# DEVOIR À LA MAISON N°07

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1

**1** Un calcul par blocs donne $J^2 = -I_{2n}$ et on constate que $J^\top = -J$. Puisque$(-J)J = I_{2n}$, J est inversible et $J^{-1} = -J$.

**2** Tout d'abord,

$$J^\top JJ = (-J)J^2 = (-J)(-I_{2n}) = J$$

donc $J \in \mathcal{SP}_{2n}$.
Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$. Un calcul par blocs donne

$$\begin{aligned} K^\top(\alpha)JK(\alpha) &= \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_n \\ \hline \alpha In & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & -\alpha I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right) = J \end{aligned}$$

de sorte que $K(\alpha) \in \mathcal{SP}_{2n}$.

**3** Soit $U \in GL_n(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs donne à nouveau

$$\begin{aligned} L_U^\top JL_U &= \left(\begin{array}{c|c} U^\top & 0_n \\ \hline 0_n & U^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline 0_n & (U^\top)^{-1} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -U^\top \\ \hline U^{-1} & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline 0_n & (U^\top)^{-1} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -U^\top(U^\top)^{-1} \\ \hline U^{-1}U & 0_n \end{array}\right) \end{aligned}$$

Or $U^{-1}U = I_n$ et $U^\top(U^\top)^{-1} = (U^{-1}U)^\top = I_n^\top = I_n$ de sorte que $L_U^\top JL_U = J$. Ainsi $L_U \in \mathcal{SP}_{2n}$.

**4** Soi $M \in \mathcal{SP}_{2n}$. On a donc $M^\top JM = J$ puis

$$\det(J) = \det(M^\top JM) = \det(M^\top JM) = \det(M^\top)\det(J)\det(M) = \det(M)^2\det(J)$$

Or J est inversible donc $\det(J) \neq 0$ puis $\det(M)^2 = 1$. Ainsi $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

**5** Soit $(M, N) \in \mathcal{SP}_{2n}$. Alors

$$(MN)^\top JMN = N^\top(M^\top JM)N = N^\top JN = J$$

Donc $(MN) \in \mathcal{SP}_{2n}$.

**6** Soit $M \in \mathcal{SP}_{2n}$. Alors $M^\top JM = J$ donc en multipliant à gauche par $J^\top = -J$, on obtient

$$(J^\top M^\top J)M = J^\top J = -J^2 = I_{2n}$$

Ainsi M est inversible. De plus, en multipliant la relation $M^\top JM$ à gauche et à droite respectivment par $(M^\top)^{-1}$ et $M^{-1}$,

$$(M^\top)^{-1}M^\top JMM^{-1} = (M^\top)^{-1}JM^{-1}$$

ou encore

$$(MM^{-1})^\top J(MM^{-1}) = (M^\top)^{-1}JM^{-1}$$

et finalement

$$(M^\top)^{-1}JM^{-1} = I_{2n}^\top JI_{2n} = J$$

Ainsi $M^{-1} \in \mathcal{SP}_{2n}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Soit $M \in \mathcal{SP}_{2n}$. On a vu à la question précédente que $M^{-1} \in \mathcal{SP}_{2n}$ i.e. $(M^\top)^{-1}JM^{-1} = J$. En passant à l'inverse

$$((M^\top)^{-1}JM^{-1})^{-1} = J^{-1}$$

ou encore

$$(M^{-1})^{-1}J^{-1}((M^\top)^{-1})^{-1} = J^{-1}$$

Puisque $J^{-1} = -J$, $-MJM^\top = -J$, ce qui peut encore s'écrire $(M^\top)^\top JM^\top = J$. Ainsi $M^\top \in \mathcal{SP}_{2n}$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Tout d'abord

$$M^\top JM = \left(\begin{array}{c|c} A^\top & C^\top \\ \hline B^\top & D^\top \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C^\top A - A^\top C & C^\top B - A^\top D \\ \hline D^\top A - B^\top C & D^\top B - B^\top D \end{array}\right)$$

Ainsi $M \in \mathcal{SP}_{2n}$ si et seulement si

$$\begin{cases} C^\top A - A^\top C = 0_n \\ C^\top B - A^\top D = -I_n \\ D^\top A - B^\top C = I_n \\ D^\top B - B^\top D = 0_n \end{cases}$$

On remarque que la troisième relation est obtenu à partir de la deuxième par transposition donc $M \in \mathcal{SP}_{2n}$ si et seulement si

$$\begin{cases} C^\top A - A^\top C = 0_n \\ A^\top D - C^\top B = I_n \\ D^\top B - B^\top D = 0_n \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Puisque $n = 1$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $M \in \mathcal{SP}_2$ si et seulement si $M^\top JM = J$. Or $M^\top JM = (ad - bc)J = \det(M)J$. Donc $M \in \mathcal{SP}_2$ si et seulement si $\det(M) = 1$. Ainsi $\mathcal{SP}_2$ est bien l'ensemble de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Un calcul évident montre que les matrices $I_{2n}$ et $-I_{2n}$ appartiennent à $\mathcal{SP}_{2n}$. Elles commutent avec tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc, a fortiori, avec tout élément de $\mathcal{SP}_{2n}$. Elles appartiennent donc à $\mathcal{Z}$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Avec les notations de la question **2**, $L = K(1)$ et appartient donc à $\mathcal{SP}_{2n}$. On a donc $ML = LM$. Un calcul par blocs donne

$$\begin{cases} A = A + C \\ A + B = B + D \\ C = C \\ C + D = C \end{cases}$$

On en déduit donc que $C = 0_n$ et que $A = D$.

Or $L^\top = \left(\begin{array}{c|c} I_n^\top & C^\top \\ \hline B^\top & D^\top \end{array}\right) \in \mathcal{SP}_{2n}$ d'après la question **7**, donc on a également $ML^\top = L^\top M$. Un nouveau calcul par blocs donne

$$\begin{cases} A = A + B \\ B = B \\ A + C = C + D \\ B + D = D \end{cases}$$

On en déduit que $B = 0_n$.

**12** Puisque $\mathrm{C} = \mathrm{D} = 0_n$ et $\mathrm{A} = \mathrm{D}$, $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0_n \\ \hline 0_n & \mathrm{A} \end{array}\right)$. Ainsi $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{A})^2$. Or M est inversible puisque $\mathcal{SP}_{2n} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $\det(\mathrm{M}) \neq 0$ puis $\det(\mathrm{A}) \neq 0$. Finalement A est bien inversible.

**13** On sait que $\mathrm{L_U} \in \mathcal{SP}_{2n}$ d'après la question **3**. On a donc $\mathrm{ML_U} = \mathrm{L_U M}$. Puisque $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^\top & 0_n \\ \hline 0_n & \mathrm{A} \end{array}\right)$, un calcul par blocs donne encore $\mathrm{AU} = \mathrm{UA}$ et $\mathrm{A}(\mathrm{U}^\top)^{-1} = (\mathrm{U}^\top)^{-1}\mathrm{A}$. La première égalité montre donc que A commute avec toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

**14** Si $i \neq j$, $\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j}$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls puisqu'égaux à 1 donc elle est inversible. De même, si $i = j$, $\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j}$ est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls puisqu'ils valent tous 1 sauf l'un d'entre eux qui vaut 2 donc elle est à nouveau inversible. Puisque A commute avec tout élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, A commute avec tous les $\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j}$.
On en déduit que $\mathrm{AE}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{A}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors

$$(\mathrm{AE}_{i,j})_{k,l} = \mathrm{A}_{k,i}\delta j, l \qquad\qquad (\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{A})_{k,l} = \mathrm{A}_{j,l}\delta i, k$$

et donc

$$\mathrm{A}_{k,i}\delta j, l = \mathrm{A}_{j,l}\delta i, k$$

Notamment, si l'on choisit $k = i$ et $l = j$, on obtient $\mathrm{A}_{i,i} = \mathrm{A}_{j,j}$. Si l'on choisit $k = j = l \leq i$, on obtient, $\mathrm{A}_{j,i} = 0$. Ceci signifie que les coefficients non diagonaux de A sont tous nuls et que ses coefficients diagonaux sont tous égaux entre eux. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n$. Par ailleurs, la question **4** montre que $\det(\mathrm{M}) = \pm 1$. Or $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{A})^2 = \det(\lambda \mathrm{I}_n)^2 = \lambda^{2n}$. Ainsi $\lambda = \pm 1$ et $\mathrm{M} = \pm \mathrm{I}_{2n}$.
La question **10** montre que $\{-\mathrm{I}_{2n}, \mathrm{I}_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$ et l'on vient de montrer l'inclusion donc $\mathrm{Z} = \{-\mathrm{I}_{2n}, \mathrm{I}_{2n}\}$.

**15** Un calcul par blocs donne

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & \mathrm{Q} \\ \hline 0_n & \mathrm{I}_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{U} & 0_n \\ \hline \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{U}+\mathrm{QV} & \mathrm{QW} \\ \hline \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{array}\right)$$

Ainsi, en posant $\mathrm{V} = \mathrm{C}$, $\mathrm{W} = \mathrm{D}$, $\mathrm{Q} = \mathrm{BD}^{-1}$ et $\mathrm{U} = \mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C}$, on a bien l'égalité souhaitée.

**16** D'après la question **8**, $\mathrm{D}^\top\mathrm{B} = \mathrm{B}^\top\mathrm{D}$. En multipliant par $(\mathrm{D}^\top)^{-1}$ à gauche et par $\mathrm{D}^{-1}$ à droite, on obtient $\mathrm{BD}^{-1} = (\mathrm{D}^\top)^{-1}\mathrm{B}^\top = (\mathrm{BD}^{-1})^\top$. Ainsi $\mathrm{BD}^{-1}$ est bien symétrique.
D'après l'égalité de la question précédente,

$$\det(\mathrm{M}) = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & \mathrm{Q} \\ \hline 0_n & \mathrm{I}_n \end{array}\right|\left|\begin{array}{c|c} \mathrm{U} & 0_n \\ \hline \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{array}\right| = \det(\mathrm{I}_n)^2\det(\mathrm{U})\det(\mathrm{W}) = \det(\mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C})\det(\mathrm{D})$$

Le déterminant étant invariant par transposition

$$\det(\mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C}) = \det((\mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C})^\top) = \det(\mathrm{A}^\top - \mathrm{C}^\top\mathrm{B}^\top\mathrm{D}^{-1}) = \det(\mathrm{A}^\top - \mathrm{C}^\top\mathrm{BD}^{-1})$$

car $\mathrm{BD}^{-1}$ est symétrique. Ainsi

$$\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{A}^\top - \mathrm{C}^\top\mathrm{BD}^{-1})\det(\mathrm{D}) = \det((\mathrm{A}^\top - \mathrm{C}^\top\mathrm{BD}^{-1})\mathrm{D}) = \det(\mathrm{A}^\top\mathrm{D} - \mathrm{C}^\top\mathrm{B})$$

D'après la question **8**, $\mathrm{A}^\top\mathrm{D} - \mathrm{C}^\top\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$ donc $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1$.

**17** Soit $\mathrm{V} \in \operatorname{Ker}\mathrm{B} \cap \operatorname{Ker}\mathrm{D}$. Ainsi $\mathrm{BV} = \mathrm{DV} = 0$. Mais, d'après la question **8**, $\mathrm{A}^\top\mathrm{D} - \mathrm{C}^\top\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$ de sorte que

$$\mathrm{V} = \mathrm{A}^\top\mathrm{DV} - \mathrm{C}^\top\mathrm{BV} = 0$$

Ainsi $\operatorname{Ker}\mathrm{B} \cap \operatorname{Ker}\mathrm{D} = \{0\}$.

**18** Tout d'abord, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$ puisque pour $(\mathrm{U},\mathrm{V}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{U}^\top\mathrm{V}$ est une matrice carré de taille 1 donc un scalaire.
La bilinéarité provient de la linéarité de la transposition et de la bilinéarité du produit matriciel.
De plus, puisque $\mathrm{U}^\top\mathrm{V}$ est un scalaire, $(\mathrm{U}^\top\mathrm{V})^\top = \mathrm{U}^\top\mathrm{V}$ i.e. $\mathrm{V}^\top\mathrm{U} = \mathrm{U}^\top\mathrm{V}$ donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
Si on note $\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n$ les coefficients de U et $\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n$ les coefficients de V, alors $\mathrm{U}^\top\mathrm{V} = \sum_{i=1}^n \mathrm{U}_i\mathrm{V}_i$. Notamment, $\langle\mathrm{U},\mathrm{U}\rangle = \sum_{i=1}^n \mathrm{U}_i^2 \geq 0$. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positive.

Enfin, si $\langle \mathrm{U}, \mathrm{U}\rangle = 0$, la somme de termes *positifs* $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i^2$ est nulle donc ses termes sont nuls. Ainsi $\mathrm{U}_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ i.e. $\mathrm{U} = 0$. La forme bilinéaire, symétrique, positive $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc également définie : c'est un produit scalaire.

**19** D'une part

$$\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2\rangle = (\mathrm{QV}_1)^\top \mathrm{QV}_2 = (s_1 \mathrm{PV}_1)^\top \mathrm{QV}_2 = s_1 \mathrm{V}_1^\top \mathrm{P}^\top \mathrm{QV}_2$$

Mais comme $\mathrm{P}^\top \mathrm{Q}$ est symétrique, $\mathrm{P}^\top \mathrm{Q} = \mathrm{Q}^\top \mathrm{P}$ de sorte que

$$\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2\rangle = s_1 \mathrm{V}_1^\top \mathrm{Q}^\top \mathrm{PV}_2$$

D'autre part

$$\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2\rangle = (\mathrm{QV}_1)^\top \mathrm{QV}_2 = s_2 \mathrm{V}_1^\top \mathrm{Q}^\top \mathrm{PV}_2$$

Finalement,

$$s_1 \mathrm{V}_1^\top \mathrm{Q}^\top \mathrm{PV}_2 = s_2 \mathrm{V}_1^\top \mathrm{Q}^\top \mathrm{PV}_2$$

et comme $s_1 \neq s_2$, $\mathrm{V}_1^\top \mathrm{Q}^\top \mathrm{PV}_2 = 0$ puis $\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2\rangle = 0$.

**20** S'il existait $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $\mathrm{DV}_i = 0$, on aurait également $s_i \mathrm{BV}_i = 0$ puis $\mathrm{BV}_i = 0$ car $s_i \neq 0$. Ceci signifierait que $\mathrm{V}_i \in \operatorname{Ker} \mathrm{B} \cap \operatorname{Ker} \mathrm{D} = \{0\}$ (question **17**), ce qui contredirait l'énoncé puisque $\mathrm{V}_i$ est non nulle.
La question **8** nous dit que $\mathrm{D}^\top \mathrm{B} = \mathrm{B}^\top \mathrm{D}$ donc la matrice $\mathrm{B}^\top \mathrm{D}$ est symétrique. On peut donc appliquer la question **19** pour affirmer que les $\mathrm{DV}_i$ sont orthogonaux deux à deux. La famille $(\mathrm{DV}_1, \dots, \mathrm{DV}_m)$ est donc une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul : elle est libre.

**21** S'il n'existait pas de réel $\alpha$ tel que $\mathrm{D} - \alpha \mathrm{B}$ soit inversible, alors on pourrait trouver des réels $s_1, \dots, s_{n+1}$ non nuls et deux à deux distincts tels que $\mathrm{D} - s_i \mathrm{B}$ soit non inversible pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. On pourrait donc trouver des matrices colonnes $\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_{n+1}$ non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $(\mathrm{D} - s_i \mathrm{B})\mathrm{V}_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. Mais la question **20** stipulerait alors que la famille $(\mathrm{V}_1, \vdots, \mathrm{V}_n)$ serait libre, ce qui est impossible puisque $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n < n+1$.
Il existe donc bien un réel $\alpha$ tel que $\alpha$ soit inversible.

**22** D'après la question **2**, $\mathrm{K}(-\alpha) \in \mathcal{SP}_{2n}$. Ensuite, $\mathrm{K}^\top(-\alpha) \in \mathcal{SP}_{2n}$ d'après la question **7**. Enfin, d'après la question **5**, $\mathrm{K}^\top(-\alpha)\mathrm{M} \in \mathcal{SP}_{2n}$. Un produit par blocs donne

$$\mathrm{K}^\top(-\alpha)\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} - \alpha \mathrm{A} & \mathrm{D} - \alpha \mathrm{B} \end{array}\right)$$

Mais comme $\mathrm{D} - \alpha \mathrm{B}$ est inversible, on peut utiliser la question **16** pour affirmer que $\det(\mathrm{K}^\top(-\alpha)\mathrm{M}) = 1$. Or $\det(\mathrm{K}^\top(-\alpha)\mathrm{M}) = \det(\mathrm{K}^\top(-\alpha)) \det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M})$ donc $\det(\mathrm{M}) = 1$.

**23** Posons $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $\det(\mathrm{M}) = 1$ et $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathrm{J}$ donc $\mathrm{M} \notin \mathcal{SP}_4$.