Semaine du 25/11

1 Cours

Réduction algébrique

Polynômes d'endomorphismes Définition. Algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathbb{K}[A]$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Lemme des noyaux.

Polynômes annulateurs Définition. Idéal annulateur d'une matrice/d'un endomorphisme. Polynôme minimal d'une matrice/d'un endomorphisme. Le polynôme minimal est un invariant de similitude. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Dimension et base de la sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée. Théorème de Cayley-Hamilton. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

Application à la réduction Les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée sont **des** racines d'un polynôme annulateur. Le spectre est l'ensemble des racines du polynôme minimal. Une matrice/un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Si un endomorphisme est diagonalisable, tout endomorphisme qu'il induit l'est également. Une matrice/un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé.

Sous-espaces caractéristiques Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme ou d'une matrice à polynôme caractéristique scindé. Les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E à polynôme caractéristique scindé sont supplémentaires dans E. Dimension d'un sous-espace caractéristique. Toute matrice à polynôme caractéristique scindé est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont triangulaires et à coefficients diagonaux tous égaux.

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer des valeurs propres à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Caractériser la diagonalisabilité/trigonalisabilité à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Automatisme : $P(u) = 0 \iff \pi_u \mid P$.
- Calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Calculer les puissances d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur (division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur P puis considérer les racines de P).
- Déterminer le polynôme minimal d'une matrice : il divise le polynôme caractéristique et il admet pour racines les valeurs propres, ce qui ne laisse qu'un nombre fini de possibilités.

3 Questions de cours

Banque CCP Exos 62, 65, 88, 91, 93