Devoir surveillé n°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – EPITA/IPSA 2017

Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel *positif* et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

On se propose d'approfondir dans la partie I l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f. Puis on étudie dans les parties II et III le comportement de f au voisinage de 0 et 2. Enfin, dans la partie IV (qui est indépendante des précédentes), on calcule l'intégrale $f(1)$.

I Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

$\boxed{1}$ **Etude de la convergence de l'intégrale** $\mathrm{I}(\alpha)$

1.a Donner un équivalent de la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ au voisinage de 0.

1.b En déduire pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\mathrm{I}(\alpha)$ est convergente.

$\boxed{2}$ **Etude de l'absolue convergence de l'intégrale** $\mathrm{J}(\alpha)$

2.a Démontrer que l'intégrale $\mathrm{J}(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.

2.b Vérifier que la fonction $t \mapsto |\sin t|$ est π-périodique et en déduire, pour tout entier k la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$.

2.c Démontrer l'encadrement suivant pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{k^\alpha\pi^\alpha}$$

En déduire pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$ que :

$$\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}$$

2.d Préciser pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\mathrm{J}(\alpha)$ est absolument convergente.

3 **Etude de la convergence de l'intégrale** $\mathrm{J}(\alpha)$

3.a Etudier la convergence de l'intégrale $\mathrm{J}(0)$.

3.b Démontrer la relation suivante pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geq \pi$:

$$\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos x}{x^\alpha} - \alpha\int_\pi^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

3.c Calculer (en justifiant son existence) l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}}$ pour $\alpha > 0$.

En déduire l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

3.d En déduire la convergence de l'intégrale $\mathrm{J}(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4 **Domaine de définition de la fonction** f

Préciser les domaines de convergence et d'absolue convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.
En déduire le domaine de définition de la fonction f introduite dans le préambule.

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

II Etude de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0

On se propose d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 et on écrit à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

5 **Limite de l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

5.a Justfier l'inégalité $0 \leq \sin t \leq t$ pour $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

5.b En déduire à l'aide du théorème de convergence dominée (dont on précisera l'énoncé et dont on vérifiera les hypothèses) la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

> **Remarque.** Si on ne connaît pas encore le théorème de convergence dominée, on admettra que
>
> $$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)\mathrm{d}t$$

6 **Limite de l'intégrale** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

6.a A l'aide d'une double intégration par parties, justifier l'égalité suivante :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t$$

6.b Calculer l'expression $\alpha(\alpha+1)\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+2}}$, puis déterminer sa limite quand α tend vers 0.
En déduire la limite de $\alpha(\alpha+1)\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t$ puis de $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$, quand α tend vers 0.

6.c Déduire de cette question et de la précédente la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.
Peut-on obtenir cette limite par application directe du théorème de convergence dominée à l'intégrale $f(\alpha)$?

> **Remarque.** Si on ne connaît pas encore le théorème de convergence dominée, on pourra sauter cette deuxième partie de la question.

III Etude de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 2

7 **Une autre expression de la fonction f.**

7.a Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $\alpha\in]0,2[$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

7.b A l'aide d'une intégration par parties justifiée, établir que :

$$f(\alpha)=\alpha\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0,2[$.

8 **Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2.**
On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t)=\dfrac{1-\cos t}{t^2}$.

8.a Quelle est la limite L de φ en 0 ?
On posera désormais $\varphi(0)=\mathrm{L}$ de sorte que φ est ainsi définie et continue sur $\mathbb{R}$.

8.b Montrer que la fonction φ reste strictement positive sur $[0,\pi]$ et qu'elle admet sur $[0,\pi]$ un minimum strictement positif noté μ (que l'on ne demande pas d'expliciter).

8.c Etablir les inégalités suivantes :

$$f(\alpha)\geq\alpha\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t\geq\alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

8.d En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.

IV Calcul de l'intégrale $f(1)$

9 **Calcul d'intégrales auxiliaires.**

9.a Justifier pour tout entier naturel n l'existence de l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I}_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

9.b Préciser la valeur de I_0 et prouver que $\mathrm{I}_n-\mathrm{I}_{n-1}=0$ pour tout entier $n\geq 1$.
En déduire la valeur de l'intégrale I_n.

9.c On considère la fonction ψ définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$.
Quelle est la limite L de ψ en 0.
On posera désormais $\psi(0) = \mathrm{L}$ de sorte que ψ est définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

9.d Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

10 **Lemme de Rieman-Lebesgue pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**
On considère une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.
A tout entier naturel n, on assoccie l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} g(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t$$

10.a Démontrer que

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t$$

10.b A l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de la suite (u_n).

10.c Justifier que la fonction ψ définie à la question **9.c** est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

10.d En déduire la valeur de $f(1)$.