}{n} + \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{p \leq n} p \right) \geq \ln n + \frac{\ln n + 1 - n}{n} + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{p \leq n} p \right)$$

Or, par concavité de \ln , $\ln(n) \leq n - 1$ et, avec la question **6.d**, $\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$ donc

$$S_n \leq \ln n + \ln 4$$

La suite $(S_n - \ln n)$ est donc bornée i.e. $S_n = \ln n + \mathcal{O}(1)$.

16 **16.a** Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t}$,

$$0 \leq \frac{1}{n \ln^2 n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t \ln^2 t} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

La série télescopique $\sum \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$ converge car la suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ converge. On en déduit que $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ converge.

16.b

$$\begin{aligned} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) &= \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n \ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n \ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n^2 \ln n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) - \frac{1}{n \ln n}$ converge i.e. la suite de ses sommes partielles converge. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} - \sum_{k=2}^{n-1} \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) = C + o(1)$$

puis, par télescopage,

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} = \ln(\ln(n)) + \ell + o(1)$$

en posant $\ell = C + \ln \ln 2$.

17 **17.a** On convient que $\psi(1) = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi(k)}{\ln(k)} - \frac{\psi(k)}{\ln(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi(k)}{\ln(k)} - \frac{\psi(k+1)}{\ln(k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi(k+1) - \psi(k)}{\ln(k+1)} \\ &= -\frac{\psi(n)}{\ln(n)} + \sum_{k=2}^n \frac{\psi(k) - \psi(k-1)}{\ln k} \end{aligned}$$

Or $\psi(k) - \psi(k-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \mathcal{P} \\ \frac{\ln k}{k} & \text{si } k \in \mathcal{P} \end{cases}$ de sorte que

$$\sum_{k=2}^n \frac{\psi(k) - \psi(k-1)}{\ln k} = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p}$$

Ceci permet de conclure.

17.b D'après le théorème de Mertens,

$$\psi(k) = \ln(k) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln k}\right) \right)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} &= \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k) \ln(k+1)} \\ &= \frac{1}{\ln k} \cdot \frac{u_k}{1+u_k} \end{aligned}$$

avec

$$u_k = \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k} = \frac{1}{k \ln k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2 \ln k}\right) = \frac{1}{k \ln k} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \right)$$

A fortiori

$$u_k = \frac{1}{k \ln k} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln k}\right) \right)$$

puis

$$\frac{1}{1+u_k} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln k}\right)$$

Tout compte fait,

$$\psi(k) \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} = \frac{1}{k \ln k} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln k}\right) \right) = \frac{1}{k \ln k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right)$$

18 Comme $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ converge, il existe une constante C telle que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} + C + o(1)$$

Or on a vu que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + \ell + o(1)$$

donc il existe une constante λ telle que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} = \ln \ln n + \lambda + o(1)$$

Enfin,

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) + \frac{\psi(n)}{\ln n} = \ln \ln n + \lambda + \frac{\psi(n)}{n} + o(1)$$

Or $\psi(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$ donc $\frac{\psi(n)}{n} = o(1)$ et finalement

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \ln \ln n + \lambda + o(1)$$

19 On procède comme précédemment

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k} - \frac{\pi(k)}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k} - \frac{\pi(k+1)}{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k+1) - \pi(k)}{k+1} \\ &= \pi(1) - \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k} \end{aligned}$$

Comme $\pi(1) = 0$ et $\pi(k) - \pi(k-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} = -\frac{\pi(n)}{n} + \sum_{p \leq n} \frac{1}{p}$$

On en déduit l'égalité voulue.

Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que $\pi(n) \sim c \frac{n}{\ln n}$. Alors

$$\frac{\pi(k)}{k(k+1)} \sim c \frac{1}{k \ln k}$$

donc par sommation d'équivalents pour des séries divergentes à termes positifs, on obtient avec la question **16.b**

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} \sim \ln \ln n$$

Comme $\frac{\pi(n)}{n} \sim \frac{c}{\ln n}$,

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n} \sim c \ln \ln n$$

Mais on a vu à la question précédente que

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \sim \ln \ln n$$

On en déduit que $c = 1$.

20 D'après la question **18**,

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \ln \ln n + \lambda + o(1)$$

Par conséquent,

$$\sum_{p \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p} = \ln \ln \sqrt{n} + \lambda + o(1) = \ln \ln n - \ln 2 + \lambda + o(1)$$

Ainsi

$$\sum_{\sqrt{n} < p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} - \sum_{p \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p} = \ln 2 + o(1)$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\sqrt{n} < p \leq n} \frac{1}{p} = \ln 2$$

21 **21.a** Supposons que $p = P^+(n)$ et $n \in A(x)$. Alors $p \geq \sqrt{n}$. Ainsi $p^2 > n = mp$ donc $p > m$. De plus, $mp = n \leq x$ donc $p \leq \frac{x}{m}$.

Réciproquement, supposons que $m < p \leq x/m$. Alors $n = mp \leq x$ i.e. $n \in [0, x]$. De plus, $n = mp < p^2$ donc $p > \sqrt{n}$ et $n \in A(x)$.

21.b Si $p = p'$ et $m = m'$, on a évidemment $mp = m'p'$.

Supposons que $mp = m'p'$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $m \neq m'$. Sans perte de généralité, on peut supposer $m < m'$. Comme p et p' sont alors deux nombres premiers distincts, ils sont alors premiers entre eux. D'après le lemme de Gauss, p divise m' . Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m' = kp$. Alors

$$m'^2 < m'p' = mp = \frac{mm'}{k}$$

ou encore $m' \leq m'k < m$, ce qui est contradictoire. Par conséquent $m = m'$ puis $p = p'$.

21.c Conséquence directe des deux questions précédentes.

21.d Pour $p \in \mathcal{P}$, notons

$$B_m = \{m \in \mathbb{N}^*, m < p \leq x/m\}$$

La question précédente montre que $a(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \#B_m$. De plus,

$$B_m = \{m \in \mathbb{N}^*, m < p \text{ ET } m \leq x/p\} = \{m \in \mathbb{N}^*, m \leq p-1 \text{ ET } m \leq \lfloor x/p \rfloor\} = \{m \in \mathbb{N}^*, m \leq \min\{p-1, \lfloor x/p \rfloor\}\}$$

En particulier, $B_m = \emptyset$ lorsque $p > x$ et que $\#B_m = \min\{p-1, \lfloor x/p \rfloor\}$ sinon. On en déduit le résultat voulu.

22 **22.a** Puisque $p - 1$ est un entier

$$p - 1 \leq \lfloor x/p \rfloor \iff p - 1 \leq \frac{x}{p} \iff p^2 - p - x \leq 0$$

Or les racines du trinôme $X^2 - X - x$ sont $\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4x}}{2}$ et seule la racine $\varphi(x)$ est positive. Comme p positif, la dernière inégalité équivaut à $p \leq \varphi(x)$.

22.b Tout d'abord,

$$\varphi(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2} > \frac{\sqrt{4x}}{2} = \sqrt{x}$$

De plus,

$$\varphi(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{x} + 4x}}{2} = \frac{1 + \sqrt{(1 + 2\sqrt{x})^2}}{2} = \sqrt{x} + 1$$

22.c

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{p \leq x} \min \left\{ p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right\} \\ &= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \min \left\{ p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right\} + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \min \left\{ p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right\} \end{aligned}$$

Si $p < \sqrt{x}$, alors $p < \varphi(x)$ puis $p - 1 \leq \lfloor x/p \rfloor$ i.e. $\min\{p - 1, \lfloor x/p \rfloor\} = p - 1$ avec les deux questions précédentes. Soit alors $p \in]\sqrt{x}, x]$. Si $p > \varphi(x)$, alors $p - 1 > \lfloor x/p \rfloor$ et donc $\min\{p - 1, \lfloor x/p \rfloor\} = \lfloor x/p \rfloor$. Sinon, comme $\varphi(x)$ est la racine positive du trinôme $X^2 - X - x$, $p^2 - p - x \leq 0$ i.e. $p - 1 \leq x/p$. Or $p > \sqrt{x}$ i.e. $x/p < p$. Finalement $p - 1 \leq x/p < p$ i.e. $\lfloor x/p \rfloor = p - 1$ et $\min\{p - 1, \lfloor x/p \rfloor\} = \lfloor x/p \rfloor$ à nouveau. Finalement

$$a(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \lfloor x/p \rfloor$$

22.d Tout d'abord,

$$0 \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \sqrt{x} = \sqrt{x} \pi(\sqrt{x})$$

Avec la question **8.b**, pour u suffisamment grand,

$$0 \leq \pi(u) \leq \pi(\lfloor u \rfloor + 1) \leq \frac{e(\lfloor u \rfloor + 1)}{\ln(\lfloor u \rfloor + 1)}$$

Comme $u \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \lfloor u \rfloor$, on prouve aisément que $\frac{\lfloor u \rfloor + 1}{\ln(\lfloor u \rfloor + 1)} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u}{\ln u}$. On en déduit que $\pi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{u}{\ln u}\right)$ puis que $\sqrt{x} \pi(\sqrt{x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{x}{\ln x}\right)$. Ainsi

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

A fortiori,

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$$

22.e Tout d'abord, par encadrement de la partie entière,

$$(x - 1) \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p} \leq \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \leq x \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p}$$

Ainsi

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p}$$

Comme p est entier,

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{\sqrt{x} < p \leq \lfloor x \rfloor} \frac{1}{p} = \sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor} < p \leq \lfloor x \rfloor} \frac{1}{p} - \sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor} < p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p}$$

Comme $\lfloor x \rfloor$ est entier, la question **20** montre que

$$\sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor} < p \leq \lfloor x \rfloor} \frac{1}{p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 2$$

Par ailleurs, on montre classiquement que pour $0 \leq a \leq b$, $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a}$ donc

$$\sqrt{x} - \sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} < 1$$

La somme $\sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor} < p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p}$ contient donc au plus un terme. Ainsi

$$0 \leq \sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor} < p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p} \leq \frac{1}{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}$$

On en déduit que

$$\sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor} < p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Par conséquent,

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 2$$

puis

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln 2$$

ou encore

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = x \ln 2 + o(x)$$

22.f D'après les questions précédentes,

$$a(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \lfloor x/p \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \ln 2 + o(x)$$