Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 — Rang du complément de Schur

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ où $A \in GL_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On pose $S = D - CA^{-1}B$. Montrer que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(S)$.

Exercice 3 ★★★ — Mines P' 1995

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n. On pose

$$\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ g & \longmapsto & f \circ g - g \circ f \end{array}\right.$$

1. Montrer que $\Phi^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$. En déduire que Φ est nilpotent.
2. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$. En déduire l'indice de nilpotence de Φ.

Exercice 4 ★★

Soient $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $\operatorname{Im} p_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} p_n = E$.

Exercice 5

Soient E l'ensemble des suites réelles constantes, F l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+1} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, G l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+2} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et enfin H l'ensemble des suites réelles périodiques de période 4.

1. Montrer que E, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que E, F, G sont inclus dans H.
3. Montrer que $E \oplus F \oplus G = H$.

Exercice 6 ★

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$, on note $A \otimes B$ la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par blocs de la manière suivante : $A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}B & a_{12}B \\ \hline a_{21}B & a_{22}B \end{array}\right)$.

1. Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^4$. Montrer que $(A \otimes B).(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
2. Calculer $\det(I_2 \otimes B)$, $\det(A \otimes I_2)$ et $\det(A \otimes B)$ en fonction de $\det A$ et $\det B$.
3. A quelle condition nécessaire et suffisante $A \otimes B$ est-elle inversible ? Quel est alors son inverse ?

Exercice 7 ★ — Déterminant du complément de Schur

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ où $A \in GL_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On pose $S = D - CA^{-1}B$. Montrer que $\det(M) = \det(A)\det(S)$.

Exercice 8 ★

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $m_A : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}\right.$.

1. Justifier que m_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\det m_A = (\det A)^2$.
3. Généraliser en dimension quelconque.

Eléments propres

Exercice 9 ★★

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $g \circ f$, alors λ est également valeur propre de $f \circ g$.

Exercice 10 ★★★★ Vecteurs propres communs

Soient E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun dans chacun des cas suivants.

1. $u \circ v = 0$.
2. $\exists a \in \mathbb{C},\ u \circ v = au$.
3. $\exists b \in \mathbb{C},\ u \circ v = bv$.
4. $u \circ v = \mathrm{Id}_E$.
5. $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2,\ u \circ v = au + bv$.

Exercice 11 ★★

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie E. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 12 ★★★ Théorème de Gerschgorin

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ et on note D_i le disque de centre $a_{i,i}$ et de rayon R_i. Montrer que toute valeur propre de A appartient à l'un au moins des disques D_i.

Exercice 13 ★★

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\varphi(P) = XP'$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 14 ★★★

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit l'application $T(f)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)e^t \,dt$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres de T et les sous-espaces propres associés.

Exercice 15 ★★★

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que $\int_0^x \frac{f(t)}{t} \,dt$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer que l'application Φ qui à $f \in E$ associe la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{t} \,dt$ est un endomorphisme de E.
3. Déterminer les valeurs propres de Φ et les sous-espaces propres associés.

Exercice 16 ★★★

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que l'application $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \,dt$ est prolongeable en 0 en une application continue sur $\mathbb{R}_+$. On notera ce prolongement $T(f)$.
2. Montrer que T est un endomorphisme de E.
3. Déterminer les valeurs propres de T et les sous-espaces propres associés.

Exercice 17 ★★★ **Matrices stochastiques**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_{ij} \geq 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
2. Montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), |\lambda| \leq 1$.

Exercice 18 ★★★

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. A toute application $f \in E$, on associe l'application

$$\Phi(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de Φ.

Exercice 19 ★★ **Mines-Ponts MP 2016**

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires a et b de E formant une famille libre.
Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle a \mid x\rangle a + \langle b \mid x\rangle b \end{cases}$$

Exercice 20 ★★★

Montrer que l'application $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X(X+1)P' - nXP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 21 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit l'endomorphisme

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{tr}(M) I_n \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres de u, ainsi que les espaces propres associés.

Exercice 22 ★★★ **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $p \in]-1,1[\setminus\{0\}$. Posons $q = 1 - p$ et $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose pour $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, $u(f)(x) = f(px+q)$.

1. Montrer que u est un automorphisme de E.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset]-1,1] \setminus \{0\}$.
3. Montrer que si f est un vecteur propre de u, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k)} = 0$.
4. Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 23 ★★★ **Vecteur propre commun**

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Exercice 24 ★

Soit $f : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto X^2 P(1/X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les éléments propres de A.
3. En déduire les éléments propres de f.

Exercice 25 ★★ **Saint-Cyr MP 2025**

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = 0$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

Polynôme caractéristique

Exercice 26 ★★ **Matrice compagnon**

Soient $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 27 ★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\chi_A = \chi_{A^\top}$.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A^\top)$.

Exercice 28 ★★ **E3A MP 2015 Maths 1**

A toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels et toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels non nuls, on associe la suite de matrices (A_n) où A_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On note $P_n(X) = \det(XI_n - A_n)$ le polynôme caractéristique de A_n.

1. Déterminer une relation de récurrence entre les polynômes $P_{n+1}(X)$, $P_n(X)$ et $P_{n-1}(X)$.
2. **a.** Justifier que la matrice A_n est diagonalisable.
   b. Soit λ une valeur propre de la matrice A_n. Calculer le déterminant de la matrice extraite de $\lambda I_n - A_n$ en supprimant sa première colonne et sa dernière ligne.
   c. En déduire le rang de la matrice $\lambda I_n - A_n$ pour λ valeur propre de la matrice A_n.
   d. En déduire que le polynôme caractéristique $P_n(X)$ de la matrice A_n admet n racines réelles distinctes.
3. On appelle $\Delta_n(x)$ le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} P'_{n+1}(x) & P'_n(x) \\ P_{n+1}(x) & P_n(x) \end{pmatrix}$.
   a. Soit $n \geq 2$. Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta_n(x) = P_n^2(x) + b_n^2\Delta_{n-1}(x)$$
   b. Montrer que $\Delta_1(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire le signe de $\Delta_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto P_{n+1}(x)$ s'annule une unique fois entre deux zéros consécutifs de P_n.
   On pourra considérer l'application $x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$.

Exercice 29 ★★★

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie E.

1. On suppose u inversible. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même polynôme caractéristique.

2. Traiter le cas où u est non inversible.

Exercice 30 **Algorithme de Faddeev**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note P le polynôme caractéristique de A. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $\mathrm{B}(\lambda) = \mathrm{com}(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A})^\top$.

1. Montrer qu'il existe des matrices $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \dots \mathrm{B}_{n-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\mathrm{B}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} \mathrm{B}_k$$

2. Montrer que $\mathrm{P}'(\lambda) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}(\lambda))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

3. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - \sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{X}^{n-k}$ et $\mathrm{B}_n = 0$. Montrer que pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{cases} p_k = \frac{1}{k}\,\mathrm{tr}(\mathrm{AB}_{k-1}) \\ \mathrm{B}_k = \mathrm{AB}_{k-1} - p_k \mathrm{I}_n \end{cases}$$

et préciser B_0.

4. Montrer que, si A est inversible, $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{p_n}\mathrm{B}_{n-1}$.

5. Ecrire un algorithme en Python calculant le polynôme caractéristique d'une matrice donnée et un autre calculant son inverse grâce aux questions précédentes.

Exercice 31 ★★★

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note E_p l'ensemble des «suites» de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ p-périodiques. On note D_p l'endomorphisme de E_p qui à une suite (u_n) associe la suite $(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$. Déterminer le coefficient de X dans le polynôme caractéristique de D_p.

Exercice 32 ★★★ **Mines-Ponts MP 2018**

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$.
On suppose qu'il existe $h \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ de rang $r \geq 1$ tel que $h \circ g = f \circ h$. Montrer que χ_f et χ_g ont un facteur commun de degré r.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 33 ★★★

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On pose

$$\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ \hline -\mathrm{B} & \mathrm{I}_p \end{array}\right)$$

En multipliant M à gauche et à droite par des matrices bien choisies, montrer que

$$\lambda^p \chi_{\mathrm{AB}}(\lambda) = \lambda^n \chi_{\mathrm{BA}}(\lambda)$$

En déduire que $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$ si $n = p$.

Exercice 34 ★★ **CCP 2015**

Soient E un espace vectoriel de dimension $2n+1$ et de base $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ ainsi que u l'endomorphisme de E tel que $u(e_1) = e_1 + e_{2n+1}$ et $u(e_i) = e_{i-1} + e_i$ pour tout $i \in [\![2, 2n+1]\!]$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de u.

2. Montrer que u est inversible et déterminer un polynôme P tel que $u^{-1} = \mathrm{P}(u)$.

3. Déterminer les valeurs propres complexes de u.

4. En déduire $\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Diagonalisation

Exercice 35

Calculer la trace de l'endomorphisme $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{array} \right.$.

Exercice 36 ★★★

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose u diagonalisable.
Montrer que u et v commutent si et seulement si tout sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice 37 ★★★

Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que le commutant de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)^2$$

Exercice 38 ★★ — Calcul d'un commutant

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer le commutant de A.

Exercice 39 ★★★

Soient u un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On pose $G = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} F \cap E_\lambda(u)$. Montrer que G est stable par u.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} F \cap E_\lambda(u)$.
3. Montrer que les sous-espaces vectoriels de E stables par u sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} F_\lambda$ où pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, F_λ est un sous-espace vectoriel de $E_\lambda(u)$.

Exercice 40 ★★ — Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A, et la diagonaliser si possible.
2. Résoudre l'équation $M^2 = A$ pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 41 ★ — Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A et B sont-elles semblables ?

Exercice 42 ★★ — Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A s'écrit PDP^{-1} avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On cherche à résoudre l'équation $X^3 = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Montrer que si X est solution de cette équation, alors $P^{-1}XP$ commute avec D puis qu'elle est diagonale.
   Résoudre l'équation.

Exercice 43 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A en fonction de J et J^2.
2. Calculer le polynôme caractéristique de J. La matrice J est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser A.

Exercice 44 ★★

Soient $a \in \mathbb{K}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $u(P) = (X - a)P'$ pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les éléments propres de u. u est-il diagonalisable ?

Exercice 45 ★★

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X+1)P(X) - XP(X+1)$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les éléments propres de Φ. Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 46 ★ **CCP 2018**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$, telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 47 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + 2M^\top \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Exercice 48 ★

Etudier la diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ des matrices réelles suivantes :

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} ;$$
2. $$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} ;$$
3. $$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$
4. $$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 49 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2018**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 50 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On définit : $\forall m \in \mathbb{R}$, $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres et sous-espaces propres de A_m.
2. Donner les valeurs de m pour lesquelles A_m soit diagonalisable. Même question pour l'inversibilité.
3. Si A_m est diagonalisable, déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 51 ★★★

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E stable par u.

Exercice 52 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note f et g deux endomorphismes de E et on note A et B leurs matrices dans une même base de E.

1. On suppose f et g bijectifs dans cette question.
   - **a.** Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
   - **b.** Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. - **a.** Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même spectre.
   - **b.** Donner un exemple de matrices telles que AB soit diagonalisable mais pas BA.

Exercice 53 ★★★

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On suppose que AB est diagonalisable et inversible. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 54 ★★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019**

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E vérifiant $f \circ g = f + g$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.
2. On suppose g diagonalisable. Montrer que f et $f \circ g$ sont aussi diagonalisables et que $\operatorname{Sp}(f \circ g) \subset \mathbb{R} \setminus]0, 4[$.

Exercice 55 ★★★

Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Soit également k un entier naturel impair.

1. Montrer que tout vecteur propre de f^k est un vecteur propre de f.
2. On suppose que $f^k = g^k$. Montrer que $f = g$.

Trigonalisation

Exercice 56 ★

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable sur $\mathbb{R}$ à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $\exp(A)$.

Exercice 57 **X PC 2010**

Déterminer les matrices de $GL_3(\mathbb{C})$ semblables à leur inverse.

Exercice 58 ★ **CCP MP 2010**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectres disjoints.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)X = XP(B)$ et en déduire que $X = 0$.
3. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.