

TOPOLOGIE

Ouverts et fermés

Solution 1

Motrons que E est fermé si et seulement si (u_n) n'est pas majorée.

- Supposons (u_n) non majorée et posons $U =]-\infty, u_0[\cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty}]u_n, u_{n+1}[\right)$. Montrons que $\mathbb{R} \setminus E = U$. Soit $x \in U$. Si $x \in]-\infty, u_0[$, alors $x < u_0$ et $x \notin E$ car (u_n) est croissante. Sinon, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in]u_n, u_{n+1}[$. A nouveau, $x \notin E$ par croissance de (u_n) . Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \setminus E$. Comme (u_n) est strictement croissante, x est compris entre deux termes consécutifs de la suite donc $x \in U$. Comme U est une réunion d'intervalles ouverts, U est ouvert. Son complémentaire E est fermé.
- Supposons (u_n) majorée. Par conséquent, (u_n) converge vers une limite l . On ne peut avoir $l \in E$. Or (u_n) est une suite convergente d'éléments de E mais sa limite n'est pas dans E . E ne peut donc pas être fermé.

Solution 2

L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E)^2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (f, g) & \longmapsto & f \circ g \end{cases}$ est continue. L'application $\psi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)^2$ est également continue. Enfin, $\text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$ est clairement linéaire. Ainsi $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$. On conclut en remarquant que l'ensemble des projecteurs de E est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$.

Solution 3

- La forme linéaire $\phi : f \in E \mapsto f(0)$ est continue puisque pour tout $f \in E$, $|f(0)| \leq \|f\|_{\infty}$. De même, la forme linéaire $\psi : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ est également continue puisque pour tout $f \in E$, $\left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \|f\|_{\infty}$. On en déduit que $\phi^{-1}(\{0\})$ et $\psi^{-1}([1, +\infty[)$ sont fermés en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. Enfin, A est fermé en tant qu'intersection de ces deux fermés.

- Soit $f \in A$. Supposons $\|f\|_{\infty} \leq 1$. Alors $|f(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$. En particulier, $f \leq 1$ sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 f(t) dt \leq 1$. Mais puisque $f \in A$, $\int_0^1 f(t) dt \geq 1$. Finalement $\int_0^1 f(t) dt = 1$ ou encore $\int_0^1 (1 - f(t)) dt = 0$. L'application $1 - f$ est positive, continue et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$: elle est donc nulle i.e. f est constante égale à 1, ce qui contredit le fait que $f(0) = 0$. On a donc montré par l'absurde que $\|f\|_{\infty} > 1$.

- On vérifie que f_n est bien continue en α donc continue sur $[0, 1]$. On a bien également $f_n(0) = 0$. Enfin, par la relation de Chasles,

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^{\alpha} \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right) t dt + \int_{\alpha}^1 \left(1 + \frac{1}{n}\right) dt = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Il suffit donc de choisir $\alpha = \frac{2}{n+1}$ pour avoir $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$ de sorte que $f_n \in A$. On vérifie également que $\frac{2}{n+1} \in]0, 1]$.

- Puisque pour tout $f \in A$, $\|f\|_{\infty} > 1$, $d(0, A) \geq 1$. De plus, en définissant f_n comme dans la question précédente

$$d(0, A) \leq \|f_n\|_{\infty} = 1 + \frac{1}{n}$$

Par passage à la limite, $d(0, A) \leq 1$. Finalement, $d(0, A) = 1$.

Solution 4

1. Posons $U_n = \{u_k, k \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\ell \in V$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors ℓ est également une valeur d'adhérence de la suite $(u_k)_{k \geq n}$ et on en déduit que $\ell \in \overline{U_n}$. Ainsi $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geq n\}}$. D'où l'inclusion $V \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geq n\}}$.

Réciproquement, soit $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geq n\}}$. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\ell \in \overline{U_n}$. Ainsi $B(\ell, \varepsilon) \cap U_n \neq \emptyset$. Il existe donc $p \geq n$ tel que $\|u_p - \ell\| < \varepsilon$. Ceci prouve que $\ell \in V$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{U_n}$ est fermé. Ainsi V est fermé en tant qu'intersection de fermés.

Solution 5

\emptyset et E sont clairement des parties ouvertes et fermées de E . Soit A une partie ouverte et fermée E . Supposons A non vide et fixons alors $a \in A$. Soit alors $b \in B$. Considérons l'application

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (1-t)a + tb$$

On vérifie aisément que l'application φ est lipschitzienne :

$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2, \|\varphi(s) - \varphi(t)\| = |s - t| \|a - b\|$$

L'application φ est donc continue. L'ensemble

$$S = \{t \in [0, 1], \varphi(t) \in A\}$$

est une partie de \mathbb{R} non vide ($0 \in S$) et majorée. Elle possède donc une borne supérieure $m \leq 1$. De plus, $\varphi^{-1}(A)$ est à la fois ouvert et fermé car φ est continue. Ainsi $S = \varphi^{-1}(A) \cap [0, 1]$ est fermé donc $m = \sup S \in S$. Comme $\varphi^{-1}(A)$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\subset \varphi^{-1}(A)$. Si $m < 1$, alors $t = m + \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, 1 - m\} \in \varphi^{-1}(A) \cap [0, 1] = S$ et $t > m$, ce qui contredit le fait que m est la borne supérieure de S . Ainsi $m = 1 \in S$ donc $b = \varphi(1) \in A$. On a donc prouvé que $E = A$.

Solution 6

Posons $\varphi : u \in E \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. φ est clairement linéaire et

$$\forall u \in E, |\varphi(u)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = \|u\|$$

Ainsi φ est continue par caractérisation fondamentale de la continuité des applications linéaires. Par ailleurs $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ donc F est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Pour montrer que F n'est pas ouvert, on peut montrer que $E \setminus F$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la suite u_k en posant $u_n^k = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \delta_{0,n}$. Alors $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $E \setminus F$. En posant $a_n = \delta_{0,n}$, $\|u^k - a\| = \frac{1}{k+1}$ donc $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers a qui est un élément de F . Par caractérisation séquentielle, $E \setminus F$ n'est pas fermé donc F n'est pas ouvert.

REMARQUE. On peut aussi utiliser le résultat classique mais hors programme stipulant que si A est une partie ouverte et fermée d'un espace vectoriel E , alors $A = \emptyset$ ou $A = E$. Rappelons une démonstration de ce résultat. Soit donc A une telle partie et supposons $A \neq \emptyset$. Donnons-nous alors $a \in A$ et $x \in E$. Posons $\varphi : t \in [0, 1] \mapsto (1-t)a + tx$. Comme φ est continue, $\varphi^{-1}(A)$ est une partie ouverte et fermée de $[0, 1]$. De plus, $\varphi^{-1}(A)$ est non vide puisqu'elle contient 0. Elle admet donc une borne supérieure m . Si on suppose $m \neq 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $m + \varepsilon \in \varphi^{-1}(A)$ car $\varphi^{-1}(A)$ est ouverte. Ceci contredit alors le fait que $m = \sup \varphi^{-1}(A)$. Ainsi $m = 1$ et comme $\varphi^{-1}(A)$ est fermée, elle contient sa borne supérieure. Ainsi $1 \in \varphi^{-1}(A)$ i.e. $x \in A$.

Enfin, F est un sous-espace affine de E . En effet, en notant a la suite telle que $a_n = \delta_{n,0}$, alors $F = a + \text{Ker } \varphi$. Mais $\text{Ker } \varphi$ n'est pas nul (il contient par exemple la suite dont les deux premiers termes valent 1 et -1 et les autres sont nuls). Par conséquent, F un sous-espace affine non réduit à un point donc non borné : en notant u un élément non nul de $\text{Ker } \varphi$, $a + \lambda u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|a + \lambda u\| \geq |\lambda| \|u\| - \|a\|$ donc $\|a + \lambda u\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty$.

Solution 7

1. L'application $\varphi : f \in E \mapsto f(1)$ est une forme linéaire. De plus, pour tout $f \in E$, $|\varphi(f)| = |f(1)| \leq \|f\|_\infty$ donc φ est continue lorsque l'on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ainsi 0 est ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ comme image réciproque de l'ouvert \mathbb{R}_+^* par l'application continue φ .

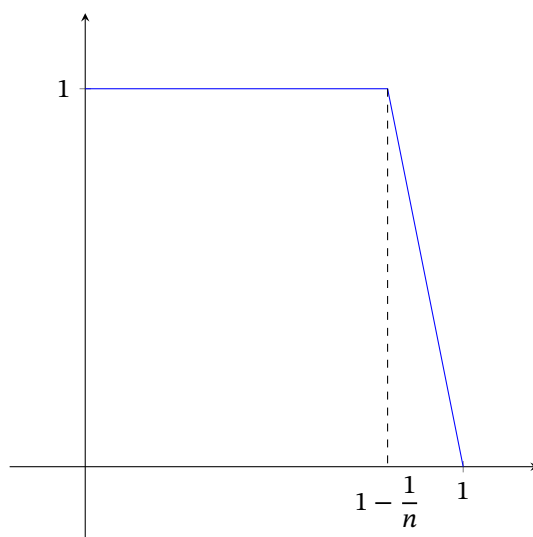
2. L'application $\psi : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ est une forme linéaire. De plus, pour tout $f \in E$,

$$|\psi(f)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1$$

Ainsi ψ est à nouveau continue si l'on unit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Par conséquent, F est fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ comme image réciproque du fermé \mathbb{R}_- par l'application continue ψ .

3. Pour montrer que 0 n'est pas ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$, on va montrer que $E \setminus 0$ n'est pas fermé pour cette même norme. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n - nx & \text{sinon} \end{cases}$$



On vérifie aisément que $f_n \in E \setminus 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, en notant f la fonction constante égale à 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|f - f_n\| = \frac{1}{2n}$$

Donc (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais $f \in 0$. D'après la caractérisation séquentielle des fermés, $E \setminus 0$ n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ et 0 n'est donc pas ouvert pour cette norme.

Solution 8

1. Clairement, $F \subset E$ et F est stable par combinaison linéaire donc F est un sous-espace vectoriel de E .

2. Pour $p \in \mathbb{N}$, définissons la suite u^p par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^p = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Clairement, $u^p \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons u la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n+1}$$

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|u - u^p\|_\infty = \frac{1}{p+2}$$

donc $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers u mais $u \notin F$. Par caractérisation séquentielle, F n'est pas fermé dans E .

Soient $u \in F$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Définissons v en posant $v_n = u_n + \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $v \ni nF$ mais $v \in B(u, \varepsilon)$ donc F n'est pas ouvert dans E .

Solution 9

1. Soit $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergeant vers $u \in E$. Remarquons alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^p = u_n$. Or pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n+1}^p \geq u_n$ donc, en faisant tendre p vers l'infini, $u_{n+1} \geq u_n$. Ainsi $u \in A$ et donc A est fermé par caractérisation séquentielle.

2. Soit $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B convergeant vers $u \in E$. Comme $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers u ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} u_n^p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^p = \lim_{p \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

d'après le théorème de la double limite (adapté aux suites). Ainsi $u \in B$ et B est fermé par caractérisation séquentielle.

3. Soit $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C convergeant vers $u \in E$. Notons ℓ_p la limite de u^p . Comme $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers u , la suite $(\ell_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et u converge vers $\lim_{p \rightarrow +\infty} \ell_p$ d'après le théorème de la double limite. En particulier, $u \in C$ et C est fermé par caractérisation séquentielle.

4. Soit $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D convergeant vers $u \in E$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme 0 est valeur d'adhérence de u^p , il existe un entier $n \geq N$ tel que $|u_n^p| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \|u - u^p\|_\infty + |u_n^p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc 0 est valeur d'adhérence de u . Ainsi $u \in D$ et D est fermé par caractérisation séquentielle.

5. Définissons pour $p \in \mathbb{N}$ la suite u^p par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \mid n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$S^p = \sum_{k=0}^p \frac{u^p}{2^p}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite S^p est périodique comme combinaison linéaire de suites périodiques (facile). La série $\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{u^p}{2^p}$ converge normalement et donc uniformément. Par conséquent, $(S^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une suite S . Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{u_n^p}{2^p}$$

On montre que $S_1 = 0$ et que $S_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Ainsi S n'est pas périodique. Par caractérisation séquentielle, E n'est donc pas fermé.

Solution 10

1. A est l'image réciproque de l'ouvert \mathbb{R}_+^* par l'application continue $(x, y) \mapsto e^{xy} - (x + y)^2$ donc A est ouvert dans \mathbb{R}^2 .

2. B est l'image réciproque du fermé \mathbb{R}_- par l'application continue $(x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2) - x - y$ donc B est fermé dans \mathbb{R}^2 .

3. C est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $(x, y) \mapsto \sin(x + y) - \sqrt{x^2 + y^2}$ donc C est fermé dans \mathbb{R}^2 .

Solution 11

Première méthode.

Soit (f_n) une suite d'éléments de F convergeant vers $f \in E$. Il s'agit de prouver que $f \in F$. Comme (f_n) converge vers f pour la norme infinie, elle converge uniformément vers f . On en déduit que (f_n) converge simplement vers f . Si on fixe $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in F$ donc $f_n(x) \geq 0$. Par passage à la limite, $f(x) \geq 0$. Ceci étant valide pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \in F$ et donc F est fermé.

Deuxième méthode.

En posant $\varphi_x : f \in E \mapsto f(x)$, on remarque que

$$F = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_+)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. φ_x est une forme linéaire et

$$\forall f \in F, |\varphi_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

donc φ_x est continue par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires. Ainsi $\varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Finalement, $F = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est fermé en tant qu'intersection de fermés.

Solution 12

1. Notons f l'application qui à $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ associe a_n . Cette application est clairement linéaire. De plus, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie donc f est continue. Enfin, E_n est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par f donc E_n est fermé.
2. On montre aisément que $N : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$. Supposons que $\inf_{P \in E_n} N(P) = 0$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite (P_k) d'éléments de E_n telle que $N(P_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. Comme N est une norme, la suite (P_k) converge vers 0. Comme E_n est fermé, $0 \in E_n$ par caractérisation séquentielle des fermés. Ceci est évidemment absurde par définition de E_n . Ainsi $\inf_{P \in E_n} N(P) > 0$.

Adhérence et intérieur

Solution 13

Soit M une matrice trigonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telle que $M = PTP^{-1}$. Notons D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \dots, n$. Par continuité de l'application $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto PXP^{-1}$, la suite de terme général $P(T + \frac{1}{p}D)P^{-1}$ converge vers $PTP^{-1} = M$. De plus, pour p suffisamment grand, les coefficients diagonaux de $T + \frac{1}{p}D$ sont deux à deux distincts, ce qui prouve que $P(T + \frac{1}{p}D)P^{-1}$ est diagonalisable. On a ainsi construit une suite de matrices diagonalisables convergeant vers M . Ceci prouve que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables contient l'ensemble des matrices trigonalisables. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est fini puisque toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Supposons maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit (M_p) une suite convergente de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons M sa limite. Notons également χ_p le polynôme caractéristique de M_p et χ le polynôme caractéristique de M . Montrons le lemme suggéré dans l'énoncé. Soit donc $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} , unitaire et de degré n . Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines comptées avec multiplicités. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^n |z - \alpha_k| \geq \prod_{k=1}^n |\operatorname{Im}(z - \alpha_k)| = |\operatorname{Im}(z)|^n$$

Puisque les matrices M_p sont diagonalisables, leur polynômes caractéristiques χ_p sont scindés sur \mathbb{R} , unitaires et de degré n . Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|\chi_p(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$. Soit alors z une racine de χ (éventuellement complexe). Remarquons que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \chi_p(z) = \chi(z)$ puisque les coefficients d'un polynôme caractéristique sont des fonctions polynomiales et donc continues des coefficients de la matrice. On a donc par passage à la limite, $0 = |\chi(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$. Ainsi $\operatorname{Im}(z) = 0$ et z est réel. Les racines de χ sont toutes réelles, ce qui prouve que χ est scindé sur \mathbb{R} et donc que M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Finalement, l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 14

Soient $(x, y) \in \overline{A}^2$ et $t \in [0, 1]$. Montrons que $z = (1-t)x + ty \in \overline{A}$. Pour cela, donnons-nous $r > 0$ et montrons que $B(z, r) \cap A \neq \emptyset$. Puisque $(x, y) \in \overline{A}^2$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ et $B(y, r) \cap A \neq \emptyset$. Il existe donc $u \in B(x, r) \cap A$ et $v \in B(y, r) \cap A$. Posons $w = (1-t)u + tv$. Par convexité de A , $w \in A$. De plus,

$$\|w - z\| = \|(1-t)(u - x) + t(v - y)\| \leq \|(1-t)u\| + \|tv\| = (1-t)\|u - x\| + t\|v - y\|$$

Puisque $u \in B(x, r)$ et $v \in B(y, r)$, $\|u - x\| < r$ et $\|v - y\| < r$. On en déduit que $\|w - z\| < r$ de sorte que $w \in B(z, r) \cap A$. Ainsi $w \in \overline{A}$. Ceci prouve que \overline{A} est convexe.

Soient $(x, y) \in \mathring{A}^2$ et $t \in [0, 1]$. Montrons que $z = (1-t)x + ty \in \mathring{A}$. Puisque $x \in \mathring{A}$ et $y \in \mathring{A}$, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(x, r_1) \subset A$ et

$B(x, r_2) \subset A$. Posons alors $r = \min(r_1, r_2)$ et montrons que $B(z, r) \in A$. Soit donc $w \in B(z, r)$. On a donc $\|w - z\| < r$. Posons $u = x + w - z$ et $v = y + w - z$. Alors $\|u - x\| = \|w - z\| < r \leq r_1$ et $\|v - y\| = \|w - z\| < r \leq r_2$ donc $u \in B(x, r_1) \subset A$ et $v \in B(y, r_2) \subset A$. De plus $(1-t)u + tv = (1-t)x + ty + w - z = w$ donc $w \in A$ par convexité de A . Ceci prouve que $B(w, r) \subset A$ puis que \bar{A} est convexe.

Solution 15

Dans la suite, on notera J_r la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients «diagonaux» valent 1 (elle n'est évidemment définie que si $0 \leq r \leq \min(n, p)$). Cette matrice est clairement de rang r .

On notera également N_r le nombre de matrices carrées de taille r extraites que l'on peut extraire d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et Φ_r l'application qui à une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ associe le N_r -uplet des déterminants de ces N_r matrices extraites.

On rappelle enfin que le rang d'une matrice est la taille maximale d'une matrice carré inversible extraite de cette matrice.

Etude de A_r

- $A_0 = \{0\}$ donc A_0 est fermé mais pas ouvert.
- Si $r > \min(n, p)$, $A_r = \emptyset$ donc A_r est ouvert et fermé.
- Si $1 \leq r \leq \min(n, p)$, la suite $(J_r/k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans A_r et sa limite – la matrice nulle – n'est pas dans A_r . Ainsi A_r n'est pas fermé.
- Si $r < \min(n, p)$, la suite $(J_r + \frac{1}{k}E_{r+1, r+1})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans le complémentaire de A_r et sa limite J_r appartient à A_r . Le complémentaire de A_r n'est donc pas fermé, ce qui signifie que A_r n'est pas ouvert.
- Si $r = \min(n, p)$, A_r est l'image réciproque par l'application continue Φ_r de l'ouvert $\mathbb{R}^{N_r} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. A_r est donc un ouvert.

Etude de B_r

- Si $r \geq \min(n, p)$, alors $B_r = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc B_r est ouvert et fermé.
- Si $r < \min(n, p)$, B_r n'est pas ouvert en exploitant le même argument que pour A_r .
- Si $r < \min(n, p)$, B_r est le complémentaire de C_{r+1} qui est ouvert donc B_r est fermé.

Etude de C_r

- $C_0 = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc C_0 est fermé et ouvert.
- Si $r > \min(n, p)$, alors $C_r = \emptyset$ donc C_r est ouvert et fermé.
- Si $r \leq \min(n, p)$, C_r est l'image réciproque par l'application continue Φ_r de l'ouvert $\mathbb{R}^{N_r} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. C_r est donc un ouvert.
- Si $1 \leq r \leq \min(n, p)$, C_r est le complémentaire de B_{r-1} qui n'est pas ouvert donc C_r n'est pas fermé.

Solution 16

1. Soit $P \in A$. Comme P est scindé à racines simples, P s'annule n fois sur \mathbb{R} en changeant de signes. Il existe donc des réels $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n+1}$ tels que $P(\beta_i)P(\beta_{i+1}) < 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'application $\Phi : Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (Q(\beta_1), \dots, Q(\beta_{n+1}))$ est continue car elle est linéaire et que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie. Munissons \mathbb{R}_{n+1} de la norme uniforme et notons $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq n+1} |P(\beta_i)|$ ainsi que B la boule ouverte de centre $(P(\beta_1), \dots, P(\beta_{n+1}))$. Alors $V = \Phi^{-1}(B)$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$ comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. De plus, si $Q \in A$, alors, $Q(\beta_i)$ est du même signe que $P(\beta_i)$ par définition de ε . Par conséquent, on a également $Q(\beta_i)Q(\beta_{i+1}) < 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que Q s'annule au moins n fois. Mais comme Q est de degré au plus n , il est finalement de degré exactement n et scindé à racines simples. Autrement dit, V est un ouvert contenant P et inclus dans A , ce qui prouve que A est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On va montrer que l'adhérence de A est l'ensemble B des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ constants ou scindés sur \mathbb{R} . Notons C l'ensemble des polynômes de B de degré n . Soit $P = a \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \in C$. Posons $\beta_{i,p} = \alpha_i + \frac{i}{p}$ et $Q_p = a \prod_{i=1}^n (X - \beta_{i,p})$. Alors (Q_p) est à valeurs dans A à partir d'un certain rang. De plus, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \beta_{i,p} = \alpha_i$ et comme les coefficients d'un polynôme sont des fonctions polynomiales donc continues de ses racines et de son coefficient, (Q_p) converge vers P . Ainsi $P \in \bar{A}$ puis $C \subset \bar{A}$.

La suite $\left(\frac{1}{p}X^n\right)$ est une suite d'éléments de C de limite nulle. D'après ce qui précède, c'est également suite d'éléments de \overline{A} . Comme \overline{A} est fermée, $0 \in \overline{A}$.

Soit $P \in B$ non nul. Posons $r = \deg P$ et $Q_p = \left(\frac{X}{p} + 1\right)^{n-r} P$. La suite (Q_p) est une suite d'éléments de C et donc de \overline{A} , convergeant vers P . Ainsi $P \in \overline{A}$.

Finalement, on a montré que $B \subset \overline{A}$.

Il est clair que $A \subset B$ donc $\overline{A} \subset \overline{B}$. Il suffit donc de montrer que B est fermé pour conclure que $\overline{A} = B$. On peut pour cela utiliser le résultat classique stipulant que si P est un polynôme unitaire de degré n alors P est scindé sur \mathbb{R} ou constant si et seulement si $\forall z \in C, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$ (démonstration laissée au lecteur).

Solution 17

- Supposons que F est ouvert. Comme $0_E \in F$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(0_E, r) \subset F$. Soit alors $x \in E$. Si $x = 0_E$, alors $x \in F$. Sinon $\frac{rx}{\|2x\|} \in B(0_E, r) \subset F$. Ainsi $x = \frac{2}{r} \cdot \frac{rx}{\|2x\|} \in F$. Ainsi $F = E$.

- Première méthode.** Supposons que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$. Il existe donc $a \in F$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset F$. Mais F est stable par la translation $x \mapsto x - a$ donc $B(0_E, r) \subset F$. En raisonnant comme dans la question précédente, $F = E$.

Deuxième méthode. Puisque $E \setminus \overset{\circ}{F} = \overline{E \setminus F}$, il suffit de montrer que $\overline{E \setminus F} = E$. Comme $F \subsetneq E$, on peut se donner $a \in E \setminus F$. Soit $x \in F$. Alors la suite de terme général $x + \frac{1}{n}a$ est à valeurs dans $E \setminus F$ et converge vers x . Ainsi $F \subset \overline{E \setminus F}$. Par ailleurs, $E \setminus F \subset \overline{E \setminus F}$ donc $E \subset \overline{E \setminus F}$ puis $E = \overline{E \setminus F}$.

Solution 18

Rappelons que pour toute partie A de E , $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$. Notamment $\operatorname{Fr}(A)$ est fermé comme intersection de deux fermés.

Ainsi $\operatorname{Fr}(\operatorname{Fr}(F)) = \operatorname{Fr}(F) \setminus \overset{\circ}{\operatorname{Fr}(F)}$. Comme F est fermé, $\operatorname{Fr}(F) = F \setminus \overset{\circ}{F}$. Ainsi $\overset{\circ}{\operatorname{Fr}(F)} = \overset{\circ}{F} \setminus \overset{\circ}{\overline{F}}$. Comme $\overset{\circ}{F} \subset \overset{\circ}{\overline{F}}$, $\overset{\circ}{\operatorname{Fr}(F)} = \emptyset$ puis $\operatorname{Fr}(\operatorname{Fr}(F)) = \operatorname{Fr}(F) \setminus \overset{\circ}{\operatorname{Fr}(F)} = \operatorname{Fr}(F)$.

Solution 19

- Remarquons que pour tout $y \in E$, la forme linéaire $\varphi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in E, |\varphi_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

de sorte que φ_y est continue d'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

- On peut remarquer que

$$F = \{x \in E, \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\} = \bigcap_{y \in F} \varphi_y^{-1}(\{0_E\})$$

Pour tout $y \in E$, $\varphi_y^{-1}(\{0_E\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé (le sous-espace nul) par une application continue. Par conséquent, F est fermé comme intersection de fermés.

On peut aussi utiliser la caractérisation séquentielle des fermés si l'on préfère. Soit (x_n) une suite d'éléments de F^\perp convergeant vers $x \in E$. Fixons $y \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_y(x_n) = \langle x_n, y \rangle = 0$. Par continuité de φ_y , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_y(x_n) = \varphi_y(x)$. Par unicité de la limite, $\langle x, y \rangle = \varphi_y(x) = 0$. Ceci étant valable pour tout $y \in F$, $x \in F^\perp$. Ainsi F^\perp est fermé par caractérisation séquentielle de la limite.

- On sait que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Or $(F^\perp)^\perp$ est fermé en appliquant la question précédente à F^\perp . On sait que \overline{F} est le plus grand fermé contenant F . Ainsi $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Solution 20

Comme A est bornée, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|a\| \leq C$ pour tout $a \in A$.

Première méthode. Soit $x \in \bar{A}$. Il existe donc $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq C$. La norme est lipschitzienne donc continue de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Par passage à la limite, $\|x\| \leq C$.

REMARQUE. On peut se passer de la continuité de la norme en remarquant que, par inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n\| \leq \|x - x_n\| + C$$

On obtient à nouveau $\|x\| \leq C$ en passant à la limite.

Deuxième méthode. Soit $x \in \bar{A}$. On se donne $\varepsilon > 0$. Alors $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Soit $a \in B(x, \varepsilon) \cap A$. Par inégalité triangulaire,

$$\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \varepsilon + C$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $\|x\| \leq C$.

Quelque soit la méthode, on en déduit que \bar{A} est bornée.

Solution 21

- Supposons X ouvert. On sait que $X \subset \bar{X}$ donc $\overset{\circ}{X} \subset \overset{\circ}{\bar{X}} = \alpha(X)$. Comme X est ouvert, $\overset{\circ}{X} = X$ donc $X \subset \alpha(X)$.
Supposons X fermé. On sait que $\overset{\circ}{X} \subset X$ donc $\beta(X) = \bar{\overset{\circ}{X}} \subset \bar{X}$. Comme X est fermé, $\bar{X} = X$ donc $\beta(X) \subset X$.
- Comme $\alpha(X)$ est ouvert en tant qu'intérieur, la question précédente permet d'affirmer que $\alpha(\overset{\circ}{X}) \subset \alpha(\alpha(X))$. Comme \bar{X} est fermé, la question précédente permet d'affirmer que $\beta(\bar{X}) \subset \bar{X}$ ou encore $\overline{\alpha(X)} \subset \bar{X}$. Par conséquent, $\overline{\alpha(\overset{\circ}{X})} \subset \bar{\overset{\circ}{X}}$ ou encore $\alpha(\alpha(X)) \subset \alpha(X)$. Par double inclusion, $\alpha(\alpha(X)) = \alpha(X)$.
Comme $\beta(X)$ est fermé en tant qu'adhérence, la question précédente permet d'affirmer que $\beta(\beta(X)) \subset \beta(X)$. Comme $\overset{\circ}{X}$ est ouvert, la question précédente permet d'affirmer que $\overset{\circ}{X} \subset \alpha(\overset{\circ}{X})$ ou encore $\overset{\circ}{X} \subset \beta(\bar{\overset{\circ}{X}})$. Par conséquent, $\bar{\overset{\circ}{X}} \subset \overline{\beta(\bar{\overset{\circ}{X}})}$ ou encore $\beta(X) \subset \beta(\beta(X))$. Par double inclusion, $\beta(\beta(X)) = \beta(X)$.
- On sait que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} donc $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. On sait également que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} donc $\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ puis $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.
- Posons $X =]0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$. Alors, en utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{X} &=]0, 1[\cup]1, 2[\\ \bar{X} &= [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5] \\ \alpha(X) &=]0, 2[\cup]4, 5[\\ \beta(X) &= [0, 2] \\ \alpha(\overset{\circ}{X}) &=]0, 2[\\ \beta(\bar{X}) &= [0, 2] \cup [4, 5]\end{aligned}$$

- D'une part, $A \cap B \subset A$ donc $\overline{A \cap B} \subset \bar{A}$. D'autre part, $A \cap B \subset B$ donc $\overline{A \cap B} \subset \bar{B}$. Finalement, $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
Prenons $A = \{0\} \cup]1, 2[$ et $B =]0, 1[$. Alors

$$\begin{aligned}A \cap \bar{B} &= (\{0\} \cup]1, 2[) \cap [0, 1] = \{0\} \\ \overline{A \cap B} &= \emptyset \\ \bar{A} \cap \bar{B} &= (\{0\} \cup [1, 2]) \cap [0, 1] = \{0, 1\}\end{aligned}$$

Avec le même exemple, A n'est pas ouvert et on a bien $A \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

Densité

Solution 22

1. On munit $\mathcal{C}([0, 1])$ du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$. Notons \mathcal{P} l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels définies sur $[0, 1]$.

Par linéarité de l'intégrale, pour tout $P \in \mathcal{P}$, $\int_0^1 f(t)P(t) dt = 0$ i.e. $\langle f, P \rangle = 0$.

Le théorème de Stone-Weierstrass nous dit que \mathcal{P} est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme infinie. Or la norme L^2 associée au produit scalaire défini précédemment est dominée par la norme infinie donc \mathcal{P} est aussi dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme L^2 . On en déduit que pour tout $g \in \mathcal{C}([0, 1])$, $\langle f, g \rangle = 0$. Ainsi $f \in \mathcal{C}([0, 1])^\perp = \{0\}$ i.e. $f = 0$.

Réciproquement la fonction nulle vérifie bien la condition de l'énoncé.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^{n_0+n} dt = 0$. D'après la question précédente, $t \mapsto t^{n_0}f(t)$ est nulle. On en déduit donc que pour $t \in]0, 1]$, $f(t) = 0$ puis que f est nulle sur $[0, 1]$ par continuité en 0.

Solution 23

On raisonne par récurrence sur n .

Soit A une partie convexe et dense de \mathbb{R} . A est donc un intervalle vérifiant $\bar{A} = \mathbb{R}$. On a donc $\sup A = \sup \bar{A} = +\infty$ et $\inf A = \inf \bar{A} = -\infty$. Ainsi $A = \mathbb{R}$.

Supposons la propriété à montrer vraie à un rang $n - 1 \geq 1$. Soit alors A une partie convexe et dense de \mathbb{R}^n . Soit H un hyperplan de \mathbb{R}^n . On va montrer que $A \cap H$ est une partie convexe et dense de H .

D'abord $A \cap H$ est convexe comme intersection de deux convexes.

On munit alors \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique et on note u un vecteur unitaire normal à H . Soit $x \in H$ et $\varepsilon > 0$.

Posons $a = x + \frac{\varepsilon}{2}u$. Par densité de A dans \mathbb{R}^n , il existe $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|b - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\|u\| = 1$:

$$\langle b, u \rangle = \langle b - a, u \rangle + \langle a, u \rangle \geq -\|b - a\|\|u\| + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 > 0$$

Posons $c = x - \frac{\varepsilon}{2}u$. Par densité de A dans \mathbb{R}^n , il existe $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|d - c\| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\|u\| = 1$:

$$\langle d, u \rangle = \langle d - c, u \rangle + \langle c, u \rangle \leq \|d - c\|\|u\| - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 < 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'application $t \mapsto \langle (1 - t)b + td, u \rangle$ s'annule en un point $t_0 \in]0, 1[$. Posons $e = (1 - t_0)b + t_0d$. On a donc $e \in H$ et $e \in A$ par convexité de A . De plus,

$$\|b - x\| \leq \|b - a\| + \|a - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et

$$\|d - x\| \leq \|d - c\| + \|c - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|e - x\| = \|(1 - t_0)b + t_0d - x\| \leq (1 - t_0)\|b - x\| + t_0\|d - x\| < (1 - t_0)\varepsilon + t_0\varepsilon = \varepsilon$$

Ceci achève de prouver la densité de $A \cap H$ dans H .

D'après notre hypothèse de récurrence, $A \cap H = H$. Or \mathbb{R}^n est égal à la réunion de ses hyperplans. Donc $A = \mathbb{R}^n$.

REMARQUE. L'énoncé est faux en dimension infinie. $\mathbb{R}[X]$ est une partie convexe (en tant que sous-espace vectoriel) et dense (d'après le théorème de Stone-Weierstrass) de $\mathcal{C}([0, 1])$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Pourtant, $\mathbb{R}[X]$ est d'intérieur vide. En effet, $\mathbb{R}[X]$ est l'union des $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont des fermés d'intérieur vide en tant que sous-espaces vectoriels de dimension finie. On conclut par le théorème de Baire.

Solution 24

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et β_1, \dots, β_n sont des réels strictement positifs, on montre que

$$\det \left(\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) = \frac{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i - \alpha_j \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \beta_i - \beta_j \right)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i + \beta_j} \quad (1)$$

Pour des vecteurs x_1, \dots, x_n d'un espace préhilbertien E , on pose $\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = \det((x_i | x_j)_{1 \leq i, j \leq n})$. On montre que si (u_1, \dots, u_n) est une famille libre de vecteurs de E et u un vecteur de E , alors

$$d(x, \text{vect}(u_1, \dots, u_n))^2 = \frac{\text{Gram}(u_1, \dots, u_n, u)}{\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)} \quad (2)$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on notera $f_\alpha \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$. On a donc pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $(f_\alpha | f_\beta) = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$.

(i) \implies (ii) Comme la suite (a_n) est croissante, soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Si elle converge, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ est grossièrement divergente. Supposons donc que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$. En utilisant (1) et (2), on montre que

$$d_n^2 = d(f_0, \text{vect}(f_{a_0}, \dots, f_{a_n}))^2 = \frac{\prod_{i=0}^n a_i^2}{\prod_{i=0}^n (1 + a_i)^2} = \left(\prod_{i=0}^n \frac{a_i}{1 + a_i} \right)^2$$

et donc

$$d_n = \prod_{i=0}^n \frac{a_i}{1 + a_i}$$

Comme $\text{vect}((f_{a_n})_{n \in \mathbb{N}})$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, (d_n) converge vers 0. En passant au logarithme, on en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)$ diverge vers $+\infty$. Puisque (a_n) diverge vers $+\infty$, $\ln \left(1 + \frac{1}{a_n} \right) \sim \frac{1}{a_n}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ diverge donc également.

(ii) \implies (i) Fixons $p \in \mathbb{N}$. En utilisant à nouveau (1) et (2), on trouve

$$d_{p,n}^2 = d(f_p, \text{vect}(f_{a_0}, \dots, f_{a_n}))^2 = \frac{1}{2p+1} \left(\prod_{i=0}^n \frac{a_i - p}{1 + p + a_i} \right)^2$$

et donc

$$d_{p,n} = \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \prod_{i=0}^n \frac{|a_i - p|}{1 + p + a_i}$$

S'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $a_i = p$, alors $d_{p,n} = 0$ pour tout $n \geq i$. Dans le cas contraire, on a

$$\ln d_{p,n} = -\frac{1}{2} \ln(2p+1) + \sum_{i=0}^n \ln \left| \frac{a_i - p}{1 + p + a_i} \right|$$

On distingue à nouveau plusieurs cas :

- Si (a_n) converge vers un réel l , on montre que la suite $\left(\left| \frac{a_n - p}{1 + p + a_n} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel positif strictement inférieur à 1 (distinguer les cas $l \leq p$ et $l > p$). La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left| \frac{a_n - p}{1 + p + a_n} \right|$ diverge donc grossièrement vers $-\infty$. On en déduit que $d_{p,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Si (a_n) diverge vers $+\infty$, alors

$$\ln \left| \frac{a_n - p}{1 + p + a_n} \right| \sim -\frac{2p+1}{1 + p + a_n} \sim -\frac{2p+1}{a_n}$$

Comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ diverge vers $+\infty$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left| \frac{a_n - p}{1 + p + a_n} \right|$ diverge également vers $+\infty$ et, à nouveau, $d_{p,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Bref, dans tous les cas $d_{p,n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P à coefficients réels tels que $\|f - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. On montre facilement que $\|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Si P est nul c'est fini, puisqu'alors P appartient à $\text{vect}((f_{a_n})_{n \in \mathbb{N}})$.

Sinon, posons $P = \sum_{p=0}^n a_p f_p$. Posons $M = \max\{|a_p|, 0 \leq p \leq n\}$. Pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe $g_p \in \text{vect}((f_{a_n})_{n \in \mathbb{N}})$ tel que $\|f_p - g_p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2M(n+1)}$. Posons alors $g = \sum_{p=0}^n a_p g_p$. Alors, par inégalité triangulaire

$$\|P - g\|_2 \leq \sum_{p=0}^n |a_p| \|f_p - g_p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

A nouveau par inégalité triangulaire

$$\|f - g\|_2 \leq \|f - P\|_2 + \|P - g\|_2 < \varepsilon$$

ce qui prouve la densité de $\text{vect}((f_{a_n})_{n \in \mathbb{N}})$.

Solution 25

Remarquons déjà que, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b f(t)P(t) dt = 0$ pour toute fonction polynomiale P .

Le théorème de Weierstrass permet d'affirmer qu'il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t)^2 dt = \int_a^b f(t)(f(t) - P_n(t)) dt + \int_a^b f(t)P_n(t) dt = \int_a^b f(t)(f(t) - P_n(t)) dt$$

Comme f^2 est positive

$$\int_a^b f(t)^2 dt = \left| \int_a^b f(t)^2 dt \right| = \left| \int_a^b f(t)(f(t) - P_n(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \cdot |f(t) - P_n(t)| dt \leq \|f - P_n\|_\infty \int_a^b |f(t)| dt$$

Comme (P_n) converge uniformément vers f , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$ puis $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. Or f^2 est continue et positive sur $[a, b]$ donc elle y est nulle. f est donc également nulle sur $[a, b]$.

Solution 26

1. Tout d'abord $0 \in F \subset \overline{F}$. Soient $(x, y) \in \overline{F}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe donc deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans F convergeant respectivement vers x et y . Alors $(\lambda x_n + \mu y_n)$ est une suite à valeurs dans F (puisque c'est un sous-espace vectoriel de E) convergeant vers $\lambda x + \mu y$. Ainsi $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$. Par conséquent, \overline{F} est un sous-espace vectoriel de E .
2. On a $H \subset \overline{H} \subset E$. Supposons H non fermé i.e. $\overline{H} \neq H$. Il existe donc $u \in \overline{H} \setminus H$. Soit alors $x \in E$. Puisque H est un hyperplan, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ sur E . Puisque $u \notin H$, $\varphi(u) \neq 0$. Posons alors $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$ et $h = x - \lambda u$. Alors $\varphi(h) = 0$ donc $h \in H \subset \overline{H}$. De plus, $u \in \overline{H}$. Puisque \overline{H} est un sous-espace vectoriel de E , $x = h + \lambda u \in \overline{H}$. Finalement, $E = \overline{H}$ i.e. H est dense dans E .

Solution 27

On notera $\|\cdot\|$ une norme sur E (peu importe laquelle, elles sont toutes équivalentes puisque E est de dimension finie).

1. Il existe des réels a_0, \dots, a_n tels que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ et φ est constante sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$. Notons c_k la valeur de φ sur $]a_k, a_{k+1}[$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{i\lambda t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{i\lambda} (e^{i\lambda a_{k+1}} - e^{i\lambda a_k})$$

Puisque $x \mapsto e^{i\lambda x}$ est bornée, on en déduit sans peine que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) dt = 0$$

2. Il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. Posons $\Phi_n : \lambda \mapsto \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi_n(t) dt$ et $F : \lambda \mapsto \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|F(\lambda) - \Phi_n(\lambda)\| \leq \int_a^b |e^{i\lambda t}| \cdot \|f(t) - \varphi_n(t)\| dt \leq (b-a)\|f - \varphi_n\|_\infty$$

et donc

$$\|F - \Phi_n\|_\infty \leq (b-a)\|f - \varphi_n\|_\infty$$

REMARQUE. La première norme uniforme est une norme uniforme sur \mathbb{R} tandis que la seconde est une norme uniforme sur $[a, b]$.

Puisque (φ_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, l'inégalité précédente montre que (Φ_n) converge uniformément vers F sur \mathbb{R} . D'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Phi_n(\lambda)$$

D'après la question précédente, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Phi_n(\lambda) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0$, ce qui répond à la question.

3. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \|f(t)\| dt$ et $\int_{-\infty}^0 \|f(t)\| dt$ convergent. Ainsi $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_b^{+\infty} \|f(t)\| dt = 0$ et $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^a \|f(t)\| dt = 0$. Il existe donc des réels a et b tels que $a < b$, $\int_b^{+\infty} \|f(t)\| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\int_{-\infty}^a \|f(t)\| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

D'après la question précédente, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$. Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit donc $\lambda \geq \lambda_0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt \right| &\leq \left| \int_{-\infty}^a e^{i\lambda t} f(t) dt \right| + \left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| + \left| \int_b^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^a \|f(t)\| dt + \frac{\varepsilon}{3} + \int_b^{+\infty} \|f(t)\| dt \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

Solution 28

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. M est alors trigonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $M = PTP^{-1}$. Notons $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $1, 1/2, \dots, 1/n$.

Si tous les coefficients diagonaux de T sont égaux, posons $T_k = T + \frac{1}{k}D$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. T_k est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont deux à deux distincts donc T_k est diagonalisable. De plus, (T_k) converge vers T . En posant $M_k = PT_kP^{-1}$, les M_k sont également diagonalisables et, par continuité du produit matriciel, (M_k) converge vers M .

Si les coefficients diagonaux de A ne sont pas tous égaux, posons

$$\alpha = \min \{ |T_{i,i} - T_{j,j}|, (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, T_{i,i} \neq T_{j,j} \} > 0$$

Posons $T_k = T + \frac{\alpha}{k}D$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.

- Si $T_{i,i} = T_{j,j}$, alors $(T_k)_{i,i} - (T_k)_{j,j} = \frac{\alpha}{k} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right) \neq 0$.
- Si $T_{i,j} \neq T_{j,i}$, alors, par inégalité triangulaire,

$$|(T_k)_{i,i} - (T_k)_{j,j}| = |T_{i,i} - T_{j,j} + \frac{\alpha}{ik} - \frac{\alpha}{jk}| \geq |T_{i,i} - T_{j,j}| - \frac{\alpha}{k} \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| > 0$$

$$\text{car } |T_{i,i} - T_{j,j}| \geq \alpha, \frac{1}{k} \leq 1 \text{ et } \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| < 1.$$

T_k est donc triangulaire à coefficients diagonaux distincts et on conclut comme précédemment que (M_k) est une suite à valeurs dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ convergeant vers M .

Ainsi on a montré que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ était limite d'une suite de matrices de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. a. Supposons que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Il existe donc des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tels que $P = \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^d |z - \lambda_k|$$

Or pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$,

$$|z - \lambda_k| \geq |\operatorname{Im}(z - \lambda_k)| = |\operatorname{Im}(z)| \geq 0$$

car $\lambda_k \in \mathbb{R}$. On en déduit que $|P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^d$.

Inversement, supposons que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^d$$

Si $z \notin \mathbb{R}$, on a donc $|P(z)| > 0$ et donc $P(z) \neq 0$. Les racines de P sont donc toutes réelles. P est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

- b. En procédant comme dans le cas complexe, on montre que toute matrice de $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite à valeurs dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})}$. Par ailleurs, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ donc $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} \subset \overline{\mathcal{T}_n(\mathbb{R})}$. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est fermé pour conclure.

Soit (T_k) une suite de matrices de $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers T . Puisque les T_k sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les χ_{T_k} sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$. D'après la question précédente, on a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |\chi_{T_k}(z)| \geq |z|^n$$

Fixons $z \in \mathbb{C}$. L'application $M \mapsto \chi_M$ est continue puisque chaque coefficient de χ_M est polynomial en les coefficients de M . En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient alors $|\chi_T(z)| \geq |z|^n$. D'après la question précédente, χ_T est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et T est donc trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ceci prouve donc que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Solution 29

1. φ est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car polynomiale en les coefficients de M . Remarquons que φ est l'application qui à une matrice associe le discriminant de son polynôme caractéristique.
2. M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui équivaut à $\varphi(M) \geq 0$ puisque $\varphi(M)$ est le discriminant de χ_M .
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice de valeurs propres complexes, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\varphi(A) < 0$. Si A était limite d'une suite de matrices diagonalisables (A_k) , on aurait $\varphi(A_k) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par continuité de φ , $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(A_k) = \varphi(A) < 0$ mais, par passage à la limite, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(A_k) \geq 0$. On obtient donc une contradiction. Ainsi $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. On a déjà $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$ donc $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} \subset \overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{R})}$. De plus, on a vu que $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du fermé \mathbb{R}_+ par l'application continue φ donc $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$ est fermé i.e. $\overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$. Ainsi $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} \subset \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$.

Inversement, soit $M \in \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $T = P^{-1}MP$ soit triangulaire. En posant $T_k = T + \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{2}{k} \end{pmatrix}$, T_k

est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont distincts au moins à partir d'un certain rang. Les matrices $M_k = PT_kP^{-1}$ sont donc diagonalisables à partir d'un certain rang et la suite (M_k) converge vers M par continuité du produit matriciel. Donc $M \in \overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})}$. Par double inclusion, $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$.

Solution 30

Soit $a \in E$. Comme U est dense dans E , il existe $u \in U$ et $r_1 > 0$ tels que $B(a, r) \cap U \neq \emptyset$. Soit alors $u \in B(a, r) \cap U$. Mais $B(a, r) \cap U$ est ouvert comme intersection de deux ouverts. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(u, \varepsilon) \subset B(a, r) \cap U$. Mais comme V est dense dans E , $B(u, \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$. A fortiori, $B(a, r) \cap U \cap V \neq \emptyset$. Ceci prouve que $U \cap V$ est dense dans E .

Solution 31

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$;

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I_n - AB) = \det(A(\lambda A^{-1} - B)) = \det(A) \det(\lambda A^{-1} - B) = \det(\lambda A^{-1} - B) \det(A) = \det((\lambda A^{-1} - B)A) = \det(\lambda I_n - BA) = \chi_{BA}(\lambda)$$

On en déduit que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

2. Fixons $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les applications $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ sont continues : les coefficients des deux polynômes caractéristiques χ_{AB} et χ_{BA} sont polynomiaux en les coefficients de A . La question précédente montre que ces deux applications coïncident sur $GL_n(\mathbb{K})$. Or on montre classiquement que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ coïncident sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Limite et continuité

Solution 32

1. On a $|f(x, y)| \leq |x| + |y| = \|(x, y)\|_1$. On en déduit que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

2. On a $f(x, x) = 0$ et $f(x, 0) = 1$. Donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

3. On a $f(x, -x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = +\infty$ donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

4. Remarquons que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|x^3 + y^3| \leq |x|^3 + |y|^3 \leq (|x| + |y|)(x^2 + y^2) \leq 2\|(x, y)\|_1(x^2 + y^2)$$

On en déduit que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$|f(x, y)| \leq 2\|(x, y)\|_1$$

Ainsi $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

5. On a d'une part :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et, d'autre part :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2 + y^2 - 1 = -1$$

On en déduit que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = -1$.

6. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(e^{-\frac{1}{x}}, x\right) = \frac{1}{e}$ (on vérifie que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}}, x\right) = (0, 0)$). On en déduit que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

7. On a :

$$f(x, y) = \frac{\sin x^2}{x^2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sin y^2}{y^2} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

D'une part :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y^2}{y^2} = 1$$

D'autre part :

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et de même

$$0 \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

On en déduit que :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

puis que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Solution 33

1. N_2 est une norme : il s'agit de la norme uniforme sur $[-1, 1]$. Concernant N_1 , l'homogénéité et l'inégalité triangulaire ne pose pas de problème. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $N_1(P) = 0$, alors $P^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la formule de Taylor, $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n = 0$.

2. D est un endomorphisme. D'après la formule de Taylor et l'inégalité triangulaire,

$$N_1(D(P)) = N_1(P') = \sum_{n=0}^{+\infty} |P^{(n+1)}(0)| = \sum_{n=1}^{+\infty} |P^{(n)}(0)| \leq N_1(P)$$

D'après la caractérisation de la continuité des applications linéaires, D est continu pour la norme N_1 .

3. Pour tout $p \in \mathbb{P}$, $N_2(X^p) = 1$ et $N_2(D(X^p)) = N_2(pX^{p-1}) = p$. Ainsi $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{N_2(D(X^p))}{N_2(X^p)} = +\infty$ donc D n'est pas continu pour la norme N_2 en vertu de la caractérisation de la continuité des applications linéaires.

Solution 34

Soit N une norme sur E . Tout d'abord, φ est un endomorphisme de E . Considérons pour $a \in \mathbb{R}_+$, $f_a : x \in [0, 1] \mapsto e^{ax}$. Ainsi $\varphi(f_a) = f'_a = af_a$, puis par homogénéité, $N(\varphi(f_a)) = aN(f_a)$. Par conséquent, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{N(\varphi(f_a))}{N(f_a)} = +\infty$ et donc φ n'est pas continue par caractérisation de la continuité des applications linéaires.

Solution 35

1. Evident.

2. Supposons que $|b| > 1$. Alors

$$\frac{|f(X^n)|}{\|X^n\|} = |b|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

D'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, f n'est pas continue.

Supposons $|b| \leq 1$. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$. Par inégalité triangulaire,

$$|f(P)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| |b|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = \|P\|$$

D'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, f est continue.
On en déduit de plus que $\|f\| \leq 1$. Mais comme

$$\|f\| \geq \frac{|f(1)|}{\|1\|} = 1$$

on a donc $\|f\| = 1$.

Solution 36

1. ϕ est clairement linéaire et pour $f \in E$, $\phi(f)$ est une primitive de f donc $\phi(f) \in E$.

2. Soit $f \in E$. Par inégalité triangulaire

$$\forall x \in [0, 1], \|\phi(f)(x)\| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|$$

A nouveau par inégalité triangulaire,

$$\|\phi(f)\| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\| dt = \|f\|$$

Par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, ϕ est continu.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'une part,

$$\|f_n\| = [-e^{-nt}]_0^1 = 1 - e^{-n}$$

D'autre part,

$$\forall x \in [0, 1], \phi(f_n)(x) = [-e^{-nt}]_0^x = 1 - e^{-nx}$$

de sorte que

$$\|\phi(f_n)\| = 1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

4. On a déjà montré que $\|\phi(f)\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in E$ donc $\|f\|$ est bien définie et $\|f\| \leq 1$. De plus,

$$\frac{\|\phi(f_n)\|}{\|f_n\|} = \frac{1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}}{1 - e^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc $\|f\| = 1$.

Solution 37

Δ est clairement linéaire et, pour tout $u \in E$,

$$\|\Delta(u)\|_\infty = \|(u_n) - (u_{n+1})\|_\infty \leq \|(u_n)\|_\infty + \|(u_{n+1})\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$$

Ce qui prouve à la fois que $\Delta(u) \in E$ et que Δ est continu : Δ est un endomorphisme continu de E .

De plus, $\|\Delta\| \leq 2$. En posant $v_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta(v)_n = -2(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\|v\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(v)\|_\infty = 2$ donc

$$\|\Delta\| \geq \frac{\|\Delta(v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} = 2$$

Ainsi $\|\Delta\| = 2$.

Solution 38

Remarquons déjà que $T_\omega(f)$ est définie sur \mathbb{R}^* puisque le dénominateur ne s'annule pas (stricte positivité de l'intégrale).

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$T_\omega(f)(x) = \frac{x}{\int_0^x \omega(t) dt} \cdot \frac{\int_0^x f(t)\omega(t) dt}{x}$$

Comme $x \mapsto \int_0^x \omega(t) dt$ est une primitive de ω , on a par définition du nombre dérivé en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \omega(t) dt}{x} = \omega(0) > 0$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)\omega(t) dt}{x} = \omega(0)f(0)$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} T_\omega(f)(x) = f(0)$$

de sorte que $T_\omega(f)$ est bien prolongeable par continuité en 0.

2. T_ω est clairement linéaire. Soit $f \in \mathcal{C}([0, a], \mathbb{R})$. Alors $T_\omega(f)$ est continue sur $]0, a]$ comme quotient de fonctions continues (et même \mathcal{C}^1), le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. La question précédente montre que $T_\omega(f)$ est continue en 0. Ainsi $T_\omega(f) \in \mathcal{C}^0([0, a], \mathbb{R})$. T_ω est donc un endomorphisme de $\mathcal{C}([0, a], \mathbb{R})$.

De plus, par inégalité triangulaire et positivité de ω ,

$$\forall x \in [0, a], |T_\omega(f)(x)| \leq \frac{1}{\int_0^x \omega(t) dt} \int_0^x |f(t)|\omega(t) dt \leq \frac{1}{\int_0^x \omega(t) dt} \int_0^x \|f\|_\infty \omega(t) dt = \|f\|_\infty$$

Autrement dit, $\|T_\omega(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ donc T_ω est continu en vertu de la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires. Soit $k \in \text{Ker } T_\omega$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \int_0^x f(t)\omega(t) dt = 0$$

puis en dérivant,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x)\omega(x) = 0$$

et comme ω ne s'annule pas,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 0$$

Mais comme f est continue sur \mathbb{R} et donc notamment en 0, $f = 0$. Ainsi $\text{Ker } T_\omega = \{0\}$ et T_ω est injectif.

3. a. T_ω est injectif et $f \neq 0$ donc $\lambda \neq 0$. Comme $T_\omega(f) = \lambda f$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{\lambda \int_0^x \omega(t) dt} \int_0^x f(t)\omega(t) dt$$

On en déduit que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^1 (théorème fondamental de l'analyse), le dénominateur ne s'annulant pas.

Posons $\Omega(x) = \int_0^x f(t) dt$. Alors Ω est une primitive de ω donc, en dérivant sur \mathbb{R}^* la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \Omega(x)f(x) = \int_0^x f(t)\omega(t) dt$$

on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\omega(x)}{\Omega(x)} f(x)$$

Ainsi f est solution sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* de l'équation différentielle

$$y' = \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\omega}{\Omega} y$$

Les solutions sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* de cette équation différentielle sont les fonctions

$$x \mapsto C\Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

b. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C\Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \exp\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln(\Omega(x))\right)$$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = 0$ donc si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = +\infty$$

Comme f est continue en 0, ceci impose que $C = 0$. Mais f n'est pas nulle donc on a nécessairement $\lambda \in [0, 1]$. On a vu à la question précédente que $\lambda \neq 0$ donc $\lambda \in]0, 1]$.

Solution 39

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$. Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$Y_i = \sum_{j=1}^p A_{i,j} X_j$$

Donc

$$|Y_i| \leq \sum_{j=1}^p |A_{i,j}| |X_j| \leq \sum_{j=1}^p |A_{i,j}| \|X\|_{\infty}$$

Et donc

$$\|AX\|_{\infty} = \|Y\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |Y_i| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |A_{i,j}| \right) \|X\|_{\infty}$$

donc

$$\|A\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |A_{i,j}|$$

Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\sum_{j=1}^p |A_{i_0,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |A_{i,j}|$$

Posons $X_j = 1$ si $A_{i_0,j} \geq 0$ et $X_j = -1$ si $A_{i_0,j} < 0$. Alors, en posant $X = (X_1, \dots, X_p)^T$, on a $\|X\|_{\infty} = 1$. De plus, en posant $Y = AX$

$$Y_{i_0} = \sum_{j=1}^p A_{i_0,j} X_j = \sum_{j=1}^p |A_{i_0,j}|$$

On en déduit que

$$\|A\| \geq \|AX\|_{\infty} = \|Y\|_{\infty} \geq |Y_{i_0}| = \sum_{j=1}^p |A_{i_0,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |A_{i,j}|$$

Donc

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |A_{i,j}|$$

2. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$. Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$Y_i = \sum_{j=1}^p A_{i,j} X_j$$

Donc

$$\|AX\|_1 = \|Y\|_1 = \sum_{i=1}^n |Y_i| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |A_{i,j}| |X_j| = \sum_{j=1}^p |X_j| \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^p |X_j| \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| = \left(\max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \right) \|X\|_1$$

Par conséquent,

$$\|A\| \leq \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$$

Soit $j_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\sum_{i=1}^n |A_{i,j_0}| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$. Posons $X_{j_0} = 1$ et $X_j = 0$ si $j \neq j_0$. Alors, en posant $X = (X_1, \dots, X_p)^\top$, on a $\|X\|_1 = 1$. De plus, en posant $Y = AX$,

$$\|A\| \geq \|AX\|_1 = \|Y\|_1 = \sum_{i=1}^n |Y_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^p A_{i,j} X_j \right| = \sum_{i=1}^n |A_{i,j_0}| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$$

donc

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$$

3. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$\|AX\|_2^2 = X^\top A^\top A X$$

Comme $A^\top A$ est symétrique réelle, il existe une base orthonormée (U_1, \dots, U_p) de vecteurs propres de $A^\top A$. Notons λ_i la valeur propre associée à U_i . Si $X = \sum_{i=1}^p \alpha_i U_i$,

$$\|AX\|_2^2 = \|Y\|_2^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 \lambda_i \leq \max \text{Sp}(A^\top A) \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 = \max \text{Sp}(A^\top A) \|X\|_2^2$$

Ainsi

$$\|A\| \leq \sqrt{\max \text{Sp}(A^\top A)}$$

Soit X un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ de $A^\top A$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est X . Alors

$$\|AX\|_2^2 = \|AX\|_2^2 = X^\top A^\top A X = \lambda X^\top X = \lambda \|X\|_2^2$$

Ainsi $\|A\| \leq \sqrt{\lambda}$. Par conséquent, $\|A\| = \sqrt{\max \text{Sp}(A^\top A)}$.

Solution 40

Tout d'abord, D est clairement linéaire. De plus, pour tout $f \in E$, $D(f)$ est continue (et même de classe \mathcal{C}^1) sur $[0, \pi]$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. Ainsi D est bien un endomorphisme de E .

Soit $f \in E$. Par inégalité triangulaire et positivité de \sin sur $[0, \pi]$,

$$\forall x \in [0, \pi], |D(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^x \sin(t) dt \leq \|f\|_\infty \int_0^\pi \sin(t) dt = 2\|f\|_\infty$$

Ainsi $\|D(f)\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$ de sorte que D est continu et $\|D\| \leq 2$.

Considérons alors $g : x \in [0, \pi] \mapsto 1$. Alors $\|g\|_\infty = 1$ et

$$\forall x \in [0, \pi], D(g)(x) = \int_0^x \sin(t) dt = 1 - \cos x$$

On en déduit que $\|D(g)\|_\infty = 2$. Ainsi $\|D\| \geq \frac{\|D(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} = 2$ puis $\|D\| = 2$.

Solution 41

1. T est clairement linéaire. De plus, pour tout $f \in E$, $T(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. A fortiori, $T(f) \in E$. T est donc bien un endomorphisme de E .

2. Soit $f \in E$. Par inégalité triangulaire

$$\forall x \in [0, 1], |T(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\|T(f)\|_1 = \int_0^1 |T(f)(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_1 dt = \|f\|_1$$

Ainsi T est continu par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires. De plus, $\|T\| \leq 1$.

Posons $f_n : x \in [0, 1] \mapsto (1-x)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Comme f_n est positive sur $[0, 1]$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-t)^n dt = -\frac{1}{n+1} [(1-t)^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

De plus,

$$\forall x \in [0, 1], T(f_n)(x) = \int_0^x (1-t)^n dt = -\frac{1}{n+1} [(1-t)^{n+1}]_0^x = \frac{1}{n+1} (1 - (1-x)^{n+1})$$

Comme $T_n(f)$ est positive sur $[0, 1]$

$$\|T(f_n)\|_1 = \frac{1}{n+1} \left(\int_0^1 dt - \int_0^1 (1-t)^{n+1} dt \right) = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n+2}$$

Ainsi

$$\|T\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = 1$$

puis $\|T\| = 1$.

3. Supposons qu'il existe $f \in E$ telle que $\|T(f)\|_1 = \|f\|_1$. Posons $g : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x |f(t)| dt$. On a prouvé précédemment que $|T(f)(x)| \leq g(x) \leq \|f\|_1$ pour tout $x \in [0, 1]$. Ainsi

$$\|T(f)\|_1 = \int_0^1 |T(f)(x)| dx \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 \|f\|_1 dx = \|f\|_1$$

Mais on a supposé que $\|T(f)\|_1 = \|f\|_1$ donc

$$\int_0^1 |T(f)(x)| dx = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \|f\|_1 dx$$

Notamment, $\int_0^1 (\|f\|_1 - g(x)) dx = 0$. Il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue et positive donc $\|f\|_1 - g$ est nulle sur $[0, 1]$.

Notamment, g est constante sur $[0, 1]$ de sorte que $g' = |f|$ est nulle sur $[0, 1]$. Finalement, f est nulle sur $[0, 1]$.

Ceci prouve que la borne supérieure $\|T\| = \sup_{f \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|T(f)\|_1}{\|f\|_1}$ ne peut être atteinte.

Solution 42

La linéarité de u est triviale (linéarité de l'intégrale). Soit $f \in E$. Remarquons que

$$\forall x \in [0, 1], u(f)(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$$

En vertu du théorème fondamental de l'analyse, les fonctions $x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$ et $x \mapsto \int_x^1 f(t) dt$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et donc a fortiori de classe \mathcal{C}^0 sur $[0, 1]$. Il en est de même de la fonction $x \mapsto x$. On en déduit que $u(f)$ appartient à la \mathbb{R} -algèbre E . Ainsi u est un

endomorphisme de E .

Par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in [0, 1], |u(f)(x)| \leq \int_0^1 \min(x, t) |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 \min(x, t) dt$$

Pour conclure à la continuité de $[0, 1]$, on peut tout simplement remarquer que $0 \leq \min(x, t) \leq 1$ pour tout $(x, t) \in [0, 1]$. On en déduit alors que $|u(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $x \in [0, 1]$ et donc $\|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, u est continu.

Néanmoins, cette majoration ne suffit pas pour calculer la norme subordonnée de u . On calcule

$$\forall x \in [0, 1], \int_0^1 \min(x, t) dt = \int_0^x t dt + \int_x^1 x dt = \frac{x^2}{2} + x(1-x) = x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq \frac{1}{2}$$

Les calculs précédents montrent alors que $\|u(f)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$. On retrouve le fait que u est continu. Enfin, en choisissant la fonction f constante égale à 1, $\|f\|_\infty = 1$ et $u(f)(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq \frac{1}{2} \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. On en déduit que $\|u(f)\|_\infty = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $\|u\| = \frac{1}{2}$.

Compacité

Solution 43

L'espace normé en question doit nécessairement être de dimension infinie. Considérons $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ (ensemble des suite réelles bornées) muni de la norme ∞ . La boule unité fermée B de E est bien fermée et bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (\delta_{pn})_{p \in \mathbb{N}}$. Ainsi (u_n) est une suite d'éléments de B . Supposons B compact. Il existe donc une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente. Notons $l = (l_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sa limite. Soit $p \in \mathbb{N}$. la suite $(u_{\varphi(n), p})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_p . Or pour $\varphi(n) > p$, $u_{\varphi(n), p} = 0$ donc $l_p = 0$. La suite l est donc nulle. Or $\|u_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité de la norme, $\|l\| = 1$, ce qui contredit $l = 0$.

Solution 44

- Comme $\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{a\})$ est connexe par arcs, son image par f qui est continue est donc également connexe par arcs. C'est donc un intervalle I de \mathbb{R} ne contenant pas a . C'est donc un intervalle minoré ou majoré par a . Ainsi $f(\mathbb{R}^2) = I \cup \{a\}$ admet a pour minimum ou maximum. Ceci prouve que f admet a pour extremum global sur \mathbb{R}^2 .
- Puisque $f^{-1}(\{a\})$ est bornée, il existe une boule fermée de \mathbb{R}^2 telle que $f^{-1}(\{a\}) \subset B$. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus B$ est connexe par arcs et son image par f est un intervalle I ne contenant pas a . L'intervalle I est encore majoré par a ou minoré par a .
Supposons que I est minoré par a , c'est-à-dire que $f(x) \geq a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B$. f étant continue sur le compact B , elle y admet un minimum global m . Puisque $f^{-1}(\{a\}) \subset B$, $a \geq m$. Ainsi f admet un minimum global sur \mathbb{R}^2 (en fait sur B).
Supposons que I est majoré par a , c'est-à-dire que $f(x) \leq a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B$. f étant continue sur le compact B , elle y admet un maximum global M . Puisque $f^{-1}(\{a\}) \subset B$, $a \leq M$. Ainsi f admet un maximum global sur \mathbb{R}^2 (en fait sur B).
- Remarquons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{a\}))$ est un intervalle minoré ou majoré par a .
Supposons f non majorée sur \mathbb{R}^2 . Soit $A \in \mathbb{R}$. $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{A\}))$ est un intervalle minoré ou majoré par A . Puisque f est non majorée, il existe $x \in \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{A\})$ tel que $f(x) > A$. Ainsi l'intervalle $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{A\}))$ est minoré par A puisqu'il contient $f(x)$. Le compact $f^{-1}(\{A\})$ est inclus dans une boule fermée de rayon $R \in \mathbb{R}_+$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| > R$, on a $f(x) > A$. On en déduit que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Supposons f non minorée sur \mathbb{R}^2 . Soit $A \in \mathbb{R}$. $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{A\}))$ est un intervalle minoré ou majoré par A . Puisque f est non minorée, il existe $x \in \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{A\})$ tel que $f(x) < A$. Ainsi l'intervalle $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{A\}))$ est majoré par A puisqu'il contient $f(x)$. Le compact $f^{-1}(\{A\})$ est inclus dans une boule fermée de rayon $R \in \mathbb{R}_+$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| > R$, on a $f(x) < A$. On en déduit que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
Supposons f bornée sur \mathbb{R}^2 . Soit (x_n) une suite d'éléments de \mathbb{R}^2 telle que $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. La suite $(f(x_n))$ étant bornée, on peut supposer qu'elle converge quitte à en extraire une sous-suite. Notons l sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. D'après notre remarque préliminaire, $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{l + \varepsilon\}))$ est un intervalle minoré ou majoré par $l + \varepsilon$. Or $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f^{-1}(\{l + \varepsilon\})$ est compact donc borné : il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \notin f^{-1}(\{l + \varepsilon\})$ pour tout $n \geq N$. Enfin $(f(x_n))$ converge vers l donc il existe $p \geq N$ tel que $f(x_p) < l + \varepsilon$. Ainsi

$f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{l + \varepsilon\}))$ est un intervalle majoré par $l + \varepsilon$. On prouve de même que $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{l - \varepsilon\}))$ est un intervalle majoré par $l - \varepsilon$. Les compacts $f^{-1}(\{l + \varepsilon\})$ et $f^{-1}(\{l - \varepsilon\})$ sont inclus dans une boule de rayon $R \in \mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| > R$, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Ceci prouve que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Solution 45

1. Remarquons déjà que l'existence de la valeur d'adhérence (x', y') est justifiée par la compacité de K^2 . Il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (x', y') . Remarquons alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|g^n(x') - x\| = \|g^n(x') - g^n(x_n)\| \leq \|x' - x_n\| \quad \text{et} \quad \|g^n(y') - y\| = \|g^n(y') - g^n(y_n)\| \leq \|y' - y_n\|$$

car g et donc g^n est 1-lipschitzienne. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(g^{\varphi(n)}(x') - g^{\varphi(n)}(y')) - (x - y)\| \leq \|g^{\varphi(n)}(x') - x\| + \|g^{\varphi(n)}(y') - y\| \leq \|x' - x_{\varphi(n)}\| + \|y' - y_{\varphi(n)}\|$$

Ainsi la suite $(g^{\varphi(n)}(x') - g^{\varphi(n)}(y'))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x - y$, qui est bien une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n \in \mathbb{N}}$.

2. A nouveau, le fait que g soit 1-lipschitzienne montre que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante. Elle est également minorée donc elle converge.

La question précédente et la continuité de la norme montrent que $\|x - y\|$ est une valeur d'adhérence de cette même suite. C'est donc que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|x - y\|$.

Si l'on reprend la première question,

$$\|g^{n+1}(x') - g(x)\| \leq \|g^n(x') - x\| = \|g^n(x') - g^n(x_n)\| \leq \|x' - x_n\| \quad \text{et} \quad \|g^{n+1}(y') - g(y)\| \leq \|g^n(y') - y\| = \|g^n(y') - g^n(y_n)\| \leq \|y' - y_n\|$$

On en déduit comme précédemment que $g(x) - g(y)$ est encore une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n \in \mathbb{N}}$ et donc également de la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$. On en déduit que $\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$.

g est donc bien une isométrie.

3. Fixons $y \in E$. La suite $(g^n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact K donc on peut en extraire une suite $(g^{\varphi(n)}(y))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. La suite $(g^{\varphi(n+1)}(y) - g^{\varphi(n)}(y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers 0. Mais comme g est une isométrie,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y) - y\| = \|(g^{\varphi(n+1)}(y) - g^{\varphi(n)}(y))\|$$

donc la suite $(g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y . Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ car φ est strictement croissante donc $g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)$ appartient à $g(K)$. On en déduit que $y \in g(K)$. Mais comme g est continue et K est compact, $g(K)$ est compact donc fermé. Ainsi $g(K) = g(K)$ et $y \in g(K)$. L'application g est donc surjective. Pour le contre-exemple, on peut considérer l'espace vectoriel E des suites bornées muni de la norme infinie ainsi que la boule unité K . L'application g qui à une suite $u \in E$ associe la suite v définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est clairement une isométrie. De plus, K est stable par g mais g n'est clairement pas surjective.

Solution 46

1. L'application $\phi : \begin{cases} K^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \|x - y\| \end{cases}$ est continue comme composée des applications continues $(x, y) \mapsto x - y$ et $x \mapsto \|x\|$.

Comme K^2 est compact comme produit de compacts, $\phi(K^2)$ est un compact de \mathbb{R} . En particulier, $\phi(K)$ est majoré et contient sa borne supérieure. Ainsi $\delta(K)$ existe et la borne supérieure le définissant est atteinte.

2. Remarquons tout d'abord que le symétrique par rapport à a d'un point x de E est $2a - x$.

Soit $B \in \mathcal{S}_a$. Pour $y \in E$, notons $\phi_y : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \|x - y\| \end{cases}$. On a

$$T(B) = B \cap \left(\bigcap_{y \in B} \phi_y^{-1} \left(\left[0, \frac{1}{2} \delta(B) \right] \right) \right)$$

Comme ϕ_y est continue pour tout $y \in B$, les $\phi_y^{-1} \left(\left[0, \frac{1}{2} \delta(B) \right] \right)$ sont fermés. Ainsi $T(B)$ est fermé comme intersection de fermés. De plus, $T(B) \subset B$ avec B compact donc $T(B)$ est compact.

Montrons que $T(B)$ est symétrique par rapport à a . Soit $x \in T(B)$. On veut donc montrer que $2a - x \in T(B)$. Or pour tout $y \in B$:

$$\|(2a - x) - y\| = \|x - (2a - y)\| \leq \frac{1}{2} \delta(B)$$

car $x \in T(B)$ et $2a - y \in B$ par symétrie de B par rapport à a . Ainsi $2a - x \in T(B)$. Donc $T(B) \in \mathcal{S}_a$.

3. Soient $B \in \mathcal{S}_a$ et $(x, y) \in T(B)^2$. A fortiori, $(x, y) \in B^2$ de sorte que, par définition de $T(B)$ $\|x - y\| \leq \frac{1}{2}\delta(B)$. On en déduit que $\delta(T(B)) \leq \frac{1}{2}\delta(B)$. On peut alors montrer par récurrence que $\delta(B_n) \leq \frac{1}{2^n}\delta(B_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Posons $\tilde{B} = \bigcap_{n \geq 0} B_n$. Alors \tilde{B} est fermé comme intersection de fermés et \tilde{B} est inclus dans le compact B_0 donc il est compact. Puisque

$\tilde{B} \subset B_n$, $\delta(\tilde{B}) \leq \delta(B_n) \leq \frac{1}{2^n}\delta(B_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\delta(\tilde{B}) = 0$. Si $B_0 = \emptyset$, alors clairement $\tilde{B} = \emptyset$. Montrons maintenant que si $B_0 \neq \emptyset$, alors $\tilde{B} = \{a\}$. Soit $x \in \tilde{B}$. Alors x et $2a - x$ appartiennent à \tilde{B} puisque tous les $T_n(B)$ sont symétriques par rapport à a . En particulier, $\|x - (2a - x)\| = 0$ puis $a = x$.

4. Soient u une isométrie et $(x, y) \in E^2$. On pose alors $B_0 = \{x, y\}$ et on définit la suite (B_n) comme précédemment. Posons $m = \frac{x + y}{2}$ de sorte que B_0 est symétrique par rapport à m . Alors, comme précédemment, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{m\}$.

Montrons maintenant que si B est un compact de E , alors $T(u(B)) \subset u(T(B))$. Soit en effet $x \in T(u(B))$. En particulier, $x \in u(B)$ donc il existe $a \in T(B)$ tel que $x = u(a)$. De plus, pour tout $y \in u(B)$, $\|x - y\| \leq \frac{1}{2}\delta(u(B))$ donc pour tout $b \in B$, $\|u(a) - u(b)\| \leq \frac{1}{2}\delta(u(B))$.

Or u est une isométrie donc $\|u(a) - u(b)\| = \|a - b\|$ et on montre facilement que $\delta(u(B)) = \delta(B)$. Finalement $\|a - b\| \leq \frac{1}{2}\delta(B)$ pour tout $b \in B$ i.e. $a \in T(B)$. Ainsi $x = u(a) \in u(T(B))$.

On en déduit alors par récurrence que $T^n(u(B_0)) \subset u(T^n(B_0))$ i.e. $C_n \subset u(B_n)$ en posant $C_n = T^n(u(B_0))$. Finalement,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} u(B_n)$$

Mais comme u est injective en tant qu'isométrie,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} u(B_n) = u\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = u(\{a\}) = \{u(a)\}$$

Mais $C_0 = \{u(x), u(y)\}$ est symétrique par rapport à $n = \frac{u(x) + u(y)}{2}$ donc on montre comme à la question précédente que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \{n\}$. Finalement, $\{n\} \subset \{u(a)\}$ donc $n = u(a)$. u conserve bien les milieux.

Solution 47

1. Tout d'abord, f est continue sur K car lipschitzienne. L'application $\varphi : x \in K \mapsto \|f(x) - x\|$ est alors elle-même continue par continuité de la norme. Elle admet donc un minimum sur le compact K atteint en $a \in K$. Supposons que $f(a) \neq a$. D'après la propriété vérifiée par f , on aurait alors $\varphi(f(a)) < \varphi(a)$, ce qui est contradictoire. Ainsi $f(a) = a$ et f admet un point fixe. Supposons maintenant que f possède deux points fixes a et b . Comme $a \neq b$, $\|f(a) - f(b)\| < \|a - b\|$ i.e. $\|a - b\| < \|a - b\|$, ce qui est absurde. Ainsi f possède un unique point fixe.

2. Notons a l'unique point fixe de f . La suite de terme général $\|x_n - a\|$ est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc. Notons m sa limite. Soit alors ℓ une valeur d'adhérence de la suite (x_n) . On peut alors extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\psi(n)})$ convergeant vers ℓ .

La suite de terme général $\|x_{\psi(n)} - a\|$

- converge vers m en tant que suite extraite de la suite de terme général $\|x_n - a\|$;
- converge vers $\|\ell - a\|$ par continuité de la norme.

Ainsi $m = \|\ell - a\|$.

De même, la suite de terme général $\|x_{\psi(n)+1} - a\|$

- converge vers m en tant que suite extraite de la suite de terme général $\|x_n - a\|$;
- converge également vers $\|f(\ell) - a\|$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\psi(n)+1} - a\| = \|f(x_{\psi(n)}) - a\|$ et que f est continue.

Ainsi $m = \|f(\ell) - a\|$.

Supposons que $\ell \neq a$. Alors

$$m = \|f(\ell) - a\| = \|f(\ell) - f(a)\| < \|\ell - a\| = m$$

ce qui est absurde. Ainsi $\ell = a$.

La suite (x_n) est donc à valeurs dans un compact et ne possède que a comme unique valeur d'adhérence : elle converge donc vers a .

3. On peut par exemple considérer $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$. f n'admet clairement aucun point fixe. Par contre, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}}$$

Or, par stricte croissance de la racine carrée et inégalité triangulaire

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| \geq |x + y|$$

On en déduit que

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Solution 48

Tout d'abord les deux maxima sont bien définies car B et S sont des compacts et $z \mapsto |P(z)|$ est continue.

Tout d'abord, $S \subset B$ donc $\max_{z \in B} |P(z)| \geq \max_{z \in S} |P(z)|$. Supposons que l'inégalité soit stricte. Le maximum de $|P|$ sur B est alors atteint en un point z_0 qui n'appartient pas à S , autrement dit un point intérieur à B .

Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}(z_0) = 0$, alors P est constant d'après la formule de Taylor. De même, si $P(z_0) = 0$, P est le polynôme constant nul. Mais on a alors clairement $\max_{z \in B} |P(z)| = \max_{z \in S} |P(z)|$, ce qui contredit notre hypothèse.

Ainsi $P(z_0) \neq 0$ et on peut poser $p = \min \{k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}(z_0) \neq 0\}$. D'après la formule de Taylor, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = P(z_0) + \frac{P^{(p)}(z_0)}{p!}(z - z_0)^p + Q(z - z_0)(z - z_0)^{p+1}$$

Notamment,

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, P(z_0 + re^{i\theta}) = P(z_0) \left(1 + \frac{P^{(p)}(z_0)}{p!P(z_0)} r^p e^{ip\theta} + \frac{Q(re^{i\theta})}{P(z_0)} r^{p+1} e^{i(p+1)\theta} \right)$$

Posons $A = \frac{P^{(p)}(z_0)}{p!P(z_0)}$ et $R = \frac{Q}{P(z_0)}$.

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, P(z_0 + re^{i\theta}) = P(z_0) (1 + Ar^p e^{ip\theta} + R(re^{i\theta}) r^{p+1} e^{i(p+1)\theta})$$

Choisissons θ de telle sorte que $Ae^{ip\theta} = |A|$. Par inégalité triangulaire,

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, |P(z_0 + re^{i\theta})| \geq |P(z_0)| (1 + |A|r^p - |R(re^{i\theta})| r^{p+1}) = |P(z_0)| (1 + r^p (|A| - |R(re^{i\theta})| r))$$

Ainsi

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, |P(z_0 + re^{i\theta})| - |P(z_0)| \geq |A||P(z_0)| r^p - |R(re^{i\theta})| r^{p+1} = r^p (|A||P(z_0)| - |R(re^{i\theta})| r)$$

Comme R est continue et $|A||P(z_0)| \neq 0$,

$$r^p (|A||P(z_0)| - |R(re^{i\theta})| r) \underset{r \rightarrow 0^+}{\sim} |A||P(z_0)| r^p$$

Notamment, $r \mapsto |P(z_0 + re^{i\theta})| - |P(z_0)|$ est strictement positive au voisinage de 0^+ . Comme z_0 est intérieur à B , il existe $r > 0$ tel que $z_0 + re^{i\theta} \in B$ et $|P(z_0 + re^{i\theta})| - |P(z_0)| > 0$, ce qui contredit le fait que $|P|$ admet son maximum sur B en z_0 .

On conclut donc par l'absurde que $\max_{z \in B} |P(z)| = \max_{z \in S} |P(z)|$.

Solution 49

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est borné et fermé. Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne. Alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|^2 = \text{tr}(A^T A) = \text{tr}(I_n) = n$$

donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné. De plus, l'application $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T A$ est continue par continuité du produit matriciel et de la transposition. Or $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ et le singleton $\{I_n\}$ est fermé donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Solution 50

Puisque $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|x\| > A \implies f(x) > f(0)$. Comme E est de dimension finie, la boule fermée $B_f(0, A)$ est compacte. Comme f est continue, f admet un minimum m sur cette boule. Comme $0 \in B_f(0, A)$, $f(0) \geq m$ et donc pour $x \in E \setminus B_f(0, A)$, $f(x) > f(0) \geq m$. Finalement, $f(x) \geq m$ pour tout $x \in E$ et m est atteint sur $B_f(0, A)$ donc m est le minimum de f sur E .

Solution 51

Soit $y \in L$. On se donne une suite $(y_n) \in L^{\mathbb{N}}$ convergeant vers y . Posons $x_n = f^{-1}(y_n) \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in K$ une valeur d'adhérence de la suite (x_n) . On peut donc en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers x . Par continuité de f en x , $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(x)$ i.e. $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $f(x)$. Comme $y_{\varphi(n)}$ est une suite extraite de (y_n) , elle converge vers y . Par unicité de la limite, $y = f(x)$ i.e. $x = f^{-1}(y)$. Ainsi l'unique valeur d'adhérence de (x_n) est x i.e. l'unique valeur d'adhérence de $(f^{-1}(y_n))$ est $f^{-1}(y)$. Comme $(f^{-1}(y_n))$ est à valeurs dans le compact K , elle converge vers $f^{-1}(y)$. Par conséquent, f^{-1} est continue en y par caractérisation séquentielle de la continuité. Finalement, f^{-1} est continue sur L .

Solution 52

1. a. Supposons que $d(x, F) = 0$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi (x_n) converge vers x et $x \in F$ par caractérisation séquentielle des fermés, ce qui n'est pas.
- b. Puisque $\delta > 0$, il existe $v \in F$ tel que $\|x - v\| < d(x, F) + \delta = 2\delta$. Comme $x \notin F$, $x \neq v$ et $\|x - v\| > 0$.
- c. Posons $\alpha = \|x - v\|$. Soit $w \in F$.

$$\|u - w\| = \frac{1}{\alpha} \|x - v - \alpha w\| = \frac{1}{\alpha} \|x - (v + \alpha w)\|$$

Comme F est un sous-espace vectoriel de E , $v + \alpha w \in E$ puis $\|x - (v + \alpha w)\| \geq d(x, F) = \delta \geq \frac{1}{2\alpha}$ et enfin $\|u - w\| \geq \frac{1}{2}$. Ceci étant valable pour tout $w \in F$, $d(u, F) \geq \frac{1}{2}$.

2. Supposons que E n'est pas de dimension finie. On va construire par récurrence une suite (u_n) à valeurs dans B telle que $\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq m$.

On commence par se donner $u_0 \in B$. Supposons alors avoir construit des vecteurs u_0, \dots, u_n de B tels que $\|u_p - u_m\| \geq \frac{1}{2}$ pour tout $(p, m) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ et tel que $p \neq m$. Posons $F = \text{vect}(u_0, \dots, u_n)$. Alors F est de dimension finie et est donc fermé. De plus, comme E n'est pas de dimension finie, $F \neq E$. D'après la question précédente, il existe $u_{n+1} \in B$ (unitaire en fait) tel que $d(u_{n+1}, F) \geq \frac{1}{2}$. On en déduit alors que $\|u_p - u_m\| \geq \frac{1}{2}$ pour tout $(p, m) \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket^2$ et tel que $p \neq m$. On a donc bien construit par récurrence une suite vérifiant la condition annoncée.

De plus, cette suite (u_n) ne possède pas de suite extraite convergente. Si tel était le cas, il existerait $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \geq \frac{1}{2}$, ce qui donnerait $0 \geq \frac{1}{2}$ par passage à la limite.

Comme (u_n) est une suite à valeurs dans B ne possédant pas de suite extraite convergente, B n'est pas compacte.

REMARQUE. On n'a même prouvé que la sphère unité de E n'était pas compacte.

Solution 53

On remarque tout d'abord que les coefficients d'une matrice stochastique sont tous dans $[0, 1]$ donc \mathcal{S} est bornée.

L'application

$$\varphi : M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mapsto \left(\sum_{j=1}^p M_{i,j} \right)_{1 \leq i \leq n}$$

L'application φ est linéaire donc elle est continue puisque $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension finie. De plus,

$$\mathcal{S} = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+) \cap \varphi^{-1}(\{(1, \dots, 1)\})$$

Tout d'abord, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+) = (\mathbb{R}_+)^{\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ est fermé en tant que produit cartésien de fermé (\mathbb{R}_+ est fermé). Ensuite, $\varphi^{-1}(\{(1, \dots, 1)\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. On en déduit que \mathcal{S} est fermé en tant qu'intersection de fermés. \mathcal{S} est fermé et borné donc compact car $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

Solution 54

1. Soit $\varphi : x \in E \mapsto \|a - x\|$. Par inégalité triangulaire,

$$\forall (x, y) \in E^2, \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|(a - x) - (a - y)\| = \|x - y\|$$

donc φ est lipschitzienne et a fortiori continue sur E . Comme X est compacte, φ admet un minimum sur X . Soit $x_0 \in X$ tel que $\varphi(x_0) = \min_X \varphi$. Alors, on a bien $\|a - x_0\| \leq \|a - x\|$ pour tout $x \in X$.

2. Fixons $y \in X$ et notons B la boule fermée de centre a et de rayon $\|a - y\|$. Alors $X \cap B$ est fermé en tant qu'intersection de fermé et $X \cap B \subset B$ donc $X \cap B$ est également borné. Comme E est de dimension finie, $X \cap B$ est compact. D'après la question précédente, il existe $x_0 \in X \cap B$ tel que $\|a - x_0\| \leq \|a - x\|$ pour tout $x \in X \cap B$. Soit alors $x \in X$.

- Si $x \in B$, alors $x \in X \cap B$ et $\|a - x\| \geq \|a - x_0\|$.
- Si $x \notin B$, alors $\|a - x\| > \|a - y\|$. Mais $y \in X \cap B$ donc $\|a - y\| \geq \|a - x_0\|$. Ainsi $\|a - x\| > \|a - x_0\|$.

Finalement, $\|a - x_0\| \leq \|a - x\|$ pour tout $x \in X$.

Solution 55

Supposons que B est compacte. Alors S est un fermé inclus dans le compact B donc S est compacte.

Supposons que S est compacte. Soit (u_n) une suite à valeurs dans B . Alors $(\|u_n\|)$ est une suite à valeurs dans le compact $[0, 1]$. On peut donc en extraire une suite $(\|u_{\varphi(n)}\|)$ convergeant vers $r \in [0, 1]$. Si $r = 0$, alors $(u_{\varphi(n)})$ converge vers $0_E \in B$. Sinon, $(\|u_{\varphi(n)}\|)$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang et on peut alors définir $x_n = \frac{u_{\varphi(n)}}{\|u_{\varphi(n)}\|}$ à partir d'un certain rang. La suite (x_n) est à valeurs dans le compact S : on peut donc en extraire une suite $(x_{\psi(n)})$ convergeant vers $x \in S$. Mais alors, à partir d'un certain rang, $u_{\varphi \circ \psi(n)} = \|u_{\varphi \circ \psi(n)}\| x_n$. Or $(\|u_{\varphi \circ \psi(n)}\|)$ est une suite extraite de la suite $(\|u_{\varphi(n)}\|)$ qui converge vers r donc $(u_{\varphi \circ \psi(n)})$ converge vers rx . On remarque que $\|rx\| = r \in [0, 1]$ donc $rx \in B$. On a prouvé que B était compacte.

Connexité

Solution 56

1. Posons $U = \mathbb{R}^n \setminus \cup_{i=1}^r \text{Ker } f_i$ et notons $E = \{-1, +1\}^r$. Pour $a \in E$, on pose

$$C_a = \{x \in U, \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, a_i f_i(x) > 0\}$$

Montrons que les composantes connexes par arcs de U sont les C_a pour $a \in E$.

Montrons que les C_a sont non vides. Soient $a \in E$. Comme la famille f_1, \dots, f_r est libre, l'application linéaire

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^r \\ x & \longmapsto (f_i(x))_{1 \leq i \leq r} \end{cases}$$

est de rang r , autrement dit surjective. Il existe donc $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x) = a$. On vérifie alors que $x \in C_a$.

Montrons que les C_a sont connexes par arcs. Soient $a \in E$ et $(x, y) \in C_a^2$. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$a_i f_i((1-t)x + ty) = a_i(1-t)f_i(x) + a_i t f_i(y) > 0$$

(considérer les cas $t = 0$, $t = 1$ et $t \in]0, 1[$). Ainsi C_a est convexe et, a fortiori, connexe par arcs.

Montrons que les C_a sont maximaux. Soit $a \in E$, $x \in C_a$ et $y \in U \setminus C_a$. Il existe donc $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $a_i f_i(x) > 0$ et $a_i f_i(y) < 0$. Soit $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. L'application $a_i f_i \circ \phi$ est continue sur $[0, 1]$ et s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi ϕ ne peut être à valeurs dans U . Ceci prouve que C_a est un connexe par arcs maximal.

Par conséquent, le nombre de composantes connexes par arcs de U est $\text{card } E = 2^r$.

2. On pose à nouveau $U = \mathbb{C}^n \setminus \cup_{i=1}^r \text{Ker } f_i$. Montrons que U est connexe par arcs. Soient $(x, y) \in U^2$. L'application

$$P : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \prod_{i=1}^r f_i((1-z)x + zy) \end{cases}$$

est polynomiale. Elle possède donc un nombre fini de racines. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, P(z) \neq 0\}$ est donc connexe par arcs et contient 0 et 1. Il est donc possible de construire une application $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue ne prenant pas pour valeurs ces racines et telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. L'application $\phi : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t & \longmapsto (1 - \varphi(t))x + \varphi(t)y \end{cases}$ est continue. Comme φ ne prend pas pour valeurs les racines de P , $P \circ \varphi$ ne s'annule pas ; autrement dit, ϕ est à valeurs dans U . Enfin, $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$: ϕ est donc un chemin continu de U entre x et y . Ceci prouve que U est connexe par arcs. Il ne possède donc qu'une seule composante connexe par arcs, à savoir lui-même.

Solution 57

1. Soit $(a, b) \in S^2$. Supposons dans un premier temps que $a \neq -b$. Posons

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \frac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|}$$

- Comme $a \neq -b$, on vérifie aisément que le dénominateur ne s'annule pas de sorte que γ est continue sur $[0, 1]$.
- γ est clairement à valeurs dans S .
- $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Supposons $a = -b$. Comme $\dim E \geq 2$, il existe un vecteur c non colinéaire à a . En particulier, c est non nul et quitte à le diviser par sa norme, on peut supposer $c \in S$. On alors $c \neq -a$ et $c \neq -b$. D'après ce qui précède, il existe un chemin continu γ_1 reliant a à c et un chemin continu γ_2 reliant c à b . En posant $\gamma(t) = \gamma_1(2t)$ pour $t \in [0, 1/2]$ et $\gamma(t) = \gamma_2(2t - 1)$ pour $t \in [1/2, 1]$, γ est un chemin continu reliant a à b .

2. Soit $S(a, r)$ la sphère de centre $a \in E$ et de rayon r . Alors $S(a, r)$ est l'image de S par l'application continue $x \mapsto a + rx$ donc $S(a, r)$ est également connexe par arcs.

Solution 58

On sait que $\det O_n(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}$. Or \det est continu sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\{-1, 1\}$ n'est évidemment pas connexe par arcs donc $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas non plus connexe par arcs.

Solution 59

On rappelle qu'en posant $R : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$,

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$$

Comme R est clairement continue sur \mathbb{R} et que \mathbb{R} est connexe par arcs, $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Solution 60

1. L'application d est polynomiale : elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Ainsi V est égal à \mathbb{C} privé d'un nombre *fini* de points. Il est donc connexe par arcs.
2. L'application $f : z \in \mathbb{C} \mapsto (1 - z)A + zB$ est clairement continue (elle est affine). On en déduit que $f(V)$ est connexe par arcs. Remarquons que $A = f(0) \in f(V)$ et $B = f(1) \in f(V)$. Comme $f(V)$ est connexe par arcs, il existe un chemin continu reliant A à B à valeurs dans $f(V)$. Par construction de V , $f(V) \subset GL_n(\mathbb{C})$ donc ce chemin continu est également à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$. Ceci étant valable pour tout couple $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$, $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Solution 61

1. Soit f une telle application. L'application $x \mapsto x^3$ étant injective (car strictement croissante), on a alors $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ vérifie bien la condition de l'énoncé.

2. Soit f une telle application. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $(f(z)/z)^3 = 1$ donc $f(z)/z = 1$ ou $f(z)/z = j$ ou $f(z)/z = j^2$.

REMARQUE. On prendra garde à différencier les propositions logiques suivantes :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, (f(z)/z = 1 \text{ ou } f(z)/z = j \text{ ou } f(z)/z = j^2)$$

et

$$(\forall z \in \mathbb{C}^*, ; f(z)/z = 1) \text{ ou } (\forall z \in \mathbb{C}^*, ; f(z)/z = j) \text{ ou } (\forall z \in \mathbb{C}^*, ; f(z)/z = j^2)$$

Ainsi l'application $\psi : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{f(z)}{z}$ est à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$. Mais \mathbb{C}^* est connexe et ψ est continue sur \mathbb{C}^* donc $\psi(\mathbb{C}^*)$ est un connexe de $\{1, j, j^2\}$. Ainsi $\psi(\mathbb{C}^*) = \{1\}$ ou $\psi(\mathbb{C}^*) = \{j\}$ ou $\psi(\mathbb{C}^*) = \{j^2\}$. Comme f est continue en 0, on a donc $f = \text{Id}_{\mathbb{C}}$ ou $f = j \text{Id}_{\mathbb{C}}$ ou $f = j^2 \text{Id}_{\mathbb{C}}$.

Solution 62

Supposons f injective. f est continue et \mathbb{U} est connexe par arcs donc $f(\mathbb{U})$ est un connexe par arcs de \mathbb{R} donc un intervalle. De plus, $f(\mathbb{U})$ n'est pas réduit à un point sinon f serait constante donc non injective. Par ailleurs, \mathbb{U} est compact donc $f(\mathbb{U})$ l'est également car f est continue. On en déduit que $f(\mathbb{U})$ est un segment $[a, b]$ avec $a < b$. Soit $c \in]a, b[$. Il existe alors $z \in \mathbb{U}$ tel que $f(z) = c$. Mais $\mathbb{U} \setminus \{z\}$ est encore connexe par arcs donc $f(\mathbb{U} \setminus \{z\})$ est connexe par arcs. Comme f est injective, $f(\mathbb{U} \setminus \{z\}) = f(\mathbb{U}) \setminus \{f(z)\} = [a, b] \setminus \{c\}$. Mais $[a, b] \setminus \{c\}$ n'est pas connexe par arcs. On aboutit à une contradiction : f n'est pas injective.

Solution 63

Supposons f injective. f est continue et \mathbb{R}^2 est connexe par arcs donc $f(\mathbb{R}^2)$ est un connexe par arcs de \mathbb{R} donc un intervalle. De plus, $I = f(\mathbb{R}^2)$ n'est pas réduit à un point sinon f serait constante donc non injective. On en déduit que $I \neq \emptyset$. Soit $a \in I$. Il existe alors $b \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(b) = a$. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus \{b\}$ est encore connexe par arcs donc $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{b\})$ est connexe par arcs. Comme f est injective, $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{b\}) = f(\mathbb{R}^2) \setminus \{f(b)\} = I \setminus \{a\}$ qui n'est pas connexe par arcs. On aboutit à une contradiction : f n'est pas injective.