

DEVOIR À LA MAISON N°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – Mines-Ponts 2017 Maths 1 MP – Séries et caractères

Dans tout le problème, \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers, \mathbb{Z} , l'ensemble des entiers relatifs et N un entier supérieur ou égal à 2.

L'ensemble des classes d'équivalence pour la division euclidienne par N est noté $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. L'élément générique de cet anneau sera noté \bar{a} . On note P l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, N-1\}$ qui sont premiers avec N . L'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est noté $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. On rappelle que φ , l'indicatrice d'Euler, est telle que $\varphi(N)$ représente le cardinal de P . Si a divise b dans \mathbb{Z} , on notera $a \mid b$.

On rappelle aussi le lemme suivant : soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. Si pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k$$

alors

$$\sum_{k=n}^m \alpha_k u_k = -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k+1}) + u_m T_m$$

pour n, m entiers tels que $2 \leq n < m$.

On suppose fixée une application χ de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} qui satisfait les propriétés suivantes :

- A. $\chi(0) = 0$ et χ non identiquement nul.
- B. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, non premier avec N ,

$$\chi(a) = 0.$$

- C. Pour tous les entiers relatifs a et b ,

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b).$$

- D. χ est N -périodique :

$$\chi(a + N) = \chi(a), \text{ pour tout } a \in \mathbb{Z}.$$

I Cas particuliers

- 1 Calculer $\chi(1)$.

- 2 Lorsque $N = 2$, déterminer χ .

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $N = 4$.

- 3 Montrer que $\chi(3)$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1 .

- 4 On suppose maintenant que $\chi(3) = -1$. Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\chi(n)}{n}$$

II Convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\chi(n)}{n}$

Dans cette partie, a est un entier supérieur ou égal à 1 et premier avec N .

- 5** Montrer que $|\chi(a)| = 1$.
On pourra utiliser le théorème d'Euler.

- 6** Etablir l'identité :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$$

On suppose dorénavant qu'il existe a premier avec N tel que $\chi(a) \neq 1$.

- 7** Pour chaque entier n , calculer $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.
On pourra commencer par le cas $n = 0$.

- 8** Montrer, pour tout entier $m \geq 1$, l'inégalité

$$\left| \sum_{k=1}^m \chi(k) \right| \leq \varphi(N)$$

- 9** Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\chi(k)}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

III Comportement asymptotique

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$f_n = \sum_{d|n} \chi(d)$$

où, dans la définition, d décrit l'ensemble des diviseurs entiers (positifs) de n .

- 10** Soient n et m deux entiers strictement positifs, premiers entre eux. Montrer que $f_{nm} = f_n f_m$.
11 Soient p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Calculer f_{p^α} .
12 Pour tout entier $n \geq 1$, établir l'encadrement :

$$0 \leq f_n \leq n$$

- 13** Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que $f_{n^2} \geq 1$.
14 Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n x^n$$

On note $f(x)$ la somme de cette série.

- 15** Montrer, pour tout $x \in [1/2, 1[$:

$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

On pourra utiliser une comparaison d'une série à une intégrale.