Semaine du 18/11

1 Cours

Révisions de première année : anneaux, corps, arithmétique de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$

Anneaux et arithmétique

Compléments sur les anneaux Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau commutatif. Idéal engendré par un élément. Divisibilité dans un anneau commutatif et traduction en termes d'idéaux : $a \mid b \iff bA \subset aA$.

Arithmétique de $\mathbb{Z}$ Idéaux de $\mathbb{Z}$. Interprétation du PGCD et du PPCM en termes d'idéaux : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$; $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$. Extension à plus de deux entiers. Théorème de Bézout.

Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ Idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Interprétation du PGCD et du PPCM en termes d'idéaux : $P\mathbb{K}[X] + Q\mathbb{K}[X] = (P \wedge Q)\mathbb{K}[X]$; $P\mathbb{K}[X] \cap Q\mathbb{K}[X] = (P \vee Q)\mathbb{K}[X]$.

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Structure d'anneau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si $k \wedge n = 1$. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier. Théorème des restes chinois : si $m \wedge n = 1$, l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \overline{k} & \longmapsto & (\tilde{k}, \hat{k}) \end{array}\right.$ est bien définie et est un isomorphisme d'anneaux. Extension à plusieurs entiers premiers entre eux deux à deux. Indicatrice d'Euler. Calcul de $\varphi(p^\alpha)$ pour p premier. L'indicatrice d'Euler est une fonction arithmétique multiplicative : si $m \wedge n = 1$, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Expression de l'indicatrice d'Euler à l'aide de la décomposition en facteurs premiers : $\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Théorème d'Euler : si $a \wedge n = 1$, $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'un ensemble est un anneau/un corps/une algèbre en montrant que c'est un sous-anneau/un sous-corps/une sous-algèbre de d'un anneau/d'un corps/d'une algèbre connu.
- Attention aux calculs dans un anneau : a priori, un anneau n'est ni commutatif ni intègre (exemples : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{L}(E)$).
- Techniques classiques d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$:
  - utilisation du lemme de Gauss ou du lemme d'Euclide ;
  - règles de calcul avec les congruences ;
  - montrer que deux entiers sont premiers entre eux : montrer que leur seul diviseur commun est 1 / exhiber relation de Bézout / montrer qu'ils n'admettent pas de diviseur premier commun ;
  - montrer qu'un entier naturel est premier : il est différent de 1 et ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même ;
  - montrer que deux entiers sont égaux en montrant qu'ils se divisent l'un l'autre.
- Factorisation d'un polynôme en un produit de facteurs irréductibles :
  - déterminer les racines ;
  - caractériser la multiplicité d'une racine via les dérivées successives ;
  - si P est pair/impair, a est racine de P de multiplicité m si et seulement si $-a$ est racine de P de multiplicité m ;
  - si P est à coefficients **réels**, $a \in \mathbb{C}$ est racine de P de multiplicité m si et seulement si $\overline{a}$ est racine de P de multiplicité m.
- Résoudre un système de congruences du type $\begin{cases} x \equiv a[m] \\ x \equiv b[n] \end{cases}$.
- Résoudre une équation diophantienne linéaire du type $ax + by = c$.
- Ne pas s'emmêler les pinceaux entre les différentes structures :
  - $(\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}, +)$ est un **groupe** ;
  - $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un **anneau** et un **corps** si n est **premier** ;
  - $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \times)$ (ensemble des **inversibles** de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) est un **groupe**.

3 Questions de cours

Banque CCP Exos 85, 86, 87, 90, 94.