Interrogation écrite n°04

NOM : Prénom : Note :

1. Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{n}{5} - \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ ne possède pas de limite.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{5n} = 0$ *et* $u_{5n+1} = \frac{1}{5}$ *de sorte que* (u_{5n}) *et* (u_{5n+1}) *convergent respectivement vers* 0 *et* $\frac{1}{5}$. *Comme* (u_{5n}) *et* (u_{5n+1}) *sont deux suites extraites de la suite* (u_n), (u_n) *ne possède pas de limite.* ∎

2. Pour $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on pose $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ et $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{P}) = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. On admet que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes.

   On pose $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}^k$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. *On a clairement* $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}_n) = n+1$ *et* $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{P}_n) = 1$. *Ainsi* $\frac{\mathrm{N}_1(\mathrm{P}_n)}{\mathrm{N}_2(\mathrm{P}_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. *On en déduit que* N_1 *et* N_2 *ne sont pas équivalentes.* ∎

3. Déterminer la signature et l'ordre de la permutation $\sigma \in S_7$ définie par

$$\sigma(1) = 4 \qquad \sigma(2) = 6 \qquad \sigma(3) = 7 \qquad \sigma(4) = 5 \qquad \sigma(5) = 1 \qquad \sigma(6) = 2 \qquad \sigma(7) = 3$$

La décomposition de σ *en cyles à supports disjoints est* $\sigma = (1,4,5) \circ (2,6) \circ (3,7)$. *Ainsi* $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1,4,5))\varepsilon((2,6))\varepsilon((3,7)) = (-1)^{3-1}(-1)(-1) = 1$.
De plus, ces cycles commutent et sont d'ordres respectifs 3, 2 *et* 2. *On en déduit que* $\sigma^6 = \mathrm{Id}$. *L'ordre de* σ *divise donc* 6 *: il vaut* 1, 2, 3 *ou* 6. *Mais* $\sigma \neq \mathrm{Id}$, $\sigma^2 = (1,5,4) \neq \mathrm{Id}$ *et* $\sigma^3 = (2,6) \circ (3,7) \neq \mathrm{Id}$ *donc l'ordre de* σ *est* 6. ∎

4. On fixe $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi : M \in GL_n(\mathbb{K}) \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de groupe.

Remarquons que φ *est bien à valeurs dans* $GL_n(\mathbb{K})$ *car le groupe* $GL_n(\mathbb{K})$ *est stable par produit.*
Soit $(M, N) \in GL_n(\mathbb{K})^2$. *Alors*

$$\varphi(M)\varphi(N) = P^{-1}MPP^{-1}NP = P^{-1}MNP = \varphi(MN)$$

Enfin, en posant $\psi : M \in GL_n(\mathbb{K}) \mapsto PMP^{-1}$, *on vérifie que* $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{GL_n(\mathbb{K})}$ *donc* φ *est bijective.*
On en conclut que φ *est bien un automorphisme du groupe* $GL_n(\mathbb{K})$. ∎

5. Déterminer les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, +)$.

Les générateurs de $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, +)$ *sont les* $\overline{k}$ *avec* $k \wedge 30 = 1$. *On trouve*

$$\overline{1}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}, \overline{29}$$

∎

6. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$.

Soit $r = \mathrm{rg}(A)$ *et* $s = \mathrm{rg}(B)$. *Posons* $J_{n,r} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $J_{p,s} = \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. *Alors il existe* $(P_1, Q_1) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ *et* $(P_2, Q_2) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})^2$ *tels que* $P_1AQ_1 = J_{n,r}$ *et* $P_2BQ_2 = J_{p,s}$. *En posant* $P = \left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array}\right)$ *et* $Q = \left(\begin{array}{c|c} Q_1 & 0 \\ \hline 0 & Q_2 \end{array}\right)$, *on a* $PMQ = \left(\begin{array}{c|c} J_{n,r} & 0 \\ \hline 0 & J_{p,s} \end{array}\right)$. *De plus,* P *et* Q *sont inversibles puisque* $\det(P) = \det(P_1)\det(P_2) \neq 0$ *et* $\det(Q) = \det(Q_1)\det(Q_2) \neq 0$. *On en déduit que*

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} J_{n,r} & 0 \\ \hline 0 & J_{p,s} \end{array}\right) = r + s = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$$

∎