Développements limités

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 Développement limité

Soient f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ (éventuellement non définie en a) et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f possède un **développement limité à l'ordre n au voisinage de** a s'il existe des réels $c_0, \dots, c_n$ tels que :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \\ &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire s'il existe un polynôme P de degré au plus n tel que

$$f(x) = \mathrm{P}(x-a) + o((x-a)^n)$$

Le polynôme $\mathrm{P}(x-a)$ s'appelle la **partie régulière** du développement limité et $f(x) - \mathrm{P}(x-a)$ s'appelle le **reste**.

Remarque. Via le changement de variable $x = a + h$, ce développement limité peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} f(a+h) &\underset{h\to 0}{=} c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + o(h^n) \\ &\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + o(h^n) \end{aligned}$$

En pratique, on se ramènera d'ailleurs toujours à un développement limité en 0 via ce changement de variable.

Analogie avec l'approximation décimale d'un réel

On peut penser à un développement limité comme à une approximation décimale d'un réel. Les monômes de la partie régulière correspondent aux décimales de l'approximation.
Plus l'approximation décimale d'un réel comporte de décimales, plus elle est proche de ce réel. De même, la partie régulière d'un développement limité «approche» d'autant mieux une fonction que son ordre est élevé.

Exercice 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

Proposition 1.1 DL et équivalent

Supposons que f admette un développement limité d'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Soit p le plus petit entier tel que $c_p \neq 0$, **s'il existe**. Alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} c_p(x-a)^p$.

Remarque. Ceci peut également s'écrire $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} c_p h^p$.

Remarque. La fonction $x \mapsto c_p(x-a)^p$ s'appelle la **partie principale** de f au voisinage de a.

Théorème 1.1 Unicité du développement limité

Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a alors celui-ci est **unique**.

Remarque. Le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de a est donc la meilleure approximation polynomiale de degré n de f au voisinage de a.

Proposition 1.2 Troncature

Supposons que f admette pour développement limité d'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Alors,pour tout $p \leq n$, f admet pour développement limité d'ordre p au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

Remarque. Autrement dit, on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à p dans la partie régulière.

Proposition 1.3 Développement limité et parité

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

- Si f est paire, alors les coefficients de rang impair du DL sont nuls.
- Si f est impaire, alors les coefficients de rang pair du DL sont nuls.

Théorème 1.2 Développement limité, continuité, dérivabilité

Soit f une fonction définie au voisinage de a.

- f est continue en a si et seulement si f possède un développement limité d'ordre 0 en a et dans ce cas,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1).$$

- f est dérivable en a si et seulement si f possède un développement limité d'ordre 1 en a et dans ce cas,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

Attention ! Dès que $k \geq 2$, une fonction peut admettre un DL d'ordre k au voisinage de a sans pour autant être k fois dérivable en a. Par exemple, posons $f(x) = \begin{cases} x + x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Alors f admet un DL d'ordre 2 en 0 :

$f(x) = x + o(x^2)$. Cependant f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 1 + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

Ainsi f' n'admet pas de limite en 0 : elle n'est pas continue en 0 et donc encore moins dérivable en 0. Ainsi f n'est pas deux fois dérivable en 0.

2 DL d'une primitive et d'une dérivée, formule de Taylor-Young

2.1 Primitive et dérivée d'un DL

Le lemme suivant est admis pour l'instant.

Lemme 2.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I admettant une primitive F sur I. Soit $a \in \mathrm{I}$.
Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o((x-a)^n)$ alors $\mathrm{F}(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{F}(a) + o((x-a)^{n+1})$.

Théorème 2.1 DL d'une primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant une primitive F sur I. Soit $a \in \mathrm{I}$.
On suppose que f admet un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Alors F admet un DL d'ordre $n+1$ en a :

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(a) + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$

L'exemple suivant est à connaître

Exemple 2.1 DL de tan **à l'ordre** 3 **en** 0

tan admet le développement limité à l'ordre 3 en 0 suivant :

$$\tan x \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Il faut être beaucoup plus attentif en ce qui concerne le DL d'une dérivée.

Théorème 2.2 DL d'une dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in \mathrm{I}$.
On suppose que f admet un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Si on sait que f' admet un DL d'ordre $n-1$ en a alors celui-ci est le suivant :

$$f'(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=1}^{n} k c_k (x-a)^{k-1} + o((x-a)^{n-1})$$

ATTENTION ! Il est absolument nécessaire de savoir que f' admet un DL d'ordre $n-1$ car une fonction peut admettre un DL d'ordre n sans que sa dérivée admette un DL d'ordre $n-1$. En effet, on a vu plus haut que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x + x^3 \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ admettait un DL d'ordre 2 en 0. Mais f' n'admet pas de DL d'ordre 1 en 0 puisque f' n'est même pas continue en 0.

2.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 2.3 Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction **de classe** $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I. Soit $a \in \mathrm{I}$.
Alors f admet un DL d'ordre n au voisinage de a donné par :

$$
\begin{aligned}
f(x) &\underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \\
&\underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)
\end{aligned}
$$

REMARQUE. La formule de Taylor-Young sert assez peu en pratique. En effet, elle nécessite le calcul de dérivées successives, ce qui peut s'avérer fastidieux dès que les fonctions sont un peu complexes.

REMARQUE. Via un changement de variable, la formule de Taylor s'écrit aussi :

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &\underset{h \to 0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n) \\
&\underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^n)
\end{aligned}
$$

Corollaire 2.1 Dérivée d'un DL

Soit f une fonction **de classe** $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit $a \in \mathrm{I}$.
Alors f et f' admettent des DL d'ordre respectifs $n+1$ et n au voisinage de a et le DL de f' s'obtient en dérivant terme à terme le DL de f.

Exercice 2.1

DL d'ordre n au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

3 Développements limités usuels

Proposition 3.1 Développements limités usuels

Puissance, logarithme, exponentielle

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{6} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)$$

Fonctions circulaires

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

Arctangente

$$\arctan x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Fonctions hyperboliques

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

4 Opérations sur les DL

Quand on vous demande le DL d'une expression à un certain ordre, la difficulté est de prévoir les ordres auxquels il faut développer chaque élément de l'expression.

- Si on effectue des développements trop poussés (i.e. à une trop grande précision), on obtiendra un DL final à un ordre supérieur à celui demandé. On peut toujours se ramener à la précision demandée en tronquant notre DL mais on aura fait quantité de calculs inutiles, d'où perte de temps et risque d'erreurs de calcul.

- Si on ne pousse pas assez loin nos développements (trop faible précision), on obtiendra un DL final à un ordre inférieur à celui demandé. C'est encore plus grave car il n'y a alors pas d'autre choix que de recommencer tous les calculs avec une précision supérieure.

4.1 Forme normalisée

Définition 4.1 Forme normalisée d'un DL

Supposons que f admette un développement limité d'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Soit p le plus petit entier tel que $c_p \neq 0$, **s'il existe**. Alors l'écriture

$$f(x) \underset{x\to a}{=} (x-a)^p \left(c_p + c_{p+1}(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^{n-p} + o\left((x-a)^{n-p}\right)\right)$$

s'appelle la **forme normalisée** du développement limité de f à l'ordre n au voisinage de a.

Remarque. La forme normalisée peut aussi s'écrire

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p \left(c_p + c_{p+1}h + \cdots + c_n h^{n-p} + o\left(h^{n-p}\right)\right)$$

Remarque. Si $p = 0$, on dit que le développement limité est **normal**.

4.2 Combinaison linéaire

Proposition 4.1 Combinaison linéaire de DL

Soient f et g deux fonctions admettant un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de a. On note P et Q leurs parties régulières respectives i.e.

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{P}(h) + o(h^n) \qquad g(a+h) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{Q}(h) + o(h^n)$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un DL d'ordre n au voisinage de a de partie régulière $\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}$ i.e.

$$(\lambda f + \mu g)(a+h) \underset{h\to 0}{=} \lambda\mathrm{P}(h) + \mu\mathrm{Q}(h) + o(h^n)$$

Attention ! On n'effectue que des combinaisons linéaires de DL de **même** ordre. Si on souhaite effectuer une combinaison linéaire de deux DL d'ordre différent, on n'obtiendra qu'un DL d'ordre le minimimum des deux ordres. En pratique, on tronque les deux DL au minimum des deux ordres avant d'effectuer leur combinaison linéaire.

Exemple 4.1 DL à l'ordre 4 en 0 de $2\cos x - 3\operatorname{sh} x$

On a les dévveloppements limités suivants :

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \qquad \operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

On en déduit que

$$2\cos x - 3\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} 2 - 3x - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

4.3 Produit

Proposition 4.2 DL d'un produit

Soit f et g deux fonctions admettant un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de a. On note P et Q leurs parties régulières respectives i.e.

$$f(x) \underset{x\to0}{=} \mathrm{P}(x) + o(x^n) \qquad\qquad g(x) \underset{x\to0}{=} \mathrm{Q}(x) + o(x^n)$$

Alors fg admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière le polynôme PQ tronqué de tous les monômes de degré strictement supérieurs à n.

Attention ! A priori, on ne multiplie que des DL de **même** ordre. Si on souhaite multiplier deux DL d'ordre différent, on n'obtiendra qu'un DL d'ordre le minimimum des deux ordres. En pratique, on tronque les deux DL au minimum des deux ordres avant de les multiplier.

Exercice 4.1

Déterminer un DL d'ordre 3 au voisinage de 0 de $e^x \cos x + 2\sin x$.

On peut cependant faire mieux si les DL intervenant dans le produit ne sont pas normaux.

Méthode Déterminer de manière optimale un DL d'un produit

Supposons que l'on veuille calculer le DL d'un produit fg en a à un ordre n donné.

- On détermine les parties principales de f et g.
- On écrit les développements de f et g à des ordres inconnus a priori sous forme normalisée :

$$f(a+h) \underset{h\to0}{=} ah^p \underbrace{(1+\dots)}_{u} \qquad\qquad g(a+h) \underset{h\to0}{=} bh^q \underbrace{(1+\dots)}_{v}$$

- On écrit les DL de u et v à l'ordre $n-p-q$ et on effectue leur produit. On obtient un DL de uv à l'ordre $n-p-q$.
- Ceci suffit pour obtenir un DL de fg à l'ordre n en tenant compte du facteur abh^{p+q}.

Exemple 4.2 DL à l'ordre 6 en 0 de $(\sin^2 x \ln(1+x^2))$

On a $\sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ (puisque $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$) et $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ donc $(\sin^2 x)\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$. On a donc

$$\sin^2 x = x^2(1+\dots) \qquad \ln(1+x^2) = x^2(1+\dots) \qquad (\sin^2 x)\ln(1+x^2) = x^4(1+\dots)$$

On veut un résultat final à l'ordre 6 donc tous les $(1+\dots)$ doivent être des DL à l'ordre 2. Ainsi il suffit d'avoir un DL de $\sin^2 x$ et de $\ln(1+x^2)$ à l'ordre 4.
Il est aisé d'avoir un DL à l'ordre 4 de $\ln(1+x^2)$. Par composition, il suffit en effet d'avoir un DL à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$ avec $u = x^2$. On a donc

$$\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

On veut maintenant avoir un DL à l'ordre 4 de $\sin^2 x$. On a :

$$\sin x = x(1+\dots) \qquad \sin^2 x = x^2(1+\dots)$$

Comme on veut un résultat final à l'ordre 4, les $(1+\dots)$ doivent être des DL à l'ordre 2. Ainsi il suffit d'avoir un DL à l'ordre 3 de $\sin x$. On a

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$$

Par conséquent,

$$\sin^2 x \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$$

Il n'y a plus qu'à calculer le DL final. On conserve encore les termes prépondérants en facteur !

$$\begin{aligned}(\sin^2 x)\ln(1+x^2) &\underset{x\to 0}{=} x^4\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^4\left(1 - \frac{5x^2}{6} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} x^4 - \frac{5x^6}{6} + o(x^6)\end{aligned}$$

4.4 Composition

Méthode Déterminer de manière optimale le DL d'une composée

Supposons que l'on veuille calculer le DL d'une composée $g\circ f$ en a à un ordre n donné.

- On détermine la partie principale de f en a : $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} ah^p$.
- On détermine le DL de g en $b = f(a)$ à l'ordre q où q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{n}{p}$.
- On développe f à l'ordre n en a sous forme normalisée et on reporte dans le DL de g en b.

Exemple 4.3 DL à l'ordre 4 en 0 de $\ln(\cos x)$

On écrit tout d'abord que $\ln(\cos x) = \ln(1+u)$ avec $u = \cos x - 1$. Or on sait que $u = \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Donc pour avoir un DL de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4 il nous suffit d'avoir un DL de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2. On aura une précision en $o(u^2)$ et donc en $o(x^4)$. Il nous faut aussi un DL de $u = \cos x - 1$ en x à l'ordre 4.

On a ainsi $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. De plus,

$$u \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad u^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\end{aligned}$$

Pour calculer le DL d'un inverse, on peut utiliser une composition par $\frac{1}{1-x}$ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.4 DL à l'ordre 4 de $\frac{1}{2+\cos x}$ en 0

Il s'agit de se ramener à une expression du type $\frac{1}{1\pm u}$ avec u **tendant vers 0** : on veut donc un dénominateur qui tend vers 1 ce qui n'est pas le cas ici ($2+\cos x$) tend vers 3). Peu importe puisque

$$\frac{1}{2+\cos x} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1-\cos x}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-u}$$

avec $u = \frac{1-\cos x}{3}$. Remarquons que $\frac{1-\cos x}{3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{6}$. On veut un DL à l'ordre 4 donc il nous faut un DL à l'ordre 2 de $\frac{1}{1-u}$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$$

Par ailleurs, il nous faut un DL à l'ordre 4 de $\frac{1-\cos x}{3}$ i.e.

$$u = \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) \qquad u^2 = \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{36} + o(x^4)$$

Finalement,

$$\frac{1}{2+\cos x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} + \frac{x^2}{18} + \frac{x^4}{216} + o(x^4)$$

4.5 Quotient

Méthode **Déterminer de manière optimale le DL d'un quotient**

Supposons que l'on veuille calculer le DL d'un quotient $\frac{f}{g}$ en a à un ordre n donné.

- On détermine les parties principales de f et g.
- On écrit les développements de f et g à des ordres inconnus a priori sous forme normalisée :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} ah^p \underbrace{(1+\dots)}_{u} \qquad\qquad g(a+h) \underset{h\to 0}{=} bh^q \underbrace{(1+\dots)}_{v}$$

- On détermine des DL de u et v à l'ordre $n-p+q$ puis on effectue leur quotient en remarquant que $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ et qu'un DL de $\frac{1}{v} = \frac{1}{1+w}$ s'obtient par composition.
- Ceci suffit pour obtenir un DL de $\frac{f}{g}$ à l'ordre n en tenant compte du facteur $\frac{a}{b}h^{p-q}$.

Exemple 4.5 DL à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\sin x^2}{e^x-1}$ en 0

Remarquons tout d'abord que $\sin x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. Par conséquent,

$$\sin x^2 = x^2(1+\dots) \qquad e^x-1 = x(1+\dots) \qquad \frac{\sin x^2}{e^x-1} = x(1+\dots)$$

On veut un résultat final à l'ordre 3 donc tous les $(1+\dots)$ doivent être des DL à l'ordre 2. Ainsi il suffit d'avoir un DL de $\sin x^2$ à l'ordre 4 et e^x-1 à l'ordre 3.
Il est aisé d'avoir un DL de $\sin x^2$ à l'ordre 4. Par composition, il suffit d'avoir un DL à l'ordre 2 de $\sin u$ avec $u = x^2$. On a donc

$$\sin x^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^4) \underset{x\to 0}{=} x^2(1+o(x^2))$$

On veut maintenant un DL à l'ordre 3 de e^x-1. Rien de plus simple :

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} x\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)$$

Résultat des courses :

$$\frac{\sin x^2}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} x\frac{1+o(x^2)}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$

Il nous faut maintenant un DL à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$. On utilise donc le DL de $\dfrac{1}{1+u}$ à l'ordre 2 avec $u = \dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+o(x^2)$. On a $\dfrac{1}{1+u} = 1-u+u^2+o(u^2)$ et

$$u \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2) \qquad u^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4}+o(x^2)$$

D'où $\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{12}+o(x^2)$. Finalement,

$$\frac{\sin x^2}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} x(1+o(x^2))\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)$$

5 Exemples et applications

5.1 DL en un point autre que 0

Méthode DL en un point autre que 0

Pour calculer un DL en un point a autre que 0, on effectue le changement de variable $x = a+u$ avec u tendant vers 0 de sorte que l'on est ramené à l'étude d'un DL au voisinage de 0. On revient à la fin à la variable x en écrivant $u = x-a$.

Exercice 5.1

$\mathrm{DL}_3(2)$ de $\ln(x)$.

Exercice 5.2

$\mathrm{DL}_3(\frac{\pi}{4})$ de $\cos(x)$.

5.2 Obtention de limites et d'équivalents

Méthode **Obtention de limites**

Chercher une limite, c'est chercher un DL à la précison $o(1)$.

Exercice 5.3

Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^3}$.

Méthode **Obtention d'équivalents**

On cherche en fait le premier terme **non nul** d'un DL. Malheureusement, il n'y a aucune méthode générale pour déterminer a priori l'ordre du premier terme non nul. On est donc obligé de procéder par tatônnements …

Exercice 5.4

Déterminer un équivalent en 0 de $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$.

5.3 Développements asymptotiques

On appelle **développement asymptotiques** un «développement limité» qui ne fait pas intervenir que des puissances entières de x.

Exemple 5.1

Un développement asymptotique à 2 termes de x^x en 0^+ est :

$$x^x \underset{x\to 0^+}{=} 1 + x\ln x + o(x\ln x)$$

On peut également vous demander des développements asymptotiques au voisinage de $\pm\infty$. L'idée est alors d'utiliser un changement de variables $u = \dfrac{1}{x}$ pour se ramener en 0.

Exercice 5.5

Calculer un développement asymptotique à 3 termes de $\sqrt{x^2+x}$.

5.4 Étude de courbes

Méthode **Asymptote et position**

Un développement asymptotique d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$ permet de déterminer les asymptotes à la courbe représentative de la fonction et même la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

Exemple 5.2

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit donc que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$. De plus, sa position par rapport à l'asymptote dépend du signe de $-\frac{1}{8x}$: la courbe est donc au-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Méthode **Tangente et position**

Un développement limité d'une fonction au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ permet de déterminer la tangente à la courbe représentative de la fonction et même la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exemple 5.3

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

On en déduit donc que la courbe représentative de f admet une tangente d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$ au point d'abscisse 0 et qu'elle est au-dessus de sa tangente au voisinage à droite de 0 et au-dessous au voisinage à gauche de 0. En effet $f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^3}{48}$ et $f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)$ et $\frac{x^3}{48}$ sont donc de même signe au voisinage de 0.

Exemple 5.4

$$f(x) = \frac{e^x-1}{\operatorname{sh} x} \underset{x\to0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{72} + o(x^3)$$

f est prolongeable par continuité en 0, ce prolongement est dérivable en 0 et la courbe représentative de f admet une tangente d'équation $y = 1 + \frac{x}{2}$ au point d'abscisse 0. La courbe est située au-dessous de sa tangente au voisinage à droite de 0 et au-dessus au voisinage à gauche de 0.
En effet $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^3}{72}$ et $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)$ et $-\frac{x^3}{72}$ sont donc de même signe au voisinage de 0.

5.5 Extremum local

Définition 5.1 Extremum local

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un **maximum local** en a si f est majorée par $f(a)$ au voisinage de a i.e. si

$$\exists h > 0,\ \big(]a-h, a+h[\subset \mathrm{D}_f \text{ ET } \forall x \in]a-h, a+h[,\ f(x) \leq f(a)\big)$$

- On dit que f admet un **minimum local** en a si f est minorée par $f(a)$ au voisinage de a i.e. si

$$\exists h > 0,\ \big(]a-h, a+h[\subset \mathrm{D}_f \text{ ET } \forall x \in]a-h, a+h[,\ f(x) \geq f(a)\big)$$

On dit que f admet un **extremum local** en a si f admet un maximum ou un minimum local en a.
On parle d'extremum local **strict** si les inégalités ci-dessus sont strictes.

Remarque. Par opposition aux extrema locaux, les extrema vu auparavant sont aussi appelés des extrema **globaux**.

Attention ! Un extremum local n'est pas forcément un extremum global.
Un extremum global n'est un extremum local que s'il n'est pas atteint en les bornes de l'ensemble de définition.

Proposition 5.1 Condition nécessaire/suffisante pour extremum local

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 en a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big)$$

- Si f admet un minimum local en a, alors $c_1 = 0$ et $c_2 \geq 0$.
- Si f admet un maximum local en a, alors $c_1 = 0$ et $c_2 \leq 0$.
- Si $c_1 = 0$ et $c_2 > 0$, alors f admet un minimum local strict en a.
- Si $c_1 = 0$ et $c_2 < 0$, alors f admet un maximum local strict en a.

Exemple 5.5

On a $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x} \underset{x \to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)$ donc la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ et ce prolongement admet un minimum local strict en 0.