TOPOLOGIE

Ouverts et fermés

Exercice 1

Soit (u_n) une suite strictement croissante de réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ soit fermé.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'ensemble des projecteurs de E est fermé dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 3 — CCP 2013

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme uniforme. On pose

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0, \int_0^1 f(t)\,dt \geq 1 \right\}$$

1. Montrer que A est une partie fermée de E.

2. Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on peut choisir $\alpha \in]0,1]$ tel que la fonction

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{n}\right)x & \text{si } x \leq \alpha \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

appartienne à A.

4. En déduire la distance $d(0, A)$.

Exercice 4 ★★★

Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

1. Montrer que $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$.

2. En déduire que V est fermé.

Exercice 5

Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé E sont $\varnothing$ et E.

Exercice 6

Soit E l'ensemble des suites complexes u telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge. On pose $\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

L'ensemble $F = \left\{ u \in E, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 \right\}$ est-il fermé ? ouvert ? borné ?

Exercice 7 ★★ — Petites Mines MP 2016

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose

$$O = \{f \in E \mid f(1) > 0\} \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t)\,dt \leq 0 \right\}$$

1. Montrer que O est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$.

2. Montrer que F est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$ et pour $\|\cdot\|_1$.

3. O est-il ouvert pour $\|\cdot\|_1$?

Exercice 8

On note F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. On note E l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme infinie.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. F est-il fermé dans E ? ouvert dans E ?

Exercice 9 ★★★★ **Centrale MP**

On note E l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme infinie. Les ensembles suivants sont-ils fermés ?

1. l'ensemble A des suites croissantes ;
2. l'ensemble B des suites convergeant vers 0 ;
3. l'ensemble C des suites convergentes ;
4. l'ensemble D des suites admettant 0 pour valeur d'adhérence ;
5. l'ensemble E des suites périodiques.

Exercice 10 ★

1. Montrer que $\mathrm{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{xy} > (x + y)^2\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\mathrm{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ln(1 + x^2 + y^2) \leq x + y\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\mathrm{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(x + y) = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 ★

On munit l'espace vectoriel E des applications bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la norme inifinie. Montrer que

$$\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\}$$

est fermé.

Exercice 12 ★★

On note E_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels.

1. Montrer que E_n est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Montrer que $\inf_{\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n} \int_0^1 |\mathrm{P}(t)|\ \mathrm{d}t > 0$.

Adhérence et intérieur

Exercice 13

Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On pourra montrer que si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, unitaire et de degré n, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{P}(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.

Exercice 14 ★★★

Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{\mathrm{A}}$ et $\mathring{\mathrm{A}}$ sont convexes.

Exercice 15 ★★★★

Soient $(n, p, r) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{N}$. On pose

$$\mathrm{A}_r = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} \mathrm{M} = r\right\}$$
$$\mathrm{B}_r = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} \mathrm{M} \leq r\right\}$$
$$\mathrm{C}_r = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} \mathrm{M} \geq r\right\}$$

Les ensembles A_r, B_r, C_r sont-ils ouverts ? fermés ?
Déterminer leurs adhérences et leurs intérieurs.

Exercice 16 ★★★★ **X (non PC/PSI) MP 2019**

1. On note A l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n scindés sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que A est ouvert dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Quelle est l'adhérence de A ?

Exercice 17 ★★

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que si F est ouvert, alors $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.
2. Montrer que si $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$, alors $\mathring{\mathrm{F}} = \varnothing$.

Exercice 18 ★★

Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(\mathrm{F})) = \mathrm{Fr}(\mathrm{F})$.

Exercice 19 ★★ **Orthogonal et topologie**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E que l'on munit de sa norme euclidienne.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathrm{E}$, $\varphi_y : x \in \mathrm{E} \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue.
2. Montrer que $\mathrm{F}^\perp$ est fermé dans E.
3. Montrer que de manière générale, $\overline{\mathrm{F}} \subset (\mathrm{F}^\perp)^\perp$.

Exercice 20 ★

Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{\mathrm{A}}$ est également bornée.

Exercice 21 ★ **ESTP 1977**

Soit E un espace vectoriel normé. On note respectivement $\mathring{\mathrm{X}}$ et $\overline{\mathrm{X}}$ l'intérieur et l'adhérence d'une partie X de E. On note également $\alpha(\mathrm{X}) = \mathring{\overline{\mathrm{X}}}$ et $\beta(\mathrm{X}) = \overline{\mathring{\mathrm{X}}}$.

1. Montrer que si X est ouvert, alors $\mathrm{X} \subset \alpha(\mathrm{X})$ et que si X est fermé, alors $\beta(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}$.
2. Montrer que, de manière générale, $\alpha(\alpha(\mathrm{X})) = \alpha(\mathrm{X})$ et $\beta(\beta(\mathrm{X})) = \beta(\mathrm{X})$.
3. Dans cette question, on considère $\mathrm{E} = \mathbb{R}$. Déterminer les ensembles $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathring{\mathbb{Q}}$.
4. Donner un exemple (dans $\mathbb{R}$ si l'on veut), où les ensembles suivants sont tous distincts :
$$\mathrm{X},\ \mathring{\mathrm{X}},\ \overline{\mathrm{X}},\ \alpha(\mathrm{X}),\ \beta(\mathrm{X}),\ \alpha(\mathring{\mathrm{X}}), \beta(\overline{\mathrm{X}})$$
5. A et B étant deux parties de E, montrer que $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$. Donner un exemple simple où $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$, $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$ et $\overline{\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}}$ sont distincts et un autre où, A n'étant pas ouvert, $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$ n'est pas inclus dans $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$.

Densité

Exercice 22 **ENS PC 2010**

1. Déterminer f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0$$
2. Le résultat précédent persiste-t-il si on change la condition en
$$\forall n \geq n_0,\ \int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0$$
où n_0 est un entier non nul.

Exercice 23 **X MP 2010**

Soit A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{A} = \mathbb{R}^n$.

Exercice 24 **ENS MP 2010**

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x \mapsto x^{a_n})_{n\geq 0}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\| \|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f^2}$;

(ii) la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ diverge.

Exercice 25

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)t^k \,\mathrm{d}t = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 26 **Mines MP**

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{\mathrm{F}}$ est encore un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou dense dans E.

Exercice 27 **Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et un espace vectoriel normé de dimension finie E.

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans E. Montrer que
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b e^{i\lambda t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans E. Montrer que
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b e^{i\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
3. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Montrer que
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 28 **Adhérence des matrices diagonalisables**

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. **a.** Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ unitaire de degré d. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ si et seulement si
$$\forall z\in\mathbb{C},\ |\mathrm{P}(z)|\geq|\operatorname{Im}(z)|^d$$
   b. En déduire que $\overline{\mathrm{D}_n(\mathbb{R})}=\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 29

On note $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\varphi :\ \mathrm{M}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mapsto\operatorname{tr}(\mathrm{M})^2-4\det(\mathrm{M})$ est continue.
2. Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\varphi(\mathrm{M})\geq 0$.
3. En déduire que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})}=\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 30 ★★

Soient U et V deux parties denses d'un espace vectoriel normé E. On suppose que U est ouvert. Montrer que $\mathrm{U}\cap\mathrm{V}$ est dense dans E.

Exercice 31 ★★

Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

1. On suppose A inversible. Montrer que $\chi_{\mathrm{AB}}=\chi_{\mathrm{BA}}$.
2. Montrer par un argument de densité que le résultat précédent reste valable si on ne suppose plus A inversible.

Limite et continuité

Exercice 32

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
5. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin x$.
6. $f(x,y) = x^y$.
7. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Exercice 33 ★★

Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\mathrm{P}^{(n)}(0)\right|$ et $\mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \sup_{t\in[-1,1]} |\mathrm{P}(t)|$. On considère l'endomorphisme D de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ défini par $\mathrm{D}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1. Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
2. Montrer que si l'on munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de la norme N_1, alors D est continu.
3. Montrer que si l'on munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de la norme N_2, alors D n'est pas continu.

Exercice 34

On pose $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\varphi : f \in \mathrm{E} \mapsto f'$ n'est jamais continue de (E,N) dans (E,N) quelque soit la norme N dont on munit E.

Exercice 35 ★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$, on pose $\|\mathrm{P}\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$. Soit $b \in \mathbb{C}$. On définit l'application $f : \mathrm{P} \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{P}(b)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Etudier la continuité de f et calculer sa norme subordonnée le cas échéant.

Exercice 36 ★★

On note $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On munit E d'une norme définie de la manière suivante :

$$\forall f \in \mathrm{E},\ \|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Pour $f \in \mathrm{E}$, on définit

$$\phi(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Démontrer que ϕ est continu.
3. On pose $f_n : x \in [0,1] \mapsto ne^{-nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|$ et $\|\phi(f_n)\|$.
4. En déduire la norme de ϕ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$.

Exercice 37 ★

On note E l'ensemble des suites réelles bornées que l'on munit de la norme uniforme. On pose $\Delta : (u_n) \in \mathrm{E} \mapsto (u_{n+1} - u_n)$. Montrer que Δ est un endomorphisme continu de E et déterminer sa norme d'opérateur.

Exercice 38 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2022**

On fixe $\omega \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose :

$$\mathrm{T}_\omega(f)(x) = \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\mathrm{T}_\omega(f)$ est prolongeable par continuité en 0.
2. Soit $a > 0$. Montrer que T_ω est un endomorphisme continu et injectif de $\mathcal{C}^0([0,a],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie.
3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, non nulle, telle que : $\mathrm{T}_\omega(f) = \lambda f$.
   a. Donner une équation différentielle vérifiée par f et la résoudre.
   b. Montrer que $\lambda \in]0,1]$.

Exercice 39 **Norme d'opérateur (ou norme subordonnée)**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs normes uniformes respectives. Montrer que
$$|||A||| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}|$$
2. On suppose que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs normes 1 respectives. Montrer que
$$|||A||| = \max_{1\leq j\leq p} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|$$
3. On suppose que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs normes 2 respectives. Montrer que
$$|||A||| = \sqrt{\max \operatorname{Sp}(A^\top A)}$$

Exercice 40 ★★

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note D l'application qui à $f \in E$ associe $D(f) : x \in [0,\pi] \mapsto \int_0^x f(t)\sin(t)\, dt$. Montrer que D est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme d'opérateur.

Exercice 41 ★★★

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme 1 définie par
$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$
On note T l'application qui à $f \in E$ associe l'application $T(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Démontrer que T est continu sur $(E, \|\cdot\|_1)$ et déterminer $|||T|||$.
3. Vérifier que la borne supérieure qui définit $|||T|||$ n'est pas atteinte.

Exercice 42 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

On pose $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ que l'on muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
On pose pour $f \in E$,
$$u(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt$$
Montrer que u est un endomorphisme continu de E et calculer $|||u|||$.

Compacité

Exercice 43 ★★★ **Centrale MP 2010**

Donner un exemple de partie fermée bornée non compacte d'un espace vectoriel normé.

Exercice 44 ★★★★ **ENS Ulm/Lyon/Cachan MP 2001**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f admet un extremum global.
2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit compact et non vide. Montrer que f admet un extremum global.
3. On suppose que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est compact. Montrer que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x)$ existe.

Exercice 45 ★★★★ **Centrale MP 2018**

Soient E un espace vectoriel normé, K un compact de E et $g : K \to K$ une application 1-lipschitzienne. On cherche à montrer que g est surjective si, et seulement si, c'est une isométrie.

1. On commence par supposer g surjective. On considère x et y dans K ainsi que x_n et y_n des antécédents par g^n de x et y respectivement. On note (x', y') une valeur d'adhérence de la suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $x - y$ est une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\|x - y\|$. En déduire que g est une isométrie.
3. On suppose maintenant que g est une isométrie. Montrer que g est surjective. Donner un contre-exemple lorsque K est seulement bornée.

Exercice 46 ★★★★ **Centrale MP**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Pour un compact K non vide, on pose $\delta(K) = \sup_{(x,y)\in K^2} \|x - y\|$. Montrer que $\delta(K)$ est bien défini. La borne supérieure est-elle atteinte ?
2. Pour $a \in E$, on note $\mathcal{S}_a$ l'ensemble des compacts de E symétriques par rapport à a. Pour B compact de E, on pose
$$T(B) = \left\{x \in B \mid \forall y \in B, \|x - y\| \leq \frac{1}{2}\delta(B)\right\}$$
Montrer que T induit une application de $\mathcal{S}_a$ dans $\mathcal{S}_a$.
3. Soit $B_0 \in \mathcal{S}_a$. On pose $B_{n+1} = T(B_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\bigcap_{n\geq 0} B_n$.
4. En déduire que toute isométrie de E conserve les milieux.
Remarque : une isométrie de E *est une application* $u : E \to E$ *telle que* $\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$ *pour tout* $(x, y) \in E^2$.

Exercice 47 ★★★ **Mines MP**

Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé et $f : K \to K$ telle que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Soit (x_n) une suite de premier terme $x_0 \in K$ et telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge vers l'unique point fixe de f.
3. Donner un contre-exemple en ne supposant plus K compact.

Exercice 48 ★★★ **Principe du maximum pour les polynômes (X 2019)**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note
$$B = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\} \qquad \text{et} \qquad S = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$$
Montrer que
$$\max_{z\in B} |P(z)| = \max_{z\in S} |P(z)|$$

Exercice 49 ★

Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 50

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur E.

Exercice 51 ★★★

Soient K et L des parties respectives de deux espaces vectoriels normés E et F. On suppose K compacte. Soit $f : K \to L$ bijective et continue. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 52 ★★★★ **Théorème de compacité de Riesz**

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$.

a. Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$. Justifier que $\delta = d(x, \mathrm{F}) > 0$.

b. Justifier qu'il existe $v \in \mathrm{F}$ tel que $0 < \|x - v\| \leq 2\delta$.

c. On pose $u = \dfrac{x - v}{\|x - v\|}$. Justifier que $d(u, \mathrm{F}) \geq \dfrac{1}{2}$.

2. On note B la boule unité fermée de E i.e. $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E},\ \|x\| \leq 1\}$. Montrer que si E n'est pas de dimension finie, alors B n'est pas compacte.

Exercice 53 ★★ **Matrices stochastiques**

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices *stochastiques* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ à *coefficients positifs* et telles que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{p} \mathrm{M}_{i,j} = 1$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 54 ★★★

Soient X une partie non vide d'un espace vectoriel normé E et $a \in \mathrm{E}$.

1. On suppose X compacte. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathrm{X}$ tel que $\|a - x_0\| \leq \|a - x\|$ pour tout $x \in \mathrm{X}$.

2. On suppose X fermée et E de dimension finie. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathrm{X}$ tel que $\|a - x_0\| \leq \|a - x\|$ pour tout $x \in \mathrm{X}$.

Exercice 55 ★★★

Soit E un espace vectoriel normé. On note B la boule unité fermée de E et S la sphère unité de E. Montrer que S est compacte si et seulement si B est compacte.

Connexité

Exercice 56 **ENS MP 2010**

1. Soient $r, n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ formant une famille libre. Quel est le nombre de composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i$?

2. Même question en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Exercice 57

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2.

1. Montrer que la sphère unité S de E est connexe par arcs.

2. En déduire que toutes les sphères de E sont connexes par arcs.

Exercice 58 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 59 ★★

Montrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 60 ★★★ **Connexité par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$**

1. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$. On pose

$$d : z \in \mathbb{C} \mapsto \det((1 - z)\mathrm{A} + z\mathrm{B})$$

Montrer que $\mathrm{V} = \{z \in \mathbb{C},\ d(z) \neq 0\}$ est connexe par arcs.

2. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 61 ★★

1. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^3 = x^3$.
2. Déterminer les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continues telles que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z)^3 = z^3$.

Exercice 62 ★★★

Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 63 ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f n'est pas injective.