

# DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Solution 1

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $\text{ch}$  est à valeurs dans  $[1, +\infty[$ , la suite  $(P_n(x))$  l'est également. A fortiori, elle est strictement positive. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = \text{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) \geq 1$$

donc  $(P_n(x))$  est croissante.

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^n \ln(\text{ch}(x/k))$$

Comme  $\text{ch}(x/n) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,

$$\ln(\text{ch}(x/n)) = \ln(1 + (\text{ch}(x/n) - 1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \text{ch}(x/n) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^2/2n^2$$

Or  $\sum \frac{x^2}{n^2}$  est une série à termes positifs convergente donc  $\sum \ln(\text{ch}(x/n))$  également. La suite de ses sommes partielles i.e. la suite  $(\ln(P_n(x)))$  converge. Par passage à l'exponentielle, la suite  $(P_n(x))$  converge également. On en déduit que  $\mathbb{J} = \mathbb{R}$ .

3. a. Comme  $\text{ch}$  est paire,  $P_n(-x) = P_n(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par passage à la limite,  $\varphi(-x) = \varphi(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ?  $\varphi$  est donc paire.

Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $0 \leq x \leq y$ . Par croissance de  $\text{ch}$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq \text{ch}(x/k) \leq \text{ch}(y/k)$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x) \leq P_n(y)$$

Enfin,  $\varphi(x) \leq \varphi(y)$  par passage à la limite.  $\varphi$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Par parité, elle est décroissante sur  $\mathbb{R}_-$ .

- b. Posons  $g_n : x \mapsto \ln(\text{ch}(x/n))$ . Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . Alors

$$\|h_n\|_{\infty, [-a, a]} = h_n(a)$$

On a vu précédemment que  $\sum h_n(a)$  convergeait donc  $\sum h_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $[-a, a]$ . De plus, les  $h_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que la  $\sum_{n=0}^{+\infty} h_n = \ln \circ \varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Par continuité de l'exponentielle,  $\varphi$  est également continue sur  $\mathbb{R}$ .

4. a. Comme  $1/\text{ch}$  est positive, le calcul de l'intégrale vaudra comme preuve de convergence.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch } t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{ch } t \, dt}{1 + \text{sh}^2 t} = [\arctan(\text{sh } t)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

car  $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$  et  $\lim_{+\infty} \arctan = \pi/2$  de même que  $\lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty$  et  $\lim_{-\infty} \arctan = -\pi/2$ .

**b.** Comme  $\text{ch}$  est à valeurs dans  $[1, +\infty[$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x) \geq P_1(x) = \text{ch}(x)$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{P_n(x)} \leq \frac{1}{\text{ch}(x)}$$

et enfin, par passage à la limite

$$0 \leq \frac{1}{\varphi} \leq \frac{1}{\text{ch}}$$

Comme  $\frac{1}{\text{ch}}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{\varphi}$  l'est également.

**Solution 2**

1. Il est clair que les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $]0, 1]$ . De plus, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ , ce qui garantit la continuité de  $f_n$  en 0.

Remarquons ensuite que pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $f(x) = e^{-x \ln(x)}$ . Donc  $f$  est continue sur  $]0, 1]$ . Le même argument de croissances comparées prouve la continuité de  $f$  en 0.

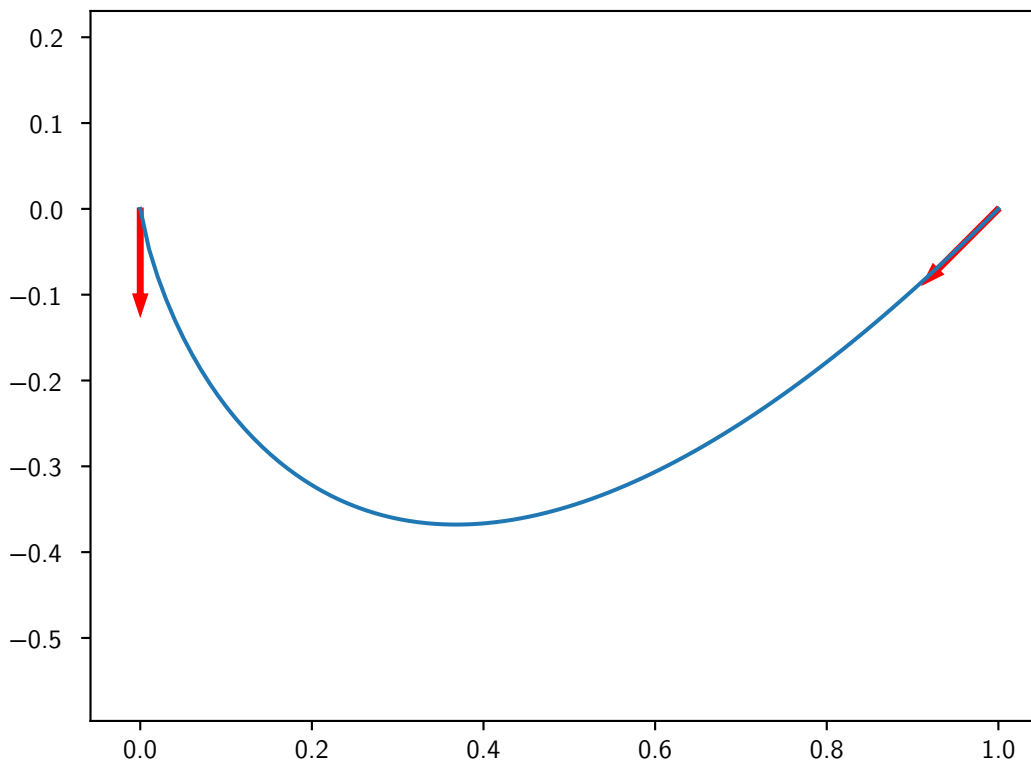
2. Tout d'abord,  $\sum f_n(0)$  converge clairement et  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 1 = f(0)$ . De plus, pour tout  $x \in ]0, 1]$ , la série  $\sum f_n(x)$  est une série exponentielle : elle converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = e^{-x \ln(x)} = f(x)$ . Ainsi  $\sum f_n$  converge simplement vers la fonction  $f$  sur  $I$ .

3. Tout d'abord, comme  $\varphi$  est continue en 0,  $\varphi(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$ . Ensuite,  $\varphi$  est dérivable sur  $]0, 1]$  et

$$\forall t \in ]0, 1], \varphi'(t) = 1 + \ln(t)$$

On en déduit que  $\varphi$  est décroissante sur  $[0, e^{-1}]$  puis croissante sur  $[e^{-1}, 1]$ .

4. Puisque  $\varphi(1) = 0$  et  $\varphi'(1) = 1$ , la courbe de  $\varphi$  admet une tangente d'équation  $y = x - 1$  en  $(1, 0)$ . De plus,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = -\infty$  donc la courbe de  $\varphi$  admet une tangente verticale en  $(0, 0)$ .



5. Les variations et le signe de  $\varphi$  montrent que  $\|\varphi\|_\infty = |\varphi(e^{-1})| = e^{-1}$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in I$ ,  $f_n(x) = \frac{(-1)^n \varphi(x)^n}{n!}$ , on en déduit que  $\|f_n\|_\infty = \frac{(e^{-1})^n}{n!}$ . La série exponentielle  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge i.e.  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ .

6. a. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $\phi : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus,  $\phi$  est positive donc la convergence de l'intégrale  $\Gamma(x)$  équivaut à l'intégrabilité de  $\phi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . D'une part,  $\phi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$  donc  $\phi$  est intégrable en  $0^+$  si et seulement si  $1 - x < 1$  i.e.  $x > 0$ . D'autre part,  $\phi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/t^2)$  par croissances comparées donc  $\phi$  est intégrable en  $+\infty$ . Finalement,  $\phi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $x > 0$ . Autrement dit, le domaine de définition de  $\Gamma$  est  $\mathbb{R}_+^*$ .

b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par intégration par parties et sous réserve de convergence,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = -[t^n e^{-t}]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

Puisque

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^n e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^n e^{-t} = 0$$

l'intégration par parties précédente est légitime et  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ .

De plus,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -[e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

On en déduit par une récurrence évidente que  $\Gamma(n+1) = n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

7. D'abord,  $t \mapsto -\ln(t)$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement décroissante de  $]0, 1[$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, si  $u = -\ln(t)$ , alors  $t = e^{-u}$  de sorte que  $dt = -e^{-u} du$ . On en déduit par changement de variable que

$$J_n = \int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n (-\ln t)^n dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} e^{-u} du = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u} du$$

On effectue ensuite le changement de variable  $v = (n+1)u$  de sorte que

$$J_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} v^n e^{-v} dv = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \Gamma(n+1) = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

On remarque que ce résultat est encore valable pour  $n = 0$  puisque  $J_0 = 1$ . Comme  $\sum f_n$  est une série de fonctions continue convergeant normalement vers  $f$  sur le segment  $[0, 1]$ , on peut affirmer par théorème d'interversion série/intégrale que

$$J = \int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

8. Notons  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^k}$  et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^k}$ . Alors

$$|J - S_n| = |R_n| = R_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^n}$$

Il suffit donc de trouver un entier  $n_0$  tel que  $\frac{1}{n_0(n_0+1)^{n_0}} \leq 10^{-6}$  i.e.  $n_0(n_0+1)^{n_0} \geq 10^6$ .  $n_0 = 9$  fait l'affaire puisqu'alors  $n_0(n_0+1)^{n_0} = 9 \cdot 10^9 \geq 10^6$ .

## Solution 3

1. Le polynôme caractéristique  $\chi_A = (X-3)^2 - 4 = (X-5)(X-1)$  est scindé à racines simples donc  $A$  est diagonalisable.

**REMARQUE.** On peut aussi remarquer que  $A$  est symétrique réelle mais le spectre de  $A$  aide à comprendre la suite de la question.

On trouve  $\Pi_1 + 5\Pi_2 = A$ ,  $\Pi_1 + \Pi_2 = I_2$  et  $\Pi_1\Pi_2 = 0$ .

2. Puisque  $PQ(u) = Q(u) \circ P(u)$ ,  $\text{Ker } P(u) \subset \text{Ker } PQ(u)$ .

Puisque  $P \wedge Q = 1$ , il existe  $(U, V) \in \mathbb{C}[X]^2$  tel que  $UP + VQ = 1$ . On a donc  $U(u) \circ P(u) + V(u) \circ Q(u) = \text{Id}_E$ . Soit  $x \in \text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u)$ . Alors

$$x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x) = 0_E$$

Ainsi  $\text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u) = \{0_E\}$ .

Puisque  $\text{Ker } P(u) \subset \text{Ker } PQ(u)$  et  $\text{Ker } Q(u) \subset \text{Ker } PQ(u)$ , on a  $\text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u) \subset \text{Ker } PQ(u)$ . Soit enfin  $x \in \text{Ker } PQ(u)$ . A nouveau,

$$x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x)$$

Posons  $y = P(u) \circ U(u)(x)$  et  $z = Q(u) \circ V(u)(x)$ . On a donc  $x = y + z$ . De plus,  $Q(u)(y) = PQU(u)(x) = U(u) \circ PQ(u)(x) = 0$  et  $P(u)(z) = PQV(u)(x) = V(u) \circ PQ(u)(x) = 0$ . Donc  $y \in \text{Ker } P(u)$  et  $z \in \text{Ker } Q(u)$ . Ainsi  $\text{Ker } PQ(u) \subset \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$ .

Par double inclusion,  $\text{Ker } PQ(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$ .

3. On a  $Q_1 = P_2^k$  et  $Q_2 = P_1^k$ . Comme  $P_1$  et  $P_2$  sont premiers entre eux,  $Q_1$  et  $Q_2$  le sont également. D'après le théorème de Bézout, il existe  $(R_1, R_2) \in \mathbb{C}[X]^2$  tel que  $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$ .
4. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ . Alors

$$p_i \circ p_j = (R_iQ_iR_jQ_j)(u)$$

Or  $R_iQ_iR_jQ_j = \pi_u R_iR_j \prod_{\ell \in \llbracket 1, m \rrbracket \setminus \{i, j\}} P_\ell^{k_\ell}$  est un multiple du  $\pi_u$  donc un polynôme annulateur de  $u$ . Ainsi  $p_i \circ p_j = 0$ .

Puisque  $\sum_{i=1}^m R_iQ_i = 1$ ,  $\sum_{i=1}^m R_i(u) \circ Q_i(u) = \text{Id}_E$  ou encore  $\sum_{i=1}^m p_i = \text{Id}_E$ .

Soit  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . D'après les deux points précédents,

$$p_j = p_j \circ \text{Id}_E = p_j \circ \sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=1}^m p_j \circ p_i = p_j^2$$

donc  $p_j$  est un projecteur de  $E$ .

5. Comme les  $\lambda_i$  sont deux à deux distincts, les  $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  sont premiers entre eux deux à deux. D'après le lemme des noyaux :

$$\text{Ker } \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^m N_i$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\chi_u(u) = 0$  donc  $\text{Ker } \chi_u(u) = E$ , ce qui conclut.

6. Soit  $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m \text{Im } p_i$  tel que  $\sum_{i=1}^m x_i = 0$ . Rappelons qu'alors  $x_i = p(x_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ .

Soit  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . En appliquant  $p_j$  à l'égalité précédente, on obtient  $\sum_{i=1}^m p_j(x_i) = 0_E$ . D'une part,  $p_j(x_j) = x_j$ . D'autre part, pour  $i \neq j$ ,  $p_j(x_i) = p_j \circ p_i(x_i) = 0_E$ . Ainsi  $x_j = 0_E$ . Ceci prouve que  $\text{Im } p_1, \dots, \text{Im } p_m$  sont en somme directe.

Par ailleurs,

$$E = \text{Im } \text{Id}_E = \text{Im} \left( \sum_{i=1}^m p_i \right) \subset \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } p_i$$

L'inclusion réciproque étant évidente,  $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } p_i$ .

7. Soit  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Posons  $P_i = X - \lambda_i$  de sorte qu'avec les notations précédentes,  $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} Q_i = \pi_u$ . Ainsi

$$(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i} \circ p_i = [(X - \lambda_i)^{\alpha_i} Q_i R_i](u) = (R_i \pi)(u) = R_i(u) \circ \pi_u(u) = 0$$

Ainsi  $\text{Im } p_i \subset \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i} = N_i$ .

En particulier,  $\dim \text{Im } p_i \leq \dim N_i$ . De plus,

$$\sum_{i=1}^m \dim N_i - \dim \text{Im } p_i = \sum_{i=1}^m \dim N_i - \sum_{i=1}^m \dim \text{Im } p_i = \dim E - \dim E = 0$$

car  $E = \bigoplus_{i=1}^m N_i = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } p_i$ . Comme les termes de la somme précédente sont positifs, ils sont nuls i.e.  $\dim \text{Im } p_i = \dim N_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Comme  $\text{Im } p_i \subset N_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $N_i = \text{Im } p_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ .

8. Les racines de  $\pi_u$  sont les valeurs propres de  $u$ . Comme  $u$  est diagonalisable,  $\pi_u$  est simplement scindé. On en déduit que  $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ .

9. La décomposition en éléments simples de  $1/\pi_u$  est

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$$

On a donc

$$\sum_{i=1}^m \theta_i Q_i = 1$$

Avec les notations précédentes,  $R_i = \theta_i$  de sorte que  $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u) = \theta_i Q_i(u)$ .

10. D'après la décomposition en éléments simples précédente

$$\frac{X}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{X}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{(X - \lambda_i) + \lambda_i}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i \theta_i}{X - \lambda_i}$$

puis, en multipliant par  $\pi_u$ ,

$$X = \left( \sum_{i=1}^m \theta_i \right) \pi_u + \sum_{i=1}^m \lambda_i \theta_i Q_i$$

En évaluant en  $u$ , on obtient

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \theta_i Q_i(u) = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$$

**REMARQUE.** Si l'on souhaite vraiment procéder comme le suggère l'énoncé, on remarque qu'en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$  dans la relation

$$\frac{x}{\pi_u(x)} = \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{x}{x - \lambda_i}$$

on obtient  $\sum_{i=1}^m \theta_i = 0$  lorsque  $\deg \pi_u > 1$  de sorte que

$$X = \sum_{i=1}^m \lambda_i \theta_i Q_i$$

Si  $\deg \pi_u = 1$ , il est difficile de donner un sens à l'énoncé.

11. a. On constate que  $A^2 = I_4$  donc le polynôme scindé à racines simples  $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$  annule  $A$  de sorte que  $A$  est diagonalisable.
- b. D'après la question précédente,  $\pi_A$  divise  $(X - 2)(X + 2)$  et comme  $A$  n'est pas une matrice d'homothétie,  $\deg \pi_A > 1$ . On en déduit que  $\pi_A = (X - 2)(X + 2)$ . On pose  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = -2$  de même que  $P_1 = X - 2$  et  $P_2 = X + 2$ . On en déduit que  $Q_1 = X + 2$  et  $Q_2 = X - 2$ . Finalement,

$$\Pi_1 = \frac{Q_1(A)}{Q_1(\lambda_1)} = \frac{1}{4}(A + 2I_4) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$\Pi_2 = \frac{Q_2(A)}{Q_2(\lambda_2)} = -\frac{1}{4}(A - 2I_4) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La décomposition spectrale de A est

$$A = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2 = 2\Pi_1 - 2\Pi_2$$

- c. On raisonne par récurrence. Tout d'abord,  $A^0 = I_4 = \Pi_1 + \Pi_2$ . Supposons qu'il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $A^q = \lambda_1^q \Pi_1 + \lambda_2^q \Pi_2$ . Alors

$$A^{q+1} = (\lambda_1^q \Pi_1 + \lambda_2^q \Pi_2)(\lambda_1 \Pi_2 + \lambda_2 \Pi_2) = \lambda_1^{q+1} \Pi_1^2 + \lambda_2^{q+2} \Pi_2^2 + \lambda_1^q \lambda_2 \Pi_1 \Pi_2 + \lambda_2^q \lambda_1 \Pi_2 \Pi_1$$

Or  $\Pi_1^2 = \Pi_1$ ,  $\Pi_2 = \Pi_2$  et  $\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1 = 0$  donc

$$A^{q+1} = \lambda_1^{q+1} \Pi_1 + \lambda_2^{q+1} \Pi_2$$

Par récurrence, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \lambda_1^n \Pi_1 + \lambda_2^n \Pi_2$$

12. Notons  $d = \deg \pi_v$ . On va montrer que  $(v^k)_{0 \leq k \leq d-1}$  est une base de  $\mathbb{C}[v]$ . Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . On effectue la division euclidienne de P par  $\pi_v$  : il existe donc  $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P = Q\pi_v + R$  et  $\deg R \leq d-1$ . Ainsi

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v) \in \text{vect}(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$$

La famille  $(v^k)_{0 \leq k \leq d-1}$  engendre donc  $\mathbb{C}[v]$ .

Soit  $(a_k)_{0 \leq k \leq d-1} \in \mathbb{C}^d$  tel que  $\sum_{k=0}^{d-1} a_k v^k = 0$ . En posant  $P = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ ,  $P(v) = 0$ . Ainsi  $\pi_u$  divise P. Mais  $\deg P \leq d-1 < d = \pi_v$  donc  $P = 0$  de sorte que  $a_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ . La famille  $(v^k)_{0 \leq k \leq d-1}$  est donc libre. Par conséquent,  $(v^k)_{0 \leq k \leq d-1}$  est une base de  $\mathbb{C}[v]$ .

13. Tout d'abord, les  $p_i$  appartiennent bien à  $\mathbb{C}[u]$  par définition.

Soit  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^m$  tel que  $\sum_{k=1}^m a_k p_k = 0$ . Fixons  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . En composant par  $p_i$ , on obtient  $\sum_{k=1}^m a_k p_i \circ p_k = 0$ .

Mais  $p_i \circ p_k = 0$  lorsque  $i \neq k$ . Ainsi  $a_i p_i^2 = 0$  ou encore  $a_i p_i = 0$  car  $p_i$  est un projecteur. D'après la question 7,  $\text{Im } p_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$  car  $\lambda_i \in \text{Sp}(u)$ . Ainsi  $p_i \neq 0$  puis  $a_i = 0$ .

La famille  $(p_1, \dots, p_m)$  est une famille libre de  $m$  vecteurs de  $\mathbb{C}[u]$ . D'après la question précédente,  $\dim \mathbb{C}[u] = \deg \pi_u = m$ . On en déduit que  $(p_1, \dots, p_m)$  est une base de  $\mathbb{C}[u]$ .

14. Si  $u$  n'est pas diagonalisable,  $\dim \mathbb{C}[u] = \deg \pi_u > m = \text{card } \text{Sp}(u)$ . La famille  $(p_1, \dots, p_m)$  ne peut donc pas être une base de  $\mathbb{C}[u]$ .

15. On montre aisément qu'alors  $P(u) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) f_i$  pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Notamment, en posant  $P = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ , on obtient  $P(u) = 0$ . Comme P est simplement scindé,  $u$  est diagonalisable.