# Interrogation écrite n°06

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $f^3 + f^2 + f = 0$. Montrer que

$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$$

*On sait que* $\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$ *annule* $f$. *De plus* $\mathrm{X} \wedge (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1) = 1$ *en vertu de la relation de Bézout* $1 \times (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1) - (\mathrm{X} + 1) \times \mathrm{X} = 1$. *D'après le lemme des noyaux :*

$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(f^3 + f^2 + f) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$$

*Notamment, d'après le théorème du rang,*

$$\dim \operatorname{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \dim \mathrm{E} - \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \operatorname{Im} f$$

*De plus,* $(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ f = f^3 + f^2 + f = 0$ *donc* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$. *Ainsi* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$, *ce qui conclut.* ∎

2. Soient un entier $n \geq 2$ et $u : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \operatorname{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$. Montrer que $u$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer son polynôme minimal.

*Pour tout* $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $u^2(\mathrm{M}) = \operatorname{tr}(\mathrm{M})u(\mathrm{I}_n) = n\operatorname{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n = nu(\mathrm{M})$. *Ainsi* $u^2 - nu = 0$. *Le polynôme simplement scindé* $\mathrm{X}^2 - n\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X} - n)$ *annule* $u$ *donc* $u$ *est diagonalisable. De plus,* $\pi_u$ *est unitaire et divise* $\mathrm{X}(\mathrm{X} - n)$.
*De plus,* $u(\mathrm{I}_n) = n\mathrm{I}_n$ *donc* $n \in \operatorname{Sp}(u)$ *de sorte que* $n$ *est une racine de* $\pi_u$. *Enfin, en choisissant une matrice* A *non nulle de trace nulle (il en existe car* $n \geq 2$*),* $u(\mathrm{A}) = 0$ *donc* $0 \in \operatorname{Sp}(\mathrm{A})$ *de sorte que* $0$ *est une racine de* $\pi_u$.
*On en déduit que* $\pi_u = \mathrm{X}(\mathrm{X} - n)$. ∎

3. Déterminer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

*On trouve* $\chi_A = X(X-1)^2$ *de sorte que* $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$. *On sait que* $\pi_A$ *divise* $\chi_A$ *et que les racines de* $\chi_A$ *sont* 0 *et* 1. *Ainsi le polynôme minimal de* A *vaut* $X(X-1)$ *ou* $X(X-1)^2$. *On vérifie que* $A(A - I_3) = 0$ *donc* $\pi_A = X(X-1)$. ∎

4. On pose $f_n : x \mapsto \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

*Tout d'abord,* $f_n(0) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{R}$. *De plus, pour* $x \in \mathbb{R}^*$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2nx}{n^2x^2} = \dfrac{2}{nx}$ *de sorte que* $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. *Ainsi* $(f_n)$ *converge simplement vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}$.
*Par contre,* $f_n(1/n) = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Par conséquent,* $(f_n(1/n))$ *ne converge vers* 0 *et* $(f_n)$ *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}$. ∎

5. Soit $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Déterminer le domaine de définition de $\zeta$ et montrer que $\zeta$ est continue sur son domaine de définition.

*La série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ *converge si et seulement si* $x > 1$ *donc le domaine de définition de* $\zeta$ *est* $]1, +\infty[$. *Soit* $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.
*Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ *est continue sur* $]1, +\infty[$. *Soit* $a > 1$. *Alors* $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{1}{n^a}$ *et* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^a}$ *converge puisque* $a > 1$. *Ainsi* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ *converge normalement et donc uniformément sur* $[a, +\infty[$ *pour tout* $a > 1$.
*Par conséquent,* $\zeta$ *est continue sur* $]1, +\infty[$. ∎