DEVOIR À LA MAISON N°20

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après Centrale MP Maths 1 2014

L'objet de ce problème est l'étude de certaines fonctions définies sur des espaces de matrices.
Dans tout le problème, on fixe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ l'espace des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de taille $d \times d$. Si i et j sont deux entiers entre 1 et d, on note $A_{i,j}$ le coefficient placé sur la ligne i et la colonne j dans la matrice A. On rappelle que $A^0 = I_d$.
On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme sur $\mathbb{K}^d$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d,\ \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le d} |x_i|$$

On note enfin $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K}),\ \|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^d \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

Les parties I et II sont indépendantes des parties III et IV.

I Série entière de matrices

Dans cette partie, on se donne une série entière $\sum_{n \ge 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif, éventuellement égal à $+\infty$.

1 **1.a** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $A \mapsto A^n$ est une fonction continue de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

1.b Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\| \le \|A\|^n$.

1.c Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}),\ \|A\| < R\}$. Montrer que l'application $\varphi :\ A \mapsto \varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$ est définie et continue sur $\mathcal{B}$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $\|A\| < R$. On note

$$\mathbb{C}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{C}[X]\}$$

et on note $r = \dim \mathbb{C}[A]$.

2.a Justifier que $\mathbb{C}[A]$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

2.b En déduire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\varphi(A) = P(A)$ et $\deg P < r$.

2.c Déterminer ce polynôme lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $a_n = \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la série entière $\sum_{n \ge 0} a_n z^n$ pour qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}),\ \varphi(A) = P(A)$$

II Deux applications

4 **Première application : une formule de trigonométrie matricielle**
Pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on pose

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad \sin(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \cos(A)^2 + \sin(A)^2 = I_d$$

On pourra utiliser le fait que si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ qui commutent, alors

$$\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$$

5 **Seconde application : le théorème de Cayley-Hamilton**
On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

5.a Pour R assez grand, montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $Re^{i\theta}I_d - A$ est inversible dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et que son inverse est la matrice

$$(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n$$

5.b Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout R assez grand, la matrice

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} \, d\theta$$

vaut A^{n-1}.

5.c On considère le polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_d) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

Montrer que, pour R assez grand :

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re^{i\theta} \chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} \, d\theta$$

5.d En déduire que $\chi_A(A)$ est la matrice nulle.
On pourra faire intervenir des comatrices.

III Etude d'une équation fonctionnelle

Soit $M \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $f :]-\infty, M[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x,y) \in \left]-\infty, \frac{M}{2}\right[^2,\ 2f(x+y) = f(2x) + f(2y) \qquad (\star)$$

6 Soit α un nombre strictement inférieur à $\frac{M}{2}$ et F la primitive de f s'annulant en α. Montrer que pour tous x et y dans $\left]-\infty, \frac{M}{2}\right[$, avec $y \neq \alpha$, on a :

$$f(2x) = 2\frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y - \alpha}$$

7 En déduire que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, M[$.

8 Montrer que $f'' = 0$, puis que l'ensemble des solutions continues de l'équation $(\star)$ forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on déterminera une base.

IV Etude d'une autre fonction matricielle

Dans cette partie, on se donne une fonction $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on définit une fonction $f_\xi : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ f_\xi(A) = \big(\xi(A_{i,j})\big)_{1 \le i,j \le d}$$

On se propose de déterminer les fonctions continues $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ A \text{ inversible} \implies f_\xi(A) \text{ inversible} \tag{$\blacktriangle$}$$

9 Déterminer les fonctions continues ξ vérifiant la condition ($\blacktriangle$) lorsque $d = 1$.

On se place dorénavant dans le cas $d \geq 2$.
On se donne une fonction continue ξ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant ($\blacktriangle$).

10 Montrer que

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ ad \neq bc \implies \xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$$

On pourra considérer la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathrm{I}_{d-2} & \\ c & d & & & \end{pmatrix}$.

11 En déduire que la fonction ξ est injective, puis qu'elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

12 Montrer que la fonction ξ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

13 **13.a** Montrer que si $\xi(0) \neq 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha)$.

13.b Conclure.

14 Soit $\eta = \xi^{-1} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de la bijection $\xi : \mathbb{R} \to \mathrm{I}$. Montrer que là ou cela est défini

$$\eta(xy)^2 = \eta(x^2)\eta(y^2)$$

15 On suppose dans cette question que la fonction η prend des valeurs strictement positives sur $\mathrm{I} \cap]0, +\infty[$.

15.a Montrer que la fonction $f = \ln \circ \eta \circ \exp$ vérifie l'équation ($\star$) sur un intervalle $]-\infty, \mathrm{M}[$, avec M (éventuellement infini) à préciser en fonction de l'intervalle I.

15.b En déduire que sur l'intervalle $\mathrm{I} \cap]0, +\infty[$, la fonction η est de la forme

$$\eta : x \mapsto \mathrm{K}_1 x^{\alpha_1}$$

avec deux constantes $\mathrm{K}_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$.

15.c Montrer que sur l'intervalle $\mathrm{I} \cap]-\infty, 0[$, la fonction η est de la forme

$$\eta : x \mapsto \mathrm{K}_2 (-x)^{\alpha_2}$$

avec deux constantes $\mathrm{K}_2 < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

15.d Montrer que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ puis que la fonction η est une fonction impaire.

16 En déduire dans le cas général que, si $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant la condition ($\blacktriangle$), alors elle est impaire et sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $x \mapsto \mathrm{C}x^\beta$ avec $\mathrm{C} \neq 0$ et $\beta > 0$.

17 Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A}_\lambda \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1 hors de la diagonale et que des λ sur la diagonale.

18 En déduire toutes les fonctions continues $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant ($\blacktriangle$).