Devoir à la maison n°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs deux à deux distincts. On peut supposer $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_{\lambda_i} = 0$. Supposons que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ et soit alors $j = \min\{i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \neq 0\}$. Alors $\sum_{i=j}^{n} \alpha_i \phi_{\lambda_i} = 0$. Mais, comme $\alpha_j \neq 0$ et $\lambda_j < \dots < \lambda_n$, $\sum_{i=j}^{n} \alpha_i \phi_{\lambda_i} \underset{0^+}{\sim} \alpha_j \phi_{\lambda_j}$ d'où une contradiction. Ainsi $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est nul et $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est libre.

2 Notons D'_n le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{R}(a_1) \\ \mathrm{R}(a_2) \\ \vdots \\ \mathrm{R}(a_n) \end{pmatrix}$$

Comme $\mathrm{R}(a_1) = \dots = \mathrm{R}(a_{n-1}) = 0$, en développant D'_n par rapport à sa dernière colonne, on obtient $\mathrm{D}'_n = \mathrm{R}(a_n)\mathrm{D}_{n-1}$. Par ailleurs, en effectuant sur D'_n l'opération $\mathrm{C}_n \leftarrow \mathrm{C}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k \mathrm{C}_k$, on obtient $\mathrm{D}'_n = \mathrm{A}_n \mathrm{D}_n$ en factorisant la dernière colonne obtenue par A_n. On en déduit que $\mathrm{A}_n \mathrm{D}_n = \mathrm{R}(a_n)\mathrm{D}_{n-1}$.

3 Supposons que $b_n \neq b_k$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Remarquons alors que

$$\mathrm{A}_n = [(\mathrm{X} + b_n)\mathrm{R}(\mathrm{X})](-b_n) = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1}(b_n + a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k - b_n)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_n)}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_n - b_k)}$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{R}(a_n) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(a_n + b_k)}$$

On en déduit que

$$\mathrm{D}_n = \frac{\mathrm{R}(a_n)}{\mathrm{A}_n}\mathrm{D}_{n-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)(b_n - b_k)}{(a_n + b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n + b_k)}\mathrm{D}_{n-1}$$

Cette relation est encore valable s'il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ puisque D_n est alors nul (deux colonnes identiques).
On obtient alors la formule voulue par récurrence.

4 Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(y_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - y_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} d(x, \mathrm{A}) = 0$. Autrement dit, (y_n) converge vers x. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, $x \in \overline{\mathrm{A}}$.

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}$ donc $d(x, \mathrm{A}) \leq d(x, \mathrm{A}_{n+1}) \leq d(x, \mathrm{A}_n)$. La suite $(d(x, \mathrm{A}_n))$ est décroissante et minorée par $d(x, \mathrm{A})$; elle converge vers un réel $\delta \geq d(x, \mathrm{A})$. Supposons que $\delta > d(x, \mathrm{A})$. Par définition de la borne inférieure, il existe alors $y \in \mathrm{A}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x, \mathrm{A}) \leq \|x - y\| < \delta \leq d(x, \mathrm{A}_n)$$

Ceci est absurde puisque y appartient à A et donc à l'un des A_n.

6 $B \cap V$ est la boule fermée de centre x et de rayon $\|x\|$ de l'espace vectoriel normé V. On en déduit que $B \cap V$ est fermé et borné dans V qui est de dimension finie. Ainsi $B \cap V$ est compact de V et donc un compact de E.
Comme $B \cap V \subset V$, $d(x, V) \leq d(x, B \cap V)$. Soit alors $y \in V$.

- Si $y \in B$, alors $\|x - y\| \geq d(x, B \cap V)$.
- Si $y \notin B$, alors $\|x - y\| > \|x\|$. Or il est clair que $0_E \in B \cap V$ de sorte que

$$\|x - y\| > \|x\| = \|x - 0_E\| \geq d(x, B \cap V)$$

Finalement, pour tout $y \in V$, $\|x - y\| \geq d(x, B \cap V)$. On en déduit que $d(x, V) \geq d(x, B \cap V)$ puis $d(x, V) = d(x, B \cap V)$.

7 L'application $y \mapsto \|x - y\|$ est continue car 1-lipschitzienne (considérer la seconde inégalité triangulaire). Cette application admet donc un minimum sur le compact $B \cap V$. Il existe donc $y \in \cap B \cap V \subset V$ tel que

$$\|x - y\| = \min_{y \in B \cap V} \|x - y\| = d(x, B \cap V) = d(x, V)$$

8 Notons y le projeté orthogonal de x sur V. Alors $y \in V$ de sorte que $d(x, V) \leq \|x - y\|$. De plus, $x - y \in V^\perp$ et Pour tout $z \in F$, $y - z \in V$ et donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

ou encore

$$\forall z \in V, \|x - z\| \geq \|x - y\|$$

On en déduit que $d(x, V) \geq \|x - y\|$ puis que $d(x, V) = \|x - y\|$.
Soit $z \in V$ tel que $\|x - z\| = d(x, V) = \|x - y\|$. On a vu précédemment

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2$$

On en déduit que $\|y - z\| = 0$ i.e. $y = z$.

9 Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ soit liée. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_n$ non nul tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0$. Par bilinéarité du produit scalaire, $\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $M(x_1, \dots, x_n)$, on a donc $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$. La famille des colonnes de $M(x_1, \dots, x_n)$ est donc liée et $G(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Réciproquement, supposons que la $G(x_1, \dots, x_n)$ soit liée. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_n$ non nul tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ i.e. $\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = 0$ ou encore $\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, x_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \in \text{vect}(x_1, \dots, x_n) \cap \text{vect}(x_1, \dots, x_n)^\perp = \{0\}$. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est donc liée.

10 Notons $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ le projeté orthogonal de x sur V. En effectuant l'opération $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i$, la dernière colonne de $G(x_1, \dots, x_n, x)$ devient par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, x - y \rangle \\ \langle x_2, x - y \rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, x - y \rangle \\ \langle x, x - y \rangle \end{pmatrix}$$

Or $x - y \in V^\perp$ donc $\langle x_i, x - y \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. De plus,

$$\langle x, x - y \rangle = \langle x - y, x - y \rangle + \langle y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 = d(x, V)^2$$

En développant le déterminant obtenu par rapport à sa dernière colonne, on obtient donc

$$G(x_1, \dots, x_n, x) = d(x, V)^2 G(x_1, \dots, x_n)$$

Comme $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, ce qui permet de conclure.

11 Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq |f(x)| \leq \mathrm{N}_\infty(f)$ puis, $|f(x)|^2 \leq \mathrm{N}_\infty(f)^2$ et enfin, par croissance de l'intégrale

$$\mathrm{N}_2(f)^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \mathrm{N}_\infty(f)^2 \, \mathrm{d}x = \mathrm{N}_\infty(f)^2$$

Ainsi $\mathrm{N}_2(f) \leq \mathrm{N}_\infty(f)$.
Soit A une partie de $\mathcal{C}([0,1])$ et $f \in \overline{\mathrm{(A)}}^\infty$. Il existe donc une suite (f_n) d'éléments de A convergeant vers f pour la norme N_∞. Ainsi $\mathrm{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathrm{N}_2(f_n - f) \leq \mathrm{N}_\infty(f_n - f)$$

donc $\mathrm{N}_2(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi (f_n) converge vers f pour la norme N_2 et $f \in \overline{\mathrm{(A)}}^2$. Par conséquent, $\overline{\mathrm{(A)}}^\infty \subset \overline{\mathrm{(A)}}^2$.

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{N}_2(\phi_0 - \phi_{1/n})^2 = \int_0^1 (1 - x^{1/n})^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - 2x^{1/n} + x^{2/n}) \, \mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{1/n+1} + \frac{1}{2/n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 2 + 1 = 0$$

Ainsi $(\phi_{1/n})$ est une suite délements de V_0 convergeant vers ϕ_0 pour la norme 2. On en déduit que $\phi_0 \in \overline{\mathrm{V}_0}^2$.

13 Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. On considère une suite (ψ_n) d'éléments de V_0 convergeant vers ϕ_0 pour la norme N_2 (par exemple, la suite de la question précédente). Alors $(f\psi_n)$ est encore une suite d'éléments de V_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{N}_2(f - f\psi_n)^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 |\phi_0(x) - \psi_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \mathrm{N}_\infty(f)^2 \mathrm{N}_2(\phi_0 - \psi_n)$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{N}_2(f - f\psi_n) \leq \mathrm{N}_\infty(f)\mathrm{N}_2(\phi_0 - \psi_n)$$

On en déduit que $\mathrm{N}_2(f - f\psi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $(f\psi_n)$ converge vers f pour la norme N_2. Ceci prouve que V_0 est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2.
Pour tout $f \in \mathrm{V}_0$, $\mathrm{N}_\infty(f - \phi_0) \geq |f(0) - \phi_0(0)| = 1$ donc $\phi_0 \notin \overline{\mathrm{V}_0}^\infty$ et V_0 n'est pas dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_∞.

14 Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé. Alors $0 \in \mathrm{V} \subset \overline{\mathrm{V}}$. Soit $(x,y) \in (\overline{\mathrm{V}})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe alors deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de V convergeant respectivement vers x et y. Comme V est un sous-espace vectoriel, $(\lambda x_n + \mu y_n)$ est une suite d'éléments de V qui converge vers $\lambda x + \mu y$ par opérations. Ainsi $\lambda x + \mu y \in \overline{\mathrm{V}}$. On en déduit que $\overline{\mathrm{V}}$ est également un sous-espace vectoriel.

15 Si V est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_∞, il est clair que $\phi_m \in \overline{\mathrm{V}}^\infty$ pour tout entier $m \geq 0$.
Si $\phi_m \in \overline{\mathrm{V}}^\infty$ pour tout entier $m \geq 0$, alors $\mathrm{vect}(\phi_m,\ m \in \mathbb{N}) \subset \overline{\mathrm{V}}^\infty$ car $\overline{\mathrm{V}}^\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1])$. Mais $\mathrm{vect}(\phi_m,\ m \in \mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_∞ d'après le théorème de Weierstrass. Comme $\overline{\mathrm{V}}^\infty$ est fermé pour la norme N_∞, $\mathcal{C}([0,1]) = \overline{\mathrm{vect}(\phi_m,\ m \in \mathbb{N})}^\infty \subset \overline{\mathrm{V}}^\infty$ et donc $\overline{\mathrm{V}}^\infty = \mathcal{C}([0,1])$.

16 A nouveau, il est clair que si V est dense pour la norme N_2, il est clair que $\phi_m \in \overline{\mathrm{V}}^2$ pour tout entier $m \geq 0$.
Supposons maintenant que $\phi_m \in \overline{\mathrm{V}}^2$ pour tout entier $m \geq 0$. Pour simplifier, notons $\mathrm{W} = \overline{\mathrm{V}}^2$. Comme précédemment, $\mathcal{C}([0,1]) = \overline{\mathrm{vect}(\phi_m,\ m \in \mathbb{N})}^\infty \subset \overline{\mathrm{W}}^\infty$. Ainsi $\overline{\mathrm{W}}^\infty = \mathcal{C}([0,1])$. Or, d'après la question **11**, $\overline{\mathrm{W}}^\infty \subset \overline{\mathrm{W}}^2$ donc $\overline{\mathrm{W}}^2 = \mathcal{C}([0,1])$. Mais comme $\mathrm{W} = \overline{\mathrm{V}}^2$, $\overline{\mathrm{W}}^2 = \overline{\mathrm{V}}^2$. Finalement $\overline{\mathrm{V}}^2 = \mathcal{C}([0,1])$ i.e. V est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2.

17 Remarquons tout d'abord que (W_n) est croissante pour l'inclusion et que $\mathrm{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{W}_n$ de sorte que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $d(f,\mathrm{W}) = \lim_{n\to+\infty} d(f,\mathrm{W}_n)$ d'après la question **5**.
Supposons que W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2. Soit $\mu \in \mathbb{N}$. Alors $\phi_\mu \in \overline{\mathrm{W}}$ et $\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu,\mathrm{W}_n) = d(\phi_\mu,\mathrm{W}) = 0$.
Supposons que pour tout entier $\mu \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu,\mathrm{W}_n) = 0$. Alors $d(\phi_\mu,\mathrm{W}) = 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}$. Ceci signifie que $\phi_\mu \in \overline{\mathrm{W}}^2$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}$ d'après la question **4**. Enfin, on déduit avec la question **16** que W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2.

18 Soit $\mu \in \mathbb{R}_+$. D'après la question **10**,

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n})}$$

Or pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $\langle \phi_a, \phi_b \rangle = \dfrac{1}{\alpha + \beta + 1}$. Ainsi $G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n})$ est un déterminant de Cauchy D_n dans lequel on a choisi $a_k = b_k = \lambda_k + 1/2$. Il en est de même pour $G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)$. En utilisant la relation de récurrence déterminée à la question **3**, on obtient

$$G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}) \frac{\prod_{k=0}^n (\mu - \lambda_k)^2}{(2\mu + 1) \prod_{k=0}^n (\lambda_k + \mu + 1)^2}$$

On en déduit que

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \frac{\prod_{k=0}^n |\mu - \lambda_k|}{\prod_{k=0}^n (\lambda_k + \mu + 1)}$$

Remarque. On n'a en fait pas besoin de l'expression explicite des déterminants de Cauchy mais seulement de la relation de récurrence qui les lie.

19 Soit $\mu \geq 0$.

Si (λ_k) diverge vers $+\infty$, il est clair que $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$ converge vers 1.

Réciproquement, supposons que $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$ converge vers 1. Posons comme indiqué dans l'énoncé, $f : x \in [0, \mu] \mapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$. La suite $(|f(\lambda_k)|)$ converge alors vers 1. La fonction f décroît de $\dfrac{\mu}{\mu + 1} < 1$ vers 0 sur $[0, \mu]$. On en déduit que $\lambda_k \geq \mu$ à partir d'un certain rang et la suite $(-f(\lambda_k))$ converge vers 1 La fonction $-f$ est continue et strictement croissante sur $[\mu, +\infty[$ donc elle induit une bijection de $[\mu, +\infty[$ sur $[0, 1[$ car $\lim\limits_{-\infty} -f = 1$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{1} (-f)^{-1} = +\infty$ et donc (λ_k) diverge vers $+\infty$.

20 Remarquons déjà que W est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ puisque, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu = \lambda_k$, alors $d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $n \geq k$.

Par passage au logarithme, W est donc dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \ln \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$ diverge vers $-\infty$ pour tout $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Si la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ converge, alors $\dfrac{1}{\lambda_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ i.e. $\lambda_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ (les λ_k sont positifs). Soit $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. On en déduit alors qu'à partir d'un certain rang, $\lambda_k \geq \mu$ de sorte que

$$\ln \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = \ln \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1} = \ln\left(1 - \frac{2\mu + 1}{\lambda_k + \mu + 1}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} -\frac{2\mu + 1}{\lambda_k}$$

La série $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \ln \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$ converge donc.

Réciproquement, supposons que pour tout $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$, $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \ln \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$ converge. On choisit μ arbitrairement. Alors $\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$ puis $\lambda_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ d'après la question précédente. On montre comme précédemment que

$$\ln \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \underset{k \to +\infty}{\sim} -\frac{2\mu + 1}{\lambda_k}$$

et on en déquit que $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ converge.

On a donc bien montré que W était dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ si et seulement si $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ divergeait.

21 Supposons que W est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme N_∞. Alors $\mathcal{C}([0, 1]) = \overline{W}^{\infty} \subset \overline{W}^{2}$ d'après la question **11** et W est donc dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme N_2. D'après la question précédente, $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge.

22 Remarquons que puisque μ et les λ_k sont dans $[1,+\infty[$, $(\phi_\mu-\psi)(0)=0$. Par ailleurs,

$$(\phi_\mu-\psi)' = \mu phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k\phi_{\lambda_k-1}$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $f\in\mathcal{C}^1([0,1])$ s'annulant en 0, $\mathrm{N}_\infty(f)\leq\mathrm{N}_2(f')$.
Soit donc $f\in\mathcal{C}^1([0,1])$ s'annulant en 0. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x\in[0,1]$,

$$f(x)^2=\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq (\int_0^x \mathrm{d}t)^2\left(\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^2 = \mathrm{N}_2(f)^2$$

Ainsi $|f(x)|\leq\mathrm{N}_2(f)$ pour tout $x\in[0,1]$ i.e. $\mathrm{N}_\infty(f)\leq\mathrm{N}_2(f')$.

23 Supposons que $\sum\frac{1}{\lambda_k}$ diverge. Alors la série $\sum\frac{1}{\lambda_k-1}$ diverge également. En effet, si $\lambda_k \underset{\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{1}{\lambda_k-1}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\lambda_k}$ et $\sum\frac{1}{\lambda_k}$ diverge. Sinon, $\sum\frac{1}{\lambda_k-1}$ diverge grossièrement. On en déduit avec la question **20** que $\mathrm{vect}(\phi_{\lambda_k-1},\ k\in\mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2.
Remarquons déjà que puisque $\lambda_0=0$, $\phi_0\in\mathrm{W}\subset\overline{\mathrm{W}}^\infty$. Soit alors un entier $\mu\geq1$. Soit également $\varepsilon>0$. Par densité de $\mathrm{vect}(\phi_{\lambda_k-1},\ k\in\mathbb{N})$ dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $(b_0,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\mathrm{N}_\infty(\mu\phi_{\mu-1}-\sum_{k=0}^{n} b_k\phi_{\lambda_k-1})\leq\varepsilon$$

On pose alors $\psi=\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{\lambda_k}\phi_{\lambda_k}$ et la question précédente montre que

$$\mathrm{N}_\infty(\phi_\mu-\psi)\leq\mathrm{N}_\infty(\mu\phi_{\mu-1}-\sum_{k=0}^{n} b_k\phi_{\lambda_k-1})\leq\varepsilon$$

On en déduit que $\phi_\mu\in\overline{\mathrm{W}}^\infty$ pour tout $\mu\in\mathbb{N}$. Comme $\overline{\mathrm{W}}^\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1])$, $\mathrm{vect}(\phi_\mu,\ \mu\in\mathbb{N})\subset\overline{\mathrm{W}}^\infty$. Comme $\overline{\mathrm{W}}^\infty$ est fermé pour la norme N^∞, $\overline{\mathrm{vect}(\phi_\mu,\ \mu\in\mathbb{N})}^\infty\subset\overline{\mathrm{W}}^\infty$. Le théorème de Weierstrass stipule que $\overline{\mathrm{vect}(\phi_\mu,\ \mu\in\mathbb{N})}^\infty=\mathcal{C}([0,1])$, ce qui permet de conclure.

24 Posons $m=\inf_{k\geq1}\lambda_k$, $\mu_k=\frac{\lambda_k}{m}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Alors $\mu_0=0$ et $\mu_k\geq1$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. La question précédente montre que $\mathrm{V}=\mathrm{vect}(\phi_{\mu_k},\ k\in\mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_∞. Soit $f\in\mathcal{C}([0,1])$. Posons $g:\ x\mapsto f(x^{1/m})$. Il existe donc une suite (v_n) d'éléments de V convergeant vers g pour la norme N_∞ i.e. $\mathrm{N}_\infty(g-v_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Posons alors $w_n:\ x\mapsto v_n(x^m)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Puisque pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, $\phi_{\mu_k}(x^m)=\phi_{\lambda_k}(x)$, (w_n) est alors une suite d'éléments de W. De plus, comme $x\mapsto x^m$ établit une bijection de $[0,1]$ dans lui-même,

$$\mathrm{N}_\infty(g-v_n)=\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-v_n(x)|=\sup_{x\in[0,1]}|g(x^m)-v_n(x^m)|=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-w_n(x)|=\mathrm{N}_\infty(f-w_n)$$

Ainsi $\mathrm{N}_\infty(f-w_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ i.e. (w_n) est une suite d'éléments de W convergeant vers f pour la norme N_∞. Il s'ensuit que W est encore dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_∞.