Devoir à la maison n°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 On montre que $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- $I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^2$, $A - B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^2$, $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ car les coefficients de AB sont des sommes de produits des coefficients de A et B.

2 **2.a** C'est en fait un résultat du cours : les inversibles d'un anneau forment un groupe.

2.b Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Remarquons que $\det(A) = ad - bc \in \mathbb{Z}$.
Supposons que $A \in GL_2(\mathbb{Z})$. Il existe donc $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ tel que $AB = I_2$. Ainsi $\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(I_2) = 1$. Mais $\det A$ et $\det B$ sont des entiers donc $\det A = \pm 1$ i.e. $|ad - bc| = 1$.
Supposons que $|ad - bc| = 1$ i.e. $\det A = \pm 1$. D'après la formule de la comatrice,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{com}(A)^{\top} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

donc $A \in GL_2(\mathbb{Z})$.

3 **3.a** L'application $M \in GL_2(\mathbb{Z}) \mapsto \det(M)$ est un morphisme du groupe $(GL_2(\mathbb{Z}), \times)$ dans le groupe $(\{-1, 1\}, \times)$. $SL_2(\mathbb{Z})$ est donc un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Z})$ en tant que noyau de ce morphisme.

3.b En utilisant le fait que 3 et 5 sont premiers entre eux et le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ \iff &3d - 5c = 1 = 3 \times 2 - 5 \times 1 \\ \iff &3(d - 2) = 5(c - 1) \\ \iff &\exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} c = 1 + 3k \\ d = 2 + 5k \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des couples recherchés est donc $\{(1 + 3k, 2 + 5k), k \in \mathbb{Z}\}$.

3.c De la même manière,

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \setminus SL_2(\mathbb{Z}) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} c = -1 + 3k \\ d = -2 + 5k \end{cases}$$

L'ensemble des couples recherchés est donc $\{(1 + 3k, 2 + 5k), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1 + 3k, -2 + 5k), k \in \mathbb{Z}\}$.

3.d Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Alors il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si il existe $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ad - bc = \pm 1$. D'après le théorème de Bézout, ceci équivaut à $a \wedge b = 1$.

$\boxed{4}$ **4.a** Tout d'abord, $\chi_S = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc S est diagonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(S) = \{i, -i\}$. On calcule $E_i(S) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-i}(S) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right)$. On a donc $S = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Puisque $\mathrm{Sp}(T) = \{1\}$, T n'est pas diagonalisable sinon on aurait $T = I_2$. T est déjà triangulaire donc il n'y a pas de matrice de passage à spécifier.

Enfin, $TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $\chi_{TS} = X^2 - X + 1 = (X + j)(X + \bar{j})$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Ainsi TS est diagonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(TS) = \{-j, -\bar{j}\}$. On calcule $E_{-j}(TS) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{j} \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-\bar{j}}(TS) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}\right)$. On a donc $TS = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\bar{j} & -j \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -\bar{j} \end{pmatrix}$.

4.b χ_S et χ_{TS} ne sont pas scindés sur $\mathbb{R}$ donc S et TS ne sont pas trigonalisables et encore moins diagonalisables.
T est trigonalisable mais pas diagonalisable pour les mêmes raisons qu'à la question précédente.

$\boxed{5}$ **5.a** A est annulé $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ qui est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$ donc les formes réduites diagonales possibles de A sont les matrices $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

5.b Comme $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\det A = 1$ donc A est semblable et donc égale à $\pm I_2$. Réciproquement, les matrices I_2 et $-I_2$ appartient bien à $SL_2(\mathbb{Z})$ vérifient bien l'égalité de l'énoncé. Les matrices $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = I_2$ sont I_2 et $-I_2$.

$\boxed{6}$ **6.a** A est annulé par $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ qui est simplement scindé sur $\mathbb{C}$. Ainsi A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{i, -i\}$. Comme $\det(A) = 1$, $\mathrm{Sp}(A) = \{i, -i\}$ et A est donc semblable à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Comme la trace est un invariant de similitude, $\mathrm{tr}(A) = i + (-i) = 0$.

6.b Puisque $\mathrm{tr}(A) = 0$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. De plus, $\det(A) = 1 = -a^2 - bc$.

Réciproquement, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et $a^2 + bc = -1$, on a bien $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $A^2 = -I_2$.

Les matrices $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 = -I_2$ sont les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + bc = -1$.

$\boxed{7}$ **7.a** C'est un classique. Soient U et V deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $V = P^{-1}UP$ i.e. $PV = UP$. Il existe alors deux matrices Q et R de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $P = Q + iR$. On a alors $QV = UQ$ et $RV = UR$ en consiérant les parties réelles et imaginaires.
La fonction $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \det(Q + zR)$ est polynomiale. Comme $f(i) \neq 0$, f n'est pas nulle et possède donc un nombre fini de racines. Comme $\mathbb{R}$ est inifini, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f(\lambda) \neq 0$. Ainsi $S = P + \lambda Q \in GL_2(\mathbb{R})$. Comme $QV = UQ$ et $RV = UR$, on a encore $SV = US$ puis $V = S^{-1}US$. U et V sont donc bien semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7.b Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $A^2 = -I_2$. On a vu à la question **6.a** que A était semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On a vu également à la question **4.a** que S était semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à cette même matrice. Par transitivité de la similitude, A et S sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Mais comme ces deux matrices sont à coefficients réels, elles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

$\boxed{8}$ **8.a** Il est clair qu'un réseau engendré par une base $\mathcal{B}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est le sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ engendré par $\mathcal{B}$. Un réseau est donc un groupe additif.

8.b Tout d'abord, si (α, β) est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, alors $\mathrm{Im}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \neq 0$. En effet, si $\mathrm{Im}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \lambda\beta$, ce qui contredit la liberté de (α, β).
Il suffit alors de remarquer que $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta = \mathbb{Z}(-\alpha) + \mathbb{Z}\beta$. Le réseau engendré par (α, β) est égal au réseau engendré par $(-\alpha, \beta)$ et l'un des deux complexes $\frac{\alpha}{\beta}$ et $-\frac{\alpha}{\beta}$ possède une partie imaginaire strictement positive.

8.c Pour tout nombre complexe z, $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{\overline{az+b}}{\overline{cz+d}}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\frac{(az+b)\overline{cz+d} - \overline{az+b}(cz+d)}{(cz+d)\overline{cz+d}}\\
&= \frac{1}{2i}\frac{(az+b)(c\overline{z}+d) - (a\overline{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2}\\
&= \frac{1}{2i}\frac{(ac|z|^2+adz+bc\overline{z}+bd) - (ac|z|^2+ad\overline{z}+bcz+bd)}{|cz+d|^2}\\
&= \frac{1}{2i}\frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2}\\
&= \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\operatorname{Im}(z)
\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ **9.a** Remarquons que $\omega_1' \in \Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2$. De même, il existe $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2$. On a donc bien

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. De la même manière, il existe $\mathrm{Q} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \mathrm{Q}\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}$$

Notons que P et Q sont les matrices de passages respectives de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$. Ces deux matrices sont donc inverses l'une de l'autre. Comme elles sont à coefficients entiers, elles sont en fait dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
En particulier, $ad - bc = \pm 1$. D'après la question précédente ;

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1'}{\omega_2'}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{a\omega_1/\omega_2 + b}{c\omega_1/\omega_2 + d}\right) = \frac{ad-bc}{|c\omega_1/\omega_2 + d|^2}\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

Comme ω_1/ω_2 et ω_1'/ω_2' sont dans $\mathcal{H}$, leurs parties imaginaires sont strictement positives. On en déduit que $ad - bc > 0$ et donc que $ad - bc = 1$. Finalement, $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

9.b Réciproquement, supposons qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

Alors $\omega_1', \omega_2' \in \Lambda_{\mathcal{B}}$ puis $\Lambda_{\mathcal{B}'} \subset \Lambda_{\mathcal{B}}$. Mais on a également

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{P}^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ donc $\Lambda_{\mathcal{B}} \subset \Lambda_{\mathcal{B}'}$.
Par double inclusion, $\Lambda_{\mathcal{B}} = \Lambda_{\mathcal{B}'}$.

$\boxed{10}$ D'après les deux questions précédentes, $\Lambda_{\mathcal{B}} = \Lambda_{\mathcal{B}'}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ (on ne requiert pas $\omega_1'/\omega_2' \in \mathcal{H}$) i.e. $3d - 5c = 1$. D'après la question **3.c**, l'ensemble des couples (c,d) recherchés est $\{(1+3k, 2+5k), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1+3k, -2+5k), k \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxed{11}$ Soit $(\tau, \tau') \in \mathcal{H}^2$ tel que $\Lambda_\tau = \Lambda_{\tau'}$. D'après la question **9.a**, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que

$$\begin{cases} \tau' = a\tau + b \\ 1 = c\tau + d \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

Comme $(1, \tau)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, l'égalité $1 = c\tau + d$ donne $c = 0$ et $d = 1$. Puisque $ad - bc = 1$, $a = 1$. Ainsi $\tau' = \tau + b$.
Réciproquement, s'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau' = \tau + b$, on montre aisément que $\Lambda_{\tau'} = \Lambda_\tau$.

$\boxed{12}$ **12.a** Soit Λ un réseau. On a vu que Λ peut être engendré par une base (α, β) où $\tau = \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{H}$. Il est clair que $\Lambda = \beta\Lambda_\tau$ donc Λ est semblable à Λ_τ.

12.b Soit $(\tau, \tau') \in \mathcal{H}^2$ tel que Λ_τ et $\Lambda_{\tau'}$ soient semblables. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda_{\tau'} = \lambda\Lambda_\tau$. $\Lambda_{\tau'}$ est engendré par la base $(\tau', 1)$ et $\lambda\Lambda_\tau$ est engendré par la base $(\lambda\tau, \lambda)$. De plus, $\dfrac{\tau'}{1} = \tau' \in \mathcal{H}$ et $\dfrac{\lambda\tau}{\lambda} = \tau \in \mathcal{H}$ donc, d'après la question **9.a**, il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\begin{cases} \tau' = a\lambda\tau + b\lambda = (a\tau + b)\lambda \\ 1 = c\lambda\tau + d\lambda = (c\tau + d)\lambda \end{cases}$. Ainsi

$$\tau' = \frac{\tau'}{1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$. Posons $\lambda = \dfrac{1}{c\tau + d}$. Alors

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\tau \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Les réseaux engendrés par les bases $(\tau', 1)$ et $(\lambda\tau, \lambda)$ sont donc égaux d'après la question **9.a**. Ainsi $\Lambda_{\tau'} = \lambda\Lambda_\tau$ de sorte que $\Lambda_{\tau'}$ et Λ_τ sont semblables.

$\boxed{13}$ **13.a** Une similitude directe de centre O est une application de la forme $Z \in \mathbb{C} \mapsto zZ$ où $z \in \mathbb{C}$. On en déduit que l'application qui à $z \in \mathrm{S}(\lambda)$ associe la similitude $Z \mapsto zS$ établit une bijection de $\mathrm{S}(\lambda)$ sur l'ensemble des similitudes laissant stable le réseau Λ.

13.b On note (α, β) une base engendrant Λ.
Soit une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ laissant stable Λ. Notamment, $\lambda\alpha \in \Lambda$ donc il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\lambda\alpha = u\alpha + v\beta$. Comme λ, u et v sont des réels, on a donc $\lambda = u \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{Z}$, il est clair que $\lambda\Lambda \subset \Lambda$.
Ainsi $\mathrm{S}(\Lambda) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$.

13.c On vérifie que $\mathrm{S}(\Lambda)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

13.d Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$z \in \mathrm{S}(\Lambda_{\mathcal{B}}) \iff z\Lambda_{\mathcal{B}} \subset \Lambda_{\mathcal{B}} \iff \frac{z}{\omega_2}\Lambda_{\mathcal{B}} \subset \frac{1}{\omega_2}\Lambda_{\mathcal{B}} \iff z\Lambda_\tau \subset \Lambda_\tau \iff z \in \mathrm{S}(\Lambda_\tau)$$

Ainsi $\mathrm{S}(\Lambda_{\mathcal{B}}) = \mathrm{S}(\Lambda_\tau)$.

13.e Soit $z \in \mathrm{S}(\Lambda_\tau)$. Comme $1 \in \Lambda_\tau$, $z = z \times 1 \in \Lambda_\tau$. Ainsi $\mathrm{S}(\Lambda_\tau) \subset \Lambda_\tau$.

$\boxed{14}$ **14.a** Soit $z \in \mathrm{S}(\Lambda_\tau) \setminus \mathbb{Z}$. Puisque $z\Lambda_\tau \subset \Lambda_\tau$, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $\begin{cases} z\tau = a\tau + b \\ z = c\tau + d \end{cases}$. Ainsi $c\tau^2 + (d - a)\tau + b = 0$. Mais comme $z \notin \mathbb{Z}$, $c \neq 0$. Ainsi τ est bien racine d'un polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

14.b **14.b.i** On a $u\tau^2 + v\tau + w = 0$. Posons $z = u\tau$. Alors $z \notin \mathbb{R}$ puisque $\tau \notin \mathbb{R}$ et $u \neq 0$. De plus, $z\tau = u\tau^2 = -v\tau - w \in \Lambda_\tau$ et $z \times 1 = z = u\tau \in \Lambda_\tau$. Comme $(1, \tau)$ engendre Λ en tant que groupe, $z\Lambda_\tau \subset \Lambda_\tau$ i.e. $z \in \mathrm{S}(\Lambda_\tau)$.

14.b.ii Supposons que $u = 1$. Avec les notations de la question précédente, $z = u\tau = \tau \in \mathrm{S}(\Lambda_\tau)$. De plus, il est clair que $1 \in \mathrm{S}(\Lambda_\tau)$. Comme $\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$ est un groupe additif, le sous-groupe engendré par $(1, \tau)$, à savoir Λ_τ est inclus dans $\mathrm{S}(\Lambda_\tau)$. On a l'inclusion réciproque d'après la question **13.e**. Ainsi $\mathrm{S}(\Lambda_\tau) = \Lambda_\tau$.

$\boxed{15}$ **15.a** Soit $\tau \in \mathcal{H}$. D'après la question **8.c**,

$$\mathrm{Im}(g(\tau)) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2} > 0$$

donc $g(\tau) \in \mathcal{H}$.

15.b Notons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Pour tout $\tau \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\Phi(\mathrm{A}) \circ \Phi(\mathrm{A}')(\tau) &= \frac{a\frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'} + b}{c\frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'} + d}\\ &= \frac{a(a'\tau+b') + b(c'\tau+d')}{c(a'\tau+b') + d(c'\tau+d')}\\ &= \frac{(aa'+bc')\tau + ab' + bd'}{(ca'+dc')\tau + cb' + dd'}\end{aligned}$$

Or $\mathrm{AA}' = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$ donc on a bien

$$\forall \tau \in \mathcal{H},\ \Phi(\mathrm{A}) \circ \Phi(\mathrm{A}')(\tau) = \Phi(\mathrm{AA}')(\tau)$$

i.e. $\Phi(\mathrm{A}) \circ \Phi(\mathrm{A}') = \Phi(\mathrm{AA}')$.
Par surjectivité de Φ, $\circ$ est bien une loi interne sur Γ.

15.c D'après la question précédente,

$$\Phi(\mathrm{A}) \circ \Phi(\mathrm{A}^{-1}) = \Phi(\mathrm{A}^{-1}) \circ \Phi(\mathrm{A}) = \Phi(\mathrm{I}_2) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$$

Ainsi $\Phi(\mathrm{A})$ est bijective i.e. inversible pour la loi $\circ$ et $\Phi(\mathrm{A})^{-1} = \Phi(\mathrm{A}^{-1}) \in \Gamma$.
On vérifie alors que Γ est un sous-groupe du groupe symétrique $\mathrm{S}_{\mathcal{H}}$ (groupe des permutations de $\mathcal{H}$). En effet, les questions précédentes montrent que $\Gamma \subset \mathrm{S}_{\mathcal{H}}$, Γ est stable par inversion et par composition. De plus, Γ n'est évidemment pas vide.

15.d Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Alors

$$\begin{aligned}&\Phi(\mathrm{A}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\\ \iff& \forall \tau \in \mathcal{H},\ \frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \tau\\ \iff& \forall \tau \in \mathcal{H},\ c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0\\ \iff& c = (d-a) = b = 0 \qquad \text{car } \mathcal{H} \text{ est infini}\\ \iff& a = d = \pm 1 \text{ ET } b = c = 0 \qquad \text{car } ad - bc = 1\\ \iff& \mathrm{A} = \pm \mathrm{I}_2\end{aligned}$$

Remarque. On a donc montré que le noyau du morphisme de groupes Φ est $\{\mathrm{I}_2, -\mathrm{I}_2\}$.

15.e **15.e.i** Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{A}') \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^2$. Alors

$$\Phi(\mathrm{A}) = \Phi(\mathrm{A}') \iff \Phi(\mathrm{A}'\mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \iff \mathrm{A}'\mathrm{A}^{-1} = \pm \mathrm{I}_2 \iff \mathrm{A}' = \pm \mathrm{A}$$

15.e.ii On calcule $\mathrm{ST} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{TS} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathrm{ST} \neq \pm \mathrm{TS}$ donc, d'après la question précédente, $\Phi(\mathrm{ST}) \neq \Phi(\mathrm{TS})$ i.e. $\Phi(\mathrm{S})\Phi(\mathrm{T}) \neq \Phi(\mathrm{T})\Phi(\mathrm{S})$. Γ n'est donc pas un groupe commutatif.

16 **16.a**

$$\begin{aligned}&z \in \mathcal{C}(\omega, \mathrm{R})\\ \iff& |z-\omega|^2 = \mathrm{R}^2\\ \iff& (z-\omega)\overline{(z-\omega)} = \mathrm{R}^2\\ \iff& z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \omega\overline{\omega} = \mathrm{R}^2\\ \iff& |z|^2 - (\omega\overline{z} + \overline{\omega}z) + |\omega|^2 = \mathrm{R}^2\end{aligned}$$

Le cercle $\mathcal{C}(\omega, \mathrm{R})$ est inlcus dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(\omega) > \mathrm{R}$.

16.b Remarquons que pour tout $z \in \mathcal{H}$, $s(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\overline{z}}{|z|^2}$. De plus, s est une involution. Ainsi

$$\begin{aligned}
& z \in s(\mathcal{C}(\omega, \mathrm{R})) \\
\iff & s(z) \in \mathcal{C}(\omega, \mathrm{R}) \\
\iff & \frac{1}{|z|^2} + (\omega\frac{z}{|z|^2} + \overline{\omega}\frac{\overline{z}}{|z|^2}) + |\omega|^2 = \mathrm{R}^2 \\
\iff & 1 + (\omega z + \overline{\omega z}) + |\omega|^2|z|^2 = \mathrm{R}^2|z|^2 \\
\iff & (|\omega|^2 - \mathrm{R}^2)|z|^2 + (\omega z + \overline{\omega z}) + 1 = 0 \\
\iff & (|\omega|^2 - \mathrm{R}^2)|z|^2 + (\omega z + \overline{\omega z}) + 1 = 0 \\
\iff & |z|^2 - (\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z) + \frac{1}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2} = 0 \qquad \text{en posant } \alpha = -\frac{\overline{\omega}}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2} \\
\iff & |z|^2 - (\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z) + |\alpha|^2 = |\alpha|^2 - \frac{1}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2} \\
\iff & |z|^2 - (\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z) + |\alpha|^2 = \mathrm{M}^2 \qquad \text{en posant } \mathrm{M} = \frac{\mathrm{R}}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2}
\end{aligned}$$

Ainsi $s(\mathcal{C}(\omega, \mathrm{R})) = \mathcal{C}(\alpha, \mathrm{M}) = \mathcal{C}\left(-\frac{\overline{\omega}}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2}, \frac{\mathrm{R}}{|\omega|^2 - \mathrm{R}^2}\right)$.

> **Remarque.** On a bien $|\omega|^2 - \mathrm{R}^2 > 0$ puisque $|\omega| \geq \mathrm{Im}(\omega) > \mathrm{R}$.

17 **17.a** A nouveau, on utilise le fait que s est une involution et que $s(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ pour tout $z \in \mathcal{H}$. Soit $z \in \mathcal{H}$. Alors

$$\begin{aligned}
& z \in s(\mathcal{D}) \\
\iff & s(z) \in \mathcal{D} \\
\iff & \mathrm{Im}(s(z)) = \beta \\
\iff & -\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \beta \\
\iff & \mathrm{Im}(z) = \beta|z|^2 \\
\iff & \frac{z - \overline{z}}{2i} = \beta|z|^2 \\
\iff & |z|^2 - (\omega\overline{z} + \overline{\omega}z) = 0 \qquad \text{en posant } \omega = \frac{i}{2\beta} \\
\iff & |z|^2 - (\omega\overline{z} + \overline{\omega}z) + |\omega|^2 = \frac{1}{4\beta^2}
\end{aligned}$$

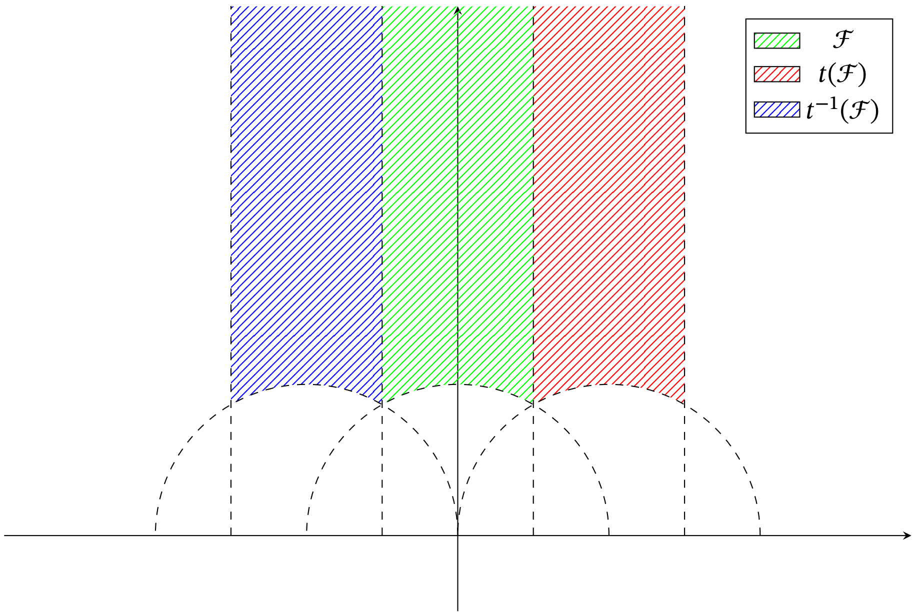
Ainsi $s(\mathcal{D}) = \mathcal{C}\left(\frac{i}{2\beta}, \frac{1}{2\beta}\right) \setminus \{0\}$.

17.b

$$\begin{aligned}
& z \in s(\mathcal{D}_+) \\
\iff & s(z) \in \mathcal{D}_+ \\
\iff & \mathrm{Re}(s(z)) = \alpha \\
\iff & -\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \alpha \\
\iff & -\mathrm{Re}(z) = \alpha|z|^2 \\
\iff & -\frac{z + \overline{z}}{2} = \alpha|z|^2 \\
\iff & |z|^2 - (\omega\overline{z} + \overline{\omega}z) = 0 \qquad \text{en posant } \omega = \frac{1}{2\alpha} \\
\iff & |z|^2 - (\omega\overline{z} + \overline{\omega}z) + |\omega|^2 = \frac{1}{4\alpha^2}
\end{aligned}$$

Ainsi $s(\mathcal{D})$ est le demi-cercle $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha}\right) \cap \mathcal{H}$.

18 Clairement, $\mathcal{F}$ est une demi-bande verticale privée d'un disque ouvert. On remarque que $t(z) = z+1$ pour tout $z \in \mathcal{H}$ donc $t(\mathcal{F})$ et $t^{-1}(\mathcal{F})$ sont respectivement les images de $\mathcal{F}$ par les translations de vecteurs d'affixes 1 et -1.



19 **19.a** Montrons que l'ensemble

$$\mathrm{K} = \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2,\ |c\tau + d| \leq 1\}$$

est fini. Posons $\tau = \alpha + i\beta$ avec $\beta > 0$. Soit $(c,d) \in \mathrm{K}$. Alors

$$|c\tau + d|^2 = (c\alpha + d)^2 + c^2\beta^2 \leq 1$$

Notamment, $|c| \leq \dfrac{1}{\beta}$ puis $|d| \leq |c\alpha + d| + |c\alpha| \leq 1 + \dfrac{|\alpha|}{\beta}$. L'ensemble K est donc bien fini. Considérons maintenant l'ensemble

$$\mathrm{L} = \left\{(c,d) \in \mathbb{Z}^2,\ \exists(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{G}\right\}$$

L'ensemble $\mathrm{K} \cap \mathrm{L}$ est encore fini. De plus, $\mathrm{K} \cap \mathrm{L}$ n'est pas vide puisqu'il contient $(0,1)$. En effet, on a clairement $(0,1) \in \mathrm{K}$ et $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} = \Phi(\mathrm{I}_2) \in \mathrm{G}$ de sorte que $(0,1) \in \mathrm{L}$. On condidère alors $(c_0, d_0) \in \mathrm{K} \cap \mathrm{L}$ tel que

$$|c_0\tau + d_0| = \min_{(c,d) \in \mathrm{K}\cap\mathrm{L}} |c\tau + d|$$

Il existe donc $(a_0, b_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\mathrm{A}_0 \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $g_0 = \phi(\mathrm{A}_0) \in \mathrm{G}$. Soit alors $g \in \mathrm{G}$. Comme $\mathrm{G} \subset \Gamma$, il existe $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $g = \Phi(\mathrm{A})$. Ainsi $(c,d) \in \mathrm{L}$. Si $|c\tau + d| \leq 1$ alors $(c,d) \in \mathrm{K} \cap \mathrm{L}$ donc $|c\tau + d| \geq |c_0\tau + d_0|$. Si $|c\tau + d| > 1$, alors $|c\tau + d| > 1 \geq |c_0\tau + d_0|$ à nouveau. Ainsi, d'après la question **8.c**,

$$\mathrm{Im}(g(\tau)) = \frac{1}{|c\tau + d|^2} |\,\mathrm{Im}(z) \leq \frac{1}{|c_0\tau + d_0|^2} |\,\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(g_0(\tau))$$

19.b Puisque $t(z) = z + 1$ pour tout $z \in \mathcal{H}$, $t^m(\tau') = \tau' + m$ puis $\mathrm{Re}(t^m(\tau')) = \mathrm{Re}(\tau') + m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Il suffit alors de choisir $m = \lfloor 1/2 - \mathrm{Re}(\tau') \rfloor$ pour avoir $|\mathrm{Re}(t^m(\tau'))| \leq \dfrac{1}{2}$.

19.c Posons $\tau'' = t^m(\tau')$. Comme $g = s \circ \tau^m \in \mathrm{G}$,

$$\mathrm{Im}(s(\tau'')) \leq \mathrm{Im}(g_0(\tau)) = \mathrm{Im}(\tau') = \mathrm{Im}(\tau' + m) = \mathrm{Im}(\tau'')$$

Or $s(\tau'') = -\dfrac{\overline{\tau''}}{|\tau''|^2}$ donc $\mathrm{Im}(s(\tau'')) = \dfrac{\mathrm{Im}(\tau'')}{|\tau''|^2}$. Finalement,

$$\frac{\mathrm{Im}(\tau'')}{|\tau''|^2} \leq \mathrm{Im}(\tau'')$$

puis $|\tau''| \geq 1$ puisque $\mathrm{Im}(\tau'') > 0$. Ainsi $\tau'' \in \mathcal{F}$.

$\boxed{\mathbf{20}}$ Soit $g \in \Gamma$. On considère $\rho \in \mathring{\mathcal{F}}$. Posons $\tau = g(\rho)$ et adoptons les notations des questions précédentes. On a donc $\tau'' = t^m \circ g_0 \circ g(\rho) \in \mathcal{F}$. En contraposant le résultat admis, on a alors $t^m \circ g_0 \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. Ainsi $g = g_0^{-1} \circ t^{-m} \in \mathrm{G}$. Ainsi $\Gamma \subset \mathrm{G}$. L'inclusion réciproque étant évidente, $\Gamma = \mathrm{G}$.