

# DEVOIR À LA MAISON N°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

**1**  $f$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $]0, 1[$ . Il suffit donc de prouver que  $f$  et  $f'$  admettent des limites finies en 0.

Comme  $\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$ ,  $\lim_0 f = 1$ .

Un calcul facile donne

$$\forall t \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[, f'(t) = \frac{1}{t(1-t)} + \frac{\ln(1-t)}{t^2}$$

Or

$$\frac{1}{1-t} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t + o(t)$$

et

$$\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -t - \frac{t^2}{2} + o(t)$$

donc

$$f'(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$$

ou encore  $\lim_0 f' = \frac{1}{2}$ .

On peut donc prolonger  $f$  en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-\infty, 1[$ .

**2**  $L$  est continue sur  $]-\infty, 1[$  en tant que primitive de  $f$  sur cet intervalle. Il suffit donc de montrer que  $L$  admet une limite finie en 1, autrement dit que l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  converge. Or  $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-t)$ . Par croissances comparées,  $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$  donc  $f$  est intégrable sur  $[0, 1[$  par comparaison à une intégrale de Riemann convergente. Par conséquent,  $\int_0^1 f(t) dt$  converge et  $L$  admet bien une limite finie en 1 :  $L$  est donc prolongeable par continuité en 1.

**3** D'après le théorème fondamental de l'analyse,  $L$  est une primitive de  $f$  sur  $]-\infty, 1[$ .  $L$  est donc dérivable sur cet intervalle et  $L' = f$ .

**4** Pour  $t \in ]0, 1[$ ,  $\ln(1-t) < 0$  donc  $f(t) > 0$ . Pour  $t \in ]-\infty, 0[$ ,  $\ln(1-t) > 0$  donc  $f(t) > 0$ . De plus,  $f(0) = 1 > 0$ . Ainsi  $L' = f$  est strictement positive sur  $]-\infty, 1[$  :  $L$  est donc strictement croissante sur  $]-\infty, 1[$ .

**5** Puisque  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \ln(1-t) = +\infty$ ,  $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o(f(t))$ . Or  $\int_{-1}^{-\infty} \frac{dt}{t}$  diverge et  $f$  est positive. On en déduit donc que  $\int_0^{-\infty} f(t) dt$  diverge. Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ .

**6** **6.a** On effectue le changement de variable  $u = -\ln(1-t)$  i.e.  $t = 1 - e^{-u}$ .  $u \mapsto 1 - e^{-u}$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante de  $[0, +\infty[$  sur  $[0, 1[$ . De plus,  $\frac{dt}{du} = e^{-u}$  donc

$$L(1) = \int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1 - e^{-u}} \cdot e^{-u} du = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} du$$

**6.b** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Par croissances comparées,  $xe^{-kx} = o(1/x^2)$  donc l'intégrale définissant  $I_k$  converge.

Par intégration par parties,

$$I_k = -\frac{1}{k} [xe^{-kx}]_0^{+\infty} + \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$$

L'intégration par parties est légitime car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-kx} = 0$  donc le crochet converge. De plus,

$$I_k = \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = -\frac{1}{k^2} [e^{-kx}]_0^{+\infty} = \frac{1}{k^2}$$

**6.c** Par convexité de  $\exp$ ,  $e^x \geq 1 + x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ou encore  $x \leq e^x - 1$ . Puisque  $e^x - 1 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$ .

**6.d** Comme somme (finie) linéaire d'intégrales convergentes

$$\sum_{k=1}^n I_k = \int_0^{+\infty} x \sum_{k=1}^n e^{-kx} dx = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}(1 - e^{-nx})}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x(1 - e^{-nx})}{e^x - 1} dx$$

Par conséquent,

$$L(1) - \sum_{k=1}^n I_k = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1} dx$$

D'après la question précédente

$$0 \leq L(1) - \sum_{k=1}^n I_k \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}$$

**6.e** En passant à la limite dans la question précédente,

$$L(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**7.a** Posons  $\varphi : x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ . Comme  $L$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ ,  $\varphi$  l'est également et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \varphi'(x) = L'(x) - L'(-x) - xL'(x^2) = f(x) - f(-x) - 2xf(x^2)$$

Notamment,  $\varphi'(0) = 0$  et pour tout  $x \in ] -1, 0[ \cup ]0, 1[$ ,

$$\varphi'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + x \cdot \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \frac{-\ln((1-x)(1+x)) + \ln(1-x^2)}{x} = 0$$

Ainsi  $\varphi'$  est nulle sur  $] -1, 1[$  et donc  $\varphi$  est constante sur  $] -1, 1[$ . Par ailleurs,  $L$  est continue sur  $[-1, 1]$  donc  $\varphi$  l'est également. Par continuité,  $\varphi$  est constante sur  $[-1, 1]$ . Or  $\varphi(0) = 0$  car  $L(0) = 0$  donc  $\varphi$  est nulle sur  $[-1, 1]$ . Par conséquent,

$$\forall x \in [-1, 1], L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$$

**7.b** En prenant  $x = 1$ , on obtient

$$L(1) + L(-1) = \frac{1}{2}L(1)$$

donc

$$L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

**8.a** On raisonne comme à la question précédente en posant  $\psi : x \mapsto L(x) + L(1-x) + \ln(x) \ln(1-x)$ . A nouveau,  $\psi$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \psi'(x) = L'(x) - L'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = f(x) - f(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$$

Ainsi  $\psi$  est constante sur  $]0, 1[$ . On note  $C$  cette constante.

Par continuité de  $L$  en 0 et 1,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) + L(1-x) = L(0) + L(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

De plus,  $\ln(x) \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x \ln(x)$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \ln(1-x) = 0$  par croissances comparées. On en déduit que

$$\lim_0 \psi = \frac{\pi^2}{6} = C.$$

**8.b** En prenant  $x = \frac{1}{2}$ ,

$$2L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

donc

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2(2)$$

**9** Les solutions sur  $]0, 1[$  de l'équation homogène  $xz' + z = 0$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On vérifie que  $f$  est une solution particulière de  $\mathcal{E}'$  sur  $]0, 1[$ . Les solutions de  $\mathcal{E}'$  sur  $]0, 1[$  sont donc les fonctions  $x \mapsto f(x) + \frac{\lambda}{x}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On montre de la même manière que les solutions de  $\mathcal{E}'$  sur  $] - \infty, 1[$  sont de cette forme.

**10** Via le changement de variable  $z = y'$ , on montre que les solutions de  $\mathcal{E}$  sur  $]0, 1[$  sont les primitives des solutions de  $\mathcal{E}'$  sur cet intervalle, c'est-à-dire les fonctions de la forme

$$x \mapsto L(x) + \lambda \ln(x) + \mu \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

De la même manière les solutions de  $\mathcal{E}$  sur  $] - \infty, 1[$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto L(x) + \lambda \ln(-x) + \mu \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

**11** Soit  $g$  une éventuelle solution de  $\mathcal{E}$  sur  $] - \infty, 1[$ . Il existe donc  $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in ]0, 1[, \quad g(x) &= L(x) + \lambda_1 \ln(x) + \mu_1 \\ \forall x \in ] - \infty, 1[, \quad g(x) &= L(x) + \lambda_2 \ln(-x) + \mu_2 \end{aligned}$$

Comme  $g$  doit être deux fois dérivable en 0 et a fortiori continue en 0,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Le même argument de continuité montre alors que  $\mu_1 = \mu_2$ . Il existe donc  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in ] - \infty, 1[, \quad g(x) = L(x) + \mu$$

Réciproquement, soit  $\mu \in \mathbb{R}$ . Ce qui précède montre que  $g : x \mapsto L(x) + \mu$  est bien solution de  $\mathcal{E}$  sur  $] - \infty, 1[$  et sur  $]0, 1[$ . On a donc

$$\forall x \in ] - \infty, 0[ \cup ]0, 1[, \quad xg''(x) + g'(x) = \frac{1}{1-x}$$

Mais  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty, 1[$  et  $L' = f$ . Or  $f$  est elle-même de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty, 1[$  donc  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] - \infty, 1[$ . Notamment,  $g''$  et  $g'$  sont continues en 0 de même que  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  donc

$$\forall x \in ] - \infty, 1[, \quad xg''(x) + g'(x) = \frac{1}{1-x}$$

et  $g$  est bien solution de  $\mathcal{E}$  sur  $] - \infty, 1[$ .

Pour récapituler, les solutions de  $\mathcal{E}$  sur  $] - \infty, 1[$  sont exactement les fonctions  $L + \mu$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$ .