Probabilites

Révisions de première année

Solution 1

La probabilité recherchée est $\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{10} = \frac{4}{55}$.

Solution 2

On définit les événement suivants.

AR La boule tirée dans l'urne A est rouge.

AV La boule tirée dans l'urne A est verte.

X Les deux boules tirées dans l'urne B sont rouges.

La probabilité recherchée est $P(AV|X)$. D'après la formule de Bayes

$$P(AV|X) = \frac{P(X|AV)P(AV)}{P(X|AV)P(AV) + P(X|AR)P(AR)}$$

Il est clair que $P(AV) = \frac{3}{5}$ et $P(AR) = \frac{2}{5}$.
Par ailleurs, $P(X|AV)$ est la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules rouges dans une urne contenant trois boules rouges et trois boules vertes. Autrement dit, $P(X|AV) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.
De même, $P(X|AR)$ est la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules rouges dans une urne contenant quatre boules rouges et deux boules vertes. Autrement dit, $P(X|AR) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.
Après calcul, on trouve $P(AV|X) = \frac{3}{7}$.

Solution 3

On notera U_k l'événement «l'urne choisie est l'urne numéro k» et B l'événement la boule tirée est blanche.

1. On recherche donc $P(B)$. Comme $\{U_k\}_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, on obtient avec après la formule des probabilités totales :
$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \mid U_k)P(U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$$

2. On recherche $P(U_k \mid B)$. Par définition
$$P(U_k \mid B) = \frac{P(B \cap U_k)}{P(B)} = \frac{P(B \mid U_k)P(U_k)}{P(B)} = \frac{\frac{k}{n} \times \frac{1}{n}}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

Solution 4

On notera A_n l'événement «le buveur ne boit pas le $n^{\text{ème}}$ jour. L'énoncé signifie que $P(A_{n+1}|A_n) = 0,4$ et $P(A_{n+1}|\overline{A_n}) = 0,8$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que le buveur ne boit pas le premier jour, autrement dit $P(A_1) = 1$.

1. Pour simplifier, posons $p_n = P(A_n)$. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|\overline{A_n})P(\overline{A_n}) = 0,4p_n + 0,8(1-p_n) = 0,8 - 0,4p_n$$

2. La suite (p_n) est arithmético-géométrique. On introduit l'unique solution p de l'équation $x = 0,8 - 0,4x$ autrement dit $p = \frac{4}{7}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$p_{n+1} - p = (0,8 - 0,4p_n) - (0,8 - 0,4p) = -0,4(p_n - p)$$

Une récurrence évidente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n - p = (-0,4)^{n-1}(p_1 - p)$$

Autrement dit

$$p_n = \frac{2}{7} + \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\frac{5}{7}$$

3. Puisque $\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{7}$.

Solution 5

1. S suit évidemment la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.

2. La loi de F conditionnée par l'événement $S = s$ est la loi $\mathcal{B}\left(s, \frac{1}{2}\right)$.

3. F est clairement à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit donc $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F = k) = \sum_{s=0}^{n} P(F = k | S = s) P(S = s)$$

Il est clair que $P(F = k|S = s) = 0$ pour $s < k$ donc

$$\begin{aligned}
P(F = k) &= \sum_{s=k}^{n} P(F = k|S = s)P(S = s) \\
&= \sum_{s=k}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^s \binom{s}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^s \left(\frac{5}{6}\right)^{n-s} \binom{n}{s} \\
&= \sum_{s=k}^{n} \frac{5^{n-s}}{2^s 6^n} \binom{s}{k}\binom{n}{s} \\
&= \sum_{s=k}^{n} \frac{5^{n-s}}{2^s 6^n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{5^{n-s-k}}{2^{s+k} 6^n} \binom{n-k}{s} \\
&= \binom{n}{k} \frac{5^n}{10^k 6^n} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{1}{10^s} \binom{n-k}{s}
\end{aligned}$$

En appliquant la formule du binôme

$$\begin{aligned}
P(F = k) &= \binom{n}{k} \frac{5^n}{10^k 6^n} \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \frac{5^n 11^{n-k}}{10^n 6^n} \\
&= \binom{n}{k} \frac{11^{n-k}}{12^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{12}\right)^k \left(\frac{11}{12}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que F suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{12}\right)$.

Solution 6

L'événement A est l'événement contraire de l'événement «la famille n'a que des enfants de même sexe», ce dernier événement étant l'union disjointe des événements «la famille a n garçons» et «la famille a n filles». On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - 2 \times \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{1-n}$$

L'événement B est la réunion disjointe des événements «la famille n'a aucune fille» et «la famille a exactement une fille». On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2^n} + \binom{n}{1}\frac{1}{2^n} = (n+1)2^{-n}$$

L'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est l'événement «la famille a une unique fille». Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \binom{n}{1}\frac{1}{2^n} = n2^{-n}$$

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$ autrement dit si et seulement si

$$(1 - 2^{1-n})(n+1)2^{-n} = n2^{-n}$$

ou encore, après simplification,

$$2^n - 2n - 2 = 0$$

Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto 2^t - 2t - 2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : t \mapsto 2^t \ln 2 - 2$. f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(2) = 4\ln 2 - 2 > 0$. Ainsi f' est strictement positive sur $[2, +\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Puisque $f(3) = 0$, f s'annule uniquement en 3 sur $[2, +\infty[$, ce qui prouve que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Solution 7

---

1. **Première méthode :**
Notons B_i (resp. R_i) l'événement «tirer une boule blanche (resp. rouge) au tirage n° i». Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $k \geq l$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = 0$. Par contre, si $k < l$, en utilisant la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) &= \mathbb{P}(\mathrm{R}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{R}_{k-1} \cap \mathrm{B}_k \cap \mathrm{R}_{k+1} \cdots \cap \mathrm{R}_{l-1} \cap \mathrm{B}_l \cap \mathrm{R}_{l+1} \cap \cdots \cap \mathrm{R}_n) \\
&= \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{1^{\text{er}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{n-3}{n-1}}_{2^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \cdots \times \underbrace{\frac{n-k}{n-k+2}}_{(k-1)^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{2}{n-k+1}}_{k^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{n-k-1}{n-k}}_{(k+1)^{\text{e}}\text{ tirage}} \cdots \times \underbrace{\frac{n-l+1}{n-l+2}}_{(l-1)^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{1}{n-l+1}}_{l^{\text{e}}\text{ tirage}} \\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Seconde méthode :
L'univers Ω est l'ensemble des permutations des n boules de sorte que card $\Omega = n!$ et on munit cet univers de la probabilité uniforme. Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $k \geq l$, $[\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]$ est impossible donc $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = 0$. Supposons maintenant $k < l$. Se donner une issue de $[\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]$ revient à se donner une permutation des 2 boules rouges et une permutation des $n-2$ boules rouges. Ainsicard$([\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]) = 2!(n-2)!$. Finalement

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = \frac{2!(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n(n-1)}$$

Troisième méthode :
On considère que l'univers est l'ensemble des tirages de la forme R … RBR … RBR … R. Le cardinal de cet univers est alors le nombre de façons de placer deux boules blanches parmi les n tirages, c'est-à-dire $\binom{n}{2}$. On munit à nouveau cet univers de la probabilité uniforme. A nouveau, si $k \geq l$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = 0$ et, si $k < l$, $[\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]$ est un événement élémentaire de sorte que $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$.

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{l=k+1}^{n} \mathbb{P}(X = k, Z = l) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

Soit $l \in [\![1, n]\!]$.

$$P(Z = l) = \sum_{k=1}^{l-1} P(X = k, Z = l) = \frac{2(l-1)}{n(n-1)}$$

Solution 8

1. La relation est évidente si $a = b$. Supposons maintenant $a + 1 \leq b$. On utilise la relation du triangle de Pascal.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{a} &= 1 + \sum_{k=a+1}^{n} \binom{k}{a} \\
&= 1 + \sum_{k=a+1}^{b} \binom{k+1}{a+1} - \binom{k}{a+1} \\
&= 1 + \binom{b+1}{a+1} - \binom{a+1}{a+1} = \binom{b+1}{a+1}
\end{aligned}$$

2. Si on note Ω l'univers de l'expérience aléatoire, alors $\operatorname{card}(\Omega) = \dbinom{N}{n}$.
X est à valeurs dans $[\![n, N]\!]$. Soit donc $k \in [\![n, N]\!]$. Choisir n boules dont le plus grand numéro est k revient à choisir $n - 1$ boules parmi celles numérotées de 1 à $k - 1$. Ainsi $\operatorname{card}(X = k) = \dbinom{k-1}{n-1}$ puis $P(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.
Y est à valeurs dans $[\![1, N - n + 1]\!]$. Soit donc $k \in [\![1, N - n + 1]\!]$. Choisir n boules dont le plus petit numéro est k revient à choisir $n - 1$ boules parmi celles numérotées de $k + 1$ à N. Ainsi $\operatorname{card}(Y = k) = \dbinom{N-k}{n-1}$ puis $P(Y = k) = \dfrac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.

3. (X, Y) est à valeurs dans $\left\{(i, j) \in [\![1, N]\!]^2,\ i - j \geq n - 1\right\}$. Soit donc (i, j) dans cet ensemble.
Choisir n boules dont le plus grand numéro est i et le plus petit j revient à choisir $n - 2$ boules parmi celles numérotées de $j + 1$ à $i - 1$. Ainsi $\operatorname{card}([X = i] \cap [y = j]) = \dbinom{i-j-1}{n-2}$ puis $P(X = i, Y = j) = \dfrac{\binom{i-j-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}$.
Remarquons que $X - Y$ est à valeurs dans $[\![n - 1, N - 1]\!]$. Soit $k \in [\![n - 1, N - 1]\!]$. Alors

$$P(X - Y = k) = \sum_{j=1}^{N-k} P(X - Y = k, Y = j) = \sum_{j=1}^{N-k} P(X = j + k, Y = j) = \frac{(N-k)\binom{k-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}$$

4. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=n}^{N} kP(X = k) \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} k\binom{k-1}{n-1} \\
&= \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} \\
&= \frac{n\binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{n(N+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'espérance de Y, on peut remarquer que $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{N}+1-k)$ pour tout $k\in[\![1,\mathrm{N}-n+1]\!]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-n+1} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)\\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-n+1} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{N}+1-k)\\
&= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} (\mathrm{N}+1-k)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\\
&= (\mathrm{N}+1)\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)-\mathrm{E}(\mathrm{X})\\
&= \mathrm{N}+1-\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}=\frac{\mathrm{N}+1}{n+1}
\end{aligned}$$

5. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) &= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} k^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\\
\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) &= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} [k(k+1)-k]\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} k(k+1)\binom{k-1}{n-1}-\mathrm{E}(\mathrm{X})\\
&= \frac{n(n+1)}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\sum_{k=n}^{\mathrm{N}}\binom{k+1}{n+1}-\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}\\
&= \frac{n(n+1)}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}+1}\binom{k}{n+1}-\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}\\
&= \frac{n(n+1)}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\binom{\mathrm{N}+2}{n+2}-\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}\\
&= \frac{n(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}+2)}{n+2}-\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}\\
&= \frac{(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)n}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Enfin

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{X})^2=\frac{(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)n}{(n+1)(n+2)}-\left(\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}\right)^2=\frac{n(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+2)(n+1)^2}$$

En remarquant que $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{N}+1-k)$ pour tout $k\in[\![1,\mathrm{N}-n+1]\!]$ et que $\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\mathrm{N}+1-\mathrm{E}(\mathrm{X})$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{Y}) &= \mathrm{E}(\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{Y})^2)\\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-n+1}(k-\mathrm{E}(\mathrm{Y}))^2\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)\\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-n+1}(k-(\mathrm{N}+1)+\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{N}+1-k)\\
&= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}}(\mathrm{E}(\mathrm{X})-k)^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\\
&= \mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)n}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

6. Tout d'abord

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2) &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^2 \mathrm{P}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}=k) \\
&= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} \frac{k^2(\mathrm{N}-k)\binom{k-1}{n-2}}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \left(\mathrm{N} \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^2 \binom{k-1}{n-2} - \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^3 \binom{k-1}{n-2} \right)
\end{aligned}
$$

Posons $\mathrm{S}_m = \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^m \binom{k-1}{n-2}$. On trouve successivement

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_1 &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k \binom{k-1}{n-2} \\
&= (n-1) \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} \binom{k}{n-1} \\
&= (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_2 &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^2 \binom{k-1}{n-2} \\
&= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k(k+1)\binom{k-1}{n-2} - \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k\binom{k-1}{n-2} \\
&= (n-1)n \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} \binom{k+1}{n} - \mathrm{S}_1 \\
&= (n-1)n \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \binom{k}{n} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n} \\
&= (n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}
\end{aligned}
$$

et enfin

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_3 &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^3 \binom{k-1}{n-2} \\
&= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k(k+1)(k+2)\binom{k-1}{n-2} - 3\mathrm{S}_2 - 2\mathrm{S}_1 \\
&= (n-1)n(n+1) \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} \binom{k+2}{n+1} - 3\left((n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\right) - 2(n-1)\binom{\mathrm{N}}{n} \\
&= (n-1)n(n+1) \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}+1} \binom{k}{n+1} - 3(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} + (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n} \\
&= (n-1)n(n+1)\binom{\mathrm{N}+2}{n+2} - 3(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} + (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}
\end{aligned}
$$

Il vient enfin

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2) &= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}(\mathrm{NS}_2 - \mathrm{S}_3)\\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\left(\mathrm{N}(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - \mathrm{N}(n-1)\binom{\mathrm{N}}{n} - (n-1)n(n+1)\binom{\mathrm{N}+2}{n+2} + 3(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\right)\\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\left((n-1)n(\mathrm{N}+3)\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - (n-1)(\mathrm{N}+1)\binom{\mathrm{N}}{n} - (n-1)n(n+1)\binom{\mathrm{N}+2}{n+2}\right)\\
&= \frac{(n-1)n(\mathrm{N}+3)(\mathrm{N}+1)}{n+1} - (n-1)(\mathrm{N}+1) - \frac{(n-1)n(\mathrm{N}+2)(\mathrm{N}+1)}{n+2}\\
&= \frac{(n-1)(\mathrm{N}+1)(n\mathrm{N}+n-2)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) &= \mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2\\
&= \frac{(n-1)(\mathrm{N}+1)(n\mathrm{N}+n-2)}{(n+1)(n+2)} - (\mathrm{E}(\mathrm{X})-\mathrm{E}(\mathrm{Y}))^2\\
&= \frac{(n-1)(\mathrm{N}+1)(n\mathrm{N}+n-2)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1} - \frac{\mathrm{N}+1}{n+1}\right)^2\\
&= \frac{2(n-1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{V}(\mathrm{X})+\mathrm{V}(\mathrm{Y})-\mathrm{V}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}))\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)n}{(n+1)(n+2)} - \frac{2(n-1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N}) - (n-1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}\\
&= \frac{(\mathrm{N}+1)(2n^2\mathrm{N}+n^3\mathrm{N}+2n^2+n^3+\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

Solution 9

On calcule dans un premier temps $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})$. L'événement $\mathrm{X}=\mathrm{Y}$ est la réunion disjointes des événements $(\mathrm{X}=k)\cap(\mathrm{Y}=k)$ pour k décrivant $[\![1,n]\!]$. On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}([\mathrm{X}=k]\cap[\mathrm{Y}=k])$$

Or les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\neq\mathrm{Y}) = 1-\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y}) = 1-\frac{1}{n}$$

Solution 10

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(Y = k)\\
&= \sum_{k=1}^{N} k\left(\mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(Y > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y > k)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\mathbb{P}(Y > k) - \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(Y > k) \qquad \text{par changement d'indice}\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\mathbb{P}(Y > k) - \sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(Y > k)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(Y > k) - N\mathbb{P}(Y > N)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(Y > k) \qquad \text{car } \mathbb{P}(Y > n) = 0
\end{aligned}$$

2. **a.** Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

$$\mathbb{P}(T_n \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k, X_2 \leq k, \dots, X_n \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k)\mathbb{P}(X_2 \leq k) \dots \mathbb{P}(X_n \leq k)$$

car les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. Mais comme chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$

$$\mathbb{P}(T_n \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

b. Pour tout $k \in [\![, N]\!]$

$$\mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_n \leq k) - \mathbb{P}(T_n \leq k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

c.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^{N} k\left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{k-1}{N}\right)^n\\
&= \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n\\
&= \sum_{k=0}^{N} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n\\
&= N - a_n(N)
\end{aligned}$$

3. **a.** Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$.

$$\mathbb{P}(Z_n > k) = \mathbb{P}(X_1 > k, X_2 > k, \dots, X_n > k) = \mathbb{P}(X_1 > k)\mathbb{P}(X_2 > k) \dots \mathbb{P}(X_n > k)$$

car les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. Mais comme chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$

$$\mathbb{P}(Z_n > k) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$$

b. En utilisant la première question

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

via un changement d'indice. Autrement dit, $\mathbb{E}(Z_n) = 1 + a_n(N)$.

4. **a.** Pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, $0 \leq \frac{k}{N} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{k}{N}\right)^n = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} a_n(N) = 0$. Or $\mathbb{E}(T_n) = N - a_n(N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = N$.

b. Par linéarité, $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(T_n) + \mathbb{E}(Z_n) - 1 = N$ en utilisant les questions précédentes.

Solution 11

1. Remarquons d'abord que si $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $A = CC^\top$ est de rang au plus 1. En effet, $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{vect}(C)$. De plus, si $A = 0$, alors $\|C\|^2 = C^\top C = \mathrm{tr}(CC^\top) = \mathrm{tr}(A) = 0$ donc $C = 0$. La réciproque est évidente donc $A = 0 \iff C = 0$. Posons $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$. Alors $M = XX^\top$. La matrice M est donc de rang au plus 1 (toutes ses colonnes sont colinéaires à X). Ainsi rg(M) suit une loi de Bernoulli. De plus, d'après note remarque initiale et par indépendance des X_i,

$$\mathbb{P}(\mathrm{rg}\, M = 0) = \mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i = 0\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n$$

Ainsi rg M suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

2. Remarquons que $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Mais comme les X_i sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, $X_i^2 = X_i$. Finalement, $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p car les X_i sont indépendantes.

Solution 12

1. U suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{u}{b}\right)$. Son espérance est $\frac{nu}{b}$ et sa variance est $\frac{nu}{b}\left(1 - \frac{u}{b}\right)$.
De même, D et T suivent respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{d}{b}\right)$ et $\mathcal{B}\left(n, \frac{t}{b}\right)$.

2. On peut par exemple remarquer que $P(U = n) \neq 0$ et $P(D = n) \neq 0$ tandis que $P(U = n, D = n) = 0$. Ainsi $P(U = n, D = n) \neq P(U = n)P(D = n)$, ce qui prouve que U et D ne sont pas indépendantes.

3. Puisque $U + D + T = n$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(U + D = k) = P(T = n - k)$$

On en déduit aisément que U + D suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, 1 - \frac{t}{b}\right)$.
De plus,

$$E(U + D) = E(n - T) = n - E(T) = n - \frac{nt}{b} = \frac{n(b-t)}{b}$$

Enfin,

$$V(U + D) = V(n - T) = V(T) = \frac{nt}{b}\left(1 - \frac{t}{b}\right)$$

4. On sait que

$$\mathrm{Cov}(U, D) = \frac{1}{2}\left(V(U + D) - V(U) - V(D)\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(U, D) &= \frac{1}{2}\left(\frac{nt}{b}\left(1 - \frac{t}{b}\right) - \frac{nu}{b}\left(1 - \frac{u}{b}\right) - \frac{nd}{b}\left(1 - \frac{d}{b}\right)\right) \\
&= \frac{n}{2b^2}\left(t(b-t) - u(b-u) - d(b-d)\right) \\
&= \frac{n}{2b^2}\left((b-u-d)(u+d) - u(b-u) - d(b-d)\right) \\
&= -\frac{-nud}{b^2}
\end{aligned}$$

Solution 13

1. D'après la formule de transfert
$$E(Z) = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j| P(X=i, Y=j)$$
Mais les variables X et Y étant indépendantes,
$$E(Z) = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j| P(X=i)P(Y=j) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j|$$
On peut alors découper la somme double
$$\begin{aligned}
E(Z) &= \frac{1}{(n+1)^2}\left(\sum_{0\leq i<j\leq n}|i-j| + \sum_{0\leq j<i\leq n}|i-j| + \sum_{k=0}^{n}|k-k|\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\leq i<j\leq n} j-i\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{0\leq i<j\leq n} j - \sum_{0\leq i<j\leq n} i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} j - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=0}^{n} j^2 - \sum_{i=0}^{n}(n-i)i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(2\sum_{k=0}^{n} k^2 - n\sum_{k=0}^{n} k\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n^2(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{2n}{n+1}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+2)}{3(n+1)}
\end{aligned}$$

2. On remarque que
$$T = \frac{1}{2}(X+Y-Z)$$
donc par linéarité de l'espérance
$$E(T) = \frac{1}{2}(E(X)+E(Y)-E(Z)) = \frac{1}{2}\left(n - \frac{n(n+2)}{3(n+1)}\right) = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$$

3. Puisque $Z^2 = X^2 + Y^2 - 2XY$, on obtient par linéarité de l'espérance
$$E(Z^2) = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY)$$
Mais les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Puisqu'elles sont de même loi
$$E(Z^2) = 2E(X^2) - 2E(X)^2 = 2V(X)$$

> **Remarque.** On peut montrer que
> $$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{n(n+2)}{12}$$

Solution 14

D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Solution 15

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule numéro k a été tirée lors des n tirages et 0 sinon. Chaque X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$. Puisque $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$, on obtient par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\mathrm{X}_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)$$

On montre classiquement que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. Ainsi $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Solution 16

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui à une permutation associe 1 si k est un point fixe et 0 sinon. On a donc $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

On détermine ensuite la loi de X_k par dénombrement. Le nombre de permutations fixant k est $(n-1)!$ et comme la probabilité sur S_n est uniforme, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Ainsi X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$ de sorte que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = \frac{1}{n}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \delta(\mathrm{X}_k) = 1$$

Pour le calcul de la variance, il faut prendre garde au fait que les variables aléatoires X_k ne sont pas indépendantes. Néanmoins

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k, \sum_{l=1}^{n} \mathrm{X}_l\right) = \sum_{1\leq k,l\leq n} \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) + \sum_{1\leq k\neq l\leq n} \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l)$$

Puisque les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli, $\mathbb{V}(\mathrm{X}_k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $k \neq l$,

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_k\mathrm{X}_l) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_k)\mathbb{E}(\mathrm{X}_l) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1) - \frac{1}{n}^2$$

A nouveau, on calcule $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1)$ par dénombrement. Le nombre de permutations pour lesquelles k et l sont fixes est $(n-2)!$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$. Ainsi $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$. Finalement,

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sum_{1\leq k\neq l\leq n} \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + n(n-1)\frac{1}{n^2(n-1)} = 1$$

car $\mathrm{card}\left(\left\{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ k \neq l\right\}\right) = n(n-1)$.

Solution 17

Notons F la variable aléatoire qui désigne le nombre de «faces» obtenus avec n lancers. Alors $\mathrm{F} \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p = 1/2$. Donc $\mathrm{E}(\mathrm{F}) = np = n/2$ et $\mathrm{V}(\mathrm{F}) = np(1-p) = n/4$.
Notons $\mathrm{X} = \mathrm{F}/n$ la fréquence des «faces» parmi les n lancers.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{F}}{n}\right) = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{F})}{n} = \frac{1}{2},$$
$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{V}\left(\frac{\mathrm{F}}{n}\right) = \frac{\mathrm{V}(\mathrm{F})}{n^2} = \frac{1}{4n}.$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{\varepsilon^2}$$

Dans notre cas,

$$\mathrm{P}(|\mathrm{X} - 0,5| > \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Par passage au contraire cela s'écrit

$$1 - \mathrm{P}(|\mathrm{X} - 0,5| \leqslant \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

ou encore

$$\mathrm{P}(|\mathrm{X} - 0,5| \leqslant \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = 0,05$, on a donc

$$\mathrm{P}(0,45 \leq \mathrm{X} \leq 0,55) \geq 1 - \frac{100}{n}$$

En prenant $n = 1000$, on a alors bien

$$\mathrm{P}(0,45 \leq \mathrm{X} \leq 0,55) \geq 0,9$$

Solution 18

Via la formule de transfert,

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)(k - np)^r$$

Puisque pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la série $\sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{(k-np)^r x^r}{r!}$ converge (série exponentielle), il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu_r x^r}{r!}$ et, de plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\mu_r x^r}{r!} &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(k-np)^r x^r}{r!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) e^{(k-np)x} \\
&= e^{-npx} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k e^{kx} (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-npx} \left(pe^x + 1 - p\right)^n = \left[pe^{(1-p)x} + (1-p)e^{-px}\right]^n
\end{aligned}$$

Solution 19

1. Il est clair que $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(n, p)$. On rappelle que $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = np$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = np(1-p)$.

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. La loi de $\mathrm{Y} - k$ conditionnée par l'événement $\{\mathrm{X} = k\}$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n-k, p)$. Autrement dit

$$\forall j \in [\![k, n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{Y} = j \mid \mathrm{X} = k) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} - k = j - k \mid \mathrm{X} = k) = \binom{n-k}{j-k} p^{j-k} (1-p)^{n-j}$$

Comme $\{X = k\}_{0\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements

$$\begin{aligned}
\forall j \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y=j \mid X=k)\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(Y=j \mid X=k)\mathbb{P}(X=k) \qquad \text{car } \mathbb{P}(Y=j \mid X=k)=0 \text{ si } k>j \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{n-k}{j-k} p^{j-k}(1-p)^{n-j}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}\binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-j-k} \\
&= \binom{n}{j} p^j(1-p)^{2n-2j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(1-p)^{j-k} \\
&= \binom{n}{j} p^j(1-p)^{2n-2j}(1+(1-p))^j \\
&= \binom{n}{j} (p(2-p))^j[(1-p)^2]^{n-j} \\
&= \binom{n}{j} (2p-p^2)^j[1-(2p-p^2)]^{n-j}
\end{aligned}$$

On en déduit que $Y \sim \mathcal{B}(n, p(2-p))$.

> **Remarque.** On aurait pu obtenir ce résultat différemment. En effet, Y peut aussi être vu comme le nombre de cibles que l'on a touchées au moins une fois en tirant deux fois sur chacune des cibles. La probabilité de toucher au moins une fois une cible donnée en lui tirant deux fois dessus est $1-(1-p)^2 = 2p - p^2$.

Dénombrabilité

Solution 20

On rappelle que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
Supposons qu'il existe une telle application f. Alors $f(\mathbb{Q})$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis. En effet, $f(\mathbb{Q}) = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{f(x)\}$. Par ailleurs, $f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ donc $f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ est également au plus dénombrable. Enfin, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ est au plus dénombrable comme réunion de deux tels ensembles.
On remarque maintenant que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ comme image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par une application continue. Mais les intervalles non réduits à un point ne sont pas finis ou dénombrables donc $f(\mathbb{R})$ est un singleton $\{a\}$. Mais alors $f(\mathbb{Q}) = f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \{a\}$ et donc $\{a\} \subset \mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \varnothing$, ce qui est absurde.

Solution 21

Notons A l'ensembles des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ et A_d l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ de degré d. Remarquons que l'ensemble des entiers algébriques est

$$E = \bigcup_{P\in A} P^{-1}(\{0\}) = \bigcup_{d\in\mathbb{N}}\bigcup_{P\in A_d} P^{-1}(\{0\})$$

Pour tout $P \in A$, l'ensemble $P^{-1}(\{0\})$ est fini. De plus, l'ensemble A_d est dénombrable puisqu'il est en bijection avec $\mathbb{Z}^d$ via l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^d & \longrightarrow & A_d \\ (a_0,\dots,a_{d-1}) & \longmapsto & X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \end{array}\right.$$

et que $\mathbb{Z}^d$ est lui-même dénombrable comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables. Ainsi pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{P\in A_d} P^{-1}(\{0\})$ est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis. Finalement, E est également au plus dénombrable comme union dénombrable de tels ensembles. De plus, E n'est clairement pas fini puisque $\mathbb{Z} \subset E$ (tout entier relatif n est racine du polynôme $X-n$) donc E est dénombrable.

Solution 22

Supposons (i) et montrons (ii). On sait qu'il existe une bijection de A sur $\mathbb{N}$. Cette bijection est a fortiori une injection de A dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}$.
Supposons (ii) et montrons (i). Il existe une injection f de A sur un ensemble dénombrable B. Par définition, il existe une bijection g de B sur $\mathbb{N}$. Alors $g \circ f$ est une injection de A sur $\mathbb{N}$ donc une bijection de A sur $g \circ f(\mathrm{A})$, qui est une partie de $\mathbb{N}$. Ainsi A est fini ou dénombrable.
Supposons (i) et montrons (iii). On sait qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur A. Cette bijection est a fortiori une surjection de l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}$ sur A.
Supposons (iii) et montrons (i). Il existe une surjection g d'un ensemble dénombrable B sur A. Par définition, il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ sur B. Alors $f \circ g$ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur A. Considérons une application qui à tout élément de A associe l'un de ses antécédents par $f \circ g$ (il en existe toujours au moins un par surjectivité de $f \circ g$). Par construction, cette application est une bijection de A sur une partie de $\mathbb{N}$ (l'ensemble des antécédents choisis) de sorte que A est fini ou dénombrable.

Solution 23

Remarquons que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\mathrm{S}_\varepsilon = \{j \in \mathrm{J},\ |a_j| \geq \varepsilon\}$ est fini car $(a_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est sommable. Il suffit alors de remarquer que $\mathrm{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{S}_{1/n}$ de sorte que S est au plus dénombrable en tant que réunion dénombrable d'ensembles finis.

Généralités

Solution 24

1. **a.** La suite (B_n) est décroissante pour l'inclusion. Ainsi, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{B}_n$$

b. Par ailleurs,

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} \mathrm{A}_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$$

Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$ est majorée par le reste d'une série convergente donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = 0$.

2. **a.** Soit $k \in [\![n, n+p]\!]$. Par convexité de l'exponentielle,

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}_k}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) \leq \exp(-\mathbb{P}(\mathrm{A}_k))$$

Ainsi

$$\prod_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}_k}) \leq \prod_{k=n}^{n+p} \exp(-\mathbb{P}(\mathrm{A}_k))$$

Comme les $\overline{\mathrm{A}_k}$ sont mutuellement indépendants,

$$\prod_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}_k}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}\right)$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right)$$

b. Posons $\mathrm{C}_{n,p} = \bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. La suite $(\mathrm{C}_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_n}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{\mathrm{A}_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_{n,p}\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n,p})$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge vers $+\infty$, $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) = +\infty$ et donc $\lim_{p\to+\infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right) = 0$. D'après la question précédente, $\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n,p}) = 0$. On en déduit que $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_n}) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{B}_n}\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_n}) = 0$$

Finalement, $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0$ et donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$.

Solution 25

1. L'événement $\mathrm{A}_{k,p}$: «le joueur J_k gagne au $p^{\text{ème}}$ tour» correspond à
   - les joueurs $\mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_n$ perdent leurs $p-1$ premiers tours ;
   - les joueurs $\mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_{k-1}$ perdent lors du $p^{\text{ème}}$ tour ;
   - le joueur J_k gagne.

   Ainsi
   $$\mathbb{P}(\mathrm{A}_{k,p}) = (q_1 \dots q_n)^{p-1}(q_1 \dots q_{k-1})p_k$$
   Comme $\mathrm{G}_k = \bigsqcup_{p\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_{k,p}$,
   $$\mathbb{P}(\mathrm{G}_k) = \sum_{p=1}^{+\infty} (q_1 \dots q_n)^{p-1}(q_1 \dots q_{k-1})p_k = \frac{(q_1 \dots q_{k-1})p_k}{1 - q_1 \dots q_n}$$

2. Posons pour simplifier, $u_k = \prod_{i=1}^{k} q_k$ (en convenant que $u_0 = 1$). Alors
   $$\mathbb{P}(\mathrm{G}_k) = \frac{u_{k-1} - u_k}{1 - u_n}$$
   En notant $\mathrm{G} = \bigsqcup_{k=1}^{n} \mathrm{G}_k$ l'événement «l'un des joueurs gagne» i.e. «le jeu se finit», on a par téléscopage
   $$\mathbb{P}(\mathrm{G}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_{k-1} - u_k}{1 - u_n} = \frac{u_0 - u_n}{1 - u_n} = 1$$
   Le jeu se finit donc presque sûrement.

3. Le jeu est équitable si et seulement si $\mathbb{P}(\mathrm{G}_{k+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{G}_k)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ i.e. $p_k = q_k p_{k+1}$ ou encore $\frac{1}{p_{k+1}} = \frac{1}{p_k} - 1$. Ceci équivaut à $\frac{1}{p_k} = \frac{1}{p_1} - (k-1)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Pour que les p_k soient bien des probabilités, il faut que $\frac{1}{p_k} \geq 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ i.e. $\frac{1}{p_1} \geq k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ou encore $p_1 \geq \frac{1}{n}$.

4. Notons T le nombre de coups joués. Comme T est une variable aléatoire positive, elle admet une espérance (éventuellement infinie). Remarquons que pour $(p, k) \in \mathbb{N}^* \times [\![1, n]\!]$, $\{\mathrm{T} = n(p-1) + k\} = \mathrm{A}_{k,p}$. Remarquons également que
   $$\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{k=1}^{n} \{n(p-1) + k,\ p \in \mathbb{N}^*\}$$

Par sommation par paquets (licite car tous les termes sont positifs),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{T}) &= \sum_{t=1}^{+\infty} t\mathbb{P}(\mathrm{T}=t) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{+\infty}(n(p-1)+k)\mathbb{P}(\mathrm{T}=n(p-1)+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{+\infty} u_n^{p-1}(u_{k-1}-u_k)(n(p-1)+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{+\infty} u_n^{p}(u_{k-1}-u_k)(np+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(u_{k-1}-u_k)\left[n\sum_{p=0}^{+\infty} pu_n^p + k\sum_{p=0}^{+\infty} u_p^n\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}(u_{k-1}-u_k)\left[\frac{nu_n}{(1-u_n)^2}+\frac{k}{1-u_n}\right] \\
&= \frac{nu_n}{(1-u_n)^2}\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}-u_k + \frac{1}{1-u_n}\sum_{k=1}^{n} k(u_{k-1}-u_k) \\
&= \frac{nu_n}{1-u_n} + \frac{1}{1-u_n}\left(\sum_{k=1}^{n}((k-1)u_{k-1}-ku_k)+\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}\right) \\
&= \frac{nu_n}{1-u_n} + \frac{1}{1-u_n}\left(-nu_n+\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}{1-u_n}
\end{aligned}$$

Solution 26

---

1. On note B_n l'événement «A_1 touche la cible au tour $2n+1$» et C_n l'événement «A_2 touche la cible au tour $2n$. On note également D_n l'événement «A_1 l'emporte au tour $2n+1$. Alors

$$\mathrm{D}_n = \left(\bigcap_{i=}^{n-1}\overline{\mathrm{B}_i}\right)\cap\left(\bigcap_{i=0}^{n-1}\overline{\mathrm{C}_i}\right)\cap\mathrm{B}_n$$

Par indépendance des tirs,

$$\mathbb{P}(\mathrm{D}_n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_i})\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(\overline{\mathrm{C}_i})\right)\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1$$

2. Notons E_n l'événement «A_2 l'emporte au tour $2n+2$». De la même manière

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_{2n+2}) = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2$$

3. Notons D l'événement «A_1 l'emporte» et E l'événement «A_2 l'emporte». Alors $\mathrm{D} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n$ et $\mathrm{E} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{D}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{D}_n) = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$
$$\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{E}_n) = \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

Notons F l'événement «le jeu dure indéfininiment». Alors $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{D}\sqcup\mathrm{E}$ donc

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}}) = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} + \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

En posant $q_i = 1 - p_i$, on a donc

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}}) = \frac{1 - q_1 + q_1(1 - q_2)}{1 - q_1 q_2} = 1$$

puis $\mathbb{P}(\mathrm{F}) = 0$.

4. Le jeu est équitable à condition que $\mathbb{P}(\mathrm{D}) = \mathbb{P}(\mathrm{E})$ i.e. $p_1 = (1 - p_1)p_2$ i.e. $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$. Si $p_1 > 1/2$, alors $1 - p_1 < 1/2$ donc $\frac{p_1}{1 - p_1} > 1$ et il est impossible d'avoir $p_2 > 1$. Le jeu n'est donc pas équitable.

Solution 27

L'événement A peut aussi se formuler comme : «n'obtenir que des piles à partir d'un certain rang». Ainsi $\mathrm{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \mathrm{P}_k$ en notant P_k l'événement «obtenir un pile au lancer numéro k». Notons $\mathrm{A}_n = \bigcap_{k \geq n} \mathrm{P}_k$ de telle sorte que $\mathrm{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. Pour tout couple $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$,

$$\mathrm{A}_n \subset \bigcap_{k=n}^{p} \mathrm{F}_k$$

donc

$$0 \leq \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{p} \mathrm{F}_k\right) = \frac{1}{2^{p-n+1}}$$

donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = 0$ en faisant tendre n vers l'infini. Finalement, $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$ car A est négligeable comme réunion dénombrable d'événemenst négligeables.

Indépendance

Solution 28

1. Il est néceessaire et suffisant d'avoir $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$ et $\mathbb{P}(\{n\}) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On prend donc $\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$.

2. Comme $\mathrm{A}_r = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{rn\}$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{rn\}) = \frac{1}{r^s}$$

3. Soient $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers distincts. Comme les p_i sont premiers entre eux deux à deux,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{p_i} = \mathrm{A}_q$$

avec $q = \prod_{i=1}^{n} p_i$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{p_i}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_q) = \frac{1}{q^s} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A}_{p_i})$$

Les A_p pour $p \in \mathcal{P}$ sont donc mutuellement indépendants.

4. A_p est l'ensemble des multiples de p strictement positifs i.e. l'ensemble des entiers naturels non nuls divisibles par p. Ainsi $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{\mathrm{A}_p}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls ne possédant aucun diviseur premier. Il est donc clair que $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{\mathrm{A}_p} = \{1\}$.

On montre classiquement que les $\overline{A_p}$ pour $p \in \mathcal{P}$ sont également mutuellement indépendants. Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_{p_i}}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^n 1 - \frac{1}{p_i^s}$$

Posons $B_n = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_{p_i}}$. La suite (B_n) est décroissante pour l'inclusion et

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \overline{A_{p_i}} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}$$

Par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^n 1 - \frac{1}{p_i^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} 1 - \frac{1}{p^s}$$

> **Remarque.** La notion de produit indexé sur un ensemble infini n'est pas au programme. Il faudrait établir pour les produits une théorie similaire à celle des familles sommables pour donner un sens précis à ce produit infini.

Finalement

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p\in\mathcal{P}} 1 - \frac{1}{p^s}$$

et donc

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

5. Supposons que la famille $\left(\frac{1}{p}\right)_{p\in\mathcal{P}}$ soit sommable. Comme il s'agit d'une famille positive, ceci équivaut à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p_n}$. Comme $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{1}{p_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(1 - \frac{1}{p_n})$. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\ln(1 - \frac{1}{p_n})$ converge. Notons $S_n = \sum_{i=1}^n -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$. Alors (S_n) converge vers un réel ℓ. Par conséquent

$$e^{S_n} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^\ell$$

Mais pour tout $s > 1$,

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} \leq \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$$

donc, en passant à la limite, $\zeta(s) \leq e^\ell$ pour tout $s > 1$.
On montre alors que $\lim_{1^+} \zeta = +\infty$ pour aboutir à une contradiction. On peut par exemple utiliser une comparaison série/intégrale :

$$\forall s > 1,\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1}$$

Solution 29

---

1. D'après la formule du binôme, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$. On en déduit que $\sum_{0\leq i,j\leq n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \lambda(2^n)^2 = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{2^{2n}}$.

2. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}$$

Autrement dit, $X \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$.
De la même manière, $Y \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$.

3. Il est clair que pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$ donc X et Y sont indépendantes.

4. Pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$,

$$B_{i,j} = \frac{\mathbb{P}(X = i, Y = j)}{\mathbb{P}(Y = j)} = \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}$$

En notant, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}$, on a $B = UC^\top$. On en déduit par récurrence que $B^p = \lambda^{p-1}B$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ avec $\lambda = C^\top U = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 1$. Ainsi $B^p = B$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

5. On a notamment $B^2 = B$ donc $X^2 - X = X(X - 1)$ annule B. Ce polynôme est scindé à racines simples donc B est diagonalisable. Par ailleurs, $\mathrm{Sp}(B) \subset \{0, 1\}$.
Il est clair que $\mathrm{rg}(B) = 1$ donc $\dim \mathrm{Ker}\, B = n$. Si $n \geq 1$, 0 est donc bien valeur propre et $E_0(B) = \mathrm{Ker}\, B = \mathrm{vect}(C)^\perp$. Comme B est diagonalisable, 1 est aussi valeur propre et $\dim E_1(B)$. Il est clair que $BU = U$ donc $E_1(B) = \mathrm{vect}(U)$.

Probabilités conditionnelles

Solution 30

1. On a clairement $p_0 = 0$ et $p_1 = 1 - p$.

2. Comme $D_n \subset D_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (p_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1 (c'est une suite de probabilités), elle converge.

3. Notons A l'événement «la fleur F_0 a des descendants».

- Si la fleur F_0 n'a pas de descendants, alors sa lignée est éteinte à l'instant $n + 1$ i.e. $\mathbb{P}(D_{n+1} \mid \overline{A}) = 1$.
- Si la fleur F_0 a des descendants, sa lignée est éteinte à l'instant $n + 1$ si chacun de ses deux descendants à sa lignée éteinte à l'instant $n + 1$. Les deux lignées étant indépendantes, on a par translation $\mathbb{P}(D_{n+1} \mid A) = p_n^2$.

D'après la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1}) = \mathbb{P}(D_{n+1} \mid \overline{A})\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(D_{n+1} \mid A)\mathbb{P}(A) = (1 - p) + pp_n^2$$

4. On sait que (p_n) converge vers $\ell \in [0, 1]$. Elle converge alors nécessairement vers un point fixe de $f : x \mapsto px^2 + 1 - p$. Si $p = 0$, ce point fixe est évidemment 1, sinon c'est une racine du trinôme $pX^2 - X + 1 - p$, à savoir 1 ou $\frac{1-p}{p}$. Si $p < \frac{1}{2}$, $\frac{1-p}{p} > 1$ donc $\ell = 1$. Sinon $\frac{1-p}{p} \leq 1$ et, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on prouve aisément que $\left[0, \frac{1-p}{p}\right]$ est stable par f. Comme $p_0 = 0 \in \left[0, \frac{1-p}{p}\right]$, (p_n) est à valeurs dans $\left[0, \frac{1-p}{p}\right]$ et donc $\ell = \frac{1-p}{p}$.
Pour récapituler, (p_n) converge vers 1 si $p < \frac{1}{2}$ et 0 sinon.
On peut vérifier à l'aide d'une simulation avec Python.

```
>>> import numpy.random as rd
>>>
>>> def proba_simulee(p):
...     N=100
...     morts=0
...     nb=10000
...     for _ in range(nb):
...         n=1
...         cpt=0
...         while n!=0 and n<N:
...             n=sum(2*rd.binomial(1,p,n))
...             cpt+=1
...         if n==0:
...             morts+=1
...     return morts/nb
...
>>> def proba_theorique(p):
...     return 1 if p<1/2 else (1-p)/p
...
>>> nb_tests=20
>>> [(i/nb_tests, proba_simulee(i/nb_tests), proba_theorique(i/nb_tests)) for i in
 ↪ range(nb_tests+1)]
[(0.0, 1.0, 1), (0.05, 1.0, 1), (0.1, 1.0, 1), (0.15, 1.0, 1), (0.2, 1.0, 1), (0.25, 1.0, 1),
 ↪ (0.3, 1.0, 1), (0.35, 1.0, 1), (0.4, 1.0, 1), (0.45, 1.0, 1), (0.5, 0.9893, 1.0), (0.55,
 ↪ 0.8185, 0.8181818181818181818), (0.6, 0.6606, 0.6666666666666667), (0.65, 0.5432,
 ↪ 0.5384615384615384), (0.7, 0.4315, 0.42857142857142866), (0.75, 0.3384, 0.3333333333333333),
 ↪ (0.8, 0.2465, 0.24999999999999994), (0.85, 0.1801, 0.17647058823529416), (0.9, 0.1165,
 ↪ 0.11111111111111108), (0.95, 0.0549, 0.052631578947368474), (1.0, 0.0, 0.0)]
```

Solution 31

Notons F (resp. P) l'événement «on a obtenu face (resp. pile) au premier lancer» ainsi que G_n l'événement «on a obtenu exactement n points au cours du jeu». D'après la formule des probabilités totales :

$$g_{n+2} = \mathbb{P}(G_{n+2}) = \mathbb{P}(G_{n+2} \mid P_1)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(G_{n+2} \mid F_1)\mathbb{P}(F_1)$$

Or il est clair que $\mathbb{P}(G_{n+2} \mid P_1) = g_{n+1}$ et $\mathbb{P}(G_{n+2} \mid F_1) = g_n$. Ainsi

$$g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - pX - q = X^2 - pX + p - 1$. Son discriminant est $p^2 - 4p + 4 = (p-2)^2$ donc ses racines sont $p-1$ et 1. On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_n = A + B(p-1)^n$$

Or $g_0 = 1$ et $g_1 = \mathbb{P}(P_1) = p$. On en déduit que

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + B(p-1) = p \end{cases}$$

On en déduit que $A = \dfrac{1}{2-p}$ et $B = \dfrac{1-p}{2-p}$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = \frac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p}$$

Remarque. On peut être plus rigoureux pour déterminer la relation de récurrence. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = 2) = q$. Posons $S_p = \sum_{k=1}^{p} X_k$ pour $p \in \mathbb{N}$ (en particulier, $S_0 = 0$). Alors

$$G_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{S_p = n\}$$

puis

$$G_{n+2} = (G_{n+2} \cap \{X_1 = 1\}) \sqcup (\mathbb{P}(G_{n+2} \cap \{X_1 = 2\})$$

Or pour $j \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
G_{n+2} \cap \{X_1 = j\} &= \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \left(\{S_p = n+2\} \cap \{X_1 = j\}\right) && \text{par distributivité de l'intersection sur l'union}\\
&= \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left(\{S_p = n+2\} \cap \{X_1 = j\}\right) && \text{car } S_0 = 0 \text{ et } n+2 > 0\\
&= \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left(\left\{\sum_{k=2}^{p} X_k = n+2-j\right\} \cap \{X_1 = j\}\right)\\
&= \left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{\sum_{k=2}^{p} X_k = n+2-j\right\}\right) \cap \{X_1 = j\} && \text{par distributivité de l'intersection sur l'union}
\end{aligned}$$

D'après le lemme des coalitions, $\sum_{k=2}^{p} X_k$ et X_1 sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}\left(G_{n+2} \cap \{X_1 = j\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{\sum_{k=2}^{p} X_k = n+2-j\right\}\right) \mathbb{P}\left(\{X_1 = j\}\right)$$

Or $\sum_{k=2}^{p} X_k$ a la même loi que S_{p-1}. En effet, les X_k étant indépendantes et de même loi,

$$G_{\sum_{k=2}^{p} X_k} = \prod_{k=2}^{p} G_{X_k} = \prod_{k=1}^{p-1} G_{X_k} = G_{S_{p-1}}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{\sum_{k=2}^{p} X_k = n+2-j\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \{S_{p-1} = n+2-j\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{S_p = n+2-j\}\right) = g_{n+2-j}$$

Finalement

$$g_{n+2} = \mathbb{P}\left(G_{n+2} \cap \{X_1 = 1\}\right) + \left(G_{n+2} \cap \{X_1 = 2\}\right) = g_{n+1}\mathbb{P}(X_1 = 1) + g_n\mathbb{P}(X_1 = 2) = pg_{n+1} + qg_n$$

Solution 32

Notons A l'événement «obtenir deux piles consécutifs». Dans la suite, on notera F_n (resp. P_n) l'événement «on a obtenu "pile" (resp. "face") au $n^{\text{ème}}$ lancer.
On va plutôt s'intéresser à l'événement $\overline{A}$ et on note $q = \mathbb{P}(\overline{A})$. Remarquons que F_1, $P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements. On écrit la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A} \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap F_1)\mathbb{P}(P_1 \cap F_1) + \mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap P_2)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$$

- Si on a obtenu un face au premier lancer, il suffit de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des lancers suivants. Autrement dit, $\mathbb{P}(\overline{A} \mid F_1) = q$.
- Si on a obtenu un pile puis un face, il suffit encore de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des lancers suivants. Autrement dit, $\mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap F_1) = q$.
- Enfin, il est clair que $\mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap P_2) = 0$.

Ainsi $q = (1-p)q + p(1-p)q$ ou encore $qp^2 = 0$. Comme $p > 0$, $q = 0$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$.

Variables aléatoires

Solution 33

1. Posons $\mathrm{I}_k = \int_0^1 x^k(1-x)^r \,\mathrm{d}x$. Comme les I_k sont clairement positifs, il s'agit de montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r\mathrm{I}_k$ converge et a pour somme 1.
   Première méthode :
   On prouve par une suite d'intégration par parties que
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_k = \frac{k!}{\prod_{i=1}^{k+1}(r+i)}$$
   On fait apparaître un télescopage en remarquant que $r = (r+k+1) - (k+1)$. Ainsi $r\mathrm{I}_k = u_k - u_{k+1}$ en posant $u_k = \frac{k!}{\prod_{i=1}^{k}(r+i)}$.
   On montre maintenant que la suite (u_k) converge vers 0. En effet,
   $$\ln(u_k) = -\sum_{i=1}^{k} \ln\left(1+\frac{r}{i}\right)$$
   Or $\ln\left(1+\frac{r}{i}\right) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{r}{i}$, donc, par sommation de relations de comparaison pour des séries à termes positifs divergente,
   $$\ln(u_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\sum_{i=1}^{k}\frac{r}{i}$$
   Comme la série harmonique diverge vers $+\infty$, la suite $(\ln(u_k))$ diverge vers $-\infty$ et la suite (u_k) converge donc vers 0.
   La série télescopique $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k - u_{k+1}$ i.e. la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r\mathrm{I}_k$ converge donc et a pour somme $u_0 = 1$.
   Deuxième méthode :
   On utilise le théorème de convergence dominée. En effet,
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1[, 0 \leq \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}(1-x)^r \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1}(1-x)^r = (1-x)^{r-1}$$
   Or la fonction $x \mapsto (1-x)^{r-1}$ est intégrable sur $[0,1[$ par critère de Riemann $(r-1 > -1)$. On en déduit que
   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = r\int_0^1 (1-x)^{r-1}\,\mathrm{d}x = 1$$

2. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ converge, c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r(k+1)\mathrm{I}_k$ converge, l'espérance étant alors la somme de cette série. Les calculs précédents montrent que
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)\mathrm{I}_k = \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1}(r+i)}$$
   Si $r \leq 1$,
   $$(k+1)\mathrm{I}_k \geq \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1}(1+i)} = \frac{1}{k+2}$$
   donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r(k+1)\mathrm{I}_k$ diverge par comparaison à la série harmonique.

On montre maintenant la convergence dans le cas $r > 1$.

Première méthode : On peut à nouveau faire apparaître un télescopage en remarquant que

$$r(k+1)\mathrm{I}_{k+1} = \frac{r}{r-1}(v_k - v_{k+1})$$

avec $v_k = \dfrac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k}(r+i)}$. En posant $s = r-1 > 0$, on a donc

$$v_k = (r+1)\frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1}(s+i)}$$

Quitte à changer r en s dans la question précédente, on a $v_k = (r+1)u_{k+1}$ de sorte que (v_k) converge encore vers 0. La série télescopique $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k - v_{k+1}$ converge donc et a pour somme $v_0 = 1$. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r(k+1)\mathrm{I}_k$ converge donc également et a pour somme $\dfrac{r}{r-1}$ qui est donc l'espérance de X.

Deuxième méthode : On peut encore utiliser le théorème de convergence dominée. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1[, \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}(1-x)^r \leq \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}(1-x)^r = (1-x)^{r-2}$$

Or la fonction $x \mapsto (1-x)^{r-2}$ est intégrable sur $[0,1[$ par critère de Riemann $(r-2 > -1)$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = r\int_0^1 (1-x)^{r-1}\ \mathrm{d}x = 1$$

Solution 34

Le fait qu'une suite réelle (u_n) converge vers 0 s'écrit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ -\varepsilon \leq u_p \leq \varepsilon$$

On montre aisément que ceci équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ -\frac{1}{2^k} \leq u_p \leq \frac{1}{2^k}$$

On en déduit que

$$\mathrm{A} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} \left\{\mathrm{X}_p \in \left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right]\right\}$$

Comme les X_p sont des variables aléatoires, les $\left\{\mathrm{X}_p \in \left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right]\right\}$ sont des événements. Ainsi A est un événement comme réunions et intersections dénombrables d'événements.

Solution 35

1. Le premier tirag eétant effectué, on tire des jetons jusqu'à obtention d'un jeton différent du premier jeton tiré. A chaque tentative, la probabilité de réussite est de $\frac{2}{3}$. On en déduit que $\mathrm{Y} - 1 \sim \mathcal{G}(2/3)$.

2. Par conséquent, Y est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et

$$\forall n \geq 2,\ \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} - 1 = n - 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n-1}}$$

3. On sait alors que $\mathbb{E}(\mathrm{Y}-1) = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{V}(\mathrm{Y}-1) = \frac{3}{4}$. Donc $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \frac{5}{2}$ et $\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = \frac{3}{4}$.

4. Remarquons que (Y,Z) est à valeurs dans $\left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2,\ 2 \leq k < \ell\right\} \cup \{(+\infty,+\infty)\}$. De plus, pour $2 \leq k < \ell$,

$$\mathbb{P}((\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = (k,\ell)) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)\mathbb{P}(\mathrm{Z} = \ell \mid \mathrm{Y} = k) = \frac{2}{3^{k-1}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}}$$

5. $\mathbb{Z}$ est à valeurs dans $[\![3,+\infty]\!]$. Pour tout entier $\ell \geq 3$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}=\ell)=\sum_{k=2}^{\ell-1}\mathbb{P}((\mathrm{Y},\mathrm{Z})=(k,\ell))=\sum_{k=2}^{\ell-1}\frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}}=\frac{2^{\ell-1}}{3^{\ell-1}}\left(1-\frac{1}{2^{\ell-2}}\right)$$

On peut vérifier avec Python.

```
from random import randint

def Z():
    X=randint(1,3)
    Y=randint(1,3)
    n=2
    while X==Y:
        Y=randint(1,3)
        n+=1
    Z=randint(1,3)
    n+=1
    while Y==Z or X==Z:
        Z=randint(1,3)
        n+=1
    return n

def frequencies(l):
    proba_theorique = lambda i: 2**(i-1)/3**(i-1)*(1-1/2**(i-2))
    proba_empirique = lambda i: l.count(i)/len(l)
    return [(proba_theorique(i), proba_empirique(i)) for i in range(3,max(l)+1)]
```

```
>>> frequencies([Z() for _ in range(100000)])
[(0.2222222222222222, 0.22267), (0.2222222222222222, 0.22117), (0.1728395061728395, 0.17327),
↪ (0.1234567901234568, 0.12389), (0.0850480109739369, 0.08669), (0.05761316872427984, 0.05584),
↪ (0.03871361073007164, 0.03852), (0.025910684346898336, 0.02558), (0.017307659740215753,
↪ 0.01737), (0.011549729885349455, 0.01163), (0.007703583276412622, 0.00785),
↪ (0.005136976635223854, 0.00512), (0.003425069240465493, 0.00335), (0.002283518870824145,
↪ 0.00239), (0.001522392379201194, 0.00155), (0.0010149437398495463, 0.00111),
↪ (0.0006766343222492809, 0.00064), (0.00045109126894938174, 0.00051), (0.00030072808622731934,
↪ 0.00026), (0.00020048558201634563, 0.00028), (0.00013365711841027467, 9e-05),
↪ (8.910476685108673e-05, 7e-05), (5.9403184982136813e-05, 4e-05), (3.9602125681895316e-05,
↪ 8e-05), (2.6401417908087134e-05, 2e-05), (1.760094553433262e-05, 0.0),
↪ (1.1733963776979923e-05, 0.0), (7.82264254712823e-06, 0.0), (5.215095041132692e-06, 1e-05)]
```

Solution 36

On rappelle que pour $|q|<1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}nq^{n-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$$

1. On doit avoir $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=j,\mathrm{Y}=k)=1$. Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j+k}{2^{j+k}}=2\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k}\right)=2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=8$$

donc $a=\dfrac{1}{8}$.

2. Pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j+k}{2^{j+k}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^j}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k} + j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{j+3}}(2+2j) = \frac{j+1}{2^{j+2}}$$

Par symétrie, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{k+1}{2^{k+2}}$$

3. On remarque par exemple que

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$$

Ainsi X et Y ne sont pas indépendantes.

4. Remarquons que

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{X = n\} \cap \{Y = n\}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n) = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n}{2^{2n}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{9}$$

Lois usuelles

Solution 37

Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ puisque X et Y le sont. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $\{Z \geq k\} = \{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}$ donc par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}(\{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k)$$

Puisque $\{X \geq k\} = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} \{X = k\}$,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p_1)^{n-1}p_1 = (1-p_1)^{k-1}$$

> **Remarque.** On aurait pu se passer du calcul de somme de série puisqu'une loi géométrique représente la loi du premier succès.

De la même manière

$$\mathbb{P}(Y \geq k) = (1-p_2)^{k-1}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}$$

On constate enfin que

$$\{Z \geq k\} = \{Z = k\} \sqcup \{Z \geq k+1\}$$

donc

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1) = (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1} - (1-p_1)^k(1-p_2)^k$$

Solution 38

1. Remarquons que

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\{X = n\} \cap \{Y = n\})$$

Ainsi par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left((1-p)^{n-1}p\right)^2 = p^2\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^{2n} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

2. $X+Y$ est à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Remarquons que

$$\{X+Y=n\} = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} (\{X=k\} \cap \{Y=n-k\})$$

A nouveau par indépednace de X et Y,

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}p = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

> **Remarque.** On aurait aussi pu utiliser les fonctions génératrices de X et Y.

3. Puisque $\{Z>n\} = \bigsqcup_{k \geq n+1} \{Z=k\}$,

$$\mathbb{P}(Z>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p = p(1-p)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = (1-p)^n$$

> **Remarque.** Ceci est cohérent avec l'interprétation de la loi géométrique comme loi du premier succès.

4. On remarque que

$$\{Z>X+Y\} = \bigsqcup_{n \geq 2} (\{Z>n\} \cap \{X+Y=n\})$$

Par indépendance de Z et $X+Y$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z>X+Y) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(Z>n)\mathbb{P}(X+Y=n) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^n(n-1)p^2(1-p)^{n-2} \\
&= p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(1-p)^{2n-2} \\
&= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{2n} \\
&= p^2(1-p)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{2(n-1)} \\
&= \frac{p^2(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}
\end{aligned}$$

car $\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$ pour $t \in]-1,1[$. En simplifiant

$$\mathbb{P}(Z>X+Y) = \frac{(1-p)^2}{(2-p)^2}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> import numpy.random as rd
>>>
>>> p=.2
>>> n=10000
>>> X=rd.geometric(p,n)
```

```
>>> Y=rd.geometric(p,n)
>>> Z=rd.geometric(p,n)
>>> sum(Z>X+Y)/n
np.float64(0.2008)
>>> (1-p)**2/(2-p)**2
0.19753086419753088
```

Solution 39

1. La loi de X est une loi géométrique de paramètre 1/2.
2. Notons B l'événement consitant à obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience. Alors

$$B = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} (B \cap \{X = n\})$$

Or

$$\mathbb{P}(B \cap X = n) = \mathbb{P}_{X=n}(B)\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}$$

Comme

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on obtient par intégration

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(B) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from random import random
>>> from math import log
>>>
>>> def simul():
...     nb=1
...     while random()<.5:
...         nb+=1
...     return random()<1/nb
...
>>> N=10**5
>>> sum([simul() for n in range(N)])/N
0.69218
>>> log(2)
0.6931471805599453
```

Solution 40

1. X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1-p)^{n-1}p$$

2. **a.** U et V sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$. Soit alors $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$.
Traitons d'abord le cas où $m = 0$. Alors

$$\{(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, 0)\} = \{\mathrm{X} = n\} \cap \{\mathrm{Y} = n\}$$

donc, par indépendance de X et Y

$$\mathbb{P}((\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, 0)) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = p^2(1-p)^{2n-2}$$

Traitons maintenant le cas $m > 0$. Alors

$$\{(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, m)\} = (\{\mathrm{X} = n + m\} \cap \{\mathrm{Y} = n\})$$

A nouveau, par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}((\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, m)) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = n + m)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = p^2(1-p)^{2n+m-2}$$

En intervertissant X et Y, on trouve que si $m < 0$,

$$\mathbb{P}((\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, m)) = p^2(1-p)^{2n-m-2}$$

Dans tous les cas,

$$\mathbb{P}((\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, m)) = p^2(1-p)^{2n+|m|-2}$$

On retrouve alors les lois marginales.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{U} = n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U} = n, \mathrm{V} = m) \\
&= p^2(1-p)^{2n-2} + 2\sum_{m=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n+m-2} \\
&= p^2(1-p)^{2n-2} + 2p^2(1-p)^{2n-1}\sum_{m=1}^{+\infty}(1-p)^{m-1}
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(1-p)^{m-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{U} = n) = p(1-p)^{2n-2}(2-p) = \left((1-p)^2\right)^{n-1}\left(1-(1-p)^2\right)$$

Notamment, U suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2$.
De la même manière

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{V} = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U} = n, \mathrm{V} = m) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n+|m|-2} \\
&= p^2(1-p)^{|m|}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2(n-1)} \\
&= p^2(1-p)^{|m|} \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)^{|m|}}{2-p}
\end{aligned}$$

b. Il s'agit d'une simple vérification :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(\mathrm{U} = n)\mathbb{P}(\mathrm{V} = m) = p(1-p)^{2n-2}(2-p) \cdot \frac{p(1-p)^{|m|}}{2-p} = p^2(1-p)^{2n+|m|-2} = \mathbb{P}(\{\mathrm{U} = n\} \cap \{\mathrm{V} = m\})$$

3. L'énoncé suppose implicitement que U et V sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$. Puisque $X = U + \max(V, 0)$ et $Y = U - \min(V, 0)$, X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Posons $p_n = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par indépendance de U et V d'une part et de X et Y d'autre part,

$$\mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = 0) = \mathbb{P}(U = n, V = 0) = \mathbb{P}(X = n, Y = n) = p_n^2$$

De même,

$$\mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = 1) = \mathbb{P}(U = n, V = 1) = \mathbb{P}(X = n + 1, Y = n) = p_n p_{n+1}$$

Par hypotèse ces deux quantités ne sont pas nulles, donc en divisant membre à membre

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$$

La suite de terme général $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ est donc constante i.e. la suite (p_n) est géométrique. En notant $1 - p$ sa raison, $p_n = (1 - p)^{n-1} p_1$. Mais comme $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, $p_1 = p$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

donc X et Y suivent bien la loi géométrique de paramètre p.
On a vu plus haut que $1 - p = \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$ i.e. $p = 1 - \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$.

Solution 41

1. **a.** Les variables aléatoires Y_k sont mutuellement indépendantes.
On a clairement $Y_1 = 1$.

b. Y_k suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n - k + 1}{n} = 1 - \frac{k - 1}{n}$. On en déduit que $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{n}{n - k + 1}$ et que $\mathbb{V}(Y_k) = \frac{\frac{k-1}{n}}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2} = \frac{n(k - 1)}{(n - k + 1)^2}$.

2. On a clairement $X = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n - k + 1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n H_n$$

3. Par comparaison série/intégrale, on obtient classiquement $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$.

Solution 42

Montrons d'abord un résultat préliminaire. Soient A et B deux événements tels que $B \subset A$. Si $\mathbb{P}(A) > 0$ alors

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

et donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$$

Le résultat est encore valable si $\mathbb{P}(A) = 0$. En effet, dans ce cas, $\mathbb{P}(B) = 0$ car $B \subset A$.

Supposons que $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in [0, 1]$. Un calcul classique (ou l'interprétation de la loi géométrique comme la loi d'un premier succès) montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n) = q^n$ où $q = 1 - p$.
Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Si $\mathbb{P}(X > n) > 0$, alors, comme $\{X > n + p\} \subset \{X > n\}$,

$$\mathbb{P}(X > n + p \mid X > n) = \frac{\mathbb{P}(X > n + p)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{q^{n+p}}{q^n} = q^p = \mathbb{P}(X > p)$$

Si $\mathbb{P}(X > n) = 0$,

Réciproquement supposons que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X > n + p \mid X > n) = \mathbb{P}(X > p)$$

Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n + 1 \mid X > n) = \mathbb{P}(X > 1)$$

Posons $q = \mathbb{P}(X > 1) \in [0, 1]$. Comme $\{X > n + 1\} \subset \{X > n\}$, notre remarque initiale donne $\mathbb{P}(X > n + 1) = q\mathbb{P}(X > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\mathbb{P}(X > n) = q^n \mathbb{P}(X > 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X > 0) = 1$. Ainsi $\mathbb{P}(X > n) = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\{X > n - 1\} = \{X = n\} \sqcup \{X > n\}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n - 1) - \mathbb{P}(X > n) = q^{n-1} - q^n = q^{n-1} p$$

avec $p = 1 - q \in [0, 1]$. Ainsi $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Solution 43

---

1. On rappelle que $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $A_k = \bigsqcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{X = kp\}$. Par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{p=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{kp}} = \frac{1/2^k}{1 - 1/2^k} = \frac{1}{2^k - 1}$$

2. Comme $2 \wedge 3 = 1$, $A_2 \cap A_3 = A_6$. Ainsi

$$\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_6) = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{2^3 - 1} - \frac{1}{2^6 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{63} = \frac{29}{63}$$

3. Notons $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = p_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{p_n}}$$

Remarquons que pour $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+3} \geq 7 + 2n$. Ainsi

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2^5} \leq \mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2^5} + \sum_{n=0}^{\frac{1}{2^{5+2n}}}$$

ou encore

$$\alpha = \frac{13}{32} \leq \mathbb{P}(B) \leq \frac{13}{32} + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{13}{32} + \frac{1}{96} = \beta$$

Ainsi

$$\left| \mathbb{P}(B) - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{96} \leq 10^{-2}$$

Par conséquent, $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{79}{192}$ est une valeur approchée de $\mathbb{P}(B)$ à 10^{-2} près.

Solution 44

---

1. D'après une identité de polarisation :

$$2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{V}(V + Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)$$

Or une loi de Poisson a une variance égale à son espérance donc

$$2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X + Y) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$$

par linéarité de l'espérance.

2. Soient λ et μ deux réels strictement positifs. Posons $a_n = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ et $b_n = \dfrac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Posons également $p_{i,j} = a_i b_j$ pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ de manière générale sauf

$$p_{0,1} = a_0b_1 - \alpha \qquad p_{1,0} = a_1b_0 + \alpha \qquad p_{0,2} = a_0b_2 + \alpha \qquad p_{2,0} = a_2b_0 - \alpha$$

où l'on choisit par exemple $\alpha = \min\{a_0b_1, a_2b_0\}$. La famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable de somme 1 via Fubini. La famille $(p_{i,j})$ est donc également une famille sommable de réels positifs (on a choisit α pour cela) de somme 1. Il existe donc une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ telle que $\mathbb{P}(Z = (i,j)) = p_{i,j}$. Posons $Z = (X, Y)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k} = a_n \qquad \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{k,n} = b_n$$

de telle sorte que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} p_{k,n-k} = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

via la formule du binôme de Newton (l'égalité reste encore valable pour $n = 1$ et $n = 2$ car les α se simplifient). Ainsi $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
Enfin, X et Y ne sont pas indépendantes. Par exemple, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = p_{0,1}$ et $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) = a_0b_1 \neq p_{0,1}$ puisque $\alpha > 0$.

Solution 45

1. Si n voitures sont passés en 1H, chacune de ces voitures a une probabilité $\dfrac{1}{m}$ de chosir le gucihet n°1. Ainsi la loi de X conditionnée par l'événement $N = n$ est une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{m}$. Autrement dit

$$\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}$$

2. D'après la formule des probailités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n)$$

Or $\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = 0$ lorsque $k > n$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n + k)\mathbb{P}(N = n + k) \\
&= \sum_{n=}^{+\infty} \binom{n+k}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

3. On reconnaît la somme d'une série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{\lambda\left(1-\frac{1}{m}\right)}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\frac{\lambda}{m}}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!}$$

Par conséquent, X suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{m}$.

4. C'est du cours : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \dfrac{\lambda}{m}$.

Solution 46

1. L'application $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t^n e^{-t^2} \underset{\pm\infty}{=} \dfrac{1}{t^2}$ par croissances comparées. donc l'intégrale I_n converge par comparaison à une intégrale de Riemann.

2. Remarquons que

- $t \mapsto t^{n+1}/(n+1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $t \mapsto e^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2} = 0$.

Donc, par intégration par parties

$$I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t^{n+2}}{n+1} e^{-t^2} \, dt$$

ou encore

$$2I_{n+2} = (n+1)I_n$$

Comme $t \mapsto te^{-t^2}$ est impaire, $I_1 = 0$. Ainsi $I_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, On montre également que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

3. On utilise la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) I_n \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n I_n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n} I_{2n}}{(2n)!} \\
&= e^{-\lambda} \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^{2n} n!} \\
&= e^{-\lambda} \sqrt{\pi} e^{\frac{\lambda^2}{4}} \\
&= \sqrt{\pi} e^{-\lambda + \frac{\lambda^2}{4}}
\end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de transfert est justifiée a posteriori puisque le calcul précédent montre que la série à termes postifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n) I_n$ converge.

Espérance et variance

Solution 47

On utilise la formule de transfert. En posant $q = 1 - p$,

$$\mathbb{E}(1/X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} q^{k-1} p = \frac{p}{q} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k+1}}{k+1}$$

On sait que la série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} x^k$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\dfrac{1}{1-x}$. Par intégration d'une série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{q^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-q) = -\ln(p)$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(1/\mathrm{X}) = -\frac{p\ln p}{q} = -\frac{p\ln p}{1-p}$$

Solution 48

Les termes des sommes suivantes étant positifs, les égalités suivantes ont un sens dans $[0,+\infty]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}>n) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) \qquad \text{d'après le théorème de Fubini positif}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \mathbb{E}(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

Notamment, X est d'espérance finie si et seulement si $\sum\mathbb{P}(\mathrm{X}>n)$ et on a bien l'égalité voulue (dans $\mathbb{R}_+$) dans ce cas.

Solution 49

1. Z est à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\{\mathrm{Z}\geq k\} = \bigcup_{\mathrm{I}\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N})}\bigcap_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{E}_i$$

où $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal k. L'ensemble $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ est dénombrable puisque l'application qui une partie $\{x_1,\dots,x_k\}$ de $\mathbb{N}$ (avec $x_1<\dots<x_k$) associe $(x_1,\dots,x_k)$ est une injection de $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}^k$. Par conséquent, $\{\mathrm{Z}\geq k\}$ est un événement en tant qu'union dénombrable d'événements. Ensuite

$$\{\mathrm{Z}=k\} = \{\mathrm{Z}\geq k\}\setminus\{\mathrm{Z}\geq k+1\}$$

donc $\{\mathrm{Z}=k\}$ est aussi un événement.
Enfin

$$\{\mathrm{Z}=\infty\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\{\mathrm{Z}\geq k\}$$

donc $\{\mathrm{Z}=\infty\}$ est aussi un événement comme intersection dénombrable d'événement.
Ceci prouve que Z est bien une variable aléatoire.

2. Remarquons que

$$\overline{\mathrm{F}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n}\mathrm{E}_k$$

donc F est un événement. De plus,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n}\mathrm{E}_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$$

Comme la série $\sum\mathbb{P}(\mathrm{E}_n)$ converge, la suite de ses restes converge vers 0 i.e.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{E}_k) = 0$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} \mathrm{E}_k\right) = 0$$

La suite $\left(\bigcup_{k\geq n} \mathrm{E}_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion donc, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} \mathrm{E}_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} \mathrm{E}_k\right) = 0$$

puis $\mathbb{P}(\mathrm{F}) = 1$.

3.

Solution 50

---

1. On pose $q = 1 - p$. Notons U le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier «pile» et V le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le deuxième «pile» après avoir obtenu le premier «pile». Alors U et V sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p. On rappelle que $\mathrm{G}_\mathrm{U}(t) = \mathrm{G}_\mathrm{V}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1}qt^n$. Comme U et V sont indépendantes, $\mathrm{G}_{\mathrm{U}+\mathrm{V}}(t) = \mathrm{G}_\mathrm{U}(t)\mathrm{G}_\mathrm{V}(t)$ donc, par produit de Cauchy,

$$\mathrm{G}_{\mathrm{U}+\mathrm{V}}(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)q^{n-2}pt^n$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbb{P}(\mathrm{U}+\mathrm{V} = n) = (n-1)q^{n-2}p^2$. Or il est clair que $\mathrm{X} = \mathrm{U}+\mathrm{V}-2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = \mathbb{P}(\mathrm{U}+\mathrm{V} = n+2) = (n+1)q^n p^2$$

2. Par linéarité de l'espérance, X est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{U}) + \mathbb{E}(\mathrm{V}) - 2 = \frac{2}{p} - 2 = \frac{2q}{p}$$

3. La loi de Y conditionnée par l'événement $\mathrm{X} = n$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k \mid \mathrm{X} = n)\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)q^n p^2 = p^2 \frac{q^k}{1-q} = pq^k$$

Autrement dit, $\mathrm{Y}+1$ suit une loi géométrique de paramètre p. Ainsi $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$.

4. Tout d'abord, Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ puisque $\mathrm{Y} \leq \mathrm{X}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$[\mathrm{Z} = k] = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} [\mathrm{X} = n] \cap [\mathrm{Y} = n-k]$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{Z} = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{X} = n] \cap [\mathrm{Y} = n-k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n-k \mid \mathrm{X} = n)\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)q^n p^2 \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} q^n p^2 = p^2 \cdot \frac{q^k}{1-q} = pq^k
\end{aligned}$$

Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([\mathrm{Z}=k]\cap[\mathrm{Y}=n]) &= \mathbb{P}([\mathrm{X}=n+k]\cap[\mathrm{Y}=n])\\ &= \mathbb{P}(\mathrm{Y}=n \mid \mathrm{X}=n+k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=n+k)\\ &= \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)q^{n+k}p^2\\ &= pq^k\cdot pq^n = \mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)\end{aligned}$$

Ceci prouve que Z et Y sont indépendantes.

Solution 51

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}>n) = \mathbb{P}([\mathrm{X}>n]\cap[\mathrm{Y}>n]) = \mathbb{P}(\mathrm{X}>n)\mathbb{P}(\mathrm{Y}>n)$$

De plus

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p = p(1-p)^n\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

De même, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}>n)=(1-q)^n$. D'après la formule d'antiréparatition,

$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{Z}>n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n(1-q)^n = \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{1}{p+q-pq}$$

Solution 52

Tout d'abord, $\mathrm{X}\sim\mathcal{G}(1/2)$. Ensuite, la loi de Y conditionnée par l'événement $\{\mathrm{X}=n\}$ est la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On en déduit que Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que, d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k \mid \mathrm{X}=n)\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini positif,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{n}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}k = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{2^n} = -\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

On peut vérifier avec Python.

```python
from random import random, randint
def simul():
    n=1
    while random()<.5:
        n+=1
    return randint(1,n)

def esperance(N):
    return sum([simul() for _ in range(N)])/N
```

```
>>> esperance(10000)
1.4955
```

Fonctions génératrices

Solution 53

Comme les X_k sont indépendantes,

$$G_S(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(t-1)} = e^{\Lambda(t-1)}$$

en notant $\Lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. On en déduit que S suit la loi de Poisson de paramètre Λ.

Solution 54

On a alors $G_{X_i}(t) = (1-p+pt)^{n_i}$. Comme les X_i sont indépendantes,

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = (1-p+pt)^n$$

en posant $n = \sum_{i=1}^{n} n_i$. Ainsi $S \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Solution 55

1. Remarquons que S est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{S = n\} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (\{N = n\} \cap \{S_k = n\})$$

en posant $S_k = \sum_{i=0}^{k} X_i$. Les S_k sont des variables aléatoires comme sommes *finies* de variables aléatoires réelles donc les ensembles $\{S_k = n\}$ sont des événements. Ainsi $\{S = n\}$ est bien un événement comme réunion dénombrable d'événements. S est donc bien une variable aléatoire.

2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Puisque $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = m, N = n)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires S et $\sum_{k=1}^{n} X_k$ coïncident sur l'événement $N = n$ donc

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m, N = n\right)$$

puis par indépendance des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, N$

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) \mathbb{P}(N = n)$$

Soit $t \in [0, 1]$.

$$G_S(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = m) t^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) \mathbb{P}(N = n) t^m$$

Cette égalité et le fait que la famille $\left(\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) \mathbb{P}(N = n) t^m\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille de réels positifs permettent d'appliquer le théorème de Fubini de sorte que

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) t^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(t)$$

Or $G_{\sum_{k=1}^n X_k} = G_X^n$ car $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi que X donc

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_X(t)^n = G_N \circ G_X(t)$$

3. Puisque X et N admettent des espérances finies, G_X est dérivable en 1 et G_N est dérivable en $1 = G_X(1)$. Il s'ensuit que G_S est dérivable en 1 et que

$$G'_S(1) = G'_X(1) G'_N(G_X(1)) = G'_X(1) G'_N(1)$$

Autrement dit, S admet une espérance finie et $E(S) = E(X)E(N)$.

4. Puisque X et N admettent des moments d'ordre deux, G_X est deux fois dérivable en 1 et G_N est deux fois dérivable en $1 = G_X(1)$. Il s'ensuit que G_S est deux fois dérivable en 1 et donc que S admet un moment d'ordre deux. De plus

$$G''_S(1) = G'_X(1)^2 G''_N(G_X(1)) + G''_X(1) G'_N(G(1)) = G'_X(1)^2 G''_N(1) + G''_X(1) G'_N(1)$$

puis

$$\begin{aligned}
V(S) &= G''_S(1) + G'_S(1) - G'_S(1)^2 \\
&= G'_X(1)^2 G''_N(1) + G''_X(1) G'_N(1) + G'_X(1) G'_N(1) - G'_X(1)^2 G'_N(1)^2 \\
&= G'_X(1)^2 (G''_N(1) + G'_N(1) - G'_N(1)^2) + G'_N(1)(G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2) \\
&= E(X)^2 V(N) + E(N) V(X)
\end{aligned}$$

Solution 56

---

1. Posons $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n^2+n+1)(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que $R = +\infty$.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+2n+1}{n!} t^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-2)!} t^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{n!} t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\
&= t^2 e^t + 2te^t + e^t = (t^2 + 2t + 1) e^t
\end{aligned}$$

3. **a.** On doit avoir $G_X(1) = 1$ donc $\lambda = \dfrac{1}{4e}$.

b. On sait que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$. Or $G'_X(t) = \lambda(t^2 + 4t + 3)e^t$ donc $\mathbb{E}(X) = 2$.

Par ailleurs, $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$. Or $G''_X(t) = \lambda(t^2 + 6t + 7)e^t$ donc $\mathbb{V}(X) = \dfrac{7}{2} + 2 - 2^2 = \dfrac{3}{2}$.

Solution 57

---

1. D'après le cours, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et son développement en série entière est :

$$\forall t \in]-1,1[, \ \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

On en déduit que G_X est développable en série entière sur $]-2,2[$ et que son développement en série entière est :

$$\forall t \in]-2,2[,\ G_X(t) = \frac{1}{2-t} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}}$$

2. D'après le cours, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et son développement en série entière est :

$$\forall t \in]-1,1[,\ (1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}t^n \text{ où } \binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)$$

Notamment, pour $\alpha = 1/2$, la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et son développement en série entière est :

$$\forall t \in]-1,1[,\ (1+t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}t^n$$

De plus, $\binom{1/2}{0} = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\binom{1/2}{n} &= \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(k-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k-1}{2}\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n(2n-1)n!}\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n(2n-1)n!}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{2n}k}{\prod_{k=1}^{n}2k}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n(2n-1)n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n n!}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

On remarque que cette expression est encore valide pour $n=0$. On en déduit que

$$\forall t \in]-1,1[,\ (1+t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}t^n$$

3. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\forall t \in]-2,2[,\ G_Y(t) &= 2-\sqrt{2}\sqrt{1-t/2}\\
&= 2-\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}(-t/2)^n\\
&= 2+\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{8^n(2n-1)}\binom{2n}{n}t^n\\
&= 2-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{8^n(2n-1)}\binom{2n}{n}t^n
\end{aligned}$$

4. D'après les questions précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

et

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 2 - \sqrt{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = n) = \frac{\sqrt{2}}{8^n(2n-1)}\binom{2n}{n}$$

5. Comme X et Y sont indépendantes,

$$\forall t \in]-1,1[,\ G_S(t) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \frac{1}{1-t/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-t/2)^{-1/2}$$

On sait d'une part que

$$\forall t \in]-2,2[,\ \frac{1}{1-t/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{2^n}$$

D'autre part, on a vu précédemment que

$$\forall t \in]-1,1[,\ (1+t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}t^n$$

donc, en dérivant terme à terme,

$$\begin{aligned}\forall t \in]-1,1[,\ \frac{1}{2}(1+t)^{-1/2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}t^{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{4^{n+1}(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1}t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{4^{n+1}(2n+1)} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}t^n\\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\binom{2n}{n}t^n\end{aligned}$$

puis

$$\forall t \in]-1,1[, (1+t)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}t^n$$

puis enfin

$$\forall t \in]-2,2[, (1-t/2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8^n}\binom{2n}{n}t^n$$

Finalement,

$$\forall t \in]-1,1[,\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{8^n\sqrt{2}}\binom{2n}{n}\right)t^n$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S = n) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{8^n\sqrt{2}}\binom{2n}{n}$$

6. **a.** X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $X+1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X+1 = n) = \mathbb{P}(X = n-1) = \dfrac{1}{2^n}$. Ainsi $X \sim \mathcal{G}(1/2)$.

b. D'après la cours, $\mathbb{E}(X+1) = \dfrac{1}{1/2} = 2$ et $\mathbb{V}(X+1) = \dfrac{1-1/2}{(1/2)^2} = 2$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X+1) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(1) = \mathbb{E}(X)+1$ donc $\mathbb{E}(X) = 1$. De plus, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X+1) = 2$.

c. La fonction G_Y est dérivable sur $]-2,2[$ et

$$\forall t \in]-2,2[,\ G_Y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{2-t}}$$

Notamment, G_Y est dérivable en 1 et $G_Y'(1) = \frac{1}{2}$. D'après le cours, Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$.
La fonction G_Y est en fait deux fois dérivable sur $]-2,2[$ et

$$\forall t \in]-2,2[,\ G_Y''(t) = \frac{1}{4}(2-t)^{-3/2}$$

Or

$$\forall t \in]-2,2[,\ G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n)t^n$$

donc, par dérivation d'une série entière :

$$\forall t \in]-2,2[,\ G_Y''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(Y=n)t^{n-2}$$

Notamment,

$$G_Y''(1) = \frac{1}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(Y=n)$$

D'après la formule de transfert, $Y(Y-1)$ admet une espérance et $\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{1}{4}$.

d. Comme $Y^2 = Y(Y-1)+Y$, Y^2 admet également une espérance et

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(Y(Y-1)) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

On en déduit que

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

e. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Temps d'arrêt

Solution 58

On note respectivement P_n et F_n le nombre de «piles» et de «faces» obtenus en n coups. En remarquant que $P_n + F_n = n$, l'événement $P_n = 2F_n$ est également l'événement $3F_n = n$. Remarquons que, F_n étant à valeurs entières, l'événement $3F_n = n$ est vide si n n'est pas multiple de 3. Si on note A l'événement dont on recherche la probabilité, alors $\overline{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{F_{3n} = n\}$. $F_{3n} = n$

Notons $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ F_{3n} = n\}$. On convient que $T = \infty$ siF_{3n} n'est jamais égal à n.
Posons $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_{3n} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}}$ et $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T=n)$.
On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n-k})\mathbb{P}(T=k)$$

$S_1 = 1 + S_1S_2$
$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$

Finalement
$\mathbb{P}(\mathrm{T}=\infty)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{T}=n)=1-\mathrm{S}_2=\frac{1}{\mathrm{S}_1}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3}$

Solution 59

On pose $\mathrm{S}_n=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$.

1. T_1 suit la loi géométrique de paramètre p.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\{\mathrm{T}_r=n\}=\{\mathrm{S}_{n-1}=r-1\}\cap\{\mathrm{X}_n=1\}$$

Or S_{n-1} et X_n sont indépendantes d'après le lemme des coalitions donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_r=n)=\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{n-1}=r-1\right)\mathbb{P}(\mathrm{X}_n=1)$$

De plus, S_{n-1} suit la loi de Bernoulli de paramètres $n-1$ et p en tant que somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_r=n)=\binom{n-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)}\cdot p=\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$$

3. **Première méthode.** On remarque que

$$\overline{\{\mathrm{T}_r=+\infty\}}=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{\mathrm{T}_r=n\}$$

donc

$$\begin{aligned}1-\mathbb{P}(\mathrm{T}_r=+\infty)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{T}_r=n)\\&=\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}\\&=p^r\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n-1}{r-1}(1-p)^{n-r}\end{aligned}$$

On sait que pour $x\in]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$$

donc en dérivant $r-1$ fois

$$\frac{(r-1)!}{(1-x)^r}=\sum_{n=r-1}^{+\infty}\frac{n!}{(n-r+1)!}x^{n-r+1}$$

ou encore

$$\frac{1}{(1-x)^r}=\sum_{n=r-1}^{+\infty}\binom{n}{r-1}x^{n-r+1}=\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n-1}{r-1}x^{n-r}$$

Notamment,

$$\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n-1}{r-1}(1-p)^{n-r}=\frac{1}{(1-(1-p))^r}=\frac{1}{p^r}$$

On en déduit que $1-\mathbb{P}(\mathrm{T}_r=+\infty)=1$ i.e. $\mathbb{P}(\mathrm{T}_r=+\infty)=0$.
Deuxième méthode. On remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\{\mathrm{T}_r=+\infty\}\subset\{\mathrm{T}_r>n\}=\{\mathrm{S}_n\leq r\}$$

donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_r=+\infty)\leq\mathbb{P}(\mathrm{S}_n\leq r)$$

Or

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n\leq r)=\sum_{k=0}^{r}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n=k)=\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}p^r(1-p)^{n-r}$$

Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$ donc, par croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} p^r(1-p)^{n-r} = 0$$

Par somme finie,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leq r) = 0$$

On en déduit à nouveau que $\mathbb{P}(T_r = +\infty) = 0$.

Solution 60

---

1. Dans la suite, on notera F_n (resp. P_n) l'événement «on a obtenu "pile" (resp. "face") au $n^{\text{ème}}$ lancer.
   - $\{X = 2\} = P_1 \cap P_2$ donc $p_2 = \frac{4}{9}$.
   - $\{X = 3\} = F_1 \cap P_2 \cap P_3$ donc $p_3 = \frac{4}{27}$.
2. Remarquons que F_1, $P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements. On écrit la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X = n+2) = \mathbb{P}(X = n+2 \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap F_1)\mathbb{P}(P_1 \cap F_1) + \mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap P_2)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$$

   - Lorsque l'on a obtenu face au premier lancer, on doit alors obtenir le premier double pile à la fin des $n+1$ lancers restants. Ainsi $\mathbb{P}(X = n+2 \mid F_1) = p_{n+1}$.
   - Lorsque on a déjà obtenu deux piles consécutifs lors des deux premiers lancers, il est désormais impossible d'obtenir le premier double pile au $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer. Ainsi $d\mathrm{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap P_2) = 0$.
   - Lorsque l'on a ontenu un pile puis un face lors des deux premiers lancers, on doit alors obtenir le premier double pile à la fin des n lancers restants. Ainsi $\mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap F_1) = p_n$.

   Finalement, $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$.
3. Au vu des valeurs de p_2 et p_3, on doit choisir $p_1 = 0$.
4. Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence précédente est $X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{2}{9}$. Ses racines sont $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^n + B\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

   En particulier,

$$\begin{cases} \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B = p_1 = 0 \\ \frac{4}{9}A + \frac{1}{9}B = p_2 = \frac{4}{9} \end{cases}$$

   ce qui donne $A = \frac{2}{3}$ et $B = \frac{4}{3}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

5. On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$ pour $q \in]-1, 1[$. On en déduit sans peine que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = \frac{15}{4}$$

Solution 61

---

1. S_0 est constante égale à 0. Le support de S_1 est clairement $\{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(S_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(S_1 = -1) = 1 - p$.
Le support de S_2 est clairement $\{-2, 0, 2\}$, $\mathbb{P}(S_2 = 2) = p^2$, $\mathbb{P}(S_2 = 2) = (1 - p)^2$ et $\mathbb{P}(S_2 = 0) = 2p(1 - p)$.

2. Notons X_n le déplacement vers du point mobile à l'instant n de sorte que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$. On suppose implictement les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes. Alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ (somme nulle si $n = 0$). Remarquons que $\frac{1}{2}(X_n + 1)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi $R_n = \frac{1}{2}(S_n + n)$ suit une loi binomiale de paramètres n et p. En particulier, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(R_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Par conséquent, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On remarque que si n est pair, S_n ne prend que des valeurs paires et que si n est impair, S_n ne prend que des valeurs impaires. Plus précisément,

$$\forall k \in [\![-n, n]\!],\ \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} (1-p)^{n-k}$$

et

$$\forall k \in [\![-n-1, n]\!],\ \mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k+1) = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1} (1-p)^{n-k}$$

3. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{2n+1} = 0$$

et

$$p_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in [0, 1]$. La suite (p_n) est donc bornée de sorte que le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n t^n$ vaut au moins 1.
On montre classiquement que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n$$

donc

$$\forall t \in]-1, 1[,\ P(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} (4p(1-p)t^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p(1-p)t^2}}$$

car $0 \leq p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

5. Comme les événements $\{T = n\}$ sont disjoints, la série à termes positifs $\sum q_n$ converge. On en déduit que la série entière $\sum q_n t^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. Notamment sa somme Q est continue sur $[-1, 1]$.

6. En faisant intervenir un produit de Cauchy de deux séries entières, il suffit en fait de prouver que $p_0 = 1$ (ce qui est clair) et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} q_k$$

Remarquons que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\{S_n = 0\} &= \bigsqcup_{k=1}^{n} \{S_n = 0\} \cap \{T = k\} \\ &= \bigsqcup_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0 \right\} \cap \{T = k\}\end{aligned}$$

Remarquons que l'événement $\{T = k\}$ peut se décrire uniquement à l'aide de $X_1, \dots, X_k$:

$$\{T = k\} = \left\{\sum_{j=1}^{k} X_j = 0\right\} \cap \left[\bigcap_{\ell=1}^{k-1} \left\{\sum_{j=1}^{\ell} X_j \neq 0\right\}\right]$$

donc les événements $\left\{\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0\right\}$ et $\{T = k\}$ sont indépendants d'après le lemme des coalitions. Ainsi

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0\right) q_k$$

Or $\sum_{j=k+1}^{n} X_j$ suit la même loi que S_{n-k} donc

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} q_k$$

7. Pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$Q(t) = 1 - \frac{1}{P(t)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)t^2}$$

En primitivant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ 1 - \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} x^n$$

On en déduit que

$$\forall t \in]-1, 1[,\ Q(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n (1-p)^n t^{2n}$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n (1-p)^n \text{ et } q_{2n-1} = 0$$

Enfin $q_0 = 0$.

8. L'événement de l'énoncé est $\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{T = n\}$. Comme Q est continue en 1,

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{T = n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = Q(1) = \lim_{t \to 1} 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)t^2} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)} = 1 - |2p - 1|$$

On remarque notamment que cette probabilité vaut 1 lorsque $p = \frac{1}{2}$.

9. Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - |2p - 1| > 0$ donc T n'est pas d'espérance finie.

Si $p = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. On peut alors considérer que $T(\Omega) = \mathbb{N}$ et Q est alors la fonction génératrice de T. On remarque que Q n'est pas dérivable en 1. En effet,

$$\forall t \in]-1, 1[,\ \frac{Q(t) - Q(1)}{t - 1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t} = \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \underset{t \to 1}{\longrightarrow} = +\infty$$

Solution 62

1. **a.** Le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{n}$.

b. Notons A l'ensemble des tirages possibles et A_k le nombre de tirages dans lesquels figurent k boules blanches. Alors $A = \bigsqcup_{k=0}^{n} A_k$.

De plus, se donner un tirage dans A_k équivaut à choisir k boules parmi les n boules blanches et $n-k$ boules parmi les n noires. Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \operatorname{card}(A) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(A_k) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

2. **a.** Pour que la puce se retrouve en O, il faut qu'elle est sauté autant de fois à gauche qu'à droite et le nombre de sauts doit donc être pair. Ainsi $\mathbb{P}(C_{2n+1}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si le nombre de sauts est $2n$, il y faut placer n sauts à droite parmi les $2n$ sauts, le reste des sauts étant à gauche. Ainsi $\mathbb{P}(C_{2n}) = \binom{2n}{\cdot}\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

b. D'après la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} = \frac{2^{2n}}{=}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

puis

$$\mathbb{P}(C_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_{2n}) = 0$.

3. **a.** Pour se retrouver à l'origine, il faut, pour les mêmes raisons que précédemment, un nombre pair de déplacements horizontaux et un nombre pair de déplacements verticaux. Ainsi pour se retrouver à l'origine en $2n$ coups :

- on fixe un nombre $2k$ ($k \in [\![0, n]\!]$) de déplacements horizontaux (les $2n-2k$ déplacements restants sont horizontaux) ;
- on choisit k déplacements à doite parmi les $2k$ déplacements horizontaux (les k déplacements restants étant à gauche) ;
- on choisit $n-k$ déplacements vers le haut parmi les $2n-2k$ déplacements verticaux (les $n-k$ déplacements restants étant vers le bas).

Finalement

$$\mathbb{P}(C_{2n}) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}^2$$

b. On avait trouvé précédemment

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

donc

$$\binom{2n}{n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^{2n}}{\pi n}$$

puis

$$\mathbb{P}(C_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$$

et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_{2n}) = 0$.

Solution 63

1. Notons X le nombre de coups joués, A_n l'événement «le joueur A gagne au tour $2n-1$» et B_n «le joueur A gagne au tour $2n$». Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\{X = 2n-1\} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1}(\overline{A_k} \cap \overline{B_k})\right) \cap A_n$$

Par indépendancce mutuelle

$$\mathbb{P}(X = 2n-1) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{B_k}) \cdot \mathbb{P}(A_n) = (1-p)^{n-1} p^n$$

De même, pour $p \in \mathbb{N}^*$

$$\{X = 2n\} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1}(\overline{A_k} \cap \overline{B_k})\right) \cap \overline{A_n} \cap B_n$$

Par indépendance mutuelle,

$$\mathbb{P}(X = 2n) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{B_k}) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}(B_n) = (1-p)^{n+1} p^{n-1}$$

2. Notons A l'événement «le joueur A gagne». Alors $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{X = 2n-1\}$. Par σ-additivité,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p^n = p \sum_{n=0}^{+\infty} (p(1-p))^n = \frac{p}{1-p(1-p)} = \frac{p}{1-p+p^2}$$

> **Remarque.** On vérifie que $p(1-p) \in [0, 1/4] \subset [0, 1[$.

3. Notons B l'événement «le joueur B gagne». De même que précédemment,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n+1} p^{n-1} = (1-p)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (p(1-p))^n = \frac{(1-p)^2}{1-p(1-p)} = \frac{(1-p)^2}{1-p+p^2}$$

Notons T l'événement «le jeu se termine». Alors $T = A \sqcup B$ donc

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{p}{1-p+p^2} + \frac{(1-p)^2}{1-p+p^2} = 1$$

4. On souhaite déterminer $p \in [0, 1]$ de sorte que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ i.e. $p = (1-p)^2$. On trouve $p = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

5. On cherche $\mathbb{E}(X)$ qui est toujours définie puisque X est une variable aléatoire positive. Par sommation par paquets

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)\mathbb{P}(X = 2n-1) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\mathbb{P}(X = 2n) = 2p \sum_{n=1}^{+\infty} n(p(1-p))^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n-1) + 2(1-p)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(p(1-p))^{n-1}$$

On rappelle que par dérivation de la série géométrique

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2p}{(1-p+p^2)^2} - \frac{p}{1-p+p^2} + \frac{2(1-p)^2}{(1-p+p^2)^2} = \frac{2-3p+3p^2-p^3}{(1-p+p^2)^2}$$

On peut vérifier avec une simulation.

```python
from random import random

def nombre_coups(p):
    n=0
    while True:
        n+=1
        if random()<p:
            break
        n+=1
        if random()<1-p:
            break
    return n

def esperance(p):
    N=100000
    return sum([nombre_coups(p) for _ in range(N)])/N
```

```python
>>> for p in [n/10 for n in range(11)]:
...     print(esperance(p), (2-3*p+3*p**2-p**3)/(1-p+p**2)**2)
```

Inégalités

Solution 64

1. On fixe $t \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [-1,1]$. Alors $\frac{1}{2}(1-x) \geq 0$, $\frac{1}{2}(1+x) \geq 0$ et $\frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{2}(1+x) = 1$. Comme la fonction exp est convexe, par inégalité de Jensen,
$$\exp\left(\frac{1}{2}(1-x)(-t)+\frac{1}{2}(1+x)t\right) \leq \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t)+\frac{1}{2}(1+x)\exp(t)$$
ou encore
$$e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t}+\frac{1}{2}(1+x)e^{t}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que
$$\operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}$$
Or
$$(2n)! = 2^n n! \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$$
donc $(2n)! \geq 2^n n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

3. Fixons $t \in \mathbb{R}$. Puisque X est à valeurs dans $[-1,1]$.
$$e^{t\mathrm{X}} \leq \frac{1}{2}(1-\mathrm{X})e^{-t}+\frac{1}{2}(1+\mathrm{X})e^{t}$$
d'après la première question. Par croissance est linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}}) \leq \frac{1}{2}(1-\mathbb{E}(\mathrm{X}))e^{-t}+\frac{1}{2}(1+\mathbb{E}(\mathrm{X}))e^{t}$$
Or X est centrée donc $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$. On en déduit que
$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}}) \leq \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} = \operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

4. Soit $(t, \varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Puisque $x \mapsto e^{tx}$ est strictement croissante ($t > 0$), $[\mathrm{Y} \geq \varepsilon] = [e^{t\mathrm{Y}} \geq e^{t\varepsilon}]$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{Y} \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{t\mathrm{Y}} \geq e^{t\varepsilon})$. Comme $e^{t\mathrm{Y}}$ est positive, l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}(e^{t\mathrm{Y}} \geq e^{t\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{t\mathrm{Y}})}{e^{t\varepsilon}}$$

On en déduit bien que

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y} \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(e^{t\mathrm{Y}})$$

5. Soit $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(\mathrm{S} \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(e^{t\mathrm{S}})$$

Comme les variables aléatoires $\exp(t\mathrm{X}_k)$ sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{S}_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{t\mathrm{X}_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}_k})$$

Remarquons maintenant que les X_k/c_k sont à valeurs dans $[-1, 1]$. Ainsi

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}_k/c_k}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

Quitte à remplacer t par tc_k, on en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}_k}) \leq e^{\frac{t^2c_k^2}{2}}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(\mathrm{S} \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\prod_{k=1}^n e^{\frac{t^2c_k^2}{2}} = e^{\frac{t^2a}{2}-t\varepsilon}$$

en posant $a = \sum_{k=1}^n c_k^2$. La fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{t^2a}{2} - t\varepsilon$ admet un minimum en $\frac{\varepsilon}{a}$ et celui-ci vaut $-\frac{\varepsilon^2}{2a}$ donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{S} \geq \varepsilon) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{2a}}$$

Enfin, les variables $-\mathrm{X}_k$ vérifient les mêmes hypothèses que les variables X_k donc on a également

$$\mathbb{P}(\mathrm{S} \leq -\varepsilon) = \mathbb{P}(-\mathrm{S} \geq \varepsilon) \leq e^{\frac{-\varepsilon^2}{2a}}$$

Comme $[|\mathrm{S}| \geq \varepsilon]$ est l'union disjointe de $[\mathrm{S} \leq -\varepsilon]$ et $[\mathrm{S} \geq \varepsilon]$,

$$\mathbb{P}(|\mathrm{S}| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\mathrm{S} \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(\mathrm{S} \leq -\varepsilon) \leq 2e^{\frac{-\varepsilon^2}{2a}}$$

Solution 65

---

1. Soit $(x, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ et les réels $\frac{1-x}{2}$ et $\frac{1+x}{2}$ sont positifs et de somme 1. Par convexité

$$\exp\left(-t\frac{1-x}{2} + t\frac{1+x}{2}\right) \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

ou encore

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

2. Comme X est bornée, $e^{t\mathrm{X}}$ également donc elle admet une espérance. Comme X est à valeurs dans $[-1, 1]$, on peu appliquer la question précédente pour affirmer que

$$e^{t\mathrm{X}} \leq \frac{1-\mathrm{X}}{2}e^{-t} + \frac{1+\mathrm{X}}{2}e^t$$

Par linéarité et croissance de l'espérance

$$\mathbb{E}(\mathrm{E}^{tx}) \leq e^{-t}\frac{1-\mathbb{E}(\mathrm{X})}{2} + e^t\frac{1+\mathbb{E}(\mathrm{X})}{2}$$

Or X est centrée donc $\mathbb{E}(X) = 0$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \mathrm{ch}(t)$$

Remarquons alors que

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

En effet, $2^n n!$ est le produit des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à $2n$ donc $2^n n! \leq (2n)!$.

> **Remarque.** On peut également étudier la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t^2}{2} - \ln(\mathrm{ch}\, t)$ pour établir cette inégalité.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_i})$$

Comme X_i/a_i est centrée et que $|X_i/ai_| \leq 1$,

$$\mathbb{E}(E^{tX_i}) = \mathbb{E}(e^{ta_i \cdot \frac{X_i}{a_i}}) \leq e^{\frac{(ta_i)^2}{2}} = e^{\frac{t^2 a_i^2}{2}}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{t^2 a_i^2}{2}} = \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

4. Puisque $\{|S_n| \geq a\} = \{S_n \geq a\} \sqcup \{-S_n \geq a\}$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) = \mathbb{P}(S_n \geq a) + \mathbb{P}(-S_n \geq a)$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Par stricte croissance de $x \mapsto e^{tx}$,

$$\{S_n \geq a\} = \left\{e^{tS_n} \geq e^{ta}\right\} \qquad \text{et} \qquad \{-S_n \geq a\} = \left\{e^{-tS_n} \geq e^{ta}\right\}$$

Les variables aléatoires e^{tS_n} et e^{-tS_n} sont positives donc d'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(e^{tS_n} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{ta}} \qquad \text{et}\mathbb{P}(e^{-tS_n} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{-tS_n})}{e^{ta}}$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{st^2}{2}}$$

Mais comme les $-X_i$ vérifient les mêmes hypothèses que les X_i, on a également

$$\mathbb{E}(e^{-tS_n}) \leq e^{\frac{st^2}{2}}$$

Finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2\exp\left(\frac{st^2}{2} - ta\right)$$

L'application $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{st^2}{2} - ta$ admet un minimum en $\frac{a}{s}$ valant $-\frac{a^2}{2s}$. Donc, par croissance de l'exponentielle,

$$\mathbb{E}(e^{-tS_n}) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2s}}$$

Solution 66

1. **a.** Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Alors $(X+u)^2 = X^2 + 2uX + u^2$ puis par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}((X+u)^2) = \mathbb{E}(X^2) + 2u\mathbb{E}(X) + u^2$$

Or $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2)$ donc

$$\mathbb{E}((X+u)^2) = \mathbb{V}(X) + u^2$$

b. Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que

$$\{X \geq \lambda\} = \{X + u \geq \lambda + u\} \subset \{(X+u)^2 \geq (\lambda+u)^2$$

L'inclusion est justifiée par le fait que $\lambda + u \geq 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \mathbb{P}((X+u)^2 \geq (\lambda+u)^2)$$

Comme $(X+u)^2$ est une variable aléatoire positive et comme $(\lambda+u)^2 > 0$, d'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}((X+u)^2 \geq (\lambda+u)^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X+u)^2)}{(\lambda+u)^2}$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X) + u^2}{(\lambda+u)^2}$$

c. On choisit u de façon à minimiser $\frac{\mathbb{V}(X) + u^2}{\lambda + u^2}$. Une rapide étude de la fonction $u \mapsto \frac{\mathbb{V}(X)+u^2}{(\lambda+u)^2}$ montre qu'elle atteint son minimum en $u = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda}$. On prend donc $u = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda}$ dans l'inégalité précédente, ce qui donne

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)^2/\lambda^2}{(\lambda + \mathbb{V}(X)/\lambda)^2} = \frac{\lambda^2\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)^2}{(\lambda^2 + \mathbb{V}(X))^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(X)}$$

2. Posons $Y = \mathbb{X} - \mathbb{E}(X)$ de sorte que $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X)$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq \lambda) = \mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(Y)} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(X)}$$