Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1 ★★

Soit a et b deux fonction impaires continues sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrer que f est paire.

Exercice 2 ★★ Périodicité

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$ et f une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$. Montrer que f est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$.

Exercice 3 ★

Résoudre sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ puis $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - xy = 1$$

Exercice 4 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy' - \alpha y = 0$. Déterminer l'unique solution f vérifiant $f(1) = 1$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy' - \alpha y = f$. Déterminer l'unique solution g vérifiant $g(1) = 0$.
3. On définit par récurrence une suite de fonctions (u_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ de la manière suivante :
   - $u_0 = f$;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est l'unique solution de l'équation différentielle $xy' - \alpha y = u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ valant 0 en 1.

   Remarque. On a donc $u_1 = g$.

   Déterminer par récurrence u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 ★★★★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 6 ★★★ Equation différentielle et crochet de Lie

Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A'(t) = A(t)B - BA(t)$$

Montrer que pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $A(s)$ et $A(t)$ sont semblables.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 7 ★

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - (1 - i)y' - 2(1 + i)y = 0$.
2. Donner l'unique solution f vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

Exercice 8 ★★★

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f + f'' \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

Exercice 9 ★★★ — **Mines MP 2010**

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On considère l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. On suppose que q est non constamment nulle au voisinage de $+\infty$ et que l'on dispose d'une solution y strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $f = \dfrac{y'}{y}$.

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
2. Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle y est strictement positive.
4. Montrer que q est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_{[x,+\infty[} q \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 10 ★

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*

$$(\mathbf{E}) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à $(\mathbf{E})$.
2. Déterminer une solution particulière de $(\mathbf{E})$.
3. Résoudre l'équation $(\mathbf{E})$.
4. Déterminer l'unique solution f de $(\mathbf{E})$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 11 ★★

Soient a, b et x_0 des réelles tels que $a^2 \neq b$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que

$$\begin{cases} f'' + af' + bf = 0 \\ f^{(3)}(x_0) = f(x_0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$$
2. Résoudre ensuite sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = \frac{1}{1+t^2}$$

Exercice 13 ★★

Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle $y'' + y = \tan t$.

Exercice 14 ★★★

1. Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme
$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) \\ y & \longmapsto & (x \mapsto xy'(x)) \end{cases}$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle
$$x^2y'' + xy' - \alpha^2 y = 0$$

Exercice 15 ★★

On étudie l'équation différentielle $(t^2+1)y'' - 2y = t$.

1. Déterminer une solution polynomiale non nulle φ de l'équation homogène associée.
2. Résoudre l'équation homogène en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.
3. Exprimer la solution générale de l'équation étudiée.

Exercice 16 ★★★★ **ENS MP 2010**

Soient q une application continue périodique non identiquement nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et f une solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Montrer que f s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 17 ★★★

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique. Montrer que l'équation différentielle $y''+y = f$ admet des solutions 2π-périodiques si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos t \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin t \, \mathrm{d}t = 0$$

Exercice 18 ★★★ **TPE-EIVP MP 2018**

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

1. On considère f une fonction solution de (E) sur $[0,1]$ s'annulant une infinité de fois. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = f'(x) = 0$
2. Déterminer toutes les solutions de (E) s'annulant une infinité de fois sur $[0,1]$.

Exercice 19 ★★

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$.
2. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(nt)$$

Exercice 20 **CCP MP**

1. Montrer qu'il existe une solution h de l'équation $xy'' + y' + y = 0$ développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.
2. Montrer que h ne s'annule qu'une fois sur $]0,2[$.

Exercice 21 **CCINP MP 2024**

On considère les équations différentielles :

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) :\ & x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1\\ (\mathrm{H}) :\ & x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 0\end{aligned}$$

On note $\mathrm{I} =]0,+\infty[$, $\mathrm{S_I(E)}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $\mathrm{S_I(H)}$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

1. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{S_I(H)}$.
2. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
   Vérifier que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$.
3. On note pour $x \in \mathrm{I}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x^2}$. On admet dans cette question que $g \in \mathrm{S_I(E)}$ et $h \in \mathrm{S_I(H)}$.
   Donner, sans calculs, l'ensemble $\mathrm{S_I(E)}$.
4. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{S_{\mathbb{R}}(H)}$ des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 22 **CCINP MP 2024**

On considère l'équation différentielle (E) : $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$.

1. Déterminer les solutions développables en séries entières et préciser leurs domaines de définition.
2. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra utiliser la méthode de Lagrange : on pose $y = hz$ avec h une solution particulière de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et z une fonction quelconque.
3. En procédant au changement de variable $x = t^{2/3}$, retrouver le résultat de la question précédente.

Systèmes différentiels

Exercice 23 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Résoudre, à l'aide de matrices, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + 6y \\ y' = -3x - 6y \\ z' = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$

Exercice 24 ★★★

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$.

Exercice 25 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -2t \\ 4t & 1+3t \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de $A(t)$.
2. En déduire qu'il existe P indépendant de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
3. Résoudre le système différentiel.

Exercice 26 ★★ **TPE-EIVP MP 2014**

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 9x(t) - 5y(t) + 2t \\ y'(t) = 10x(t) - 6y(t) + e^t \end{cases}$$

Exercice 27 ★★

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x + 3y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

Exercice 28 ★★ **Saint-Cyr PSI 2019**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donner une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.
2. Trouver les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, avec $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 29 ★★

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $\mathrm{X} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t)$$

1. Montrer que $\mathrm{V} : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}$.

2. **a.** Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{S}$. Montrer que $\mathrm{AX} \in \mathcal{S}$.

b. En déduire une base de $\mathcal{S}$.

3. **a.** Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{S}$. Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Soient $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PMP}^{-1}$.
Soit $\mathrm{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $\mathrm{Y}' = \mathrm{MY}$. Montrer que Y est bornée sur $\mathbb{R}$.

4. On introduit sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $(\mathrm{X} \mid \mathrm{Z}) = \mathrm{X}^\top \mathrm{Z}$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathrm{X} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{X}'(t) = (\mathrm{A} + b(t)\mathrm{I}_2)\mathrm{X}(t)$$

Soit $f : t \mapsto \|\mathrm{X}(t)\|^2$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 2b(t)f(t)$$

5. Montrer que la fonction X de la question précédente est bornée.

Exercice 30 **CCINP (ou CCP) MP 2017**

1. Soit $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continues. On suppose qu'il existe C une constante positive telle que

$$\forall t \in [a, b],\ u(t) \leq \mathrm{C} + \int_a^t u(s)v(s)\ \mathrm{d}s$$

a. On pose

$$f(t) = \frac{\mathrm{C} + \int_a^t u(s)v(s)\ \mathrm{d}s}{\exp\left(\int_a^t v(s)\ \mathrm{d}s\right)}$$

Calculer $f(a)$, puis montrer que f est décroissante.

b. En déduire que

$$\forall t \in [a, b],\ u(t) \leq \mathrm{C}\exp\left(\int_a^t v(s)\ \mathrm{d}s\right)$$

2. Soit $\mathrm{A} : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Soit $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ une solution de l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : x'(t) = \mathrm{A}(t)x(t)$.
On considère une norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que la norme $|||\cdot|||$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$.

a. On pose $g(t) = \|x(t)\|^2$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $g'(t) \leq 2g(t) \cdot |||\mathrm{A}(t)|||$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

b. On suppose que $\int_0^{+\infty} |||\mathrm{A}(s)|||\ \mathrm{d}s$ converge. Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Changement de variable

Exercice 31 ★★

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E):\quad x^2y'' - xy' - 3y = x^4$$

1. **a.** Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.

   b. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. **a.** Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.

   b. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32 **CCINP (ou CCP) MP 2013**

On se donne l'équation différentielle $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale de degré 2 à l'équation.
2. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra poser $x = e^t$.
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$.

Problèmes de raccord

Exercice 33 ★★ **Problème de raccordement**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$.

Exercice 34 ★★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.

Exercice 35 ★★ **Raccordement**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - y = x$.

Exercice 36 ★★ **Raccordement**

On considère l'équation différentielle $(E) : xy'' - y' - x^3y = 0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en effectuant le changement de variable $t = x^2$.
2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 37 ★★ **Problème de raccord**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) :\ ty' + (1-t)y = e^{2t}$.

Exercice 38 ★★ **Mines MP**

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$

$$x\ln(x)y' - (3\ln(x) + 1)y = 0$$

Wronskien

Exercice 39 ★★★ **CCP MP 2017**

On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(E) : x'' + 2\frac{x'}{t} + x = 0$$

1. Montrer que $\varphi_1 : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est solution de (E).
2. A l'aide du wronskien, chercher une autre solution de (E).

Exercice 40 ★★★

Soient q une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : y'' + qy = 0$.

1. Soit f une solution bornée de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f' admet une limite en $+\infty$ puis déterminer la valeur de cette limite.

2. Soient f et g deux solutions bornées de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Étudier le wronskien $w = fg' - f'g$ des solutions f et g.
En déduire que f et g sont liées. Que peut-on en conclure ?

Exercice 41 ★★★ **Zéros entrelacés**

1. Soient p et q deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $p \leq q$ sur $\mathbb{R}$. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $u'' + pu = 0$ et $v'' + qv = 0$. On suppose que u s'annule en des réels a et b avec $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$.

   a. On pose $\mathrm{W} = u'v - uv'$. Déterminer W'.

   b. En déduire que v s'annule sur $[a, b]$.

2. Application. Soient r une fonction continue sur $\mathbb{R}$, f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' + rf = 0$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*$.

   a. On suppose $r \geq \mathrm{M}^2$. Montrer que tout intervalle fermé de longueur $\dfrac{\pi}{\mathrm{M}}$ contient au moins un zéro de f.

   b. On suppose $r \leq \mathrm{M}^2$. On suppose que f s'annule en des réels a et b tels que $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que $b - a \geq \dfrac{\pi}{\mathrm{M}}$.

Divers

Exercice 42 ★★★ **Equation fonctionnelle de l'exponentielle matricielle**

Déterminer les applications $\mathrm{M} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivables en 0 vérifiant :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{M}(s+t) = \mathrm{M}(s)\mathrm{M}(t)$$

Exercice 43 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2019**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) > 0$, et $x : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = \mathrm{A}x(t)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ℓ, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ \ell(x(t)) = 0$.

Exercice 44 ★★★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que les solutions du système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ sont toutes bornées.

Exercice 45 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble S_α des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f'(x) = -f(\alpha - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$.

2. Montrer que les éléments de S_α sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

3. Conclure.

Exercice 46 ★★

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$$

Exercice 47 ★★

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f(-x)$$

Exercice 48 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2023 (avec préparation)**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall U \in O_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(AU) \leq \operatorname{tr}(A)$$

1. Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(xB) \in O_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
4. Étudier la réciproque.

Exercice 49

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\exp(A)^T = \exp(A^T)$.
2. On suppose A symétrique dans cette question. Montrer que $\exp(A)$ est également symétrique.
3. Montrer que $\det(\exp(A)) > 0$.
4. On suppose A antisymétrique dans cette question. Montrer que $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

Exercice 50 **Relation de Dyson**

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(t(A+B)) = \exp(tA) + \int_0^t \exp((t-s)A)B\exp(s(A+B))\,ds$$