

1 Cours

Espaces vectoriels normés

Normes Définition. Rappel sur les normes euclidiennes. Normes usuelles sur \mathbb{K}^n :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des applications bornées sur un ensemble X à valeurs dans \mathbb{K} . Normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt} \qquad \|f\|_\infty = \max_{[a, b]} |f|$$

Distance associée à une norme. Boules et sphères. Définition de la convexité d'une partie d'un \mathbb{R} -espace vectoriel. Convexité des boules. Equivalence de normes. Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Partie bornée, application bornée. Produit d'espaces vectoriels normés : norme produit.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une application est une norme, on peut essayer de l'exprimer à l'aide d'une norme connue.
- Calculer une norme uniforme d'une suite ou d'une fonction par une étude de cette suite ou de cette fonction.
- Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on exhibe une suite u tel que $\frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)}$ tende vers 0 ou $+\infty$.

3 Questions de cours

Normes sur \mathbb{K}^n Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \qquad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

Pour chaque inégalité, donner un vecteur x non nul pour lequel il y a égalité.

Normes sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$,

$$\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty \qquad \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty \qquad \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$$

Pour chaque inégalité, donner une fonction f non nulle pour laquelle il y a égalité.

Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes entre elles.

Distance à une partie Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On pose $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ pour $x \in E$.

Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$$

Convexité des boules Montrer qu'une boule fermée d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé est convexe.

Norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ On rappelle qu'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ en posant $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ pour $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$. Déterminer une expression de $\langle A, B \rangle$ en fonction des coefficients de A et B .

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Déterminer une expression de $\|A\|$ en fonction des coefficients de A .