DEVOIR À LA MAISON N°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 **1.a** ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$ donc ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.b Si l'un des a_i est nul, l'inégalité est triviale. Sinon, par concavité de ln,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)$$

On obtient alors l'inégalité voulue par croissance de exp.

2 **2.a** Soit $s \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de s.
Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top\mathrm{SP}$ soit diagonale.

2.b On calcule $\chi_{\mathrm{S}} = \mathrm{X}^2$. Ainsi $\mathrm{Sp(S)} = \{0\}$. Si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle. S n'est donc pas diagonalisable.

3 **3.a** Comme β est une base orthonormée, $x = \sum_{i=1}^n \langle x \mid \varepsilon_i\rangle \varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x \mid \varepsilon_i\rangle \varepsilon_i$. Comme β est orthonormée,

$$\mathrm{R}_s(x) = \langle s(x) \mid x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2$$

3.b Soit $x \in \mathrm{S}(0,1)$. Alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 = 1$. Comme $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_1 \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2$$

ou encore

$$\lambda_1 \leq \mathrm{R}_s(x) \leq \lambda_n$$

4 Notons s l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base β est S. On sait que $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que β est orthonormée donc $s \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. De plus, $\mathrm{Sp}(s) = \mathrm{Sp(S)} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
Comme β est orthonormée, $s_{i,j} = \langle s(\varepsilon_j) \mid \varepsilon_i\rangle$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Comme la base β est normée, $\varepsilon_i \in \mathrm{S}(0,1)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. D'après la question précédente, $\mathrm{R}_s(\varepsilon_i) = \langle s(\varepsilon_i) \mid \varepsilon_i\rangle \in [\lambda_1, \lambda_n]$ ou encore

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n$$

5 L'application $\varphi\colon\ \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M} - \mathrm{I}_n$ est polynomiale en les coefficients de M donc continue.
On peut aussi remarquer que, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, l'application linéaire $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application bilinéaire $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont continues. Ainsi l'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est continue comme composée des applications continues $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{M}^\top, \mathrm{M})$ et $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{I}_n$ est constante donc continue. Par différence, φ est continue.

6 On sait que les colonnes de A sont toutes de norme 1 i.e.

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 1$$

Comme les $a_{i,j}^2$ sont positifs, on en déduit que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |a_{i,j}| \leq 1$$

7 Le singleton $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
D'après la question précédente, $O_n(\mathbb{R})$ est borné. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $O_n(\mathbb{R})$ est compact car fermé et borné.

8 **8.a** D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $S = P\Delta P^\top = P\Delta P^{-1}$. Par propriété de la trace,

$$T(A) = \operatorname{tr}(AS) = \operatorname{tr}(AP\Delta P^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP\Delta)$$

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe, $B = P^{-1}AP \in O_n(\mathbb{R})$.

8.b T est une forme linéaire sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi T est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, T admet un maximum t sur $O_n(\mathbb{R})$.

8.c Si on note $B = (b_{i,j})$,

$$T(A) = \operatorname{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n b_{i,i}\lambda_i$$

Mais comme B est orthogonale, $b_{i,i} \leq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Enfin, les λ_i sont positifs car $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc

$$T(A) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{tr}(S)$$

Ainsi $\operatorname{tr}(S)$ est un majorant de T sur $O_n(\mathbb{R})$. De plus, $T(I_n) = \operatorname{tr}(S)$ et $I_n \in O_n(\mathbb{R})$ donc $t = \operatorname{tr}(S)$.

9 Comme S est diagonalisable, $\det(S) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\operatorname{tr}(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Comme les λ_i sont positifs, d'après la question **1.b**,

$$\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lambda_i$$

ou encore

$$\det(S)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\operatorname{tr}(S)$$

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(S)\right)^n$$

10 Tout d'abord,

$$S_\alpha^\top = D^\top S^\top D = D^\top SD = S_\alpha$$

car S est symétrique. Ainsi S_α est également symétrique.
Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top S_\alpha X = (DX)^\top S(DX) \geq 0$$

car $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On en déduit que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Enfin,

$$\operatorname{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i}$$

11 Par propriété du déterminant

$$\det(S_\alpha) = \det(S)\det(D)^2 = \det(S)\prod_{i=1}^n \alpha_i^2 = \frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^n s_{i,i}}$$

La question précédente montre que $\operatorname{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i} = n$. On applique l'inégalité de la question **9** à S_α et on obtient

$$\frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^n s_{i,i}} \leq 1$$

ou encore

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

12 Comme $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ et les coefficients diagonaux de S sont positifs d'après la question **4**. Les coefficients diagonaux de S_ε sont alors strictement positifs puisque $\varepsilon > 0$. On peut alors appliquer la question précédente à S_ε.

$$\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$$

Comme S_ε est encore diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1 + \varepsilon, \dots, \lambda_n + \varepsilon$, ceci équivaut à

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + \varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient bien par passage à la limite

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n}s_{i,i}$$

13 On vérifie aisément que B est symétrique car A l'est. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. De plus, $B = \Omega^\top A\Omega = \Omega^{-1}A\Omega$ car Ω est orthogonale. Ainsi B est semblable à A de sorte que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On sait que $\det(\Omega) = 1$ car $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ donc, par propriété du déterminant,

$$\det(B) = \det(\Omega)^2\det(A) = 1$$

car $A \in \mathcal{U}$. Ainsi $B \in \mathcal{U}$.
Enfin, par propriété de la trace,

$$\mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(A\Omega\Delta\Omega^\top) = \mathrm{tr}(\Omega^\top A\Omega\Delta) = \mathrm{tr}(B\Delta)$$

14 La question précédente montre l'inclusion $\{\mathrm{tr}(AS),\ A \in \mathcal{U}\} \subset \{\mathrm{tr}(B\Delta),\ B \in \mathcal{U}\}$.
Inversement, si on se donne $B \in \mathcal{U}$ et si l'on pose $A = \Omega B\Omega^\top$, on vérifie que $A \in \mathcal{U}$ et que $\mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(B\Delta)$, ce qui donne l'inclusion réciproque.
Par double inclusion, $\{\mathrm{tr}(AS),\ A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{tr}(B\Delta),\ B \in \mathcal{U}\}$.
Comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. D'après la question **4**, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_{i,i} \geq \min \mathrm{Sp}(B) > 0$ car $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\forall B \in \mathcal{U},\ \mathrm{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_{i,i} > 0$$

L'ensemble $\{\mathrm{tr}(AS),\ A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{tr}(B\Delta),\ B \in \mathcal{U}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée : il addmet donc une borne inférieure.

15 On a montré à la question précédente que

$$\forall B \in \mathcal{U},\ \mathrm{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_{i,i}$$

et on a vu que les $\lambda_i b_{i,i}$ étaient positifs. On peut donc appliquer la question **1.b** pour affirmer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_{i,i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i b_{i,i}\right)^{1/n}$$

ou encore

$$\mathrm{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_{i,i} \geq n\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1/n}\left(\prod_{i=1}^{n}b_{i,i}\right)^{1/n}$$

16 Comme $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on peut appliquer l'inégalité d'Hadamard :

$$\prod_{i=1}^{n}b_{i,i} \geq \det(B) = 1$$

puisque $B \in \mathcal{U}$. En combinant avec l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\mathrm{tr}(B\Delta) \geq n\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1/n} = n\det(S)^{1/n}$$

17 Il est clair que $D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus,

$$\det(D) = \prod_{k=1}^{n} \mu_k = \frac{\det(S)}{\prod_{k=1}^{n} \lambda_k} = 1$$

donc $D \in \mathcal{U}$. Enfin,

$$\operatorname{tr}(D\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k = n \det(S)^{1/n}$$

On en déduit que $m = n \det(S)^{1/n}$ (cette borne inférieure est en fait un minimum).