SEMAINE DU 17/03

1 Cours

Fonctions à valeurs vectorielles

Les fonctions considérées sont des fonctions définies sur un intervalle de \mathbb{R} , à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

Dérivabilité Définition. La dérivabilité implique la continuité. Une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a. Coordonnées de la dérivée dans une base. Opérations : dérivabilité et dérivée d'une combinaison linéaire, de $L \circ f$ où L est linéaire, de B(f,g) où B est bilinéaire (cas du produit scalaire), de $M(f_1,\ldots,f_n)$ où M est multilinéaire, de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. Fonctions de classe \mathcal{C}^k et opérations.

Intégration Fonctions continues par morceaux. Définition de l'intégrale sur un segment à partir des fonctions coordonnées (indépendante de la base choisie). Propriétés : linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Sommes de Riemann. Dérivabilité et dérivée de $x\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

Suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles Interversion limite/intégration, série/intégration, limite/dérivation, série/dérivation. Dérivabilité et dérivée de $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tu)$ où $u \in \mathcal{L}(E)$.

Equations différentielles linéaires

Révisions de première année Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1. Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants.

2 Méthodes à maîtriser

- Résoudre une EDL scalaire d'ordre un avec second membre :
 - 1. Résoudre l'équation homogène.
 - 2. Rechercher une solution particulière (utilisation éventuelle de la méthode de variation de la constante).
 - 3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.
 - 4. Prise en compte d'une condition initiale éventuelle.
- Résoudre une EDL scalaire d'ordre deux à coefficients constants avec second membre :
 - 1. Résoudre l'équation homogène via l'équation caractéristique.
 - 2. Recherche d'une solution particulière (utilisation éventuelle du principe de superposition)
 - (a) second membre $P(t)e^{\alpha t} \rightarrow \text{solution particulière } Q(t)e^{\alpha t}$
 - (b) dans le cas de fonctions trigonométriques, passage en complexe pour se ramener au premier cas.
 - 3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.
 - 4. Prise en compte des conditions initiales éventuelles.

3 Questions de cours

Banque CCP Exos 3, 4, 42

Retour sur le DS n°13 Justifier la convergence de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exponentielle et dérivation Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.