# DEVOIR À LA MAISON N°07

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1

**1** Un calcul par blocs donne $J^2 = -I_{2n}$ et on constate que $J^\top = -J$. Puisque$(-J)J = I_{2n}$, J est inversible et $J^{-1} = -J$.

**2** Tout d'abord,

$$J^\top JJ = (-J)J^2 = (-J)(-I_{2n}) = J$$

donc $J \in \mathcal{SP}_{2n}$.
Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$. Un calcul par blocs donne

$$\begin{aligned}K^\top(\alpha)JK(\alpha) &= \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_n \\ \hline \alpha In & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & -\alpha I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right) = J\end{aligned}$$

de sorte que $K(\alpha) \in \mathcal{SP}_{2n}$.

**3** Soit $U \in GL_n(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs donne à nouveau

$$\begin{aligned}L_U^\top JL_U &= \left(\begin{array}{c|c} U^\top & 0_n \\ \hline 0_n & U^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline 0_n & (U^\top)^{-1} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -U^\top \\ \hline U^{-1} & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline 0_n & (U^\top)^{-1} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -U^\top(U^\top)^{-1} \\ \hline U^{-1}U & 0_n \end{array}\right)\end{aligned}$$

Or $U^{-1}U = I_n$ et $U^\top(U^\top)^{-1} = (U^{-1}U)^\top = I_n^\top = I_n$ de sorte que $L_U^\top JL_U = J$. Ainsi $L_U \in \mathcal{SP}_{2n}$.

**4** Soi $M \in \mathcal{SP}_{2n}$. On a donc $M^\top JM = J$ puis

$$\det(J) = \det(M^\top JM) = \det(M^\top JM) = \det(M^\top)\det(J)\det(M) = \det(M)^2\det(J)$$

Or J est inversible donc $\det(J) \neq 0$ puis $\det(M)^2 = 1$. Ainsi $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

**5** Soit $(M, N) \in \mathcal{SP}_{2n}$. Alors

$$(MN)^\top JMN = N^\top(M^\top JM)N = N^\top JN = J$$

Donc $(MN) \in \mathcal{SP}_{2n}$.

**6** Soit $M \in \mathcal{SP}_{2n}$. Alors $M^\top JM = J$ donc en multipliant à gauche par $J^\top = -J$, on obtient

$$(J^\top M^\top J)M = J^\top J = -J^2 = I_{2n}$$

Ainsi M est inversible. De plus, en multipliant la relation $M^\top JM$ à gauche et à droite respectivment par $(M^\top)^{-1}$ et $M^{-1}$,

$$(M^\top)^{-1}M^\top JMM^{-1} = (M^\top)^{-1}JM^{-1}$$

ou encore

$$(MM^{-1})^\top J(MM^{-1}) = (M^\top)^{-1}JM^{-1}$$

et finalement

$$(M^\top)^{-1}JM^{-1} = I_{2n}^\top JI_{2n} = J$$

Ainsi $M^{-1} \in \mathcal{SP}_{2n}$.

$\boxed{7}$ Soit $M \in \mathcal{SP}_{2n}$. On a vu à la question précédente que $M^{-1} \in \mathcal{SP}_{2n}$ i.e. $(M^\top)^{-1}JM^{-1} = J$. En passant à l'inverse

$$((M^\top)^{-1}JM^{-1})^{-1} = J^{-1}$$

ou encore

$$(M^{-1})^{-1}J^{-1}((M^\top)^{-1})^{-1} = J^{-1}$$

Puisque $J^{-1} = -J$, $-MJM^\top = -J$, ce qui peut encore s'écrire $(M^\top)^\top JM^\top = J$. Ainsi $M^\top \in \mathcal{SP}_{2n}$.

$\boxed{8}$ Tout d'abord

$$M^\top JM = \left(\begin{array}{c|c} A^\top & C^\top \\ \hline B^\top & D^\top \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C^\top A - A^\top C & C^\top B - A^\top D \\ \hline D^\top A - B^\top C & D^\top B - B^\top D \end{array}\right)$$

Ainsi $M \in \mathcal{SP}_{2n}$ si et seulement si

$$\begin{cases} C^\top A - A^\top C = 0_n \\ C^\top B - A^\top D = -I_n \\ D^\top A - B^\top C = I_n \\ D^\top B - B^\top D = 0_n \end{cases}$$

On remarque que la troisième relation est obtenu à partir de la deuxième par transposition donc $M \in \mathcal{SP}_{2n}$ si et seulement si

$$\begin{cases} C^\top A - A^\top C = 0_n \\ A^\top D - C^\top B = I_n \\ D^\top B - B^\top D = 0_n \end{cases}$$

$\boxed{9}$ Puisque $n = 1$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $M \in \mathcal{SP}_2$ si et seulement si $M^\top JM = J$. Or $M^\top JM = (ad - bc)J = \det(M)J$. Donc $M \in \mathcal{SP}_2$ si et seulement si $\det(M) = 1$. Ainsi $\mathcal{SP}_2$ est bien l'ensemble de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

$\boxed{10}$ Un calcul évident montre que les matrices $I_{2n}$ et $-I_{2n}$ appartiennent à $\mathcal{SP}_{2n}$. Elles commutent avec tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc, a fortiori, avec tout élément de $\mathcal{SP}_{2n}$. Elles appartiennent donc à $\mathcal{Z}$.

$\boxed{11}$ Avec les notations de la question **2**, $L = K(1)$ et appartient donc à $\mathcal{SP}_{2n}$. On a donc $ML = LM$. Un calcul par blocs donne

$$\begin{cases} A = A + C \\ A + B = B + D \\ C = C \\ C + D = C \end{cases}$$

On en déduit donc que $C = 0_n$ et que $A = D$.

Or $L^\top = \left(\begin{array}{c|c} I_n^\top & C^\top \\ \hline B^\top & D^\top \end{array}\right) \in \mathcal{SP}_{2n}$ d'après la question **7**, donc on a également $ML^\top = L^\top M$. Un nouveau calcul par blocs donne

$$\begin{cases} A = A + B \\ B = B \\ A + C = C + D \\ B + D = D \end{cases}$$

On en déduit que $B = 0_n$.

**12** Puisque $C = D = 0_n$ et $A = D$, $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_n \\ \hline 0_n & A \end{array}\right)$. Ainsi $\det(M) = \det(A)^2$. Or M est inversible puisque $\mathcal{SP}_{2n} \subset GL_n(\mathbb{R})$ donc $\det(M) \neq 0$ puis $\det(A) \neq 0$. Finalement A est bien inversible.

**13** On sait que $L_U \in \mathcal{SP}_{2n}$ d'après la question **3**. On a donc $ML_U = L_U M$. Puisque $M = \left(\begin{array}{c|c} A^\top & 0_n \\ \hline 0_n & A \end{array}\right)$, un calcul par blocs donne encore $AU = UA$ et $A(U^\top)^{-1} = (U^\top)^{-1}A$. La première égalité montre donc que A commute avec toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$.

**14** Si $i \neq j$, $I_n + E_{i,j}$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls puisqu'égaux à 1 donc elle est inversible. De même, si $i = j$, $I_n + E_{i,j}$ est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls puisqu'ils valent tous 1 sauf l'un d'entre eux qui vaut 2 donc elle est à nouveau inversible. Puisque A commute avec tout élément de $GL_n(\mathbb{R})$, A commute avec tous les $I_n + E_{i,j}$.
On en déduit que $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors

$$(AE_{i,j})_{k,l} = A_{k,i}\delta j, l \qquad\qquad (E_{i,j}A)_{k,l} = A_{j,l}\delta i, k$$

et donc

$$A_{k,i}\delta j, l = A_{j,l}\delta i, k$$

Notamment, si l'on choisit $k = i$ et $l = j$, on obtient $A_{i,i} = A_{j,j}$. Si l'on choisit $k = j = l \leq i$, on obtient, $A_{j,i} = 0$. Ceci signifie que les coefficients non diagonaux de A sont tous nuls et que ses coefficients diagonaux sont tous égaux entre eux. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. Par ailleurs, la question **4** montre que $\det(M) = \pm 1$. Or $\det(M) = \det(A)^2 = \det(\lambda I_n)^2 = \lambda^{2n}$. Ainsi $\lambda = \pm 1$ et $M = \pm I_{2n}$.
La question **10** montre que $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$ et l'on vient de montrer l'inclusion donc $Z = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.

**15** Un calcul par blocs donne

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & Q \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline V & W \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} U + QV & QW \\ \hline V & W \end{array}\right)$$

Ainsi, en posant $V = C$, $W = D$, $Q = BD^{-1}$ et $U = A - BD^{-1}C$, on a bien l'égalité souhaitée.

**16** D'après la question **8**, $D^\top B = B^\top D$. En multipliant par $(D^\top)^{-1}$ à gauche et par $D^{-1}$ à droite, on obtient $BD^{-1} = (D^\top)^{-1}B^\top = (BD^{-1})^\top$. Ainsi $BD^{-1}$ est bien symétrique.
D'après l'égalité de la question précédente,

$$\det(M) = \left|\begin{array}{c|c} I_n & Q \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right|\left|\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline V & W \end{array}\right| = \det(I_n)^2\det(U)\det(W) = \det(A - BD^{-1}C)\det(D)$$

Le déterminant étant invariant par transposition

$$\det(A - BD^{-1}C) = \det((A - BD^{-1}C)^\top) = \det(A^\top - C^\top B^\top D^{-1}) = \det(A^\top - C^\top BD^{-1})$$

car $BD^{-1}$ est symétrique. Ainsi

$$\det(M) = \det(A^\top - C^\top BD^{-1})\det(D) = \det((A^\top - C^\top BD^{-1})D) = \det(A^\top D - C^\top B)$$

D'après la question **8**, $A^\top D - C^\top B = I_n$ donc $\det(M) = \det(I_n) = 1$.

**17** Soit $V \in \operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D$. Ainsi $BV = DV = 0$. Mais, d'après la question **8**, $A^\top D - C^\top B = I_n$ de sorte que

$$V = A^\top DV - C^\top BV = 0$$

Ainsi $\operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D = \{0\}$.

**18** Tout d'abord, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$ puisque pour $(U,V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, $U^\top V$ est une matrice carré de taille 1 donc un scalaire.
La bilinéarité provient de la linéarité de la transposition et de la bilinéarité du produit matriciel.
De plus, puisque $U^\top V$ est un scalaire, $(U^\top V)^\top = U^\top V$ i.e. $V^\top U = U^\top V$ donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
Si on note $U_1, \dots, U_n$ les coefficients de U et $V_1, \dots, V_n$ les coefficients de V, alors $U^\top V = \sum_{i=1}^n U_i V_i$. Notamment, $\langle U, U\rangle = \sum_{i=1}^n U_i^2 \geq 0$. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positive.

Enfin, si $\langle \mathrm{U},\mathrm{U}\rangle = 0$, la somme de termes *positifs* $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i^2$ est nulle donc ses termes sont nuls. Ainsi $\mathrm{U}_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ i.e. $\mathrm{U} = 0$. La forme bilinéaire, symétrique, positive $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc également définie : c'est un produit scalaire.

**19** D'une part
$$\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2\rangle = (\mathrm{QV}_1)^\top \mathrm{QV}_2 = (s_1\mathrm{PV}_1)^\top \mathrm{QV}_2 = s_1 \mathrm{V}_1^\top \mathrm{P}^\top \mathrm{QV}_2$$
Mais comme $\mathrm{P}^\top\mathrm{Q}$ est symétrique, $\mathrm{P}^\top\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^\top\mathrm{P}$ de sorte que
$$\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2\rangle = s_1 \mathrm{V}_1^\top \mathrm{Q}^\top \mathrm{PV}_2$$
D'autre part
$$\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2\rangle = (\mathrm{QV}_1)^\top \mathrm{QV}_2 = s_2 \mathrm{V}_1^\top \mathrm{Q}^\top \mathrm{PV}_2$$
Finalement,
$$s_1 \mathrm{V}_1^\top \mathrm{Q}^\top \mathrm{PV}_2 = s_2 \mathrm{V}_1^\top \mathrm{Q}^\top \mathrm{PV}_2$$
et comme $s_1 \neq s_2$, $\mathrm{V}_1^\top \mathrm{Q}^\top \mathrm{PV}_2 = 0$ puis $\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2\rangle = 0$.

**20** S'il existait $i \in [\![1,m]\!]$ tel que $\mathrm{DV}_i = 0$, on aurait également $s_i\mathrm{BV}_i = 0$ puis $\mathrm{BV}_i = 0$ car $s_i \neq 0$. Ceci signifierait que $\mathrm{V}_i \in \operatorname{Ker}\mathrm{B} \cap \operatorname{Ker}\mathrm{D} = \{0\}$ (question **17**), ce qui contredirait l'énoncé puisque $\mathrm{V}_i$ est non nulle.
La question **8** nous dit que $\mathrm{D}^\top\mathrm{B} = \mathrm{B}^\top\mathrm{D}$ donc la matrice $\mathrm{B}^\top\mathrm{D}$ est symétrique. On peut donc appliquer la question **19** pour affirmer que les $\mathrm{DV}_i$ sont orthogonaux deux à deux. La famille $(\mathrm{DV}_1, \dots, \mathrm{DV}_m)$ est donc une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul : elle est libre.

**21** S'il n'existait pas de réel $\alpha$ tel que $\mathrm{D} - \alpha\mathrm{B}$ soit inversible, alors on pourrait trouver des réels $s_1, \dots, s_{n+1}$ non nuls et deux à deux distincts tels que $\mathrm{D} - s_i\mathrm{B}$ soit non inversible pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. On pourrait donc trouver des matrices colonnes $\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_{n+1}$ non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $(\mathrm{D} - s_i\mathrm{B})\mathrm{V}_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. Mais la question **20** stipulerait alors que la famille $(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n)$ serait libre, ce qui est impossible puisque $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n < n+1$.
Il existe donc bien un réel $\alpha$ tel que $\alpha$ soit inversible.

**22** D'après la question **2**, $\mathrm{K}(-\alpha) \in \mathcal{SP}_{2n}$. Ensuite, $\mathrm{K}^\top(-\alpha) \in \mathcal{SP}_{2n}$ d'après la question **7**. Enfin, d'après la question **5**, $\mathrm{K}^\top(-\alpha)\mathrm{M} \in \mathcal{SP}_{2n}$. Un produit par blocs donne
$$\mathrm{K}^\top(-\alpha)\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} - \alpha\mathrm{A} & \mathrm{D} - \alpha\mathrm{B} \end{array}\right)$$
Mais comme $\mathrm{D} - \alpha\mathrm{B}$ est inversible, on peut utiliser la question **16** pour affirmer que $\det(\mathrm{K}^\top(-\alpha)\mathrm{M}) = 1$. Or $\det(\mathrm{K}^\top(-\alpha)\mathrm{M}) = \det(\mathrm{K}^\top(-\alpha))\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M})$ donc $\det(\mathrm{M}) = 1$.

**23** Posons $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $\det(\mathrm{M}) = 1$ et $\mathrm{M}^\top\mathrm{JM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathrm{J}$ donc $\mathrm{M} \notin \mathcal{SP}_4$.