Devoir à la maison n°18

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Par définition, $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(A)$. Notons B la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Comme il s'agit d'une base orthonormée, $B_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle = \langle Ae_j, e_i \rangle$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Notamment, $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_i \rangle$. On en déduit l'égalité recherchée.

2 Cf. Cours

3 Comme B est symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de B. Notons λ_i la valeur propre associée à e_i. Comme A est symétrique,

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^\top B) = \operatorname{tr}(AB)$$

D'après la question **1**,

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle ABe_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle Ae_i, e_i \rangle$$

Comme B est symétrique positive, les λ_i sont positifs et comme A est symétrique positive, $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On en déduit que $\langle A, B \rangle \geq 0$.

4 Tout d'abord, $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$ donc $A^\top A$ est symétrique. De plus, pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$x^\top (A^\top A) x = \|Ax\|^2 \geq 0$$

donc A est symétrique positive.
D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $A^\top A$. Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ de norme 1. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

puis

$$A^\top A x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée,

$$\|Ax\|^2 = \langle A^\top A x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle^2$$

Si on note $M = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, alors

$$\|Ax\|^2 \leq M \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$$

Or $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée donc

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 = 1$$

Ainsi $\|Ax\| \leq \sqrt{M}$. Enfin, en notant u un vecteur propre unitaire de $A^\top A$ associé à la valeur propre M,

$$\|Au\|^2 = \langle A^\top A u, u \rangle = M\langle u, u \rangle = M$$

puis $\|Au\| = \sqrt{M}$. Finalement,

$$\|A\|_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{M} = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A^\top A)} \sqrt{\lambda}$$

où on a utilisé la croissance de la racine carrée pour la dernière égalité.

5 $A^\top A$ est la matrice de $f^* \circ f$ dans une base orthonormée de E. Comme $A^\top A$ est symétrique positive, $f^* \circ f$ est auto-adjoint positif.

> **Remarque.** On peut aussi le montrer sans l'aide de la matrice A. En effet, $(f^* \circ f)^* = f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f$ et, pour tout $x \in E$, $\langle f^* \circ f(x), x\rangle = \|f(x)\|^2 \geq 0$.

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de $f^* \circ f$. Notons $\lambda_i \geq 0$ la valeur propre associée au vecteur propre e_i. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on définit un endomorphisme h de E en posant $h(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. De plus, les endomorphismes $f^* \circ f$ et h^2 coïncident sur cette base ; ils sont donc égaux.

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est également une base de vecteurs propres de h, h est auto-adjoint. Enfin, $\mathrm{Sp}(h) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+$ donc h est auto-adjoint positif.

6 Tout d'abord, $\mathrm{Im}\, h$ est bien stable par h, ce qui permet de définir $\tilde{h}$. Soit alors $x \in \mathrm{Ker}\, \tilde{h} = \mathrm{Im}\, h \cap \mathrm{Ker}\, h$. Alors $h(x) = 0_E$ et il existe $a \in E$ tel que $x = h(a)$. Ainsi $f^* \circ f(a) = h^2(a) = 0_E$ puis $\|x\|^2 = \|f(a)\|^2 = \langle f^* \circ f(a), a\rangle = 0$ et enfin $x = 0_E$.

Par conséquent, $\mathrm{Ker}\, \tilde{h} = \{0_E\}$. Mais comme $\mathrm{Im}\, h$ est de dimension finie, ceci suffit à garantir que $\tilde{h}$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}\, h$.

7 Soit $x \in E$. Alors

$$\|h(x)\|^2 = \langle h^* \circ h(x), x\rangle = \langle h^2(x), x\rangle = \langle f^* \circ f(x), x\rangle = \|f(x)\|^2$$

et donc $\|h(x)\| = \|f(x)\|$.

On en déduit notamment que $h(x) = 0_E \iff f(x) = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, h = \mathrm{Ker}\, f$. D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}\, h = \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim E - \dim \mathrm{Im}\, f = \dim(\mathrm{Im}\, f)^\perp$$

Notamment, il existe une application linéaire v qui envoie une base orthonormée de $\mathrm{Ker}\, h$ sur une base orthonormée de $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$. Cette application linéaire v est un isomorphisme car l'image d'une base de $\mathrm{Ker}\, h$ est une base de $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$. De plus, comme v envoie une base orthonormée sur une base orthonormée, il conserve la norme.

> **Remarque.** Rigoureusement, ce dernier résultat ne figure au programme que pour les endomorphismes. La preuve ne pose pas de difficulté. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ les bases orthonormées respectives de $\mathrm{Ker}\, h$ et $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ telles que $v(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, h$. Alors, comme $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée, $x = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2$. Par linéarité de v, $v(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle v(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle f_i$. Comme $(f_1, \dots, f_p)$ est orthonormée, $\|v(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2 = \|x\|^2$.

8 Montrons tout d'abord que $\mathrm{Ker}\, h$ et $\mathrm{Im}\, h$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E. Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}\, h \times \mathrm{Im}\, h$. Alors $h(x) = 0_E$ et il existe $a \in E$ tel que $y = h(a)$. Ainsi, comme h est auto-adjoint,

$$\langle x, y\rangle = \langle x, h(a)\rangle = \langle h(x), a\rangle = \langle 0_E, a\rangle = 0$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}\, h \perp \mathrm{Im}\, h$ et le théorème du rang donne $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, h + \dim \mathrm{Im}\, h$ donc $\mathrm{Im}\, h$ et $\mathrm{Ker}\, h$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.

On peut alors définir un endomorphisme u de E en posant $u(x) = v(x)$ pour $x \in \mathrm{Ker}\, h$ et $u(x) = f \circ \tilde{h}^{-1}(x)$ pour $x \in \mathrm{Im}\, h$.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}\, h$. Alors $u \circ h(x) = 0_E$. Mais on a vu que $\mathrm{Ker}\, h = \mathrm{Ker}\, f$ donc $f(x) = 0_E = u \circ h(x)$.
- Soit $x \in \mathrm{Im}\, h$. Alors $u \circ h(x) = u \circ \tilde{h}(x) = f(x)$.

Les endomorphismes f et $u \circ h$ coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires ; ils sont égaux.

- Soit $y \in \mathrm{Ker}\, h$. Alors $\|u(y)\| = \|v(y)\| = \|y\|$ car v conserve la norme.

- Soit $z \in \operatorname{Im} h$. On rappelle que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Ainsi

$$\|u(z)\| = \|f \circ \tilde{h}^{-1}(z)\| = \|h \circ \tilde{h}^{-1}(z)\| = \|z\|$$

Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe alors $(y, z) \in \operatorname{Ker} h \times \operatorname{Im} h$ tel que $x = y + z$. Comme $\operatorname{Ker} h \perp \operatorname{Im} h$, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ d'après le théorème de Pythagore. Ensuite, $u(x) = u(y) + u(z)$. Mais $u(y) = v(y) \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ et $u(z) = f \circ \tilde{h}^{-1}(z) \in \operatorname{Im} f$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|u(x)\|^2 = \|u(y)\|^2 + \|u(z)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$$

Ainsi u conserve la norme : c'est un automorphisme orthogonal.

9 Il suffit de considérer l'endomorphisme f associée à A dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Il existe alors $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ et $h \in \mathcal{S}^+(\mathrm{E})$ tels que $f = u \circ h$. On note alors U et S les matrices respectives de u et h dans la base $\mathcal{B}$. On a alors bien $\mathrm{A} = \mathrm{US}$ et, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, $\mathrm{U} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

10 L'application $h \mapsto \|x - h\|$ est continue sur le compact H : elle y admet donc un minimum. Il existe alors $h_0 \in \mathrm{H}$ tel que $d(x, \mathrm{H}) = \|x - h_0\|$.
Soit alors h_1 tel que $d(x, \mathrm{H}) = \|x - h_0\| = \|x - h_1\|$. Considérons alors la fonction q de l'énoncé.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) = \|t(h_1 - h_0) + (x - h_1)\|^2 = t^2\|h_1 - h_0\|^2 + 2t\langle h_1 - h_0, x - h_1\rangle + \|x - h_1\|^2$$

Par ailleurs, $q(0) = q(1) = d(x, \mathrm{H})^2$ donc $\mathrm{P} = q - d(x, \mathrm{H})^2$ est un trinôme de racines 0 et 1 de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(t) = \|h_1 - h_0\|^2 t(t - 1)$$

Par convexité de H, $th_0 + (1 - t)h_1 \in \mathrm{H}$ pour tout $t \in [0, 1]$. On en déduit que $q(t) \geq d(x, \mathrm{H})^2$ i.e. $\mathrm{P}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ceci n'est possible que si $\|h_1 - h_0\|^2$ i.e. $h_0 = h_1$.

11 Soit $h_0 \in \mathrm{H}$ tel que $d(x, \mathrm{H}) = \|x - h_0\|$. Soit $h_1 \in \mathrm{H}$. Remarquons que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) = \|(x - h_0) - (1 - t)(h_1 - h_0)\|^2 = d(x, \mathrm{H})^2 + (1 - t)^2\|h_1 - h_0\|^2 - 2(1 - t)\langle x - h_0, h_1 - h_0\rangle$$

A nouveau, $q(t) \geq d(x, \mathrm{H})^2$ pour tout $t \in [0, 1]$ donc

$$\forall t \in [0, 1],\ 2(1 - t)\langle x - h_0, h_1 - h_0\rangle \leq (1 - t)^2\|h_1 - h_0\|^2$$

donc

$$\forall t \in [0, 1[,\ 2\langle x - h_0, h_1 - h_0\rangle \leq (1 - t)\|h_1 - h_0\|^2$$

En faisant tendre t vers 1^-, on obtient

$$\langle x - h_0, h_1 - h_0\rangle \leq 0$$

Réciproquement, soit $h_0 \in \mathrm{H}$ tel que $\langle x - h_0, h_1 - h_0\rangle \leq 0$ pour tout $h_1 \in \mathrm{H}$. Fixons $h_1 \in \mathrm{H}$ et considérons toujours la même fonction q.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) = \|(x - h_0) - (1 - t)(h_1 - h_0)\|^2 = \|x - h_0\|^2 + (1 - t)^2\|h_1 - h_0\|^2 - 2(1 - t)\langle x - h_0, h_1 - h_0\rangle$$

donc

$$\|x - h_1\|^2 = q(0) = \|x - h_0\|^2 + \|h_1 - h_0\|^2 - 2\langle x - h_0, h_1 - h_0\rangle \geq \|x - h_0\|^2$$

Ceci étant valide pour tout $h_1 \in \mathrm{H}$, on a bien $d(x, \mathrm{H}) = \|x - h_0\|$.

12 Notons C l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de H.
Tout d'abord, $\mathrm{H} \subset \mathrm{C}$ car tout élément de H peut être considéré comme une combinaison convexe d'un seul élément de H (l'élément en question). Ensuite C est convexe. Soit $(x, y) \in \mathrm{C}^2$. Il existe donc des éléments $x_1, \dots, x_p$ de H et des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de somme 1 tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$. De même, il existe es éléments $y_1, \dots, y_q$ de H et des réels positifs $\mu_1, \dots, \mu_q$ de somme 1 tels que $y = \sum_{j=1}^{q} \mu_j y_j$. Soit alors $t \in [0, 1]$. Alors

$$(1 - t)x + ty = \sum_{i=1}^{p}(1 - t)\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{q} t\mu_j y_j$$

De plus, les réels $(1 - t)\lambda_i$ et $t\mu_j$ sont positifs et

$$\sum_{i=1}^{p} t\lambda_i + \sum_{j=1}^{q} t\mu_j = 1 - t + t = 1$$

donc $(1-t)x+ty$ est bien combinaison convexe des éléments $x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q$. Ainsi $(1-t)x+ty\in \mathrm{C}$ et C est convexe. Comme conv H est le plus petit convexe contenant H, $\mathrm{conv}(\mathrm{H})\subset \mathrm{C}$.
Réciproquement, on note $\mathcal{P}_n$ l'assertion «conv(H) contient les combinaisons convexes de n éléments de H». $\mathcal{P}_1$ est vraie puisque conv(H) contient H. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x_1,\dots,x_{n+1}$ des éléments de H ainsi que $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ des réels positifs de somme 1. Si $\lambda_{n+1}=1$ alors $\lambda_i=0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et $x=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i=x_{n+1}\in \mathrm{H}\subset \mathrm{conv}(\mathrm{H})$. Sinon, posons $\mu_i=\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}$ pour $i\in[\![1,n]\!]$. Alors $\sum_{i=1}^{n}\mu_i=1$ donc $y=\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i\in\mathrm{conv}(\mathrm{H})$ d'après $\mathcal{P}_n$. Mais comme conv(H) est convexe, $x=(1-\lambda_{n+1})y+\lambda_{n+1}x_{n+1}\in\mathrm{conv}(\mathrm{H})$. Par récurrence, conv(H) contient toutes les combinaisons convexes d'éléments de H donc $\mathrm{C}\subset\mathrm{conv}(\mathrm{H})$.
Par double inclusion, $\mathrm{conv}(\mathrm{H})=\mathrm{C}$.

13 La famille $(x_2-x_1,\dots,x_p-x_1)$ est une famille de $p-1$ vecteurs de E. Comme $p-1\geq n+1>n=\dim\mathrm{E}$, cette famille est liée. Il existe donc des réels $\mu_2,\dots,\mu_p$ non tous nuls tels que $\sum_{i=2}^{p}\mu_i(x_i-x_1)=0_{\mathrm{E}}$. En posant $\mu_1=-\sum_{i=2}^{p}\mu_i$, on a bien $\sum_{i=1}^{p}\mu_i x_i=0_{\mathrm{E}}$ et $\sum_{i=1}^{p}\mu_i=0$.

14 Comme les μ_i sont non tous nuls et de somme nulle, l'ensemble $\mathrm{I}=\{i\in[\![1,p]\!],\ \mu_i>0\}$ n'est pas vide. On peut alors poser $\theta=\min_{i\in\mathrm{I}}\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$. Comme les λ_i sont positifs, $\theta\geq0$. Posons ensuite $\alpha_i=\lambda_i-\theta\mu_i$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i-\theta\sum_{i=1}^{p}\mu_i=1$$

et

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i-\theta\sum_{i=1}^{p}\mu_i x_i=x$$

De plus, si $i\in\mathrm{I}$, alors $\alpha_i\geq0$ par construction de θ et si $i\in[\![1,p]\!]\setminus\mathrm{I}$, alors $\mu_i\leq0$ donc $\alpha_i\geq0$. Finalement, les α_i sont tous positifs et de somme 1. Enfin, il existe $j\in\mathrm{I}$ tel que $\theta=\dfrac{\lambda_j}{\mu_j}$ i.e. $\alpha_j=0$. On en déduit que x est combinaison convexe de $p-1$ éléments de H.
On peut alors prouver par une récurrence descendante finie que x peut s'écrire comme une combinaison convexe de $n+1$ éléments de H.

15 Vérifions que l'ensemble Λ de l'énoncé est bien compact. Tout d'abord, les formes linéaires $\varphi_i:(t_1,\dots,t_{n+1})\mapsto t_i$ et $\psi:(t_1,\dots,t_{n+1})\mapsto\sum_{i=1}^{n+1}t_i$ sont continues car $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension finie. De plus,

$$\Lambda=\psi^{-1}(\{1\})\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n+1}\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}_+)\right)$$

On peut conclure au caractère fermé de Λ car une image réciproque de fermé par une application continue est fermé et car une intersection de fermés est fermée.
L'ensemble Λ est évidemment borné puisque $\Lambda\subset[0,1]^{n+1}$ par exemple. Comme $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension finie, Λ est bien compact.
Remarquons alors que conv(H) est l'image de $\Lambda\times\mathrm{H}^{n+1}$ par l'application

$$\gamma:(t_1,\dots,t_{n+1},x_1,\dots,x_{n+1})\mapsto\sum_{i=1}^{n+1}t_i x_i$$

L'ensemble $\Lambda\times\mathrm{H}^{n+1}$ est compact comme produit cartésien fini de compacts. L'application γ est continue car on peut la voir comme une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathrm{E}^{n+1}$ et les espaces vectoriels $\mathbb{R}^{n+1}$ et E^{n+1} sont de dimensions finies.
Finalement, $\mathrm{conv}(\mathrm{H})=\gamma(\mathrm{A}\times\mathrm{H}^{n+1})$ est compacte.

16 La question précédente montre qu'il suffit de prouver que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact. C'est très classique. Pour tout $\mathrm{Q}\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\|\mathrm{Q}\|_1=\sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{Q}^\top\mathrm{Q})}=\sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n)}=\sqrt{n}$ donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Enfin, l'application $f:\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est continue puisque les coefficients de $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ sont polynomiaux en les coefficients de M. On en déduit que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})=f^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

17 Soit $Q \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Alors $\|QX\|^2 = X^\top Q^\top QX = X^\top X = \|X\|^2 = 1$ donc $\|QX\| = 1$. Ainsi $\|Q\|_2 = 1$.
Soit alors $M \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. Il existe donc des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ positifs et de somme 1 ainsi que des matrices $Q_1, \dots, Q_p$ dans $O_n(\mathbb{R})$ tels que $M = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Q_i$. Par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme :

$$\|M\|_2 \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \|Q_i\|_2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

On a bien montré que $\text{conv}(O_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}$.

> **Remarque.** On pouvait aussi remarquer que $\mathcal{B}$ était convexe en tant que boule. Puisque $O_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$, $\text{conv}(O_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}$ car $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est le plus petit convexe contenant $O_n(\mathbb{R})$.

18 Tout d'abord, $M \neq N$ car $M \notin \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ et $N \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. Ainsi

$$\text{tr}(AM) - \text{tr}(AN) = \text{tr}(A(M - N)) = \|M - N\|_1 > 0$$

donc $\text{tr}(AN) < \text{tr}(AV)$.
De plus, d'après la question **11**,

$$\forall V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R})),\ \langle M - N, V - N\rangle \leq 0$$

ou encore

$$\forall V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R})),\ \text{tr}(A(V - N)) \leq 0$$

ou encore

$$\forall V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R})),\ \text{tr}(AV) \leq \text{tr}(AN)$$

Choisissons alors $V = U^\top \in O_n(\mathbb{R}) \subset \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. Alors $\text{tr}(AV) = \text{tr}(USU^\top) = \text{tr}(SU^\top U) = \text{tr}(S)$ car U est orthogonale. On conclut en remarquant que $\text{tr}(AM) = \text{tr}(USM)$.

19 D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S. Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i. D'après la question **1**,

$$\text{tr}(MUS) = \sum_{i=1}^{n} \langle MUSe_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle MUe_i, e_i\rangle$$

Comme les λ_i sont positifs (S est symétrique positive), on obtient avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\text{tr}(MUS) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|MUe_i\| \|e_i\|$$

Or pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|e_i\| = 1$ et, par définition et sous-multiplicativité de la norme subordonnée,

$$\|MUe_i\| \leq \|MU\|_2 \|e_i\| = \|MU\|_2 \leq \|M\|_2 \|U\|_2 \leq 1 \times 1 = 1$$

On en déduit que

$$\text{tr}(MUS) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \text{tr}(S)$$

20 Par propriété de la trace, $\text{tr}(MUS) = \text{tr}(USM)$ donc il y a une contradiction entre les deux questions précédentes. On en déduit par l'absurde que $\mathcal{B} \subset \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. Par double inclusion, $\mathcal{B} = \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

21 Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Par inégalité triangulaire,

$$\|UX\| \leq \frac{1}{2}(\|VX\| + \|WX\|)$$

Mais comme $U \in O_n(\mathbb{R})$, $\|UX\| = \|X\|$. Enfin, comme V et W sont dans $\mathcal{B}$,

$$\frac{1}{2}(\|VX\| + \|WX\|) \leq \frac{1}{2}(\|V\|_2 \|X\| + \|W\|_2 \|X\| \leq \|X\|)$$

On en déduit que $\|VX + WX\| = \|VX\| \|WX\|$ puis, en élevant au carré,

$$\langle VX, WX\rangle = \|VX\| \|WX\|$$

On est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui prouve que les vecteurs VX et WX sont (positivement) liés.
Montrons tout d'abord que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $VX = 0 \implies X = 0$. Supposons que $VX = 0$. Alors $\|X\| = \|UX\| = \frac{1}{2}\|WX\| \leq \frac{1}{2}\|X\|$ donc $\|X\| = 0$ puis $X = 0$. De même, $WX = 0 \implies X = 0$. On se donne alors $X \neq 0$. On a alors $VX \neq 0$, $WX \neq 0$ et même $UX \neq 0$ car U est inversible.

Comme VX et WX sont colinéaires et que $VX \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $WX = \lambda VX$. Alors $UX = \frac{1+\lambda}{2}VX$. Mais comme $UX \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $VX = \alpha UX$. De même, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $WX = \beta UX$. Alors $2UX = VX + WX = (\alpha+\beta)UX$ de sorte que $\alpha + \beta = 2$ car $UX \neq 0$. Ensuite, comme U est orthogonale, $\|UX\| = \|X\|$. Mais comme V et W sont dans $\mathcal{B}$, $\|VX\| \leq \|X\|$ et $\|WX\| \leq \|X\|$. Comme $|X| > 0$, on en déduit que $|\alpha| \leq 1$ et $|\beta| \leq 1$. Ainsi $(1-\alpha) + (1-\beta) = 0$, $1 - \alpha \geq 0$ et $1 - \beta \geq 0$ donc $\alpha = \beta = 1$. On a donc montré que $UX = VX = WX$ pour tout $X \neq 0$ mais c'est encore vrai pour $X = 0$. On en déduit que $U = V = W$.

22 D'après la question **9**, il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. D'après le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients diagonaux positifs telles que $S = Q^\top DQ$. Il suffit alors de poser $P = UQ^\top \in O_n(\mathbb{R})$.

23 On a vu à la question **4** que $\|A\|_2^2 = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^\top A)} \lambda$. Or $A^\top A = Q^\top D^\top P^\top PDQ = Q^{-1}D^2Q$ donc $\mathrm{Sp}(A^\top A) = \{d_1^2, \dots, d_n^2\}$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_i^2 \leq \|A\|_2^2 = 1$ car $A \in \mathcal{B}$. Notamment, $d_i \leq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Si on avait $d_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors on aurait $D = I_n$ puis $A = PQ \in O_n(\mathbb{R})$, ce qui n'est pas. Il existe donc $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $d_j < 1$.

24 Posons $B = P\,\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_{j-1}, 1, d_{j+1}, \dots, d_n)Q$ et $C = P\,\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_{j-1}, 2d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_n)Q$. Comme $d_j \neq 1$, on a $B \neq C$. De plus, $A = \frac{1}{2}(B + C)$.
En raisonnant comme à la question précédente, si $M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q$, alors

$$\|M\|_2 = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$

Comme $0 \leq d_i \leq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|B\|_2 = 1$ et $\|C\|_2 \leq 1$ donc B et C appartiennent à $\mathcal{B}$. On en déduit que A n'est pas un point extrémal de $\mathcal{B}$. Les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont donc exactement les éléments de $O_n(\mathbb{R})$.