Semaine du 19/01

1 Cours

Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien Théorème de Riesz : représentation des formes linéaires d'un espace euclidien. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Propriétés de l'adjonction : linéarité, adjoint d'une composée, involutivité. Si u est un endomorphisme d'un espace euclidien de base **orthonormée** $\mathcal{B}$, alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top$. Si F est un sous-espace stable par un endomorphisme u, alors $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u^*.

Matrices orthogonales Une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $\mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$. Une matrice est orthogonale si et seulement si la famille de ses lignes ou de ses colonnes est orthonormée pour le produit canonique. Groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Matrices orthogonales positives et négatives. Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Isométries vectorielles Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations des isométries parmi les endomorphismes d'un espace euclidien : conservation du produit scalaire, l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée est une base orthonormée, l'adjoint est égal à l'inverse. Groupe orthogonal O(E). Isométries vectorielles directes et indirectes. Groupe spécial orthogonal SO(E).

Réduction des isométries Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Les matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Les matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $\mathrm{S}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. L'application $\theta \mapsto \mathrm{R}(\theta)$ est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. Rotation d'un plan euclidien. Les isométries directes d'un plan euclidien sont les rotations. Les isométries indirectes d'un plan euclien sont les réflexions. Si un sous-espace vectoriel est stable par une isométrie, son orthogonal l'est également. Réduction d'une isométrie d'un espace euclidien : si $u \in \mathrm{O(E)}$, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{R}(\theta)$. Rotation d'un espace euclidien de dimension 3. Les isométries directes d'un espace euclidien de dimension 3 sont les rotations.

2 Méthodes à maîtriser

- Connaître les différentes caractérisations des isométries vectorielles : adjoint, conservation du produit scalaire, conservation de la norme.
- Utiliser le lien entre adjonction et transposition.
- Utiliser de préférence des bases orthonormées par défaut.
- Calculer la matrice d'un projecteur orthogonal ou d'une symétrie orthogonale.
- Déterminer si un endomorphisme est une isométrie directe/indirecte via sa matrice dans une base orthonormée ; préciser le cas échéant ses éléments caractéristiques.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercice 78

Réflexion Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une réflexion de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique) au choix de l'examinateur.

Retour sur le DS n°05 : Lemme des noyaux Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ premiers entre eux. Montrer que $\mathrm{Ker}((\mathrm{PQ})(u)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(u)) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}(u))$.

Retour sur le DS n°05 : Suite de fonctions Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{P}_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On poura utiliser la suite $(\ln \circ \mathrm{P}_n)$.
2. On note $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(x)$. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Noyau et image de l'adjoint Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}(u))^\perp$. En déduire que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^*)$.