Interrogation écrite n°04

NOM : Prénom : Note :

1. Montrer qu'un groupe d'ordre premier est cyclique.

   Soit G *un groupe d'ordre* p *premier. L'ordre d'un élément de* G *divise* p *donc vaut* 1 *ou* p. *S'il n'existe que des éléments d'ordre* 1, *alors* G *ne contient que l'élément neutre et* $\mathrm{card}(\mathrm{G}) = 1$. *Ceci est impossible car* $\mathrm{card}(\mathrm{G}) = p \geq 2 > 1$. *Ainsi* G *contient un élément d'ordre* p *: il est cyclique.* ∎

2. Déterminer la signature et l'ordre de la permutation $\sigma \in \mathrm{S}_7$ définie par

   $$\sigma(1) = 4 \qquad \sigma(2) = 6 \qquad \sigma(3) = 7 \qquad \sigma(4) = 5 \qquad \sigma(5) = 1 \qquad \sigma(6) = 2 \qquad \sigma(7) = 3$$

   La décomposition de σ *en cyles à supports disjoints est* $\sigma = (1,4,5) \circ (2,6) \circ (3,7)$. *Ainsi* $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1,4,5))\varepsilon((2,6))\varepsilon((3,7)) = (-1)^{3-1}(-1)(-1) = 1$.
   De plus, ces cycles commutent et sont d'ordres respectifs 3, 2 *et* 2. *On en déduit que* $\sigma^6 = \mathrm{Id}$. *L'ordre de* σ *divise donc* 6 *: il vaut* 1, 2, 3 *ou* 6. *Mais* $\sigma \neq \mathrm{Id}$, $\sigma^2 = (1,5,4) \neq \mathrm{Id}$ *et* $\sigma^3 = (2,6) \circ (3,7) \neq \mathrm{Id}$ *donc l'ordre de* σ *est* 6. ∎

3. Montrer que deux matrices semblables ont même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique.

   Soient A *et* B *deux matrices semblables de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Il existe donc* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. *Par propriété de la trace.*

   $$\mathrm{tr}(\mathrm{B}) = \mathrm{tr}(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{AP})) = \mathrm{tr}((\mathrm{AP})\mathrm{P}^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$$

   Par propriété du déterminant,

   $$\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \frac{1}{\det(\mathrm{P})}\det(\mathrm{A})\det(\mathrm{P}) = \det(\mathrm{A})$$

   Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{P}$ *donc, d'après le point précédent,*

   $$\chi_{\mathrm{B}}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{B}) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \chi_{\mathrm{A}}(\lambda)$$

   Comme $\mathbb{K}$ *est infini,* $\chi_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{A}}$. ∎

4. Soient u et v deux endomorphimes d'un espace vectoriel E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

   Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ *et* $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$. *Alors*

$$u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

   donc $v(x) \in \mathrm{E}_\lambda(u)$. *Ainsi* $\mathrm{E}_\lambda(u)$ *est stable par* v. ∎

5. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de A (valeurs propres et sous-espaces propres).

   Tout d'abord,

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & -4 \\ -1 & \mathrm{X} & 8 \\ 0 & -1 & \mathrm{X}-5 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3}{=} \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & \mathrm{X}-1 & \mathrm{X}-1 \\ -1 & \mathrm{X} & 8 \\ 0 & -1 & \mathrm{X}-5 \end{vmatrix} = (\mathrm{X}-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \mathrm{X} & 8 \\ 0 & -1 & \mathrm{X}-5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2}{=} (\mathrm{X}-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathrm{X}+1 & 9 \\ 0 & -1 & \mathrm{X}-5 \end{vmatrix} = (\mathrm{X}-1)\left[(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-5)+9\right] = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)^2$$

   Ainsi $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1, 2\}$. *Ensuite,*

$$\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1+2\mathrm{L}_2}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2+4\mathrm{L}_3}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

∎