

## 1 Cours

### Espaces vectoriels normés

**Normes** Définition. Rappel sur les normes euclidiennes. Normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$  :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des applications bornées sur un ensemble  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Normes usuelles sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$  :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt} \qquad \|f\|_\infty = \max_{[a, b]} |f|$$

Distance associée à une norme. Boules et sphères. Définition de la convexité d'une partie d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Convexité des boules. Equivalence de normes. Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Partie bornée, application bornée. Produit d'espaces vectoriels normés : norme produit.

**Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé** Convergence/divergence. Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques. Suites extraites et valeurs d'adhérence.

**Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé** Convergence/divergence. Divergence grossière. Somme d'une série. Série télescopique. Convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence en **dimension finie**. Exponentielle d'une matrice carrée et d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

## Groupe

**Révisions de première année** Groupes, sous-groupes, morphismes de groupes. Groupes classiques :  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{K}, +)$  et  $(\mathbb{K}^*, \times)$  où  $\mathbb{K}$  est un corps,  $(S(E), \circ)$  (groupe des permutations d'un ensemble  $E$ ),  $(S_n, \circ)$  (groupe des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ), groupes linéaires  $GL_n(\mathbb{K})$  et  $GL(E)$ ,  $\mathbb{U}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ ,  $\mathbb{U}_n$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{U}, \times)$ . Morphismes classiques : déterminant, signature.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une application est une norme, on peut essayer de l'exprimer à l'aide d'une norme connue.
- Calculer une norme uniforme d'une suite ou d'une fonction par une étude de cette suite ou de cette fonction.
- Pour montrer que deux normes  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas équivalentes, on exhibe une suite  $u$  tel que  $\frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)}$  tende vers 0 ou  $+\infty$ .
- Pour montrer qu'une suite diverge, on peut extraire deux suites convergeant vers des limites différentes i.e. montrer qu'elle possède deux valeurs d'adhérence distinctes.
- Pour montrer qu'un ensemble muni d'une loi est un groupe, on peut montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe connu.
- Pour montrer qu'une partie d'un groupe est un sous-groupe, on peut l'identifier comme image ou noyau d'un morphisme de groupes.

## 3 Questions de cours

**Banque CCINP** Exercices 61, 84, 89

**Sous-groupes de  $\mathbb{Z}$**  Montrer que si  $H$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$ , alors il existe  $a \in \mathbb{Z}$  tel que  $H = a\mathbb{Z}$ .

**Equation fonctionnelle de Cauchy** Soit  $f$  un endomorphisme continu du groupe  $(\mathbb{R}, +)$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = \lambda x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .