Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1

$$\chi_M = \det(XI_n - M) = \det((XI_n - M)^\top) = \det(XI_n - M^\top) = \chi_{M^\top}$$

Comme le spectre d'une matrice est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique, $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(M^\top)$.

2 Supposons que M est diagonalisable. Alors il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PDP^{-1}$. Ainsi

$$M^\top = (P^{-1})^\top D^\top P^\top = (P^\top)^{-1} D P^\top$$

Ainsi $M^\top$ est diagonalisable. Par involuitivité de la transposition, la réciproque est également vraie.
Par conséquent, M est diagonalisable si et seulement si $M^\top$ est diagonalisable.

3 On note $L_0, \dots, L_{n-1}$ les lignes des déterminants suivants.

$$\begin{aligned}
\chi_{C_Q} &= \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & Q(X) \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} && L_0 \leftarrow L_0 + \sum_{k=1}^{n-1} X^k L_k \\
&= (-1)^{n+1} Q(X) \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} && \text{en développant par rapport à la première ligne} \\
&= (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} Q(X) = Q(X) && \text{car le déterminant est triangulaire}
\end{aligned}$$

4 Soit $X = (x_0, \dots, x_{n-1})^\top \in \mathrm{Ker}(C_Q^\top - \lambda I_n)$. Les coordonnées de X vérifient $x_{k+1} = \lambda x_k$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$. On en déduit que $x_k = \lambda^k x_0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. En posant $V_\lambda = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^\top$, on a donc $X \in \mathrm{vect}(V_\lambda)$. Ainsi $E_\lambda(C_Q^\top) \subset \mathrm{vect}(V_\lambda)$. Comme λ est valeur propre de $C_Q^\top$, $\dim E_\lambda(C_Q^\top) = 1$ et $E_\lambda(C_Q^\top) = \mathrm{vect}(V_\lambda)$. Ainsi V_λ est un vecteur directeur de $E_\lambda(C_Q^\top)$.

5 Supposons que f est cyclique. Il existe donc $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Notamment, il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k-1}(x_0)$. Dans la base $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$, la matrice de f est $\mathrm{C_Q}$.
Réciproquement, supposons que la matrice de f est de la forme $\mathrm{C_Q}$ dans une base $(e_0, \dots, e_{n-1})$ de E. On a donc $f(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$. On en déduit que $e_k = f^k(e_0)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi $(e_0, f(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E. On en déduit que f est cyclique.

6 Supposons que f est diagonalisable. A fortiori, f est trigonalisable donc χ_f est scindé. On sait que la matrice de f est de la forme $\mathrm{C_Q}$ dans une base adaptée. Il suffit donc de montrer que $\chi_f = \chi_{\mathrm{C_Q}} = \chi_{\mathrm{C_Q^\top}}$ est scindé à racines simples. Comme f est diagonalisable, $\mathrm{C_Q}$ l'est aussi et donc $\mathrm{C_{Q^\top}}$ l'est également d'après la question **2**. Soit donc λ une racine de $\mathrm{C_{Q^\top}}$ i.e. $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{Q^\top})$. D'après la question **4**, $\dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{C_Q^\top}) = 1$. Mais comme $\mathrm{C_Q^\top}$ est diagonalisable, $m_\lambda(\mathrm{C_Q^\top}) = \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{C_Q^\top}) = 1$. Ainsi $\chi_{\mathrm{C_Q^\top}} = \chi_f$ est scindé à racines simples.
Réciproquement, si χ_f est scindé à racines simples, f est diagonalisable.

7 Supposons f cyclique. Il existe donc $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f^k = 0$. En évaluant en x_0 et en utilisant la liberté de $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, on obtient $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi $(\mathrm{Id_E}, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.
Notons $d = \deg \pi_f$. On sait déjà que $d \leq n$ car π_f divise χ_f. De plus, π_f annule f donc la famille $(\mathrm{Id_E}, f, \dots, f^d)$ est liée. On ne peut avoir $d < n$ sinon cette famille serait une sous-famille de la famille libre $(\mathrm{Id_E}, f, \dots, f^{n-1})$ et serait donc libre. Ainsi $\deg \pi_f = d = n$.

8 **Première méthode.** Considérons l'ensemble

$$\mathrm{A} = \left\{k \in \mathbb{N}^*,\ (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)) \text{ est libre}\right\}$$

L'ensemble A est non vide puisque $1 \in \mathrm{A}$ ($x \neq 0_\mathrm{E}$). De plus, A est majorée par $n+1$ parce que $\dim \mathrm{E} = n$. Ainsi A possède un maximum que l'on note p. On en déduit que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre mais que $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ est liée. Il existe donc $(\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{K}^p$ non nul tel que $\sum_{k=0}^{p} \beta_k f^k(x) = 0$. On ne peut avoir $\beta_p = 0$ puisqu'alors $\sum_{k=0}^{p-1} \beta_k f^k(x) = 0$ avec $(\beta_0, \dots, \beta_{p-1})$ non num, ce qui contredirait la liberté de $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$. Ainsi $\beta_p = 0$ et $f^p(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0_\mathrm{E}$ avec $\alpha_k = \frac{\beta_k}{\beta_p}$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$.
Deuxième méthode. On vérifie que $\mathrm{I}_x = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(f)(x) = 0_\mathrm{E}\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. De plus, cet idéal est non nul puisqu'il contient π_f. Comme tous les idéaux de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ sont principaux, cet idéal est engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$. Notons $p = \deg \pi_{f,x}$.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x) = 0$. On a donc $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{I}_x$ et donc $\pi_{f,x}$ divise P. Puisque $\deg \mathrm{P} < d = \deg \pi_{f,x}$, $\mathrm{P} = 0$ i.e. $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$. Ainsi la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
De plus, en posant $\pi_{f,x} = \mathrm{X}^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \mathrm{X}^k$, on a bien $f^p(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0_\mathrm{E}$.

9 Posons $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$. Il est clair que $f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) \in \mathrm{F}$ pour tout $k \in [\![0, p-2]\!]$ et d'après la question précédente, on a également $f(f^{p-1}(x)) = f^p(x) = -\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) \in \mathrm{F}$. Ainsi, par linéarité de f,

$$f(\mathrm{F}) = f\left(\mathrm{vect}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))\right) = \mathrm{vect}\left(f(x), f^2(x), \dots, f^p(x)\right) \subset \mathrm{F}$$

10 Notons f_F l'endomorphisme de F induit par f. La matrice de f_F dans la base $\mathrm{vect}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est $\mathrm{C}_{\pi_{f,x}}$. On en déduit que $\chi_{f_\mathrm{F}} = \pi_{f,x}$ d'après la question **3**. Or on sait que χ_{f_F} divise χ_f. Donc $\pi_{f,x} = \mathrm{X}^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \mathrm{X}^k$ divise χ_f.

11 D'après la question précédente, il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\chi_f = \mathrm{Q}\pi_{f,x}$. Ainsi $\chi_f(f)(x) = \mathrm{Q}(f) \circ \pi_{f,x}(f)(x) = \mathrm{Q}(f)(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$. Ceci est valable pour tout vecteur x non nul de E et aussi pour $x = 0_\mathrm{E}$ donc $\chi_f(f) = 0$.

12 Remarquons déjà que $\pi_f = \mathrm{X}^r$.
Supposons que f est cyclique. D'après la question **7**, $r = \deg \pi_f = n$.

Supposons que $r = n$. Par définition de l'indice de nilpotence, il existe $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Montrons que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E. Comme $\dim \mathrm{E} = n$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Supposons que les λ_k ne soient pas tous nuls et notons $j = \min\{k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_k \neq 0\}$. Alors $\sum_{k=j}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et en appliquant f^{n-1-j}, on trouve $\lambda_j f^{n-1}(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et donc $\lambda_j = 0$, ce qui est contradictoire. Les λ_k sont donc tous nuls. La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est donc une base de E et f est cyclique. La matrice de f dans cette base est alors $\mathrm{C}_{\mathrm{X}^n}$.

13 $(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{m_k} \in \mathbb{C}[f]$. Or $\mathbb{C}[f]$ est une algèbre commutative donc f et $(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{m_k}$ commutent. En particulier, $\mathrm{F}_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{m_k}$ est stable par f.
De plus, les λ_k sont distincts deux à deux donc les polynômes $\mathrm{P}_k = (\mathrm{X} - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{m_k}$ sont premiers entre eux deux à deux. D'après le lemme des noyaux,

$$\mathrm{Ker}\,\chi_f(f) = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{m_k}$$

Or $\chi_f(f) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$$

14 Comme $\mathrm{F}_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{m_k}$, $\varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{m_k}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{F}_k$. Ainsi $\varphi_k^{m_k} = 0$ et φ_k est nilpotent.

15 D'après le cours, l'indice de nilpotence de φ_k est inférieur ou égal à la dimension de F_k i.e. $\nu_k \leq \dim(\mathrm{F}_k)$.

16 Puisque $(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, f, \dots, f^{n-1})$ est libre, $\deg \pi_f = n$. Posons $\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \lambda_k)^{\nu_k}$ ainsi que $\mathrm{Q}_k = \prod_{j \neq k} (\mathrm{X} - \lambda_j)^{\nu_j}$ pour $k \in [\![1, p]\!]$. Soit $k \in [\![1, p]\!]$.

$$\forall x \in \mathrm{F}_k,\ \mathrm{P}(f)(x) = \mathrm{Q}_k(f) \circ (f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{\nu_k}(x) = \mathrm{Q}_k(f) \circ \varphi_k^{\nu_k}(x) = \mathrm{Q}_k(f)(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}}$$

Comme $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$, $\mathrm{P}(f) = 0$. Par conséquent, π_f divise P et donc $\deg \pi_f \leq \deg \mathrm{P}$ i.e. $\sum_{k=1}^{n} \nu_k \geq n$. De plus, $\sum_{k=1}^{n} m_k = \deg \chi_f = n$ donc $\sum_{k=1}^{p} m_k - \nu_k \leq 0$. Enfin, $\varphi_k^{m_k} = 0$ donc, par définition de l'indice de nilpotence $\nu_k \leq m_k$. Ainsi $\sum_{k=1}^{p} m_k - \nu_k = 0$ et les termes sont nuls puisqu'ils sont positifs. Ainsi $\nu_k = m_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

17 On a également $\sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{F}_k = n$ puisque $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$. A nouveau, $\sum_{k=1}^{p} \dim(\mathrm{F}_k) - \nu_k = 0$ et les termes de cette somme sont positifs. Ainsi $\dim(\mathrm{F}_k) = \nu_k = m_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. D'après la question **12**, les φ_k sont cycliques et il existe une base $\mathcal{B}_k$ de F_k dans laquelle la matrice de φ_k est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme f_k de F_k induit par f est $\lambda_k \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + \varphi_k$ et sa matrice dans la base $\mathcal{B}_k$ est donc $\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des base $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ est bien de la forme voulue.

18 Posons $e_k = u_{1+\sum_{i=1}^{k-1} m_i}$ de sorte que $x_0 = \sum_{k=1}^{p} e_k$. On vérifie que $e_k \in \mathrm{F}_k$ par définition de la base $\mathcal{B}$. Faisons alors quelques remarques préliminaires.

- Pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q(f)(e_k) \in F_k$ car F_k est stable par f.
- Par définition de $\mathcal{B}$, $(e_k, \varphi_k(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k))$ est une base de F_k.

$$\begin{aligned}
& Q(f)(x_0) = 0 \\
\iff & \sum_{k=1}^{p} Q(f_k)(e_k) = 0_E \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ Q(f)(e_k) = 0_E \qquad \text{car les } F_k \text{ sont en somme directe} \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ \forall j \in [\![0, m_k - 1]\!],\ Q(f_k)(\varphi_k^j(e_k)) = 0_E \qquad \text{car } Q(f_k) \text{ et } \varphi_k = f_k - \lambda_k \operatorname{Id}_{F_k} \text{ commutent} \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ Q(f_k) = 0 \qquad \text{car } (e_k, \varphi(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k)) \text{ est une base de } F_k \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ Q(\varphi_k + \lambda_k \operatorname{Id}_{F_k}) = 0 \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ \pi_{\varphi_k} \mid Q(X + \lambda_k) \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ X^{m_k} \mid Q(X + \lambda_k) \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ (X - \lambda_k)^{m_k} \mid Q \\
\iff & \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k} \mid Q \qquad \text{car les } \lambda_k \text{ sont deux à deux distincts} \\
\iff & \chi_f \mid Q
\end{aligned}$$

19 Il suffit pour cela de montrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E et donc que cette famille est libre. Soit donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$. En posant $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$, on a donc $Q(f)(x_0) = 0$. D'après la question précédente, χ_f divise Q. Or $\deg \chi_f = n$ et $\deg Q < n$ donc $Q = 0$ puis $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, \dots, 0)$. Ainsi $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est bien libre et c'est une base de E. f est bien cyclique.

20 $C(f)$ est le noyau de l'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g - g \circ f$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. $C(f)$ contient évidemment Id_E et on montre aisément qu'il est stable par $\circ$. C'est donc une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

21 Question triviale : il suffit de dire que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

22 Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$. La question précédente montre que $g(x_0) = P(f)(x_0)$. Comme g commute avec f, on montre par récurrence que g commute avec f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Notamment, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0)) = f^k \circ P(f)(x_0) = P(f) \circ f^k(x_0) = P(f)(f^k(x_0))$$

Les endomorphismes g et $P(f)$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ de E donc ils sont égaux. Ainsi $g = P(f) \in \mathbb{K}[f]$.

23 Soit $g \in C(f)$. En reprenant la question précédente, il existe bien $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$. Réciproquement, s'il existe $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$, f commute avec g car l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ est commutative.

24 Si $r = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc $r \geq 2$ et supposons que $F = \bigcup_{m=1}^{r} F_m$ soit un sous-espace vectoriel de E. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'aucun des F_i ne contienne tous les autres. Alors pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe $x_i \in F_i$ tel que $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} F_j$. Soit alors $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$ tel que $i \neq j$. La droite affine $D = \{\lambda x_i + (1 - \lambda) x_j, \lambda \in \mathbb{K}\}$ contient une infinité d'éléments et est à valeurs dans $F = \bigcup_{m=1}^{r} F_m$ car F est un sous-espace vectoriel de E. Comme les F_m sont en nombre fini, il existe $m \in [\![1, r]\!]$ tel que F_m contienne deux éléments de D (et même une infinité). Comme F_m est un sous-espace vectoriel de E et contient deux éléments de la droite D, F_m contient D en entier et notamment x_i et x_j, ce qui est contradictoire.

25 On vérifie que pour tout $x \in E$, I_x est bien un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Il est donc engendré par un unique polynôme unitaire $\pi_{f,x}$. De plus, en notant $I = \pi_f \mathbb{K}[X]$ l'idéal annulateur de f, on a clairement $I \subset I_x$ et donc $\pi_{f,x}$ divise π_f. Remarquons que l'ensemble des diviseurs unitaires de π_f est fini. Il existe donc $x_1, \dots, x_r$ dans E tel que $\{\pi_{f,x},\ x \in E\} = \{\pi_{f,x_1}, \dots, \pi_{f,x_r}\}$. De manière évidente, pour tout $x \in E$, $x \in \operatorname{Ker} \pi_{f,x}(f)$. Alors

$$E = \bigcup_{x \in E} \operatorname{Ker} \pi_{f,x}(f) = \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \pi_{f,x_i}(f)$$

D'après la question précédente, E est égal à l'un des noyaux. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} \pi_{f,x_1}(f)$. Ainsi π_{f,x_1} est un polynôme annulateur de f de sorte que π_f divise π_{f,x_1}. Mais on a déjà vu que π_{f,x_1} divisait π_f donc $\pi_f = \pi_{f,x_1}$. Notamment $\deg \pi_{f,x_1} = d$. Soit alors $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ tel que $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k f^k(x_1) = 0_{\mathrm{E}}$. Alors $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{I}_{x_1}$ donc π_{f,x_1} divise P. Mais $\deg \pi_{f,x_1} = d$ et $\deg \mathrm{P} < d$ donc $\mathrm{P} = 0$ puis $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) = (0, \dots, 0)$. La famille $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$ est bien libre.

26 Pour tout $k \in [\![1, d-1]\!]$, $f(e_k) = e_{k+1} \in \mathrm{E}_1$. De plus, comme $\deg \pi_f = d$, $f^d \in \operatorname{vect}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, f, \dots, f^{d-1})$ et donc $f(e_d) = f^d(x_1) \in \operatorname{vect}(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = \mathrm{E}_1$. On en déduit que E_1 est stable par f.
Comme $\deg \pi_f = d$, $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{d-1}[f]$. Ainsi

$$\begin{aligned}\{\mathrm{P}(f)(x_1),\ \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\} &= \{u(x_1),\ u \in \mathbb{K}[f]\}\\ &= \{u(x_1),\ u \in \mathbb{K}_{d-1}[f]\}\\ &= \{\mathrm{P}(f)(x_1),\ \mathrm{P} \in \mathbb{K}_{d-1}[\mathrm{X}]\}\\ &= \operatorname{vect}(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = \mathrm{E}_1\end{aligned}$$

27 Une base de E_1 est $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = (x_1, \psi_1(x_1), \dots, \psi_1^{d-1}(x_1))$ donc ψ_1 est cyclique.

28 Soit $x \in \mathrm{F}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\Phi(f^i(f(x))) = \Phi(f^{i+1}(x)) = 0$ donc $f(x) \in \mathrm{F}$. Ainsi F est stable par f.

Soit $x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F}$. Comme $x \in \mathrm{E}_1$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{K}^d$ tel que $x = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k e_k$. Comme $x \in \mathrm{F}$, $\lambda_d = 0$. Puis en appliquant successivement f, f^2, …, f^{d-1} à l'égalité précédente, on obtient $\lambda_{d-1} = 0$, $\lambda_{d-2} = 0$, …, $\lambda_1 = 0$ (rédiger une récurrence). Ainsi $x = 0_{\mathrm{E}}$ puis $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F} = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

29 On va montrer que $\operatorname{Ker} \Psi = \mathrm{F}$. L'inclusion $\mathrm{F} \subset \operatorname{Ker} \Psi$ est évidente. Comme $\deg \pi_f = d$, $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{d-1}[f]$. On en déduit que $\operatorname{Ker} \Psi \subset \mathrm{F}$. Ainsi E_1 est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} \Psi$ dans E. On en déduit que Ψ induit un isomorphisme de E_1 sur $\operatorname{Im} \Psi$. Mais comme $\dim \mathrm{E}_1 = \dim \mathbb{K}^d = d$, $\operatorname{Im} \Psi = \mathbb{K}^d$. Finalement, Ψ induit un isomorphisme de E_1 sur $\mathbb{K}^d$.

30 D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{F} = \dim \operatorname{Ker} \Psi = \dim \mathrm{E} - \operatorname{rg} \Psi = n - d$. Ainsi $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{E}_1 = n$. Comme $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F} = \{0_{\mathrm{E}}\}$, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{F}$.

31 On peut raisonner par récurrence forte sur la dimension de E.

Initialisation Si $\dim \mathrm{E} = 1$, il suffit de prendre $r = 1$ et $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}$.

Hérédité Supposons le résultat acquis pour tout espace vectoriel E de dimension comprise entre 1 et n ($n \in \mathbb{N}^*$) et tout endomorphisme de E. D'après ce qui précède, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{F}$ où la restriction de f à E_1 est cyclique et F est stable par F.
On applique alors l'hypothèse de récurrence à F et l'endomorphisme f_{F} de F induit par F. On peut alors écrire $\mathrm{F} = \mathrm{E}_2 \oplus \dots \oplus \mathrm{E}_r$ où les endomorphismes des E_i induits par f_{F} sont cyliques et, pour tout $i \in [\![2, r-1]\!]$, le polynôme minimal de l'endomorphisme de E_{i+1} induit par f_{F} divise celui de l'endomorphisme de E_i induit par F. Mais, de manière générale, l'endomorphisme de E_i induit par f_{F} est également l'endomorphisme de E_i induit par f. Ainsi, avec les notations de l'énoncé, ψ_i est cylique pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ et P_{i+1} divise P_i pour tout $i \in [\![2, r-1]\!]$.
Il reste seulement à prouver que P_1 divise P_2. D'après ce qui précède, $\mathrm{P}_1 = \pi_{f,x_1} = \pi_f$. Mais comme P_2 est le polynôme minimal d'un endomorphisme induit par f, P_2 divise $\pi_f = \mathrm{P}_1$.

Conclusion Le résultat est vrai quelle que soit la dimension de E et l'endomorphisme f de E.

32 Notons $f_1, \dots, f_r$ les endomorphismes de $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_r$ induits par f. L'application qui à $(g_1, \dots, g_r) \in \prod_{i=1}^{r} \mathrm{C}(f_i)$ associe l'unique $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $g_{|\mathrm{E}_i} = g_i$ est bien définie, linéaire, injective et à valeurs dans $\mathrm{C}(f)$.

Ainsi $\dim \mathrm{C}(f) \geq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{C}(f_i)$. Mais comme les f_i sont cycliques, $\dim \mathrm{C}(f_i) = \dim \mathrm{E}_i$. Finalement, $\dim \mathrm{C}(f) \geq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{E}_i = \dim \mathrm{E} = n$.

33 Si on note $d = \deg \pi_f$. Alors $d = \dim \mathbb{K}[f] = \dim \mathrm{C}(f) \geq n$. Mais $d \leq n$ donc $d = n$. Notamment, $(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, f, \dots, f^{n-1})$ est libre. On en déduit d'après la partie II.B que f est cyclique.

34 Posons $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème de réduction des isométries vectorielles, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la

matrice de f est diagonale par blocs, avec pour blocs diagonaux I_p, $-\mathrm{I}_q$ et r blocs diagonaux $\mathrm{R}(\theta_i)$ ($\theta_i \in]0,\pi[$). On a alors $\chi_f = (\mathrm{X}-1)^p(\mathrm{X}+1)^q \prod_{i=1}^{r}(\mathrm{X}-2\mathrm{X}\cos\theta_i+1)$.
De la même manière, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, avec pour blocs diagonaux $\mathrm{I}_{p'}$, $-\mathrm{I}_{q'}$ et r' blocs diagonaux $\mathrm{R}(\theta'_i)$ ($\theta'_i \in]0,\pi[$). On a alors $\chi_f = (\mathrm{X}-1)^{p'}(\mathrm{X}+1)^{q'} \prod_{i=1}^{r'}(\mathrm{X}-2\mathrm{X}\cos\theta'_i+1)$.
Comme $\chi_f = \chi_{f'}$, l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ nous apprend que $p=p'$, $q=q'$, $r=r'$ et, quitte à réordonner les θ'_i (i.e. réordonner les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$), $\cos\theta_i = \cos\theta'_i$ i.e. $\theta_i = \theta'_i$ (puisque $\theta_i, \theta'_i \in]0,\pi[$).
Ainsi f et f' ont la même matrice dans les bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Supposons que f est orthocyclique. Il existe donc une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\mathrm{C_Q}$. Mais comme $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{B}$ est orthonormale, $\mathrm{C_Q}$ est orthogonale. Posons $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\mathrm{X}^k$. La dernière colonne de $\mathrm{C_Q}$ est orthogonale aux précédentes, ce qui donne $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$. La dernière colonne de $\mathrm{C_Q}$ est unitaire, ce qui donne $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 = 1$ i.e. $a_0^2 = 1$ i.e. $a_0 = \pm 1$. On en déduit que $\chi_f = \mathrm{Q} = \mathrm{X}^n + a_0 = \mathrm{X}^n \pm 1$.
Réciproquement supposons que $\chi_f = \mathrm{X}^n \pm 1$. Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormale de E. Soit $f' \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ dont la matrice dans cette base est $\mathrm{C_Q}$ avec $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^n \pm 1$. On vérifie que $\mathrm{C_Q}$ est bien orthogonale : la famille des colonnes de $\mathrm{C_Q}$ est bien orthonormale. Comme $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale, $f' \in \mathrm{O(E)}$. Par ailleurs, $\chi_{f'} = \mathrm{X}^n \pm 1 = \chi_f$. D'après la question précédente, il existe des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E dans lesquelles f et f' ont même matrice. Notons $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f') = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthormées, la formule de changement de base donne l'existence de $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}^\top\mathrm{C_Q}\mathrm{P}$. Par conséquent, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{P}^\top\mathrm{C_Q}\mathrm{P}$. Notons $\mathcal{B}_1$ la famille de vecteurs de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{P}^\top$. Comme $\mathrm{P}^\top$ est orthogonale, $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale et, par formule de changement de base, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \mathrm{C_Q}$.
Ceci prouve que f est orthocyclique.

$\boxed{\mathbf{36}}$ Comme f est nilpotent, il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E dans laquelle f est triangulaire supérieure stricte. En notant $\mathrm{F}_i = \mathrm{vect}(e_1,\dots,e_i)$, on a donc $f(\mathrm{F}_i) \subset \mathrm{F}_{i-1}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ (on peut convenir que $\mathrm{F}_0 = \{0\}$). On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à cette base $(e_1,\dots,e_n)$ et on obtient une base orthonormale $(u_1,\dots,u_n)$ de E telle que $\mathrm{vect}(u_1,\dots,u_i) = \mathrm{vect}(e_1,\dots,e_i) = \mathrm{F}_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Ainsi $f(u_i) \in f(\mathrm{F}_i) \subset \mathrm{F}_{i-1} = \mathrm{vect}(u_1,\dots,u_{i-1})$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. La matrice de f dans la base $(u_n,\dots,u_1)$ est alors triangulaire inférieure stricte.

$\boxed{\mathbf{37}}$ Supposons que f est orthocyclique. Il existe donc une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\mathrm{C_Q}$. Comme f est nilpotent, $\chi_f = \mathrm{X}^n = \mathrm{Q}$. La dernière colonne de $\mathrm{C_Q}$ est donc nulle de sorte que $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, \mathrm{C_Q} = n-1$. Par ailleurs, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{vect}(e_n)$ et comme $(e_1,\dots,e_n)$ est orthonormale, $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp = \mathrm{vect}(e_1,\dots,e_{n-1})$.
Ainsi $(e_1,\dots,e_{n-1})$ est une base orthonormée de $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp$. Soit $(x,y) \in ((\mathrm{Ker}\, f)^\perp)^2$. Alors

$$x = \sum_{i=1}^{n-1}\langle x, e_i\rangle e_i \qquad\qquad y = \sum_{i=1}^{n-1}\langle y, e_i\rangle e_i$$

puis

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\langle x, e_i\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1}\langle x, e_i\rangle e_{i+1} \qquad\qquad f(y) = \sum_{i=1}^{n-1}\langle y, e_i\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1}\langle y, e_i\rangle e_{i+1}$$

Comme $(e_1,\dots,e_{n-1})$ et $(e_2,\dots,e_n)$ sont toutes deux orthonormées

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n-1}(x \mid e_i)(y \mid e_i) = (f(x) \mid f(y))$$

Inversement, supposons que f est de rang $n-1$ et que $\forall (x,y) \in ((\mathrm{Ker}\, f)^\perp)^2,\ (x \mid y) = (f(x) \mid f(y))$. D'après la question précédente, il existe une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure stricte. On a notamment $f(e_n) = 0_\mathrm{E}$ et comme $\mathrm{rg}(f) = n-1$, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{vect}(e_n)$ en vertu du théorème du rang. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est orthonormale, $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp = \mathrm{vect}(e_1,\dots,e_{n-1})$.