Séries entières

Rayon de convergence

Solution 1

D'après le cours $R \geq \min(R_a, R_b)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $a_n b_n = 0$ donc $a_n = 0$ ou $b_n = 0$. Si $a_n = 0$, alors $|a_n + b_n| = |b_n| \geq 0 = |a_n|$. Si $b_n = 0$, alors $|a_n + b_n| = |a_n|$. Dans tous les cas, $|a_n + b_n| \geq |a_n|$ donc $R \leq R_a$. On prouve de la même manière que $R \leq R_b$. Donc $R \leq \min(R_a, R_b)$ puis $R = \min(R_a, R_b)$.

Solution 2

Notons R le rayon de convergence de la série à déterminer. On rappelle que le rayon de convergence de la série entière $\sum q^n z^n$ vaut $\frac{1}{q}$ lorsque $q \in \mathbb{R}_+^*$.

Cas $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ Soit $q > \ell$. Alors, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ i.e. $|a_n| \leq q^n$. Ainsi $R \geq \frac{1}{q}$. Ceci étant vrai pour tout $q > \ell$, $R \geq \frac{1}{\ell}$.

Soit $q \in [0, \ell[$. Alors, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{|a_n|} \geq q$ i.e. $|a_n| \geq q^n$. Ainsi $R \leq \frac{1}{q}$. Ceci étant vrai pour tout $q \in [0, \ell[$, $R \leq \frac{1}{\ell}$.

Par conséquent, $R = \frac{1}{\ell}$.

Cas $\ell = 0$ Soit $q > 0$. Alors, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ i.e. $|a_n| \leq q^n$. Ainsi $R \geq \frac{1}{q}$. Ceci étant vrai pour tout $q > 0$, $R = +\infty$.

Cas $\ell = +\infty$ Soit $q > 0$. Alors, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{|a_n|} \geq q$ i.e. $|a_n| \leq q^n$. Ainsi $R \leq \frac{1}{q}$. Ceci étant vrai pour tout $q > 0$, $R = 0$.

Solution 3

Notons R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$. On va montrer que $R_b = \max(1, R_a)$. Posons pour cela $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et remarquons que la série à termes positifs $\sum a_n$ converge ou diverge vers $+\infty$.

- Supposons que la série $\sum a_n$ converge. Ainsi $R_a \geq 1$ et (S_n) converge vers un réel $\ell > 0$. On en déduit que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b_n}{\ell}$ puisque $R_b = R_a = \max(1, R_a)$.
- Supposons que la série $\sum a_n$ diverge vers $+\infty$. Alors $R_a \leq 1$. Mais $S_n \geq a_n$ donc $b_n = \frac{a_n}{S_n} \leq 1$ puis $R_b \geq 1$. Montrons maintenant que la série $\sum b_n$ diverge.
  - Si b_n ne tend pas vers 0, alors $\sum b_n$ diverge grossièrement.
  - Sinon $-\ln(1 - b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ donc la série $\sum b_n$ est de même nature que la série $\sum -\ln(1 - b_n)$. Or

    $$-\ln(1 - b_n) = -\ln \frac{S_{n-1}}{S_n} = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$$

    Comme $(\ln(S_n))$ diverge vers $+\infty$, la série télescopique $\sum \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ diverge également. Ainsi la série $\sum b_n$ diverge.

  On en déduit que $R_b \leq 1$ puis $R_b = 1 = \max(1, R_a)$.

Solution 4

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si la suite extraite $(a_{n^2} r^{n^2})$ est bornée (les autres termes sont nuls), c'est-à-dire si et seulement si la suite $(q^n r^{n^2})$ est bornée. Or

$$q^n r^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln(r) + n \ln(q)\right)$$

On en déduit que $(q^n r^{n^2})$ diverge vers $+\infty$ si $r > 1$ ou si $r = 1$ et $q > 1$ et qu'elle est bornée sinon.
Le rayon de convergence vaut donc toujours 1.

Solution 5

---

1. Si on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc le rayon de convergence vaut 1.
2. Si on pose $a_n = 2^n \ln(n)$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 2\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. Donc le rayon de convergence vaut $\frac{1}{2}$.
3. Si on pose $a_n = \binom{2n}{n}$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$. Donc le rayon de convergence vaut $\frac{1}{4}$.
4. Si on pose $a_n = n + 2^n i$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n i$ donc $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$. Donc le rayon de convergence vaut $\frac{1}{2}$.

Solution 6

Comme la suite $(\cos n)$ est bornée, $\mathrm{R} \geq 1$. Mais $(\cos n)$ ne converge pas vers 0 donc $\mathrm{R} \leq 1$. Ainsi $\mathrm{R} = 1$.

> **Remarque.** Si l'on souhaite montrer rigoureusement que $(\cos n)$ ne converge pas vers 0, on peut raisonner par l'absurde. Supposons que $(\cos n)$ converge vers 0. Alors
> $$\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$$
> et $\lim_{n\to+\infty} \cos(n+1) = \lim_{n\to+\infty} \cos(n) = 0$. Puisque $\sin(1) \neq 0$, $\sin(n) = \frac{\cos(n+1) - \cos(n)\cos(1)}{\sin(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conéquent, $\lim_{n\to+\infty} \cos^2 n + \sin^2 n = 0$, ce qui est absurde puisque $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le rayon de convergence de $\sum \frac{\sin n}{n} z^n$ est le même que celui de sa série dérivée à savoir $\sum \sin(n+1) z^n$. On prouve comme à la question précédente que ce rayon de convergence vaut 1.

La suite $\left(\tan \frac{n\pi}{7}\right)$ est périodique donc bornée. Ainsi $\mathrm{R} \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq d_n \leq n$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ vaut 1 donc $\mathrm{R} \leq 1$. Le rayon de convergence de la série $\sum n z^n$ vaut également 1 donc $\mathrm{R} \leq 1$. Finalement, $\mathrm{R} = 1$.

La suite (a_n) est à valeurs dans $[\![0, 9]\!]$ donc bornée. Ainsi $\mathrm{R} \geq 1$. De plus, la suite (a_n) ne converge pas vers 0 donc $\mathrm{R} \leq 1$. En effet, si la suite d'*entiers* (a_n) convergeait vers 0, elle serait nulle à partir d'un certain rang. Par conséquent, π serait décimal et a fortiori rationnel, ce qui n'est pas. Finalement, $\mathrm{R} = 1$.

Solution 7

---

1. On applique le critère de d'Alembert «tel quel». Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors
$$\left|\frac{z^{(n+1)^2}}{z^{n^2}}\right| = |z|^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } |z| > 1 \\ 0 & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$$
Ainsi le rayon de convergence vaut 1.
2. On applique le critère de d'Alembert «tel quel». Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors
$$\left|\frac{2^{n+1} z^{2^{n+1}}}{2^n z^{2^n}}\right| = 2|z|^{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } |z| > 1 \\ 0 & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$$
Ainsi le rayon de convergence vaut 1.
3. On applique le critère de d'Alembert «tel quel». Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors
$$\left|\frac{(n+1)^{n+1} z^{3(n+1)}/(n+1)!}{n^n z^{3n}/n!}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e|z|^3$$
Ainsi le rayon de convergence vaut $e^{-\frac{1}{3}}$.

Calcul de sommes de séries entières

Solution 8

La série entière $\sum_{n\geq 0} x^{n+1}$ a un rayon de convergence égal à 1. Pour $x \in]-1,1[$, notons $S(x)$ sa somme. S est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$,

$$S'(x) = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$$

La somme a calculer est donc $S'\left(\frac{1}{3}\right)$. Or on a classiquement $S(x) = \frac{x}{1-x}$ et donc $S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $x \in]-1,1[$. On en déduit

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)3^{-n} = \frac{9}{4}$$

Solution 9

Soit $a \in E$. Puisque a est de limite nulle, la série entière définissant f_a est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
De plus, pour $t \in [0,1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} t^n$ vaut 1. Par produit de Cauchy, $t \mapsto \frac{f_a(t)}{1-t}$ est également développable en série entière en 0, de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Plus précisément,

$$\forall t \in [0,1[,\ \frac{f_a(t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n \qquad \text{avec} \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Fixons $x \in]0,1[$. La série entière $\sum b_n t^n$ converge uniformément sur le segment $[0,x]$ puisque son raton de convergence est supérieur ou égal à 1. On peut donc intervertir série et intégrale :

$$\int_0^x \frac{f_a(t)}{1-t}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 b_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n x^{n+1}}{n+1}$$

puis

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{f_a(t)}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n+1}x^n$$

En posant $c_n = \frac{b_n}{n+1}$, il suffit donc de montrer que $c \in E$ i.e. que c est de limite nulle. Il s'agit d'une application du lemme de Césaro. On sait que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ donc, par sommation de relation de comparaison, $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{=} o(n+1)$ et enfin, $c_n = \frac{b_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Ceci prouve bien que $c \in E$. On conclut en posant $\varphi(a) = c$.

Solution 10

1. La suite de fonctions $(\tan^n)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,\pi/4[$. De plus, $0 \leq \tan^n t \leq 1$ pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}\times[0,\pi/4[$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,\pi/4[$. D'après le théorème de convergence dominée, (a_n) converge vers 0.

   > **Remarque.** On peut aussi remarquer que via le changement de variable $u = \tan t$, $a_n = \int_0^1 \frac{u^n\,du}{1+u^2}$. On en déduit que
   >
   > $$0 \leq a_n \leq \int_0^1 u^n\,du = \frac{1}{n+1}$$
   >
   > On conclut avec le théorème des gendarmes.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [0,\pi/4]$, $0 \leq \tan(t) \leq 1$ donc $\tan^{n+1}(t) \leq \tan^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, $a_{n+1} \leq a_n$. La suite (a_n) est décroissante.

> **Remarque.** On peut aussi utiliser l'expression $a_n = \int_0^1 \frac{u^n \, \mathrm{d}u}{1+u^2}$.

3. Rappelons que $\tan' = 1 + \tan^2$ donc

$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\tan'(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\tan^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$$

> **Remarque.** On peut aussi utiliser l'expression $a_n = \int_0^1 \frac{u^n \, \mathrm{d}u}{1+u^2}$.

Par décroissance de (a_n)

$$\frac{1}{n+1} = a_n + a_{n+2} \leq 2a_n \leq a_n + a_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

On en déduit que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

4. Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{2n}$ vaut 1 (règle de d'Alembert), $\mathrm{R} = 1$ en vertu de l'équivalent de la question précédente.

5. Soit $x \in]-1,1[$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x_{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+1}$$

ou encore

$$x^2 f(x) + f(x) - a_0 - a_1 x = -x\ln(1-x)$$

Or

$$a_0 = \frac{\pi}{4}$$
$$a_1 = [-\ln(\cos t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln 2$$

Par conséquent

$$f(x) = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{x\ln 2}{2} - x\ln(1-x)}{1+x^2}$$

> **Remarque.** On aurait aussi pu utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

Solution 11

Comme $\left|\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1. Puisque la suite de terme général $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ ne converge pas vers 0, le rayon de convergence est inférieur ou égal à 1. Il vaut donc 1.

Pour les mêmes raisons, le rayon de convergence de la série $\sum e^{\frac{in\pi}{2}} x^n$ vaut 1. Ainsi pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{in\pi}{2}} x^n\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

Solution 12

1. C'est du cours. La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n x^{2n}$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1+x^2}$. Par intégration, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ a également pour rayon de convergence 1 et pour somme $\arctan(x)$, ce qui répond à la question.

2. Une simple application de la règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence vaut 1.

3. f est bien dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x\in]-1,1[$,

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^{2k}}{2k-1}=x\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x^{2k+1}}2k+1=x\arctan(x)$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\int_0^x t\arctan(t)\,\mathrm{d}t\\&=0+\frac{x^2\arctan(x)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{x^2\arctan(x)}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arctan(x)\end{aligned}$$

4. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[-1,1]$,

$$\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)}x^{2k+1}\right|\leq\frac{1}{4k^2-1}$$

Or la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{4k^2-1}$ converge (équivalent + critère de Riemann) donc la série entière définissant f converge normalement sur $[-1,1]$.

5. La convergence normale et donc uniforme sur $[-1,1]$ permet d'appliquer le théorème d'interversion limite/série. Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}=\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

Solution 13

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}a_n&=\left[\frac{t}{(2+t^2)^{n+1}}\right]_0^1+2(n+1)\int_0^1\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(2+t^2)^{n+2}}\\&=\frac{1}{3^{n+1}}+2(n+1)(a_n-2a_{n+1})\end{aligned}$$

Par conséquent

$$4(n+1)a_{n+1}=(2n+1)a_n+\frac{1}{3^{n+1}}$$

puis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{4(n+1)}+\frac{1}{4(n+1)3^{n+1}a_n}$$

Or pour $t\in[0,1]$

$$\frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}\geq\frac{1}{3^{n+1}}$$

donc

$$a_n\geq\frac{1}{3^{n+1}}$$

Par conséquent,

$$4(n+1)3^{n+1}a_n\geq4(n+1)$$

de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4(n+1)3^{n+1}a_n} = 0$$

puis

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 2.

2. Notons $f(x)$ la somme de cette série entière.
Soit $x \in]-2,2[$. En reprenant la relation obtenue à la première question

$$4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$$

ou encore

$$4f'(x) = 2xf'(x) + f(x) + \frac{1}{3-x}$$

puis

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}f(x) + \frac{1}{2(2-x)(3-x)}$$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2(2-x)}f(x)$ sur $]-2,2[$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{2-x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On applique alors la méthode de variation de la constante et on recherche une solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y' = \frac{1}{2(2-x)}y + \frac{1}{2(2-x)(3-x)}$$

de la forme $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{2-x}}$ avec φ dérivable sur $]-2,2[$ ce qui donne

$$\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2(2-x)(3-x)}$$

ou encore

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-x}(3-x)} = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{2-x}^2}$$

On peut alors choisir

$$\varphi(x) = -\arctan(\sqrt{2-x})$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{2-x}} - \frac{\arctan(\sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}}$$

Or

$$f(0) = a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi/2 - \arctan(\sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{2-x}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)$$

Solution 14

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.
On effectue maintenant une décomposition en éléments simples :

$$\frac{n^2+4n-1}{n+2} = n+2-\frac{5}{n+2}$$

Ainsi pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$,

$$\frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n = (n+1)x^n + x^n - \frac{5}{x^2}\cdot\frac{x^{n+2}}{n+2}$$

La série géométrique $\sum x^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

En considérant la dérivée de cette série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Et en en considérant une primitive

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -x + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) - x$$

Finalement,

$$\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)} + \frac{5(\ln(1-x)+x)}{x^2}$$

La somme vaut $-\frac{1}{2}$ lorsque $x=0$.

Solution 15

1. D'après la règle de d'Alembert, $R = 1$.
2. Soit $x \in]0,1[$. Alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1}$$

On sait que

$$\forall u \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} u^{2n} = \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)$$

Donc en primitivant cette série entière

$$\forall u \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

car les deux termes sont nuls pour $u=0$.

> **Remarque.** Le lecteur aura reconnu en cette primitive la fonction argth (hors programme).

On en déduit que

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{argth}(\sqrt{x})$$

Soit maintenant $x \in]-1,0[$. Alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}}\arctan(\sqrt{-x})$$

Enfin, il est clair que $f(0)=1$.

Solution 16

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ est le même que celui de la série entière $\sum x^n$, c'est-à-dire 1.
Soit $x \in]-1,1[$. On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc, par dérivation d'une série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ puis $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

2. Remarquons que $\sum 2nx^{2n} = 2\sum n(x^2)^n$. D'après la question précédente, cette série converge si $x^2 < 1$ i.e. $|x| < 1$ et diverge si $x^2 > 1$ i.e. $|x| > 1$. On en déduit que le rayon de convergence vaut 1.
Toujours en utilisant la question précédente, pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n(x^2)^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$$

3. Notons R le rayon de convergence de la série entière. Si on pose $a_n = 2n^{(-1)^n}$, (a_n) n'est pas bornée donc $\mathrm{R} \leq 1$. De plus, $0 \leq a_n \leq 2n$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ vaut 1 donc $\mathrm{R} \geq 1$. Finalement, $\mathrm{R} = 1$.
Soit $x \in]-1,1[$. Comme la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument, on peut utiliser le théorème de sommation par paquets séparer les termes d'incices pairs et impairs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2n^{(-1)^n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2(2n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} 4nx^{4n}$$

D'une part, D'après la question précédente,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4nx^{4n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} 2n(x^2)^{2n} = \frac{4x^4}{(1-x^4)^2}$$

D'autre part, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ a pour série dérivée $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{2n}$. En notant S sa somme, on a donc

$$\mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

Comme $\mathrm{S}(0) = 0$, on obtient en primitivant,

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2(2n+1)} = 2\mathrm{S}(x^2) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2n^{(-1)^n} x^{2n} = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) + \frac{4x^4}{(1-x^4)^2}$$

Etude au bord du disque de convergence

Solution 17

---

1. On sait que $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n x^n$ vaut donc 1 d'après la règle de d'Alembert.

2. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et que la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge. Il n'y a donc pas convergence en 1.
Comme sin est croissante sur $[0,1]$, la suite (u_n) est décroissante. De plus, elle converge vers 0. Le critère spécial des séries alternées permet d'affirmer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$ converge. Il y a donc convergence en -1.

3. **Première méthode.** La fonction sin est concave sur $[0,1]$. On en déduit que $\sin(x) \geq \sin(1)x$ pour $x \in [0,1]$. Par conséquent, pour $x \in [0,1[$,

$$f(x) \geq \sin(1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}} \geq \sin(1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\sin(1)\ln(1-x)$$

On en déduit par minoration que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Deuxième méthode. Les fonctions $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ sont croissantes sur $[0,1[$. Ainsi f est-elle également croissante sur $[0,1[$. Notamment elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ en 1^-. Fixons $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Comme les f_n sont positives sur $[0,1[$,

$$\forall x \in [0,1[,\ f(x) \geq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n(x)$$

Les deux membres admettant une limite lorsque x tend vers 1^- (le deuxième membre est une somme *finie*), on obtient par passage à la limite :

$$\ell \geq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

La série à termes positifs $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge vers $+\infty$ donc, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\ell \geq +\infty$ i.e. $\ell = +\infty$.

4. Pour $x \in [0,1[$,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^n - \sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^{n+1} = u_1x + \sum_{n=2}^{+\infty}(u_n-u_{n-1})x^n$$

Première méthode. Pour $x \in [0,1]$,

$$|(u_n-u_{n-1})x^n| \leq u_{n-1}-u_n$$

Comme la série télescopique $\sum u_{n-1}-u_n$ converge, la série de fonctions de terme genéral $x \mapsto (u_n-u_{n-1})x^n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,1]$. On peut alors appliquer le théorème d'interversion limite série

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=2}^{+\infty}(u_n-u_{n-1})x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}\lim_{x\to1^-}(u_n-u_{n-1})x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}u_n-u_{n-1} = -u_1$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)f(x) = 0$. **Deuxième méthode.** La série entière $\sum(u_n-u_{n-1})x^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 puisque (u_n-u_{n-1}) est convergente (vers 0) donc bornée (on peut même montrer que le rayon de convergence vaut exactement 1). De plus, la série télescopique $\sum u_n-u_{n-1}$ converge puisque la suite (u_n) converge. On peut alors appliquer le théorème de convergence radial d'Abel pour affirmer que

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=2}^{+\infty}(u_n-u_{n-1})x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}u_n-u_{n-1} = -u_1$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)f(x) = 0$.

Solution 18

---

1. Remarquons que r_n est la somme partielle d'une série de Riemann.

- Si $\beta > 1$, (r_n) converge vers un réel strictement positif donc (b_n) également. On en déduit que $\mathrm{R} = 1$.
- Si $\beta = 1$, on montre par comparaison série/intégrale que $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ i.e. $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$. Le critère de d'Alembert montre que $\mathrm{R} = 1$.
- Si $\beta < 1$, on montre à nouveau par comparaison série/intégrale que $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}$ i.e. $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1-\beta)n^{\beta-1}$. Le critère de d'Alembert montre à nouveau que $\mathrm{R} = 1$.

2. Etudions maintenant la convergence en 1.

- Si $\beta > 1$, (b_n) ne converge pas vers 0 donc $\sum b_n$ diverge grossièrement.
- Si $\beta = 1$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$ donc, a fortiori, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ de sorte que $\sum b_n$ diverge.
- Si $\beta < 1$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\beta}{n^{1-\beta}}$ donc $\sum b_n$ converge si et seulement si $1-\beta > 1$ i.e. $\beta < 0$.

Pour récapituler, $\sum b_n$ converge si et seulement si $\beta < 0$.
Etudions maintenant la convergence en -1.

- Supposons $\beta > 1$. La suite (b_n) converge alors vers un réel strictement positif. La suite $((-1)^n b_n)$ ne tend donc pas vers 0 et la série $\sum(-1)^n b_n$ diverge grossièrement.
- Supposons $\beta \leq 1$. La suite (r_n) croît vers $+\infty$ donc la suite (b_n) décroît vers 0. Le critère des séries alternées assure la convergence de la série $\sum(-1)^n b_n$.

Solution 19

1. On montre aisément par récurrence que (a_n) est strictement positive. Une étude de fonction montre également que la fonction $f : x \in]-1,+\infty[\mapsto \ln(1+x) - x$ est négative. On en déduit que (a_n) est décroissante. Le théorème de la limite monotone permet alors d'affirmer que (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. Par continuité de $x \mapsto \ln(1+x)$, $\ell = \ln(1+\ell)$. L'étude de f montre qu'elle ne s'annule qu'en 0 de sorte que $\ell = 0$.
   On en déduit que $a_{n+1} = \ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ donc le rayon de convergence de $\sum a_n$ vaut 1 d'après la règle de d'Alembert.

2. On a vu dans la question précédente que (a_n) était décroissante et convergeait vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.
   On va maintenant calculer un équivalent de a_n. Comme (a_n) converge vers 0,
   $$a_{n+1} = \ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{=} a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2) \underset{n\to+\infty}{=} a_n\left(1 - \frac{1}{2}a_n + o(a_n)\right)$$
   Par conséquent,
   $$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{a_n\left(1-\frac{1}{2}a_n + o(a_n)\right)} - \frac{1}{a_n}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{a_n\left(1-\frac{1}{2}a_n + o(a_n)\right)} - \frac{1}{a_n}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{a_n}\left(1+\frac{1}{2}a_n + o(a_n)\right) - \frac{1}{a_n}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + o(1)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\end{aligned}$$
   Par sommation de relation d'équivalence pour des séries à termes positifs divergentes,
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$
   On en déduit que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ puis que la série $\sum a_n$ diverge par comparaison à une série de Riemann.

Solution 20

1. Pour tout entier $n \geq 2$,
   $$\frac{|(-1)^{n+1}\ln(n+1)|}{|(-1)^n \ln(n)|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
   D'aprè la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq1}(-1)^n \ln(n) x^n$ vaut 1.

2. Soit $x \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned}(1+x)\mathrm{S}(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln(n)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln(n)x^{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(n+1)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(n)x^{n+1} \qquad \text{par changement d'indice et car } \ln(1)=0\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{S}(x) = \frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$$

3. **Première méthode.** Soit $x \in [0,1]$. La suite de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$ décroît vers 0 donc la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Elle converge et on peut majorer son reste en valeur absolue

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)x^{k+1}\right| \leq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)x^{n+2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Le reste converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$. La série entière $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$ converge donc uniformément sur $[0,1]$: elle est donc continue sur $[0,1]$. En particulier, elle est continue en 1 de sorte que

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Deuxième méthode. Comme la suite $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ est décroissante de limite nulle, la série $\sum(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$ vaut 1 (utiliser la règle de d'Alembert par exemple). D'après le théorème de convergence radiale d'Abel,

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$, on en déduit par produit que

$$\lim_{x\to 1}\mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

4. Posons $\mathrm{S}_\mathrm{N} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. On sait déjà que (S_N) converge. Pour déterminer sa limite, il suffit donc de déterminer la limite de

(S_{2N}).

$$\begin{aligned}
S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \ln(2n+1) + \ln(2n-1) - 2\ln(2n) \\
&= \ln(2N+1) + 2\sum_{n=1}^{N} \ln(2n-1) - 2\sum_{n=1}^{N} \ln(2n) \\
&= \ln(2N+1) + 2\sum_{n=1}^{2N} \ln(n) - 4\sum_{n=1}^{N} \ln(2n) \\
&= \ln(2N+1) + 2\ln((2N)!) - 4N\ln(2) - 4\ln(N!) \\
&= \ln\left(\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{2^{4N}(N!)^4}\right)
\end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling,

$$N! \underset{N\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N} \cdot N^N \cdot e^{-N}$$

donc

$$\begin{aligned}
((2N)!)^2 &\underset{N\to+\infty}{\sim} 4\pi N (2N)^{4N} e^{-4N} \\
(N!)^4 &\underset{N\to+\infty}{\sim} 4\pi^2 N^2 N^{4N} e^{-4N}
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{2^{4N}(N!)^4} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty} S_{2N} = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

puis

$$\lim_{x\to1} S(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

Solution 21

1. On prouve aisément par récurrence que (a_n) est strictement positive. De plus, un argument de concavité montre que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$: la suite (a_n) est donc décroissante. D'après le théorème de convergence monotone, (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. Par continuité de $f : x \mapsto \ln(1+x)$, $\ln(1+\ell) = \ell$. Une étude rapide de $x \mapsto \ln(1+x) - x$ montre que 0 est l'unique point fixe de f. AInsi $\ell = 0$.

2. Comme (a_n) converge vers 0, $\ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut 1.

3. Il s'agit d'étudier la convergence en -1 et 1.
La série $\sum(-1)^n a_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées car (a_n) est décroissante de limite nulle : cette série converge.
Remarquons que

$$\ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{=} a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2) \underset{n\to+\infty}{=} a_n\left(1-\frac{a_n}{2}+o(a_n)\right)$$

Par conséquent

$$\frac{1}{a_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{1-\frac{a_n}{2}+o(a_n)} = \frac{1}{a_n}\left(1+\frac{a_n}{2}+o(a_n)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}+o(1)$$

Ainsi $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$. Or la série $\sum \frac{1}{2}$ diverge. Par sommation de relation d'équivalence pour des séries à termes positifs divergentes, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}$$

ou encore

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

Ainsi

$$\frac{1}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

puis

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

On en déduit que la série $\sum a_n$ diverge par critère de Riemann.

Le domaine de définition de $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donc $]-1,1]$.

Solution 22

La série entière $\sum \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ a pour rayon de convergence 1. De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)nx^n}{2n+1} = \arctan x$ pour tout $x \in]-1,1[$. Enfin, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. Le théorème d'Abel radial permet alors d'affirmer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to1^-} \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

Solution 23

D'après l'énoncé, les séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Notons $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$ et $\mathrm{C}(x)$ leurs sommes respectives.
Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ convergent, le théorème de convergence radiale d'Abel assure que

$$\lim_{x\to1^-} \mathrm{A}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad \lim_{x\to1^-} \mathrm{B}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \qquad \lim_{x\to1^-} \mathrm{C}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

> **Remarque.** Il n'y a même pas besoin du théorème de convergence radiale d'Abel si le rayon de convergence de la série entière considérée est strictement supérieur à 1 puisqu'on sait alors qu'on a continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence et donc en 1.

Le théorème sur les produits de Cauchy pour les séries entières assure lui que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{A}(x)\mathrm{B}(x) = \mathrm{C}(x)$$

On en déduit donc que

$$\lim_{x\to1^-} \mathrm{A}(x)\mathrm{B}(x) = \lim_{x\to1^-} \mathrm{C}(x)$$

et donc

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

Solution 24

1. La série entière $\sum \frac{r^n e^{in\theta}}{n}$ a le même rayon de convergence que la série $\sum r^n e^{in\theta}$. Cette dernière série est une série géométrique de raison $re^{i\theta}$. Elle ne converge que si $|re^{i\theta}| = |r| < 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{r^n e^{in\theta}}{n}$ vaut 1. Ainsi g est définie sur $]-1,1[$.
De plus, g est dérivable sur $]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1 et pour tour $r \in]-1,1[$.
$$g'(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}e^{in\theta} = e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta} = \frac{e^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}$$

2. Pour tout $r \in]-1,1[$,
$$g'(r) = \frac{e^{i\theta}(1-re^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{e^{i\theta}-r}{r^2-2r\cos\theta+1} = -\frac{r-\cos\theta}{r^2-2r\cos\theta+1} + i\frac{\sin\theta}{(r-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$
Comme $g(0)=0$, on en déduit que
$$g(r) = -\frac{1}{2}\ln(r^2-2r\cos\theta+1) + i\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}\right)$$

3. On applique une transformation d'Abel. En posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ (on convient que $S_0 = 0$),
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik\theta}}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1})\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{S_{k-1}}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{k+1}\\ &= \frac{S_n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} S_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{S_n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k(k+1)}\end{aligned}$$
Comme $\theta \in]0,2\pi[$, $e^{i\theta} \neq 1$ et un calcul classique montre que
$$S_n = \frac{e^{i\theta}(e^{in\theta}-1)}{e^{i\theta}-1} = e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \cdot \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$
On en déduit notamment que la suite S_n est bornée. Ainsi la suite de terme général $\frac{S_n}{n+1}$ converge (vers 0). De plus, $\frac{S_n}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum \frac{S_n}{n(n+1)}$ converge. La suite de ses sommes partielles, à savoir la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k(k+1)}$ converge donc. La transformation d'Abel effectuée plus haut montre que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge i.e. la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

4. D'après la question précédente, on peut appliquer le théorème de convergence radiale d'Abel :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n} &= \lim_{r\to1^-} g(r)\\ &= -\frac{1}{2}\ln(2(1-\cos\theta)) + i\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + i\arctan\left(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)\\ &= -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\arctan\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\\ &= -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)\\ &= -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\pi-\theta}{2}\end{aligned}$$

car $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Solution 25

La série $\sum\frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées. Considérons la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de cette série entière vaut 1. Notons $S(x)$ sa somme. S est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x\in]-1,1[$, $S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}$. Par décomposition en éléments simples,

$$\forall x\in]-1,1[,\ S'(x)=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2-x}{3(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}$$

Puisque $S(0)=0$,

$$\forall x\in]-1,1[,\ S(x)=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

D'après le théorème de convergence radiale d'Abel

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to1^-}S(x)=\frac{1}{3}\ln(2)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

Solution 26

La série $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées. Considérons la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. On sait que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1 et que sa somme est $\arctan x$. D'après le théorème de convergence radiale d'Abel :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{x\to1^-}\arctan(x)=\frac{\pi}{4}$$

Solution 27

Soient $x\in[0,R[$ et $n\in\mathbb{N}$. Comme la série à termes positifs $\sum a_n x^n$ converge vers $f(x)$, $\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\le f(x)$. Comme la somme du membre de gauche comporte un nombre fini de termes, on obtient en passant à la limite, $\sum_{k=0}^{n}a_k R^k\le\ell$. Comme la suite $\sum a_n R^n$ est à termes positifs, elle converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n \leq \ell$.

Par ailleurs, pour $x \in [0, \mathrm{R}]$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n$. Par passage à la limite, $\ell \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n$. Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n = \ell$.

Solution 28

---

1. On vérifie aisément que la suite de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est décroissante de limite nulle et tend vers 0. Le critère des séries alternées montre que la série $\sum a_n$ converge.
Notons S_n la somme partielle de rang n de la série $\sum a_n$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k)^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{4^n (n!)^2}\right) \\
&= \ln\left((2n+1)\cdot\frac{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2}{2^{2n}(n!)^2}\right) \\
&= \ln\left((2n+1)\cdot\frac{\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2}{2^{2n}n(n!)^2}\right) \\
&= \ln\left((2n+1)\cdot\frac{((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4}\right)
\end{aligned}$$

On conclut avec la formule de Stirling que $\mathrm{S}_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$. On sait que (S_n) converge donc (S_n) converge aussi vers $\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$. Finalement, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

2. Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$, on montre aisément avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ vaut 1. En notant D le domaine de définition de f, on a donc $]-1,1[\subset \mathrm{D} \subset [-1,1]$. D'après la question précédente, f est définie en 1. De plus, $(-1)^n a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc f n'est pas définie en -1 par comparaison à une série à termes positifs divergente. On a donc $\mathrm{D} =]-1,1]$.
De plus, f est continue sur $]-1,1[$ comme somme d'une série entière de rayon de convergence 1. Enfin, f est continue en 1 en vertu du théorème de convergence radiale d'Abel. f est donc continue sur D.
Remarquons que $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + b_n$ où $b_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = -\ln(1+x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

Mais comme $b_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\sum (-1)^n b_n$ converge vers un certain réel S. En vertu du théorème de convergence radiale d'Abel,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n \underset{x\to(-1)^+}{\longrightarrow} \mathrm{S}$$

> **Remarque.** On peut aussi utiliser le fait que $\sum b_n x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$ pour arriver au même résultat.

On en déduit que

$$f(x) \underset{x\to(-1)^+}{=} -\ln(1+x) + \mathrm{S} + o(1)$$

A fortiori, $f(x) \underset{x\to(-1)^+}{\sim} -\ln(1+x)$.

Equations différentielles

Solution 29

---

1. arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et sh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ par composition. De plus,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{ch}(\arcsin x)$$

puis

$$\forall x \in]-1,1[,\ f''(x) = \frac{1}{1-x^2}\operatorname{sh}(\arcsin x) + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{ch}(\arcsin x) = \frac{1}{1-x^2}f(x) + \frac{x}{1-x^2}f'(x)$$

ou encore

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f''(x) - xf'(x) - f(x) = 0$$

2. Supposons que f soit développable en série entière sur $]-1,1[$ et notons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. D'après l'équation différentielle vérifiée par f,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

ou encore

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+1)a_n\right]x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}a_n$$

Or $a_0 = f(0) = 1$ et $a_1 = f'(0) = 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = \frac{\prod_{k=1}^n\left[(2k-1)^2+1\right]}{(2n+1)!}$$

Réciproquement, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\prod_{k=1}^n\left[(2k-1)^2+1\right]}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ vaut bien 1 (règle de d'Alembert) et, en reprenant le raisonnement précédent en sens inverse, sa somme est bien solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases}(1-x^2)y'' - xy' - y = 0\\ y(0) = 0\\ y'(0) = 1\end{cases}$$

Par unicité de la solution de ce problème de Cauchy,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{\prod_{k=1}^n\left[(2k-1)^2+1\right]}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Solution 30

1. On sait que $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sont développables en séries entières et que le rayon de convergence de ces développements en séries entières vaut 1. Par produit de Cauchy, f est développable en série entière et le rayon de convergence de ce développement en série entière est au moins égal à 1.

2. On constate que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ou encore

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$$

3. Comme f est développable en série entière sur $]-1,1[$, il existe donc $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

En reportant dans l'équation différentielle précédente, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 1$$

ou encore

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+1)a_{n+1} - na_{n-1}\right]x^n = 1$$

Par unicité du développement en série entière, $a_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a_{n+1} - na_{n-1} = 0$$

Notamment,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}a_{2n-1}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

par ailleurs, $a_0 = f(0) = 0$ donc $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Il est classique de montrer que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^{2n}$$

Comme arcsin est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nulle en 0,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{2n}{n}x^{2n+1}$$

Par produit de Cauchy,

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\right)x^{2n+1}$$

puis, par unicité du développement en série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Solution 31

1. Posons $a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$. On utilise la règle de d'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

Le rayon de convergence est donc 4.

2. Soit $x \in]-4,4[$.

$$\begin{aligned}
x(x-4)\mathrm{S}'(x) + (x+2)\mathrm{S}(x) &= x(x-4)\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1} + (x+2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \\
&= 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[na_{n-1} - (4n-2)a_n\right]
\end{aligned}$$

Or $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n\binom{2n}{n} = 2n\binom{2n-1}{n-1} = 2n\binom{2n-1}{n} = 2(2n-1)\binom{2n--2}{n-1}$$

i.e. $na_{n-1} = (4n-2)a_n$. Ainsi

$$x(x-4)\mathrm{S}'(x) + (x+2)\mathrm{S}(x) = 2$$

3. Sur $]0,4[$, l'équation différentielle équivaut à

$$y' + \frac{x+2}{x(x-4)}y = \frac{2}{x(x-4)}$$

L'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_\mathrm{H})$ associée à $(\mathcal{E})$ est donc

$$y' + \frac{x+2}{x(x-4)}y = \frac{2}{x(x-4)}$$

Tout d'abord

$$\frac{x+2}{x(x-4)} = \frac{3}{2(x-4)} - \frac{1}{2x}$$

On en déduit que les solutions de l'équation homogène sur $]0,4[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{\lambda\sqrt{x}}{(\sqrt{4-x})^3}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Calcul laborieux mais sans dificulté.

5. On emploie alors la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulère de $(\mathcal{E})$. On recherche une solution de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}$ avec λ dérivable sur $]0,4[$. On aboutit à la condition

$$\frac{\lambda'(x)\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}} = \frac{2}{x(x-4)}$$

ou encore

$$\lambda'(x) = \frac{-2\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$$

D'après la question précédente, on peut donc choisir

$$\lambda(x) = 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4\arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)$$

Une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sur $]0,4[$ est donc

$$x \mapsto \frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]0,4[,\ \mathrm{S}(x) = \frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + \frac{\lambda\sqrt{x}}{(\sqrt{4-x})^3}$$

La continuité de S en 0 ne donne aucune condition sur λ. On considère donc la dérivabilité de S en 0.

$$\frac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x-0} = \frac{1}{4-x} + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(4-x)^3}}\left(\lambda - 4\arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)\right)$$

Puisque ce taux de variation admet une limite finie en 0 et que $\lim\limits_{+\infty}\arctan = \frac{\pi}{2}$, on a nécessairement $\lambda = 2\pi$. Ainsi

$$\forall x \in]0,4[,\ \mathrm{S}(x) = \frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + \frac{2\pi\sqrt{x}}{(\sqrt{4-x})^3}$$

6. Notamment

$$\sigma = \mathrm{S}(1) = \frac{4}{3} - \frac{4}{\sqrt{27}}\arctan(\sqrt{3}) + \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

Solution 32

1. Une récurrence double montre que (a_n) est positive. On en déduit que $a_{n+2} \geq a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, $a_1 \geq a_0$ donc (a_n) est croissante.
Ensuite, $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n}{n+2} \geq \frac{1}{n+2}$ et la série à termes positifs $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+2}$ diverge vers $+\infty$ donc la série télescopique $\sum a_{n+2} - a_{n+1}$ diverge également vers $+\infty$ i.e. la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

2. La suite (a_n) est strictement positive et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{n+2}$$

Mais comme (a_n) est croissante et positive

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n+2}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1$: le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ vaut donc 1.

3. Soit $x \in]-1,1[$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} \\
&= 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2} \\
&= 1 + x + x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2} \\
&= 1 + x + x(\mathrm{S}(x) - 1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}
\end{aligned}$$

S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ en tant que somme de série entière. En dérivant la relation précédente, on obtient

$$\mathrm{S}'(x) = \mathrm{S}(x) + x\mathrm{S}'(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \mathrm{S}(x) + x\mathrm{S}'(x) + x\mathrm{S}(x)$$

ou encore

$$(1-x)\mathrm{S}'(x) = (1+x)\mathrm{S}(x)$$

Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x} = -1 + \dfrac{2}{1-x}$ sur $]-1,1[$ est $x \mapsto -x - 2\ln(1-x)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{S}(x) = \frac{\lambda e^{-x}}{(1-x)^2}$$

Or $\mathrm{S}(0) = a_0 = 1$ donc $\lambda = 1$ et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{S}(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

Par produit de Cauchy

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n-k+1)}{k!} = n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} = \dfrac{1}{e}$, on en déduit que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$.

Solution 33

---

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et est donc bornée a fortiori. On en déduit que le rayon de convergence recherché est $+\infty$.

2. Par dérivation terme à terme d'une série entière

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{S}''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$$

Comme la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument, on peut utiliser le théorème de sommation par paquets :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} = \mathrm{S}(x) + \mathrm{S}'(x) + \mathrm{S}''(x)$$

3. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y'' + y' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x$ est clairement $x \mapsto \frac{e^x}{3}$. Les solutions recherchées sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{e^x}{3} + \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{S}(x) = \frac{e^x}{3} + \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

De plus, $\mathrm{S}(0) = 1$ et $\mathrm{S}'(0) = 0$ donc $\lambda + \mu + \frac{1}{3} = 1$ et $-\frac{1}{2}\lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu + \frac{1}{3} = 0$, ce qui donne $\lambda = \frac{2}{3}$ et $\mu = 0$. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{S}(x) = \frac{e^x}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

Produit de Cauchy

Solution 34

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{H}_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$. Comme ces deux séries entières ont pour rayon de convergence 1, le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{H}_n x^n$ est supérieur ou égal à 1. De plus, (H_n) ne converge pas vers 0 donc le rayon de convergence est inférieur ou égal à 1 : il vaut donc 1. Enfin, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{H}_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x}\right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Solution 35

1. On a par produit de Cauchy,

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x_n$$

et donc en mutipliant par x :

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ x\mathrm{S}(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \mathrm{S}(x) - 1$$

ou encore

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ x\mathrm{S}(x)^2 - \mathrm{S}(x) + 1 = 0$$

On en déduit que $\mathrm{S}(0) = 1$ et que si $x \neq 0$, $\mathrm{S}(x)$ est solution de l'équation du second degré $x\mathrm{Y}^2 - \mathrm{Y} + 1 = 0$ et donc

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Attention ! A priori, le signe dépend de x.

Il existe donc $\varepsilon :]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\setminus\{0\} \to \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\setminus\{0\},\ \mathrm{S}(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$$

On en déduit que

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\setminus\{0\},\ \varepsilon(x) = \frac{2x\mathrm{S}(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}$$

Comme S est continue sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, ε peut se prolonger en une fonction continue sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. Ainsi ε est continue sur l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $\varepsilon(0) = -1$ et ε est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ε est constante égale à -1 sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. Ainsi

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\setminus\{0\},\ \mathrm{S}(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

2. Classiquement,

$$\forall t \in]-1, 1[,\ \sqrt{1-t} = (1-t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n t^n$$

avec $\binom{1/2}{0} = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n!}\prod_{k=1}^{n-1}\left(k - \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

Ainsi

$$\forall t \in]-1, 1[,\ \sqrt{1-t} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} t^n$$

puis

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \sqrt{1-4t} = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n$$

On en déduit que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} x^n$$

Par unicité du développement en série entière

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

3. On ne peut pas utiliser le résultat de la question précédente puisqu'on a justement supposé $\mathrm{R} = \frac{1}{4}$ (en fait $\mathrm{R} > 0$) pour le montrer. Néanmoins, on peut en quelque sorte faire le raisonnement précédent «à l'envers». Posons donc $v_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. D'après la règle d'Alembert, la série entière $\sum v_n x^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{4}$ et, si on note $\mathrm{T}(x)$ sa somme, $\mathrm{T}(0) = 1$ et, d'après les calculs précédents,

$$\forall x \in]-1/4, 1/4[\setminus\{0\},\ \mathrm{T}(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

On en déduit que

$$\forall x \in]-1/4, 1/4[,\ x\mathrm{T}(x)^2 - \mathrm{T}(x) + 1 = 0$$

puis que $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} v_k v_{n-k}$$

Par récurrence, $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum u_n x^n$ a donc bien un rayon de convergence égal à 1/4.

Solution 36

1. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des involutions de $[\![1,n]\!]$, $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des involutions de $[\![1,n]\!]$ fixant n et $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des involutions de $[\![1,n]\!]$ ne fixant pas n. Se donner un élément de $\mathcal{B}_n$ consiste à se donner une involution de $[\![1,n-1]\!]$. Ainsi $\operatorname{card}\mathcal{B}_n = \mathrm{I}_{n-1}$. Se donner un élément de $\mathcal{C}_n$ consiste à choisir l'image k de n dans $[\![1,n-1]\!]$ ($n-1$ possibilités). L'image de k est à alors nécessairement n et il reste à se donner une permutation de l'ensemble $[\![1,n]\!] \setminus \{n,k\}$ qui est de cardinal $n-2$. Ainsi $\operatorname{card}\mathcal{C}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$. Comme $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n \sqcup \mathcal{C}_n$, $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + \mathrm{I}_{n-2}$.

2. Toute involution de $[\![1,n]\!]$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$ donc $0 \leq \mathrm{I}_n \leq n!$ i.e. $0 \leq \dfrac{\mathrm{I}_n}{n!} \leq 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{\mathrm{I}_n}{n!}x^n$ est supérieur ou égal à 1.

3. Soit $x \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{(n-1)!}x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{n!}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{n!}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n + n\mathrm{I}_{n-1}}{n!}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n-1}}{(n-1)!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!}x^{n+1} = (1+x)\mathrm{S}(x)
\end{aligned}$$

Comme $x \mapsto x + \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto 1 + x$ et $\mathrm{S}(0) = \mathrm{I}_0 = 1$,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{S}(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}} = e^x e^{\frac{x^2}{2}}$$

D'une part,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

et d'autre part

$$e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

On peut également écrire

$$e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } \begin{cases} a_{2n} = \dfrac{1}{2^n n!} \\ a_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

donc par produit de Cauchy, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} a_k = \sum_{0 \le 2k \le n} \frac{1}{(n-2k)!} a_{2k} = \sum_{0 \le 2k \le n} \frac{1}{(n-2k)! 2^k k!}$$

Par unicité du développement en série entière

$$I_n = n! c_n = \sum_{0 \le 2k \le n} \frac{n!}{(n-2k)! 2^k k!} = \sum_{0 \le 2k \le n} \frac{(2k)! \binom{n}{2k}}{2^k k!}$$

Solution 37

---

1. $0 < a_0 \le 1$ car $a_0 = 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $0 < a_k \le 1$. Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

   $$0 < \frac{1}{n-k+2} \le \frac{1}{2}$$

   et, puisque $0 < a_k \le 1$

   $$0 < \frac{a_k}{n-k+2} \le \frac{a_k}{2} \le \frac{1}{2}$$

   Par conséquent,

   $$0 < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

   et enfin

   $$0 < \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \le \frac{1}{2}$$

   A fortiori, $0 < a_{n+1} \le 1$.
   Par récurrence forte : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in]0, 1]}$.

2. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \le 1$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de la série entière géométrique $\sum x^n$, qui vaut 1.
   $\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est supérieur ou égal à 1.}}$

3. **a.** On applique la règle de d'Alembert :

   $$\lim_{n \to \infty} \frac{1/(n+3)}{1/(n+2)} = 1$$

   $\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{x^n}{n+2} \text{ vaut 1.}}$

   b. On en déduit que :

   - $\sum \frac{x^n}{n+2}$ converge lorsque $|x| < 1$,
   - $\sum \frac{x^n}{n+2}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

   Par ailleurs, pour $x = 1$, $\sum \frac{1}{n+2}$ diverge (série harmonique).
   Pour $x = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n+2}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées ($(\frac{1}{n+2})$ tend vers 0 en décroissant).
   Par conséquent, $\boxed{x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \text{ est uniquement définie sur } [-1, 1[.}$

c. Le rayon de convergence de la série entière produit de Cauchy de deux séries entières est supérieur ou égal au minimum des deux rayons de convergence. Comme ce minimum vaut 1,
$\boxed{\sum w_n x^n \text{ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1}}$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n+2-k} = (n+1)a_{n+1}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (n+1)a_{n+1}}$$

d. D'après la question précédente,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = f'(x)$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right)}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 0$ et $a_0 = 1$ donc

$$\forall x \in [0,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geq a_0 = 1 > 0$$

De plus,

$$\forall x \in [0,1[,\ \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

Or $\ln \circ f$ est une primitive de f'/f sur $[0,1[$ donc on obtient par primitivation terme à terme d'une série entière

$$\forall x \in [0,1[,\ \ln \circ f(x) = \ln \circ f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$$

Comme $f(0) = a_0 = 1$. On obtient finalement

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \ln \circ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}}$$

5. On rappelle que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

de sorte que

$$\forall x \in]-1,1[,\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

On utilise alors l'indication de l'énoncé.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0,1[,\ \ln \circ f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right) \\
&= \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ f(x) = e(1-x)^{\frac{1}{x}-1} \text{ et } f(0) = e^0 = 1}$$

6. $\frac{1}{2} \in [0,1[$, donc $\sum a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$. $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{e}{2}.}$

Solution 38

---

1. On sait que pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \qquad \frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \qquad \frac{1}{1-t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{3n}$$

Autrement dit

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad \frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n \qquad \frac{1}{1-t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

avec

$$a_n = 1 \qquad b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 3\mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les rayons de convergence de ces trois séries entière valent 1 donc, par produit de Cauchy,

$$\forall t \in]-1,1[,\ \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{\substack{(p,q,r)\in\mathbb{N}^3 \\ p+q+r=n}} a_p b_q c_r \right] t^n$$

Mais par définition de a_n, b_n et c_n

$$\sum_{\substack{(p,q,r)\in\mathbb{N}^3 \\ p+q+r=n}} a_p b_q c_r = \sum_{\substack{(p,q,r)\in\mathbb{N}^3 \\ p+2q+3r=n}} 1 = p(n)$$

On en déduit bien que

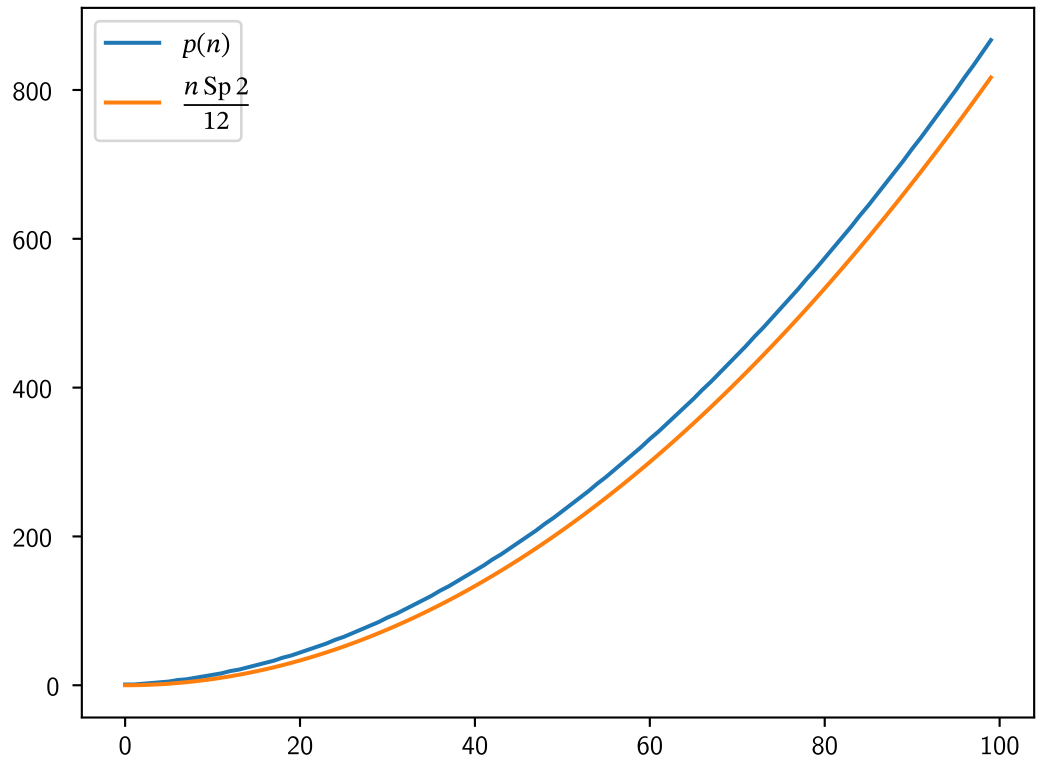
$$\forall t \in]-1,1[,\ \mathrm{G}(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

2. La décomposition en éléments simples de $\mathrm{G}(t)$ est

$$\mathrm{G}(t) = \frac{1}{(1-t)^3(1+t)(1-jt)(1-j^2t)} = \frac{\mathrm{A}}{1-t} + \frac{\mathrm{B}}{(1-t)^2} + \frac{\mathrm{C}}{(1-t)^3} + \frac{\mathrm{D}}{1+t} + \frac{\mathrm{E}}{1-jt} + \frac{\mathrm{F}}{1-j^2t}$$

A l'aide de la série géométrique et de ses dérivées, on s'aperçoit par unicité du développement en série entière que $p(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{2}n^2$. Un calcul donne $\mathrm{C} = \frac{1}{6}$ de sorte que $p(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12}n^2$.

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>>
>>> def p(n):
...     s=0
...     for z in range(n//3+1):
...         for y in range((n-3*z)//2+1):
...             s+=1
...     return s
...
>>> p1=plt.plot([p(n) for n in range(100)],label=r'$p(n)$')
>>> p2=plt.plot([n**2/12 for n in range(100)],label=r'$\frac{{n^2}}{12}$')
>>> l=plt.legend()
```



Développements en série entière

Solution 39

1. Posons $q = \operatorname{card} \mathbb{K}$ et notons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré n. Posons $\mathrm{P}_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}_k} \frac{1}{1-t^{\deg \mathrm{P}}}$ pour $t \in [0, 1[$,

$$\ln(\mathrm{P}_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}_k} -\ln(1-t^k)$$

Or il est clair que $\operatorname{card} \mathcal{P}_k$ est inférieur ou égal au nombre de polynômes unitaires de degré k, c'est-à-dire q^k, donc

$$0 \leq \ln(\mathrm{P}_n(t)) \leq \sum_{k=1}^{n} -q^k \ln(1-t^k)$$

Or pour $t \in [0, 1[$, $-q^k \ln(1-t^k) \underset{k\to+\infty}{\sim} (qt)^k$. On en déduit que la série de terme général $-q^k \ln(1-t^k)$ converge pour $t \in [0, \frac{1}{q}[$. Il en est donc de même pour la suite $(\ln(\mathrm{P}_n(t)))$ et donc pour le produit infini définissant $\zeta(t)$. La fonction ζ est donc définie sur $\left[0, \frac{1}{q}\right[$.

2. On va montrer que pour $t \in \left[0, \frac{1}{q}\right[$,

$$\zeta(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^k t^k$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{Q}_n$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré inférieur ou égal à n. Fixons $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et remarquons que

$$\prod_{\mathrm{P}\in\mathcal{Q}_\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{M}} t^{k \deg \mathrm{P}} = \sum_{k\in[\![0,\mathrm{M}]\!]^{\mathcal{Q}_n}} t^{\deg \mathrm{Q}_k}$$

avec $\mathrm{Q}_k = \prod_{\mathrm{P}\in\mathcal{Q}_n} \mathrm{P}^{k_\mathrm{P}}$. Tout d'abord, on sait que tout polynôme unitaire de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ s'écrit de manière unique sous la forme $\prod_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}} \prod_{k\in\mathbb{N}^{(\mathcal{P})}} \mathrm{P}^{k_\mathrm{P}}$ (où $\mathbb{N}^{(\mathcal{P})}$ désigne classiquement l'ensemble des familles presque nulles de $\mathbb{N}^{\mathcal{P}}$). De plus, il existe exactement q^n polynômes unitaires de degré n. On en déduit :

$$\prod_{\mathrm{P}\in\mathcal{Q}_\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{M}} t^{k \deg \mathrm{P}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} q^n t^n$$

Enfin la décomposition en facteurs irréductibles unitaires d'un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de degré inférieur ou égal à N fait intervenir des polynômes irréductibles unitaires de degré au plus N donc

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} q^n n t^n \leq \prod_{\mathrm{P}\in\mathcal{Q}_\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{M}} t^{k \deg \mathrm{P}}$$

En faisant tendre M vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} q^n t^n \leq \prod_{\mathrm{P}\in\mathcal{Q}_\mathrm{N}} \frac{1}{1-t^{\deg \mathrm{P}}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} q^n t^n$$

Il suffit alors de faire tendre N vers $+\infty$ pour avoir le résultat voulu.

> **Remarque.** On a en fait prouvé que $\zeta(t) = \dfrac{1}{1-qt}$ pour $t \in \left[0, \dfrac{1}{q}\right[$.

Solution 40

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le développement en série de l'exponentielle donne

$$e^{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{n!k!}$$

On montre alors que la famille $\left(\dfrac{(nx)^k}{n!k!}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\dfrac{(nx)^k}{n!k!}\right|$ converge et a pour somme $\dfrac{e^{n|x|}}{n!}$ puis, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{e^{n|x|}}{n!}$ converge également. On peut alors permuter les deux sommes dans l'expression de e^{e^x} de sorte que

$$e^{e^x} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{n!k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}\right) x^k$$

Ceci montre bien que f est développable en série entière en 0 et

$$\mathrm{A}_k = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

Solution 41

Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{-t^2}\sin(tx) = e^{-t^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (tx)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-t^2} t^{2n+1}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. On va maintenant appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Les hypothèses ayant trait à la continuité par morceaux sont automatiquement réalisées. Posons

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n+1}\,\mathrm{d}t$$

Par changement de variable $u = t^2$,

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u} u^n\,\mathrm{d}u$$

Notamment, comme $e^{-u}u^n = o(1/u^2)$, cette seconde intégrale converge et donc la première également. Par intégration par parties, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_{n-1}$$

Comme $\mathrm{I}_0 = \frac{1}{2}$, $\mathrm{I}_n = \frac{n!}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-t^2} t^{2n+1} \right| \mathrm{d}t = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{I}_n = \frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum \frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n+1}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{I}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n! x^{2n+1}}{2(2n+1)!}$$

Il s'agit bien du développement en série entière de f. Son rayon de convergence est infini puisqu'il est valide pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ou appliquer la règle de d'Alembert).

Solution 42

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^n$$

où

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n)^2 (n!)^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

Finalement

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} x^n$$

Solution 43

Remarquons que $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x - e^{i\theta})((x - e^{-i\theta}))$ donc

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[,\ f(x) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - e^{i^t e}} - \frac{1}{x - e^{-i\theta}}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{1 - xe^{-i\theta}}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta} - e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-in\theta}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{2i}\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)\theta)x^n
\end{aligned}$$

Solution 44

Remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car le discriminant du trinôme $\mathrm{X}^2 - \sqrt{2}\mathrm{X} + 1$ est strictement négatif. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} = \frac{2x - \sqrt{2}}{\left(x - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(x - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)} = \frac{1}{x - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{1}{x - e^{-\frac{i\pi}{4}}} = -\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{1 - xe^{-\frac{i\pi}{4}}} - \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{1 - xe^{\frac{i\pi}{4}}}$$

Or on sait que pour tout nombre complexe z tel que $z < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Ainsi pour tout $x \in]-1,1[$

$$f'(x) = -e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-\frac{ni\pi}{4}} - e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{ni\pi}{4}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{-\frac{ni\pi}{4}} - \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{\frac{ni\pi}{4}} = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^{n-1}$$

Comme $f(0) = 0$, on obtient en intégrant,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n} x^n$$

Solution 45

1. Posons $u_n(x) = e^{-n+n^2 ix}$. Les u_n sont clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $u_n^{(k)}(x) = n^{2k} i^k e^{-n+n^2 ix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n^{(k)}\|_\infty = n^{2k}e^{-n}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{2k}e^{-n}$ converge ($n^{2k}e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2)$). La série $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Supposons que g soit développable en série entière. Il existerait donc $\mathrm{R} > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[,\ g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

   D'après la question précédente

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0) = i^k \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k}e^{-n}$$

   donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\right| = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k}e^{-n} \geq \frac{k^{2k}e^{-k}}{k!} = \frac{k^k}{k!} \cdot k^k e^{-k} \geq k^k e^{-k}$$

   Notamment pour $r > 0$,

$$\left|\frac{g^{(k)}(0)}{k!} r^k\right| \geq \left(\frac{kr}{e}\right)^k$$

   donc

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{g^{(k)}(0)}{k!} r^k\right| = +\infty$$

   ce qui contredit la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} r^k$. g n'est donc pas développable en série entière.

Solution 46

1. On décompose en éléments simples :

$$f(z) = \frac{1}{(1-2z)(1-3z)} = \frac{3}{1-3z} - \frac{2}{1-2z}$$

   D'une part

$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^n$$

   avec rayon de convergence $\frac{1}{3}$.
   D'une part

$$\frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$$

avec rayon de convergence $\frac{1}{2}$.
Par conséquent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{n+1} - 2^{n+1}) z^n$$

Et comme $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$, le rayon de convergence est $\min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

2. Remarquons que

$$g(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln(1 - x)$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{2^n n}$$

avec rayon de convergence 2 et

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

avec rayon de convergence 1. Ainsi

$$g(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} + \frac{1}{n}\right) x^n$$

avec rayon de convergence $\min(1, 2) = 1$.

3. Tout d'abord

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

avec rayon de convergence infini. Par «primitivation»

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}$$

avec rayon de convergence infini également.

Solution 47

---

1. Supposons qu'une telle fonction f existe. On montre alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = f(q^n x) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + q^k x}{1 - q^k x}$$

Fixons $x \in]-1, 1[$. Comme $q \in]-1, 1[$, $\lim_{n \to +\infty} f(q^n x) = f(0) = 1$ par continuité de f en 0. Posons $u_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + q^k x}{1 - q^k x}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que la suite $(u_n(x))$ est strictement positive. De plus,

$$\ln(u_n + 1(x)) - \ln(u_n(x)) = \ln(1 + q^n x) - \ln(1 - q^n x) \underset{n \to +\infty}{\sim} 2q^n x$$

On en déduit que la série télescopique $\sum \ln(u_n + 1(x)) - \ln(u_n(x))$ converge. Par conséquent, la suite $(\ln(u_n(x)))$ converge puis la suite $(u_n(x))$ converge également. Ona donc nécessairement $f(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)$, ce qui permet de conclure à l'unicité de f.

Posons maintenant $u_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + q^k x}{1 - q^k x}$ pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme précédemment, pour tout $x \in]-1, 1[$, la suite $(u_n(x))$ converge vers un réel que l'on note $f(x)$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$, $u_{n+1}(x) = \frac{1 + x}{1 - x} u_n(qx)$ donc $f(x) = \frac{1 + x}{1 - x} f(qx)$ par passage à la limite.

Démontrons enfin que f est continue en 0 (en fait sur $]-1,1[$). Tout d'abord, les fonctions $\ln \circ u_{n+1} - \ln \circ u_n$ sont continues sur $]-1,1[$. Fixons $a \in [0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-a,a]$,

$$|\ln(u_{n+1}(x)) - \ln(u_n(x))| \leq 2\max\{\ln(1+|q|^n a), -\ln(1-|q|^n a)\} \leq 2|q|^n a$$

On en déduit que la série $\sum \ln \circ u_{n+1} - \ln \circ u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a,a]$. Ainsi sa somme $\ln \circ f$ est continue sur $]-1,1[$. Par continuité de l'exponentielle, f est donc également continue sur $]-1,1[$ et donc a fortiori en 0.

2. Supposons que f soit développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$. Notons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ son développement en série entière. Puisque $(1-x)f(x) = (1+x)f(qx)$ pour tout $x \in]-r,r[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^{n+1}$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} q^{n-1} x^n$$

ou enfin

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n q^n - a_{n-1} q^{n-1}) x^n$$

Par unicité du développement en série entière

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n - a_{n-1} = a_n q^n - a_{n-1} q^{n-1}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1-q^{n-1}}{1-q^n} a_{n-1}$$

De plus, on a $a_0 = f(0) = 1$.
Réciproquement, considérons la suite (a_n) telle que $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1-q^{n-1}}{1-q^n} a_{n-1}$$

Comme $q \in]-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = 1$. D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1. Posons alors $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$. Alors $g(0) = 1$ et g est continue sur $]-1,1[$ donc en 0. Par ailleurs, en reprenant «à l'envers» ce qui précède, on montre que

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \frac{1+x}{1-x} g(qx)$$

D'après l'unicité prouvée à la première question, $f = g$. Ainsi f est développable en série entière et cette série entière a pour rayon de convergence 1.

> **Remarque.** La deuxième question prouve en fait la partie «existence» de la première question. En étant un peu malin, on aurait pu rechercher une fonction f développable en série entière dans la première question.

Divers

Solution 48

Par souci de simplicité, on confondra les fractions rationnelles et leurs fonctions rationnelles associées.

Montrons tout d'abord qu'une fraction rationnelle est développable en série entière en 0 si et seulement si elle n'admet pas 0 pour pôle.
Si une fraction rationnelle est développable en série entière en 0, il est clair qu'elle n'admet pas 0 pour pôle.
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Il est clair que $\frac{1}{X-a}$ est développable en série entière en 0. Par dérivations successives, $\frac{1}{(X-a)^n}$ est également développable

en série entière en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant une décomposition en éléments simples, on prouve qu'une fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle est développable en série entière en 0 de rayon de convergence le minimum des modules de ses pôles.

Soient $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions développables en série entière en 0 et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fractions rationnelles de $\mathbb{C}(\mathrm{X})$ n'admettant pas 0 pour pôle. $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$.
Notons T l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui à une fonction développable en série entière associe la suite des coefficients de son développement en série entière. T est bien définie par unicité du développement en série entière. De plus, T est clairement linéaire et injective.
Notons enfin S l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui à une suite (u_n) associe la suite (u_{n+1}).

Remarquons qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire si et seulement si il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul tel que $(u_n) \in \operatorname{Ker} \mathrm{P}(\mathrm{S})$. On en déduit en particulier que l'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. En effet, si (u_n) et (v_n) sont récurrentes linéaires, il existe $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $(u_n) \in \operatorname{Ker} \mathrm{P}(\mathrm{S})$ et $(v_n) \in \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$. Mais alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$\lambda(u_n) + \mu(v_n) \operatorname{Ker} \mathrm{P}(\mathrm{S}) + \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S}) \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{PQ})(\mathrm{S})$$

et donc $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$ est récurrente linéaire.

Soit $\mathrm{G} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Alors $\mathrm{T}(\mathrm{G})$ est une suite presque nulle donc récurrente linéaire.
Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On montre classiquement que

$$\operatorname{Ker}\left(\mathrm{S} - \frac{1}{a} \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}\right) = \left\{\left(\frac{\mathrm{P}(n)}{a^n}\right), \mathrm{P} \in \mathbb{C}_{r-1}[\mathrm{X}]\right\}$$

Puisque $\mathrm{T}\left(\frac{1}{\mathrm{X} - a}\right) = \left(-\frac{1}{a^{n+1}}\right)$ et que

$$\frac{1}{(\mathrm{X} - a)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(\frac{1}{\mathrm{X} - a}\right)^{(r-1)}$$

on obtient en dérivant $(r-1)$ fois la série entière définissant $\frac{1}{\mathrm{X} - a}$:

$$\mathrm{T}\left(\frac{1}{(\mathrm{X} - a)^r}\right) = \left((-1)^r \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} \frac{1}{a^{n+r}}\right)$$

On a donc bien $\mathrm{T}\left(\frac{1}{(\mathrm{X} - a)^r}\right)$ de la forme $\left(\frac{\mathrm{P}(n)}{a^n}\right)$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_{r-1}[\mathrm{X}]$. Ainsi

$$\mathrm{T}\left(\frac{1}{(\mathrm{X} - a)^r}\right) \in \operatorname{Ker}\left(\mathrm{S} - \frac{1}{a} \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}\right) = \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$$

avec $\mathrm{Q} = \left(\mathrm{X} - \frac{1}{a}\right)^r$. On en déduit que $\mathrm{T}\left(\frac{1}{(\mathrm{X} - a)^r}\right)$ est récurrente linéaire.
Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$. Alors F est la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Ce qui précède montre que $\mathrm{T}(\mathrm{F})$ est récurrente linéaire.

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{D}$ telle que $\mathrm{T}(f)$ soit une suite récurrente linéaire. Alors il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul tel que $\mathrm{T}(f) \in \operatorname{Ker} \mathrm{P}(\mathrm{S})$. Posons $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n \mathrm{Q}$ où $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ n'admet pas 0 pour racine. D'après le lemme des noyaux $\mathrm{T}(f) \in \operatorname{Ker} \mathrm{S}^n + \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$. $\mathrm{T}(f)$ est donc la somme d'une suite presque nulle et d'une suite de $\operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$. Il existe donc $\mathrm{G} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $g \in \mathcal{D}$ tels que $f = \mathrm{G} + g$ avec $\mathrm{G} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{T}(g) \in \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$.
Si Q est constant (non nul), alors $\mathrm{T}(g)$ est nulle et g est nulle par injectivité de T. Dans ce cas, $f = \mathrm{G} \in \mathcal{F}$.
Sinon, on écrit la décomposition en facteurs irréductibles de Q :

$$\mathrm{Q} = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_i)^{r_i}$$

où les a_i sont non nuls. Posons $q = \deg \mathrm{Q}$. On montre que $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S}) = q$ en considérant l'isomorphisme $\left\{\begin{array}{ccc} \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^q \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, \dots, u_{q-1}) \end{array}\right.$.
La famille $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{(\mathrm{X} - a_i)^{k_i}}\right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq k_i \leq r_i}}$ est libre et T est injective donc la famille $\mathrm{T}(\mathcal{B})$ est libre. De plus, on a montré plus haut que

$$\mathrm{T}\left(\frac{1}{(\mathrm{X} - a_i)^{r_i}}\right) \in \operatorname{Ker}\left(\mathrm{S} - \frac{1}{a_i} \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^n}\right)^{r_i} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$$

Ainsi $\mathrm{T}(\mathcal{B})$ est une famille de vecteurs de $\operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$. De plus, elle possède q éléments : c'est donc une base de $\operatorname{Ker} \mathrm{Q}(\mathrm{S})$. Ainsi $\mathrm{T}(g) \in \operatorname{vect}(\mathrm{T}(\mathcal{B})) = \mathrm{T}(\operatorname{vect}(\mathcal{B}))$. Par injectivité de T, $g \in \operatorname{vect}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$ puis $f = \mathrm{G} + g \in \mathcal{F}$.

En conclusion, les suites recherchées sont les suites récurrentes linéaires.

Solution 49

---

1. L'unicité provient du fait que deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini ($\mathbb{C}$ en l'occurrence) sont égaux.
   Tout d'abord, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{P}(n)z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini car la suite de terme général $\frac{\mathrm{P}(n)z^n}{n!}$ est bornée pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   Posons $\mathrm{P}_k = \prod_{i=0}^{k-1}(\mathrm{X} - i)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ($\mathrm{P}_0 = 1$). On remarque que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $$e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}_k(n)z^n}{n!} = z^k$$
   De plus, $\deg \mathrm{P}_k = k$ et on montre alors classiquement que $(\mathrm{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Il existe donc une suite presque nulle (a_k) de complexes telle que $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\mathrm{P}_k$. En posant $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\mathrm{X}^k$, on a donc
   $$e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(n)z^n}{n!} = \mathrm{Q}(z)$$
2. La question précédente montre que u est bien une application de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ dans lui-même. On vérifie sans peine sa linéarité (on l'a en fait déjà utilisé). On a même montré que l'endomorphisme u envoie la base $(\mathrm{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ sur la base canonique de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$: c'est donc un automorphisme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
3. Notons λ une valeur propre de u et P un polynôme associé à cette valeur propre. Posons $d = \deg \mathrm{P}$. Il existe alors $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ tel que $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k\mathrm{P}_k$ puisque $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_d)$ est une base de $\mathbb{C}_d[\mathrm{X}]$. Notamment $a_d \neq 0$ puisque $\deg \mathrm{P} = d$. Or $u(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{d} a_k\mathrm{X}^k$ donc en identifiant le coefficient de X^d dans $u(\mathrm{P})$ et $\lambda\mathrm{P}$, on obtient $a_d = \lambda a_d$ et donc $\lambda = 1$. On a donc $\sum_{k=0}^{d} a_k(\mathrm{P}_k - \mathrm{X}^k) = 0$. Si l'on suppose $d \geq 2$, on obtient $\sum_{k=2}^{d} a_k(\mathrm{P}_k - \mathrm{X}^k)$ car $\mathrm{P}_0 = \mathrm{X}^0$ et $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^1$. Or $\deg \mathrm{P}_k - \mathrm{X}^k = k - 1$, donc la famille $(\mathrm{P}_2 - \mathrm{X}^2, \dots, \mathrm{P}_d - \mathrm{X}^d)$ est libre de sorte $a_2 = \dots = a_d = 0$, ce qui contredit le fait que $a_d \neq 0$. Ainsi $d \leq 1$. Donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est inclus dans $\mathbb{C}_1[\mathrm{X}]$. On vérifie sans peine l'inclusion réciproque.
   La seule valeur propre de u est donc 1 et le sous-espace propre associé est $\mathbb{C}_1[\mathrm{X}]$.

Solution 50

---

1. Soit $z \in \mathrm{D}$. Puisque les a_n sont réels, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$. Ainsi, si $z \in \mathbb{R}$,
   $$\overline{f(z)} = f(\overline{z}) = f(z)$$
   de sorte que $f(z) \in \mathbb{R}$.
   Réciproquement, si $z \in \mathrm{D}$ et $f(z) \in \mathbb{R}$, alors
   $$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = f(z)$$
   et donc $z = \overline{z}$ par injectivité de f, puis $z \in \mathbb{R}$.
2. Posons $\mathrm{H}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $\mathrm{H}^- = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z) < 0\}$. D'après la question précédente, $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \mathrm{H}^+ \sqcup \mathrm{H}^-$. Or f est continue sur D et $\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+$ est une partie connexe par arcs (et même convexe) de D en tant qu'intersection de deux convexes. Ainsi $f(\mathrm{D})$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En particulier, $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+) \subset \mathrm{H}^+$ ou $f(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}^+) \subset \mathrm{H}^-$.
   De plus, pour $r \in]-1, 1[$,
   $$\operatorname{Im}(f(ir) = r + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_{2n+1} r^{2n+1}$$

En particulier, $\operatorname{Im}(f(ir)) \underset{r\to0}{\sim} r$. Puisque deux fonctions équivalentes en 0 sont de même signe au voisinage de 0, il existe $r\in]0,1[$ tel que $\operatorname{Im}(f(ir))>0$. On en déduit donc que $f(\mathrm{D}\cap\mathrm{H}^+)\subset\mathrm{H}^+$.
De la même manière, $f(\mathrm{D}\cap\mathrm{H}^-)\subset\mathrm{H}^+$ ou $f(\mathrm{D}\cap\mathrm{H}^-)\subset\mathrm{H}^-$. A nouveau, $\operatorname{Im}(f(ir)) \underset{r\to0}{\sim} r$ et donc il existe $r\in]-1,0[$ tel que $\operatorname{Im}(f(ir))<0$, de sorte que $f(\mathrm{D}\cap\mathrm{H}^-)\subset\mathrm{H}^-$.
On rappelle enfin que $f(\mathrm{D}\cap\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ d'après la question précédente.

Soit alors $z\in\mathrm{D}$. Si $\operatorname{Im}(z)>0$, alors $\operatorname{Im}(f(z))>0$ puisque $f(\mathrm{D}\cap\mathrm{H}^+)\subset\mathrm{H}^+$. Réciproquement, si $\operatorname{Im}(f(z))>0$, on a nécessairement $\operatorname{Im}(z)>0$ puisque $f(\mathrm{D}\cap\mathrm{H}^+)\subset\mathrm{H}^+$ et $f(\mathrm{D}\cap\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$

3. Pour simplifier, posons $a_1=1$. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Im}(f(re^{i\theta}))\sin(n\theta)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_kr^k\sin(k\theta)\sin(n\theta)$$

Posons $g_k : \theta\mapsto a_kr^k\sin(k\theta)\sin(n\theta)$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $\theta\in[0,\pi]$,

$$|g_k(\theta)|\leq|a_k|r^k$$

Comme la série entière définissant $f(r)$ converge absolument, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}g_k$ converge normalement sur $[0,\pi]$. On en déduit que

$$\mathrm{I}_n(r)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_kr^k\int_0^\pi\sin(k\theta)\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Or pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\sin(k\theta)\sin(n\theta)=\cos((k-n)\theta)-\cos((k+n)\theta)$$

On en déduit notamment que

$$\int_0^\pi\sin(k\theta)\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta=\delta_{k,n}$$

Finalement, $\mathrm{I}_n(r)=a_nr^n$.

4. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $r\in[0,1[$. Par inégalité triangulaire,

$$|a_n|r^n=|\mathrm{I}_n(r)|\leq\int_0^\pi|\operatorname{Im}(f(re^{i\theta}))||\sin(n\theta)|\,\mathrm{d}\theta\leq n\int_0^\pi|\operatorname{Im}(f(re^{i\theta}))|\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

D'après les questions **1** et **2**, $\operatorname{Im}(z)\geq0\implies\operatorname{Im}(f(z))\geq0$. Or pour $\theta\in[0,\pi]$, $\operatorname{Im}(re^{i\theta})=r\sin\theta\geq0$ donc $\operatorname{Im}(f(re^{i\theta}))\geq0$. On en déduit donc que

$$|a_n|r^n\leq n\int_0^\pi\operatorname{Im}(f(z))\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=na_1r^1=nr$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient bien $|a_n|\leq n$.

Montrons maintenant le résultat stipulant que $|\sin(n\theta)|\leq n\sin\theta$ pour tout $\theta\in[0,\pi]$. On peut en fait montrer que $|\sin(n\theta)|\leq n|\sin\theta|$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, ce qui donne le résultat par positivité de sin sur $[0,\pi]$. On procède par récurrence. Le résultat est évidemment vrai lorsque $n=0$. Supposons le vrai pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Alors

$$|\sin(n+1)\theta|=|\sin(n\theta)\cos\theta+\sin\theta\cos(n\theta)|\leq|\sin(n\theta)|+|\sin\theta|\leq(n+1)|\sin\theta|$$

ce qui permet de conclure la récurrence.

Solution 51

---

1. On rappelle que $\mathrm{S}(\mathrm{E})$ désigne l'ensemble des permutations de E et que $\operatorname{card}\mathrm{S}(\mathrm{E})=n!$. Notons $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ l'ensemble des permutations de E possédant exactement k points fixes. Alors $\mathrm{S}(\mathrm{E})=\bigsqcup_{k=0}^{n}\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$. Se donner une permutation à k point fixes correspond à se donner une partie de E à k éléments qui formeront les k points fixes et un dérangement des $n-k$ élémenst restants. Ainsi $\operatorname{card} S_k(E) = \binom{n}{k} D_{n-k}$.

Or,

$$\operatorname{card} S(E) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card} S_k(E)$$

donc

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

2. On a clairement $D_n \leq n!$ donc $0 \leq \frac{D_n}{n!} \leq 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$ est donc supérieur ou égal à 1, ce qui justifie que f est définie sur $]-1,1[$.

3. On sait que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini et a pour somme e^x. Par conséquent, par produit de Cauchy

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[,\ e^x f(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{D_k}{k!}\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{d'après la première question} \\
&= \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

Autrement dit

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

4. D'une part,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

D'autre part, en utilisant un nouveau produit de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-x}}{1-x} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

5. Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$, la dernière égalité peut aussi s'écrire

$$D_n = n! \left(\frac{1}{e} - R_n\right)$$

en posant

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Comme la série $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$ vérifie clairement le critère des séries alternées,

$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

Ainsi

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{n+1} \leq D_n \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{n+1}$$

Pour $n \geq 2$, on a

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{2} < \frac{n!}{e} - \frac{1}{3} \leq D_n \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{3} \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$$

donc D_n est bien la partie entière de $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$.
Lorsque $n = 1$, on peut remarquer que R_1 est du signe de $\frac{(-1)^1}{1!} = -1$ donc négatif. Ainsi $-\frac{1}{2} \leq R_1 \leq 0$ donc

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{2} < \frac{n!}{e} \leq D_n \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$$

A nouveau, D_n est bien la partie entière de $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$.

Solution 52

---

1. Notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion de l'énoncé. Il est clair que $u_1(x) = 1 + x$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}_n$ vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x (u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2))\ dt$$

Or

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \int_0^x (u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2))\ dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\ dt = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme la série exponentielle $\sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ converge, la série télescopique $\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$ converge également donc la suite $(u_n(x))$ converge. La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers une certaine fonction u.

2. Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que

$$\forall t \in [0, x/2],\ 0 \leq u_{n+1}(t) - u_n(t) \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$$

A nouveau la série $\sum \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$ converge donc la série de fonctions $\sum u_{n+1} - u_n$ converge normalement sur $[0, x/2]$. A fortiori, elle converge uniformément sur $[0, x/2]$. On en déduit que la suite (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[0, x/2]$. On peut alors affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x u_n(t/2)\ dt = 2 \lim_{n\to+\infty} \int_0^{x/2} u_n(t)\ dt = \int_0^{x/2} u(t)\ dt = \int_0^x u(t/2)\ dt$$

Or

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t/2)\ dt$$

donc par passage à la limite

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t/2)\,\mathrm{d}t$$

La fonction u est bien solution de (E).

3. Soit u une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ est solution de (E). Il existe donc $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. Comme la série entière $\sum a_n t^n$ converge normalement sur le segment $[0, x/2]$,

$$\int_0^x u(t/2)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{x/2} u(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{x/2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{x/2} a_n t^n\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{2^n(n+1)}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{2^n(n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1} x^n}{2^{n-1} n}$$

Par unicité du développement en série entière, $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1} n}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!}$$

Réciproquement, la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!}$ pssoède bien un rayon de convergence infini (règle de d'Alembert ou comparaison à la série exponentielle) et ce qui précède montre que sa somme est effctivement solution de (E).

Solution 53

---

1. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ vaut 1. Par conséquent, si $|t| > \sqrt{2}$, la série $\sum f_n(t)$ diverge grossièrement et si $|t| < \sqrt{2}$, elle converge. Si $|t| = \sqrt{2}$, la série $\sum f_n(t)$ diverge (série de Riemann).
Finalement, $\mathrm{D} =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

2. On sait que pour $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc, par intégration d'une série entière, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$.
Ainsi, pour $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = -\ln(1-(t^2-1)) = -\ln(2-t^2)$$

3. Remarquons que

$$\max_{[0,1]} |f_n| = |f_n(0)| = \frac{1}{n+1}$$

et $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge. La série $\sum f_n$ ne converge donc pas normalement sur $[0, 1]$.

4. Lorsque $t \in [0, 1]$, la suite de terme général $\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}$ est décroissante et converge vers 0. La série $\sum g f_n(t)$ vérifie donc le critère spécial des séries alternées. En particulier,

$$\forall t \in [0, 1],\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \leq |f_{n+1}(t)| = \frac{(1-t^2)^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

Le reste de la série $\sum f_n$ converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

5. Comme la série $\sum f_n$ converge uniformément sur le *segment* $[0,1]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge vers $-\int_0^1 \ln(2-t^2)\,dt$.

6. Il s'agit d'un simple calcul.

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \ln(2-t^2)\,dt &= -\int_0^1 \ln(\sqrt{2}-t)\,dt - \int_0^1 \ln(\sqrt{2}+t)\,dt \\
&= -\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}} \ln u\,du - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1} \ln u\,du \qquad \text{par changement de variable} \\
&= -[u\ln u - u]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}} - [u\ln u - u]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1} \\
&= 2 - 2\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from numpy import log, sqrt
>>> I=quad(lambda t: -log(2-t**2),0,1)[0]
>>> J=2-2*sqrt(2)*log(sqrt(2)+1)
>>> print(I,J)
-0.49290096056092203 -0.49290096056092203
```

Solution 54

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que les a_n ne soient pas tous nuls. Posons $m = \min\{n\in\mathbb{N},\ a_n \neq 0\}$. Alors

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k z^p = z^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+m} z^k$$

Posons alors $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+m} z^k$ de sorte que

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ f(z) = z^m g(z)$$

Par conséquent,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f(z_p) = z_p^m g(z_p)$$

Mais comme la suite (z_p) ne s'annule pas,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ g(z_p) = 0$$

g est évidemment développable en série entière donc continue en 0. Notamment, $\lim_{z\to 0} g(z) = g(0) = a_p \neq 0$. Mais comme (z_p) converge vers 0, la continuité de g en 0, montre que $g(0) = \lim_{p\to+\infty} g(z_p) = 0$, ce qui est contradictoire.

Finalement, la suite (a_n) est nulle.

2. Notons R le rayon de convergence commun de f et g. Alors $f-g$ est développable en série entière et son rayon de convergence au moins égal à R. D'après la question précédente, tous les coefficients du développement en série entière de $f-g$ son nuls. Autrement dit $f-g$ est nul sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Ainsi f et g coïncident sur leur disque ouvert de convergence commun.

Solution 55

Fixons $n\in\mathbb{N}$ et posons $\varphi_k : \theta \mapsto a_k r^k e^{i(k-n)\theta}$ de telle sorte que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(re^{i\theta})e^{-in\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(\theta)$$

Tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est continue sur le segment $[0, 2\pi]$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\varphi_k\|_\infty = |a_k|r^k$. Ainsi $\sum \|\varphi_k\|_\infty$ converge puisque $\sum a_k r^k$ converge absolument. Par conséquent, la série $\sum \varphi_k$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$. Par interversion série/intégrale,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta} \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(\theta) \, d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \varphi_k(\theta) \, d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} \, d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \cdot 2\pi\delta_{k,n} \\
&= 2\pi a_n r^n
\end{aligned}$$

Solution 56

Remarquons que la somme $\sum_{n\in A} \frac{x^n}{n!}$ est bien définie car la série exponentielle $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose alors $S : x \mapsto \sum_{n\in A} \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Posons $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!}$. Par intégration par parties, $I_{n+1} = I_n$. Donc $I_n = I_0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Comme I est fini, par linéarité de l'intégrale,
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n\in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \, dx = \operatorname{card} I$$

2. Posons $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$. Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$, le rayon de convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est également infini. On en déduit notamment que $f : x \mapsto \frac{a_n x^n}{n!} = \sum_{n\in A} \frac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par hypothèse, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Soit I une partie finie de A. Comme $I \subset A$,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sum_{n\in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leq \sum_{n\in A} \frac{x^n e^{-x}}{n!} = g(x)$$
   puis, par croissance de l'intégrale,
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n\in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \, dx \leq \int_0^{+\infty} g(x) \, dx$$
   ou encore $\operatorname{card} I \leq C$ où $C = \int_0^{+\infty} g(x) \, dx$. On en déduit que A est nécessairement fini (sinon on pourrait trouver des parties finies de A de cardinal arbitrairement grand).

3. Il n'existe pas de partie A vérifiant la condition de l'énoncé. S'il en existait une, elle serait manifestement non vide (une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle). Comme elle serait finie d'après la question précédente, l'équivalent de l'énoncé donnerait $e^x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^{p+2}}{p!}$ avec $p = \max A$. Ceci contredit les résultats sur les croissances comparées.

Solution 57

Comme $\|\cdot\|$ est une norme d'opérateur, on montre aisément par récurrence que $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathrm{A} \mapsto a_n\mathrm{A}^n$ est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ puisque ses composantes dans la base canonique de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ sont polynomiales. Soit $r \in [0, \mathrm{R}[$. On note B_r la boule fermée de centre 0 et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{B}_r,\ \|f_n(\mathrm{A})\| = |a_n|\|\mathrm{A}^n\| \leq |a_n|\|\mathrm{A}\|^n \leq |a_n|r^n$$

Or la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument sur son disque ouvert de convergence donc $\sum |a_n|r^n$ converge. On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur B_r pour tout $r \in [0, \mathrm{R}[$. Or les f_n sont continues sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ donc φ est continue sur $\mathcal{B}$.

Solution 58

---

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|w_n\|_\infty = \dfrac{|\alpha|^n}{n} \leq |\alpha|^n$. Or $|\alpha| < 1$ donc $\sum \|al\|^n$ converge donc $\sum w_n$ converge normalement et donc simplement sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, w_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $w_n'(x) = -\alpha^n \sin(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $\|w_n'\|_\infty = |\alpha|^n$ et donc $\sum w_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. On en déduit que W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{W}'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} w_n'(x)\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \sin(nx)\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \sin(nx)\\ &= -\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{inx}\right)\\ &= -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{ix}}\right) \qquad \text{car } |\alpha e^{ix}| < 1\\ &= -\frac{\alpha \sin x}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}\end{aligned}$$

2. On en déduit qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{W}(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) + \mathrm{C}$$

D'après un développement en série entière usuel,

$$\mathrm{W}(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n} = -\ln(1-\alpha)$$

On en déduit que $\mathrm{C} = 0$. La série $\sum w_n$ converge vers W uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$ donc

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,\mathrm{d}x &= -2\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{W}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} w_n(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\ &= 0\end{aligned}$$

Solution 59

Tout d'abord le rayon de convergence de la série entière définissant f est infini puisque cette série entière converge absolument (série exponentielle) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $a_n = f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor-Young

$$f^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{=} f^{(k)}(0) + f^{(k+1)}(0)x + o(x)$$

c'est-à-dire

$$f^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{=} a_k + a_{k+1}x + o(x)$$

puis

$$a_k f^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + a_k a_{k+1}x + o(x)$$

et enfin

$$a_k f^{(k)}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} a_k a_{k+1} x$$

Notamment $a_k f^{(k)}(x) - 1$ et $a_k a_{k+1}$ sont de même signe pour x au voisinage de 0^+. Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$a_k f^{(k)}(x) - 1 \leq |f^{(k)}(x)| - 1 \leq 0$$

donc $a_k a_{k+1} \leq 0$ et en fait $a_k a_{k+1} < 0$ puisque les a_n ne sont pas nuls.

2. Puisque (a_n) est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, $a_{n+1} = -a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $a_n = (-1)^n a_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = a_0 e^{-x}$$

Solution 60

1. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(re^{it})e^{-int} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-n)t} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(t)$$

où $g_k : t \mapsto a_k r^k e^{i(k-n)t}$. Alors $\|g_k\|_{\infty,[0,2\pi]} = |a_k| r^k$. Or la série entière définissant f converge absolument en tout point de $\mathbb{R}$ donc $\sum g_k$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut procéder à une interversion série/intégrale :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} g_k(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} 2\pi a_k r^k \delta_{k,n} = a_n r^n$$

2. Supposons que f soit bornée. Par inégalité triangulaire,

$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| r^n \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})e^{-int}|\ \mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty$$

Notamment,

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ |a_n| \leq \frac{\|f\|_\infty}{r^n}$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi f est constante égale à a_0.