Devoir à la maison n°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 **1.a** g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'abord,

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = 1 = g(0)$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$

Or

$$\cos t \underset{t\to0}{=} 1 + o(t) \qquad \sin t \underset{t\to0}{=} t + o(t^2)$$

donc $g'(t) \underset{t\to0}{=} o(1)$ i.e. $\lim\limits_0 g' = 0$. g' admet bien une limite finie en 0 donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

1.b Comme g est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\, dt$ converge.

Une primitive de $t \mapsto \sin t$ est $t \mapsto -\cos t$ tandis que la dérivée de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$. De plus, comme cos est bornée

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{-\cos t}{t} = 0$$

Par intégration par parties, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)\, dt$ est de même nature que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$. Cette dernière intégrale converge puisque $\frac{\cos t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)\, dt$ converge et finalement $\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ converge aussi.

1.c On effectue le changement de variable $u = jt$: les intégrales $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\, dt$ et $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(jt)}{t}\, dt$ sont de même nature et égales.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(jt)}{t} = \frac{\pi}{2}$$

1.d Tout d'abord,

$$g(t) \underset{t\to0^+}{=} 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + o(t^4)$$

et

$$\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

donc

$$\ln(g(t)) \underset{t\to0}{=} -\frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{(3!)^2} + o(t^4) \underset{t\to0}{=} -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + o(t^4)$$

1.e En effectuant le changement de variable $u = t\sqrt{\frac{n}{3}}$,

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3}{n}}\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{3}} = +\infty$, l'indication de l'énoncé permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

$\boxed{2}$ **2.a** Comme $\sin^n$ est bornée, $\frac{\sin^n t}{t^n} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. De plus, $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\sin^n t}{t^n} = 1$ donc $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^n(t)}{t^n}\,\mathrm{d}t$ converge.

2.b Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

L'intégration par parties est légitime car

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\sin^2 t}{t} = 0$$

Ainsi, en utilisant la question **1.c** avec $j = 2$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{3}$ **3.a** La fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $h_n^{(k)}$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$. Ainsi $h_n^{(k)}$ est bornée sur ce segment. Comme h_n est 2π-périodique, $h_n^{(k)}$ l'est également. Finalement, $h_n^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

3.b Comme $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, $h_n \underset{n\to+\infty}{=} t^n + o(t^n)$. Comme h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut dériver k fois ce développement limité de sorte que

$$h_n^{(k)}(t) \underset{n\to+\infty}{=} n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)t^{n-k} + o(t^{n-k})$$

ou encore

$$h_n^{(k)}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!}t^{n-k}$$

3.c Comme $h_n^{(k)}$ est bornée et $k \leq n-2$, $\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. De plus, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ d'après la question **3.b**. On en déduit que $\int_0^{+\infty}\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$ converge.

3.d $h_n^{(n-2)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $h_n^{(n-1)}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$. D'après la question précédente, $\int_0^{+\infty}\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus, comme $h_n^{(n-2)}$ est bornée, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} = 0$ et comme $h_n^{(n-2)}(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2}t^2$ d'après la question **3.b**, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} = 0$.

Par intégration par parties, $\int_0^{+\infty}\frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty}\frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On considère alors l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathcal{P}_k :\ \mathrm{I}_n = \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$$

$\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie. Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain $k \in [\![0, n-2]\!]$. Par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n-k-1}\left[\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k-1}}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n-k-1}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}}\,\mathrm{d}t$$

Les convergences des intégrales sont assurées par ce qui précède. De plus, comme h_n^k est bornée, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{h_n^k(t)}{t^{n-k-1}} = 0$ et comme $h_n^k(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!}t^{n-k}$ d'après la question **3.b**, $\lim\limits_{t\to0} \frac{h_n^{(n-k)}(t)}{t^{n-k-1}} = 0$. On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n-k-1}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}}\,\mathrm{d}t$$

En utilisant $\mathcal{P}_k$, on obtient donc que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie. Par récurrence finie, $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie, ce qui conclut la question.

$\boxed{4}$ **4.a** Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après une relation d'Euler et le relation du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
h_{2n}(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^{2n}\\
&= \frac{1}{2^{2n}i^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(e^{it})^{2n-k}(-e^{-it})^k\\
&= \frac{1}{4^n(-1)^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k e^{i(2n-2k)t}\\
&= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}e^{i(2n-2k)t}
\end{aligned}$$

4.b En dérivant $2n-1$ fois la relation précédente :

$$\begin{aligned}
h_{2n}^{(2n-1)}(t) &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(i(2n-2k))^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\\
&= \frac{2^{2n-1}i^{2n-1}}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\\
&= \frac{(-1)^n}{2i}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t} + \sum_{k=n+1}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\right) && \text{car le terme d'indice } n \text{ est nul}\\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{2n}{n-j}j^{2n-1}e^{2ijt} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}(-j)^{2n-1}e^{-2ijt}\right) && \text{en posant } j=n-k \text{ et } j=k-n\\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}e^{2ijt} - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}e^{-2ijt}\right) && \text{par symétrie des coefficients binomiaux}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\frac{e^{2ijt}-e^{-2ijt}}{2i}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\sin(2jt) && \text{via une relation d'Euler}
\end{aligned}$$

4.c

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{2n} &= \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_{2n}^{(2n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t && \text{d'après la question } \mathbf{3.d}\\
&= \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\sin(2jt)}{t}\,\mathrm{d}t && \text{d'après la question } \mathbf{4.b}\\
&= \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2jt)}{t}\,\mathrm{d}t && \text{car chacune des intégrales convergent}\\
&= \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\frac{\pi}{2} && \text{d'après la question } \mathbf{1.c}\\
&= \frac{\pi}{2(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ **5.a** Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)^n\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{|\sin^n t|}{t^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{1}{t^n} = (2/\pi)^{n-1}$$

Donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left((2/\pi)^n\right)$. Mais comme $0 \leq 2/\pi < 1$, $(2/\pi)^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(1/\sqrt{n}\right)$ par croissances comparées. Finalement

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

5.b 5.b.i On a vu précédemment que

$$\forall t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ g'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} = \frac{\cos t}{t^2}(t - \tan t)$$

Par convexité de tan sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan t \geq t$ pour $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi g' est négative sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et g est décroissante sur cet intervalle.

5.b.ii On a vu à la question **1.d** que $\ln(g(t)) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{6}$. Puisque $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\ln(g(\varepsilon_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\varepsilon_n^2}{6} = -\frac{\ln^2 n}{6n}$$

5.b.iii Par décroissance et positivité de g sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leq \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_n\right)g(\varepsilon_n)^n \leq \frac{\pi}{2}g(\varepsilon_n)^n$$

> **Remarque.** On utilise aussi le fait que, pour n suffisamment grand, $\varepsilon_n \leq \frac{\pi}{2}$ puisque (ε_n) converge vers 0.

Ainsi

$$0 \leq \sqrt{n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}g(\varepsilon_n)^n$$

Or

$$\sqrt{n}g(\varepsilon_n)^n = \exp\left(\frac{1}{2}\ln n - n\ln(g(\varepsilon_n))\right)$$

D'après la question précédente, $n\ln(g(\varepsilon_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6}\ln^2 n$ donc

$$\frac{1}{2}\ln n - n\ln(g(\varepsilon_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\ln^2 n$$

En particulier,

$$\frac{1}{2}\ln n - n\ln(g(\varepsilon_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

puis, par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

ou encore

$$\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

5.c 5.c.i Par convexité de exp, $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$|e^{-u} - 1| = 1 - e^{-u} \leq u \leq 2u$$

N'importe quel $a > 0$ convient donc.
5.c.ii D'après la question **1.d**,

$$\ln(g(t)) + \frac{t^2}{6} \underset{t\to0}{\sim} -\frac{t^4}{180}$$

On en déduit que $t \mapsto \ln(g(t)) + \frac{t^2}{6}$ est négative au voisinage de 0.
Par ailleurs, on peut également affirmer que

$$\lim_{t\to0} \frac{1}{t^3}\left(\ln(g(t)) + \frac{t^2}{6}\right) = 0$$

Par définition de la limite, il existe un voisinage de 0 sur lequel $t \mapsto \frac{1}{t^3}\left(\ln(g(t)) + \frac{t^2}{6}\right)$ est à valeurs dans $[-1, +\infty[$.
On déduit des deux points précédents qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, b],\ -t^3 \leq \ln(g(t)) + \frac{t^2}{6} \leq 0$$

5.c.iii Puisque (ε_n) converge vers 0, elle est à valeurs dans $[0, b]$ à partir d'un certain rang N. Soit donc $n \geq \mathrm{N}$ et $t \in [0, \varepsilon_n]$.
D'après la question précédente.

$$-t^3 \leq \ln(g(t)) + \frac{t^2}{6} \leq 0$$

puis, par croissance de l'exponentielle,

$$e^{-nt^3} \leq g(t)^n e^{\frac{nt^2}{6}} \leq 1$$

puis

$$e^{-nt^3} - 1 \leq g(t)^n e^{\frac{nt^2}{6}} - 1 \leq 0$$

et enfin

$$0 \leq e^{-\frac{nt^2}{6}} - g(t)^n \leq \left(1 - e^{-nt^3}\right)e^{-\frac{nt^2}{6}}$$

Mais comme $e^{-\frac{nt^2}{6}} \leq 1$, on en déduit finalement que

$$0 \leq e^{-\frac{nt^2}{6}} - g(t)^n \leq \left(1 - e^{-nt^3}\right)$$

Ces inégalités étant vraies pour tout $t \in [0, \varepsilon_n]$, on obtient en intégrant sur cet intervalle,

$$0 \leq \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\varepsilon_n} \left(1 - e^{-nt^3}\right)\mathrm{d}t$$

et donc

$$\left|\int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n\,\mathrm{d}t - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\varepsilon_n} \left(1 - e^{-nt^3}\right)\mathrm{d}t$$

A nouveau, comme (ε_n) converge vers 0, cette suite est à valeurs dans $[0, a]$ à partir d'un certain rang. On en déduit que pour n suffisamment grand,

$$\left|\int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n\,\mathrm{d}t - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\varepsilon_n} 2nt^3\,\mathrm{d}t = \frac{n\varepsilon_n^4}{2} = \frac{\ln^4 n}{2n}$$

5.d D'après la question précédente,

$$\int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n\,\mathrm{d}t - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{\ln^4}{n}\right)$$

Mais par croissances comparées, $\frac{\ln^4}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc

$$\int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n\,\mathrm{d}t - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Enfin, d'après la question **1.e**,

$$\int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

ou encore

$$\int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On en déduit que

$$\int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n\,\mathrm{d}t = \left(\int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n\,\mathrm{d}t - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}}\right) + \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puis, par relation de Chasles, en utilisant les questions **5.a** et **5.b**,

$$\int_0^{+\infty} g(t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t)^n\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ou encore

$$\int_0^{+\infty} g(t)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

6 **6.a** La seule liste de S_n avec une seule montée est évidemment $(1, 2, \dots, n)$. Ainsi $\mathrm{E}_n(1) = 1$.
De même, la seule liste de S_n avec n montées est évidemment $(n, n-1, \dots, 1)$. On a donc également $\mathrm{E}_n(n) = 1$.

6.b On peut par exemple choisir $a = (1, 2, \dots, n-k, n, n-1, \dots, n-k+1)$ ou bien $a = (n, n-1, \dots, n-k+1, 1, 2, \dots, n-k)$.

7 Si $a_i < a_{i+1}$, le nombre de montées de $(a_1, \dots, a_{i+1})$ reste le même que celui de $(a_1, \dots, a_{i+1})$ mais le nombre de descentes augmente de 1. Si $a_i > a_{i+1}$, c'est le contraire. Dans tous les cas, $s_{i+1} = s_i + 1$. De plus, il est clair que $s_1 = 1 + 1 = 2$ donc

$$\mathrm{M}(a) + \mathrm{D}(a) = s_n = s_1 + n - 1 = n + 1$$

8 **8.a** Soit $a \in \mathrm{S}_n$. Comme les a_i sont distincts, les $n + 1 - a_i$ le sont également. De plus, les a_i appartiennent à $[\![1, n]\!]$ donc les $n + 1 - a_i$ également. On en déduit que $\Psi(a) \in \mathrm{S}_n$. Ainsi Ψ est une application de S_n dans lui-même.
Il est par ailleurs clair que $\Psi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathrm{S}_n}$ donc Ψ est une involution et a fortiori une bijection.

8.b On remarque d'abord que toutes les montées d'une liste a sont transformées en des descentes par Ψ et réciproquement. Plus précisément, $(a_p, \dots, a_q)$ est une montée d'une liste a de S_n si et seulement si $(n + 1 - a_p, \dots, n + 1 - a_q)$ est une descente de $\Psi(a)$. On en déduit que Ψ établit une bijection entre l'ensemble des listes de S_n à k montées et l'ensemble des listes de S_n à k descentes. Le cardinal du premier ensemble est $\mathrm{E}_n(k)$ par définition tandis que le cardinal du second ensemble est $\mathrm{E}_n(n + 1 - k)$ d'après la question **7**. Ainsi $\mathrm{E}_n(k) = \mathrm{E}_n(n + 1 - k)$.

9 **9.a** Se donner un couple (A, B) de parties non vides de $[\![1, n]\!]$ telles que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = [\![1, n]\!]$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ revient à se donner une partie A de $[\![1, n]\!]$ non vide et non égale à $[\![1, n]\!]$ puisqu'alors on a automatiquement $\mathrm{B} = [\![1, n]\!] \setminus \mathrm{A}$. On sait que le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ est 2^n. Le nombre de couples recherchés est donc $2^n - 2$.

9.b Se donner une liste de S_n à 2 montées revient à se donner chacune des deux montées, c'est-à-dire un couple de parties (A, B) tel que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = [\![1, n]\!]$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ puis, en notant $a_1, \dots, a_p$ les éléments de A rangés par ordre croissant de même que $a_{p+1}, \dots, a_n$ les éléments de B rangés par ordre croissant, à construire la liste $(a_1, \dots, a_p, \dots, a_{p+1}, \dots, a_n)$. Mais une telle liste ne convient qu'à condition que $a_p > a_{p+1}$. Mais la seule possibilité d'avoir $a_p < a_{p+1}$ est que $a_i = i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Pour obtenir $\mathrm{E}_n(2)$, il faut donc retrancher au cardinal de la question précédente le nombre de couples de parties de $[\![1, n]\!]$ de la forme $(\{1, 2, \dots, k\}, \{k + 1, \dots, n\})$ avec $k \in [\![1, n - 1]\!]$. Comme il existe $n - 1$ couples de cette forme,

$$\mathrm{E}_n(2) = 2^n - 2 - (n - 1) = 2^n - (n + 1)$$

10 **10.a** Les antécédents de b par φ_n sont les listes obtenues à partir de b en insérant $n+1$ à un endroit de la liste b (éventuellement au début ou à la fin de la liste).

10.b Si $n+1$ est placé «à la fin» d'une monté de b, alors $\mathrm{M}(a) = \mathrm{M}(b)$. Sinon, $n+1$ forme une nouvelle montée de longueur 1 et $\mathrm{M}(a) = \mathrm{M}(b)+1$.

10.c Notons $\mathrm{S}_n(k)$ l'ensemble des listes de S_n à k montées. D'après la question précédente,

$$\mathrm{S}_{n+1}(k+1) = (\mathrm{M}\circ\varphi_n)^{-1}(\{k+1\}) \sqcup (\mathrm{M}\circ\varphi_n)^{-1}(\{k\})$$

Si on se donne un élément de $\mathrm{S}_n(k+1)$, ses antécédents par φ_n à $k+1$ montées sont obtenus en rajoutant $n+1$ «à la fin» de l'une des $k+1$ montées. On en déduit que $\mathrm{card}(\mathrm{M}\circ\varphi_n)^{-1}(\{k+1\}) = (k+1)\mathrm{E}_n(k)$. Par contre ses antécédents par φ_n à k montées sont obtenus en plaçant $n+1$ à l'un des $n+1-k$ «emplacements» restants. On en déduit que $\mathrm{card}(\mathrm{M}\circ\varphi_n)^{-1}(\{k\}) = (k+1)\mathrm{E}_n(k)$. Le partitionnement précédent permet alors d'affirmer que

$$\mathrm{E}_{n+1}(k+1) = (k+1)\mathrm{E}_n(k+1) + (n+1-k)\mathrm{E}_n(k)$$

De plus, $\mathrm{E}_{n+1}(1) = \mathrm{E}_n(1) = 1$ et $\mathrm{E}_n(0) = 0$ donc la formule précédente est encore valide lorsque $k=0$.
Enfin, si $k>n$, $\mathrm{E}_{n+1}(k+1) = \mathrm{E}_n(k+1) = \mathrm{E}_n(k) = 0$ donc la formule précédente est encore valide lorsque $k>n$.

10.d On peut utiliser la relation de récurrence de la question précédente mais on préfère confier le travail à Python plutôt que d'effectuer les calculs à la main.

```python
def montees(N):
    L = [[1]]
    for n in range(1, N):
        last = L[-1]
        new = [1] + [(k+2)*v[0]+(n-k)*v[1] for k,v in enumerate(zip(last[1:],last[:-1]))]
         ↪  + [1]
        L.append(new)
    return L
```

```
>>> montees(5)
[[1], [1, 1], [1, 4, 1], [1, 11, 11, 1], [1, 26, 66, 26, 1]]
```

11 Dans la suite, on convient usuellement qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle et que $\binom{n}{k} = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout entier $k<0$. On formule l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{P}_n : \forall k\in\mathbb{N},\ \mathrm{E}_n(k) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n+1}{k-j}j^n$$

Tout d'abord,

$$\sum_{j=1}^{0}(-1)^{0-j}\binom{2}{0-j}j^1 = 0 = \mathrm{E}_1(0)$$

$$\sum_{j=1}^{1}(-1)^{1-j}\binom{2}{1-j}j^1 = 1 = \mathrm{E}_1(1)$$

$$\begin{aligned}
\forall k\geq 2,\ \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{k-j}j &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{k-j}(j-k+k)\\
&= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}(j-k)\binom{k}{k-j} + k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{k-j}\\
&= k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j-1}\binom{k-1}{k-j-1} + k\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k}{j}\\
&= k\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j-1}\binom{k-1}{k-j-1} + k\left((1-1)^k - (-1)^k\right)\\
&= k\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\binom{k-1}{j} - k(-1)^k\\
&= k\left((1-1)^{k-1} - (-1)^{k-1}\right) - k(-1)^k\\
&= -k(-1)^{k-1} - k(-1)^k = 0 = \mathrm{E}_1(k)
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie. On suppose que alors que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n+2}{k-j}j^{n+1} &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j-1}\binom{n+2}{k-j}(k-j-k)j^n \\
&= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j-1}\binom{n+2}{k-j}(k-j)j^n - k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j-1}\binom{n+2}{k-j}j^n \\
&= (n+2)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j-1}\binom{n+1}{k-j-1}j^n - k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j-1}\left(\binom{n+1}{k-j} + \binom{n+1}{k-j-1}\right)j^n \\
&= (n+2-k)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j-1}\binom{n+1}{k-j-1}j^n - k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j-1}\binom{n+1}{k-j}j^n \\
&= (n+2-k)\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j-1}\binom{n+1}{k-j-1}j^n + k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n+1}{k-j}j^n \\
&= k\mathrm{E}_n(k) + (n+2-k)\mathrm{E}_n(k-1) \\
&= \mathrm{E}_{n+1}(k)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

12 D'après la question précédente,

$$\mathrm{E}_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{2n}{n-j}j^{2n-1}$$

Par symétrie des coefficents binomiaux, $\binom{2n}{n-j} = \binom{2n}{n+j}$. De plus, $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$ donc

$$\mathrm{E}_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}$$

Il suffit alors d'utiliser la question **4.c** pour conclure.