Semaine du 15/12

1 Cours

Suites de fonctions

Modes de convergence Convergence simple. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Théorèmes d'interversion

- Théorème de la double limite : si (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle I, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en $a \in \bar{\mathrm{I}}$, alors (ℓ_n) admet une limite, f admet une limite en a et $\lim_a f = \lim_{n\to+\infty} \ell_n$.
- Continuité : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I, alors f est continue sur I.
- Primitivisation : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I, alors, pour tout $a \in \mathrm{I}$, $\left(x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sur tout segment de I.
- Intégration : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur le segment $[a,b]$, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Dérivation : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ convergeant simplement vers une fonction f sur un intervalle I et si (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$. Adaptation aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Séries de fonctions

Modes de convergence Convergence simple. Convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle. Convergence normale. Convergence normale $\implies$ convergence uniforme $\implies$ convergence simple.

Théorèmes d'interversion

- Théorème d'interversion série/limite : si $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle I, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en $a \in \bar{\mathrm{I}}$, alors $\sum \ell_n$ converge, f admet une limite en a et $\lim_a f = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.
- Continuité : si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I, alors f est continue sur I.
- Primitivisation : si $\sum f_n$ est une séries de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I, alors, pour tout $a \in \mathrm{I}$, $\sum \left(x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sur tout segment de I.
- Intégration : si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur le segment $[a,b]$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Dérivation : si $\sum f_n$ est une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ convergeant simplement vers une fonction f sur un intervalle I et si $\sum f_n'$ converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$. Adaptation aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Approximations uniformes

Fonctions en escalier Toute fonction continue par morceaux sur un **segment** est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.

Fonctions polynomiales Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un **segment** est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Topologie

Topologie d'un espace vectoriel normé Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Ouverts, fermés, voisinages. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert. Une réunion **finie** de fermés est un fermé. Caractérisation séquentielle des fermés. Intérieur, adhérence, frontière. Caractérisation séquentielle de l'adhérence. Densité. Caractérisation séquentielle de la densité. Topologie relative : ouvert, fermé, voisinage relatifs à une partie.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une suite de fonctions (f_n) converge simplement : étude de la suite numérique $(f_n(x))$ à x fixé (éventuellement une suite récurrente suivant la définition de la suite de fonctions).
- Montrer qu'une suite de fonctions (f_n) converge uniformément :
  1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f.
  2. Montrer que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: pour cela, on peut
     - étudier $f_n - f$ pour déterminer explicitement $\sup |f_n - f|$;
     - majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité indépendante de x tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément, on peut au choix :
  - Calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$, où f est la limite simple de (f_n), et montrer que cette quantité ne tend pas vers 0.
  - Déterminer une suite (x_n) telle que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.
  - Mettre en défaut l'un des théorèmes d'«interversion» : par exemple, les f_n sont continues mais f ne l'est pas.
- Montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement : étude de la série numérique $\sum f_n(x)$ à x fixé.
- Montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément, on peut au choix :
  - Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f et montrer que le reste converge uniformément vers 0. Notamment, penser à majorer le reste via le critère spécial des séries alternées le cas échéant.
  - Montrer la convergence normale.
- Pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément, on peut au choix :
  - Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers 0.
  - Mettre en défaut un théorème d'interversion : par exemple, si $\sum \lim_a f_n$ diverge, alors $\sum f_n$ ne peut pas converger uniformément sur $]a, +\infty[$.
- Pour établir la régularité (i.e. classe $\mathcal{C}^k$) d'une somme de séries de fonctions sur un intervalle I, on utilise le théorème adéquat : si on n'a pas directement la convergence uniforme sur I, on considère des intervalles du type $[a, +\infty[$, $[a, b]$, etc…(la régularité est une notion **locale**).
- Pour obtenir la limite d'une somme de série de fonctions en un point, on peut au choix :
  - Montrer la convergence uniforme au voisinage du point considéré et appliquer le théorème d'interversion série / limite.
  - S'il n'y a pas convergence uniforme, on procède avec des méthodes «rudimentaires» : majoration, minoration, encadrement. On pensera notamment à utiliser des comparaisons série / intégrale ou des majorations de reste de séries alternées pour obtenir de telles inégalités.
- Pour obtenir un équivalent ou un développement asymptotique d'une somme de séries de fonctions, on peut :
  - Traduire en un problème de limite et se ramener au point précédent.
  - Se débrouiller avec des techniques rudimentaires (comparaison série / intégrale à nouveau).
- Pour le calcul d'intégrales, on peut penser à développer la fonction à intégrer en série de fonctions. Penser notamment aux séries géométriques pour $\dfrac{1}{1 \pm t}$. S'il y a **convergence uniforme** et qu'il s'agit d'une intégrale sur un **segment**, on peut utiliser le théorème d'interversion adéquat. Sinon, on peut se ramener à des techniques rudimentaires : passage par des sommes partielles puisqu'on peut toujours intervertir intégrale et somme **finie**.
- Pour montrer qu'une partie est fermée, on peut :
  - la décrire comme une intersection de fermés ;
  - la décrire comme une réunion finie de fermés ;
  - utiliser la caractérisation séquentielle.

- Pour montrer qu'une partie est ouverte, on peut :
  - utiliser la définition (raisonner en termes de boules) ;
  - la décrire comme une réunion d'ouverts ;
  - la décrire comme une intersection finie d'ouverts ;
  - montrer que son complémentaire est fermé (cf. point précédent).

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 48, 34, 44, 45