Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★★ **Théorème de Lamé**

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une majoration du nombre de divisions euclidiennes effectuées lors du calcul d'un PGCD par l'algorithme d'Euclide.

1. On considère la suite (F_n) telle que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note par ailleurs φ l'unique racine strictement positive du trinôme $X^2 - X - 1$.

  a. Calculer φ.

  b. Montrer que $F_{n+2} > \varphi^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $(a, b, q, r) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a = bq + r$. Montrer que $a \wedge b = b \wedge r$.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < b < a$. On rappelle le principe de l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b) : il consiste à construire une suite finie $(r_k)_{0 \leq k \leq N+1}$ telle que

- $r_0 = a$ et $r_1 = b$;
- pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, r_{k+2} est le reste de la division euclidienne de r_k par r_{k+1} ;
- $0 = r_{N+1} < r_N < \cdots < r_1 < r_0$.

L'entier N est donc le nombre de divisions euclidiennes effectuées dans l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b).

  a. *Dans cette question uniquement*, on suppose $a = 154$ et $b = 48$. Déterminer N.

  b. Justifier que $a \wedge b = r_N$.

  c. Montrer que $r_k \geq r_{k+1} + r_{k+2}$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$.

  d. Montrer par récurrence que $r_k \geq F_{N+2-k}$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

  e. *Dans cette question uniquement*, on suppose $N \geq 2$. Montrer que $N < \dfrac{\ln b}{\ln \varphi} + 1$.

  f. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que b s'écrit avec au plus k chiffres en base 10. Montrer que $N \leq 5k$.
  On donne $\dfrac{\ln 10}{\ln \varphi} \approx 4,78$.

4. **a.** Écrire une fonction Python d'arguments deux entiers naturels a et b renvoyant le PGCD de a et b calculé à l'aide de l'algorithme d'Euclide décrit dans la question précédente.

  b. Modifier légèrement la fonction de la question précédente afin qu'elle renvoie le nombre de divisions euclidiennes effectués dans l'algorithme d'Euclide.

Exercice 2 ★★ **D'après E3A 2000 PC**

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

1. **a.** En développant $[(1-\mathrm{X})+\mathrm{X}]^{2n-1}$, déterminer deux polynômes F_n et G_n de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tels que

$$(1-\mathrm{X})^n\mathrm{F}_n + \mathrm{X}^n\mathrm{G}_n = 1$$

On ne cherchera pas pour l'instant à calculer les coefficients de F_n et G_n.

b. Montrer que $(\mathrm{F}_n, \mathrm{G}_n)$ est l'unique couple de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ vérifiant l'égalité de la question précédente.

2. **a.** Montrer que $\mathrm{F}_n(1-\mathrm{X}) = \mathrm{G}_n(\mathrm{X})$.

b. Calculer $\mathrm{F}_n(0)$, $\mathrm{F}_n\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{F}_n(1)$.
Pour la suite de l'exercice, on pourra librement admettre que $\mathrm{F}_n(1) \neq 0$.

3. **a.** Montrer que $\mathrm{F}_n(x) \underset{x\to 0}{=} (1-x)^{-n} + o\left(x^{n-1}\right)$.

b. En déduire que $\mathrm{F}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k}\mathrm{X}^k$.

4. **a.** Montrer que $n\mathrm{F}_n - (1-\mathrm{X})\mathrm{F}_n' = n\binom{2n-1}{n}\mathrm{X}^{n-1}$.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{H}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{H}_n' = \mathrm{X}^{n-1}(1-\mathrm{X})^{n-1}$ et $\mathrm{H}_n(0) = 0$.

c. Montrer que

$$(1-\mathrm{X})^n\mathrm{F}_n = 1 - n\binom{2n-1}{n}\mathrm{H}_n$$

d. Déterminer $\mathrm{H}_n(1)$.

5. **a.** Donner le tableau de variations de H_n sur $\mathbb{R}$ suivant la parité de n.

b. En déduire le nombre de racines réelles de F_n suivant la parité de n.