Semaine du 31/03

1 Cours

Calcul différentiel

Différentiabilité Dérivée directionnelle (selon un vecteur). Dérivées partielles. Différentiabilité (existence d'un DL à l'ordre 1). Lien entre dufférentielle et dérivées directionnelles. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Différentielle d'une application constante, linéaire. Gradient et expression dans une base orthonormée.

Opérations sur les applications différentiables Différentielle d'une combinaison linéaire, de $\mathrm{M}(f_1, \dots, f_p)$ où M est multilinéaire et $f_1, \dots, f_p$ sont différentiables. Différentielle d'une composée d'applications différentielles. Dérivée de $f \circ \gamma$ où f est différentiable et γ est dérivable sur un intervalle.

Différentiabilité Dérivée directionnelle (selon un vecteur). Dérivées partielles. Différentiabilité (existence d'un DL à l'ordre 1). Lien entre différentielle et dérivées directionnelles. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Différentielle d'une application constante, linéaire. Gradient et expression dans une base orthonormée.

Opérations sur les applications différentiables Différentielle d'une combinaison linéaire, de $\mathrm{M}(f_1, \dots, f_p)$ où M est multilinéaire et $f_1, \dots, f_p$ sont différentiables. Différentielle d'une composée d'applications différentielles. Dérivée de $f \circ \gamma$ où f est différentiable et γ est dérivable sur un intervalle.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$ Une application est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est différentiable et que sa différentielle est continue. Une application est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle possède des dérivées partielles continues. Intégrale curviligne. Une application est constante sur un connexe par arcs si et seulement si sa différentielle y est nulle. Dérivées partielles d'ordre supérieur. Une application est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues. Théorème de Schwarz. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Tangence et orthogonalité Vecteur tangent à une partie. Ligne de niveau. Vecteurs tangents à une ligne de niveau : caractérisation par la différentielle et le gradient.

Optimisation des fonctions numériques Point critique. Si une application différentiable admet un extremum local en un point, alors il s'agit d'un point critique. Optimisation sous containte : si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ telles que la restriction de f à $\mathrm{X} = g^{-1}(\{0\})$ admet un extremum local en $x \in \mathrm{X}$ où $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$. Traduction en termes de gradient. Hessienne. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Condition nécessaire/suffisante sur le gradient et la hessienne pour qu'une application de classe $\mathcal{C}^2$ possède un extremum local.

Equations aux dérivées partielles Quelques exemples.

2 Méthodes à maîtriser

- Etudier la continuité, l'existence de dérivées partielles et la continuité des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.
- Prouver la différentiabilité et calculer la différentielle en exhibant un DL d'ordre 1.
- Calculer la différentielle à l'aide des dérivées partielles.
- Calculer le gradient à l'aide de la différentielle ou des dérivées partielles.
- Application de la règle de la chaîne pour calculer des dérivées partielles de composées.
- Rechercher des extrema globaux avec ou sans contrainte.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 33, 41, 52, 56, 57, 58