

# INTÉGRALES IMPROPRES

## Révisions d'intégration

### Solution 1

1. Notons  $F(x) = \int x \arctan^2(x) \, dx$  et intégrons par parties,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} \arctan^2(x) - \int \frac{x^2}{x^2+1} \arctan(x) \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) + \int \frac{\arctan(x)}{x^2+1} \, dx - \int \arctan(x) \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan^2(x) + \frac{1}{2} \arctan^2(x) - \int \arctan(x) \, dx \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) \, dx &= x \arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

D'où

$$\int x \arctan^2(x) \, dx = \frac{x^2+1}{2} \arctan^2(x) - x \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

2. Puisque  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ ,

$$\int e^x \sin^2(x) \, dx = \int \frac{e^x}{2} \, dx - \int \frac{e^x \cos(2x)}{2} \, dx$$

Puisque  $e^x \cos(2x) = \operatorname{Re}(e^{(1+2i)x})$ , on calcule

$$\int e^{(1+2i)x} \, dx = \frac{e^x e^{2ix}}{1+2i} = \frac{1-2i}{5} e^x e^{2ix}$$

dont la partie réelle vaut

$$\int e^x \cos(2x) \, dx = \frac{e^x}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x))$$

On a donc

$$\int e^x \sin^2(x) \, dx = \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10} (\cos(2x) + 2 \sin(2x))$$

3. En posant  $u = \ln x$ ,

$$\int \cos(\ln x) \, dx = \int e^u \cos u \, du$$

Via un passage en complexes ou une intégration par parties

$$\int e^u \cos u \, du = \frac{1}{2} e^u (\cos u + \sin u)$$

On en déduit

$$\int \cos(\ln x) \, dx = \frac{1}{2} x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

4. En posant  $u = \sqrt{1+x}$ ,

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}} = 2 \int (u^2 - 1) \, du = \frac{2}{3} u^3 - 2u = \frac{2}{3} (\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} = \frac{2}{3} \sqrt{1+x} (x-2)$$

5. En posant  $u = e^x$ , on a

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u = \arctan(e^x)$$

## Solution 2

1. Il faut montrer que  $t \mapsto \sin t + \cos t$  ne s'annule pas sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Pour  $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\sin t > 0$  et  $\cos t \geq 0$  donc  $\sin t + \cos t > 0$ . De plus,  $\sin 0 + \cos 0 = 1 > 0$ .

Ainsi  $t \mapsto \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}$  et  $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}$  sont continues sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et S et C sont bien définies.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable  $u = \frac{\pi}{2} - t$ .

3. On a clairement  $S + C = \frac{\pi}{2}$ . On en déduit  $S = C = \frac{\pi}{4}$ .

4. On effectue le changement de variable  $t = \sin u$ . On en déduit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + |\cos u|} \, du$$

Mais pour  $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos u \geq 0$  donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + \cos u} \, du = C = \frac{\pi}{4}$$

## Solution 3

1. Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable  $u = \cos t$  donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{du}{4-u^2} \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \left( [\ln(2+u)]_{-1}^1 - [\ln(2-u)]_{-1}^1 \right) = \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

2. Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t \, dt}{1 - \cos^2 t}$$

Le changement de variable  $u = \cos t$  donne

$$\begin{aligned} J &= - \int_0^{\cos x} \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\cos x} \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left( [\ln(1-u)]_0^{\cos x} - [\ln(u+1)]_0^{\cos x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \tan^2 \frac{x}{2} \right) = \ln \left( \tan \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

car pour  $x \in ]0, \pi[$ ,  $\tan \frac{x}{2} > 0$ .

3. Notons  $K$  l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$K = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \, dt}{(1 - \sin^2 t)^2}$$

Le changement de variable  $u = \sin t$  fournit donc

$$K = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(1 - u^2)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \left( \left[ \frac{1}{u-1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[ \frac{1}{u+1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \end{aligned}$$

4. Notons  $L$  l'intégrale à calculer. Le changement de variable  $u = \tan \frac{t}{2}$  allié à la paramétrisation rationnelle du cercle donne

$$L = 2 \int_0^1 \frac{du}{1 - u^2 + 2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{u + \sqrt{2} - 1} - \frac{1}{u - 1 - \sqrt{2}} \right) du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( [\ln(u + \sqrt{2} - 1)]_0^1 - [\ln(1 + \sqrt{2} - u)]_0^1 \right) \\ &= \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

#### Solution 4

1. Le calcul ne pose aucune difficulté, on trouve

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = 1.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , intégrons  $I_{n+2}$  par parties en posant  $\forall t \in [0, \pi/2]$ ,

$$u(t) = -\cos(t) \quad \text{et} \quad v(t) = \sin^{n+1}(t).$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi/2]$  et,

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad u'(t) = \sin(t)$$

et

$$v'(t) = (n+1) \cos(t) \sin^n(t).$$

La formule d'intégration par parties s'écrit donc,

$$\begin{aligned}
 I_{n+2} &= [-\cos(t) \sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} \\
 &\quad + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin^n(t) - \sin^{n+2}(t)) dt \\
 &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
 \end{aligned}$$

D'où la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

3. D'après la relation de récurrence établie précédemment :

$$\begin{aligned}
 I_{2n} &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} I_0 \\
 &= \frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{[(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2]^2} I_0 \\
 &= \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
 I_{2n+1} &= \frac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3} I_1 \\
 &= \frac{[(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2]^2}{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} I_1 \\
 &= \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} I_1 = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}
 \end{aligned}$$

4. Puisque  $\forall t \in [0, \pi/2], \quad 0 \leq \sin(t) \leq 1$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t),$$

ainsi après intégration sur le segment  $[0, \pi/2]$ ,

$$I_{n+1} \leq I_n.$$

La suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante. On a donc en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

soit encore, d'après la relation de récurrence obtenue ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

5. Par une récurrence sans difficulté, on prouve à l'aide de l'inégalité précédente que pour tout  $n$  positif  $I_n > 0$ . D'après le résultat de la question 3.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1,$$

de plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

d'où, en appliquant le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

et donc

$$I_{n+1} \sim I_n.$$

6. Posons  $v_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ . On remarque que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = v_n$$

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc constante égale à  $\pi/2$  car  $I_1 = 1$ .

7. On a  $(n+1)I_{n+1}I_n \sim nI_n^2$  d'après ce qui précède. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

et puisque la fonction racine carrée est continue en  $\pi/2$  et que  $I_n$  est positive,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ainsi

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

### Solution 5

1. On remarque que l'intégrande tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Nous ne disposons pas en première année de théorème d'interversion limite/intégrale mais il y a cependant des chances que  $(u_n)$  converge vers 1. En effet,

$$1 - u_n = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n}$$

Ainsi

$$0 \leq 1 - u_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que  $(u_n)$  converge vers 1.

2. On a vu que  $1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n}$ . Soit  $n \geq 1$  : on écrit  $\frac{x^n}{1+x^n}$  sous la forme  $\frac{x}{n} \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$  et on effectue une intégration par parties :

$$1 - u_n = \left[ \frac{x}{n} \ln(1+x^n) \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

En utilisant l'inégalité classique  $\ln(1+u) \leq u$ , on a :

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Donc  $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Par conséquent,

$$1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{i.e.} \quad u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

### Solution 6

1. Pour  $t \geq 0$ ,  $\frac{1}{1+t} \leq 1$  donc  $0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ . On en déduit que  $(I_n)$  converge vers 0.

2.  $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t} dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ .

3. En utilisant la question précédente,  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (I_k + I_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} I_k - \sum_{k=1}^n (-1)^k I_{k-1}$ . On reconnaît là une somme télescopique donc  $S_n = (-1)^{n+1} I_n - (-1)^1 I_0 = I_0 + (-1)^{n+1} I_n$ . Le calcul de  $I_0$  donne  $I_0 = \ln 2$ .
4. Comme  $(I_n)$  converge vers 0,  $Q_n$  converge vers  $\ln 2$ .

### Solution 7

Il s'agit d'intégrer par parties à chaque fois.

$$\begin{aligned} I &= [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx \\ &= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \left[ \frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 \, dx \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{9} [x^3]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \left[ -\frac{1}{3} e^{2x} \cos(3x) \right]_0^\pi + \frac{2}{3} \int_0^\pi e^{2x} \cos(3x) \, dx \\ &= \frac{e^{2\pi} + 1}{3} + \frac{2}{3} K' \end{aligned}$$

en posant  $K' = \int_0^\pi e^{2x} \cos(3x) \, dx$ . A nouveau, par intégration par parties

$$K' = \left[ \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) \right]_0^\pi - \frac{2}{3} \int_0^\pi e^{2x} \sin(3x) \, dx = -\frac{2}{3} K$$

Ainsi

$$K = \frac{e^{2\pi} + 1}{3} + \frac{2}{3} K' = \frac{e^{2\pi} + 1}{3} - \frac{4}{9} K$$

de sorte que

$$K = \frac{3}{13} (e^{2\pi} + 1)$$

$$\begin{aligned} L &= [x \arccos x]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\pi}{6} - [\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{aligned}$$

### Solution 8

1. On procède à deux intégrations par parties.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x}\end{aligned}$$

2. On fait apparaître un facteur 1 et on intègre par parties.

$$\begin{aligned}\int \arctan(x) dx &= x \arctan(x) - \int \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

3. On peut procéder à une double intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \sin x dx &= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx \\ &= -e^{2x} \cos x + 2 \left( e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx \right) \\ &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x)$$

On peut également passer en complexes.

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \sin x dx &= \int e^{2x} \operatorname{Im}(e^{ix}) dx \\ &= \int \operatorname{Im}(e^{2x} e^{ix}) dx \\ &= \operatorname{Im} \left( \int e^{2x} e^{ix} dx \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \int e^{(2+i)x} dx \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{e^{(2+i)x}}{2+i} \right) \\ &= e^{2x} \operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix}}{2+i} \right) \\ &= \frac{1}{5} e^{2x} \operatorname{Im}((2-i)e^{ix}) \\ &= \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x)\end{aligned}$$

4. Puisque  $\arcsin$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$ , on peut intégrer par parties «sur cet intervalle» :

$$\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

A priori, l'intégration par parties précédentes permet seulement d'affirmer que la fonction  $\varphi : x \mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$  est une primitive de  $\arcsin$  sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .

Mais

- $\varphi$  est continue sur  $[-1, 1]$ ;
- $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$ ;
- $\varphi' = \arcsin$  sur l'intervalle  $] -1, 1[$
- $\varphi$  admet donc des limites finies en  $-1$  et  $1$  car  $\arcsin$  est continue en ces points.

D'après le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ ,  $\varphi$  est en fait de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-1, 1]$  et que  $\varphi' = \arcsin$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Ainsi  $\varphi$  est bien une primitive de  $\arcsin$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

## Convergences

### Solution 9

1. On effectue le changement de variable  $t = x - n\pi$  et on remarque que

$$\sin^2(t + n\pi) = ((-1)^n \sin t)^2 = \sin^2 t$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $0 \leq x \leq \pi$

$$(n\pi)^4 \leq (x + n\pi)^4 \leq ((n+1)\pi)^4$$

puis comme  $\sin^2 x \geq 0$

$$(n\pi)^4 \sin^2 x \leq (x + n\pi)^4 \sin^2 x \leq ((n+1)\pi)^4 \sin^2 x$$

et enfin

$$\frac{1}{((n+1)\pi)^4 \sin^2 x} \leq \frac{1}{(x + n\pi)^4 \sin^2 x} \leq \frac{1}{(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

On intègre les dernières inégalités entre 0 et  $\pi$  de sorte que  $v_{n+1} \leq u_n \leq v_n$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $x \mapsto \frac{dx}{1 + (n\pi)^4 \sin^2 x}$  étant  $\pi$ -périodique, on a

$$v_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (n\pi)^4 \sin^2 x}$$

Les règles de Bioche nous conseillent d'effectuer le changement de variable  $t = \tan x$ . On trouve en effet

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1 + (n\pi)^4 t^2 + 1)} \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + (n\pi)^4}} \arctan(\sqrt{1 + (n\pi)^4} t) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^4}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 + ((n+1)\pi)^4}} \leq u_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^4}}$$

puis que  $u_n \sim \frac{1}{n^2 \pi}$ .

4. Puisque l'intégrande est positif,  $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}$  est croissante et admet donc une limite (éventuellement infinie) en  $+\infty$ . De

plus,  $F(N\pi) = \sum_{n=0}^N u_n$  pour  $N \in \mathbb{N}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge d'après la question précédente. Ainsi  $F(N\pi)$  tend vers une limite finie lorsque

$N$  tend vers  $+\infty$ . Cette limite est également celle de  $F$  en  $+\infty$ , ce qui prouve que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}$  converge.



## Solution 10

1. Soit  $A$  un réel tel que  $P'$  ne s'annule pas sur  $[A, +\infty[$ . L'intégrale  $I$  est de même nature que l'intégrale  $\int_A^{+\infty} \cos(P(x)) \, dx$ . On réécrit cette intégrale sous la forme  $\int_A^{+\infty} \frac{1}{P'(x)} P'(x) \cos(P(x)) \, dx$ . Puisque  $x \mapsto \frac{\sin(P(x))}{P'(x)}$  admet une limite nulle en  $+\infty$  ( $\deg P' \geq 1$ ), l'intégration par parties montre que l'intégrale  $\int_A^{+\infty} \cos(P(x)) \, dx$  est de même nature que l'intégrale  $\int_A^{+\infty} \frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x)) \, dx$ . Puisque  $\deg P \geq 2$ ,  $\frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ . L'intégrale  $\int_A^{+\infty} \frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x)) \, dx$  est donc convergente de même que  $I$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $|\cos(P(x))| \geq \cos^2(P(x)) = \frac{1 + \cos(2P(x))}{2}$ . D'après la première question,  $\int_0^{+\infty} \cos(2P(x)) \, dx$  converge et  $\int_0^{+\infty} dx$  diverge vers  $+\infty$  donc  $\int_0^{+\infty} |\cos(P(x))| \, dx$  diverge vers  $+\infty$ .
3. Par le changement de variable  $t = x^2$ ,  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \, dt$  puis, par intégration par parties,  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \, dt$ . En posant  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \, dt$ , on a  $I = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ . On vérifie que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  vérifie le critère spécial des séries alternées. On en déduit que  $I$  est du signe de  $u_0$ , c'est-à-dire positif.

## Solution 11

1.  $\ln$  est continue sur  $]0, 1]$  et  $\ln(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  par croissances comparées. Comme  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  est intégrable au voisinage de  $0^+$  ( $\frac{1}{2} < 1$ ),  $\ln$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . Finalement,  $\int_0^1 \ln t \, dt$  converge.
2.  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  (puisque  $e^{-u} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u}\right)$ ). Comme  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$  ( $2 > 1$ ),  $t \mapsto e^{-t^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Finalement,  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$  converge.
3. Tout d'abord,  $x \mapsto x \sin(x)e^{-x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Comme  $\sin$  est bornée,  $x \sin(x)e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(xe^{-x})$ . De plus,  $xe^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x^2}$  par croissances comparées. Ainsi  $x \sin(x)e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x^2}$ . Or  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$  donc  $x \mapsto x \sin(x)e^{-x}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Finalement,  $\int_0^{+\infty} x \sin(x)e^{-x} \, dx$  converge.
4. Tout d'abord,  $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . De plus,  $\ln(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(t)$  et on a vu que  $\ln$  était intégrable au voisinage de  $0^+$  donc  $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$  est également intégrable au voisinage de  $0^+$ . Par croissances comparées,  $\ln(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  donc  $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$  est également intégrable au voisinage de  $+\infty$ . Finalement,  $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} \, dt$  converge.
5.  $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}$  et  $t \mapsto \frac{1}{1-t}$  n'est pas intégrable au voisinage de  $1^-$ . L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$  diverge.

6. Tout d'abord,  $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2 + 1}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . De plus,  $\frac{\ln t}{t^2 + 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(t)$  et on a vu que  $\ln$  était intégrable au voisinage de  $0^+$  donc  $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$  est également intégrable au voisinage de  $0^+$ . Par croissances comparées,  $\frac{\ln t}{t^2 + 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$  donc  $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2 + 1}$  est également intégrable au voisinage de  $+\infty$ . Finalement,  $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2 + 1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt$  converge.

7.  $\ln x \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} x - 1$  donc  $\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ . Ainsi  $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$  est intégrable au voisinage de  $1^+$  par comparaison à une intégrale de Riemann.

Par croissances comparées,  $\sqrt{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$  donc  $\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)$  donc  $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$  par comparaison à une intégrale de Riemann.

Finalement,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$  converge.

### Solution 12

1. Supposons  $\alpha > 1$ . Donnons-nous  $\gamma \in ]1, \alpha[$  (par exemple  $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$ ). Comme  $\gamma < \alpha$ ,  $\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{t^{\gamma}}$  par croissances comparées.

Or  $\gamma > 1$  donc  $t \mapsto \frac{1}{t^{\gamma}}$  est intégrable sur  $[e, +\infty[$ . On en déduit que  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$  converge.

Supposons  $\alpha < 1$ . Alors  $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\right)$  par croissances comparées. Or  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge donc  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$  diverge également.

Supposons enfin  $\alpha = 1$ . Si  $\beta \neq 1$ ,

$$\int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^{\beta}} = \frac{1}{1-\beta} [\ln(t)^{1-\beta}]_e^x = \frac{1}{1-\beta} (\ln(x)^{1-\beta} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \frac{1}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Enfin, si  $\beta = 1$ ,

$$\int_e^x \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_e^x = \ln(\ln x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Pour récapituler,  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

2. Via le changement de variable  $u = \frac{1}{t}$ , l'intégrale  $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{t^{\alpha} |\ln t|^{\beta}}$  est de même nature que l'intégrale  $\int_e^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha} (\ln u)^{\beta}}$ . D'après la question précédente, cette intégrale converge si et seulement si  $\alpha < 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

### Solution 13

1. Posons  $f : x \mapsto e^{-x} \ln x$ .  $f$  est bien continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x$  et  $\ln x \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  par croissances comparées. Ainsi  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  et  $f$  est intégrable au voisinage de

$0^+$ . Enfin  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  par croissances comparées de sorte que  $f$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

L'intégrale  $I$  converge bien.

2. Par relation de Chasles,

$$I = \int_0^1 e^{-x} \ln x \, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$$

En effectuant le changement de variable  $x \mapsto 1/x$  dans la première intégrale,

$$I = - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \ln x \, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \int_1^{+\infty} \left(1 - \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}\right) e^{-x} \ln x \, dx = \int_1^{+\infty} (1 - e^{\varphi(x)}) e^{-x} \ln x \, dx$$

en posant

$$\varphi : x \mapsto x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$$

$\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$$

Ainsi  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et comme  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi$  est positive sur  $[1, +\infty[$ . On en déduit que

$$\forall x \in [1, +\infty[, (1 - e^{\varphi(x)}) e^{-x} \ln x \leq 0$$

Par conséquent,  $I \leq 0$ . Bien entendu,  $x \mapsto (1 - e^{\varphi(x)}) e^{-x} \ln x$  est continue et non constamment nulle sur  $[1, +\infty[$  donc  $I < 0$ .

## Solution 14

1. On procède par intégration par parties : comme  $x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$  admet une limite finie (nulle) en  $+\infty$ , les intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} \, dx$  sont de même nature. Puisque  $\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ , la seconde intégrale converge ( $3/2 > 1$ ) et donc la première également.

2. **ATTENTION !** On pourrait naïvement penser que, puisque  $\frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ , cette intégrale converge également. Mais  $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  n'est pas de signe constant !

Remarquons que, comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ,

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

On a vu que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx$  converge et  $3/2 > 1$  donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \, dx$  est de même nature que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx$ . Or

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}$$

On montre à nouveau à l'aide d'une intégration par parties que  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} \, dx$  converge mais  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$  diverge donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx$

diverge. Finalement,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \, dx$  diverge.

## Solution 15

Tout d'abord,  $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  quelle soit la valeur de  $\alpha$ .

**Etude en 0.**  $\frac{\sin t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$  donc  $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t^\alpha} \, dt$  converge si et seulement si  $\alpha - 1 < 1$  i.e.  $\alpha < 2$ .

**Etude en  $+\infty$ .** Supposons d'abord  $\alpha > 0$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} = 0$ , les intégrales  $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \, dt$  et  $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \, dt$  sont de même nature par

intégration par parties. Or  $\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$  donc  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$  converge. Il en est donc de même de  $\int_p^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$ .

Supposons  $\alpha \leq 0$ . Posons  $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$ . Comme  $\sin$  est positive sur  $[2n\pi, (2n+1)\pi]$  et comme  $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}}$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t dt \geq (2n\pi)^{-\alpha} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t dt = 2(2n\pi)^{-\alpha}$$

Ainsi  $F((2n+1)\pi) - F(2n\pi)$  ne tend pas vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Donc  $F$  n'admet pas de limite en  $+\infty$  i.e. l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$  diverge.

En conclusion,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$  converge si et seulement si  $0 < \alpha < 2$ .

### Solution 16

Soit  $x \in [1, +\infty[$ . Par intégration par parties

$$\int_1^x g(t) dt = \int_1^x \frac{f(t)^2}{t^2} dt = -\left[\frac{f(t)^2}{t}\right]_1^x + 2 \int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt = f(1)^2 - \frac{f(x)^2}{x} + 2 \int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt \leq 2 \int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_1^x g(t) dt \leq f(1)^2 + 2\sqrt{\int_1^x f(t)^2 dt} \sqrt{\int_1^x f'(t)^2 dt} \leq f(1)^2 + 2\sqrt{\int_1^x f(t)^2 dt} \sqrt{\int_1^{+\infty} f'(t)^2 dt}$$

Posons  $A = f(1)^2$ ,  $B = \sqrt{\int_1^{+\infty} f'(t)^2 dt}$  et  $h(x) = \sqrt{\int_1^x f(t)^2 dt}$ . Alors

$$h(x)^2 \leq A + 2Bh(x)$$

ou encore

$$(h(x) - B)^2 \leq A + B^2$$

puis

$$0 \leq h(x) \leq B + \sqrt{A + B^2}$$

et enfin

$$\int_1^x g(t) dt = h(x)^2 \leq (B + \sqrt{A + B^2})^2$$

L'application  $x \mapsto \int_1^x g(t) dt$  est donc croissante (intégrande positive) et majorée : elle admet donc une limite en  $+\infty$ . L'intégrale  $\int_1^{+\infty} g(t) dt$  converge donc i.e.  $g$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

### Solution 17

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt$$

Or via le changement de variable  $u = t - (k-1)\pi$ ,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \int_0^{\pi} |\sin(u + (k-1)\pi)| du = \int_0^{\pi} |(-1)^{k-1} \sin u| du = \int_0^{\pi} \sin u du = 2$$

Finalement,

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Or la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge vers  $+\infty$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty$$

La fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  n'est donc pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Solution 18

- Supposons qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $I(\lambda)$  et  $I(\mu)$  convergent. Par différence,  $\int_a^{+\infty} \left( \frac{\lambda - f(t)}{t} - \frac{\lambda - f(t)}{t} \right) dt = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - \mu}{t} dt$  converge. Comme  $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge, ceci n'est possible que si  $\lambda - \mu = 0$  i.e.  $\lambda = \mu$ .
- Supposons  $H_\lambda$  bornée sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème fondamental de l'analyse,  $H_\lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$  de dérivée  $t \mapsto \lambda - f(t)$ . Par ailleurs,  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$  de dérivée  $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ . Par intégration par parties, on obtient sous réserve de convergence :

$$I(\lambda) = \left[ \frac{H_\lambda(t)}{t} \right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

Comme  $H_\lambda$  est bornée,

$$\left[ \frac{H_\lambda(t)}{t} \right]_a^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t} - \frac{H_\lambda(a)}{a} = 0$$

De plus,  $H_\lambda(t) = \mathcal{O}(1/t^2)$  donc  $H_\lambda$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ . A fortiori,  $\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$  converge.

On en déduit que  $I(\lambda)$  converge et que

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

- Posons  $G_\lambda(x) = H_\lambda(x + T) - H_\lambda(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . On a déjà montré que  $H_\lambda$  était de classe  $\mathcal{C}^1$  donc  $G_\lambda$  également et

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'_\lambda(x) = H'_\lambda(x + T) - H'_\lambda(x) = (\lambda - f(x + T)) - (\lambda - f(x)) = f(x) - f(x + T) = 0$$

Ainsi  $G_\lambda$  est constante sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, H_\lambda(x + T) - H_\lambda(x) &= G_\lambda(0) = H_\lambda(T) - H_\lambda(0) \\ &= \int_a^T (\lambda - f(t)) dt - \int_a^0 (\lambda - f(t)) dt \\ &= \int_0^T (\lambda - f(t)) dt \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \lambda T - \int_0^T f(t) dt \end{aligned}$$

- Par télescopage

$$H_\lambda(a + nT) - H_\lambda(a) = \sum_{k=0}^{n-1} H_\lambda(a + (k+1)T) - H_\lambda(a + kT) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda T - \int_0^T f(t) dt = n \left( \lambda T - \int_0^T f(t) dt \right)$$

Ainsi la suite  $(H_\lambda(a + nT))$  est bornée si et seulement si  $\lambda T - \int_0^T f(t) dt$  i.e. si et seulement si  $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ .

c. Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_{\lambda_0}(x + T) - H_{\lambda_0}(x) = 0$$

Ainsi  $H_{\lambda_0}$  est  $T$ -périodique. Comme  $H_{\lambda_0}$  est continue, elle est bornée sur le segment  $[0, T]$ . Par  $T$ -périodicité, elle est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

d. Comme  $H_{\lambda_0}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ ,  $I(\lambda_0)$  converge d'après la question 2. D'après la question 1,  $\lambda_0$  est l'unique valeur de  $\lambda$  pour laquelle  $I(\lambda)$  converge.

e. Soit  $x \in [a, +\infty[$ . Alors

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \int_a^x \frac{\lambda_0}{t} dt = - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \lambda_0 (\ln x - \ln a)$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt = I(\lambda_0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda_0 \ln x = \pm \infty$  car  $\lambda_0 \neq 0$ . On en déduit que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln x$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'application  $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$  est continue sur  $]0, \pi/2]$  et comme  $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} = n$ . Ainsi  $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$  se prolonge en une application continue sur le segment  $[0, \pi/2]$ . L'intégrale  $A_n$  est donc bien définie. Le même argument montre également que  $B_n$  est bien définie.

5. On utilise le fait que  $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$  :

$$\varphi(t) = \frac{\sin(t) - t}{t \sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-t^3/6}{t^2} = -\frac{t}{6}$$

6. D'après la question précédente,  $\varphi$  est prolongeable par continuité sur le segment  $[0, \pi/2]$ . Elle y est donc intégrable. Par inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |A_n - B_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| |\varphi(t)| dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(t)| dt$$

La suite  $(A_n - B_n)$  est donc bornée.

7. Via le changement de variable linéaire  $u = nt$ ,

$$B_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du = B_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du$$

Remarquons que  $|\sin|$  est  $\pi$ -périodique donc, avec les notations de la question 3 et  $a = \frac{\pi}{2}$ , on a :

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) dt = \frac{2}{\pi} \neq 0$$

On en déduit que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{|\sin(u)|}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x) = \frac{2}{\pi} \ln(x)$$

et donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{n\pi}{2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(n)}{\pi} = +\infty$ ,

$$B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Puisque  $(A_n - B_n)$  est bornée et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = +\infty$  d'après l'équivalent précédente,

$$A_n = B_n + (A_n - B_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

### Solution 19

1. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$  à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On raisonne par récurrence sur  $n$ . La propriété est vraie pour  $n = 0$ , car si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$$

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^{n+2}$ . A fortiori,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  donc on peut écrire

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

En intégrant par parties,

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = - \left[ \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

ce qui permet de conclure.

2. On peut déjà effectuer le changement de variable  $t = u^2$  pour «simplifier» l'intégrale. L'intégrale de l'énoncé est alors de même nature que l'intégrale de Dirichlet  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ . L'intégrale converge en 0 puisque  $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$  est prolongeable par continuité en 0. De plus, sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = - \left[ \frac{\cos u}{u} \right]_{\pi}^{+\infty} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$$

Le crochet converge puisque,  $\cos$  étant bornée,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\cos u}{u} = 0$ . La deuxième intégrale converge également puisque  $\frac{\cos u}{u^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right)$ . On peut alors en conclure que l'intégrale de Dirichlet converge et donc l'intégrale de l'énoncé également.

**REMARQUE.** Le changement de variable initiale n'était pas nécessaire. On aurait pu directement remarquer que  $\frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ , d'où l'intégrabilité en 0 et procéder à une intégration par parties en écrivant  $\frac{\sin(\sqrt{t})}{t} = \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$ .

3. Posons  $f : t \mapsto \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} dt$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Remarquons que

$$\int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) = \int_n^{n+1} (f(t) - f(n)) dt$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout  $t \in [n, n+1]$

$$|f(t) - f(n)| \leq |t - n| \max_{[n, t]} |f'| \leq \max_{[n, n+1]} |f'|$$

Or  $f'(t) = \frac{\cos(\sqrt{t})}{2t^{3/2}} - \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2}$  donc, pour tout  $t \in [n, n+1]$ ,

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2} \leq \frac{3}{2t^{3/2}} \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

Ainsi, pour tout  $t \in [n, n+1]$ ,

$$|f(t) - f(n)| \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} |f(t) - f(n)| dt \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

On en déduit que la série  $\sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$  converge (absolument) par comparaison à une série de Riemann. Comme  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge, la série  $\sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} f(t) dt$  converge et donc la série  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  également.

## Théorie

### Solution 20

- Supposons  $\ell \neq 0$ . Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer  $\ell > 0$ . Puisque  $f$  admet  $\ell$  pour limite en  $+\infty$ , il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f(x) \geq \frac{\ell}{2}$  pour  $x \geq A$ . Mais alors, pour  $x \geq A$  :

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^A f(t) dt + \int_A^x f(t) dt \geq \int_0^A f(t) dt + \ell(x - A)$$

Par minoration  $\int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  ce qui contredit l'énoncé.

- Supposons que  $f$  n'admette pas 0 pour limite en  $+\infty$ . Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $A \in \mathbb{R}_+$ , il existe  $x \geq A$  tel que  $|f(x)| \geq \varepsilon$ . Puisque  $f$  est uniformément continue, il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,  $|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Comme l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge, on peut choisir  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x, y \geq A$  :

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \frac{\alpha \varepsilon}{3}$$

Soit alors  $x \geq A$  tel que  $|f(x)| \geq \varepsilon$ . Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer  $f(x) \geq \varepsilon$ . Pour tout  $t \in [x, x + \alpha]$ ,  $|f(t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , et en particulier  $f(t) \geq f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ . On en déduit :

$$\int_x^{x+\alpha} f(t) dt \geq \frac{\alpha \varepsilon}{2}$$

On aboutit donc à une contradiction.

### Solution 21

Supposons que  $f$  soit  $M$ -lipschitzienne avec  $M \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Puisque l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge, il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x \geq A$  et pour tout  $y > x$ ,  $\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon^2}{2M}$ . Soit donc  $(x, y)$  tel que  $A \leq x < y$ . Puisque  $f$  est  $M$ -lipschitzienne,

$$\forall t \in [x, y], -M(t - x) \leq f(t) - f(x) \leq M(t - x)$$



En intégrant sur  $[x, y]$ , on obtient

$$-M \frac{(y-x)^2}{2} \leq \int_x^y f(t) dt - (y-x)f(x) \leq M \frac{(y-x)^2}{2}$$

On en déduit que pour tout  $y > x$ ,

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon^2}{2M(y-x)} + M \frac{y-x}{2}$$

Une étude rapide de la fonction  $g : t \mapsto \frac{\varepsilon^2}{2Mt} + \frac{Mt}{2}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  montre que  $g$  admet un minimum en  $\frac{\varepsilon}{M}$  valant  $\varepsilon$ . En posant  $y = x + \frac{\varepsilon}{M}$  dans l'inégalité précédente, on obtient donc  $|f(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \geq A$ .

Ceci prouve alors que  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

## Solution 22

1. Puisque  $(ff')' = f'^2 + ff''$ , le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x f'^2(t) dt + \int_0^x f(t)f''(t) dt$$

Par ailleurs,  $ff''$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  puisque  $|ff''| \leq \frac{1}{2}(f^2 + f''^2)$ . En particulier,  $x \mapsto \int_0^x f(t)f''(t) dt$  admet une limite finie en  $+\infty$ . Par ailleurs, puisque  $f'^2$  étant positive  $x \mapsto \int_0^x f'^2(t) dt$  admet une limite finie ou égale à  $+\infty$  en  $+\infty$ . Supposons que cette limite soit  $+\infty$ . Alors la relation précédente montre que  $\lim_{+\infty} ff' = +\infty$ . Mais comme  $(f^2)' = 2ff'$ , on peut affirmer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x)^2 = f(0)^2 + 2 \int_0^x f(t)f'(t) dt$$

Ainsi on peut classiquement montrer que  $\lim_{+\infty} f^2 = +\infty$ , ce qui contredit l'intégrabilité de  $f^2$  sur  $\mathbb{R}$ . Finalement,  $x \mapsto \int_0^x f'(t)^2 dt$  admet une limite finie en  $+\infty$ , ce qui signifie que  $f'$  est de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

On montre de manière similaire que  $f'$  est de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_-$  de telle sorte que  $f'$  est de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

2. On exploite à nouveau le fait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x f'^2(t) dt + \int_0^x f(t)f''(t) dt$$

Puisque  $f'^2$  et  $ff'$  sont intégrables, on peut affirmer que  $ff'$  admet une limite finie en  $+\infty$ . Mais on rappelle alors que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$f(x)^2 = f(0)^2 + 2 \int_0^x f(t)f'(t) dt$$

Ainsi  $ff'$  ne peut avoir une limite non nulle en  $+\infty$  car alors  $\lim_{+\infty} f^2 = +\infty$ , ce qui contredirait l'intégrabilité de  $f^2$ . Finalement,  $ff'$  admet une limite nulle en  $+\infty$ . On montre de la même manière que  $ff'$  admet une limite nulle en  $-\infty$ .

Par intégration par parties

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)^2 dt = [ff']_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t) dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t) dt \right)^2 \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)^2 dt \right)$$

ce qui permet d'obtenir l'inégalité voulue.

**Solution 23**

1. Il est clair que si  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge, alors la suite  $n \mapsto \int_0^n f(t) dt$  converge.

Réciproquement, supposons que  $n \mapsto \int_0^n f(t) dt$  converge. Notons  $\ell$  sa limite. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \left| \int_0^n f(t) dt - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme  $\lim_{+\infty} f = 0$ , il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall x \geq A, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons  $B = \max(A + 1, N + 1)$ . Soit  $x \geq B$ . Posons  $M = \lfloor x \rfloor$ . Alors

$$\left| \int_0^x f(t) dt - \ell \right| = \left| \int_0^M f(t) dt - \ell + \int_M^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_0^M f(t) dt - \ell \right| + \left| \int_M^x f(t) dt \right|$$

Comme  $M \geq x - 1 \geq N$ ,

$$\left| \int_0^M f(t) dt - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par inégalité triangulaire et comme  $A \leq M \leq x \leq M + 1$ ,

$$\left| \int_M^x f(t) dt \right| \leq \int_M^x |f(t)| dt \leq \int_M^{M+1} \frac{\varepsilon}{2} dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

On en déduit que

$$\forall x \geq B, \left| \int_0^x f(t) dt - \ell \right| \leq \varepsilon$$

Par conséquent  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge et

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t) dt$$

2. Une des implications reste évidemment vraie : si  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge, alors la suite  $n \mapsto \int_0^n f(t) dt$  converge.

La réciproque est fautive en général. On peut par exemple considérer  $f : t \mapsto \cos(\pi t)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^n f(t) dt = \frac{1}{\pi} [\sin(\pi t)]_0^n = 0$$

Mais

$$\int_0^{2n+1/2} f(t) dt = \frac{1}{\pi} [\sin(\pi t)]_0^{2n+1/2} = \frac{1}{\pi}$$

donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  diverge.

**Solution 24**

1. Comme  $f$  est décroissante, elle admet une limite  $\ell$  dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  en  $+\infty$ .

Si  $\ell \in \mathbb{R}^*$ ,  $f \sim \ell$  et la constante  $\ell$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $f$  non plus, ce qui contredit l'énoncé.

Si  $\ell = -\infty$ , alors  $1 = o_{+\infty}(f)$ . De plus,  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  donc la constante 1 le serait également, ce qui n'est pas.

Finalement  $\ell = 0$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Comme  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f(t) \leq f(x)$  pour tout  $t \in [x, 2x]$ . Alors

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = xf(x)$$

De même,  $f(t) \geq f(x)$  pour tout  $t \in [x/2, x]$  de sorte que

$$\int_{x/2}^x f(t) dt \geq \int_{x/2}^x f(x) dt = \frac{1}{2}xf(x)$$

Finalement

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq xf(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t) dt$$

Or  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge. Notamment

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{2x}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^{+\infty} f(t) dt = 0$$

On en déduit que

$$\int_x^{2x} f(t) dt = \int_x^{+\infty} f(t) dt - \int_{2x}^{+\infty} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et que

$$\int_{x/2}^x f(t) dt = \int_{x/2}^{+\infty} f(t) dt - \int_x^{+\infty} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$  i.e.  $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ .

## Solution 25

1. Remarquons que  $g$  est une primitive de  $-f$ . Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = [tg(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} tf(t) dt$$

Or  $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$  converge par hypothèse et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$0 \leq xg(x) = x \int_0^{+\infty} f(t) dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t) dt$$

Or  $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$  converge donc  $\int_x^{+\infty} tf(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  puis  $xg(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Donc le crochet dans l'intégration par parties converge (et vaut 0). On conclut que  $\int_0^{+\infty} g(t) dt$  converge et que cette intégrale vaut  $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ .

2. L'application  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est continue. De plus,  $F(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = 1$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $m \in \mathbb{R}_+$  tel que  $F(m) = \frac{1}{2}$ .

Supposons qu'il existe  $m' \in \mathbb{R}_+$  tel que  $m' \neq m$  et  $F(m') = \frac{1}{2}$ . Alors  $\int_m^{m'} f(t) dt = 0$ . Or  $f$  est continue et positive donc  $f$  est nulle sur  $[m, m']$ . Comme  $f$  est décroissante et positive,  $f$  est nulle sur  $[m, +\infty]$ . Alors  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^m f(t) dt = \frac{1}{2}$ , ce qui contredit l'énoncé.

3. Remarquons que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $g' = -f$  est croissante. On en déduit que  $g$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) \geq g(m) + g'(m)(t - m) = \frac{1}{2} + \alpha(t - m)$$

En posant  $\alpha = g'(m)$ . Par positivité de  $g$ ,

$$\int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt \geq \int_0^{2m} g(t) dt$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} t f(t) dt \geq \int_0^{2m} \left( \frac{1}{2} + \alpha(t - m) \right) dt = m$$

## Calculs

### Solution 26

#### Première méthode :

L'intégrale converge puisque  $t \mapsto e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}}$  est prolongeable par continuité en 0 et que  $e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-a^2 t^2}$  qui est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Posons  $u = at - \frac{b}{t}$ . Ceci définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ . On a alors  $t = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4ab}}{2a}$  (on retient uniquement la solution positive de l'équation  $u = at - \frac{b}{t}$ ). Remarquons que  $u^2 = a^2 t^2 + \frac{b^2}{t^2} - 2ab$ . On a alors

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - 2ab} \left( 1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4ab}} \right) \frac{du}{2a} \\ &= \frac{e^{-2ab}}{2a} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2 + 4ab}} du \right) \end{aligned}$$

Le passage à dernière ligne est valide puisque les deux dernières intégrales sont convergentes. De plus, on sait que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi}$  et

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2 + 4ab}} du = 0$  car la fonction  $u \mapsto \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2 + 4ab}}$  est impaire. Par conséquent :

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt = \frac{e^{-2ab} \sqrt{2\pi}}{2a}$$

#### Deuxième méthode :

Posons  $f(b, t) = e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}}$  et  $I(b) = \int_0^{+\infty} f(b, t) dt$ . La fonction  $b \mapsto f(b, t)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\frac{\partial f}{\partial b}(b, t) = -\frac{2b}{t^2} f(b, t)$$

De plus  $b \mapsto \frac{\partial f}{\partial b}(b, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ . Enfin, pour  $b \in [b_1, b_2]$  avec  $0 < b_1 < b_2$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial b}(b, t) \right| \leq \frac{2b_2}{t^2} e^{-a^2 t^2 - \frac{b_1^2}{t^2}}$$

cette dernière expression étant intégrable sur  $]0, +\infty[$ . Le théorème de dérivation sous l'intégrale nous donne donc  $I'(b) = - \int_0^{+\infty} \frac{2b}{t^2} f(b, t) dt$

pour tout  $b > 0$ . Posons alors  $u = \frac{b}{at}$ . On a alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2b}{t^2} f(b, t) dt = 2a \int_0^{+\infty} e^{-\frac{b^2}{u^2} - a^2 u^2} du = 2aI(b)$$

La fonction  $b \mapsto I(b)$  est donc solution de l'équation différentielle  $y' = -2ay$  sur  $]0; +\infty[$ . Il existe donc  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $I(b) = Ce^{-2ab}$  pour tout  $b \in \mathbb{R}_+^*$ . Enfin  $b \mapsto f(b, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $t \in ]0, +\infty[$  et  $|f(b, t)| \leq e^{-a^2 t^2}$  pour tout  $b \in \mathbb{R}$ . Le théorème de continuité sous l'intégrale nous dit donc que  $b \mapsto I(b)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et notamment en 0. Par continuité,  $I(b) = Ce^{-2ab}$  pour tout  $b \geq 0$ . En particulier  $C = I(0)$ . Or  $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}$  en effectuant le changement de variable  $u = at$ . On obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt = \frac{e^{-2ab} \sqrt{2\pi}}{2a}$$

## Solution 27

1. Posons  $f_{n,\alpha}(x) = \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$ .  $f_{n,\alpha}$  est continue sur  $[0, 1[$  car le dénominateur ne s'y annule pas. De plus,  $f_{n,\alpha}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ . Or  $x \mapsto (1-x)^{-\frac{1}{2}}$  est intégrable sur un voisinage de 1. On en déduit que  $f_{n,\alpha}$  est intégrable sur  $[0, 1[$ .

2. Tout d'abord

$$I_0(0) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2 \left[ \sqrt{1-x} \right]_0^1 = 2$$

Ensuite,

$$t^2 = \frac{1+\alpha x}{1-x} = \frac{\alpha+1}{1-x} - \alpha$$

On en déduit que

$$2t dt = \frac{\alpha+1}{(1-x)^2} dx$$

Or

$$t(1-x) = \sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$$

d'où

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}} = \frac{2(1-x)}{\alpha+1} dt = \frac{2 dt}{t^2 + \alpha}$$

Ainsi

$$I_0(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{2 dt}{t^2 + \alpha}$$

- Si  $\alpha = 0$ , on a déjà vu que  $I_0(0) = 0$ .
- Si  $\alpha > 0$ , alors

$$I_0(\alpha) = \left[ \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{t}{\sqrt{\alpha}} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \sqrt{\alpha}$$

- Si  $\alpha < 0$ , alors on effectue le changement de variable  $u = \frac{1}{t}$  et

$$I_0(\alpha) = \int_0^1 \frac{2 du}{1 + \alpha u^2} = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \operatorname{argth} \sqrt{-\alpha}$$

On voit facilement qu'avec les expressions obtenues, les limites à droite et à gauche de  $I_0$  en 0 sont égales à 2. Or  $I_0(0) = 2$  donc  $I_0$  est continue en 0.

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $u(x) = \sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$  et  $g(x) = x^n u(x)$ . On a

$$\begin{aligned} g'(x) &= nx^{n-1}u(x) + \frac{1}{2}x^n \frac{\alpha-1-2\alpha x}{u(x)} \\ &= n \frac{x^{n-1}(1-x)(1+\alpha x)}{u(x)} + \frac{\alpha-1}{2} \frac{x^n}{u(x)} - \alpha \frac{x^{n+1}}{u(x)} \\ &= n \frac{x^{n-1}}{u(x)} + \left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha-1) \frac{x^n}{u(x)} - (n+1)\alpha \frac{x^{n+1}}{u(x)} \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière égalité sur  $[0, 1]$ , on obtient :

$$nI_{n-1}(\alpha) + \left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - 1)I_n(\alpha) - (n + 1)\alpha I_{n+1}(\alpha) = g(1) - g(0) = 0$$

- Pour  $\alpha = 0$ , la relation devient :

$$nI_{n-1}(0) - \left(n + \frac{1}{2}\right)I_n(0) = 0$$

Par récurrence, on a donc

$$I_n(0) = \frac{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} I_0$$

On a  $I_0(0) = 2$  et on multiplie au numérateur et au dénominateur par  $(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2$  de sorte que :

$$I_n(0) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n-1}(n!)^2} = \frac{2n+1}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}$$

- Pour  $\alpha = 1$ , la relation devient :

$$nI_{n-1}(1) - (n+1)I_{n+1}(1) = 0$$

Par récurrence, on obtient :

$$I_{2p}(1) = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2} I_0(1) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} I_0(1) = \frac{\pi}{2^{2p+1}} \binom{2p}{p}$$

car  $I_0(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ . On obtient également par récurrence :

$$I_{2p+1}(1) = \frac{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \cdots \times 5 \times 3} I_1(1) = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p}}{(2p+1) \binom{2p}{p}}$$

car  $I_1(1) = 1$ .

## Solution 28

Notons  $f$  la fonction intégrée. Cette fonction est continue sur  $]0, +\infty[$ . De plus,

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -2 \ln(t)$$

donc

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1/\sqrt{t})$$

Ainsi  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . De plus,

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

donc  $f$  est également intégrable sur  $[1, +\infty[$ . L'intégrale définissant  $I$  converge donc.

On écrit alors

$$I = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

et on intègre par parties. D'après les équivalents précédents,

$$tf(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -2t \ln(t)$$

et

$$tf(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} tf(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} tf(t) = 0$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} I &= [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t) dt \\ &= - \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{-2/t^3}{1+1/t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2 [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \pi \end{aligned}$$

### Solution 29

Posons

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$$

pour  $x > 0$ . En effectuant le changement de variable  $u = \frac{t}{x}$ , on trouve

$$J(x) = \frac{\ln x}{x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du$$

D'une part

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{+\infty} \arctan - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

D'autre part en effectuant le changement de variable  $v = \frac{1}{u}$  dans  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du$ , on obtient  $I = -I$  d'où  $I = 0$ . Ainsi pour tout  $x > 0$ ,

$$J(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

On a

$$J'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

d'où  $J'(x) > 0$  pour  $x < e$  et  $J'(x) < 0$  pour  $x > e$ . Ainsi  $J$  admet un maximum en  $e$  et celui-ci vaut  $J(e) = \frac{\pi}{2e}$ .

### Solution 30

1. Posons  $f_a(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$  pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Tout d'abord,  $f_a$  est clairement continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Lorsque  $a > 0$ ,  $f_a(t) \sim \frac{1}{t^{a+2}}$  et  $f_a(t) \sim \frac{1}{t^{a+2}}$  donc  $f_a$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  ( $a+2 > 1$ ).

Lorsque  $a = 0$ ,  $f_a(t) \sim \frac{1}{2}$  et  $f_a(t) \sim \frac{1}{2t^2}$  donc  $f_a$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Lorsque  $a < 0$ ,  $f_a(t) \sim \frac{1}{t^a}$  et  $f_a(t) \sim \frac{1}{t^2}$  donc  $f_a$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  ( $a < 1$ ).

Finalement,  $I$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. Par la relation de Chasles,

$$J(a) = \int_0^1 f_a(t) dt + \int_1^{+\infty} f_a(t) dt$$

Par le changement de variable  $t \mapsto \frac{1}{t}$ ,

$$\int_1^{+\infty} f_a(t) dt = \int_0^1 f_{-a}(t) dt$$

On en déduit la formule demandée.

3.

$$\begin{aligned}
I(a) &= J(a) + J(-a) \\
&= \int_0^1 (f_a(t) + f_{-a}(t)) dt \\
&= \int_0^1 \frac{(1+t^{-a}) + (1+t^a)}{(1+t^2)(1+t^a)(1+t^{-a})} dt \\
&= \int_0^1 \frac{2+t^a+t^{-a}}{(1+t^2)(2+t^a+t^{-a})} dt \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

**Solution 31**

1. Posons  $f(x, t) = \frac{\ln t}{x^2 + t^2}$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ . Si  $x \neq 0$ ,  $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$  et  $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$  par croissance comparées donc  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
 Enfin,  $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{\ln t}{t^2}\right)$  donc  $t \mapsto f(0, t)$  n'est pas intégrable au voisinage de  $0^+$ .  
 Le domaine de définition de  $F$  est donc  $\mathbb{R}^*$ .

2. Effectuons le changement de variable  $u = 1/t$  :

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = - \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2} \cdot \frac{du}{u^2} = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1} du = -F(1)$$

Ainsi  $F(1) = 0$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Effectuons le changement de variable  $t = ux$ .

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2 + (ux)^2} \cdot x du \\
&= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) + \ln(u)}{1+u^2} du \\
&= \frac{1}{x} \left( \ln(x) \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du \right) \\
&= \frac{1}{x} \left( \frac{\pi \ln x}{2} + F(1) \right) \\
&= \frac{\pi \ln x}{2x}
\end{aligned}$$

Comme  $F$  est clairement paire,  $F(x) = \frac{\pi \ln |x|}{2|x|}$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Solution 32**

1. Tout d'abord,  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est prolongeable en une fonction continue sur  $[0, \pi]$  puisque  $\sin t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$  donc l'intégrale  $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$  converge.  
 Ensuite, une primitive de  $\sin$  sur  $[\pi, +\infty[$  est  $-\cos$  et la dérivée de  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est  $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ . De plus, le crochet  $\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_\pi^{+\infty}$  converge car  $\cos$  est bornée. Par intégrations par parties,  $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  et  $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$  sont de même nature. Comme  $\frac{\cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ,



$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$  converge donc  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge également.

Finalement,  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge.

**REMARQUE.** On peut régler les «problèmes» en 0 et en  $+\infty$  par une seule intégration par parties en choisissant  $t \mapsto 1 - \cos t$  comme primitive de  $\sin$ . Le crochet  $\left[ \frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty}$  converge car  $1 - \cos(t) = o(t)$ .

2. Puisque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} = 2n+1$$

les fonctions  $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$  et  $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$  sont prolongeables en des fonctions continues sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .  $u_n$  et  $v_n$  sont donc bien définies.

3. Remarquons que

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t))}{\sin(t)} dt$$

Or  $\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$  donc

$$u_{n+1} - u_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+2)t) dt = \frac{1}{n+1} [\sin((2n+2)t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

La suite  $(u_n)$  est donc constante égale à  $u_0 = \frac{\pi}{2}$ .

4. Il s'agit du lemme de Riemann-Lebesgue (hors programme). Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . Comme  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b \varphi(t) \sin(\lambda t) dt = -\frac{1}{\lambda} [\varphi(t) \cos(\lambda t)]_a^b + \frac{1}{\lambda} \int_a^b \varphi'(t) \cos(\lambda t) dt = \frac{\varphi(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} - \frac{\varphi(b) \cos(\lambda b)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b \varphi'(t) \cos(\lambda t) dt$$

Comme  $\cos$  est bornée,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(b) \cos(\lambda b)}{\lambda} = 0$$

Enfin, par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_a^b \varphi'(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi'(t)| |\cos(\lambda t)| dt \leq \int_a^b |\varphi'(t)| dt$$

donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b \varphi'(t) \cos(\lambda t) dt = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b h(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

5.  $h$  est bien continue sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ . De plus,

$$h(t) = \frac{\sin t - t}{t \sin t}$$

et  $t \sin(t) \sim t^2$  et  $\sin t - t = o(t^2)$  donc  $h(t) = o(1)$  i.e.  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$ .

Par ailleurs,  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  et

$$h'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{t^2 \cos t - \sin^2(t)}{t^2 \sin^2(t)}$$

Or  $t^2 \sin^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^4$ ,

$$\sin^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2 \left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)^2 = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)$$

et

$$t^2 \cos^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4)$$

donc  $t^2 \cos t - \sin^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}t^4$ . Par conséquent,  $\lim_{t \rightarrow 0} h'(t) = -\frac{1}{6}$ .

D'après le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ ,  $h$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  que l'on notera encore  $h$  dans la suite.

6. Remarquons que

$$u_n - v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin((2n+1)t) dt$$

Comme  $h$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$  d'après le lemme de Riemman-Lebesgue.

Or  $(u_n)$  est constante égale à  $\frac{\pi}{2}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$ .

7. Par le changement de variable  $u = (2n+1)t$ ,

$$v_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt$$

Comme l'intégrale I converge

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$$

### Solution 33

1. Soit  $x \in [1, +\infty[$ .

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{f(at)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$$

En effectuant le changement de variable  $u = at$  dans la première intégrale

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_a^{ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$$

Enfin, d'après la relation de Chasles,

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$$

2. Soit  $x \in [1, +\infty[$ . Comme  $f$  est continue, elle admet un minimum  $m_x$  et un maximum  $M_x$  sur le segment  $[x, ax]$ . Alors

$$m_x \int_x^{ax} \frac{dt}{t} \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt \leq M_x \int_x^{ax} \frac{dt}{t}$$

ou encore

$$m_x \ln(a) \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt \leq M_x \ln(a)$$

Si  $a > 1$ ,

$$m_x \leq \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt \leq M_x$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc  $c_x \in [x, a_x]$  tel que

$$f(c_x) = \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt$$

ou encore

$$\int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt = f(c_x) \ln(a)$$

Ceci est encore valable si  $a = 1$  (prendre  $c_x = x$  par exemple). Comme  $c_x \geq x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(c_x) = \ell$  de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt = \ell \ln(a)$$

On en déduit que  $\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt$  converge et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \ell \ln(a) - \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$$

### Solution 34

1. Tout d'abord,  $t \mapsto \ln(\sin t)$  est bien continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ . Par ailleurs,

$$\sin t = t + o(t)_{t \rightarrow 0^+}$$

donc

$$\ln(\sin t) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + o(1)_{t \rightarrow 0^+}$$

A fortiori, comme  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$

$$\ln(\sin t) \sim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t)$$

Par croissances comparées, on a donc

$$\ln(\sin t) = o(1/\sqrt{t})_{t \rightarrow +\infty}$$

Par conséquent,  $t \mapsto \ln(\sin t)$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . L'intégrale définissant I converge.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable  $u = \pi/2 - t$ .

3. Via le changement de variable  $u = \pi - t$ ,

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u) du$$

Via la relation de Chasles

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t) dt = \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt$$

4.

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)/2) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt - \frac{\pi \ln 2}{2} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du - \frac{\pi \ln 2}{2} \quad \text{via le changement de variable } u = 2t \\
&= I - \frac{\pi \ln 2}{2}
\end{aligned}$$

Finalement,  $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$ .

**Solution 35**

Tout d'abord, l'intégrande est continu sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par croissances comparées,

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = o(1/t^2)$$

et par DL usuel

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = b - a + o(1)$$

On en déduit que  $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Ensuite, pour  $\varepsilon > 0$ ,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} dt$$

Les deux intégrales convergent encore par croissances comparées. Via les changements de variables  $u = at$  et  $u = bt$ ,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Comme  $\frac{e^{-u}}{u} = \frac{1}{u} + \varphi(u)$  avec  $\varphi(u) = \mathcal{O}(1)$ ,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{dt}{t} + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u) du = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u) du$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u) du = 0$$

Finalement,

$$I = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

**Solution 36**

- Notons, pour tout  $x$  positif

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3}$$

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

On déduit donc du théorème de comparaison aux intégrales de Riemann que  $I$  converge.

- Après une décomposition en éléments simples élémentaires, on aboutit à :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right)$$

d'où, pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-x+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \right) \end{aligned}$$

ainsi, pour tout  $u$  positif

$$I(u) = \frac{1}{3} \left( \ln(u+1) - \ln(\sqrt{u^2-u+1}) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \arctan(2(u-1/2)/\sqrt{3}) + \arctan(1/\sqrt{3}) \right)$$

puis

$$I = \lim_{u \rightarrow +\infty} I(u) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

### Solution 37

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|\cos(t)e^{-at}| \leq e^{-at} \quad \text{et} \quad |\sin(t)e^{-at}| \leq e^{-at}$$

et  $t \mapsto e^{-at}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  (par exemple,  $e^{-at} = o(1/t^2)$ ). Ainsi  $t \mapsto \cos(t)e^{-at}$  et  $t \mapsto \sin(t)e^{-at}$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}_+$ .

Remarquons que

$$I + iJ = \int_0^{+\infty} e^{it} e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} e^{(i-a)t} dt = \left[ \frac{e^{(i-a)t}}{i-a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-i} = \frac{a+i}{a^2+1}$$

En effet,

$$\left| \frac{e^{(i-a)t}}{i-a} \right| = \frac{e^{-at}}{|i-a|}$$

donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{(i-a)t}}{i-a} = 0$ .

Comme  $I$  et  $J$  sont réelles,

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \left( \frac{a+i}{a^2+1} \right) = \frac{a}{a^2+1} \\ J &= \operatorname{Im} \left( \frac{a+i}{a^2+1} \right) = \frac{1}{a^2+1} \end{aligned}$$

### Solution 38

1.

$$I = \frac{1}{2} [\arctan(t/2)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

2. Par décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{4-t^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t} \right)$$

Une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{4-t^2}$  est donc  $t \mapsto \frac{1}{4} (-\ln(2-t) + \ln(2+t))$ . Puisque  $\lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{1}{4} (-\ln(2-t) + \ln(2+t)) = +\infty$ , l'intégrale J diverge.

3. Une primitive de  $\sin$  est  $-\cos$ , qui n'admet pas de limite en  $+\infty$  donc l'intégrale K diverge.

4.

$$L = [t \ln t - t]_0^1 = -1$$

5.

$$M = -\frac{1}{a} [e^{-at}]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$$

6.

$$N = \frac{1}{3} [\arcsin(3t)]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

7. Par une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{t^2 - 3t + 2} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}$$

Ainsi

$$O = \left[ \ln \left( \frac{t-2}{t-1} \right) \right]_3^{+\infty} = -\ln \left( \frac{1}{2} \right) = \ln 2$$

8. Une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$  sur  $[2, +\infty[$  est  $t \mapsto \ln(\ln t)$ , qui admet une limite infinie en  $+\infty$ . L'intégrale P diverge.

### Solution 39

1. L'application  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, elle est prolongeable par continuité en 0 puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . On peut d'ores et déjà affirmer que  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est intégrable sur  $]0, \pi]$ . A fortiori,  $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$  converge.

Par ailleurs, sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = - \left[ \frac{\cos x}{x} \right]_{x=\pi}^{x \rightarrow +\infty} - \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$  et  $\frac{\cos x}{x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$  de sorte que  $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  converge. Par conséquent  $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  converge également.

On en conclut que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  converge.

2. a. On sait que  $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} = \frac{\alpha^2}{2}$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$  est donc prolongeable par continuité en 0.

b. Remarquons que  $\cos$  est borné de même que  $t \mapsto e^{-itx}$  puisqu'elle est à valeurs dans  $\mathbb{U}$ . Ainsi  $\frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .  
On en déduit que  $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

3. a. Tout d'abord,

$$\bar{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{itx} dt$$

En effectuant le changement de variable linéaire  $t \mapsto -t$ , on obtient alors

$$\bar{I} = - \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1 - \cos(-\alpha t)}{(-t)^2} e^{-itx} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt = I$$

Ainsi  $I \in \mathbb{R}$ .

b. Par intégration par parties,

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = - \left[ \frac{\cos(Bx)}{x} \right]_{x=A}^{x \rightarrow +\infty} - B \int_A^{+\infty} \frac{\sin(Bx)}{x} dx$$

Cette intégration par partie est légitime car la première intégrale converge d'après le résultat admis dans l'énoncé et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(Bx)}{x} = 0$ . Ainsi

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{\cos(AB)}{A} - B \int_A^{+\infty} \frac{\sin(Bx)}{x} dx$$

On effectue alors le changement de variable linéaire  $t = Bx$  dans la seconde intégrale pour obtenir

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{\cos(AB)}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

c. D'après la question précédente,

$$\int_A^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2} - \frac{\cos(AB)}{A} + B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{1 - \cos(AB)}{A} + B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

En utilisant à nouveau l'équivalent  $1 - \cos u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$  et comme  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge, on obtient en faisant tendre  $A$  vers 0 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = B \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{B\pi}{2}$$

De plus, si  $B = 0$ , il est clair que  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = 0$  et si  $B < 0$ , on obtient  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = -\frac{B\pi}{2}$  par parité de  $\cos$ . On peut simplifier en affirmant que  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{|B|\pi}{2}$  de manière générale.

d. Par relation de Chasles :

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt$$

En effectuant le changement de variable  $t \mapsto -t$  dans la première intégrale, on obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{itx} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \cos(tx) dt$$

Avec des relations de trigonométrie élémentaire

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{2 \cos(tx) - \cos((x + \alpha)t) - \cos((x - \alpha)t)}{t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos((x + \alpha)t)}{t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos((x - \alpha)t)}{t^2} dt - 2 \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dt \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$I = \frac{|x + \alpha|\pi}{2} + \frac{|x - \alpha|\pi}{2} - \pi|x| = \pi \cdot \frac{|x + \alpha| + |x - \alpha| - 2|x|}{2}$$

## Comportements asymptotiques

### Solution 40

Notons  $F$  l'unique primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  s'annulant en 0. On a donc  $F' + F = \varphi$ . Par variation de la constante, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = e^{-x} \int_0^x e^t \varphi(t) dt + \lambda e^{-x}$$

Notons  $\ell$  la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$ . On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x \varphi(t)e^t dt = \int_0^x \ell e^t dt + \int_0^x (\varphi(t) - \ell)e^t dt = \ell(e^x - 1) + \int_0^x (\varphi(t) - \ell)e^t dt$$

Puisque  $(\varphi(t) - \ell)e^t = o(e^t)$ , que  $t \mapsto e^t$  est positive et que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^t dt$  diverge, on a par intégration des relations de comparaison

$$\int_0^x (\varphi(t) - \ell)e^t dt = o\left(\int_0^x e^t dt\right)_{x \rightarrow +\infty}$$

ou encore

$$\int_0^x (\varphi(t) - \ell)e^t dt = o(e^x)_{x \rightarrow +\infty}$$

Ainsi

$$\int_0^x \varphi(t)e^t dt = \ell e^x + o(e^x)_{x \rightarrow +\infty}$$

puis

$$F(x) = \ell + o(1)_{x \rightarrow +\infty}$$

Ainsi  $F$  admet également pour limite  $\ell$  en  $+\infty$ . Puisque  $f = \varphi - F$ ,  $f$  admet pour limite 0 en  $+\infty$ .

#### Solution 41

1. Posons  $g = f' + af$  de sorte que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' + ay = g$ . Par variation de la constante, il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $f(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{at}g(t) dt + \lambda e^{-ax}$  pour  $x \in \mathbb{R}_+$ . Puisque  $g = o(1)$ ,

$$\int_0^x e^{at}g(t) dt = o\left(\int_0^x |e^{at}| dt\right)_{x \rightarrow +\infty}$$

Or pour  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\int_0^x |e^{at}| dt = \int_0^x e^{\operatorname{Re}(a)t} dt = \frac{1}{\operatorname{Re}(a)} (e^{\operatorname{Re}(a)x} - 1)$$

On en déduit que

$$\int_0^x e^{at}g(t) dt = o(e^{\operatorname{Re}(a)x})_{x \rightarrow +\infty}$$

puis finalement que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} \int_0^x e^{at}g(t) dt = 0$$

Par ailleurs, il est clair que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} = 0$  puisque  $\operatorname{Re}(a) < 0$ . Finalement, on a bien  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

**REMARQUE.** On peut aussi introduire la fonction  $\varphi : x \mapsto e^{ax}f(x)$ . On a alors  $\varphi'(x) = o(e^{ax})$ . Ainsi

$$\varphi(x) - \varphi(0) = o\left(\int_0^x |e^{at}| dt\right)_{x \rightarrow +\infty}$$

On en déduit sans peine que  $\varphi(x) = e^{\operatorname{Re}(a)x}$  i.e.  $\varphi(x) = e^{ax}$  puis  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

2. Posons  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et  $g = f' - jf$ . Alors  $g' - \bar{j}g = f'' + f' + f$  admet une limite nulle en  $+\infty$ . Puisque  $\operatorname{Re}(\bar{j}) < 0$ , la première question montre que  $g$  admet une limite nulle en  $+\infty$ . Puisque  $g = f' - jf$  et  $\operatorname{Re}(j) < 0$ , la première question montre à nouveau que  $f$  admet une limite nulle en  $+\infty$ .



3. Soient  $P \in \mathbb{C}[X]$  dont les racines sont toutes de parties réelles strictement négatives et  $D$  l'opérateur de dérivation. Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  (avec  $n = \deg P$ ) telle que  $\lim_{+\infty} P(D)(f) = 0$ , alors  $\lim_{+\infty} f = 0$ . Il suffit de raisonner par récurrence sur le degré  $n$  de  $P$ .

Si  $n = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Soit alors  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n+1$  dont les racines sont de parties réelles strictement négatives et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\lim_{+\infty} P(D)(f) = 0$ . Soit  $a$  une racine de  $P$ . On peut donc écrire  $P = (X - a)Q$  avec  $\deg Q = n$ . Posons  $g = Q(a)(f)$ . Alors  $g' - ag = P(D)(f)$  admet une limite nulle en  $+\infty$ . Puisque  $\operatorname{Re}(a) < 0$ , la première question montre que  $\lim_{+\infty} g = 0$ . Or  $g = Q(D)(f)$  et  $\deg Q = n$  donc, par hypothèse de récurrence,  $\lim_{+\infty} f = 0$ . Par récurrence, le résultat est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Solution 42

1. D'après la théorème fondamental de l'analyse,  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = g(x)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = F'(0) = f(0).$$

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |F(x)| = \left| \int_0^x 1 \cdot f(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^x 1^2 dt} \sqrt{\int_0^x f(t)^2 dt} \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$$

$$\text{En posant } C = \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |g(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

3. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Par intégration par parties,

$$\int_0^x g(t)^2 dt = \int_0^x \frac{1}{t^2} F(t)^2 dt = - \left[ \frac{F(t)^2}{t} \right]_0^x + 2 \int_0^x \frac{F(t)F'(t)}{t} dt$$

L'intégration par parties est légitime car, par continuité de  $F$  en 0,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} g(t)F(t) = g(0)F(0) = 0$$

Ainsi

$$\int_0^x g(t)^2 dt = - \frac{F(x)^2}{x} + 2 \int_0^x g(t)f(t) dt \leq 2 \int_0^x g(t)f(t) dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^x g(t)^2 dt \leq 2 \sqrt{\int_0^x g(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^x f(t)^2 dt} \leq 2C \sqrt{\int_0^x g(t)^2 dt}$$

puis

$$\int_0^x g(t)^2 dt \leq 4C^2$$

La fonction  $x \mapsto \int_0^x g(t)^2 dt$  est croissante (intégrande positive) et majorée donc admet une limite en  $+\infty$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$  converge donc i.e.  $g$  est de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Solution 43**

En remarquant que  $e^{t^2} \geq 1$ , il est clair que  $\lim_{+\infty} F = +\infty$ . Par commodité, on posera dans la suite  $G = F - F(1)$ . Par intégration par parties,

$$G(x) = \int_1^x e^{t^2} dt = \int_1^x \frac{2te^{t^2}}{2t} dt = \left[ \frac{e^{t^2}}{2t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt$$

Il est clair que  $\frac{e}{2} = o(G(x))$ . De plus,  $\frac{e^{t^2}}{2t^2} = o(e^{t^2})$ . Or  $t \mapsto e^{t^2}$  est positive et  $\int_1^{+\infty} e^{t^2} dt$  diverge donc

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt = o(G(x))$$

Ainsi

$$G(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} + o(G(x))$$

ou encore

$$G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$$

Comme  $\lim_{+\infty} F = +\infty$ ,  $G = F - F(1) \underset{+\infty}{\sim} F$ . Ainsi  $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$ .

**Solution 44**

1. Il suffit par exemple de remarquer que  $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Par intégration par parties

$$g(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{-2te^{-t^2}}{-2t} dt = \left[ -\frac{e^{-t^2}}{2t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$$

L'intégration par parties est légitimée car  $t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2t}$  admet une limite (nulle) en  $+\infty$ . De plus,  $\frac{e^{-t^2}}{2t^2} = o(e^{-t^2})$  et  $t \mapsto e^{-t^2}$  est positive et intégrable au voisinage de  $+\infty$ . Ainsi

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = o(g(x))$$

On en déduit donc que  $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$ .

**Solution 45**

Remarquons que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' + y = g$  avec  $g = f + f'$ . Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{-x}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On applique alors la méthode de variation de la constante. La fonction  $x \mapsto \varphi(x)e^{-x}$  où  $\varphi$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  est solution de  $y' + y = g$  si et seulement si  $\varphi'(x)e^{-x} = g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On peut donc choisir  $\varphi(x) = \int_0^x e^t g(t) dt$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Une solution particulière de  $y' + y = g$  est donc la fonction  $x \mapsto e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$ . Les solutions de  $y' + y = g$  sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$$

Puisque  $f$  est solution de cette équation différentielle, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$$

Puisque  $g(t) = o(1)$ ,  $e^t g(t) = o(e^t)$ . Or  $t \mapsto e^t$  est positive et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^t dt$  diverge donc

$$\int_0^x e^t g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t dt\right)$$

ou encore

$$\int_0^x e^t g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$$

Ainsi

$$e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

On en déduit donc que  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

**REMARQUE.** On peut aussi raisonner de la manière suivante. Posons  $\varphi(x) = e^x f(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\varphi'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On en déduit que  $\varphi'(x) = o(e^x)$ . Or  $x \mapsto e^x$  est positive et  $\int_0^{+\infty} e^t dt$  diverge donc

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^x \varphi'(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t dt\right)$$

On en déduit sans peine que  $\varphi(x) = o(e^x)$  i.e.  $f(x) = o(1)$ .

#### Solution 46

1. Soit  $x \in I$ .  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$  est continue sur  $[x, +\infty[$  et  $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  par croissances comparées. L'intégrale  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  converge donc et  $f$  est définie sur  $I$ .

2. On peut remarquer que

$$\forall x \in I, f(x) = f(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

donc  $f$  est dérivable sur  $I$  d'après le théorème fondamental de l'analyse et

$$\forall x \in I, f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

3. On sait que  $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$  et l'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{t}$  diverge donc

$$f(x) - f(1) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x)$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty$ ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$$

Par intégration par parties

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\left[\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

Comme  $\frac{e^{-t}}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)$  et que  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  diverge,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right)$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$$

4. Tout d'abord,  $f$  est continue sur  $I$ . De plus,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$  donc  $f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  par croissances comparées. Enfin,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$  donc  $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  par croissances comparées. Ainsi  $f$  est intégrable sur  $I$  et  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t) dt$$

Cette intégration par parties est légitime car

$$tf(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -t \ln t \quad \text{et} \quad tf(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$$

de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} tf(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} tf(t) = 0$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} tf'(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

#### Solution 47

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2} dt$  converge puisque  $\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ . Alors, en posant

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2} dt$$

on a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ . Par conséquent,

$$F(x) = G(x) - G(7x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Remarquons que

$$\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{t} + \mathcal{O}(1)$$

On en déduit que l'intégrale  $\int_0^1 \left( \frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt$  converge. Notons  $C$  sa valeur. Alors en posant pour  $x > 0$

$$H(x) = \int_x^1 \left( \frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt$$

on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = C$ . Par conséquent,

$$F(x) = H(7x) - H(x) + \int_x^{7x} \frac{dt}{t} = H(7x) - H(x) + \ln(7) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} C - C + \ln(7) = \ln(7)$$

#### Solution 48

1. Remarquons que  $\frac{\arctan t}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\pi dt}{2t} = \frac{\pi \ln x}{2}$$

2. Remarquons que  $\frac{\ln t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_x^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}$$

3. Remarquons que  $\frac{e^t}{t^3} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^3}$  et  $\int_0^1 \frac{dt}{t^3}$  diverge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_x^1 \frac{e^t}{t^3} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2x^2}$$

4. Remarquons que  $\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$  et  $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$  converge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_0^x \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{x}$$

#### Solution 49

- Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $[x, 2x] \subset \mathbb{R}_+^*$  donc  $t \mapsto \frac{\operatorname{ch} t}{t}$  est continue sur  $[x, 2x]$ . Pour  $x \in \mathbb{R}_-^*$ ,  $[2x, x] \subset \mathbb{R}_-^*$  donc  $t \mapsto \frac{\operatorname{ch} t}{t}$  est continue sur  $[2x, x]$ . Dans tous les cas,  $f(x)$  est bien défini.
- Tout d'abord,  $\varphi$  est évidemment continue sur  $\mathbb{R}^*$ . On sait par ailleurs que  $\operatorname{ch}(t) = 1 + o(t)$  donc  $\varphi(t) = o(1)$ . Notamment,  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi = 0$  donc  $\varphi$  est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, on notera encore  $\varphi$  ce prolongement.
- Plus précisément,  $\operatorname{ch}(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ . Par conséquent,  $\varphi(t) = \frac{1}{2}t + o(t)$ . Comme  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle y admet une unique primitive  $\Phi$  s'annulant en 0. De plus,  $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$ . Enfin, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} \frac{dt}{t} + \int_x^{2x} \varphi(t) dt \\ &= \ln(2) + \Phi(2x) - \Phi(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln 2 + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

4. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Par une intégration par parties,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \left[ \frac{e^t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$$

On sait que

- $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est positive sur  $[1, +\infty[$ ;
- $\frac{e^t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^t}{t}\right)$ ;
- $\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt$  diverge (par exemple  $e^t/t \geq 1/t \geq 0$ ).

On en déduit par intégration d'une relation de comparaison que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t} dt\right)$$

puis que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x} - e \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}$$

5. Remarquons que

$$f(x) = \int_1^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt - \int_1^x \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt$$

On sait que

- $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est positive sur  $[1, +\infty[$ ;
- $\frac{\operatorname{ch} t}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{2t}$ ;
- $\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt$  diverge (par exemple  $e^t/t \geq 1/t \geq 0$ ).

On en déduit que

$$\int_1^x \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2x}$$

Par conséquent, on a également

$$\int_1^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{4x}$$

Mais  $\frac{e^x}{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{2x}}{4x}\right)$  donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{4x}$$

### Solution 50

1. La fonction  $f: x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$  est strictement décroissante sur  $]0, 1]$  (elle est dérivable et sa dérivée est  $x \mapsto -\frac{e^x}{x}$ ). Comme  $\frac{e^t}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ ,  $\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$  diverge. Puisque  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est positive,  $\lim_{0^+} f = +\infty$ . Par ailleurs,  $f(1) = 0$ . Enfin,  $f$  est continue sur  $]0, 1]$  donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $u_n \in ]0, 1]$  tel que  $f(u_n) = n$ .
2. D'après la question précédente,  $f$  induit une bijection strictement décroissante de  $]0, 1]$  sur  $[0, +\infty[$ . Sa bijection réciproque est donc également strictement décroissante. Comme  $u_n = f^{-1}(n)$ ,  $(u_n)$  est strictement décroissante. de plus,  $\lim_{0^+} f = +\infty$  donc  $\lim_{+\infty} f^{-1} = 0$ . Par conséquent,  $(u_n)$  converge vers 0.

3. Remarquons que

$$v_n = \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt - \int_{u_n}^1 \frac{dt}{t} = \int_{u_n}^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ , l'intégrale  $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$  converge. Comme  $(u_n)$  converge vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$$

4. Posons  $I = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ . Ainsi  $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -n + I + o(1)$  puis  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^I}{n}$ . On en déduit que  $\sum u_n$  diverge.

## Suites d'intégrales

### Solution 51

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'application  $t \mapsto f(t)e^{-t/n}$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$  donc  $u_n$  est défini. Cette application est également continue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f(t)e^{-t/n} = o(1/t^2)$  de sorte que  $v_n$  est défini.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque l'intégrale définissant  $v_n$  converge, on peut écrire que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)e^{-t/n} dt$$

Mais en effectuant un changement de variable dans chaque intégrale, on obtient

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi f(t + k\pi)e^{-(t+k\pi)/n} dt$$

Par  $\pi$ -périodicité de  $f$ , on en déduit que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} \int_0^\pi f(t)e^{-t/n} dt = u_n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = u_n a_n$$

avec

$$a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = \frac{1}{1 - e^{-\pi/n}}$$

3. Il s'agit juste d'un équivalent classique, à savoir  $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ . On en déduit immédiatement que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$ .

4. Remarquons tout d'abord que comme  $\int_0^\pi f(t) dt = 0$ ,

$$u_n = \int_0^\pi f(t)(e^{-t/n} - 1) dt$$

On remarque que  $e^{-t/n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$ , ce qui permet de conjecturer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt$  (ce qui précède n'est en aucun cas une preuve). On en déduirait alors la limite de  $(v_n)$ . On propose alors deux méthodes.

**Avec le théorème de convergence dominée.** Posons  $f_n : t \mapsto (e^{-t/n} - 1)f(t)$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|f_n| \leq |f|$  sur  $[0, \pi]$  et  $|f|$  est évidemment intégrable sur  $[0, \pi]$ . D'après le théorème de convergence dominée,  $(u_n)$  converge vers 0.

On remarque ensuite que la suite de fonctions  $(nf_n)$  converge simplement vers la fonction  $t \mapsto -f(t)$ . De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \pi], |nf_n(t)| = n(1 - e^{-t/n})|f(t)| \leq t|f(t)|$$

en utilisant la convexité de  $\exp$ . La fonction  $t \mapsto t|f(t)|$  est à nouveau intégrable sur le segment  $[0, \pi]$  donc, par convergence dominée,

$(nu_n)$  converge vers  $-\int_0^\pi t f(t) dt$ . Puisque  $v_n = a_n u_n$  et  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t f(t) dt$ .

**Sans le théorème de convergence dominée.** Remarquons que  $f$  est continue donc bornée sur le segment  $[0, \pi]$  (elle est même bornée sur  $\mathbb{R}_+$  puisqu'elle est  $\pi$ -périodique). En notant  $M$  un majorant de  $|f|$  sur  $[0, \pi]$ ,

$$|u_n| \leq K \int_0^\pi (1 - e^{-t/n}) dt = K(\pi + n(e^{-\pi/n} - 1))$$

Or via le même équivalent usuel que précédemment,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{-\pi/n} - 1) = -\pi$$

de sorte que  $(u_n)$  converge bien vers 0.

On constate que

$$u_n + \frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt = \int_0^\pi f(t) \left( e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n} \right) dt$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne pour  $t \in \mathbb{R}_+$

$$\left| e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n} \right| \leq \frac{t^2}{2n^2}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient donc

$$\left| u_n + \frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt \right| \leq \frac{K}{2n^2} \int_0^\pi t^2 dt = \frac{K\pi^3}{6n^2}$$

En particulier,

$$u_n + \frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

A fortiori

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt$$

Via l'équivalent de  $(a_n)$  précédemment trouvé, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t f(t) dt$$

## Solution 52

1. Tout d'abord,  $\cos(2nt) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1$ . De plus,

$$\begin{aligned} \ln(\sin t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln(t + o(t)) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln(t(1 + o(1))) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln t + \ln(1 + o(1)) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln t + o(1) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln t + o(\ln t) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t \end{aligned}$$

Finalement,  $f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$ . Par croissances comparées,  $f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ . Puisque  $f_n$  est également continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ , elle est intégrable sur cet intervalle par comparaison à une fonction de Riemann intégrable.

2. On intègre par parties. La fonction  $t \mapsto \ln(\sin t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$  et sa dérivée est  $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t}$ . De même, la fonction  $t \mapsto \sin(2nt)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$  et sa dérivée est  $t \mapsto 2n \cos(2nt)$ . Enfin,  $\sin(2nt) \ln(\sin t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2nt \ln t$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(2nt) \ln(\sin t) = 0$  par croissances comparées. Cela légitime l'intégration par parties.

$$J_n = 2nI_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n \cos(2nt) \ln(\sin t) dt = [\sin(2nt) \ln(\sin t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(2nt) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(2nt) dt$$



3.

$$\begin{aligned}
J_{n+1} - J_n &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot (\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)) dt \\
&= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(t) \cos((2n+1)t) dt \\
&= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos((2n+1)t) dt \\
&= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos((2n+2)t) + \cos(2nt)) dt = 0
\end{aligned}$$

Ainsi la suite  $(J_n)$  est constante. De plus,

$$J_1 = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(2t) dt = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t) + 1) dt = -\pi$$

Finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $J_n = -\pi$  et  $I_n = -\frac{\pi}{2n}$ .

**Solution 53**

De manière plus générale, posons  $J_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln(t)^p dt$  pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ .  $J_{n,0}$  est clairement définie et, pour  $p > 0$ ,  $t^n \ln(t)^p \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$  par croissances comparées donc  $t \mapsto t^n \ln(t)^p$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .  $J_{n,p}$  est donc également définie pour  $p > 0$ . Par intégration par parties, lorsque  $p > 0$ ,

$$\int_0^1 t^n \ln(t)^p dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t)^p \right]_0^1 - \frac{p}{n+1} \int_0^1 t^n \ln(t)^{p-1} dt$$

Cette intégration par parties est légitime car la seconde intégrale, à savoir  $J_{n,p-1}$  converge. De plus, le crochet est nul par croissances comparées. Ainsi

$$J_{n,p} = -\frac{p}{n+1} J_{n,p-1}$$

Par une récurrence facile

$$J_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} J_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

En particulier,

$$I_n = J_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

**Solution 54**

1. Par croissances comparées,  $\ln^n(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o(1/\sqrt{x})$  donc  $I_n$  converge.

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On écrit

$$I_n = \int_0^1 1 \cdot \ln^n(x) dx$$

et on intègre par parties. Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^n(x) = 0$  donc

$$I_n = [x \ln^n(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} \cdot n \cdot \ln^{n-1}(x) dx = -n I_{n-1}$$

3. Comme  $I_0 = 1$ . Une récurrence évidente montre que  $I_n = (-1)^n n!$ .

## Fonctions définies par des intégrales

### Solution 55

- Tout d'abord, la fonction  $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  - De plus,  $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$  et la fonction positive  $t \mapsto t^{x-1}$  est intégrable au voisinage de  $0^+$  si et seulement si  $x > 0$ .
  - Enfin,  $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1/t^2)$  et la fonction positive  $t \mapsto 1/t^2$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

Ainsi  $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $x > 0$ . Comme cette fonction est positive, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$  converge si et seulement si  $x > 0$ . Le domaine de définition de  $\Gamma$  est donc  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $t \mapsto t^x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de dérivée  $t \mapsto xt^{x-1}$ . La fonction  $t \mapsto -e^{-t}$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de dérivée  $t \mapsto e^{-t}$ . Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. De plus, comme  $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x e^{-t} = 0$$

et, par croissances comparées,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-t} = 0$$

On en déduit que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

- On a donc  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $\Gamma(1) = 1$ , une récurrence évidente montre que  $\Gamma(n) = (n-1)!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from math import factorial
>>> from numpy import exp, inf
>>> def gamma(x):
...     return quad(lambda t: t**(x-1)*exp(-t), 0, inf)[0]
...
>>> for n in range(1, 10):
...     gamma(n), factorial(n-1)
...
(1.0000000000000002, 1)
(0.9999999999999998, 1)
(2.0, 2)
(6.0, 6)
(24.0, 24)
(120.0, 120)
(720.0000000000001, 720)
(5040.000000000001, 5040)
(40320.0, 40320)
```

### Solution 56

- Tout d'abord, la fonction  $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$  est continue sur  $]0, 1[$ .
  - De plus,  $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$  et la fonction positive  $t \mapsto t^{x-1}$  est intégrable au voisinage de  $0^+$  si et seulement si  $x > 0$ .
  - Enfin,  $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$  et la fonction positive  $t \mapsto (1-t)^{y-1}$  est intégrable au voisinage de  $1^-$  si et seulement si  $y > 0$ .

Ainsi  $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$  est intégrable sur  $]0, 1[$  si et seulement si  $x > 0$  et  $y > 0$ . Comme cette fonction est positive, l'intégrale  $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  converge si et seulement si  $x > 0$  et  $y > 0$ .

- Il suffit d'effectuer le changement de variable  $u = 1 - t$ .

- Les fonctions  $t \mapsto t^x$  et  $t \mapsto (1-t)^y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$  de dérivées respectives  $t \mapsto xt^{x-1}$  et  $t \mapsto -y(1-t)^{y-1}$ . Par intégrations par parties,

$$\int_0^1 yt^x(1-t)^{y-1} dt = -[t^x(1-t)^y]_0^1 + \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. Puisque  $x > 0$  et  $y > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x(1-t)^y = \lim_{t \rightarrow 1^-} t^x(1-t)^y = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} yB(x+1, y) &= \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t) dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt - x \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt \quad \text{car ces deux intégrales convergent} \\ &= xB(x, y) - xB(x+1, y) \end{aligned}$$

ou encore

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

- D'après la question précédente

$$B(n+1, p+1) = \frac{n}{n+p+1} B(n, p+1)$$

Par une récurrence facile

$$B(n+1, p+1) = \frac{n!(p+1)!}{(n+p+1)!} B(1, p+1) = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from math import factorial
>>> def beta(x,y):
...     return quad(lambda t:t**(x-1)*(1-t)**(y-1),0,1)[0]
...
>>> for n in range(1,10):
...     for p in range(1,10):
...         beta(n+1,p+1),factorial(n)*factorial(p)/factorial(n+p+1)
...
(0.16666666666666669, 0.16666666666666666)
(0.08333333333333334, 0.08333333333333333)
(0.05, 0.05)
(0.03333333333333333, 0.03333333333333333)
(0.023809523809523815, 0.023809523809523808)
(0.017857142857142856, 0.017857142857142856)
```

```
(0.01388888888888889, 0.01388888888888888)
(0.01111111111111113, 0.01111111111111112)
(0.00909090909090909, 0.00909090909090909)
(0.08333333333333334, 0.08333333333333333)
(0.03333333333333333, 0.03333333333333333)
(0.01666666666666666, 0.01666666666666666)
(0.009523809523809523, 0.009523809523809525)
(0.005952380952380953, 0.005952380952380952)
(0.003968253968253968, 0.003968253968253968)
(0.002777777777777778, 0.002777777777777778)
(0.00202020202020202, 0.00202020202020202)
(0.0015151515151515152, 0.0015151515151515152)
(0.05, 0.05)
(0.01666666666666666, 0.01666666666666666)
(0.007142857142857142, 0.007142857142857143)
(0.003571428571428571, 0.0035714285714285713)
(0.001984126984126984, 0.001984126984126984)
(0.0011904761904761906, 0.0011904761904761906)
(0.0007575757575757576, 0.0007575757575757576)
(0.000505050505050505, 0.000505050505050505)
(0.00034965034965034965, 0.00034965034965034965)
(0.033333333333333326, 0.03333333333333333)
(0.009523809523809523, 0.009523809523809525)
(0.003571428571428571, 0.0035714285714285713)
(0.001587301587301587, 0.0015873015873015873)
(0.0007936507936507935, 0.0007936507936507937)
(0.00043290043290043285, 0.0004329004329004329)
(0.0002525252525252525, 0.0002525252525252525)
(0.0001554001554001554, 0.0001554001554001554)
(9.99000999000999e-05, 9.99000999000999e-05)
(0.023809523809523808, 0.023809523809523808)
(0.005952380952380953, 0.005952380952380952)
(0.001984126984126984, 0.001984126984126984)
(0.0007936507936507935, 0.0007936507936507937)
(0.00036075036075036075, 0.00036075036075036075)
(0.00018037518037518038, 0.00018037518037518038)
(9.712509712509713e-05, 9.712509712509713e-05)
(5.550005550005551e-05, 5.55000555000555e-05)
(3.330003330003329e-05, 3.33000333000333e-05)
(0.017857142857142856, 0.017857142857142856)
(0.003968253968253968, 0.003968253968253968)
(0.0011904761904761906, 0.0011904761904761906)
(0.00043290043290043285, 0.0004329004329004329)
(0.00018037518037518038, 0.00018037518037518038)
(8.325008325008325e-05, 8.325008325008325e-05)
(4.1625041625041625e-05, 4.1625041625041625e-05)
(2.22000222000222e-05, 2.22000222000222e-05)
(1.2487512487512486e-05, 1.2487512487512488e-05)
(0.01388888888888888, 0.01388888888888888)
(0.0027777777777777775, 0.002777777777777778)
(0.0007575757575757576, 0.0007575757575757576)
(0.0002525252525252525, 0.0002525252525252525)
(9.712509712509713e-05, 9.712509712509713e-05)
(4.1625041625041625e-05, 4.1625041625041625e-05)
(1.942501942501942e-05, 1.9425019425019425e-05)
(9.712509712509713e-06, 9.712509712509713e-06)
```

```
(5.1419169066227886e-06, 5.1419169066227886e-06)
(0.01111111111111112, 0.01111111111111112)
(0.00202020202020202, 0.00202020202020202)
(0.000505050505050505, 0.000505050505050505)
(0.0001554001554001554, 0.0001554001554001554)
(5.550005550005551e-05, 5.55000555000555e-05)
(2.22000222000222e-05, 2.22000222000222e-05)
(9.712509712509713e-06, 9.712509712509713e-06)
(4.570592805886924e-06, 4.570592805886924e-06)
(2.285296402943462e-06, 2.285296402943462e-06)
(0.00909090909090909, 0.00909090909090909)
(0.0015151515151515152, 0.0015151515151515152)
(0.00034965034965034965, 0.00034965034965034965)
(9.99000999000999e-05, 9.99000999000999e-05)
(3.330003330003329e-05, 3.33000333000333e-05)
(1.2487512487512486e-05, 1.2487512487512488e-05)
(5.1419169066227886e-06, 5.1419169066227886e-06)
(2.285296402943462e-06, 2.285296402943462e-06)
(1.0825088224469027e-06, 1.0825088224469029e-06)
```