

INTÉGRALES IMPROPRES

On a défini en première année l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Il s'agit maintenant de donner un sens si possible à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle autre qu'un segment. On parle alors d'intégrales impropres ou généralisées.

Exemple 0.1

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale impropre puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ mais $[1, +\infty[$ n'est pas un segment.

Exemple 0.2

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$ est une intégrale impropre car \tan est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ mais $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ n'est pas un segment.

Dans la suite \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Convergence d'intégrales

1.1 Continuité par morceaux

On a vu en première année la définition d'une fonction continue par morceaux sur un **segment**. On peut étendre cette notion à un intervalle quelconque.

Définition 1.1 Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que f est continue par morceaux si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

Exemple 1.1

- $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
- $x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur \mathbb{R} .

1.2 Intégrales impropres

Définition 1.2 Intégrale convergente sur un intervalle semi-ouvert

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ **converge** si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite en b^- . Cette limite est alors notée $\int_a^b f(t) dt$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ **converge** si $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ admet une limite en a^+ . Cette limite est alors notée $\int_a^b f(t) dt$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.

REMARQUE.

- Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ alors pour tout $c \in [a, b[$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature.
- Si f est continue par morceaux sur $]a, b]$ alors pour tout $c \in]a, b]$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^c f(t) dt$ sont de même nature.

Analogie avec les séries

Par analogie avec les séries, on peut définir le concept d'«intégrale partielle» et de «reste».

- Dans le cas d'une intégrale sur $[a, b[$, l'«intégrale partielle» sera $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour $x \in [a, b[$. On peut alors dire que l'intégrale converge si l'«intégrale partielle» admet une limite finie en b^- . Dans ce cas, le «reste» sera $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ et il est de limite nulle en b^- .
- Dans le cas d'une intégrale sur $]a, b]$, l'«intégrale partielle» sera $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ pour $x \in]a, b]$. On peut alors dire que l'intégrale converge si l'«intégrale partielle» admet une limite finie en a^+ . Dans ce cas, le «reste» sera $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ et il est de limite nulle en a^+ .



ATTENTION! Contrairement aux séries, une intégrale du type $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ peut converger sans que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f = 0$. Pire, f peut même ne pas être bornée.

Exemple 1.2

- Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple 1.3

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge si et seulement si $a > 0$.

Définition 1.3 Intégrale sur un intervalle ouvert

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a \leq b$ et f continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} . Les convergences des intégrales de f sur $[c, b[$ et sur $]a, c]$ ne dépendent pas de $c \in]a, b[$. Dans le cas où ces deux intégrales convergent, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge et on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Cette quantité ne dépend pas de $c \in]a, b[$.

Exemple 1.4

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge.

REMARQUE. Si $I =]a, b[$ est un intervalle **borné** et si f est continue par morceaux sur I et admet des limites finies en a^+ et b^- , alors l'intégrale de f sur I converge.

En particulier, si une fonction f continue sur $I =]a, b[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors l'intégrale de f sur I converge.

Une telle intégrale est appelée **faussement impropre**.

1.3 Propriétés**Proposition 1.1**

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . On pose $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

Linéarité Si les intégrales de f et g sur I convergent, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'intégrale de $\lambda f + \mu g$ sur I converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions dont l'intégrale sur I converge est un \mathbb{K} -espace vectoriel et l'application qui à une telle fonction associe son intégrale sur I est une forme linéaire.

Positivité Si f est positive sur I et si l'intégrale de f sur I converge, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Stricte positivité On suppose $a < b$. Si f est positive et continue sur I et si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors f est nulle sur I .

Relation de Chasles Si l'intégrale de f sur I converge, alors pour tout $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$



ATTENTION ! Prendre garde à l'ordre des bornes pour la positivité.

Proposition 1.2 Fonctions à valeurs complexes

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{C} . On pose $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$ convergent et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

Exercice 1.1

Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(t) dt$

Proposition 1.3 Dérivation

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} . Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ **converge**, alors $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est dérivable sur $[a, b[$, de dérivée $-f$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} . Si l'intégrale de f sur $]a, b]$ **converge**, alors $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $]a, b]$ de dérivée f .

2 Intégrabilité

2.1 Définition

Définition 2.1 Intégrabilité

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I . On dit que f est **intégrable** sur I ou que l'intégrale de f sur I **converge absolument** si l'intégrale de $|f|$ sur I converge.

REMARQUE. On remarquera l'analogie avec l'absolue convergence pour les séries.

REMARQUE. Pour une fonction **de signe constant**, l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale.

REMARQUE. Si $I =]a, b[$ est un intervalle **borné** et si f est continue par morceaux sur I et admet des limites finies en a^+ et b^- , f est intégrable sur I .

Proposition 2.1 Intégrales de Riemann

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- $x \mapsto \frac{1}{|x-b|^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 2.2 Exponentielles

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ si et seulement si $a > 0$.

Notation 2.1 Espace $L^1(I, \mathbb{K})$

On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} .

2.2 Intégrabilité par comparaison**Proposition 2.3**

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$ à **valeurs positives**. L'intégrale de f sur $[a, b[$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]a, b]$ à **valeurs positives**. L'intégrale de f sur $]a, b]$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est majorée sur $]a, b]$.

REMARQUE. Dans le cas où f est **positive** et $\int_a^b f(t) dt$ diverge, on pourra noter $\int_a^b f(t) dt = +\infty$.

Proposition 2.4 Majoration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I telles que $0 \leq f \leq g$ sur I . Si l'intégrale de g sur I converge, alors l'intégrale de f sur I converge également.

Proposition 2.5 Majoration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . Si $|f| \leq |g|$ sur I et si g est intégrable sur I , alors f est intégrable sur I .

Exemple 2.1

$f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^2 + 1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. En effet,

- f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$;
- pour tout $t \in [1, +\infty[$, $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Proposition 2.6 Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . Si f est intégrable sur I , alors l'intégrale de f sur I converge. De plus,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

où $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

REMARQUE. Ce résultat est à mettre en parallèle avec le fait que la convergence absolue implique la convergence pour les séries.



ATTENTION ! L'intégrale d'une fonction peut très bien converger sans que la fonction soit intégrable. On parle alors d'intégrale **semi-convergente**.

Exemple 2.2

L'intégrale de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur $]0, +\infty[$ converge mais cette fonction n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Autrement dit, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge mais pas absolument.

Proposition 2.7 Structure d'espace vectoriel

L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Exercice 2.1

On note $L^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur \mathbb{K} telles que f^2 est intégrable sur I . Montrer que $L^2(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 2.8 Domination

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. Si $f = \mathcal{O}(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$. Si $f = \mathcal{O}(g)$ et si g est intégrable sur $]a, b]$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.

Exemple 2.3

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Si f est continue par morceaux et bornée sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Proposition 2.9 Négligeabilité

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. Si $f = o(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$. Si $f = o(g)$ et si g est intégrable sur $]a, b]$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.

Exemple 2.4

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1} dt$.

Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Remarquons ensuite que $\frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $t \mapsto \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et même sur $[0, +\infty[$. A fortiori, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1} dt$ converge.

Exemple 2.5

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$.

Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

Remarquons ensuite que $\frac{1}{\sqrt{t}} = o\left(\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\right)$. Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ convergerait, alors la $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ serait intégrable sur $[1, +\infty[$, puisqu'elle y est positive. Par conséquent, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ serait également intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui n'est pas puisque $\frac{1}{2} \leq 1$. On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ diverge.

Proposition 2.10 Equivalence

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. Si $f \sim g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$. Si $f \sim g$, alors f est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si g l'est.

Exemple 2.6

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si f admet une limite non nulle en $+\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Exemple 2.7

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^2 + t} dt$.

Tout d'abord, $t \mapsto \frac{e^{1/t}}{t^2 + t}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

Remarquons ensuite que $\frac{e^{1/t}}{t^2 + t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{e^{1/t}}{t^2 + t}$ l'est également. Notamment, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^2 + t} dt$ converge.

Exemple 2.8

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 + t^3} dt$.

Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2 + t^3}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Remarquons que $\frac{\sin t}{t^2 + t^3} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2 + t^3}$ ne l'est pas non plus. Comme cette fonction est positive sur $]0, 1]$, $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 + t^3} dt$ diverge.

REMARQUE. Les résultats précédents peuvent se reformuler en termes de convergence d'intégrale. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. On suppose que g est de **signe constant** au voisinage de b^- .

- Si $f \underset{b^-}{=} \mathcal{O}(g)$, la convergence de $\int_a^b g(t) dt$ implique la convergence de $\int_a^b f(t) dt$.
- Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$, la convergence de $\int_a^b g(t) dt$ implique la convergence de $\int_a^b f(t) dt$.
- Si $f \underset{b^-}{\sim} o(g)$, la convergence de $\int_a^b g(t) dt$ équivaut à la convergence de $\int_a^b f(t) dt$.

On a bien entendu des résultats similaires lorsque l'on remplace l'intervalle $[a, b[$ par l'intervalle $]a, b]$.

On donne enfin des exemples classiques de fonctions définies par des intégrales.

Exemple 2.9 Fonction Γ d'Euler

La fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie sur \mathbb{R}_+^* .

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- De plus, $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
- Enfin, $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o(1/t^2)$ et la fonction positive $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $x > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

Exemple 2.10 Fonction B d'Euler

La fonction $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$.
- De plus, $t^{x-1} (1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
- Enfin, $t^{x-1} (1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$ et la fonction positive $t \mapsto (1-t)^{y-1}$ est intégrable au voisinage de 1^- si et seulement si $y > 0$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

3 Calcul d'intégrales

3.1 Changement de variables

Proposition 3.1 Changement de variables

Soient $(a, b, \alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^4$ tel que $a \leq b$ et $\alpha \leq \beta$, f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} et φ une bijection strictement croissante de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors les intégrales

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

sont de même nature et, en cas de convergence, sont égales.

REMARQUE. Si φ est décroissante, on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_b^a f(t) dt$$

Méthode Changement de variable

On dit qu'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$. Comment alors se souvenir de la formule ?

- On remplace t par $\varphi(u)$ dans la fonction à intégrer.
- $\frac{dt}{du} = \varphi'(u)$ donc $dt = \varphi'(u) du$ et on remplace dans l'intégrale.
- t doit varier entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ lorsque u varie entre a et b , ce qui nous donne les bornes de l'intégrale en u .

Exemple 3.1

Montrons que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ converge et déterminons sa valeur. On va effectuer le changement de variable $u = \sqrt{1+t^2}$ i.e. $t = \sqrt{u^2-1}$. L'application $u \mapsto \sqrt{u^2-1}$ est une bijection croissante de classe \mathcal{C}^1 de $[\sqrt{2}, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. On en déduit que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ et $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{du}{u^2-1}$ sont de même nature puisque $dt = \frac{u du}{\sqrt{u^2-1}}$. Une décomposition en éléments simples montre alors que

$$\forall u \in [\sqrt{2}, +\infty[, \frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right)$$

On en déduit que

$$I = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) = \ln(\sqrt{2}+1)$$

Exemple 3.2 Symétrie de la fonction B

On rappelle que $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. A l'aide du changement de variable affine $t \mapsto 1-t$, on montre que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = B(y, x)$$

Exercice 3.1 Expressions alternatives de la fonction B

On rappelle que $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. A l'aide du changement de variable $t = \sin^2 \theta$, montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta$$

2. A l'aide du changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$, montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

3.2 Intégration par parties

Proposition 3.2 Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $]a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} . Si fg admet des limites finies en a^+ et b^- , alors les intégrales de $f'g$ et fg' sur $]a, b[$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$$

où $[fg]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} f(t)g(t)$.

REMARQUE. Le résultat reste valable si $b \leq a$.

Exemple 3.3

Montrons la convergence et calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$. Posons $f(t) = t$ et $g(t) = -e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ de sorte que $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \int_0^{+\infty} f(t)g'(t) dt$. Puisque fg admet des limites finies en 0 et $+\infty$, les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}$ et $\int_0^{+\infty} f'(t)g(t) dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ sont de même nature.

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, il en est donc de même pour $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$, ce que l'on aurait pu prouver directement. De plus,

$$\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \lim_{+\infty} fg - \lim_0 fg + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Exemple 3.4 Relation fonctionnelle de la fonction Γ

On rappelle que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ est définie sur \mathbb{R}_+^* . Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto t^x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* de dérivée $t \mapsto xt^{x-1}$. La fonction $t \mapsto -e^{-t}$ est également de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* de dérivée $t \mapsto e^{-t}$. Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1} e^{-t} dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. De plus, comme $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x e^{-t} = 0$$

et, par croissances comparées,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-t} = 0$$

On en déduit que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

Exercice 3.2

Calculer $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.5 Relation fonctionnelle de la fonction B

On rappelle que $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrons que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto (1-t)^y$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ de dérivées respectives $t \mapsto xt^{x-1}$ et $t \mapsto -y(1-t)^{y-1}$. Par intégrations par parties,

$$\int_0^1 yt^x(1-t)^{y-1} dt = -[t^x(1-t)^y]_0^1 + \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. Puisque $x > 0$ et $y > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x(1-t)^y = \lim_{t \rightarrow 1^-} t^x(1-t)^y = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} yB(x+1, y) &= \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t) dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt - x \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt \quad \text{car ces deux intégrales convergent} \\ &= xB(x, y) - xB(x+1, y) \end{aligned}$$

ou encore

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

Exercice 3.3

Calculer $B(n+1, p+1) = \int_0^1 t^n(1-t)^p dt$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 3.4 Intégrale de Dirichlet

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. Cette intégrale converge-t-elle absolument ?

4 Intégration des relations de comparaison

REMARQUE. Soit f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.

- Si f est positive et $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = +\infty$.
- Si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^b f(t) dt = 0$.

Proposition 4.1

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$. On suppose de plus que g est **de signe constant** au voisinage de b^- .

Domination On suppose que $f = \mathcal{O}(g)$.

- Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_x^b g(t) dt\right)$.
- Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_a^x g(t) dt\right)$.

Négligeabilité On suppose que $f = o(g)$.

- Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$.
- Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$.

Equivalence On suppose que $f \sim g$.

- Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_x^b g(t) dt$.
- Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_a^x g(t) dt$.

REMARQUE. On a des résultats analogues pour des fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$ quitte à utiliser des relations de comparaison en a^+ et non b^- .

REMARQUE. Ces résultats sont l'exact pendant des résultats sur les sommations de relations de comparaison dans le cadre des séries. Il vaut voir $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ comme un «reste» et $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ comme une «somme partielle».

Exemple 4.1

- On sait que $\frac{1}{t + \sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, que $t \mapsto \frac{1}{t}$ est positive au voisinage de $+\infty$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + \sqrt{t}}$ diverge et $\int_1^x \frac{dt}{t + \sqrt{t}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$.
- On sait que $\frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est positive au voisinage de 0^+ et que $\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge donc $\int_0^\pi \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{t}}$ converge et $\int_0^x \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{t}} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}}\right)$ ou encore $\int_0^x \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{t}} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(\sqrt{x})$.



ATTENTION ! Il est essentiel que la fonction de référence soit de signe constant au voisinage du point considéré.