

# DEVOIR À LA MAISON N°18

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – Mines-Ponts Maths2 MP 2013 – Quelques propriétés géométriques du groupe orthogonal

### Notations et définitions

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire de  $E$  et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée. Si  $H$  est une partie de  $E$ , on appelle enveloppe convexe de  $H$ , notée  $\text{conv}(H)$ , la plus petite partie convexe de  $E$  contenant  $H$ , c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de  $E$  contenant  $H$ .

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels. On note  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $A^T$  la matrice transposée de  $A$  et  $\text{tr}(A)$  la trace de  $A$ . On rappelle que le groupe orthogonal  $O_n(\mathbb{R})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices  $U$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $UU^T = I$ . On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite positive si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier  $\mathbb{R}^n$  et l'ensemble des matrices colonnes  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est orthonormée. On note  $\|\cdot\|_2$  la norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  subordonnée à la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  : pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\|A\|_2 = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|=1} \|AX\|$$

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

### I Produit scalaire de matrices

On rappelle que  $\text{tr}(A)$  désigne la trace de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**1** Montrer que pour toute base orthonormée  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a la formule  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle$ .

**2** Montrer que l'application  $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

On note  $\|\cdot\|_1$  la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. *L'attention du candidat est attirée sur le fait que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est désormais muni de deux normes différentes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ .*

**3** Si  $A$  et  $B$  sont symétriques réelles positives, montrer que  $\langle A, B \rangle \geq 0$ . On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de  $B$ .

## II Décomposition polaire

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $A$  la matrice de  $f$  dans une base orthonormée de  $E$ , et on note  $f^*$  l'adjoint de  $f$ .

- 4** Montrer que  $A^T A$  est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer  $\|A\|_2$  en fonction des valeurs propres de  $A^T A$ .
- 5** Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif  $h$  de  $E$  tel que  $f^* \circ f = h^2$ .
- 6** Montrer que la restriction de  $h$  à  $\text{Im } h$  induit un automorphisme de  $\text{Im } h$ . On notera cet automorphisme  $\tilde{h}$ .
- 7** Montrer que  $\|h(x)\| = \|f(x)\|$  pour tout  $x \in E$ . En déduire que  $\text{Ker } h$  et  $(\text{Im } f)^\perp$  ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme  $v$  de  $\text{Ker } h$  sur  $(\text{Im } f)^\perp$  qui conserve la norme.
- 8** À l'aide de  $\tilde{h}$  et  $v$ , construire un automorphisme orthogonal  $u$  de  $E$  tel que  $f = u \circ h$ .
- 9** En déduire que toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  s'écrit sous la forme  $A = US$ , où  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et  $S$  est une matrice symétrique positive.  
On admet que si  $A$  est inversible, cette écriture est unique.

## III Projeté sur un convexe compact

Soit  $H$  une partie de  $E$ , convexe et compacte, et soit  $x \in E$ . On note

$$d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|$$

- 10** Montrer qu'il existe un unique  $h_0 \in H$  tel que  $d(x, H) = \|x - h_0\|$ . On pourra utiliser pour  $h_0, h_1$  dans  $H$  la fonction définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par la formule  $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$ .
- 11** Montrer que  $h_0$  est caractérisé par la condition  $\langle x - h_0, h - h_0 \rangle \leq 0$  pour tout  $h \in H$ . On pourra utiliser la même fonction  $q$  qu'à la question précédente.

Le vecteur  $h_0$  s'appelle projeté de  $x$  sur  $H$ .

## IV Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que  $E$  est de dimension  $n$ . On dit que  $x \in E$  est une combinaison convexe des  $p$  éléments  $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$  s'il existe des réels  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$$

- 12** Montrer que l'enveloppe convexe  $\text{conv}(H)$  d'une partie  $H$  de  $E$  est constituée des combinaisons convexes d'éléments de  $H$ .

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe  $\text{conv}(H)$  est constituée des combinaisons convexes d'au plus  $n+1$  éléments de  $H$ .

Soit  $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$  une combinaison convexe de  $x_1, x_2, \dots, x_p \in H$  avec  $p \geq n+2$ .

- 13** Montrer qu'il existe  $p$  réels non tous nuls  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$  tels que

$$\sum_{i=1}^p \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \mu_i = 0$$

On pourra considérer la famille  $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_p - x_1)$ .

**14** En déduire que  $x$  s'écrit comme combinaison convexe d'au plus  $p-1$  éléments de  $H$  et conclure que  $\text{conv}(H)$  est constituée des combinaisons convexes d'au plus  $n+1$  éléments de  $H$ .

On pourra considérer une suite de coefficients de la forme  $\lambda_i - \theta\mu_i \geq 0$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  pour un réel  $\theta$  bien choisi.

**15** Si  $H$  est une partie compacte de  $E$ , montrer que  $\text{conv}(H)$  est compacte. On pourra introduire l'ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini par

$$\Lambda = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall i \in \{1, \dots, n+1\}, t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}$$

## V Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

**16** Montrer que l'enveloppe convexe  $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$  est compacte.

On note  $\mathcal{B}$  la boule unité fermée de  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ .

**17** Montrer que  $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$  est contenue dans  $\mathcal{B}$ .

On suppose qu'il existe  $M \in \mathcal{B}$  telle que  $M$  n'appartient pas à  $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ . On note  $N$  le projeté de  $M$  sur  $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$  défini à la partie III pour la norme  $\|\cdot\|_1$ , et on pose  $A = (M - N)^\top$ . On écrit enfin  $A = US$ , avec  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et  $S$  symétrique réelle positive (question 9).

**18** Montrer que pour tout  $V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ ,  $\text{tr}(AV) \leq \text{tr}(AN) < \text{tr}(AM)$ . En déduire que  $\text{tr}(S) < \text{tr}(USM)$ .

**19** Montrer que  $\text{tr}(USM) \leq \text{tr}(S)$ . On pourra appliquer le résultat de la question 1.

**20** Conclure : déterminer  $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ .

## VI Points extrémaux

Un élément  $A \in \mathcal{B}$  est dit extrémal dans  $\mathcal{B}$  si l'écriture  $A = \frac{1}{2}(B + C)$ , avec  $B, C$  appartenant à  $\mathcal{B}$  entraîne  $A = B = C$ . Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des points extrémaux de  $\mathcal{B}$ .

**21** On suppose que  $U \in O_n(\mathbb{R})$  s'écrit sous la forme  $U = \frac{1}{2}(V + W)$ , avec  $V, W$  appartenant à  $\mathcal{B}$ . Montrer que pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ , les vecteurs  $VX$  et  $WX$  sont liés. En déduire que  $U$  est extrémal dans  $\mathcal{B}$ .

Soit  $A$  appartenant à  $\mathcal{B}$  mais n'appartenant pas à  $O_n(\mathbb{R})$ .

**22** Montrer que l'on peut écrire  $A$  sous la forme  $A = PDQ$ , où  $P$  et  $Q$  sont deux matrices orthogonales et où  $D$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sont positifs ou nuls.

**23** Montrer que  $d_i \leq 1$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , et qu'il existe  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $d_j < 1$ .

**24** En déduire qu'il existe deux matrices  $A_\alpha$  et  $A_{-\alpha}$  appartenant à  $\mathcal{B}$  telles que  $A = \frac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$ . Conclure.