DEVOIR À LA MAISON N°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – EPITA 2019

Pour tout réel *strictement positif* α, on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = 1 + e^{-x} + e^{-2^\alpha x} + e^{-3^\alpha x} + e^{-4^\alpha x} + \cdots$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les premières propriétés de la fonction S_α. Dans la partie II, on approfondit le cas particulier $\alpha = 2$, autrement dit l'étude de la fonction S_2. Puis on introduit dans la partie III des intégrales auxiliaires afin d'obtenir de façon plus générale des équivalents de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

I Premières propriétés des fonctions S_α $(\alpha > 0)$

1 *Etude du cas particulier de la fonction* S_1.

1.a Etudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1 :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn}.$$

1.b Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.

1.c Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.

2 *Etude du domaine de définition des fonctions* S_α *(*$\alpha > 0$*).*

2.a Examiner pour $x \leq 0$ la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$.

2.b Pour tout réel $x > 0$, déterminer la limite de la suite $n \mapsto n^2 e^{-xn^\alpha}$.
En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ pour $x > 0$.

2.c Préciser le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$.

3 *Premières propriétés des fonctions* S_α *(*$\alpha > 0$*).*

3.a Pour tout $\varphi > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \left(x \mapsto e^{-xn^\alpha}\right)$ sur $[\varphi, +\infty[$.
En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]0, +\infty[$ (on explicitera le théorème utilisé).

3.b Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leq y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α.
En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

3.c A l'aide d'un théorème dont on précisera l'énoncé, montrer que : $\lim_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = 1$.

3.d En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}$ pour tout entier naturel N et pour tout réel $x > 0$, établir, pour tout entier naturel N, que : $\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) \geqslant N + 1$.
Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 ?

II Etude de la fonction S_2

On étudie dans cette partie la fonction définie par :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2} = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + e^{-9x} + e^{-16x} + \cdots$$

$\boxed{4}$ *Recherche d'un équivalent de* S_2 *en* 0.

4.a Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$e^{-x(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\, dt \leq e^{-xn^2}.$$

4.b En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire la double inégalité suivante :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) - 1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x).$$

4.c Retrouver alors $\lim_{x\to 0} S_2(x)$, puis donner un équivalent de $S_2(x)$ quand x tend vers 0.

$\boxed{5}$ *Recherche d'un équivalent de* $S_2 - 1$ *en* $+\infty$.

5.a Pour tout réel $x > 0$, établir que :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn}.$$

5.b En calculant cette dernière somme, démontrer que $S_2(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + e^{-x} + o\left(e^{-x}\right)$.
En déduire un équivalent de $S_2(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

$\boxed{6}$ *Recherche d'une valeur approchée de* $S_2(x)$ *pour* $x > 0$.

6.a En raisonnant comme dans la question 4.(a), établir pour tout entier naturel N et tout réel $x > 0$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leq \int_N^{+\infty} e^{-xt^2}\, dt.$$

6.b A l'aide d'un changement de variable dans cette dernière intégrale, en déduire que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0, \quad S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du \leq \frac{e^{-xN^2}}{2Nx}.$$

6.c En déduire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S_2(x)$ à $\varphi > 0$ près.

6.d Préciser une valeur approchée de $S_2(1)$ à 10^{-7} près.

III Etude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

$\boxed{7}$ *Comparaison de deux intégrales.*

On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u, \quad \text{et} \quad \mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

7.a Pour quelles valeurs de α les intégrales $\displaystyle\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ convergent-elles ?
En déduire que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$.

7.b A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(\alpha+1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.
Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n.

7.c Pour tout $x > 0$, effectuer dans l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ le changement de variable défini par $u = xt^\alpha$.
Qu'en déduit-on pour l'intégrale $\mathrm{I}(\alpha)$, et quelle relation obtient-on entre $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ et $\mathrm{I}(\alpha)$?

$\boxed{8}$ *Recherche d'un équivalent de* S_α *en* 0 *(*$\alpha > 0$*).*

8.a En raisonnant comme à la question 4.(a), établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$0 \leq S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}} \leq 1.$$

8.b Retrouver $\lim\limits_{x\to 0} S_\alpha(x)$, puis donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0.

$\boxed{9}$ *Majoration d'une intégrale auxiliaire (*$\alpha > 0$*).*

9.a Justifier pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ la relation suivante :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u.$$

9.b Etablir l'égalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u = e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u.$$

Justifier ensuite l'inégalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u \leq \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u.$$

En déduire enfin l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

9.c En conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est négligeable devant e^{-x} lorsque x tend vers $+\infty$.

$\boxed{10}$ *Recherche d'un équivalent de* S_α *en* $+\infty$ *(*$\alpha > 0$*).*

10.a Etablir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

10.b En déduire un équivalent de $S_\alpha(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.