Devoir à la maison n°19

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★★ **E3A MP 2021**

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $(\cdot \mid \cdot)$ et la norme $\|\cdot\|$. On note Id_{E} l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E que l'on suppose non inversible et non nul.

a. Citer le théorème spectral.

b. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.

c. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux. Sont-ils supplémentaires ? On justifiera la réponse.

On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j\in[0,k]}$ avec $k \geq 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_k|$. Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j.

d. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = \sum_{j=0}^{k} p_j$.

e. Prouver que l'on a pour tout couple $(i,j) \in [0,k]^2$ tels que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

f. Démontrer que : $f = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j$.

g. Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que l'on a : $p = \sum_{j=1}^{k} p_j$.

On note alors f^{I} l'endomorphisme de E défini par : $f^{\mathrm{I}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$, appelé inverse généralisé de f.

2. Quelques propriétés de l'inverse généralisé.

a. Montrer que l'on a : $f \circ f^{\mathrm{I}} = p$. En déduire que :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, f(x) = p(y) \iff x - f^{\mathrm{I}}(y) \in \mathrm{Ker}(f)$$

b. Soit y un vecteur de E. Montrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \|f(x) - y\| = \inf_{z\in\mathrm{E}} \|f(z) - y\| \iff x - f^{\mathrm{I}}(y) \in \mathrm{Ker}(f)$$

3. Application à un exemple.

a. On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Justifier que f est un endomorphisme auto-adjoint, non nul et non inversible.

c. Montrer que 2 est valeur propre double de la matrice A.

d. En déduire que f admet exactement 3 valeurs propres : $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

e. On note pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, M_j la matrice de p_j dans la base $\mathcal{B}$.

f. Justifier que l'on peut écrire A sous la forme : $\mathrm{A} = 2\mathrm{M}_1 + 4\mathrm{M}_2$.

g. Montrer que E_2 est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de E_2 tel que $\|v_2\| = 1$.

h. Démontrer que : $\forall x \in \mathrm{E},\ p_2(x) = (x \mid v_2)v_2$.

i. Déterminer la matrice M_2.

4. En déduire la matrice associée à f^{I} relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 ★★ **E3A MP 2019 Maths I**

On se propose de déterminer toutes les fonctions f solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

(i) f est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) $(\mathrm{E}_1) : \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x (t + x) f(x - t)\, \mathrm{d}t$.

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

a. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que si f vérifie (E_1), alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si elle est solution du problème $(\mathcal{P}_1)$ suivant :

(i) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + xf(x) + 2\displaystyle\int_0^x f(u)\, \mathrm{d}u = 0$;

(iii) $f(0) = 1$.

3. En déduire que f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si F est solution du problème $(\mathcal{P}_2)$ suivant :

(i) F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}''(x) + x\mathrm{F}'(x) + 2\mathrm{F}(x) = 0$;

(iii) $\mathrm{F}'(0) = 1$.

4. On suppose qu'il existe une fonction H développable en série entière sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, vérifiant :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}''(x) + x\mathrm{H}'(x) + 2\mathrm{H}(x) = 0$

(ii) $\mathrm{H}'(0) = 1$;

(iii) $\mathrm{H}(0) = 0$.

a. Prouver que l'on a : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+1}$.

b. En déduire une expression de $\mathrm{H}(x)$ pour tout x réel à l'aide de fonctions usuelles.

5. Déterminer alors l'ensemble des solutions du problème $(\mathcal{P})$.