Devoir à la maison n°07

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Mines-Ponts PSI 2015

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul.

La transposée d'une matrice M sera notée $\mathrm{M}^\top$.

On rappelle des résultats aux matrices définies par blocs. Si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \mathrm{D}'$ sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut effectuer des produits par blocs

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}' & \mathrm{B}' \\ \hline \mathrm{C}' & \mathrm{D}' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{AA}' + \mathrm{BC}' & \mathrm{AB}' + \mathrm{BD}' \\ \hline \mathrm{CA}' + \mathrm{DC}' & \mathrm{CB}' + \mathrm{DD}' \end{array}\right)$$

De plus la transposée de la matrice définie par blocs $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ est $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^\top & \mathrm{C}^\top \\ \hline \mathrm{B}^\top & \mathrm{D}^\top \end{array}\right)$.

On note respectivement 0_n et I_n la matrice nulle et la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I Matrices symplectiques

On note J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{J} = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{I}_n & 0_n \end{array}\right)$. On note

$$\mathcal{SP}_{2n} = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}),\ \mathrm{M}^\top\mathrm{JM} = \mathrm{J}\right\}$$

1 Calculer J^2 et $\mathrm{J}^\top$ en fonction de I_{2n} et J. En déduire que J est inversible et identifier son inverse.

2 Vérifier que $\mathrm{J} \in \mathcal{SP}_{2n}$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{K}(\alpha) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & \alpha\mathrm{I}_n \\ \hline 0_n & \mathrm{I}_n \end{array}\right) \in \mathcal{SP}_{2n}$$

3 Montrer que pour tout $\mathrm{U} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{L}_\mathrm{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{U} & 0_n \\ \hline 0_n & (\mathrm{U}^\top)^{-1} \end{array}\right) \in \mathcal{SP}_{2n}$$

4 Si $\mathrm{M} \in \mathcal{SP}_{2n}$, préciser les valeurs possibles de $\det(\mathrm{M})$.

5 Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{SP}_{2n}$ est un élément de $\mathcal{SP}_{2n}$.

6 Montrer qu'un élément de $\mathcal{SP}_{2n}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{SP}_{2n}$.

7 Montrer que si $M \in \mathcal{SP}_{2n}$, alors $M^\top \in \mathcal{SP}_{2n}$.

8 Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ avec $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$. Déterminer des relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{SP}_{2n}$.

9 *Dans cette question uniquement*, on considère que $n = 1$. Montrer que

$$\mathcal{SP}_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1\}$$

II Centre de $\mathcal{SP}_{2n}$

On s'intéresse ici au centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{SP}_{2n}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{SP}_{2n},\ \forall N \in \mathcal{SP}_{2n},\ MN = NM\}$$

10 Justifier que I_{2n} et $-I_{2n}$ appartiennent à $\mathcal{Z}$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ avec $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$.

11 En utilisant $L = \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ et sa transposée, montrer que $B = C = 0_n$ et $A = D$.

12 Justifier que A est inversible.

13 Soit $U \in GL_n(\mathbb{R})$. En utilisant $L_U = \left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline 0_n & (U^\top)^{-1} \end{array}\right)$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in GL_n(\mathbb{R})$.

14 On note $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que A commute avec les matrices $I_n + E_{i,j}$ puis que $A \in \{I_n, -I_n\}$.
En déduire que $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.

III Déterminant d'une matrice symplectique

Dans cette partie, on se donne $M \in \mathcal{SP}_{2n}$ que l'on décompose à nouveau sous forme de matrices blocs $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ avec $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$.

15 On suppose dans cette question que D est *inversible*. Justifier qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & Q \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline V & W \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

16 On suppose encore D inversible. En utilisant la question **8**, montrer que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det(A^\top D - C^\top B) = 1$$

On suppose dans tout le reste de cette partie que D est *non inversible* et on cherche à nouveau à calculer le déterminant de M.

17 Montrer que $\operatorname{Ker} \mathrm{B} \cap \operatorname{Ker} \mathrm{D} = \{0\}$.

18 Montrer que l'application

$$(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle \mathrm{U}, \mathrm{V} \rangle = \mathrm{U}^\top \mathrm{V}$$

définit un produit scalaire sur l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de ce produit scalaire.

19 On se donne $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\mathrm{P}^\top \mathrm{Q}$ soit symétrique. On suppose qu'il existe deux réels *distincts* s_1 et s_2 et deux matrices colonnes *non nulles* V_1 et V_2 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$(\mathrm{Q} - s_1 \mathrm{P})\mathrm{V}_1 = (\mathrm{Q} - s_2 \mathrm{P})\mathrm{V}_2 = 0$$

Montrer que le produit scalaire $\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2 \rangle$ est nul.

20 On suppose qu'il existe des réels non nuls $s_1, \dots, s_m$ distincts deux à deux et des matrices colonnes non nulles $\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_m$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ (\mathrm{D} - s_i \mathrm{B})\mathrm{V}_i = 0$$

Montrer que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathrm{DV}_i \neq 0$ et que la famille $(\mathrm{DV}_1, \dots, \mathrm{DV}_m)$ est libre.

21 En déduire qu'il existe α tel que $\mathrm{D} - \alpha \mathrm{B}$ soit inversible.

22 En utilisant les matrices $\mathrm{K}(\alpha)$ de la question **2**, montrer que $\det(\mathrm{M}) = 1$.

23 Donner une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de déterminant 1 non symplectique.