

INTÉGRALES IMPROPRES

Révisions d'intégration

Solution 1

1. Notons $F(x) = \int x \arctan^2(x) \, dx$ et intégrons par parties,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} \arctan^2(x) - \int \frac{x^2}{x^2+1} \arctan(x) \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) + \int \frac{\arctan(x)}{x^2+1} \, dx - \int \arctan(x) \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan^2(x) + \frac{1}{2} \arctan^2(x) - \int \arctan(x) \, dx \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) \, dx &= x \arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

D'où

$$\int x \arctan^2(x) \, dx = \frac{x^2+1}{2} \arctan^2(x) - x \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

2. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$,

$$\int e^x \sin^2(x) \, dx = \int \frac{e^x}{2} \, dx - \int \frac{e^x \cos(2x)}{2} \, dx$$

Puisque $e^x \cos(2x) = \operatorname{Re}(e^{(1+2i)x})$, on calcule

$$\int e^{(1+2i)x} \, dx = \frac{e^x e^{2ix}}{1+2i} = \frac{1-2i}{5} e^x e^{2ix}$$

dont la partie réelle vaut

$$\int e^x \cos(2x) \, dx = \frac{e^x}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x))$$

On a donc

$$\int e^x \sin^2(x) \, dx = \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10} (\cos(2x) + 2 \sin(2x))$$

3. En posant $u = \ln x$,

$$\int \cos(\ln x) \, dx = \int e^u \cos u \, du$$

Via un passage en complexes ou une intégration par parties

$$\int e^u \cos u \, du = \frac{1}{2} e^u (\cos u + \sin u)$$

On en déduit

$$\int \cos(\ln x) \, dx = \frac{1}{2} x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

4. En posant $u = \sqrt{1+x}$,

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}} = 2 \int (u^2 - 1) \, du = \frac{2}{3} u^3 - 2u = \frac{2}{3} (\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} = \frac{2}{3} \sqrt{1+x} (x-2)$$

5. En posant $u = e^x$, on a

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u = \arctan(e^x)$$

Solution 2

1. Il faut montrer que $t \mapsto \sin t + \cos t$ ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t > 0$ et $\cos t \geq 0$ donc $\sin t + \cos t > 0$. De plus, $\sin 0 + \cos 0 = 1 > 0$.

Ainsi $t \mapsto \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}$ et $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et S et C sont bien définies.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$.

3. On a clairement $S + C = \frac{\pi}{2}$. On en déduit $S = C = \frac{\pi}{4}$.

4. On effectue le changement de variable $t = \sin u$. On en déduit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + |\cos u|} \, du$$

Mais pour $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos u \geq 0$ donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + \cos u} \, du = C = \frac{\pi}{4}$$

Solution 3

1. Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{du}{4-u^2} \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \left([\ln(2+u)]_{-1}^1 - [\ln(2-u)]_{-1}^1 \right) = \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

2. Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t \, dt}{1 - \cos^2 t}$$

Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned} J &= - \int_0^{\cos x} \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\cos x} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left([\ln(1-u)]_0^{\cos x} - [\ln(u+1)]_0^{\cos x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\tan^2 \frac{x}{2} \right) = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

car pour $x \in]0, \pi[$, $\tan \frac{x}{2} > 0$.

3. Notons K l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$K = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \, dt}{(1 - \sin^2 t)^2}$$

Le changement de variable $u = \sin t$ fournit donc

$$K = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(1 - u^2)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \left(\left[\frac{1}{u-1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{1}{u+1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \end{aligned}$$

4. Notons L l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ allié à la paramétrisation rationnelle du cercle donne

$$L = 2 \int_0^1 \frac{du}{1 - u^2 + 2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{u + \sqrt{2} - 1} - \frac{1}{u - 1 - \sqrt{2}} \right) du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left([\ln(u + \sqrt{2} - 1)]_0^1 - [\ln(1 + \sqrt{2} - u)]_0^1 \right) \\ &= \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Solution 4

1. Le calcul ne pose aucune difficulté, on trouve

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, intégrons I_{n+2} par parties en posant $\forall t \in [0, \pi/2]$,

$$u(t) = -\cos(t) \quad \text{et} \quad v(t) = \sin^{n+1}(t).$$

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi/2]$ et,

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad u'(t) = \sin(t)$$

et

$$v'(t) = (n+1) \cos(t) \sin^n(t).$$

La formule d'intégration par parties s'écrit donc,

$$\begin{aligned}
 I_{n+2} &= [-\cos(t) \sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} \\
 &\quad + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin^n(t) - \sin^{n+2}(t)) dt \\
 &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
 \end{aligned}$$

D'où la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

3. D'après la relation de récurrence établie précédemment :

$$\begin{aligned}
 I_{2n} &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} I_0 \\
 &= \frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{[(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2]^2} I_0 \\
 &= \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
 I_{2n+1} &= \frac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3} I_1 \\
 &= \frac{[(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2]^2}{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} I_1 \\
 &= \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} I_1 = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}
 \end{aligned}$$

4. Puisque $\forall t \in [0, \pi/2], \quad 0 \leq \sin(t) \leq 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t),$$

ainsi après intégration sur le segment $[0, \pi/2]$,

$$I_{n+1} \leq I_n.$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. On a donc en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

soit encore, d'après la relation de récurrence obtenue ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

5. Par une récurrence sans difficulté, on prouve à l'aide de l'inégalité précédente que pour tout n positif $I_n > 0$. D'après le résultat de la question 3.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1,$$

de plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

d'où, en appliquant le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

et donc

$$I_{n+1} \sim I_n.$$

6. Posons $v_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = v_n$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante égale à $\pi/2$ car $I_1 = 1$.

7. On a $(n+1)I_{n+1}I_n \sim nI_n^2$ d'après ce qui précède. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

et puisque la fonction racine carrée est continue en $\pi/2$ et que I_n est positive,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ainsi

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Solution 5

1. On remarque que l'intégrande tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Nous ne disposons pas en première année de théorème d'interversion limite/intégrale mais il y a cependant des chances que (u_n) converge vers 1. En effet,

$$1 - u_n = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n}$$

Ainsi

$$0 \leq 1 - u_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que (u_n) converge vers 1.

2. On a vu que $1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n}$. Soit $n \geq 1$: on écrit $\frac{x^n}{1+x^n}$ sous la forme $\frac{x}{n} \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$ et on effectue une intégration par parties :

$$1 - u_n = \left[\frac{x}{n} \ln(1+x^n) \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

En utilisant l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Donc $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par conséquent,

$$1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{i.e.} \quad u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Solution 6

1. Pour $t \geq 0$, $\frac{1}{1+t} \leq 1$ donc $0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que (I_n) converge vers 0.

2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t} dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

3. En utilisant la question précédente, $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (I_k + I_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} I_k - \sum_{k=1}^n (-1)^k I_{k-1}$. On reconnaît là une somme télescopique donc $S_n = (-1)^{n+1} I_n - (-1)^1 I_0 = I_0 + (-1)^{n+1} I_n$. Le calcul de I_0 donne $I_0 = \ln 2$.
4. Comme (I_n) converge vers 0, Q_n converge vers $\ln 2$.

Solution 7

Il s'agit d'intégrer par parties à chaque fois.

$$\begin{aligned} I &= [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx \\ &= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 \, dx \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{9} [x^3]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \left[-\frac{1}{3} e^{2x} \cos(3x) \right]_0^\pi + \frac{2}{3} \int_0^\pi e^{2x} \cos(3x) \, dx \\ &= \frac{e^{2\pi} + 1}{3} + \frac{2}{3} K' \end{aligned}$$

en posant $K' = \int_0^\pi e^{2x} \cos(3x) \, dx$. A nouveau, par intégration par parties

$$K' = \left[\frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) \right]_0^\pi - \frac{2}{3} \int_0^\pi e^{2x} \sin(3x) \, dx = -\frac{2}{3} K$$

Ainsi

$$K = \frac{e^{2\pi} + 1}{3} + \frac{2}{3} K' = \frac{e^{2\pi} + 1}{3} - \frac{4}{9} K$$

de sorte que

$$K = \frac{3}{13} (e^{2\pi} + 1)$$

$$\begin{aligned} L &= [x \arccos x]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\pi}{6} - [\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{aligned}$$

Solution 8

1. On procède à deux intégrations par parties.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x}\end{aligned}$$

2. On fait apparaître un facteur 1 et on intègre par parties.

$$\begin{aligned}\int \arctan(x) dx &= x \arctan(x) - \int \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

3. On peut procéder à une double intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \sin x dx &= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx \\ &= -e^{2x} \cos x + 2 \left(e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx \right) \\ &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x)$$

On peut également passer en complexes.

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \sin x dx &= \int e^{2x} \operatorname{Im}(e^{ix}) dx \\ &= \int \operatorname{Im}(e^{2x} e^{ix}) dx \\ &= \operatorname{Im} \left(\int e^{2x} e^{ix} dx \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\int e^{(2+i)x} dx \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{(2+i)x}}{2+i} \right) \\ &= e^{2x} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix}}{2+i} \right) \\ &= \frac{1}{5} e^{2x} \operatorname{Im}((2-i)e^{ix}) \\ &= \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x)\end{aligned}$$

4. Puisque arcsin est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$, on peut intégrer par parties «sur cet intervalle» :

$$\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

A priori, l'intégration par parties précédentes permet seulement d'affirmer que la fonction $\varphi : x \mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$ est une primitive de arcsin sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Mais

- φ est continue sur $[-1, 1]$;
- φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$;
- $\varphi' = \arcsin$ sur l'intervalle $] -1, 1[$
- φ admet donc des limites finies en -1 et 1 car \arcsin est continue en ces points.

D'après le théorème de prolongement \mathcal{C}^1 , φ est en fait de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$ et que $\varphi' = \arcsin$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Ainsi φ est bien une primitive de \arcsin sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Convergences

Solution 9

1. On effectue le changement de variable $t = x - n\pi$ et on remarque que

$$\sin^2(t + n\pi) = ((-1)^n \sin t)^2 = \sin^2 t$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leq x \leq \pi$

$$(n\pi)^4 \leq (x + n\pi)^4 \leq ((n+1)\pi)^4$$

puis comme $\sin^2 x \geq 0$

$$(n\pi)^4 \sin^2 x \leq (x + n\pi)^4 \sin^2 x \leq ((n+1)\pi)^4 \sin^2 x$$

et enfin

$$\frac{1}{((n+1)\pi)^4 \sin^2 x} \leq \frac{1}{(x + n\pi)^4 \sin^2 x} \leq \frac{1}{(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

On intègre les dernières inégalités entre 0 et π de sorte que $v_{n+1} \leq u_n \leq v_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{dx}{1 + (n\pi)^4 \sin^2 x}$ étant π -périodique, on a

$$v_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (n\pi)^4 \sin^2 x}$$

Les règles de Bioche nous conseillent d'effectuer le changement de variable $t = \tan x$. On trouve en effet

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1 + (n\pi)^4 t^2 + 1)} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (n\pi)^4}} \arctan(\sqrt{1 + (n\pi)^4} t) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^4}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 + ((n+1)\pi)^4}} \leq u_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^4}}$$

puis que $u_n \sim \frac{1}{n^2 \pi}$.

4. Puisque l'intégrande est positif, $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}$ est croissante et admet donc une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$. De

plus, $F(N\pi) = \sum_{n=0}^N u_n$ pour $N \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge d'après la question précédente. Ainsi $F(N\pi)$ tend vers une limite finie lorsque

N tend vers $+\infty$. Cette limite est également celle de F en $+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}$ converge.

Solution 10

1. Soit A un réel tel que P' ne s'annule pas sur $[A, +\infty[$. L'intégrale I est de même nature que l'intégrale $\int_A^{+\infty} \cos(P(x)) \, dx$. On réécrit cette intégrale sous la forme $\int_A^{+\infty} \frac{1}{P'(x)} P'(x) \cos(P(x)) \, dx$. Puisque $x \mapsto \frac{\sin(P(x))}{P'(x)}$ admet une limite nulle en $+\infty$ ($\deg P' \geq 1$), l'intégration par parties montre que l'intégrale $\int_A^{+\infty} \cos(P(x)) \, dx$ est de même nature que l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x)) \, dx$. Puisque $\deg P \geq 2$, $\frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x)) \, dx$ est donc convergente de même que I .
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|\cos(P(x))| \geq \cos^2(P(x)) = \frac{1 + \cos(2P(x))}{2}$. D'après la première question, $\int_0^{+\infty} \cos(2P(x)) \, dx$ converge et $\int_0^{+\infty} dx$ diverge vers $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} |\cos(P(x))| \, dx$ diverge vers $+\infty$.
3. Par le changement de variable $t = x^2$, $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \, dt$ puis, par intégration par parties, $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \, dt$. En posant $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \, dt$, on a $I = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On vérifie que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées. On en déduit que I est du signe de u_0 , c'est-à-dire positif.

Solution 11

1. \ln est continue sur $]0, 1]$ et $\ln(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0^+ ($\frac{1}{2} < 1$), \ln est intégrable sur $]0, 1]$. Finalement, $\int_0^1 \ln t \, dt$ converge.
2. $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (puisque $e^{-u} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u}\right)$). Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ($2 > 1$), $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Finalement, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$ converge.
3. Tout d'abord, $x \mapsto x \sin(x)e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Comme \sin est bornée, $x \sin(x)e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(xe^{-x})$. De plus, $xe^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x^2}$ par croissances comparées. Ainsi $x \sin(x)e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x^2}$. Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $x \mapsto x \sin(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Finalement, $\int_0^{+\infty} x \sin(x)e^{-x} \, dx$ converge.
4. Tout d'abord, $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $\ln(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(t)$ et on a vu que \ln était intégrable au voisinage de 0^+ donc $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de 0^+ . Par croissances comparées, $\ln(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement, $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} \, dt$ converge.
5. $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ n'est pas intégrable au voisinage de 1^- . L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ diverge.

6. Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2 + 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $\frac{\ln t}{t^2 + 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(t)$ et on a vu que \ln était intégrable au voisinage de 0^+ donc $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de 0^+ . Par croissances comparées, $\frac{\ln t}{t^2 + 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2 + 1}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement, $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2 + 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt$ converge.

7. $\ln x \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} x - 1$ donc $\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$. Ainsi $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 1^+ par comparaison à une intégrale de Riemann.

Par croissances comparées, $\sqrt{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$ donc $\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)$ donc $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison à une intégrale de Riemann.

Finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$ converge.

Solution 12

1. Supposons $\alpha > 1$. Donnons-nous $\gamma \in]1, \alpha[$ (par exemple $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$). Comme $\gamma < \alpha$, $\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{t^{\gamma}}$ par croissances comparées.

Or $\gamma > 1$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^{\gamma}}$ est intégrable sur $[e, +\infty[$. On en déduit que $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ converge.

Supposons $\alpha < 1$. Alors $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\right)$ par croissances comparées. Or $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge donc $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ diverge également.

Supposons enfin $\alpha = 1$. Si $\beta \neq 1$,

$$\int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^{\beta}} = \frac{1}{1-\beta} [\ln(t)^{1-\beta}]_e^x = \frac{1}{1-\beta} (\ln(x)^{1-\beta} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \frac{1}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Enfin, si $\beta = 1$,

$$\int_e^x \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_e^x = \ln(\ln x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Pour récapituler, $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

2. Via le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{t^{\alpha} |\ln t|^{\beta}}$ est de même nature que l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha} (\ln u)^{\beta}}$. D'après la question précédente, cette intégrale converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Solution 13

1. Posons $f : x \mapsto e^{-x} \ln x$. f est bien continue sur \mathbb{R}_+^* .

De plus, $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x$ et $\ln x \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Ainsi $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est intégrable au voisinage de

0^+ . Enfin $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées de sorte que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

L'intégrale I converge bien.

2. Par relation de Chasles,

$$I = \int_0^1 e^{-x} \ln x \, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$$

En effectuant le changement de variable $x \mapsto 1/x$ dans la première intégrale,

$$I = - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \ln x \, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \int_1^{+\infty} \left(1 - \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}\right) e^{-x} \ln x \, dx = \int_1^{+\infty} (1 - e^{\varphi(x)}) e^{-x} \ln x \, dx$$

en posant

$$\varphi : x \mapsto x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$$

φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$$

Ainsi φ est croissante sur \mathbb{R}_+^* et comme $\varphi(1) = 1$, φ est positive sur $[1, +\infty[$. On en déduit que

$$\forall x \in [1, +\infty[, (1 - e^{\varphi(x)}) e^{-x} \ln x \leq 0$$

Par conséquent, $I \leq 0$. Bien entendu, $x \mapsto (1 - e^{\varphi(x)}) e^{-x} \ln x$ est continue et non constamment nulle sur $[1, +\infty[$ donc $I < 0$.

Solution 14

1. On procède par intégration par parties : comme $x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ admet une limite finie (nulle) en $+\infty$, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} \, dx$ sont de même nature. Puisque $\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$, la seconde intégrale converge ($3/2 > 1$) et donc la première également.

2. **ATTENTION !** On pourrait naïvement penser que, puisque $\frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, cette intégrale converge également. Mais $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas de signe constant !

Remarquons que, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$,

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

On a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx$ converge et $3/2 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \, dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx$. Or

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}$$

On montre à nouveau à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} \, dx$ converge mais $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ diverge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx$ diverge. Finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \, dx$ diverge.

Solution 15

Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* quelle soit la valeur de α .

Etude en 0. $\frac{\sin t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ donc $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t^\alpha} \, dt$ converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ i.e. $\alpha < 2$.

Etude en $+\infty$. Supposons d'abord $\alpha > 0$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} = 0$, les intégrales $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \, dt$ et $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \, dt$ sont de même nature par

intégration par parties. Or $\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$ donc $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$ converge. Il en est donc de même de $\int_p^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$.

Supposons $\alpha \leq 0$. Posons $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$. Comme \sin est positive sur $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}}$ est croissante sur \mathbb{R}_+^*

$$F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t dt \geq (2n\pi)^{-\alpha} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t dt = 2(2n\pi)^{-\alpha}$$

Ainsi $F((2n+1)\pi) - F(2n\pi)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc F n'admet pas de limite en $+\infty$ i.e. l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$ diverge.

En conclusion, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$ converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

Solution 16

Soit $x \in [1, +\infty[$. Par intégration par parties

$$\int_1^x g(t) dt = \int_1^x \frac{f(t)^2}{t^2} dt = -\left[\frac{f(t)^2}{t}\right]_1^x + 2 \int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt = f(1)^2 - \frac{f(x)^2}{x} + 2 \int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt \leq 2 \int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_1^x g(t) dt \leq f(1)^2 + 2\sqrt{\int_1^x f(t)^2 dt} \sqrt{\int_1^x f'(t)^2 dt} \leq f(1)^2 + 2\sqrt{\int_1^x f(t)^2 dt} \sqrt{\int_1^{+\infty} f'(t)^2 dt}$$

Posons $A = f(1)^2$, $B = \sqrt{\int_1^{+\infty} f'(t)^2 dt}$ et $h(x) = \sqrt{\int_1^x f(t)^2 dt}$. Alors

$$h(x)^2 \leq A + 2Bh(x)$$

ou encore

$$(h(x) - B)^2 \leq A + B^2$$

puis

$$0 \leq h(x) \leq B + \sqrt{A + B^2}$$

et enfin

$$\int_1^x g(t) dt = h(x)^2 \leq (B + \sqrt{A + B^2})^2$$

L'application $x \mapsto \int_1^x g(t) dt$ est donc croissante (intégrande positive) et majorée : elle admet donc une limite en $+\infty$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ converge donc i.e. g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Solution 17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt$$

Or via le changement de variable $u = t - (k-1)\pi$,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \int_0^{\pi} |\sin(u + (k-1)\pi)| du = \int_0^{\pi} |(-1)^{k-1} \sin u| du = \int_0^{\pi} \sin u du = 2$$

Finalement,

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty$$

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est donc pas intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Solution 18

- Supposons qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ convergent. Par différence, $\int_a^{+\infty} \left(\frac{\lambda - f(t)}{t} - \frac{\lambda - f(t)}{t} \right) dt = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - \mu}{t} dt$ converge. Comme $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, ceci n'est possible que si $\lambda - \mu = 0$ i.e. $\lambda = \mu$.
- Supposons H_λ bornée sur \mathbb{R} . D'après le théorème fondamental de l'analyse, H_λ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto \lambda - f(t)$. Par ailleurs, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$. Par intégration par parties, on obtient sous réserve de convergence :

$$I(\lambda) = \left[\frac{H_\lambda(t)}{t} \right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

Comme H_λ est bornée,

$$\left[\frac{H_\lambda(t)}{t} \right]_a^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t} - \frac{H_\lambda(a)}{a} = 0$$

De plus, $H_\lambda(t) = \mathcal{O}(1/t^2)$ donc H_λ est intégrable sur $[a, +\infty[$. A fortiori, $\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$ converge.

On en déduit que $I(\lambda)$ converge et que

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

- Posons $G_\lambda(x) = H_\lambda(x + T) - H_\lambda(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a déjà montré que H_λ était de classe \mathcal{C}^1 donc G_λ également et

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'_\lambda(x) = H'_\lambda(x + T) - H'_\lambda(x) = (\lambda - f(x + T)) - (\lambda - f(x)) = f(x) - f(x + T) = 0$$

Ainsi G_λ est constante sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, H_\lambda(x + T) - H_\lambda(x) &= G_\lambda(0) = H_\lambda(T) - H_\lambda(0) \\ &= \int_a^T (\lambda - f(t)) dt - \int_a^0 (\lambda - f(t)) dt \\ &= \int_0^T (\lambda - f(t)) dt \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \lambda T - \int_0^T f(t) dt \end{aligned}$$

b. Par télescopage

$$H_\lambda(a + nT) = H_\lambda(a + nT) - H_\lambda(a) = \sum_{k=0}^{n-1} H_\lambda(a + (k+1)T) - H_\lambda(a + kT) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda T - \int_0^T f(t) dt = n \left(\lambda T - \int_0^T f(t) dt \right)$$

Ainsi la suite $(H_\lambda(a + nT))$ est bornée si et seulement si $\lambda T - \int_0^T f(t) dt$ i.e. si et seulement si $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$.

c. Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_{\lambda_0}(x + T) - H_{\lambda_0}(x) = 0$$

Ainsi H_{λ_0} est T-périodique. Comme H_{λ_0} est continue, elle est bornée sur le segment $[0, T]$. Par T-périodicité, elle est bornée sur \mathbb{R} .

d. Comme H_{λ_0} est bornée sur \mathbb{R} , $I(\lambda_0)$ converge d'après la question 2. D'après la question 1, λ_0 est l'unique valeur de λ pour laquelle $I(\lambda)$ converge.

e. Soit $x \in [a, +\infty[$. Alors

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \int_a^x \frac{\lambda_0}{t} dt = - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \lambda_0(\ln x - \ln a)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt = I(\lambda_0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda_0 \ln x = \pm\infty$ car $\lambda_0 \neq 0$. On en déduit que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln x$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et comme $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} = n$. Ainsi $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ se prolonge en une application continue sur le segment $[0, \pi/2]$. L'intégrale A_n est donc bien définie. Le même argument montre également que B_n est bien définie.

5. On utilise le fait que $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$:

$$\varphi(t) = \frac{\sin(t) - t}{t \sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-t^3/6}{t^2} = -\frac{t}{6}$$

6. D'après la question précédente, φ est prolongeable par continuité sur le segment $[0, \pi/2]$. Elle y est donc intégrable. Par inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |A_n - B_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| |\varphi(t)| dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(t)| dt$$

La suite $(A_n - B_n)$ est donc bornée.

7. Via le changement de variable linéaire $u = nt$,

$$B_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du = B_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du$$

Remarquons que $|\sin|$ est π -périodique donc, avec les notations de la question 3 et $a = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) dt = \frac{2}{\pi} \neq 0$$

On en déduit que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{|\sin(u)|}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x) = \frac{2}{\pi} \ln(x)$$

et donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{n\pi}{2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(n)}{\pi} = +\infty$,

$$B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Puisque $(A_n - B_n)$ est bornée et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = +\infty$ d'après l'équivalent précédente,

$$A_n = B_n + (A_n - B_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Solution 19

1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On raisonne par récurrence sur n . La propriété est vraie pour $n = 0$, car si f est de classe \mathcal{C}^1 ,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$$

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f soit de classe \mathcal{C}^{n+2} . A fortiori, f est de classe \mathcal{C}^{n+1} donc on peut écrire

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

En intégrant par parties,

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = - \left[\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

ce qui permet de conclure.

2. On peut déjà effectuer le changement de variable $t = u^2$ pour «simplifier» l'intégrale. L'intégrale de l'énoncé est alors de même nature que l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$. L'intégrale converge en 0 puisque $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ est prolongeable par continuité en 0. De plus, sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = - \left[\frac{\cos u}{u} \right]_{\pi}^{+\infty} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$$

Le crochet converge puisque, \cos étant bornée, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\cos u}{u} = 0$. La deuxième intégrale converge également puisque $\frac{\cos u}{u^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right)$. On peut alors en conclure que l'intégrale de Dirichlet converge et donc l'intégrale de l'énoncé également.

REMARQUE. Le changement de variable initiale n'était pas nécessaire. On aurait pu directement remarquer que $\frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, d'où l'intégrabilité en 0 et procéder à une intégration par parties en écrivant $\frac{\sin(\sqrt{t})}{t} = \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$.

3. Posons $f : t \mapsto \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} dt$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que

$$\int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) = \int_n^{n+1} (f(t) - f(n)) dt$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $t \in [n, n+1]$

$$|f(t) - f(n)| \leq |t - n| \max_{[n, t]} |f'| \leq \max_{[n, n+1]} |f'|$$

Or $f'(t) = \frac{\cos(\sqrt{t})}{2t^{3/2}} - \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2}$ donc, pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2} \leq \frac{3}{2t^{3/2}} \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

Ainsi, pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$|f(t) - f(n)| \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} |f(t) - f(n)| dt \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$ converge (absolument) par comparaison à une série de Riemann. Comme $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, la série $\sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} f(t) dt$ converge et donc la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ également.

Théorie

Solution 20

- Supposons $\ell \neq 0$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $\ell > 0$. Puisque f admet ℓ pour limite en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \geq \frac{\ell}{2}$ pour $x \geq A$. Mais alors, pour $x \geq A$:

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^A f(t) dt + \int_A^x f(t) dt \geq \int_0^A f(t) dt + \ell(x - A)$$

Par minoration $\int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui contredit l'énoncé.

- Supposons que f n'admette pas 0 pour limite en $+\infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \geq A$ tel que $|f(x)| \geq \varepsilon$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, on peut choisir $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y \geq A$:

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \frac{\alpha \varepsilon}{3}$$

Soit alors $x \geq A$ tel que $|f(x)| \geq \varepsilon$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(x) \geq \varepsilon$. Pour tout $t \in [x, x + \alpha]$, $|f(t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et en particulier $f(t) \geq f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit :

$$\int_x^{x+\alpha} f(t) dt \geq \frac{\alpha \varepsilon}{2}$$

On aboutit donc à une contradiction.

Solution 21

Supposons que f soit M -lipschitzienne avec $M \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geq A$ et pour tout $y > x$, $\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon^2}{2M}$. Soit donc (x, y) tel que $A \leq x < y$. Puisque f est M -lipschitzienne,

$$\forall t \in [x, y], -M(t - x) \leq f(t) - f(x) \leq M(t - x)$$

En intégrant sur $[x, y]$, on obtient

$$-M \frac{(y-x)^2}{2} \leq \int_x^y f(t) dt - (y-x)f(x) \leq M \frac{(y-x)^2}{2}$$

On en déduit que pour tout $y > x$,

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon^2}{2M(y-x)} + M \frac{y-x}{2}$$

Une étude rapide de la fonction $g : t \mapsto \frac{\varepsilon^2}{2Mt} + \frac{Mt}{2}$ sur \mathbb{R}_+^* montre que g admet un minimum en $\frac{\varepsilon}{M}$ valant ε . En posant $y = x + \frac{\varepsilon}{M}$ dans l'inégalité précédente, on obtient donc $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq A$.

Ceci prouve alors que $\lim_{+\infty} f = 0$.

Solution 22

1. Puisque $(ff')' = f'^2 + ff''$, le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x f'^2(t) dt + \int_0^x f(t)f''(t) dt$$

Par ailleurs, ff'' est intégrable sur \mathbb{R} puisque $|ff''| \leq \frac{1}{2}(f^2 + f''^2)$. En particulier, $x \mapsto \int_0^x f(t)f''(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$. Par ailleurs, puisque f'^2 étant positive $x \mapsto \int_0^x f'^2(t) dt$ admet une limite finie ou égale à $+\infty$ en $+\infty$. Supposons que cette limite soit $+\infty$. Alors la relation précédente montre que $\lim_{+\infty} ff' = +\infty$. Mais comme $(f^2)' = 2ff'$, on peut affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)^2 = f(0)^2 + 2 \int_0^x f(t)f'(t) dt$$

Ainsi on peut classiquement montrer que $\lim_{+\infty} f^2 = +\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f^2 sur \mathbb{R} . Finalement, $x \mapsto \int_0^x f'(t)^2 dt$ admet une limite finie en $+\infty$, ce qui signifie que f' est de carré intégrable sur \mathbb{R}_+ .

On montre de manière similaire que f' est de carré intégrable sur \mathbb{R}_- de telle sorte que f' est de carré intégrable sur \mathbb{R} .

2. On exploite à nouveau le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x f'^2(t) dt + \int_0^x f(t)f''(t) dt$$

Puisque f'^2 et ff' sont intégrables, on peut affirmer que ff' admet une limite finie en $+\infty$. Mais on rappelle alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x)^2 = f(0)^2 + 2 \int_0^x f(t)f'(t) dt$$

Ainsi ff' ne peut avoir une limite non nulle en $+\infty$ car alors $\lim_{+\infty} f^2 = +\infty$, ce qui contredirait l'intégrabilité de f^2 . Finalement, ff' admet une limite nulle en $+\infty$. On montre de la même manière que ff' admet une limite nulle en $-\infty$.

Par intégration par parties

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)^2 dt = [ff']_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t) dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)^2 dt \right)$$

ce qui permet d'obtenir l'inégalité voulue.

Solution 23

1. Il est clair que si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors la suite $n \mapsto \int_0^n f(t) dt$ converge.

Réciproquement, supposons que $n \mapsto \int_0^n f(t) dt$ converge. Notons ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \left| \int_0^n f(t) dt - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\lim_{+\infty} f = 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \geq A, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $B = \max(A + 1, N + 1)$. Soit $x \geq B$. Posons $M = \lfloor x \rfloor$. Alors

$$\left| \int_0^x f(t) dt - \ell \right| = \left| \int_0^M f(t) dt - \ell + \int_M^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_0^M f(t) dt - \ell \right| + \left| \int_M^x f(t) dt \right|$$

Comme $M \geq x - 1 \geq N$,

$$\left| \int_0^M f(t) dt - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par inégalité triangulaire et comme $A \leq M \leq x \leq M + 1$,

$$\left| \int_M^x f(t) dt \right| \leq \int_M^x |f(t)| dt \leq \int_M^{M+1} \frac{\varepsilon}{2} dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

On en déduit que

$$\forall x \geq B, \left| \int_0^x f(t) dt - \ell \right| \leq \varepsilon$$

Par conséquent $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t) dt$$

2. Une des implications reste évidemment vraie : si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors la suite $n \mapsto \int_0^n f(t) dt$ converge.

La réciproque est fautive en général. On peut par exemple considérer $f : t \mapsto \cos(\pi t)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^n f(t) dt = \frac{1}{\pi} [\sin(\pi t)]_0^n = 0$$

Mais

$$\int_0^{2n+1/2} f(t) dt = \frac{1}{\pi} [\sin(\pi t)]_0^{2n+1/2} = \frac{1}{\pi}$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Solution 24

1. Comme f est décroissante, elle admet une limite ℓ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.

Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f \sim \ell$ et la constante ℓ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ donc f non plus, ce qui contredit l'énoncé.

Si $\ell = -\infty$, alors $1 = o_{+\infty}(f)$. De plus, f est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc la constante 1 le serait également, ce qui n'est pas.

Finalement $\ell = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme f est décroissante sur \mathbb{R}_+ , $f(t) \leq f(x)$ pour tout $t \in [x, 2x]$. Alors

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = xf(x)$$

De même, $f(t) \geq f(x)$ pour tout $t \in [x/2, x]$ de sorte que

$$\int_{x/2}^x f(t) dt \geq \int_{x/2}^x f(x) dt = \frac{1}{2}xf(x)$$

Finalement

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq xf(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t) dt$$

Or f est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Notamment

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{2x}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^{+\infty} f(t) dt = 0$$

On en déduit que

$$\int_x^{2x} f(t) dt = \int_x^{+\infty} f(t) dt - \int_{2x}^{+\infty} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et que

$$\int_{x/2}^x f(t) dt = \int_{x/2}^{+\infty} f(t) dt - \int_x^{+\infty} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ i.e. $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution 25

1. Remarquons que g est une primitive de $-f$. Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = [tg(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} tf(t) dt$$

Or $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ converge par hypothèse et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq xg(x) = x \int_0^{+\infty} f(t) dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t) dt$$

Or $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ converge donc $\int_x^{+\infty} tf(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ puis $xg(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc le crochet dans l'intégration par parties converge (et vaut 0). On conclut que $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge et que cette intégrale vaut $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$.

2. L'application $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est continue. De plus, $F(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que $F(m) = \frac{1}{2}$.

Supposons qu'il existe $m' \in \mathbb{R}_+$ tel que $m' \neq m$ et $F(m') = \frac{1}{2}$. Alors $\int_m^{m'} f(t) dt = 0$. Or f est continue et positive donc f est nulle sur $[m, m']$. Comme f est décroissante et positive, f est nulle sur $[m, +\infty]$. Alors $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^m f(t) dt = \frac{1}{2}$, ce qui contredit l'énoncé.

3. Remarquons que g est de classe \mathcal{C}^1 et que $g' = -f$ est croissante. On en déduit que g est convexe sur \mathbb{R}_+ . Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) \geq g(m) + g'(m)(t - m) = \frac{1}{2} + \alpha(t - m)$$

En posant $\alpha = g'(m)$. Par positivité de g ,

$$\int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt \geq \int_0^{2m} g(t) dt$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} t f(t) dt \geq \int_0^{2m} \left(\frac{1}{2} + \alpha(t - m) \right) dt = m$$

Calculs

Solution 26

Première méthode :

L'intégrale converge puisque $t \mapsto e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}}$ est prolongeable par continuité en 0 et que $e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-a^2 t^2}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Posons $u = at - \frac{b}{t}$. Ceci définit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} . On a alors $t = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4ab}}{2a}$ (on retient uniquement la solution positive de l'équation $u = at - \frac{b}{t}$). Remarquons que $u^2 = a^2 t^2 + \frac{b^2}{t^2} - 2ab$. On a alors

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - 2ab} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4ab}} \right) \frac{du}{2a} \\ &= \frac{e^{-2ab}}{2a} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2 + 4ab}} du \right) \end{aligned}$$

Le passage à dernière ligne est valide puisque les deux dernières intégrales sont convergentes. De plus, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi}$ et

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2 + 4ab}} du = 0$ car la fonction $u \mapsto \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2 + 4ab}}$ est impaire. Par conséquent :

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt = \frac{e^{-2ab} \sqrt{2\pi}}{2a}$$

Deuxième méthode :

Posons $f(b, t) = e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}}$ et $I(b) = \int_0^{+\infty} f(b, t) dt$. La fonction $b \mapsto f(b, t)$ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\frac{\partial f}{\partial b}(b, t) = -\frac{2b}{t^2} f(b, t)$$

De plus $b \mapsto \frac{\partial f}{\partial b}(b, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* pour tout $t \in]0, +\infty[$. Enfin, pour $b \in [b_1, b_2]$ avec $0 < b_1 < b_2$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial b}(b, t) \right| \leq \frac{2b_2}{t^2} e^{-a^2 t^2 - \frac{b_1^2}{t^2}}$$

cette dernière expression étant intégrable sur $]0, +\infty[$. Le théorème de dérivation sous l'intégrale nous donne donc $I'(b) = -\int_0^{+\infty} \frac{2b}{t^2} f(b, t) dt$

pour tout $b > 0$. Posons alors $u = \frac{b}{at}$. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2b}{t^2} f(b, t) dt = 2a \int_0^{+\infty} e^{-\frac{b^2}{u^2} - a^2 u^2} du = 2aI(b)$$

La fonction $b \mapsto I(b)$ est donc solution de l'équation différentielle $y' = -2ay$ sur $]0; +\infty[$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $I(b) = Ce^{-2ab}$ pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$. Enfin $b \mapsto f(b, t)$ est continue sur \mathbb{R} pour tout $t \in]0, +\infty[$ et $|f(b, t)| \leq e^{-a^2 t^2}$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. Le théorème de continuité sous l'intégrale nous dit donc que $b \mapsto I(b)$ est continue sur \mathbb{R} et notamment en 0. Par continuité, $I(b) = Ce^{-2ab}$ pour tout $b \geq 0$. En particulier $C = I(0)$. Or $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}$ en effectuant le changement de variable $u = at$. On obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt = \frac{e^{-2ab} \sqrt{2\pi}}{2a}$$

Solution 27

1. Posons $f_{n,\alpha}(x) = \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$. $f_{n,\alpha}$ est continue sur $[0, 1[$ car le dénominateur ne s'y annule pas. De plus, $f_{n,\alpha}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Or $x \mapsto (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1. On en déduit que $f_{n,\alpha}$ est intégrable sur $[0, 1[$.

2. Tout d'abord

$$I_0(0) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2 \left[\sqrt{1-x} \right]_0^1 = 2$$

Ensuite,

$$t^2 = \frac{1+\alpha x}{1-x} = \frac{\alpha+1}{1-x} - \alpha$$

On en déduit que

$$2t dt = \frac{\alpha+1}{(1-x)^2} dx$$

Or

$$t(1-x) = \sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$$

d'où

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}} = \frac{2(1-x)}{\alpha+1} dt = \frac{2 dt}{t^2 + \alpha}$$

Ainsi

$$I_0(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{2 dt}{t^2 + \alpha}$$

- Si $\alpha = 0$, on a déjà vu que $I_0(0) = 0$.
- Si $\alpha > 0$, alors

$$I_0(\alpha) = \left[\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{t}{\sqrt{\alpha}} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \sqrt{\alpha}$$

- Si $\alpha < 0$, alors on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ et

$$I_0(\alpha) = \int_0^1 \frac{2 du}{1 + \alpha u^2} = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \operatorname{argth} \sqrt{-\alpha}$$

On voit facilement qu'avec les expressions obtenues, les limites à droite et à gauche de I_0 en 0 sont égales à 2. Or $I_0(0) = 2$ donc I_0 est continue en 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u(x) = \sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$ et $g(x) = x^n u(x)$. On a

$$\begin{aligned} g'(x) &= nx^{n-1}u(x) + \frac{1}{2}x^n \frac{\alpha-1-2\alpha x}{u(x)} \\ &= n \frac{x^{n-1}(1-x)(1+\alpha x)}{u(x)} + \frac{\alpha-1}{2} \frac{x^n}{u(x)} - \alpha \frac{x^{n+1}}{u(x)} \\ &= n \frac{x^{n-1}}{u(x)} + \left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha-1) \frac{x^n}{u(x)} - (n+1)\alpha \frac{x^{n+1}}{u(x)} \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière égalité sur $[0, 1]$, on obtient :

$$nI_{n-1}(\alpha) + \left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - 1)I_n(\alpha) - (n + 1)\alpha I_{n+1}(\alpha) = g(1) - g(0) = 0$$

- Pour $\alpha = 0$, la relation devient :

$$nI_{n-1}(0) - \left(n + \frac{1}{2}\right)I_n(0) = 0$$

Par récurrence, on a donc

$$I_n(0) = \frac{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} I_0$$

On a $I_0(0) = 2$ et on multiplie au numérateur et au dénominateur par $(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2$ de sorte que :

$$I_n(0) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n-1}(n!)^2} = \frac{2n+1}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}$$

- Pour $\alpha = 1$, la relation devient :

$$nI_{n-1}(1) - (n+1)I_{n+1}(1) = 0$$

Par récurrence, on obtient :

$$I_{2p}(1) = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2} I_0(1) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} I_0(1) = \frac{\pi}{2^{2p+1}} \binom{2p}{p}$$

car $I_0(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. On obtient également par récurrence :

$$I_{2p+1}(1) = \frac{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \cdots \times 5 \times 3} I_1(1) = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p}}{(2p+1) \binom{2p}{p}}$$

car $I_1(1) = 1$.

Solution 28

Notons f la fonction intégrée. Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -2 \ln(t)$$

donc

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1/\sqrt{t})$$

Ainsi f est intégrable sur $]0, 1]$. De plus,

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

donc f est également intégrable sur $[1, +\infty[$. L'intégrale définissant I converge donc.

On écrit alors

$$I = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

et on intègre par parties. D'après les équivalents précédents,

$$tf(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -2t \ln(t)$$

et

$$tf(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} tf(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} tf(t) = 0$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} I &= [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t) dt \\ &= - \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{-2/t^3}{1+1/t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2 [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \pi \end{aligned}$$

Solution 29

Posons

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$$

pour $x > 0$. En effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{x}$, on trouve

$$J(x) = \frac{\ln x}{x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du$$

D'une part

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{+\infty} \arctan - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

D'autre part en effectuant le changement de variable $v = \frac{1}{u}$ dans $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du$, on obtient $I = -I$ d'où $I = 0$. Ainsi pour tout $x > 0$,

$$J(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

On a

$$J'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

d'où $J'(x) > 0$ pour $x < e$ et $J'(x) < 0$ pour $x > e$. Ainsi J admet un maximum en e et celui-ci vaut $J(e) = \frac{\pi}{2e}$.

Solution 30

1. Posons $f_a(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. Tout d'abord, f_a est clairement continue sur \mathbb{R}_+^* .

Lorsque $a > 0$, $f_a(t) \sim \frac{1}{t^{a+2}}$ et $f_a(t) \sim \frac{1}{t^{a+2}}$ donc f_a est intégrable sur \mathbb{R}_+^* ($a+2 > 1$).

Lorsque $a = 0$, $f_a(t) \sim \frac{1}{2}$ et $f_a(t) \sim \frac{1}{2t^2}$ donc f_a est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Lorsque $a < 0$, $f_a(t) \sim \frac{1}{t^a}$ et $f_a(t) \sim \frac{1}{t^2}$ donc f_a est intégrable sur \mathbb{R}_+^* ($a < 1$).

Finalement, I est définie sur \mathbb{R} .

2. Par la relation de Chasles,

$$J(a) = \int_0^1 f_a(t) dt + \int_1^{+\infty} f_a(t) dt$$

Par le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$,

$$\int_1^{+\infty} f_a(t) dt = \int_0^1 f_{-a}(t) dt$$

On en déduit la formule demandée.

3.

$$\begin{aligned}
I(a) &= J(a) + J(-a) \\
&= \int_0^1 (f_a(t) + f_{-a}(t)) dt \\
&= \int_0^1 \frac{(1+t^{-a}) + (1+t^a)}{(1+t^2)(1+t^a)(1+t^{-a})} dt \\
&= \int_0^1 \frac{2+t^a+t^{-a}}{(1+t^2)(2+t^a+t^{-a})} dt \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Solution 31

1. Posons $f(x, t) = \frac{\ln t}{x^2 + t^2}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Si $x \neq 0$, $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$ et $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ par croissance comparées donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .
 Enfin, $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{\ln t}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto f(0, t)$ n'est pas intégrable au voisinage de 0^+ .
 Le domaine de définition de F est donc \mathbb{R}^* .

2. Effectuons le changement de variable $u = 1/t$:

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = - \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2} \cdot \frac{du}{u^2} = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1} du = -F(1)$$

Ainsi $F(1) = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Effectuons le changement de variable $t = ux$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2 + (ux)^2} \cdot x du \\
&= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) + \ln(u)}{1+u^2} du \\
&= \frac{1}{x} \left(\ln(x) \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du \right) \\
&= \frac{1}{x} \left(\frac{\pi \ln x}{2} + F(1) \right) \\
&= \frac{\pi \ln x}{2x}
\end{aligned}$$

Comme F est clairement paire, $F(x) = \frac{\pi \ln |x|}{2|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Solution 32

1. Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, \pi]$ puisque $\sin t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ donc l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
 Ensuite, une primitive de \sin sur $[\pi, +\infty[$ est $-\cos$ et la dérivée de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$. De plus, le crochet $\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_\pi^{+\infty}$ converge car \cos est bornée. Par intégrations par parties, $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont de même nature. Comme $\frac{\cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$,

$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge donc $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge également.

Finalement, $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

REMARQUE. On peut régler les «problèmes» en 0 et en $+\infty$ par une seule intégration par parties en choisissant $t \mapsto 1 - \cos t$ comme primitive de \sin . Le crochet $\left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty}$ converge car $1 - \cos(t) = o(t)$.

2. Puisque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} = 2n+1$$

les fonctions $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ sont prolongeables en des fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. u_n et v_n sont donc bien définies.

3. Remarquons que

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t))}{\sin(t)} dt$$

Or $\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ donc

$$u_{n+1} - u_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+2)t) dt = \frac{1}{n+1} [\sin((2n+2)t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

La suite (u_n) est donc constante égale à $u_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Il s'agit du lemme de Riemann-Lebesgue (hors programme). Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Comme φ est de classe \mathcal{C}^1 , on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b \varphi(t) \sin(\lambda t) dt = -\frac{1}{\lambda} [\varphi(t) \cos(\lambda t)]_a^b + \frac{1}{\lambda} \int_a^b \varphi'(t) \cos(\lambda t) dt = \frac{\varphi(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} - \frac{\varphi(b) \cos(\lambda b)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b \varphi'(t) \cos(\lambda t) dt$$

Comme \cos est bornée,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(b) \cos(\lambda b)}{\lambda} = 0$$

Enfin, par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_a^b \varphi'(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi'(t)| |\cos(\lambda t)| dt \leq \int_a^b |\varphi'(t)| dt$$

donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b \varphi'(t) \cos(\lambda t) dt = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b h(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

5. h est bien continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus,

$$h(t) = \frac{\sin t - t}{t \sin t}$$

et $t \sin(t) \sim t^2$ et $\sin t - t = o(t^2)$ donc $h(t) = o(1)$ i.e. $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$.

Par ailleurs, h est de classe \mathcal{C}^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$h'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{t^2 \cos t - \sin^2(t)}{t^2 \sin^2(t)}$$

Or $t^2 \sin^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^4$,

$$\sin^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2 \left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)^2 = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)$$

et

$$t^2 \cos^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4)$$

donc $t^2 \cos t - \sin^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}t^4$. Par conséquent, $\lim_{t \rightarrow 0} h'(t) = -\frac{1}{6}$.

D'après le théorème de prolongement \mathcal{C}^1 , h se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que l'on notera encore h dans la suite.

6. Remarquons que

$$u_n - v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin((2n+1)t) dt$$

Comme h est \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$ d'après le lemme de Riemman-Lebesgue.

Or (u_n) est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$.

7. Par le changement de variable $u = (2n+1)t$,

$$v_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt$$

Comme l'intégrale I converge

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$$

Solution 33

1. Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{f(at)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$$

En effectuant le changement de variable $u = at$ dans la première intégrale

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_a^{ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$$

Enfin, d'après la relation de Chasles,

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$$

2. Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme f est continue, elle admet un minimum m_x et un maximum M_x sur le segment $[x, ax]$. Alors

$$m_x \int_x^{ax} \frac{dt}{t} \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt \leq M_x \int_x^{ax} \frac{dt}{t}$$

ou encore

$$m_x \ln(a) \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt \leq M_x \ln(a)$$

Si $a > 1$,

$$m_x \leq \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt \leq M_x$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c_x \in [x, a_x]$ tel que

$$f(c_x) = \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt$$

ou encore

$$\int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt = f(c_x) \ln(a)$$

Ceci est encore valable si $a = 1$ (prendre $c_x = x$ par exemple). Comme $c_x \geq x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(c_x) = \ell$ de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt = \ell \ln(a)$$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt$ converge et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \ell \ln(a) - \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$$

Solution 34

1. Tout d'abord, $t \mapsto \ln(\sin t)$ est bien continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Par ailleurs,

$$\sin t = t + o(t)_{t \rightarrow 0^+}$$

donc

$$\ln(\sin t) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + o(1)_{t \rightarrow 0^+}$$

A fortiori, comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$

$$\ln(\sin t) \sim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t)$$

Par croissances comparées, on a donc

$$\ln(\sin t) = o(1/\sqrt{t})_{t \rightarrow +\infty}$$

Par conséquent, $t \mapsto \ln(\sin t)$ est intégrable sur $]0, 1]$. L'intégrale définissant I converge.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = \pi/2 - t$.

3. Via le changement de variable $u = \pi - t$,

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u) du$$

Via la relation de Chasles

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t) dt = \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt$$

4.

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)/2) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt - \frac{\pi \ln 2}{2} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du - \frac{\pi \ln 2}{2} \quad \text{via le changement de variable } u = 2t \\
&= I - \frac{\pi \ln 2}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

Solution 35

Tout d'abord, l'intégrande est continu sur \mathbb{R}_+^* . Par croissances comparées,

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = o(1/t^2)$$

et par DL usuel

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = b - a + o(1)$$

On en déduit que $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Ensuite, pour $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} dt$$

Les deux intégrales convergent encore par croissances comparées. Via les changements de variables $u = at$ et $u = bt$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Comme $\frac{e^{-u}}{u} = \frac{1}{u} + \varphi(u)$ avec $\varphi(u) = \mathcal{O}(1)$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{dt}{t} + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u) du = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u) du$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u) du = 0$$

Finalement,

$$I = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Solution 36

- Notons, pour tout x positif

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3}$$

La fonction f est continue sur \mathbb{R}_+ et

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

On déduit donc du théorème de comparaison aux intégrales de Riemann que I converge.

- Après une décomposition en éléments simples élémentaires, on aboutit à :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right)$$

d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-x+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \right) \end{aligned}$$

ainsi, pour tout u positif

$$I(u) = \frac{1}{3} \left(\ln(u+1) - \ln(\sqrt{u^2-u+1}) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan(2(u-1/2)/\sqrt{3}) + \arctan(1/\sqrt{3}) \right)$$

puis

$$I = \lim_{u \rightarrow +\infty} I(u) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Solution 37

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(t)e^{-at}| \leq e^{-at} \quad \text{et} \quad |\sin(t)e^{-at}| \leq e^{-at}$$

et $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ (par exemple, $e^{-at} = o(1/t^2)$). Ainsi $t \mapsto \cos(t)e^{-at}$ et $t \mapsto \sin(t)e^{-at}$ sont intégrables sur \mathbb{R}_+ .

Remarquons que

$$I + iJ = \int_0^{+\infty} e^{it} e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} e^{(i-a)t} dt = \left[\frac{e^{(i-a)t}}{i-a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-i} = \frac{a+i}{a^2+1}$$

En effet,

$$\left| \frac{e^{(i-a)t}}{i-a} \right| = \frac{e^{-at}}{|i-a|}$$

donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{(i-a)t}}{i-a} = 0$.

Comme I et J sont réelles,

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \left(\frac{a+i}{a^2+1} \right) = \frac{a}{a^2+1} \\ J &= \operatorname{Im} \left(\frac{a+i}{a^2+1} \right) = \frac{1}{a^2+1} \end{aligned}$$

Solution 38

1.

$$I = \frac{1}{2} [\arctan(t/2)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

2. Par décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{4-t^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t} \right)$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{4-t^2}$ est donc $t \mapsto \frac{1}{4} (-\ln(2-t) + \ln(2+t))$. Puisque $\lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{1}{4} (-\ln(2-t) + \ln(2+t)) = +\infty$, l'intégrale J diverge.

3. Une primitive de \sin est $-\cos$, qui n'admet pas de limite en $+\infty$ donc l'intégrale K diverge.

4.

$$L = [t \ln t - t]_0^1 = -1$$

5.

$$M = -\frac{1}{a} [e^{-at}]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$$

6.

$$N = \frac{1}{3} [\arcsin(3t)]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

7. Par une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{t^2 - 3t + 2} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}$$

Ainsi

$$O = \left[\ln \left(\frac{t-2}{t-1} \right) \right]_3^{+\infty} = -\ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln 2$$

8. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur $[2, +\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln t)$, qui admet une limite infinie en $+\infty$. L'intégrale P diverge.

Solution 39

1. L'application $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, elle est prolongeable par continuité en 0 puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On peut d'ores et déjà affirmer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est intégrable sur $]0, \pi]$. A fortiori, $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

Par ailleurs, sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = - \left[\frac{\cos x}{x} \right]_{x=\pi}^{x \rightarrow +\infty} - \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ et $\frac{\cos x}{x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ de sorte que $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge. Par conséquent $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge également.

On en conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

2. a. On sait que $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} = \frac{\alpha^2}{2}$. La fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ est donc prolongeable par continuité en 0.

b. Remarquons que \cos est borné de même que $t \mapsto e^{-itx}$ puisqu'elle est à valeurs dans \mathbb{U} . Ainsi $\frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
On en déduit que $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

3. a. Tout d'abord,

$$\bar{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{itx} dt$$

En effectuant le changement de variable linéaire $t \mapsto -t$, on obtient alors

$$\bar{I} = - \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1 - \cos(-\alpha t)}{(-t)^2} e^{-itx} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt = I$$

Ainsi $I \in \mathbb{R}$.

b. Par intégration par parties,

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = - \left[\frac{\cos(Bx)}{x} \right]_{x=A}^{x \rightarrow +\infty} - B \int_A^{+\infty} \frac{\sin(Bx)}{x} dx$$

Cette intégration par partie est légitime car la première intégrale converge d'après le résultat admis dans l'énoncé et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(Bx)}{x} = 0$. Ainsi

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{\cos(AB)}{A} - B \int_A^{+\infty} \frac{\sin(Bx)}{x} dx$$

On effectue alors le changement de variable linéaire $t = Bx$ dans la seconde intégrale pour obtenir

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{\cos(AB)}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

c. D'après la question précédente,

$$\int_A^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2} - \frac{\cos(AB)}{A} + B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{1 - \cos(AB)}{A} + B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

En utilisant à nouveau l'équivalent $1 - \cos u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ et comme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge, on obtient en faisant tendre A vers 0 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = B \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{B\pi}{2}$$

De plus, si $B = 0$, il est clair que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = 0$ et si $B < 0$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = -\frac{B\pi}{2}$ par parité de \cos . On peut simplifier en affirmant que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{|B|\pi}{2}$ de manière générale.

d. Par relation de Chasles :

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt$$

En effectuant le changement de variable $t \mapsto -t$ dans la première intégrale, on obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{itx} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \cos(tx) dt$$

Avec des relations de trigonométrie élémentaire

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{2 \cos(tx) - \cos((x + \alpha)t) - \cos((x - \alpha)t)}{t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos((x + \alpha)t)}{t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos((x - \alpha)t)}{t^2} dt - 2 \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dt \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$I = \frac{|x + \alpha|\pi}{2} + \frac{|x - \alpha|\pi}{2} - \pi|x| = \pi \cdot \frac{|x + \alpha| + |x - \alpha| - 2|x|}{2}$$

Comportements asymptotiques

Solution 40

Notons F l'unique primitive de f sur \mathbb{R}_+ s'annulant en 0. On a donc $F' + F = \varphi$. Par variation de la constante, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = e^{-x} \int_0^x e^t \varphi(t) dt + \lambda e^{-x}$$

Notons ℓ la limite de φ en $+\infty$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x \varphi(t)e^t dt = \int_0^x \ell e^t dt + \int_0^x (\varphi(t) - \ell)e^t dt = \ell(e^x - 1) + \int_0^x (\varphi(t) - \ell)e^t dt$$

Puisque $(\varphi(t) - \ell)e^t = o(e^t)$, que $t \mapsto e^t$ est positive et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^t dt$ diverge, on a par intégration des relations de comparaison

$$\int_0^x (\varphi(t) - \ell)e^t dt = o\left(\int_0^x e^t dt\right)_{x \rightarrow +\infty}$$

ou encore

$$\int_0^x (\varphi(t) - \ell)e^t dt = o(e^x)_{x \rightarrow +\infty}$$

Ainsi

$$\int_0^x \varphi(t)e^t dt = \ell e^x + o(e^x)_{x \rightarrow +\infty}$$

puis

$$F(x) = \ell + o(1)_{x \rightarrow +\infty}$$

Ainsi F admet également pour limite ℓ en $+\infty$. Puisque $f = \varphi - F$, f admet pour limite 0 en $+\infty$.

Solution 41

1. Posons $g = f' + af$ de sorte que f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$. Par variation de la constante, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{at}g(t) dt + \lambda e^{-ax}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $g = o(1)$,

$$\int_0^x e^{at}g(t) dt = o\left(\int_0^x |e^{at}| dt\right)_{x \rightarrow +\infty}$$

Or pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x |e^{at}| dt = \int_0^x e^{\operatorname{Re}(a)t} dt = \frac{1}{\operatorname{Re}(a)} (e^{\operatorname{Re}(a)x} - 1)$$

On en déduit que

$$\int_0^x e^{at}g(t) dt = o(e^{\operatorname{Re}(a)x})_{x \rightarrow +\infty}$$

puis finalement que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} \int_0^x e^{at}g(t) dt = 0$$

Par ailleurs, il est clair que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} = 0$ puisque $\operatorname{Re}(a) < 0$. Finalement, on a bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$.

REMARQUE. On peut aussi introduire la fonction $\varphi : x \mapsto e^{ax}f(x)$. On a alors $\varphi'(x) = o(e^{ax})$. Ainsi

$$\varphi(x) - \varphi(0) = o\left(\int_0^x |e^{at}| dt\right)_{x \rightarrow +\infty}$$

On en déduit sans peine que $\varphi(x) = e^{\operatorname{Re}(a)x}$ i.e. $\varphi(x) = e^{ax}$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$.

2. Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $g = f' - jf$. Alors $g' - \bar{j}g = f'' + f' + f$ admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $\operatorname{Re}(\bar{j}) < 0$, la première question montre que g admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $g = f' - jf$ et $\operatorname{Re}(j) < 0$, la première question montre à nouveau que f admet une limite nulle en $+\infty$.

3. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ dont les racines sont toutes de parties réelles strictement négatives et D l'opérateur de dérivation. Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^n (avec $n = \deg P$) telle que $\lim_{+\infty} P(D)(f) = 0$, alors $\lim_{+\infty} f = 0$. Il suffit de raisonner par récurrence sur le degré n de P .

Si $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$ dont les racines sont de parties réelles strictement négatives et f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur \mathbb{R}_+ telle que $\lim_{+\infty} P(D)(f) = 0$. Soit a une racine de P . On peut donc écrire $P = (X - a)Q$ avec $\deg Q = n$. Posons $g = Q(a)(f)$. Alors $g' - ag = P(D)(f)$ admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $\operatorname{Re}(a) < 0$, la première question montre que $\lim_{+\infty} g = 0$. Or $g = Q(D)(f)$ et $\deg Q = n$ donc, par hypothèse de récurrence, $\lim_{+\infty} f = 0$. Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 42

1. D'après la théorème fondamental de l'analyse, $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est une primitive de f sur \mathbb{R}_+ . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = g(x)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = F'(0) = f(0).$$

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |F(x)| = \left| \int_0^x 1 \cdot f(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^x 1^2 dt} \sqrt{\int_0^x f(t)^2 dt} \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$$

$$\text{En posant } C = \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |g(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties,

$$\int_0^x g(t)^2 dt = \int_0^x \frac{1}{t^2} F(t)^2 dt = - \left[\frac{F(t)^2}{t} \right]_0^x + 2 \int_0^x \frac{F(t)F'(t)}{t} dt$$

L'intégration par parties est légitime car, par continuité de F en 0,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} g(t)F(t) = g(0)F(0) = 0$$

Ainsi

$$\int_0^x g(t)^2 dt = - \frac{F(x)^2}{x} + 2 \int_0^x g(t)f(t) dt \leq 2 \int_0^x g(t)f(t) dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^x g(t)^2 dt \leq 2 \sqrt{\int_0^x g(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^x f(t)^2 dt} \leq 2C \sqrt{\int_0^x g(t)^2 dt}$$

puis

$$\int_0^x g(t)^2 dt \leq 4C^2$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x g(t)^2 dt$ est croissante (intégrande positive) et majorée donc admet une limite en $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$ converge donc i.e. g est de carré intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Solution 43

En remarquant que $e^{t^2} \geq 1$, il est clair que $\lim_{+\infty} F = +\infty$. Par commodité, on posera dans la suite $G = F - F(1)$. Par intégration par parties,

$$G(x) = \int_1^x e^{t^2} dt = \int_1^x \frac{2te^{t^2}}{2t} dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt$$

Il est clair que $\frac{e}{2} = o(G(x))$. De plus, $\frac{e^{t^2}}{2t^2} = o(e^{t^2})$. Or $t \mapsto e^{t^2}$ est positive et $\int_1^{+\infty} e^{t^2} dt$ diverge donc

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt = o(G(x))$$

Ainsi

$$G(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} + o(G(x))$$

ou encore

$$G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$$

Comme $\lim_{+\infty} F = +\infty$, $G = F - F(1) \underset{+\infty}{\sim} F$. Ainsi $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Solution 44

1. Il suffit par exemple de remarquer que $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties

$$g(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{-2te^{-t^2}}{-2t} dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$$

L'intégration par parties est légitimée car $t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2t}$ admet une limite (nulle) en $+\infty$. De plus, $\frac{e^{-t^2}}{2t^2} = o(e^{-t^2})$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = o(g(x))$$

On en déduit donc que $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

Solution 45

Remarquons que f est solution de l'équation différentielle $y' + y = g$ avec $g = f + f'$. Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On applique alors la méthode de variation de la constante. La fonction $x \mapsto \varphi(x)e^{-x}$ où φ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} est solution de $y' + y = g$ si et seulement si $\varphi'(x)e^{-x} = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $\varphi(x) = \int_0^x e^t g(t) dt$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de $y' + y = g$ est donc la fonction $x \mapsto e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$. Les solutions de $y' + y = g$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$$

Puisque f est solution de cette équation différentielle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$$

Puisque $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1)$, $e^t g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^t)$. Or $t \mapsto e^t$ est positive et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^t dt$ diverge donc

$$\int_0^x e^t g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t dt\right)$$

ou encore

$$\int_0^x e^t g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$$

Ainsi

$$e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

On en déduit donc que $\lim_{+\infty} f = 0$.

REMARQUE. On peut aussi raisonner de la manière suivante. Posons $\varphi(x) = e^x f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. φ est de classe \mathcal{C}^1 et $\varphi'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\varphi'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$. Or $x \mapsto e^x$ est positive et $\int_0^{+\infty} e^t dt$ diverge donc

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^x \varphi'(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t dt\right)$$

On en déduit sans peine que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$ i.e. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$.

Solution 46

1. Soit $x \in I$. $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. L'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge donc et f est définie sur I .

2. On peut remarquer que

$$\forall x \in I, f(x) = f(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

donc f est dérivable sur I d'après le théorème fondamental de l'analyse et

$$\forall x \in I, f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

3. On sait que $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge donc

$$f(x) - f(1) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$$

Par intégration par parties

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\left[\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

Comme $\frac{e^{-t}}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right)$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$$

4. Tout d'abord, f est continue sur I . De plus, $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Enfin, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées. Ainsi f est intégrable sur I et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t) dt$$

Cette intégration par parties est légitime car

$$tf(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -t \ln t \quad \text{et} \quad tf(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$$

de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} tf(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} tf(t) = 0$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} tf'(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Solution 47

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2} dt$ converge puisque $\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Alors, en posant

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2} dt$$

on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$. Par conséquent,

$$F(x) = G(x) - G(7x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Remarquons que

$$\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{t} + \mathcal{O}(1)$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt$ converge. Notons C sa valeur. Alors en posant pour $x > 0$

$$H(x) = \int_x^1 \left(\frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt$$

on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = C$. Par conséquent,

$$F(x) = H(7x) - H(x) + \int_x^{7x} \frac{dt}{t} = H(7x) - H(x) + \ln(7) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} C - C + \ln(7) = \ln(7)$$

Solution 48

1. Remarquons que $\frac{\arctan t}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\pi dt}{2t} = \frac{\pi \ln x}{2}$$

2. Remarquons que $\frac{\ln t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_x^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}$$

3. Remarquons que $\frac{e^t}{t^3} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^3}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^3}$ diverge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_x^1 \frac{e^t}{t^3} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2x^2}$$

4. Remarquons que $\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$ converge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_0^x \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{x}$$

Solution 49

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}_+^*$ donc $t \mapsto \frac{\operatorname{ch} t}{t}$ est continue sur $[x, 2x]$. Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $[2x, x] \subset \mathbb{R}_-^*$ donc $t \mapsto \frac{\operatorname{ch} t}{t}$ est continue sur $[2x, x]$. Dans tous les cas, $f(x)$ est bien défini.
- Tout d'abord, φ est évidemment continue sur \mathbb{R}^* . On sait par ailleurs que $\operatorname{ch}(t) = 1 + o(t)$ donc $\varphi(t) = o(1)$. Notamment, $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi = 0$ donc φ est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, on notera encore φ ce prolongement.
- Plus précisément, $\operatorname{ch}(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$. Par conséquent, $\varphi(t) = \frac{1}{2}t + o(t)$. Comme φ est continue sur \mathbb{R} , elle y admet une unique primitive Φ s'annulant en 0. De plus, $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} \frac{dt}{t} + \int_x^{2x} \varphi(t) dt \\ &= \ln(2) + \Phi(2x) - \Phi(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln 2 + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par une intégration par parties,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \left[\frac{e^t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$$

On sait que

- $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est positive sur $[1, +\infty[$;
- $\frac{e^t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^t}{t}\right)$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt$ diverge (par exemple $e^t/t \geq 1/t \geq 0$).

On en déduit par intégration d'une relation de comparaison que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t} dt\right)$$

puis que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x} - e \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}$$

5. Remarquons que

$$f(x) = \int_1^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt - \int_1^x \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt$$

On sait que

- $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est positive sur $[1, +\infty[$;
- $\frac{\operatorname{ch} t}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{2t}$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt$ diverge (par exemple $e^t/t \geq 1/t \geq 0$).

On en déduit que

$$\int_1^x \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2x}$$

Par conséquent, on a également

$$\int_1^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{4x}$$

Mais $\frac{e^x}{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{2x}}{4x}\right)$ donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{4x}$$

Solution 50

1. La fonction $f : x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$ est strictement décroissante sur $]0, 1]$ (elle est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto -\frac{e^x}{x}$). Comme $\frac{e^t}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$, $\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$ diverge. Puisque $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est positive, $\lim_{0^+} f = +\infty$. Par ailleurs, $f(1) = 0$. Enfin, f est continue sur $]0, 1]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0, 1]$ tel que $f(u_n) = n$.
2. D'après la question précédente, f induit une bijection strictement décroissante de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est donc également strictement décroissante. Comme $u_n = f^{-1}(n)$, (u_n) est strictement décroissante. de plus, $\lim_{0^+} f = +\infty$ donc $\lim_{+\infty} f^{-1} = 0$. Par conséquent, (u_n) converge vers 0.

3. Remarquons que

$$v_n = \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt - \int_{u_n}^1 \frac{dt}{t} = \int_{u_n}^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ converge. Comme (u_n) converge vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$$

4. Posons $I = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$. Ainsi $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -n + I + o(1)$ puis $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^I}{n}$. On en déduit que $\sum u_n$ diverge.

Suites d'intégrales

Solution 51

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto f(t)e^{-t/n}$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc u_n est défini. Cette application est également continue sur \mathbb{R}_+ et $f(t)e^{-t/n} = o(1/t^2)$ de sorte que v_n est défini.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque l'intégrale définissant v_n converge, on peut écrire que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)e^{-t/n} dt$$

Mais en effectuant un changement de variable dans chaque intégrale, on obtient

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi f(t + k\pi)e^{-(t+k\pi)/n} dt$$

Par π -périodicité de f , on en déduit que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} \int_0^\pi f(t)e^{-t/n} dt = u_n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = u_n a_n$$

avec

$$a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = \frac{1}{1 - e^{-\pi/n}}$$

3. Il s'agit juste d'un équivalent classique, à savoir $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$. On en déduit immédiatement que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$.

4. Remarquons tout d'abord que comme $\int_0^\pi f(t) dt = 0$,

$$u_n = \int_0^\pi f(t)(e^{-t/n} - 1) dt$$

On remarque que $e^{-t/n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$, ce qui permet de conjecturer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt$ (ce qui précède n'est en aucun cas une preuve). On en déduirait alors la limite de (v_n) . On propose alors deux méthodes.

Avec le théorème de convergence dominée. Posons $f_n : t \mapsto (e^{-t/n} - 1)f(t)$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq |f|$ sur $[0, \pi]$ et $|f|$ est évidemment intégrable sur $[0, \pi]$. D'après le théorème de convergence dominée, (u_n) converge vers 0.

On remarque ensuite que la suite de fonctions (nf_n) converge simplement vers la fonction $t \mapsto -f(t)$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \pi], |nf_n(t)| = n(1 - e^{-t/n})|f(t)| \leq t|f(t)|$$

en utilisant la convexité de \exp . La fonction $t \mapsto t|f(t)|$ est à nouveau intégrable sur le segment $[0, \pi]$ donc, par convergence dominée,

(nu_n) converge vers $-\int_0^\pi t f(t) dt$. Puisque $v_n = a_n u_n$ et $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t f(t) dt$.

Sans le théorème de convergence dominée. Remarquons que f est continue donc bornée sur le segment $[0, \pi]$ (elle est même bornée sur \mathbb{R}_+ puisqu'elle est π -périodique). En notant M un majorant de $|f|$ sur $[0, \pi]$,

$$|u_n| \leq K \int_0^\pi (1 - e^{-t/n}) dt = K(\pi + n(e^{-\pi/n} - 1))$$

Or via le même équivalent usuel que précédemment,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{-\pi/n} - 1) = -\pi$$

de sorte que (u_n) converge bien vers 0.

On constate que

$$u_n + \frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt = \int_0^\pi f(t) \left(e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n} \right) dt$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$\left| e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n} \right| \leq \frac{t^2}{2n^2}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient donc

$$\left| u_n + \frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt \right| \leq \frac{K}{2n^2} \int_0^\pi t^2 dt = \frac{K\pi^3}{6n^2}$$

En particulier,

$$u_n + \frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

A fortiori

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt$$

Via l'équivalent de (a_n) précédemment trouvé, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t f(t) dt$$

Solution 52

1. Tout d'abord, $\cos(2nt) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1$. De plus,

$$\begin{aligned} \ln(\sin t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln(t + o(t)) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln(t(1 + o(1))) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln t + \ln(1 + o(1)) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln t + o(1) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln t + o(\ln t) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t \end{aligned}$$

Finalement, $f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$. Par croissances comparées, $f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Puisque f_n est également continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, elle est intégrable sur cet intervalle par comparaison à une fonction de Riemann intégrable.

2. On intègre par parties. La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et sa dérivée est $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t}$. De même, la fonction $t \mapsto \sin(2nt)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et sa dérivée est $t \mapsto 2n \cos(2nt)$. Enfin, $\sin(2nt) \ln(\sin t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2nt \ln t$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(2nt) \ln(\sin t) = 0$ par croissances comparées. Cela légitime l'intégration par parties.

$$J_n = 2nI_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n \cos(2nt) \ln(\sin t) dt = [\sin(2nt) \ln(\sin t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(2nt) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(2nt) dt$$

3.

$$\begin{aligned}
J_{n+1} - J_n &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot (\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)) dt \\
&= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(t) \cos((2n+1)t) dt \\
&= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos((2n+1)t) dt \\
&= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos((2n+2)t) + \cos(2nt)) dt = 0
\end{aligned}$$

Ainsi la suite (J_n) est constante. De plus,

$$J_1 = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(2t) dt = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t) + 1) dt = -\pi$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = -\pi$ et $I_n = -\frac{\pi}{2n}$.

Solution 53

De manière plus générale, posons $J_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln(t)^p dt$ pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. $J_{n,0}$ est clairement définie et, pour $p > 0$, $t^n \ln(t)^p \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc $t \mapsto t^n \ln(t)^p$ est intégrable sur $]0, 1]$. $J_{n,p}$ est donc également définie pour $p > 0$. Par intégration par parties, lorsque $p > 0$,

$$\int_0^1 t^n \ln(t)^p dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t)^p \right]_0^1 - \frac{p}{n+1} \int_0^1 t^n \ln(t)^{p-1} dt$$

Cette intégration par parties est légitime car la seconde intégrale, à savoir $J_{n,p-1}$ converge. De plus, le crochet est nul par croissances comparées. Ainsi

$$J_{n,p} = -\frac{p}{n+1} J_{n,p-1}$$

Par une récurrence facile

$$J_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} J_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

En particulier,

$$I_n = J_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Solution 54

1. Par croissances comparées, $\ln^n(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o(1/\sqrt{x})$ donc I_n converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit

$$I_n = \int_0^1 1 \cdot \ln^n(x) dx$$

et on intègre par parties. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^n(x) = 0$ donc

$$I_n = [x \ln^n(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} \cdot n \cdot \ln^{n-1}(x) dx = -n I_{n-1}$$

3. Comme $I_0 = 1$. Une récurrence évidente montre que $I_n = (-1)^n n!$.

Fonctions définies par des intégrales

Solution 55

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
 - De plus, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
 - Enfin, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1/t^2)$ et la fonction positive $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $x > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ converge si et seulement si $x > 0$. Le domaine de définition de Γ est donc \mathbb{R}_+^* .

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto t^x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* de dérivée $t \mapsto xt^{x-1}$. La fonction $t \mapsto -e^{-t}$ est également de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* de dérivée $t \mapsto e^{-t}$. Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. De plus, comme $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x e^{-t} = 0$$

et, par croissances comparées,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-t} = 0$$

On en déduit que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

- On a donc $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\Gamma(1) = 1$, une récurrence évidente montre que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from math import factorial
>>> from numpy import exp, inf
>>> def gamma(x):
...     return quad(lambda t: t**(x-1)*exp(-t), 0, inf)[0]
...
>>> for n in range(1, 10):
...     gamma(n), factorial(n-1)
...
(1.0000000000000002, 1)
(0.9999999999999998, 1)
(2.0, 2)
(6.0, 6)
(24.0, 24)
(120.0, 120)
(720.0000000000001, 720)
(5040.000000000001, 5040)
(40320.0, 40320)
```

Solution 56

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$.
 - De plus, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
 - Enfin, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$ et la fonction positive $t \mapsto (1-t)^{y-1}$ est intégrable au voisinage de 1^- si et seulement si $y > 0$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

- Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = 1 - t$.

- Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto (1-t)^y$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ de dérivées respectives $t \mapsto xt^{x-1}$ et $t \mapsto -y(1-t)^{y-1}$. Par intégrations par parties,

$$\int_0^1 yt^x(1-t)^{y-1} dt = -[t^x(1-t)^y]_0^1 + \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. Puisque $x > 0$ et $y > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x(1-t)^y = \lim_{t \rightarrow 1^-} t^x(1-t)^y = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} yB(x+1, y) &= \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t) dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt - x \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt \quad \text{car ces deux intégrales convergent} \\ &= xB(x, y) - xB(x+1, y) \end{aligned}$$

ou encore

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

- D'après la question précédente

$$B(n+1, p+1) = \frac{n}{n+p+1} B(n, p+1)$$

Par une récurrence facile

$$B(n+1, p+1) = \frac{n!(p+1)!}{(n+p+1)!} B(1, p+1) = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from math import factorial
>>> def beta(x,y):
...     return quad(lambda t:t**(x-1)*(1-t)**(y-1),0,1)[0]
...
>>> for n in range(1,10):
...     for p in range(1,10):
...         beta(n+1,p+1),factorial(n)*factorial(p)/factorial(n+p+1)
...
(0.16666666666666669, 0.16666666666666666)
(0.08333333333333334, 0.08333333333333333)
(0.05, 0.05)
(0.03333333333333333, 0.03333333333333333)
(0.023809523809523815, 0.023809523809523808)
(0.017857142857142856, 0.017857142857142856)
```

```
(0.01388888888888889, 0.01388888888888888)
(0.01111111111111113, 0.01111111111111112)
(0.00909090909090909, 0.00909090909090909)
(0.08333333333333334, 0.08333333333333333)
(0.03333333333333333, 0.03333333333333333)
(0.01666666666666666, 0.01666666666666666)
(0.009523809523809523, 0.009523809523809525)
(0.005952380952380953, 0.005952380952380952)
(0.003968253968253968, 0.003968253968253968)
(0.00277777777777778, 0.00277777777777778)
(0.00202020202020202, 0.00202020202020202)
(0.0015151515151515152, 0.0015151515151515152)
(0.05, 0.05)
(0.01666666666666666, 0.01666666666666666)
(0.007142857142857142, 0.007142857142857143)
(0.003571428571428571, 0.0035714285714285713)
(0.001984126984126984, 0.001984126984126984)
(0.0011904761904761906, 0.0011904761904761906)
(0.0007575757575757576, 0.0007575757575757576)
(0.000505050505050505, 0.000505050505050505)
(0.00034965034965034965, 0.00034965034965034965)
(0.033333333333333326, 0.03333333333333333)
(0.009523809523809523, 0.009523809523809525)
(0.003571428571428571, 0.0035714285714285713)
(0.001587301587301587, 0.0015873015873015873)
(0.0007936507936507935, 0.0007936507936507937)
(0.00043290043290043285, 0.0004329004329004329)
(0.0002525252525252525, 0.0002525252525252525)
(0.0001554001554001554, 0.0001554001554001554)
(9.99000999000999e-05, 9.99000999000999e-05)
(0.023809523809523808, 0.023809523809523808)
(0.005952380952380953, 0.005952380952380952)
(0.001984126984126984, 0.001984126984126984)
(0.0007936507936507935, 0.0007936507936507937)
(0.00036075036075036075, 0.00036075036075036075)
(0.00018037518037518038, 0.00018037518037518038)
(9.712509712509713e-05, 9.712509712509713e-05)
(5.550005550005551e-05, 5.55000555000555e-05)
(3.330003330003329e-05, 3.33000333000333e-05)
(0.017857142857142856, 0.017857142857142856)
(0.003968253968253968, 0.003968253968253968)
(0.0011904761904761906, 0.0011904761904761906)
(0.00043290043290043285, 0.0004329004329004329)
(0.00018037518037518038, 0.00018037518037518038)
(8.325008325008325e-05, 8.325008325008325e-05)
(4.1625041625041625e-05, 4.1625041625041625e-05)
(2.22000222000222e-05, 2.22000222000222e-05)
(1.2487512487512486e-05, 1.2487512487512488e-05)
(0.01388888888888888, 0.01388888888888888)
(0.00277777777777778, 0.00277777777777778)
(0.0007575757575757576, 0.0007575757575757576)
(0.0002525252525252525, 0.0002525252525252525)
(9.712509712509713e-05, 9.712509712509713e-05)
(4.1625041625041625e-05, 4.1625041625041625e-05)
(1.942501942501942e-05, 1.942501942501942e-05)
(9.712509712509713e-06, 9.712509712509713e-06)
```

```
(5.1419169066227886e-06, 5.1419169066227886e-06)
(0.01111111111111112, 0.01111111111111112)
(0.00202020202020202, 0.00202020202020202)
(0.000505050505050505, 0.000505050505050505)
(0.0001554001554001554, 0.0001554001554001554)
(5.550005550005551e-05, 5.55000555000555e-05)
(2.22000222000222e-05, 2.22000222000222e-05)
(9.712509712509713e-06, 9.712509712509713e-06)
(4.570592805886924e-06, 4.570592805886924e-06)
(2.285296402943462e-06, 2.285296402943462e-06)
(0.00909090909090909, 0.00909090909090909)
(0.0015151515151515152, 0.0015151515151515152)
(0.00034965034965034965, 0.00034965034965034965)
(9.99000999000999e-05, 9.99000999000999e-05)
(3.330003330003329e-05, 3.33000333000333e-05)
(1.2487512487512486e-05, 1.2487512487512488e-05)
(5.1419169066227886e-06, 5.1419169066227886e-06)
(2.285296402943462e-06, 2.285296402943462e-06)
(1.0825088224469027e-06, 1.0825088224469029e-06)
```