Devoir surveillé n°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – D'après Capes externe 2008

Introduction

Etant donné un entier naturel n, on considère $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris entre 0 et n. Ce sujet s'intéresse au comportement de la suite $(\pi(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Il est composé de deux grandes parties I et II.

La partie I vise à établir l'encadrement suivant :

$$\frac{n\ln 2}{\ln n} \leq \pi(n) \leq \frac{ne}{\ln n}$$

valable pour tout n suffisamment grand. Elle est composée de deux sous-parties, I.A et I.B, consacrées respectivement à la minoration et à la majoration annoncées.

Ce genre d'encadrement suggère l'existence d'un lien asymptotique fort entre les suites $(\pi(n))_n$ et $\left(\frac{n}{\ln n}\right)_n$. La partie II s'intéresse à cette question puisque son objectif principal est de montrer le résultat suivant :

Théorème (Tchebychev)**.** *S'il existe un réel $c > 0$ tel que $\pi(n) \sim c\frac{n}{\ln n}$, alors nécessairement $c = 1$.*

Elle est composée de quatre sous-parties II.A, II.B, II.C et II.D. C'est dans la partie II.C qu'on établit le théorème annoncé. La preuve qu'on en propose repose sur l'étude du comportement asymptotique de la suite $\left(\sum_{p \text{ premier } \leq n} \frac{1}{p}\right)_n$. Cette étude est réalisée au début de la partie II.C. Les parties II.A et II.B sont consacrées à l'établissement de formules importantes pour la suite. Dans la partie II.A, on établit une formule due à Legendre qui donne l'expression de la valuation p-adique de $n!$. Dans la partie II.B, on démontre un théorème de Mertens qui précise le comportement asymptotique de la suite $\left(\sum_{p \text{ premier } \leq n} \frac{\ln p}{p}\right)_n$. La partie II.D est une application de la formule asymptotique trouvée dans la partie II.C. On y étudie la densité de l'ensemble des entiers possédant de grands facteurs premiers.

Les parties de ce problème ne sont pas indépendantes entre elles.

Notations et rappels

- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
- Si E est un ensemble, on note #E le cardinal de cet ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de E.
- Si x est un nombre réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x ; autrement dit, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

- On rappelle que, si a et b sont deux nombres entiers tels que $0 \leq b \leq a$, le coefficient binomial $\binom{a}{b}$ est égal à $\dfrac{a!}{(a-b)!b!}$.

- Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ désignent deux suites numériques, on notera $u_n \sim v_n$, pour dire que ces suites sont *équivalentes*. On notera $u_n = o(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est *négligeable* devant la suite $(v_n)_n$ et enfin on notera $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est *dominée* par la suite $(v_n)_n$, c'est-à-dire qu'il existe un réel c et un entier n_0 tels que, pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n| \leq c|v_n|$.

- Pour tout entier naturel n, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris dans l'intervalle $[\![0, n]\!]$; ainsi, on a $\pi(0) = \pi(1) = 0$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$ etc.

  Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\delta(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$, de sorte que si l'on pose $\delta(0) = 0$, on voit que δ est la fonction caractéristique de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire $\delta(n) = 1$ si n est premier et $\delta(n) = 0$ sinon).

- **Dans tout le texte la lettre p désignera toujours et exclusivement un nombre premier**, ceci y compris lorsque la lettre p sera utilisée comme symbole d'indice d'une somme ou d'un produit. Par exemple, la notation $\displaystyle\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$ désigne la somme des inverses des nombres premiers inférieurs ou égaux au nombre réel x.

- Etant donnés un entier $n \geq 1$ et un nombre premier p, on appelle *valuation p-adique* de n l'entier noté $v_p(n)$ et égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par exemple, si l'on prend $n = 350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$ on a $v_2(350) = 1$, $v_3(350) = 0$, $v_5(350) = 2$, $v_7(350) = 1$ et $v_p(350) = 0$ pour tout nombre premier $p \geq 11$.

  On admettra les propriétés (élémentaires) suivantes :

  - $v_p(n)$ est l'unique entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n.
  - Pour tout $n \geq 1$ fixé, la suite $(v_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ est nulle à partir d'un certain rang, de sorte que l'on peut écrire $n = \displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$, ce produit pouvant être considéré comme un produit fini. Cette écriture est la décomposition de n en facteurs premiers.
  - Pour tous n, m entiers naturels non nuls et tout $p \in \mathcal{P}$, on a

  $$v_p(mn) = v_p(n) + v_p(m)$$

  - Pour tous n, m entiers naturels non nuls et tout $p \in \mathcal{P}$, on a

  $$v_p(\text{pgcd}(m, n)) = \min\{v_p(m), v_p(n)\} \quad \text{et} \quad v_p(\text{ppcm}(m, n)) = \max\{v_p(m), v_p(n)\}$$

  Aucune preuve de ces quatre résultats n'est demandée.

I Une estimation à la Tchebychev

I.A Une minoration de la fonction π

On considère, pour tout entier $n \geq 1$, l'entier $\Delta_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$. Dans cette partie, nous allons établir une minoration de Δ_n puis en déduire une minoration de $\pi(n)$.

On considère $a, b \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leq b \leq a$ et l'on pose :

$$\mathrm{I}(b, a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b} \, \mathrm{d}x$$

$\boxed{1}$ **1.a** Expliciter $\mathrm{I}(1, a)$ en fonction de a.

1.b Montrer que si $b < a$ alors $\mathrm{I}(b+1, a) = \dfrac{b}{a-b}\mathrm{I}(b, a)$.

1.c En déduire que $\mathrm{I}(b,a) = \dfrac{1}{b\binom{a}{b}}$.

2 **2.a** Montrer que $\mathrm{I}(b,a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{1}{k+b}$.

2.b En déduire que l'entier $b\dbinom{a}{b}$ divise l'entier Δ_a.

3 Soit $n \geq 1$ un entier.

3.a Montrer que les entiers $n\dbinom{2n}{n}$ et $(2n+1)\dbinom{2n}{n}$ divisent l'entier Δ_{2n+1}.

3.b En déduire que l'entier $n(2n+1)\dbinom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.

3.c Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a l'inégalité : $\dbinom{2n}{k} \leq \dbinom{2n}{n}$.

3.d En déduire que $(2n+1)\dbinom{2n}{n} \geq 4^n$.

3.e En déduire que $\Delta_{2n+1} \geq 4^n n$.

3.f Montrer que si $n \geq 9$, alors $\Delta_n \geq 2^n$.

4 Soit $n \geq 1$ un entier.

4.a Soit $p \in \mathcal{P}$; montrer que $p^{v_p(\Delta_n)} \leq n$.

4.b Montrer que $\Delta_n = \displaystyle\prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)}$.

4.c En déduire que $\Delta_n \leq n^{\pi(n)}$.

5 Montrer que pour tout $n \geq 9$, on a

$$\pi(n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln n}$$

I.B Une majoration de la fonction π

6 On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\displaystyle\prod_{p \leq n} p$ en fonction de l'entier $n \geq 1$.

6.a Soient a et b deux entiers tels que $0 < \dfrac{b}{2} \leq a < b$. Montrer que le produit $\displaystyle\prod_{a<p\leq b} p$ divise l'entier $\dbinom{b}{a}$ (le produit considéré est supposé être égal à 1 dans le cas où il n'y aurait pas de nombre premier dans l'intervalle $]a, b]$).

6.b Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, on a $\dbinom{2m+1}{m} \leq 4^m$.

6.c Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, on a $\displaystyle\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq 4^m$.

6.d Prouver finalement que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$$

On pourra raisonner par récurrence.

7 **7.a** Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, on a $m! \geq \left(\dfrac{m}{e}\right)^m$.

7.b Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 2$, on a $\pi(n)! \leq 4^n$ et que par suite, on a

$$\pi(n)\ln\pi(n) - \pi(n) \leq n\ln 4$$

$\boxed{8}$ On souhaite montrer, à partir du résultat précédent, que pour tout $n \geq 2$ on a

$$\pi(n) \leq \frac{ne}{\ln n}$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$ tel que $\pi(n_0) > \dfrac{n_0 e}{\ln n_0}$.

8.a Montrer que la fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que

$$\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{\ln\ln n_0}{\ln n_0}$$

8.b Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est majorée par e^{-1} sur $\mathbb{R}_+^*$. Conclure.
On donne $\ln 4 \approx 1,386$ et $e \approx 2,718$.

II Autour d'un théorème de Mertens

II.A Une formule de Legendre sur la valuation p-adique de $n!$

On considère un entier $n \geq 2$ et un nombre premier p. Pour tout entier $k \geq 0$, on considère les sous-ensembles finis U_k et Ω_k de $\mathbb{N}$ définis par

$$\mathrm{U}_k = \{a \in [\![1, n]\!] \mid p^k \text{ divise } a\}$$
$$\Omega_k = \{a \in [\![1, n]\!] \mid v_p(a) = k\}$$

$\boxed{9}$ Calculer, pour tout $k \geq 0$, $\#\mathrm{U}_k$ puis $\#\Omega_k$ en fonction de n, p et k.

$\boxed{10}$ Montrer que $v_p(n!) = \sum_{k\geq 0} k\#\Omega_k$ et en déduire la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

II.B Un théorème de Mertens

Dans toute cette partie II.B, on considère un entier $n \geq 2$.

$\boxed{11}$ Prouver que pour tout $p \in \mathcal{P}$ on a

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

$\boxed{12}$ En déduire que

$$n\sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p\leq n} \ln p < \ln n! \leq n\sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p} + n\sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

$\boxed{13}$ Dans cette question on établit plusieurs majorations techniques utiles aux deux questions suivantes.

13.a Montrer la convergence de la série $\sum \dfrac{r}{2^r}$ et prouver que $\displaystyle\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2$.

13.b Montrer que pour tout entier $r \geq 1$,

$$\sum_{2^{r-1}<m\leq 2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \frac{r\ln 2}{2^r}$$

13.c En déduire que la série $\sum \frac{\ln m}{m(m-1)}$ est convergente et que l'on a :

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \ln 4$$

13.d Montrer qu'il existe un réel $\theta_n \in [0,1]$ tel que :

$$\ln n! = n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n$$

14 Prouver, en utilisant les résultats des questions **12** et **13**, que :

$$\ln n - (1+\ln 4) < \sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p}$$

15 De même, en utilisant les questions **12**, **13** et **6.d**, montrer que :

$$\sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p} < \ln n + \ln 4.$$

En déduire que

$$\sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + \mathrm{O}(1)$$

(théorème de Mertens).

II.C Le comportement asymptotique de $\left(\sum_{p\leq n} \frac{1}{p}\right)_n$

16 Dans cette question on établit des résultats préliminaires utiles pour la suite.

16.a Montrer que la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ converge.

16.b Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + \ell + o(1)$$

17 On note $(\psi(n))_{n\geq 2}$ la suite définie par $\psi(n) = \sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p}$. On considère un entier $n \geq 3$.

17.a Montrer que

$$\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k)\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) + \frac{\psi(n)}{\ln n}$$

17.b Prouver, en utilisant le théorème de Mertens, que :

$$\psi(k)\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) = \frac{1}{k\ln k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right)$$

18 Déduire de ce qui précède qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} = \ln\ln n + \lambda + o(1)$$

19 Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n}$$

En déduire que s'il existe un réel $c > 0$ tel que $\pi(n) \sim c\dfrac{n}{\ln n}$, alors $c = 1$ (théorème de Tchebychev).

II.D Une application à l'étude des entiers possédant de grands facteurs premiers

Etant donné un entier $n \geq 2$, on note $\mathrm{P}^+(n)$ le plus grand facteur premier apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par exemple, $\mathrm{P}^+(50) = \mathrm{P}^+(2 \cdot 5^2) = 5$. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble A constitué des entiers $n \geq 2$ vérifiant $\mathrm{P}^+(n) > \sqrt{n}$ (c'est ce qu'on entend par *entiers possédant de grands facteurs premiers* dans le titre de cette partie). L'objectif de cette partie est de montrer que l'ensemble A possède une densité valant $\ln 2$. En d'autres termes, si pour un réel $x \geq 2$ on pose $\mathrm{A}(x) = \mathrm{A} \cap [0, x]$ et $a(x) = \#\mathrm{A}(x)$ le cardinal de $\mathrm{A}(x)$, nous allons montrer que la suite $\left(\dfrac{a(n)}{n}\right)_n$ possède une limite (on dira alors que A possède une *densité*) et que cette limite vaut $\ln 2$ (qui sera donc appelée la *densité* de A) . Ce résultat signifiera que, «moralement», il y a une proportion de $\ln 2 \approx 0,69$ entiers dans $\mathbb{N}$ qui possèdent de grands facteurs premiers.

20 En utilisant la question **18**, montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{\sqrt{n} < p \leq n} \frac{1}{p}\right)_n$ possède une limite et donner cette limite.

21 Soit $x \geq 2$ un réel.

21.a Soient $p \in \mathcal{P}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $n = mp$. Montrer que

$$(p = \mathrm{P}^+(n) \text{ et } n \in \mathrm{A}(x)) \iff m < p \leq x/m$$

21.b Soient $p, p' \in \mathcal{P}$ et $m, m' \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < p \leq x/m$ et $m' < p' \leq x/m'$. Montrer que

$$mp = m'p' \iff (p = p' \text{ et } m = m')$$

21.c En déduire que les entiers de la forme mp avec $p \in \mathcal{P}$, $m \in \mathbb{N}^*$, et vérifiant $m < p \leq x/m$ décrivent de manière biunivoque l'ensemble $\mathrm{A}(x)$.

21.d Prouver finalement que

$$a(x) = \sum_{p \leq x} \min\left\{p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor\right\}$$

22 Soit $x \geq 1$ un réel.

22.a Montrer que pour tout nombre premier p, on a l'équivalence

$$p - 1 \leq \lfloor x/p \rfloor \iff p \leq \varphi(x)$$

où $\varphi(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$.

22.b Montrer que $\sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x} + 1$.

22.c En déduire que

$$a(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \lfloor x/p \rfloor$$

22.d En utilisant les encadrements obtenus dans la partie I, démontrer que

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) = o(x)$$

22.e En utilisant la question **20**, montrer que

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = x \ln 2 + o(x)$$

22.f Conclure.