Devoir surveillé n°15

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – CCINP PSI 2019 – Théorème de Borel

Objectifs

Dans la partie I, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la partie II, indépendante de la partie I, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

I Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\ \mathrm{d}t.$$

1 Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

2 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

3 En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.

4 Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

5 En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.
La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

6 Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.

7 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $\left|g^{(p)}(0)\right| \geq p^{2p} e^{-p}$.

8 En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.
La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ?

II Le théorème de Borel

9 Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}$$

10 On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \dfrac{1}{x-i}$.
Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}$$

11 Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p-ième de la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

12 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| \leq 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.
En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}$$

13 Pour tout réel α, notons φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$|\alpha| \cdot \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n!a_n^2x^2}.$$

14 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, tout entier $n \geq p$ et tout réel x, on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$$

15 En déduire que pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

16 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel x, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{2^n|x|^{n-p-1}p!}{\sqrt{n!}}$$

17 En déduire que la fonction $\mathrm{U} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

18 Montrer que $\mathrm{U}(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geq 1$, on a : $\mathrm{U}^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p$.

19 Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.
Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX[e] siècle.

Problème 2 – CCINP PSI 2019

Notations et définitions

- soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$;
- $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$; si $P \in \mathbb{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée ;
- $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$;
- on note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et 0_p la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ ne comportant que des 0 ;
- on note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$;
- étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Objectifs

Dans la partie I, on détermine les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. On utilise les résultats démontrés dans la I pour résoudre, dans la partie II, un système différentiel.

I Eléments propres d'une matrice

I.A Localisation des valeurs propres

On considère une matrice $A = \left((a_{i,j})\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}$.

$\boxed{1}$ Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\lambda x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

$\boxed{2}$ Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \displaystyle\max_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \le \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

En déduire que :

$$|\lambda| \le \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha,\beta) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ sont réelles.

$\boxed{4}$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Montrer que :

$$|\lambda| \le |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.B Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$

5 En utilisant la question **4**, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

6 Etablir, pour $n \geq 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}$, $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$.
En déduire, pour $n \geq 3$, une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.

7 Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

8 Déduire de la question précédente que le spectre de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \; ; \; j \in [\![1, n]\!]\right\}$. Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Considérons $j \in [\![1, n]\!]$ et posons $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$.

9 Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$, on a :

$$\begin{cases} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 = 0 \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!], \; x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0 \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n = 0 \end{cases}$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0.$$

10 Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on précisera la dimension.

11 Déterminer l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

12 En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.

13 En déduire, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

II Système différentiel

II.A Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.

14 Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC) \tag{1}$$

15 Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

16 On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geq p_0$, la matrice $\mathrm{D} + \frac{1}{p}\mathrm{I}_n$ soit inversible.

17 En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et formons la matrice :

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{M} & 0_n \end{pmatrix}.$$

18 Montrer que $\mathrm{Sp}(\mathrm{N}) = \{\mu \in \mathbb{C} ; \mu^2 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})\}$.

19 Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{N})$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

20 Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

II.B Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'' = -2x_1 + x_2 \\ x_2'' = x_1 - 2x_2 \end{cases} \tag{2}$$

21 Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que le système (2) soit équivalent au système différentiel du premier ordre $\mathrm{X}' = \mathrm{BX}$, où $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0_2 & \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{A}_2(\alpha, \beta) & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de ce système ?

22 En utilisant la question **18**, déterminer les valeurs propres de B et en déduire que B est diagonalisable.

On considère la matrice :

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

23 En utilisant la question **19**, déterminer une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

24 Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$, avec $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

25 Déterminer la solution du système différentiel (2) avec conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1, 0, 0, 0)$.