

DEVOIR SURVEILLÉ N°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

A l'attention des 3/2

Les 3/2 pourront admettre le résultat des questions 8 et 31. Par ailleurs, toutes les variables aléatoires de l'énoncé pourront être considérées comme des «variables aléatoires de MPSI», c'est-à-dire des variables aléatoires définies sur un univers *fini*.

Problème 1

1 Pour tout $t \in [0, 1]$, $1 + t^2 \leq 2$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq \frac{1}{2^n}$. Ainsi $I_n \geq \int_0^1 \frac{1}{2^n} dt = \frac{1}{2^n}$.

2 L'application $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ avec $2n \geq 2 > 1$. On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ sur $[0, +\infty[$ puis l'existence de K_n .

Il est clair que $K_1 = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

3 Supposons $n \geq 2$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 < 1+t \leq 1+t^2$ de sorte que $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(1+t)^n}$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} = \frac{2}{2^n(n-1)}$$

Or $\frac{1}{2^n(n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n n}$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$$

4 D'après la question précédente, $K_n - I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$. A fortiori, $K - n - I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Mais d'après la question 1, $\frac{1}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(I_n)$ donc $K_n - I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(I_n)$ i.e. $K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.

5 Par intégration par parties,

$$K_n = \int_0^{+\infty} 1 \cdot (1+t^2)^{-n} dt = [t(1+t^2)^{-n}]_0^{+\infty} + 2n \int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1} dt$$

Cette intégration par parties est légitime car

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t(1+t^2)^{-n} = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} K_n &= 2n \int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1} dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} (1+t^2-1)(1+t^2)^{-n-1} dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n} dt - 2n \int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n-1} dt \\ &= 2nK_n - 2nK_{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n$$

6 D'après la question précédente, $K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n$. On montre par récurrence que $K_n = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1} (n-1)!^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la formule de Stirling, on montre que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

7 Il suffit d'effectuer le changement de variable linéaire $u = \sqrt{n}t$.

8 On pose $f_n : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} & \text{si } u \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Pour $u \leq \sqrt{n}$, $f_n(u) = \exp(-n \ln(1+u^2/n))$ donc (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers $u \mapsto e^{-u^2}$. De plus, par concavité de \ln , $f_n(u) \leq \exp(-u^2)$ pour $u \in \mathbb{R}_+$. La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\sqrt{n} I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{du}{(1+u^2/n)^n} = \int_0^{+\infty} f_n(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

9 Avec les questions précédentes,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Via le changement de variable, $t = u/\sqrt{2}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

Par parité de $u \mapsto e^{-u^2/2}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$$

10 Comme $\varphi(t) \leq \frac{t}{x}$ pour tout $t \geq x$,

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt$$

De plus, $-\varphi$ est une primitive de $t \mapsto t\varphi(t)$ donc

$$\int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt = -[\varphi(t)]_x^{+\infty} = \varphi(x)$$

car $\lim_{+\infty} \varphi = 0$.

REMARQUE. Ceci prouve en sus la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt$.

On a donc bien

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

11 On considère la fonction

$$\Psi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (x^2 + 1) \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - x\varphi(x)$$

La fonction Ψ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi'(x) = 2x \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - (x^2 + 1)\varphi(x) - \varphi(x) - x\varphi'(x)$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi'(x) = 2x \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - 2\varphi(x) \leq 0$$

en utilisant l'inégalité de la question précédente. La fonction Ψ est donc décroissante sur \mathbb{R}_+^* : elle admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$. Or, comme φ est positive, $\Psi(x) \geq -x\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\varphi(x) = 0$ donc $\ell \geq 0$ par passage à la limite. Par décroissance de Ψ sur \mathbb{R}_+^* , $\Psi(x) \geq \ell \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

12 Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$, $1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après les deux questions précédentes,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x\varphi(x)}{x^2 + 1} \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

Par encadrement, $1 - \Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$.

13 Notons $B_0 = \emptyset$ et $B_p = \bigcup_{1 \leq k \leq p} \{|R_k| \geq 3x\}$ pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $B_{p-1} \subset B_p$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ de sorte que

$$A = \bigcup_{p=1}^n \{|R_p| \geq 3x\} = B_n = \bigcup_{p=1}^n B_p \setminus B_{p-1} = \bigcup_{p=1}^n A_p$$

14 Remarquons que

$$A = (\{|R_n| \geq x\} \cap A) \sqcup (\{|R_n| < x\} \cap A) \subset \{|R_n| \geq x\} \sqcup \left(\bigcup_{p=1}^n (\{|R_n| < x\} \cap A_p) \right)$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=1}^n (\{|R_n| < x\} \cap A_p)\right) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(\{|R_n| < x\} \cap A_p)$$