Devoir surveillé n°13

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★ **E3A MP 2010**

On étudie dans cet exercice des équations de la forme

$$(\mathcal{E}_{p,q}) : \ \mathrm{M}^2 + p\mathrm{M} + q\mathrm{I}_n = 0$$

où l'inconnue M est une matrice carrée de taille n à coefficients *réels* ($\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), p et q sont deux paramètres réels et I_n désigne la matrice identité de taille n.

1. Pour une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\mathrm{E}(\mathrm{M}) = \left\{\mathrm{PMP}^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$$

Démontrer que si M est solution de l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$, alors toute matrice de E(M) est également solution.

Dans la suite, les ensembles de solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$ *pourront être écrits sous la forme d'une réunion d'ensembles* E(A), $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$:

$$\mathrm{M}^2 - (a+b)\mathrm{M} + ab\mathrm{I}_n = 0$$

avec a et b deux réels *distincts*.

a. Démontrer que toute solution M de l'équation est diagonalisable (on énoncera complètement lé théorème utilisé).

b. Déterminer les solutions de l'équation $\mathcal{E}_{-(a+b),ab}$.

3. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$ (c'est-à-dire l'équation $\mathrm{M}^2 = 0$).

a. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M. Démontrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

b. Enoncer précisément le théorème du rang.

c. Démontrer que $\operatorname{rg} f \leq \dfrac{n}{2}$.

d. On pose $p = \operatorname{rg} f$. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$$

e. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$.

4. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$:

$$\mathrm{M}^2 - 2a\mathrm{M} + a^2\mathrm{I}_n = 0$$

avec a un réel.

a. Démontrer que M est solution si et seulement si $\mathrm{N} = \mathrm{M} - a\mathrm{I}_n$ vérifie $\mathrm{N}^2 = 0$.

b. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$.

5. Démontrer que si n est impair, l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{I}_n = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. On considère l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$ (c'est-à-dire l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{I}_n = 0$). On suppose que n est pair et on note $n = 2p$.

a. Démontrer que toute solution M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b. Démontrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$$

c. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$.

Exercice 2 ★★ **E3A MP 2019**

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer

$$2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \qquad 2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme e^z.
Soit α un réel non nul fixé.
Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $\mathrm{C} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathcal{D}$.

3. Donner pour tout $x \in \mathcal{D}$ une expression de $\mathrm{C}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Pour tout entier naturel n, on note

$$\mathrm{J}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\mathrm{C}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{I}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\mathrm{C}(x)\,\mathrm{d}x$$

a. Calculer J_n puis I_n.

b. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $\mathrm{S}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 3 ★★ **E3A MP Maths1 2015**

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge. On admet alors que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

2. Dans la suite de l'énoncé, α désigne un réel strictement positif et x un réel.

a. Montrer que l'application $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.

b. Montrer que l'application $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. On pose

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}\,dt$$

a. Montrer que I est réelle.

b. Soient $\mathrm{A} > 0$ et $\mathrm{B} > 0$. On admet l'existence de l'intégrale $\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\,dx$. Montrer que

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\,dx = \frac{\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

c. En déduire le calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}$ pour $\mathrm{B} > 0$ puis pour B quelconque.

d. En déduire la valeur de I.

Exercice 4 ★★ **D'après E3A 2011**

On identifiera les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées.
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul vérifiant la relation

$$(\star): \ \mathrm{P}(\mathrm{X}^2-1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $a_0 = \alpha$ et $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **a.** Montrer que si α est racine de P, a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **b.** On suppose $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. (a_n) est alors une suite de réels. Montrer que (a_n) est strictement monotone.
- **c.** En déduire que P n'admet aucune racine strictement positive.

2.
- **a.** Montrer que -1 n'est pas racine de P.
- **b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_n + 1$ en fonction de α et n.
- **c.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = |a_n + 1|$. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur α la suite (r_n) est-elle strictement monotone ?
- **d.** En déduire que si α est racine de P, alors $|\alpha + 1| = 1$.
- **e.** Montrer que si α est racine de P, alors $|\alpha - 1| = 1$.

3. Montrer que si P est non constant, alors P admet 0 pour unique racine.

4. Déterminer tous les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ vérifiant la relation $(\star)$.