

# DEVOIR À LA MAISON N°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

**1** Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels positifs deux à deux distincts. On peut supposer  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ . Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_{\lambda_i} = 0$ . Supposons que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$  et soit alors  $j = \min\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i \neq 0\}$ . Alors  $\sum_{i=j}^n \alpha_i \phi_{\lambda_i} = 0$ .

Mais, comme  $\alpha_j \neq 0$  et  $\lambda_j < \dots < \lambda_n$ ,  $\sum_{i=j}^n \alpha_i \phi_{\lambda_i} \sim_{0^+} \alpha_j \phi_{\lambda_j}$  d'où une contradiction. Ainsi  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est nul et  $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$  est libre.

**2** Notons  $D'_n$  le déterminant obtenu à partir de  $D_n$  en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}$$

Comme  $R(a_1) = \dots = R(a_{n-1}) = 0$ , en développant  $D'_n$  par rapport à sa dernière colonne, on obtient  $D'_n = R(a_n)D_{n-1}$ .

Par ailleurs, en effectuant sur  $D'_n$  l'opération  $C_n \leftarrow C_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k C_k$ , on obtient  $D'_n = A_n D_n$  en factorisant la dernière colonne obtenue par  $A_n$ . On en déduit que  $A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$ .

**3** Supposons que  $b_n \neq b_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Remarquons alors que

$$A_n = [(X + b_n)R(X)](-b_n) = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (b_n + a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (b_k - b_n)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_n)}{\prod_{k=1}^{n-1} (b_n - b_k)}$$

Par ailleurs,

$$R(a_n) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)}$$

On en déduit que

$$D_n = \frac{R(a_n)}{A_n} D_{n-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)(b_n - b_k)}{(a_n + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} D_{n-1}$$

Cette relation est encore valable s'il existe  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  puisque  $D_n$  est alors nul (deux colonnes identiques).

On obtient alors la formule voulue par récurrence.

**4** Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite  $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(x, A) = 0$ . Autrement dit,  $(y_n)$  converge vers  $x$ . Par caractérisation séquentielle de l'adhérence,  $x \in \overline{A}$ .

**5** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \subset A_{n+1} \subset A$  donc  $d(x, A) \leq d(x, A_{n+1}) \leq d(x, A_n)$ . La suite  $(d(x, A_n))$  est décroissante et minorée par  $d(x, A)$ ; elle converge vers un réel  $\delta \geq d(x, A)$ . Supposons que  $\delta > d(x, A)$ . Par définition de la borne inférieure, il existe alors  $y \in A$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x, A) \leq \|x - y\| < \delta \leq d(x, A_n)$$

Ceci est absurde puisque  $y$  appartient à  $A$  et donc à l'un des  $A_n$ .

**6**  $B \cap V$  est la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $\|x\|$  de l'espace vectoriel normé  $V$ . On en déduit que  $B \cap V$  est fermé et borné dans  $V$  qui est de dimension finie. Ainsi  $B \cap V$  est compact de  $V$  et donc un compact de  $E$ . Comme  $B \cap V \subset V$ ,  $d(x, V) \leq d(x, B \cap V)$ . Soit alors  $y \in V$ .

- Si  $y \in B$ , alors  $\|x - y\| \geq d(x, B \cap V)$ .
- Si  $y \notin B$ , alors  $\|x - y\| > \|x\|$ . Or il est clair que  $0_E \in B \cap V$  de sorte que

$$\|x - y\| > \|x\| = \|x - 0_E\| \geq d(x, B \cap V)$$

Finalement, pour tout  $y \in V$ ,  $\|x - y\| \geq d(x, B \cap V)$ . On en déduit que  $d(x, V) \geq d(x, B \cap V)$  puis  $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ .

**7** L'application  $y \mapsto \|x - y\|$  est continue car 1-lipschitzienne (considérer la seconde inégalité triangulaire). Cette application admet donc un minimum sur le compact  $B \cap V$ . Il existe donc  $y \in B \cap V \subset V$  tel que

$$\|x - y\| = \min_{y \in B \cap V} \|x - y\| = d(x, B \cap V) = d(x, V)$$

**8** Notons  $y$  le projeté orthogonal de  $x$  sur  $V$ . Alors  $y \in V$  de sorte que  $d(x, V) \leq \|x - y\|$ . De plus,  $x - y \in V^\perp$  et Pour tout  $z \in F$ ,  $y - z \in V$  et donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

ou encore

$$\forall z \in V, \|x - z\| \geq \|x - y\|$$

On en déduit que  $d(x, V) \geq \|x - y\|$  puis que  $d(x, V) = \|x - y\|$ .

Soit  $z \in V$  tel que  $\|x - z\| = d(x, V) = \|x - y\|$ . On a vu précédemment

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2$$

On en déduit que  $\|y - z\| = 0$  i.e.  $y = z$ .

**9** Supposons que  $(x_1, \dots, x_n)$  soit liée. Il existe donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_n$  non nul tel que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0$ . Par bilinéarité du produit scalaire,  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En notant  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $M(x_1, \dots, x_n)$ , on a donc  $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ . La famille des colonnes de  $M(x_1, \dots, x_n)$  est donc liée et  $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

Réciproquement, supposons que la  $G(x_1, \dots, x_n)$  soit liée. Il existe donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_n$  non nul tel que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$  i.e.  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = 0$  ou encore  $\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, x_i \rangle = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Ainsi  $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \in \text{vect}(x_1, \dots, x_n) \cap \text{vect}(x_1, \dots, x_n)^\perp = \{0\}$ . La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est donc liée.

**10** Notons  $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  le projeté orthogonal de  $x$  sur  $V$ . En effectuant l'opération  $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i$ , la dernière colonne de  $G(x_1, \dots, x_n, x)$  devient par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, x - y \rangle \\ \langle x_2, x - y \rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, x - y \rangle \\ \langle x, x - y \rangle \end{pmatrix}$$

Or  $x - y \in V^\perp$  donc  $\langle x_i, x - y \rangle = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . De plus,

$$\langle x, x - y \rangle = \langle x - y, x - y \rangle + \langle y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 = d(x, V)^2$$

En développant le déterminant obtenu par rapport à sa dernière colonne, on obtient donc

$$G(x_1, \dots, x_n, x) = d(x, V)^2 G(x_1, \dots, x_n)$$

Comme  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre,  $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , ce qui permet de conclure.

**11** Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ . Alors, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq |f(x)| \leq N_\infty(f)$  puis,  $|f(x)|^2 \leq N_\infty(f)^2$  et enfin, par croissance de l'intégrale

$$N_2(f)^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 N_\infty(f)^2 dx = N_\infty(f)^2$$

Ainsi  $N_2(f) \leq N_\infty(f)$ .

Soit  $A$  une partie de  $\mathcal{C}([0, 1])$  et  $f \in \bar{A}^\infty$ . Il existe donc une suite  $(f_n)$  d'éléments de  $A$  convergeant vers  $f$  pour la norme  $N_\infty$ . Ainsi  $N_\infty(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq N_2(f_n - f) \leq N_\infty(f_n - f)$$

donc  $N_2(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi  $(f_n)$  converge vers  $f$  pour la norme  $N_2$  et  $f \in \bar{A}^2$ . Par conséquent,  $\bar{A}^\infty \subset \bar{A}^2$ .

**12** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$N_2(\phi_0 - \phi_{1/n})^2 = \int_0^1 (1 - x^{1/n})^2 dx = \int_0^1 (1 - 2x^{1/n} + x^{2/n}) dx = 1 - \frac{2}{1/n + 1} + \frac{1}{2/n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - 2 + 1 = 0$$

Ainsi  $(\phi_{1/n})$  est une suite d'éléments de  $V_0$  convergeant vers  $\phi_0$  pour la norme 2. On en déduit que  $\phi_0 \in \bar{V}_0^2$ .

**13** Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ . On considère une suite  $(\psi_n)$  d'éléments de  $V_0$  convergeant vers  $\phi_0$  pour la norme  $N_2$  (par exemple, la suite de la question précédente). Alors  $(f\psi_n)$  est encore une suite d'éléments de  $V_0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, N_2(f - f\psi_n)^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 |\phi_0(x) - \psi_n(x)|^2 dx \leq N_\infty(f)^2 N_2(\phi_0 - \psi_n)$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, N_2(f - f\psi_n) \leq N_\infty(f) N_2(\phi_0 - \psi_n)$$

On en déduit que  $N_2(f - f\psi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  i.e.  $(f\psi_n)$  converge vers  $f$  pour la norme  $N_2$ . Ceci prouve que  $V_0$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_2$ .

Pour tout  $f \in V_0$ ,  $N_\infty(f - \phi_0) \geq |f(0) - \phi_0(0)| = 1$  donc  $\phi_0 \notin \bar{V}_0^\infty$  et  $V_0$  n'est pas dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_\infty$ .

**14** Soit  $V$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé. Alors  $0 \in V \subset \bar{V}$ . Soit  $(x, y) \in (\bar{V})^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Il existe alors deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  d'éléments de  $V$  convergeant respectivement vers  $x$  et  $y$ . Comme  $V$  est un sous-espace vectoriel,  $(\lambda x_n + \mu y_n)$  est une suite d'éléments de  $V$  qui converge vers  $\lambda x + \mu y$  par opérations. Ainsi  $\lambda x + \mu y \in \bar{V}$ . On en déduit que  $\bar{V}$  est également un sous-espace vectoriel.

**15** Si  $V$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_\infty$ , il est clair que  $\phi_m \in \bar{V}^\infty$  pour tout entier  $m \geq 0$ .

Si  $\phi_m \in \bar{V}^\infty$  pour tout entier  $m \geq 0$ , alors  $\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbb{N}) \subset \bar{V}^\infty$  car  $\bar{V}^\infty$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}([0, 1])$ . Mais  $\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbb{N})$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_\infty$  d'après le théorème de Weierstrass. Comme  $\bar{V}^\infty$  est fermé pour la norme  $N_\infty$ ,  $\mathcal{C}([0, 1]) = \overline{\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbb{N})}^\infty \subset \bar{V}^\infty$  et donc  $\bar{V}^\infty = \mathcal{C}([0, 1])$ .

**16** A nouveau, il est clair que si  $V$  est dense pour la norme  $N_2$ , il est clair que  $\phi_m \in \bar{V}^2$  pour tout entier  $m \geq 0$ .

Supposons maintenant que  $\phi_m \in \bar{V}^2$  pour tout entier  $m \geq 0$ . Pour simplifier, notons  $W = \bar{V}^2$ . Comme précédemment,  $\mathcal{C}([0, 1]) = \overline{\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbb{N})}^\infty \subset \bar{W}^\infty$ . Ainsi  $\bar{W}^\infty = \mathcal{C}([0, 1])$ . Or, d'après la question 11,  $\bar{W}^\infty \subset \bar{W}^2$  donc  $\bar{W}^2 = \mathcal{C}([0, 1])$ . Mais comme  $W = \bar{V}^2$ ,  $\bar{W}^2 = \bar{V}^2$ . Finalement  $\bar{V}^2 = \mathcal{C}([0, 1])$  i.e.  $V$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_2$ .

**17** Remarquons tout d'abord que  $(W_n)$  est croissante pour l'inclusion et que  $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$  de sorte que pour tout  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ ,  $d(f, W) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f, W_n)$  d'après la question 5.

Supposons que  $W$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_2$ . Soit  $\mu \in \mathbb{N}$ . Alors  $\phi_\mu \in \bar{W}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = d(\phi_\mu, W) = 0$ .

Supposons que pour tout entier  $\mu \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ . Alors  $d(\phi_\mu, W) = 0$  pour tout  $\mu \in \mathbb{N}$ . Ceci signifie que

$\phi_\mu \in \bar{W}^2$  pour tout  $\mu \in \mathbb{N}$  d'après la question 4. Enfin, on déduit avec la question 16 que  $W$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_2$ .

**18** Soit  $\mu \in \mathbb{R}_+$ . D'après la question 10,

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n})}$$

Or pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $\langle \phi_a, \phi_b \rangle = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$ . Ainsi  $G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n})$  est un déterminant de Cauchy  $D_n$  dans lequel on a choisi  $a_k = b_k = \lambda_k + 1/2$ . Il en est de même pour  $G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)$ . En utilisant la relation de récurrence déterminée à la question 3, on obtient

$$G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}) \frac{\prod_{k=0}^n (\mu - \lambda_k)^2}{(2\mu + 1) \prod_{k=0}^n (\lambda_k + \mu + 1)^2}$$

On en déduit que

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \frac{\prod_{k=0}^n |\mu - \lambda_k|}{\prod_{k=0}^n (\lambda_k + \mu + 1)}$$

**REMARQUE.** On n'a en fait pas besoin de l'expression explicite des déterminants de Cauchy mais seulement de la relation de récurrence qui les lie.

**19** Soit  $\mu \geq 0$ .

Si  $(\lambda_k)$  diverge vers  $+\infty$ , il est clair que  $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$  converge vers 1.

Réciproquement, supposons que  $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$  converge vers 1. Posons comme indiqué dans l'énoncé,  $f : x \in [0, \mu] \mapsto \frac{\mu - x}{x + \mu + 1}$ . La suite  $(|f(\lambda_k)|)$  converge alors vers 1. La fonction  $f$  décroît de  $\frac{\mu}{\mu + 1} < 1$  vers 0 sur  $[0, \mu]$ . On en déduit que  $\lambda_k \geq \mu$  à partir d'un certain rang et la suite  $(-f(\lambda_k))$  converge vers 1. La fonction  $-f$  est continue et strictement croissante sur  $[\mu, +\infty[$  donc elle induit une bijection de  $[\mu, +\infty[$  sur  $[0, 1[$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -f = 1$ . Il s'ensuit que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (-f)^{-1} = +\infty$  et donc  $(\lambda_k)$  diverge vers  $+\infty$ .

**20** Remarquons déjà que  $W$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_2$  si et seulement si  $d(\phi_\mu, W_n) = 0$  pour tout  $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  puisque, s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mu = \lambda_k$ , alors  $d(\phi_\mu, W_n) = 0$  pour tout entier  $n \geq k$ .

Par passage au logarithme,  $W$  est donc dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_2$  si et seulement si  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \ln \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$  diverge vers  $-\infty$  pour tout  $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ .

Si la série  $\sum \frac{1}{\lambda_k}$  converge, alors  $\frac{1}{\lambda_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$  i.e.  $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$  (les  $\lambda_k$  sont positifs). Soit  $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ . On en déduit alors qu'à partir d'un certain rang,  $\lambda_k \geq \mu$  de sorte que

$$\ln \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = \ln \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1} = \ln \left(1 - \frac{2\mu + 1}{\lambda_k + \mu + 1}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2\mu + 1}{\lambda_k}$$

La série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \ln \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$  converge donc.

Réciproquement, supposons que pour tout  $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ ,  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \ln \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$  converge. On choisit  $\mu$  arbitrairement.

Alors  $\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$  puis  $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$  d'après la question précédente. On montre comme précédemment que

$$\ln \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2\mu + 1}{\lambda_k}$$

et on en déduit que  $\sum \frac{1}{\lambda_k}$  converge.

On a donc bien montré que  $W$  était dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  si et seulement si  $\sum \frac{1}{\lambda_k}$  divergeait.

**21** Supposons que  $W$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_\infty$ . Alors  $\mathcal{C}([0, 1]) = \overline{W}^\infty \subset \overline{W}^2$  d'après la question 11 et  $W$  est donc dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_2$ . D'après la question précédente,  $\sum \frac{1}{\lambda_k}$  diverge.

**22** Remarquons que puisque  $\mu$  et les  $\lambda_k$  sont dans  $[1, +\infty[$ ,  $(\phi_\mu - \psi)(0) = 0$ . Par ailleurs,

$$(\phi_\mu - \psi)' = \mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k-1}$$

Il suffit donc de montrer que pour tout  $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  s'annulant en 0,  $N_\infty(f) \leq N_2(f')$ .

Soit donc  $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  s'annulant en 0. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f(x)^2 = \left( \int_0^x f'(t) dt \right)^2 \leq \left( \int_0^x dt \right)^2 \left( \int_0^x f'(t)^2 dt \right) \leq \left( \int_0^1 f'(t)^2 dt \right)^2 = N_2(f')^2$$

Ainsi  $|f(x)| \leq N_2(f')$  pour tout  $x \in [0, 1]$  i.e.  $N_\infty(f) \leq N_2(f')$ .

**23** Supposons que  $\sum \frac{1}{\lambda_k}$  diverge. Alors la série  $\sum \frac{1}{\lambda_k - 1}$  diverge également. En effet, si  $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ ,  $\frac{1}{\lambda_k - 1} \sim \frac{1}{\lambda_k}$  et  $\sum \frac{1}{\lambda_k}$  diverge. Sinon,  $\sum \frac{1}{\lambda_k - 1}$  diverge grossièrement. On en déduit avec la question 20 que  $\text{vect}(\phi_{\lambda_k-1}, k \in \mathbb{N})$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_2$ .

Remarquons déjà que puisque  $\lambda_0 = 0$ ,  $\phi_0 \in W \subset \overline{W}^\infty$ . Soit alors un entier  $\mu \geq 1$ . Soit également  $\varepsilon > 0$ . Par densité de  $\text{vect}(\phi_{\lambda_k-1}, k \in \mathbb{N})$  dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_2$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tels que

$$N_\infty(\mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n b_k \phi_{\lambda_k-1}) \leq \varepsilon$$

On pose alors  $\psi = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{\lambda_k} \phi_{\lambda_k}$  et la question précédente montre que

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_\infty(\mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n b_k \phi_{\lambda_k-1}) \leq \varepsilon$$

On en déduit que  $\phi_\mu \in \overline{W}^\infty$  pour tout  $\mu \in \mathbb{N}$ . Comme  $\overline{W}^\infty$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}([0, 1])$ ,  $\text{vect}(\phi_\mu, \mu \in \mathbb{N}) \subset \overline{W}^\infty$ . Comme  $\overline{W}^\infty$  est fermé pour la norme  $N_\infty$ ,  $\overline{\text{vect}(\phi_\mu, \mu \in \mathbb{N})}^\infty \subset \overline{W}^\infty$ . Le théorème de Weierstrass stipule que  $\overline{\text{vect}(\phi_\mu, \mu \in \mathbb{N})}^\infty = \mathcal{C}([0, 1])$ , ce qui permet de conclure.

**24** Posons  $m = \inf_{k \geq 1} \lambda_k$ ,  $\mu_k = \frac{\lambda_k}{m}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $\mu_0 = 0$  et  $\mu_k \geq 1$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . La question précédente montre que  $V = \text{vect}(\phi_{\mu_k}, k \in \mathbb{N})$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_\infty$ . Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ . Posons  $g : x \mapsto f(x^{1/m})$ . Il existe donc une suite  $(v_n)$  d'éléments de  $V$  convergeant vers  $g$  pour la norme  $N_\infty$  i.e.  $N_\infty(g - v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Posons alors  $w_n : x \mapsto v_n(x^m)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\phi_{\mu_k}(x^m) = \phi_{\lambda_k}(x)$ ,  $(w_n)$  est alors une suite d'éléments de  $W$ . De plus, comme  $x \mapsto x^m$  établit une bijection de  $[0, 1]$  dans lui-même,

$$N_\infty(g - v_n) = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - v_n(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x^m) - v_n(x^m)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - w_n(x)| = N_\infty(f - w_n)$$

Ainsi  $N_\infty(f - w_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  i.e.  $(w_n)$  est une suite d'éléments de  $W$  convergeant vers  $f$  pour la norme  $N_\infty$ . Il s'ensuit que  $W$  est encore dense dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  pour la norme  $N_\infty$ .