Devoir à la maison n°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – BECEAS 2020

I Intégrales généralisées de Dirichlet

On considère la fonction

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ (sous réserve de convergence)

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} g(t)^n \, \mathrm{d}t$$

$\boxed{1}$ **1.a** Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1.b A l'aide d'une intégration par parties, montrer que I_1 converge.
On admet que $\mathrm{I}_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

1.c Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}$ pour $j \in \mathbb{N}^*$.

1.d Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $t \mapsto \ln(g(t))$.

1.e On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \, \mathrm{d}t$ lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{2}$ Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

2.a Montrer que l'intégrale I_n converge.

2.b Que vaut I_2 ?

$\boxed{3}$ On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $h_n(t) = \sin^n(t)$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

3.a Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que $h_n^{(k)}$ est bornée.

3.b Montrer que $h_n^{(k)}(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}$.

3.c Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \, \mathrm{d}t$.

3.d Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ et montrer que

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\, \mathrm{d}t$$

$\boxed{4}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

4.a Montrer que pour tout réel t

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n}(t) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}e^{i(2n-2k)t}$$

4.b En déduire que pour tout réel t

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\sin(2jt)$$

4.c En déduire l'égalité

$$\mathrm{I}_{2n} = \frac{\pi}{2(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}$$

$\boxed{5}$ **Etude asymptotique de la suite de terme général I_n.**

5.a Montrer que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)^n\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

5.b **5.b.i** Etudier la monotonie de g sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5.b.ii A l'aide de la question **1.d**, donner un équivalent de $\ln(g(\varepsilon_n))$ où $\varepsilon_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

5.b.iii En déduire que

$$\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t)^n\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

5.c **5.c.i** Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, $|e^{-u} - 1| \leq 2u$.

5.c.ii Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, b]$,

$$-t^3 \leq \ln(g(t)) + \frac{t^2}{6} \leq 0$$

On utilisera le résultat de la question **1.d**.

5.c.iii En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left|\int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n\, \mathrm{d}t - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}}\, \mathrm{d}t\right| \leq \frac{\ln^4 n}{2n}$$

5.d En déduire que

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

On se souvidendra du résultat de **1.e**.

II Montées d'une permutation de $[\![1,n]\!]$

On appelle, pour tout entier naturel n non nul, *montée* d'une liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ d'entiers naturels *distincts deux à deux* toute sous-liste $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_q)$ (avec $p \leq q$) vérifiant les conditions :

- $p = 1$ ou $a_{p-1} > a_p$;
- $a_p < a_{p+1} < \cdots < a_q$ (si $p < q$) ;
- $q = n$ ou $a_q > a_{q+1}$.

On note $\mathrm{M}(a)$ le nombre de montées de la liste a. Par exemple, les montées de la liste $a = (2,5,7,6,1,4,3,8)$ sont $(2,5,7)$, (6), $(1,4)$ et $(3,8)$, et donc $\mathrm{M}(a) = 4$.
On définit de même la notion de descente d'une liste a d'entiers naturels distincts deux à deux et son nombre de descentes $\mathrm{D}(a)$. Par exemple, les descentes de la liste $a = (2,5,7,6,1,4,3,8)$ sont (2), (5), $(7,6,1)$, $(4,3)$ et (8), et donc $\mathrm{D}(a) = 5$.
On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n l'ensemble des n-listes d'éléments de $[\![1,n]\!]$ *distincts deux à deux*.
Il est clair que, pour toute liste a de S_n , on a $1 \leq \mathrm{M}(a) \leq n$ et $1 \leq \mathrm{D}(a) \leq n$.
Enfin, pour tout entier naturel k, on note $\mathrm{E}_n(k)$ le nombre de listes a de S_n ayant exactement k montées. Autrement dit, $\mathrm{E}_n(k) = \mathrm{card}\{a \in \mathrm{S}_n,\ \mathrm{M}(a) = k\}$. On a donc, $\mathrm{E}_n(0) = 0$ ainsi que $\mathrm{E}_n(k) = 0$ pour tout entier $k > n$.

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

6.a Déterminer les valeurs de $\mathrm{E}_n(1)$ et $\mathrm{E}_n(n)$.

6.b Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Donner un exemple de liste a de S_n pour laquelle $\mathrm{M}(a) = k$.

7 Déterminer, pour tout entier naturel n non nul et pour toute liste a de S_n, la valeur de $\mathrm{M}(a)+\mathrm{D}(a)$. *En notant pour* $i \in [\![1,n-1]\!]$, s_i *la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de* $(a_1, a_2, \dots, a_i)$, *on évaluera, en fonction du nombre* s_i, *la somme* s_{i+1} *des nombres de montées et de descentes de* $(a_1, a_2, \dots, a_{i+1})$.

8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On associe à toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ la liste

$$\Psi(a) = (n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_n)$$

8.a Vérifier que l'application Ψ est une bijection de S_n sur S_n.

8.b En déduire, pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, l'égalité $\mathrm{E}_n(k) = \mathrm{E}_n(n+1-k)$.

9 **Calcul de $\mathrm{E}_n(2)$.**
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

9.a Quel est le nombre de couples (A, B) de parties *non vides* de $[\![1,n]\!]$ tels que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = [\![1,n]\!]$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.

9.b Etablir l'égalité $\mathrm{E}_n(2) = 2^n - (n+1)$.

10 **Une relation de récurrence.**
Soit n un entier naturel non nul. A toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ de S_{n+1}, on associe la liste $\varphi_n(a)$ de S_n obtenue en ôtant l'élément $n+1$ de la liste a. Par exemple, dans le cas particulier où $n = 5$, si $a = (3,4,1,5,6,2)$, alors $\varphi_5(a) = (3,4,1,5,2)$ et si $a = (6,3,4,1,5,2)$, alors $\varphi_5(a) = (3,4,1,5,2)$.

10.a Soit $b = (b_1, \dots, b_n)$ un élément de S_n. Comment s'écrivent les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est b ?

10.b Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et soit $b \in \mathrm{S}_n$ tel que $\mathrm{M}(b) = k$. Quelles sont les valeurs possibles de $\mathrm{M}(a)$ pour un élément a de S_{n+1} dont l'image par φ_n est b ?

10.c Etablir, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'égalité

$$\mathrm{E}_{n+1}(k+1) = (k+1)\mathrm{E}_n(k+1) + (n+1-k)\mathrm{E}_n(k)$$

Vérifier que cette formule tient également pour $k = 0$ et pour tout etier $k > n$.

10.d Donner, en détaillant le calcul de $\mathrm{E}_5(3)$, les valeurs de $\mathrm{E}_n(k)$ pour tous les couples d'entiers (n, k) tels que $1 leqk \leq n \leq 5$. On consignera les résultats dans un tableau, n étant l'indice de ligne et k l'indice de colonne.

$\boxed{11}$ **La formule de Worpitzky.**
Etablir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, l'égaité

$$\mathrm{E}_n(k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n$$

On raisonnera par récurrence sur l'entier n.

$\boxed{12}$ **Une égalité miraculeuse !**
Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité

$$\mathrm{E}_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi}(2n-1)!\mathrm{I}_{2n}$$