Devoir surveillé n°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$, la suite $(\mathrm{P}_n(x))$ l'est également. A fortiori, elle est strictement positive. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\mathrm{P}_{n+1}(x)}{\mathrm{P}_n(x)} = \mathrm{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) \geq 1$$

donc $(\mathrm{P}_n(x))$ est croissante.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(\mathrm{P}_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\mathrm{ch}(x/k)\right)$$

Comme $\mathrm{ch}(x/n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\ln(\mathrm{ch}(x/n)) = \ln(1 + (\mathrm{ch}(x/n) - 1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{ch}(x/n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} x^2/2n^2$$

Or $\sum \frac{x^2}{n^2}$ est une série à termes psoitifs convergente donc $\sum \ln(\mathrm{ch}(x/n))$ également. La suite de ses sommes partielles i.e. la suite $(\ln(\mathrm{P}_n(x)))$ converge. Par passage à l'exponentielle, la suite $(\mathrm{P}_n(x))$ converge également. On en déduit que $\mathrm{J} = \mathbb{R}$.

3. a. Comme ch est paire, $\mathrm{P}_n(-x) = \mathrm{P}_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par passage à la limite, $\varphi(-x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? φ est donc paire.
Soit x et y deux réels tels que $0 \leq x \leq y$. Par croissance de ch sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ 0 \leq \mathrm{ch}(x/k \leq \mathrm{ch}(y/k))$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}_n(x) \leq \mathrm{P}_n(y)$$

Enfin, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ par passage à la limite. φ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par parité, elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

b. Posons $g_n : x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x/n))$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\|h_n\|_{\infty,[-a,a]} = h_n(a)$$

On a vu précédemment que $\sum h_n(a)$ convergeait donc $\sum h_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a, a]$. De plus, les h_n sont continues sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la $\sum_{n=0}^{+\infty} h_n = \ln \circ \varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par continuité de l'exponentielle, φ est également continue sur $\mathbb{R}$.

4. a. Comme $1/\mathrm{ch}$ est positive, le calcul de l'intégrale vaudra comme preuve de convergence.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\,t\ \mathrm{d}t}{1 + \mathrm{sh}^2\,t} = [\arctan(\mathrm{sh}\,t)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

car $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \arctan = \pi/2$ de même que $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \arctan = -\pi/2$.

b. Comme ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}_n(x) \geq \mathrm{P}_1(x) = \mathrm{ch}(x)$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\mathrm{P}_n(x)} \leq \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

et enfin, par passage à la limite

$$0 \leq \frac{1}{\varphi} \leq \frac{1}{\mathrm{ch}}$$

Comme $\frac{1}{\mathrm{ch}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\frac{1}{\varphi}$ l'est également.

Solution 2

1. Soit $x \in J$. Puisque $x > 0$, la suite de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur J.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty,J} = \sup_{x\in J} \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum \|f_n\|_{\infty,J}$ diverge également. Autrement dit, $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

3. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur J, il suffit de montrer que la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Posons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n$. D'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in J,\ |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Ainsi

$$\|R_n\|_{\infty,J} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,J} = 0$ i.e. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur J.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{+\infty} f_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} f_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $J = [1, +\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{+\infty} \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

5. **a.** Il s'agit à nouveau du critère spécial des séries alternées.

b. Remarquons que

$$\forall x \in J,\ \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right)$$

De plus,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| = \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{\sqrt{1+nx}-\sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx}\right)\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in J,\ \left|\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{K}{x^{3/2}}$$

en posant $K = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. On en déduit bien que

$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Problème 1

$\boxed{1}$ Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$.
Par propriété de la trace, $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$.
Par propriété du déterminant,

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

Deux matrices semblables sont a fortiori équivalentes et ont donc même rang : $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$B - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda I_n = P^{-1}(A - \lambda I_n)P$$

Donc $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont semblables donc ont même déterminant d'après ce qui précède. Ainsi

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) = \chi_A(\lambda)$$

Ainsi $\chi_B = \chi_A$.

$\boxed{2}$ Il est clair que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 5$. Comme A et B sont triangulaires à coefficients diagonaux non nuls, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = 3$. Comme A et B sont triangulaires, $\det(A) = \det(B) = 4$ et $\chi_A = \chi_B = (X-1)(X-2)^2$.
On a donc $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(B) = \{1, 2\}$.
Posons $P = (X-1)(X-2)$. On vérifie que $P(A) = 0$. Comme $\operatorname{Sp}(A) = \{1, 2\}$, on a donc $\mu_A = P$. Comme μ_A est simplement scindé, A est diagonalisable.
Comme $\operatorname{Sp}(B) = \{1, 2\}$, si B était diagonalisable, on aurait de même $\mu_B = P$. Or $P(B) \neq 0$ donc $\mu_B \neq 0$.
Comme A et B n'ont pas le même polynôme minimal, A et B ne sont pas semblables.

$\boxed{3}$

- Comme la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est A, on a $u(e_1) = e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = e_1 + e_3$ et $u(e_3) = e_1$. La matrice de u dans la base (e_2, e_1, e_3) est donc B. On en déduit que A et B sont semblables.
- Un calcul donne $\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X - 1$ (en utilisant la règle de Sarrus par exemple). Posons $P = X^3 - 3X - 1$. Alors $P' = 3X^2 - 3 = 3(X-1)(X+1)$. Ainsi P est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Or $\lim_{-\infty} P = -\infty$, $P(-1) = 1 > 0$, $P(1) = -3 < 0$ et $\lim_{+\infty} P = +\infty$. Comme P est continu sur $\mathbb{R}$, P s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}$ en vertu du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Comme $\deg P = 3$, P possède exactement trois racines toutes réelles. On les note α, β et γ. Comme $\chi_A = \chi_B = P$ est simplement scindé, A et B sont toutes deux diagonalisables et semblables à la même matrice diagonale de coefficients diagonaux α, β et γ. Comme la similitude est une relation d'équivalence, A et B sont semblables.

$\boxed{4}$ Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} u = n-1$. Choisissons un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} u$. Dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = S \oplus \operatorname{Ker} u$, la matrice de u est de la forme de U. Ainsi A est semblable à U.

$\boxed{5}$ On trouve $U^2 = a_n U$. Or $U^2 \neq 0$ donc $a_n \neq 0$. Ainsi $X^2 - a_n X = X(X - a_n)$ est un polynôme annulateur de U (et donc de u) simplement scindé. u est donc diagonalisable.

$\boxed{6}$ Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$. Alors $\chi_A = X^2$. Notamment $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et donc nulle, ce qui n'est pas. A n'est donc pas diagonalisable.

$\boxed{7}$ Les deux dernières colonnes de A sont les mêmes que les deux premières. Supposons que ces deux colonnes soient liées. Il existerait alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\beta = \lambda\alpha$ et $\alpha = \lambda\beta$ et donc $\alpha = \lambda^2\alpha$. Comme $\alpha \neq 0$, on aurait donc $\lambda^2 = 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$ puis $\alpha = \pm\beta$, ce qui est exclu. Ainsi les deux premières colonnes de A sont linéairement indépendantes de sorte que $\operatorname{rg}(A) = 2$. Notamment $\operatorname{rg}(A) < 4$, A n'est donc pas inversible : $0 \in \operatorname{Sp}(A)$.

En posant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AU = 2(\alpha + \beta)U$ donc $2(\alpha + \beta) \in \operatorname{Sp}(A)$. En posant $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a $AV = 2(\alpha - \beta)V$ donc $2(\alpha - \beta) \in \operatorname{Sp}(A)$.

D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$. On voit facilement que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\operatorname{Ker} A$.
Ainsi (U, V, X, Y) est une base de vecteurs propres de A.

8 Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a donc

$$u(e_1) = \lambda e_1 \qquad\qquad u(e_2) = \lambda e_2 + b e_1$$

Posons $f_1 = \frac{a}{b} e_1$ et $f_2 = e_2$. Comme $\frac{a}{b} \neq 0$, (f_1, f_2) est encore une base de $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$u(f_1) = \frac{a}{b} u(e_1) = \lambda \cdot \frac{a}{b} e_1 = \lambda f_1 \qquad\qquad u(f_2) = u(e_2) = \lambda e_2 + b e_1 = \lambda e_2 + b \cdot \frac{a}{b} e_1 = \lambda f_2 + b f_1$$

La matrice de u dans la base (f_1, f_2) est donc $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On en déduit que les matrices $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

9 On a $\mathrm{PB} = \mathrm{AP}$ i.e. $(\mathrm{R} + i\mathrm{S})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\mathrm{R} + i\mathrm{S})$ ou encore $\mathrm{RB} + i\mathrm{SB} = \mathrm{AR} + i\mathrm{AS}$. Comme les matrices RB, SB, AR et AS sont à coefficients réels, on obtient $\mathrm{RB} = \mathrm{AR}$ et $\mathrm{SB} = \mathrm{AS}$ en identifiant parties réelle et imaginaire.

10 On sait que si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det \mathrm{A} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{\sigma(i),i}$. Comme chaque coefficient de $\det(\mathrm{R} + x\mathrm{S})$ est une fonction affine de x, la formule précédente permet d'affirmer que $\varphi : x \mapsto \det(\mathrm{R} + x\mathrm{S})$ est une fonction polynomiale en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions affines.
De plus, $\varphi(i) = \det(\mathrm{P}) \neq 0$ car P est inversible. Ainsi φ n'est pas identiquement nulle (sur $\mathbb{C}$). Si φ était nulle sur $\mathbb{R}$, elle admettrait une infinité de racines : tous ses coefficients seraient nuls donc elle serait nulle sur $\mathbb{C}$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{R} + x\mathrm{S}$ est inversible.

11 Comme $\mathrm{RB} = \mathrm{AR}$ et $\mathrm{SB} = \mathrm{AS}$, $(\mathrm{R} + x\mathrm{S})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\mathrm{R} + x\mathrm{S})$. Puisque $\mathrm{Q} = \mathrm{R} + x\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}$ et A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12 $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X} - i)(\mathrm{X} + i)$ est simplement scindé dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable et semblable à $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Un calcul évident montre que $\chi_\mathrm{B} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}$. Pour les mêmes raisons que précédemment, B est également semblable à D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On en déduit que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Comme A et B sont à coefficients réels, elles sont également semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

13 Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ telle que $\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B}$ et $\mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B}$.

- Si $\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B}$ est simplement scindé dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors A et B sont toutes deux semblables à une même matrice diagonale dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elles sont donc semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Dans le deuxième cas, puisque A et B sont à coefficients réels, le résultat de la partie précédente sont encore semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Sinon, $\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \lambda)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, on a donc $\mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \lambda)$ ou $\mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \lambda)^2$.
  - Si $\mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \lambda)$, alors A et B sont toutes deux égales à $\lambda \mathrm{I}_2$. A fortiori, elles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  - Si $\mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \lambda)^2$, alors A et B ne sont pas diagonalisables puisque leur polynôme minimal n'est pas simplement scindé mais elles sont quand même trigonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque leur polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Les matrices A et B sont donc respectivement semblables à des matrices $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec a et b non nuls (sinon A et B seraient diagonalisables). Le résultat de la question **8** permet alors d'affirmer que A et B sont encore semblables.

14 Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B} = \mathrm{X}^4$. De plus, A et B sont nilpotentes d'indice 2 donc $\mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B} = \mathrm{X}^2$. Pourtant, A et B ne sont manifestement pas semblables puisque $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) = 2$ de sorte que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \neq \mathrm{rg}(\mathrm{B})$.