Semaine du 06/09

1 Cours

Espaces vectoriels normés

Normes Définition. Rappel sur les normes euclidiennes. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des applications bornées sur un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt} \qquad \|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f|$$

Distance associée à une norme. Boules et sphères. Définition de la convexité d'une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Convexité des boules. Equivalence de normes. Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Partie bornée, application bornée. Produit d'espaces vectoriels normés : norme produit.

Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé Convergence/divergence. Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques. Suites extraites et valeurs d'adhérence.

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé Convergence/divergence. Divergence grossière. Somme d'une série. Série télescopique. Convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence en **dimension finie**. Exponentielle d'une matrice carrée et d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Groupes

Révisions de première année Groupes, sous-groupes, morphismes de groupes. Groupes classiques : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{K}, +)$ et $(\mathbb{K}^*, \times)$ où $\mathbb{K}$ est un corps, $(S(E), \circ)$ (groupe des permutations d'un ensemble E), $(S_n, \circ)$ (groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$), groupes linéaires $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL(E)$, $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$. Morphismes classiques : déterminant, signature.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une application est une norme, on peut essayer de l'exprimer à l'aide d'une norme connue.
- Calculer une norme uniforme d'une suite ou d'une fonction par une étude de cette suite ou de cette fonction.
- Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on exhibe une suite u tel que $\frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)}$ tende vers 0 ou $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite diverge, on peut extraire deux suites convergeant vers des limites différentes i.e. montrer qu'elle possède deux valeurs d'adhérence distinctes.
- Pour montrer qu'un ensemble muni d'une loi est un groupe, on peut montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe connu.
- Pour montrer qu'une partie d'un groupe est un sous-groupe, on peut l'identifier comme image ou noyau d'un morphisme de groupes.

3 Questions de cours

Banque CCINP Exercices 61, 84, 89

Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

Equation fonctionnelle de Cauchy Soit f un endomorphisme continu du groupe $(\mathbb{R}, +)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.