Interrogation écrite n°03

NOM : Prénom : Note :

1. On pose $u_n = \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) diverge.

   On remarque que $u_{3n} = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et que*

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{3n+1} = n + \frac{1}{3} - \left\lfloor n + \frac{1}{3} \right\rfloor = n + \frac{1}{3} - n - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3}$$

   Ainsi 0 *et* $\frac{1}{3}$ *sont deux valeurs d'adhérence distinctes de la suite* (u_n). *Celle-ci ne peut converger.* ∎

2. Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto e^z$. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Est-il injectif ? surjectif ?

   Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z + z') = e^z e^{z'} = f(z)f(z')$ *donc* f *est bien un morphisme du groupe* $(\mathbb{C}, +)$ *dans le groupe* $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   De plus, $f(2i\pi) = f(0) = 1$ *donc* f *n'est pas injectif. Enfin, si l'on se donne* $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^*$, *il existe* $r \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathrm{Z} = re^{i\theta}$.
   Alors $\mathrm{Z} = f(\ln r + i\theta)$ *de sorte que* f *est surjectif.* ∎

3. On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant 1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

   Pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, $\det(\mathrm{M}) = 1 \neq 0$ *de sorte que* $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. *Ainsi* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
   De plus, $\det(\mathrm{I}_n) = 1$ *donc* $\mathrm{I}_n \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
   Enfin, pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(\mathrm{AB}^{-1}) = \det(\mathrm{A}) / \det(\mathrm{B}) = 1/1 = 1$ *donc* $\mathrm{AB}^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
   $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *est donc bien un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. ∎

4. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On pose $\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathrm{E}$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

   On remarque que pour $f \in \mathrm{E}$, $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_1$.

   Homogénéité *Soit* $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}$. *Alors*

   $$\|\lambda f\| = |(\lambda f)(0)| + \|(\lambda f)'\|_1 = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_1 = |\lambda||f(0)| + |\lambda|\|f'\|_1 = |\lambda|\|f\|$$

   en utilisant l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|_1$.

   Inégalité triangulaire *Soit* $(f, g) \in \mathrm{E}^2$. *Par inégalité triangulaire pour la valeur absolue et la norme* $\|\cdot\|_1$,

   $$\|f+g\| = |(f+g)(0)| + \|(f+g)'\|_1 = |f(0)+g(0)| + \|f'+g'\|_1 \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f_1'\| + \|g_1'\| = \|f\| + \|g\|$$

   Séparation *Soit* $f \in \mathrm{E}$ *tel que* $\|f\| = 0$. *Alors* $|f(0)| + \|f'\|_1 = 0$. *Comme les deux termes de la somme sont positifs, ils sont nuls. Ainsi* $|f(0)| = 0$ *et* $\|f'\|_1 = 0$. *Comme* $\|\cdot\|_1$ *est une norme, on obtient par séparation* $f' = 0$. *Ainsi* f *est constante sur* $[0,1]$. *Comme* $f(0) = 0$, f *est nulle sur* $[0,1]$.

   ∎

5. On pose $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|$ pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{N}(\mathrm{AB}) \leq \mathrm{N}(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{B})$.

   Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. *Soit* $j \in [\![1, n]\!]^2$. *Alors*

   $$\begin{aligned}
   \mathrm{S}_j &= \sum_{i=1}^{n} |(\mathrm{AB})_{i,j}| \\
   &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{i,k}\mathrm{B}_{k,j} \right| \\
   &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}\mathrm{B}_{k,j}| \qquad \textit{par inégalité triangulaire} \\
   &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}||\mathrm{B}_{k,j}| \\
   &= \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{B}_{k,j}| \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}| \\
   &\leq \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{B}_{k,j}|\mathrm{N}(\mathrm{A}) \\
   &= \mathrm{N}(\mathrm{A}) \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{B}_{k,j}| \leq \mathrm{N}(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{B})
   \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{N}(\mathrm{AB}) = \max_{1 \leq j \leq n} \mathrm{S}_j \leq \mathrm{N}(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{B})$. ∎