Polynômes annulateurs

Exercice 1 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit l'endomorphisme

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + \operatorname{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres de u, ainsi que les espaces propres associés.

Exercice 2

1. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_2 = 0$$

2. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{A}^3 - 8\mathrm{A}^2 + 21\mathrm{A} - 18\mathrm{I}_2 = 0$$

Exercice 3 ★ **TPE MP 2010**

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M}^3 - \mathrm{M}^2 - \mathrm{M} - 2\mathrm{I}_n = 0$ et $\operatorname{tr}(\mathrm{M}) = 0$.

Exercice 4 ★★

Déterminer les matrices $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\mathrm{M}^5 = \mathrm{M}^2$ et $\operatorname{tr}(\mathrm{M}) = n$.

Exercice 5

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme unitaire annulateur de u. La décomposition de P en facteurs irréductibles unitaires s'écrit $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}_i^{\alpha_i}$. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $\mathrm{N}_i = \operatorname{Ker} \mathrm{P}_i^{\alpha_i}(u)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $\mathrm{F} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{F} \cap \mathrm{N}_i$.

Exercice 6 **TPE-EIVP PSI 2017**

Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$, $\mathrm{C}^2 = 2\mathrm{A} + 3\mathrm{B}$, $\mathrm{C}^3 = 5\mathrm{A} + 6\mathrm{B}$. A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 7 ★★★

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(f) = 0$, $\mathrm{P}(0) = 0$ et $\mathrm{P}'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 8 ★★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} = 0$. Montrer que $\operatorname{rg}(\mathrm{A})$ est pair.

Exercice 9 ★★★

Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \mathrm{P}(\mathrm{X} + k) = 0$$

Exercice 10 ★★ **E3A MP 2019**

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice identité de E_n sera notée I_n.
Pour $A \in E_n$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on note A_j la j-ème colonne de la matrice A.
Soit u l'application qui à toute matrice A de E_n associe la matrice B dont les colonnes B_j sont

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,,\ B_j = S - A_j = \sum_{k=1, k\neq j}^{n} A_k \text{ où } S = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

1. Dans cette question, $n = 2$ et E_2 est muni de la base $\mathcal{B} = (K_1, K_2, K_3, K_4)$ où

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Vérifier que u est un endomorphisme de E_2.

b. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que u est un automorphisme de E_2.

c. Reconnaître la nature géométrique de l'automorphisme u en précisant ses éléments caractéristiques.

2. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$ dans les case $n = 2$ et $n = 3$.

On revient au cas général et on admettra que u est un endomorphisme de E_n.

3. Montrer à l'aide d'opérations sur les colonnes et en utilisant S que l'on a

$$\det(u(A)) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(A)$$

4. **a.** Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de l'endomorphisme u.

b. En déduire les éléments propres de l'endomorphisme u. Est-il diagonalisable ?

5. Soinet J_n la matrice de E_n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $U_n = J_n - I_n$.

a. Déterminer les colonnes du produit matriciel AU_n à l'aide de celles de A.

b. Retrouver alors le résultat de la question **4.a**.

Exercice 11 **Mines Télécom MP 2022**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres complexes et déterminer une matrice D diagonable semblable à A.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^3 + M = 0$. Montrer que M est semblable à D.

3. A et M sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 12 ★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Diagonalisabilité

Exercice 13 ★★ **CCP PSI 2015**

L'endomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est-il diagonalisable ?

Exercice 14 ★★ **CCP MP 2018**

Soient x un nombre réel et E_x l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M + xI_n = 0$.

1. Si $x \neq 0$, montrer qu'une matrice $M \in E_x$ est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à E_0 ?

2. Pour quelles valeurs de x tous les éléments de E_x sont ils diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

3. Déterminer l'ensemble T des traces des éléments de E_{-2}. Quel est son cardinal ?

Exercice 15 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + 2\mathrm{M}^\top \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Exercice 16 **CCP MP 2022**

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2$ ainsi que λ et μ deux complexes distincts et non nuls tels que

$$\mathrm{I}_p = \mathrm{A} + \mathrm{B}$$
$$\mathrm{M} = \lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B}$$
$$\mathrm{M}^2 = \lambda^2\mathrm{A} + \mu^2\mathrm{B}$$

1. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
2. Exprimer A en fonction de M et I_p.
3. Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
4. M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

Exercice 17 ★★★ **Diagonalisation simultanée**

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v diagonalisent dans une base commune.

Exercice 18 ★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors $\mathrm{A}^\top$ l'est aussi.

Exercice 19 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un endomorphisme f de E est dit *cyclique* s'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

1. On supose dans cette qustion que $n = 3$ et on considère un endomorphisme g de E dont la matrice dans une base de E est $\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer que g est cyclique et diagonalisable.
2. Un endomorphisme f cyclique est-il toujours diagonalisable ?
3. Soit f un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres distinctes deux à deux. Est-il cyclique ?
4. Soit f un endomorphisme diagonalisable et cyclique. Ses valeurs propres sont-elles distinctes deux à deux ?

Exercice 20 ★★★★ **Mines-Ponts MP 2015**

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversible et dont l'inverse appartient aussi à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{G}$, $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.

Exercice 21 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit $n \geqslant 2$ entier. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A} \neq \pm\mathrm{I}_n$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) \equiv n[2]$.
2. Montrer que $|\,\mathrm{tr}(\mathrm{A})| \leq n - 2$.

Exercice 22 **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (\mathrm{M}, \mathrm{M}^{-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2\}$$

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det \mathrm{M}| = 1$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{M}^d = \mathrm{I}_n$. On pose $\mathrm{A} = \dfrac{1}{3}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_n)$. Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer qu'il existe un entier K_n majorant le cardinal des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 23 **Banque Mines-Ponts MP 2023**

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables commutant entre elles.
   a. Montrez que A_1 et A_2 sont simultanément diagonalisables.
   b. Conclure pour $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_p$ (on fera une récurrence).
2. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dans $\{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n\}$. Montrer que G est fini. Que dire de son cardinal ?
3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ distincts. Existe-t-il un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$?

Trigonalisabilité

Exercice 24 ★★★ **Trigonalisation simultanée**

Soient u et v deux endomorphismes trigonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v trigonalisent dans une base commune.

Exercice 25 **X MP 2010**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_n$ si et seulement si il existe $\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{S}\overline{\mathrm{S}}^{-1}$.

Nilpotence

Exercice 26 **CCINP MP 2022**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. On suppose qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.
   a. Quel est le polynôme caractéristique de B ?
   b. En déduire une contradiction.
3. Montrer que A est semblable à $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Polynôme minimal

Exercice 27 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A}^n = \mathrm{I}_n$ et telle que la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \dots, \mathrm{A}^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0$.

Exercice 28 **ENS MP 2011**

1. Soit A une matrice inversible réelle. Exprimer le polynôme minimal de A^{-1} en fonction de celui de A.
2. Soit A une matrice orthogonale réelle telle que 1 et -1 ne soient pas racines de son polynôme minimal. Montrer que A et A^{-1} ont même polynôme minimal. Montrer que le degré de ce polynôme minimal est pair.

Exercice 29

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P'(f)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

3. Montrer que f est nilpotent.

Exercice 30 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}$ où $n \geq 3$.

1. Quel est le rang de A ? la dimension du noyau de A ?

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?

4. Montrer qu'il existe $\lambda \in]1, +\infty[$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$.

5. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 31 ★★

On considère un entier $n \geq 2$. Soit l'endomorphisme

$$u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{tr}(M) I_n \end{array} \right.$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2.

2. u est-il diagonalisable ?

3. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u.

Exercice 32 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Donner le rang de B en fonction du rang de A.

2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

3. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B l'est aussi, et donner ses valeurs propres.

Exercice 33 ★★ **Matrice compagnon**

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

2. Montrer que $\pi_A = \chi_A$.

3. Déterminer les sous-espaces propres de $A^\top$.

Exercice 34 **Endomorphismes cycliques**

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **a.** Pour $x \in E$, on note $I_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0_E\}$. Montrer que pour tout $x \in E$, $I_{u,x}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On note $\pi_{u,x}$ son unique générateur unitaire. Justifier que $\pi_{u,x}$ divise π_u.

   b. Pour $x \in E$, on note $E_{u,x} = \{P(u)(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer que pour tout $x \in E$, $E_{u,x}$ est un sous-espace vectoriel de E et que $(u^k(x))_{0 \le k \le \deg \pi_{u,x}-1}$ en est une base. En déduire la dimension de $E_{u,x}$.

   c. Montrer que $E_{u,x}$ est stable par u et que $\pi_{u_{|E_{u,x}}} = \pi_{u,x}$.

2. Soient $x_1, \dots, x_p$ tels que les polynômes $\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}$ soient deux à deux premiers entre eux. On pose $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ et $P = \prod_{i=1}^{p} \pi_{u,x_i}$.

   a. Montrer que $\pi_{u,x}$ divise P.

   b. Montrer que les sous-espaces vectoriels $E_{x_1}, \dots, E_{x_p}$ sont en somme directe.

   c. En déduire que $\pi_{u,x} = P$ et $E_{u,x} = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{u,x_i}$.

3. En considérant la décomposition en facteurs irréductibles de π_u, montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

   (i) $\pi_u = \chi_u$.

   (ii) Il existe $x \in E$ tel que $E_{u,x} = E$.

   (iii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   On dit dans ce cas que u est un endomorphisme *cyclique*.

Exercice 35 ★

Soient un entier $n \geq 2$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer le polynôme minimal de U.
2. Réduire U.

Exercice 36 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On définit : $\forall m \in \mathbb{R}$, $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$. Déterminer le polynome minimal de A_m.

Exercice 37 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A admet le même polynôme minimal considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 38 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère un entier $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et telle que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 39 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Énoncer le lemme de décomposition des noyaux appliqué à f dans le cas de deux polynômes premiers entre eux.
2. On suppose que le polynôme minimal de f est donné par $\mu_f = (X^2+1)(X^2+4)$. A l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls de E, x et y, tels que : $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.
3. On suppose que E est de dimension 4. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E. Donner alors la matrice de f dans cette base.

Exercice 40 ★★ **CCINP MP 2023**

Soient un entier $n \geq 3$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$ tel que

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de f ?
2. Justifier que le polynôme caractéristique de f peut s'écrire $\chi_f = X^{n-2}P$ où P est un polynôme unitaire de degré 2.
3. Calculer $f(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ ainsi que $f^2(e_n)$.
4. Déterminer χ_f.
5. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?

Exercice 41 ★★

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On suppose que AB est inversible et diagonalisable. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 42 ★★★

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in GL(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 l'est.

Exercice 43 **Polynôme minimal et transposée**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)^\top = P(A^\top)$.
2. En déduire que $\pi_A = \pi_{A^\top}$.

Exercice 44 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Comparer le spectre de A et celui de M.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer P(M) en fonction de P(A) et P′(A).
3. Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur A quant à la diagonalisabilité de M.

Exercice 45 **Saint-Cyr MP 2024**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note π_u le polynôme minimal de u et p sa valuation (i.e. le plus petit degré des monômes non nuls de π_u).

1. On suppose que $p = 0$. Que peut-on en déduire sur u ?
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im}(u^p)$.
3. On suppose $p \neq 0$. Montrer que p est le plus petit entier naturel non nul vérifiant l'égalité précédente.

Exercice 46 ★★

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on considère les endomorphismes $G_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v$ et $D_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto v \circ u$.

1. Montrer que les applications $u \mapsto G_u$ et $u \mapsto D_u$ sont des morphismes d'algèbres injectifs.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(G_u) = G_{P(u)}$ et $P(D_u) = D_{P(u)}$.
3. Montrer que $\pi_{G_u} = \pi_{D_u} = \pi_u$.
4. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes : (i) u est diagonalisable ; (ii) G_u est diagonalisable ; (iii) D_u est diagonalisable.
5. Montrer que si u est diagonalisable, alors $G_u - D_u$ l'est également.
6. Montrer que si u est nilpotent, alors $G_u - D_u$ l'est aussi.

Exercice 47 ★★ **Navale MP 2025**

Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto \mathrm{AM} - \mathrm{MB} \end{cases}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$. Montrer que $\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(u)$.
3. Soient $\alpha \in \mathrm{Sp}(u)$ et T un vecteur propre de u associé à la valeur propre α. Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{T} = \mathrm{TP}(\mathrm{B} + \alpha \mathrm{I}_n)$.
4. En déduire qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$ tel que $\alpha = \lambda - \mu$.
5. Conclure sur le spectre de u.

Exercice 48 ★★★

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

1. On suppose $\mathrm{P} \wedge \pi_{\mathrm{A}} = 1$. Montrer que P(A) est inversible.
2. Réciproquement, on suppose P(A) inversible. Montrer qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A})^{-1} = \mathrm{Q}(\mathrm{A})$. En déduire que $\mathrm{P} \wedge \pi_{\mathrm{A}} = 1$.

Exponentielles

Exercice 49

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\exp(\mathrm{A})^{\mathrm{T}} = \exp(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$.
2. On suppose A symétrique dans cette question. Montrer que exp(A) est également symétrique.
3. Montrer que $\det(\exp(\mathrm{A})) > 0$.
4. On suppose A antisymétrique dans cette question. Montrer que $\exp(\mathrm{A}) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 50 ★

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer exp(A) de deux manières.

Exercice 51 ★

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer exp(A) de deux manières.

Exercice 52 ★★

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ nilpotent où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Ker}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Im}(u)$.