

## Equations différentielles linéaires d'ordre 1

### Exercice 1 ★★

Soit  $a$  et  $b$  deux fonction impaires continues sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $f$  une solution de l'équation différentielle  $y' + ay = b$ . Montrer que  $f$  est paire.

### Exercice 2 ★★

#### Périodicité

Soient  $T \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $a$  et  $b$  deux fonctions continues et  $T$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  une solution de l'équation différentielle (E) :  $y' + ay = b$ . Montrer que  $f$  est  $T$ -périodique si et seulement si  $f(0) = f(T)$ .

### Exercice 3 ★

Résoudre sur  $] -\infty, -1[$ ,  $] -1, 1[$  puis  $]1, +\infty[$  l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - xy = 1$$

### Exercice 4 ★★

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle  $xy' - \alpha y = 0$ . Déterminer l'unique solution  $f$  vérifiant  $f(1) = 1$ .
2. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle  $xy' - \alpha y = f$ . Déterminer l'unique solution  $g$  vérifiant  $g(1) = 0$ .
3. On définit par récurrence une suite de fonctions  $(u_n)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la manière suivante :
  - $u_0 = f$  ;
  - pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1}$  est l'unique solution de l'équation différentielle  $xy' - \alpha y = u_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  valant 0 en 1.

**REMARQUE.** On a donc  $u_1 = g$ .

Déterminer par récurrence  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 5 ★★★★★

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

## Equations différentielles linéaires d'ordre 2

### Exercice 6 ★

1. Résoudre l'équation différentielle  $y'' - (1 - i)y' - 2(1 + i)y = 0$ .
2. Donner l'unique solution  $f$  vérifiant  $f(0) = f'(0) = 1$ .

### Exercice 7 ★★★★★

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f + f'' \geq 0$ . Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

### Exercice 8 ★★★★★

#### Mines MP 2010

Soit  $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ . On considère l'équation différentielle  $y'' + qy = 0$ . On suppose que  $q$  est non constamment nulle au voisinage de  $+\infty$  et que l'on dispose d'une solution  $y$  strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$  et on pose  $f = \frac{y'}{y}$ .

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par  $f$ .
2. Montrer que  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. Montrer que  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  puis qu'elle y est strictement positive.

4. Montrer que  $q$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $\int_{[x, +\infty[} q_{x \rightarrow +\infty} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**Exercice 9 ★**

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*

$$(E) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Résoudre l'équation (E).
4. Déterminer l'unique solution  $f$  de (E) telle que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 2$ .

**Exercice 10 ★★**

Soient  $a, b$  et  $x_0$  des réelles tels que  $a^2 \neq b$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  trois fois dérivable telle que

$$\begin{cases} f'' + af' + bf = 0 \\ f^{(3)}(x_0) = f(x_0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 11**

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$(1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$$

2. Résoudre ensuite sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$(1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y = \frac{1}{1 + t^2}$$

**Exercice 12 ★★**

Résoudre sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  l'équation différentielle  $y'' + y = \tan t$ .

**Exercice 13 ★★★**

1. Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) \\ y & \longmapsto & (x \mapsto xy'(x)) \end{cases}$$

2. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' - \alpha^2y = 0$$

**Exercice 14 ★★**

On étudie l'équation différentielle  $(t^2 + 1)y'' - 2y = t$ .

1. Déterminer une solution polynomiale non nulle  $\varphi$  de l'équation homogène associée.
2. Résoudre l'équation homogène en procédant au changement de fonction inconnue  $y(t) = \varphi(t)z(t)$ .
3. Exprimer la solution générale de l'équation étudiée.

**Exercice 15 ★★★★★****ENS MP 2010**

Soient  $q$  une application continue périodique non identiquement nulle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$  et  $f$  une solution de l'équation différentielle  $y'' + qy = 0$ . Montrer que  $f$  s'annule une infinité de fois sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 16 ★★★**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  une fonction  $2\pi$ -périodique. Montrer que l'équation différentielle  $y'' + y = f$  admet des solutions  $2\pi$ -périodiques si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin t \, dt = 0$$

**Exercice 17 ★★★****TPE-EIVP MP 2018**

Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions définies et continues sur  $[0, 1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  
Soit (E) l'équation différentielle :  $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ .

1. On considère  $f$  une fonction solution de (E) sur  $[0, 1]$  s'annulant une infinité de fois. Montrer qu'il existe  $x \in [0, 1]$  tel que  $f(x) = f'(x) = 0$
2. Déterminer toutes les solutions de (E) s'annulant une infinité de fois sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 18 ★★**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Résoudre l'équation différentielle  $y'' + y = \cos(nt)$ .
2. Soit  $\sum a_n$  une série absolument convergente. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos(nt)$$

**Exercice 19****CCP MP**

1. Montrer qu'il existe une solution  $h$  de l'équation  $xy'' + y' + y = 0$  développable en série entière et vérifiant  $h(0) = 1$ .
2. Montrer que  $h$  ne s'annule qu'une fois sur  $]0, 2[$ .

**Systèmes différentiels****Exercice 20 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2019**

Résoudre, à l'aide de matrices, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + 6y \\ y' = -3x - 6y \\ z' = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$

**Exercice 21 ★★★**

Résoudre le système différentiel 
$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}.$$

**Exercice 22 ★★****CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit le système différentiel  $Y'(t) = A(t)Y(t)$  avec  $A(t) = \begin{pmatrix} 1 - 3t & -2t \\ 4t & 1 + 3t \end{pmatrix}$ .

1. Donner les valeurs propres de  $A(t)$ .
2. En déduire qu'il existe  $P$  indépendant de  $t$  telle que  $P^{-1}A(t)P$  soit diagonale.
3. Résoudre le système différentiel.

**Exercice 23 ★★****TPE-EIVP MP 2014**

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 9x(t) - 5y(t) + 2t \\ y'(t) = 10x(t) - 6y(t) + e^t \end{cases}$$

**Exercice 24 ★★**

Résoudre le problème de Cauchy 
$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x + 3y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

## Exercice 25 ★★

Saint-Cyr PSI 2019

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A$  est semblable à  $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Donner une matrice inversible  $P$

telle que  $A = PTP^{-1}$ .

2. Trouver les solutions du système différentiel  $X'(t) = AX(t)$ , avec  $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ .

## Exercice 26 ★★

On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$$

- Montrer que  $V : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$  appartient à  $\mathcal{S}$ .
- Soit  $X \in \mathcal{S}$ . Montrer que  $AX \in \mathcal{S}$ .
  - En déduire une base de  $\mathcal{S}$ .
- Soit  $X \in \mathcal{S}$ . Montrer que  $X$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .
  - Soient  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  inversible et  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $A = PMP^{-1}$ . Soit  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et telle que  $Y' = MY$ . Montrer que  $Y$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .
- On introduit sur  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  le produit scalaire défini par  $(X | Z) = X^T Z$  et on note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée. Soit  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = (A + b(t)I_2)X(t)$$

Soit  $f : t \mapsto \|X(t)\|^2$ . Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 2b(t)f(t)$$

- Montrer que la fonction  $X$  de la question précédente est bornée.

## Changement de variable

**Exercice 27 ★★**

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' - xy' - 3y = x^4$$

1. a. Montrer que  $f$  est une solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $g : t \mapsto f(e^t)$  est solution sur  $\mathbb{R}$  d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.  
 b. En déduire les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. a. Montrer que  $f$  est une solution de (E) sur  $\mathbb{R}_-^*$  si et seulement si  $g : t \mapsto f(-e^t)$  est solution sur  $\mathbb{R}$  d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.  
 b. En déduire les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_-^*$ .
3. Déterminer les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 28****CCINP (ou CCP) MP 2013**

On se donne l'équation différentielle  $4x^2 y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$ .

1. Trouver une solution polynomiale de degré 2 à l'équation.
2. Résoudre l'équation sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On pourra poser  $x = e^t$ .
3. Résoudre l'équation sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

**Problèmes de raccord****Exercice 29 ★★****Problème de raccordement**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $x^2 y' - y = 0$ .

**Exercice 30 ★★**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$ .

**Exercice 31 ★★****Raccordement**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $xy' - y = x$ .

**Exercice 32 ★★****Raccordement**

On considère l'équation différentielle (E) :  $xy'' - y' - x^3 y = 0$ .

1. Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  en effectuant le changement de variable  $t = x^2$ .
2. En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}_-^*$ .
3. Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 33 ★★****Problème de raccord**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (E) :  $ty' + (1-t)y = e^{2t}$ .

**Exercice 34 ★★****Mines MP**

Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$x \ln(x) y' - (3 \ln(x) + 1)y = 0$$

**Wronskien****Exercice 35 ★★★****CCP MP 2017**

On considère l'équation différentielle suivante sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$(E) : x'' + 2 \frac{x'}{t} + x = 0$$

1. Montrer que  $\varphi_1 : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est solution de (E).
2. A l'aide du wronskien, chercher une autre solution de (E).

**Exercice 36 ★★★**

Soient  $q$  une fonction continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . On considère l'équation différentielle (E) :  $y'' + qy = 0$ .

1. Soit  $f$  une solution bornée de (E) sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que  $f'$  admet une limite en  $+\infty$  puis déterminer la valeur de cette limite.
2. Soient  $f$  et  $g$  deux solutions bornées de (E) sur  $\mathbb{R}_+$ . Étudier le wronskien  $w = fg' - f'g$  des solutions  $f$  et  $g$ .  
En déduire que  $f$  et  $g$  sont liées. Que peut-on en conclure ?

**Exercice 37 ★★★****Zéros entrelacés**

1. Soient  $p$  et  $q$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  telles que  $p \leq q$  sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que  $u'' + pu = 0$  et  $v'' + qv = 0$ . On suppose que  $u$  s'annule en des réels  $a$  et  $b$  avec  $a < b$  mais qu'elle ne s'annule pas sur  $]a, b[$ .
  - a. On pose  $W = u'v - uv'$ . Déterminer  $W'$ .
  - b. En déduire que  $v$  s'annule sur  $[a, b]$ .
2. Application. Soient  $r$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f'' + rf = 0$  et  $M \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - a. On suppose  $r \geq M^2$ . Montrer que tout intervalle fermé de longueur  $\frac{\pi}{M}$  contient au moins un zéro de  $f$ .
  - b. On suppose  $r \leq M^2$ . On suppose que  $f$  s'annule en des réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  mais qu'elle ne s'annule pas sur  $]a, b[$ . Montrer que  $b - a \geq \frac{\pi}{M}$ .

**Divers****Exercice 38 ★★★****Equation fonctionnelle de l'exponentielle matricielle**

Déterminer les applications  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dérivables en 0 vérifiant :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, M(s+t) = M(s)M(t)$$

**Exercice 39 ★★★****Banque Mines-Ponts MP 2019**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{tr}(A) > 0$ , et  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = Ax(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ .

Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle  $\ell$ , telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, \ell(x(t)) = 0$ .

**Exercice 40 ★★★**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  antisymétrique. Montrer que les solutions du système différentiel  $X' = AX$  sont toutes bornées.

**Exercice 41 ★★**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On cherche l'ensemble  $S_\alpha$  des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant  $f'(x) = -f(\alpha - x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe  $\mathcal{C}^2$ .
2. Montrer que les éléments de  $S_\alpha$  sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Conclure.

**Exercice 42 ★★**

Déterminer les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$$

**Exercice 43 ★★**

Déterminer les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x)$$