Devoir surveillé n°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est une série géométrique de raison q. On sait qu'elle converge si et seulement si $|q| < 1$.

2 On sait que

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = q^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

3 Remarquons que $\mathrm{R}_n = \frac{q}{1-q}q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge et a pour somme $\frac{1}{1-q}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

4 La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

5 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \mathrm{R}_n \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n+1}^{+\infty} \leq \mathrm{R}_n \leq \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n}^{+\infty}$$

ou enfin

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \mathrm{R}_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

En multipliant par $n^{\alpha-1}$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leq n^{\alpha-1}\mathrm{R}_n \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}\mathrm{R}_n = \frac{1}{\alpha-1}$ via le théorème des gendarmes. Autrement dit, $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

6 La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui ne converge que si $\alpha - 1 > 1$. Puisque c'est une série à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{R}_n$ est de même nature : elle ne converge donc que si $\alpha > 2$.

7 On trouve évidemment $\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la question précédente montre que

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k-1} \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k \,\mathrm{d}x$$

On reconnaît là la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x$ donc

$$\mathrm{S}_n = -\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x}$$

On calcule aisément

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

de sorte que

$$\mathrm{S}_n = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

9 Pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

donc, par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$. La suite de terme général $(-1)^n$ étant bornée, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$. La question précédente permet d'affirmer que (S_n) converge vers $-\ln(2)$. Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge et a pour somme $-\ln(2)$.

10 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{R}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \mathrm{S}_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x}$$

A l'aide d'une intégration par parties,

$$\mathrm{R}_n = (-1)^{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\right]_0^1 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(n+1)(1+x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$$

A nouveau, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq x^{n+1}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

On en déduit donc que $\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. On sait également que $\frac{(-1)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty n\to+\infty}{==} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi

$$\frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et finalement

$$\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Les constantes recherchées sont donc $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$.

11 La question précédente montre que $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}a_{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Posons $v_n = \mathrm{R}_n - \frac{1}{2}a_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge. Par ailleurs, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_{n+1}$ converge également. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{R}_n = \frac{1}{2}a_{n+1} + v_n$ donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{R}_n$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

Problème 2

1 Posons $\mathrm{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{E}_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $\mathcal{A} = \mathrm{vect}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3)$ donc $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, la famille $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3)$ est libre donc c'est une base de $\mathcal{A}$. Ainsi $\dim \mathcal{A} = 3$.

2 Comme $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est a fortiori un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, $\mathrm{I}_3 \in \mathcal{A}$ (choisir $a = b = 1$ et $c = 0$). Enfin, pour $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb' - cc' & bc' + cb' \\ 0 & -(bc' + cb') & bb' - cc' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$$

Ceci montre que $\mathcal{A}$ est stable par produit et commutatif. Ainsi $\mathcal{A}$ est bien un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3 On calcule $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tout d'abord, on a bien $\mathrm{I}_3, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2 \in \mathcal{A}$. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda\mathrm{I}_3 + \mu\mathrm{M} + \nu\mathrm{M}^2 = 0$. Ceci équivaut à $\begin{cases} \lambda - 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ -\mu - 2\nu = 0 \end{cases}$. On voit facilement que l'unique solution de ce système est le triplet nul. La famille $(\mathrm{I}_3, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2)$ est donc libre. Puisque $\dim \mathcal{A} = 3$, cette famille est une base de $\mathcal{A}$.

4 On obtient $\mathrm{M}^3 = 2\mathrm{M} - 4\mathrm{I}_3$.

5 Comme $\mathcal{A}$ est un anneau, il est stable par produit. On peut donc montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}^k \in \mathcal{A}$, d'où l'existence des réels a_k, b_k et c_k.

6 En écrivant $\mathrm{M}^{k+1} = \mathrm{M}\mathrm{M}^k$, on trouve $\begin{cases} a_{k+1} = -2a_k \\ b_{k+1} = b_k - c_k \\ c_{k+1} = b_k + c_k \end{cases}$.

7 On a $z_{k+1} = b_{k+1} + ic_{k+1} = (b_k - c_k) + i(b_k + c_k) = (1+i)z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite (z_k) est donc géométrique de raison $1 + i$ et de premier terme $z_0 = b_0 + ic_0 = 1$: on a alors $z_k = (1+i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Enfin, puisque b_k et c_k sont réels, $b_k = \mathrm{Re}(z_k) = \mathrm{Re}\left((1+i)^k\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

8 En utilisant la question **6**, on montre que $b_{k+2} = b_{k+1} - c_{k+1} = b_{k+1} - b_k - c_k = 2b_{k+1} - 2b_k$. La suite (b_k) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 2$. Les racines de ce polynômes sont donc $1 \pm i$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $b_k = \lambda(1+i)^k + \mu(1-i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $b_0 = b_1 = 1$ donc $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \dfrac{(1+i)^k + \overline{(1+i)^k}}{2} = \mathrm{Re}\left((1+i)^k\right)$.

9 Comme u_0, u_1 et u_2 sont entiers et que u_{n+3} s'exprime comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de u_n et u_{n+1}, on prouve par récurrence triple ou par récurrence forte que la suite (u_n) est à valeurs entières.

10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^{n+3}) = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^n\mathrm{M}^3) = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^n(2\mathrm{M} - 4\mathrm{I}_3)) = 2\,\mathrm{tr}(\mathrm{M}^{n+1}) - 4\,\mathrm{tr}(\mathrm{M}^n)$ en utilisant la question **4** et la linéarité de la trace. De plus, $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^0) = \mathrm{tr}(\mathrm{I}_3) = 3$, $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^1) = 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^2) = 4$: les suites (u_n) et $(\mathrm{tr}(\mathrm{M}^n))$ ont les mêmes trois premiers termes et vérifient la même relation de récurrence d'ordre 3, elles sont donc égales.

11 Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Alors $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$. Notamment p divise $k\binom{p}{k}$. Puisque $1 \leq k \leq p-1$, p ne divise pas k. Or p est premier donc $p \wedge k = 1$. D'après le lemme de Gauss, p divise $\binom{p}{k}$.

12 2 divise bien $u_2 = 2$: on peut donc supposer p impair. Posons $n = \frac{p-1}{2}$.
Puisque (a_k) est géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 = 1$, on a $a_k = (-2)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$u_p = a_p + 2b_p = (-2)^p + 2\,\mathrm{Re}((1+i)^p) = -2^p + 2\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\mathrm{Re}(i^k)$$

Or pour k impair, $\mathrm{Re}(i^k) = 0$ donc

$$u_p = -2^p + \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{2k}(-1)^k = -(2^p - 2) + 2\sum_{k=1}^{n} \binom{p}{2k}(-1)^k$$

D'après le petit théorème de Fermat, p divise $2^p - 2$ et puisque pour $1 \leq k \leq n$, on a $2 \leq 2k \leq p-1$, p divise également $\binom{p}{2k}$ d'après le rappel de l'énoncé. Ainsi p divise u_p.

Solution 1

1. En convenant que $A_{n_0-1} = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=n_0}^{n} (A_k - A_{k-1})B_k \\ &= \sum_{k=n_0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=n_0}^{n} A_{k-1}B_k \\ &= \sum_{k=n_0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=n_0-1}^{n-1} A_k B_{k+1} \\ &= A_n B_n + \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k(B_k - B_{k+1}) \\ &= A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k\end{aligned}$$

2. **a.** La série $\sum b_n$, autrement dit la série $\sum B_{n+1} - B_n$, est une série télescopique. Elle est donc de même nature que la suite (B_n), c'est-à-dire convergente.

b. Tout d'abord, (A_n) est bornée donc $A_n B_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(B_n)$. Puisque (B_n) converge vers 0, il en est de même de la suite $(A_n B_n)$.
Ensuite, la suite (B_n) étant décroissante, la série $\sum b_n$ est une série à termes de signe constant. Or $A_n b_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n)$ et la série $\sum b_n$ converge donc la série $\sum A_n b_n$ converge. On en déduit que la suite de ses sommes partielles converge. La suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ converge donc.

D'après la question **1**, la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ converge donc en tant que somme de deux suites convergentes. Puisque $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ est la somme de partielle de rang n de la série $\sum a_n B_n$, la série $\sum a_n B_n$ converge également.

c. Posons $a_n = (-1)^n$ pour $n \geq n_0$. Alors A_n vaut 0, -1 ou 1 suivant la parité de n ou n_0. En particulier, la suite (A_n) est bornée et on peut donc appliquer le résultat de la question précédente. La série $\sum (-1)^n B_n$ converge donc.

3. **a.** Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$ (car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$).

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ki\theta} = e^{i\theta}\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

b. **Cas $\alpha \leq 0$.** La suite de terme général $\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0. En effet, $\left|\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}\right| = n^{-\alpha} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Cas $\alpha > 1$. La série $\sum \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$ converge absolument. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$.

Cas $0 < \alpha \leq 1$. On utilise les résultats précédents avec $n_0 = 1$, $a_n = e^{in\theta}$ et $B_n = \frac{1}{n}$. D'après la question **3.a**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|A_n| = \left|e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

La suite (A_n) est donc bornée. La suite (B_n) est clairement décroissante de limite nulle. La question **2.b** permet alors d'affirmer que la série $\sum a_n B_n$ i.e. la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, converge. Cette série ne converge pas absolument puisque $\left|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas ($\alpha \leq 1$).

4. Rappelons que pour tout $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k \mathrm{B}_k = \mathrm{A}_n \mathrm{B}_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$$

La suite (B_n) converge vers 0 et (A_n) est bornée donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{B}_n = 0$.
Puisque (A_n) est bornée, $\mathrm{A}_n b_n = \mathcal{O}(|b_n|)$. Or la série $\sum |b_n|$ converge car $\sum\limits_{n \geq n_0} b_n$ est absolument convergente. De plus, la série $\sum |b_n|$ est à termes positifs donc la série $\sum \mathrm{A}_n b_n$ converge (absolument). Ainsi la suite de terme général $\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$ converge.
Il s'ensuit que la suite de terme général $\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k \mathrm{B}_k$ converge également i.e. que la série $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n \mathrm{B}_n$ converge.