Devoir surveillé n°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

$\boxed{1}$ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $P \in GL_2(\mathbb{K})$, on a $P(\lambda I_2)P^{-1} = \lambda PI_2P^{-1} = \lambda I_2$. Donc la classe de similitude d'une matrice scalaire λI_2 est réduite à l'élément λI_2 lui-même :

$$\mathcal{S}(\lambda I_2) = \{\lambda I_2\}$$

$\boxed{2}$ **2.a** On vérifie que $E_kE_{-k} = I_2$ et que $F_kF_{-k} = I_2$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices E_k et F_k sont inversibles et leurs inverses sont respectivement E_{-k} et F_{-k}.

2.b Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on a :

$$E_kAE_k^{-1} = \begin{pmatrix} a+kc & b-ka+kd-k^2c \\ c & d-kc \end{pmatrix}$$

et

$$F_kAF_k^{-1} = \begin{pmatrix} a-kb & b \\ c+ka-kd-k^2b & d+kb \end{pmatrix}$$

2.c Supposons que A est une matrice scalaire. On a alors $\mathcal{S}(A) = \{A\}$ est clairement bornée en tant que singleton.
Réciproquement, supposons que la classe de similitude de A est bornée. Les suites des coeffients de $E_kAE_k^{-1}$ et $F_kAF_k^{-1}$ sont donc bornées. En particulier, les suites $(a+kc)_{k\in\mathbb{K}}$ et $(d+kb)_{k\in\mathbb{K}}$ sont bornées. On en déduit que $b = c = 0$. Ensuite, la suite $(b-ka+kd-k^2c)_{k\in\mathbb{K}}$, c'est-à-dire la suite $(b+(d-a)k)_{k\in\mathbb{K}}$ est bornée. On en déduit que $a = d$. Donc A est une matrice scalaire.

$\boxed{3}$ **3.a** L'application $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mapsto \det M$ est continue car $\det(M)$ est polynomiale en les coefficients de M. Comme $M_k - \lambda_i I_2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B - \lambda_i I_2$, on en déduit que $\det(M_k - \lambda_i I_2) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \det(B-\lambda_i I_2)$. Or, pour tout $k \geq 0$, on a $\det(M_k - \lambda_i I_2) = 0$ car λ_i est une valeur propre de M_k. Donc $\det(B - \lambda_i I_2) = 0$.

3.b Comme A possède deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, elle est diagonalisable. Ainsi A est semblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. La question précédente montre que λ_1 et λ_2 sont aussi des valeurs propres de B. Par conséquent, B est aussi diagonalisable et semblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Donc $B \in \mathcal{S}(A)$. Ainsi, toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ possède sa limite dans $\mathcal{S}(A)$, ce qui montre que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

$\boxed{4}$ **4.a** Comme χ_A est un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant une racine double λ, on a $\chi_A(X) = (X-\lambda)^2$. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Il existe donc $\alpha_0 \in \mathbb{K}$ tel que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On a nécessairement $\alpha_0 \neq 0$ car sinon, A serait semblable à λI_2 et donc égale à λI_2. Soit alors $\alpha \in \mathbb{K}$. Posons $P = \begin{pmatrix} \alpha/\alpha_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_0/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que

$$P\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi, par transitivité de la similitude, A est semblable à toute matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

4.b D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $T_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1/k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(A)$. Or, la suite $(T_k)_{k\geq 1}$ converge vers la matrice λI_2 qui n'appartient pas à $\mathcal{S}(A)$ car A n'est pas une matrice scalaire. Donc, la classe de similitude de A n'est pas fermée.

$\boxed{5}$ Supposons A diagonalisable. Si A possède deux valeurs propres distinctes, alors sa classe de similitude est fermée d'après la question **3**. Sinon, A possède une seule valeur propre. Comme A est diagonalisable, elle est une matrice scalaire et sa classe de similitude est fermée d'après la question **1**.
Supposons A non diagonalisable. Alors A n'est pas scalaire et ne peut posséder deux valeurs propres distinctes. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A possède au moins une valeur propre. Ainsi A possède une seule valeur propre et sa classe de similitude n'est pas fermée d'après la question **4**.
On en déduit que, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la classe de similitude d'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est fermée si, et seulement si, A est diagonalisable.

$\boxed{6}$ **6.a** On sait que $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$. Le spectre réel de A est vide si, et seulement si, le polynôme χ_A n'a pas de racine réelle, c'est-à-dire si, et seulement si, son discriminant $\Delta = (\operatorname{tr}(A))^2 - 4\det(A)$ est strictement négatif. La condition s'écrit donc $4\det(A) - (\operatorname{tr}(A))^2 > 0$.

6.b La famille $(e_1, u(e_1))$ est libre car sinon, $u(e_1) = \mu e_1$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$ et donc μ serait une valeur propre réelle de A, ce qui contredirait l'hypothèse. Dans la base $(e_1, u(e_1))$, la matrice de u est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Puisque M et A sont semblables, $\beta = \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(A)$ et $-\alpha = \det(M) = \det(A)$. Donc la matrice de u dans la base $(e_1, u(e_1))$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$$

6.c Comme $M_k \in \mathcal{S}(A)$, $\operatorname{tr}(M_k) = \operatorname{tr}(A)$ et $\det(M_k) = \det(A)$ pour tout $k \geq 0$.
La trace est linéaire et $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est de dimension finie donc elle est continue. Par conséquent, la suite $(\operatorname{tr}(M_k))_{k\geq 0}$ converge vers $\operatorname{tr}(B)$. Ainsi $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A)$.
De même, le déterminant est continu. Par conséquent, la suite $(\det(M_k))_{k\geq 0}$ converge vers $\det(B)$. Ainsi, $\det(B) = \det(A)$.
Ainsi $4\det(B) - (\operatorname{tr}(B))^2 = 4\det(A) - (\operatorname{tr}(A))^2 > 0$. Donc, d'après la question **6.a**, le spectre réel de B est vide. Par conséquent, B est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det(B) \\ 1 & \operatorname{tr}(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$$

Par transitivité de la similitude, on en déduit que $B \in \mathcal{S}(A)$. Ainsi, toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ possède sa limite dans $\mathcal{S}(A)$, ce qui montre que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

$\boxed{7}$ Supposons A diagonalisable. Alors A possède au moins une valeur propre. Si A possède deux valeurs propres distinctes, alors sa classe de similitude est fermée d'après la question **3**. Sinon, A possède une seule valeur propre. Comme A est diagonalisable, elle est une matrice scalaire et sa classe de similitude est fermée d'après la question **1**. Si A ne possède aucune valeur propre, sa classe de similitude est également fermée d'après la question **6**.
Si A n'est pas diagonalisable et qu'elle possède au moins une valeur propre, alors elle possède une seule valeur propre et n'est pas une matrice scalaire. Donc sa classe de similitude n'est pas fermée d'après la question **4**.
En conclusion, la classe de similitude d'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est fermée si, et seulement si, A est soit diagonalisable, soit sans valeur propre réelle.

$\boxed{8}$ Supposons que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, x et $u(x)$ sont liés. En particulier, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, e_i et $u(e_i)$ sont liés. Comme e_i n'est pas nul, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Considérons maintenant $e_1 + e_i$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$. Par hypothèse, $e_1 + e_i$ et $u(e_1 + e_i) = u(e_1) + u(e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i$ sont liés. Il existe donc $\mu_i \in \mathbb{K}$ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i = \mu_i(e_1 + e_i) = \mu_i e_1 + \mu_i e_i$$

Comme (e_1, e_i) est libre, en identifiant les coefficients, on obtient $\lambda_1 = \mu_i$ et $\lambda_i = \mu_i$. Donc $\lambda_i = \lambda_1$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$.
Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u(e_i) = \lambda_1 e_i$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, on en déduit par linéarité de u que $u = \lambda_1 \operatorname{Id}_{\mathbb{K}^n}$. Donc u est une homothétie.

$\boxed{9}$ Si $(x, u(x))$ était liée pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, alors u serait une homothétie d'après la question précédente. Comme A n'est pas une matrice scalaire, u n'est pas une homothétie. Donc, il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $(x, u(x))$ est libre. Soit alors $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Comme $\alpha \neq 0$, la famille $(\alpha x, u(x))$ est aussi libre. Complétons la famille $(\alpha x, u(x))$ en une base de $\mathbb{K}^n$. Dans cette base, la première colonne de la matrice de u est bien $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^\top$.

$\boxed{10}$ Si A est une matrice scalaire, alors $\mathcal{S}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{A}\}$ est bornée en tant que singleton.
Si A n'est pas une matrice scalaire, alors d'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $\mathrm{M}_p \in \mathcal{S}(\mathrm{A})$ ayant pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^\top$. Notamment, $\|\mathrm{M}_p\|_\infty \geq p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc la suite $(\mathrm{M}_p)_{p\geq 1}$ n'est pas bornée et $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ non plus.
Ainsi, la classe de similitude de A est bornée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

$\boxed{11}$ Supposons qu'une telle norme existe. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{S}(\mathrm{A})$, $\|\mathrm{M}\| = \|\mathrm{A}\|$. Par conséquent, $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ est bornée. D'après la question précédente, A est une matrice scalaire. Mais comme $n \geq 2$, il existe des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui ne sont pas scalaires. On en déduit qu'une telle norme n'existe pas.

$\boxed{12}$ **12.a** D'après la formule définissant le déterminant, chacun des coefficients de $\chi_\mathrm{M}(\mathrm{X})$ est polynomial des coefficients de M. Par conséquent, l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \chi_\mathrm{M}(\mathrm{X}) \end{array}\right.$ est continue.

12.b Soit P un polynôme annulateur de A. L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{M})$ est continue car les coefficients de P(M) sont polynomiaux en les coefficients de M. Comme $\mathrm{M}_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{B}$, on en déduit que $\mathrm{P}(\mathrm{M}_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}(\mathrm{B})$. Or, pour tout $k \geq 0$, on a $\mathrm{P}(\mathrm{M}_k) = 0$ car P est un polynôme annulateur de A et donc de toute matrice semblable à A (deux matrices semblables ont le même idéal annulateur). Donc $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0$.
Comme A est diagonalisable, elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples qui annule aussi B. Donc B est également diagonalisable.

12.c Par continuité de l'application $\mathrm{M} \mapsto \chi_\mathrm{M}(\mathrm{X})$, on a $\chi_{\mathrm{M}_k}(\mathrm{X}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_\mathrm{B}(\mathrm{X})$. Comme $\mathrm{M}_k \in \mathcal{S}(\mathrm{A})$, $\chi_{\mathrm{M}_k}(\mathrm{X}) = \chi_\mathrm{A}(\mathrm{X})$ pour tout $k \geq 0$. Donc $\chi_\mathrm{B}(\mathrm{X}) = \chi_\mathrm{A}(\mathrm{X})$. Ainsi, A et B ont le même polynôme caractéristique. Elles ont donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Comme A est diagonalisable, B l'est aussi d'après la question précédente. Ainsi A et B sont semblables à la même matrice diagonale. Par transitivité de la similitude, B est semblable à A. Donc $\mathrm{B} \in \mathcal{S}(\mathrm{A})$.
Ainsi, toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ possède sa limite dans $\mathcal{S}(\mathrm{A})$, ce qui montre que $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ est fermée.

$\boxed{13}$ **13.a** $\mathcal{B}_1 = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n$ donc on peut considérer le déterminant suivant

$$\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_k) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{k^i} \neq 0$$

donc $\mathcal{B}_k$ est une base de $\mathbb{C}^n$. Remarquons que pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$u\left(\frac{b_j}{k^{j-1}}\right) = \frac{1}{k^{j-1}} u(b_j) = \frac{1}{k^{j-1}} \sum_{i=1}^n \mathrm{T}_{i,j} b_i = \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{T}_{i,j}}{k^{j-i}} \frac{b_i}{k^{i-1}}$$

13.b En notant T_k la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_k$, on en déduit que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$(\mathrm{T}_k)_{i,j} = \frac{\mathrm{T}_{i,j}}{k^{j-i}}$$

13.c Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

- Si $i > j$, alors $(\mathrm{T}_k)_{i,j} = \dfrac{\mathrm{T}_{i,j}}{k^{j-i}} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- Si $i < j$, alors $(\mathrm{T}_k)_{i,j} = \dfrac{\mathrm{T}_{i,j}}{k^{j-i}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $i = j$, alors $(\mathrm{T}_k)_{i,j} = \mathrm{T}_{i,j}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi la suite $(\mathrm{T}_k)_{k\geq 1}$ converge vers la matrice diagonale $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\mathrm{T}_{1,1}, \mathrm{T}_{2,2}, \dots, \mathrm{T}_{n,n})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{T}_k \in \mathcal{S}(\mathrm{A})$ donc $\mathrm{D} \in \mathcal{S}(\mathrm{A})$ car $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ est fermée par hypothèse. Par conséquent, A est semblable à D et A est diagonalisable.

$\boxed{14}$ **14.a** Par linéarité de la trace, $\mathcal{T}$ est le sous-espace affine $\mathrm{A} + \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$. Supposons $\mathcal{T}$ d'intérieur non vide. Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathcal{T}$ et $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouvert $\mathrm{B}(\mathrm{M}, \varepsilon)$ soit contenue dans $\mathcal{T}$. Si on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|.\|_\infty$, $\mathrm{M} + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{I}_n \in \mathrm{B}(\mathrm{M}, \varepsilon)$ mais $\operatorname{tr}\left(\mathrm{M} + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{I}_n\right) = \operatorname{tr}(\mathrm{M}) + \frac{n\varepsilon}{2} \neq \operatorname{tr}(\mathrm{A})$. Donc $\mathrm{M} + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{I}_n \notin \mathcal{T}$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $\mathcal{T}$ est d'intérieur vide.

14.b La trace étant un invariant de similitude, on a $\mathcal{S}(\mathrm{A}) \subset \mathcal{T}$. Comme $\mathcal{T}$ est d'intérieur vide, il en est de même de $\mathcal{S}(\mathrm{A})$.

Problème 2

1 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x, y) = (x + 2y, -2x + y)$. Ainsi

$$\|u(x, y)\|^2 = (x + 2y)^2 + (-2x + y)^2 = 5x^2 + 5y^2 = 5\|(x, y)\|^2$$

Ainsi u est une homothétie de rapport $\sqrt{5}$.

2 Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $k\|x\| = \|u(x)\| = \|0_E\| = 0$. Comme $k > 0$, $\|x\| = 0$ puis $x = 0_E$. On en déduit que u est un endomorphisme de E injectif. Comme E est de dimension finie, u est bijectif.
On en déduit que $\mathrm{Sim}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$. Montrons que alors que $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Il est clair que Id_E est une similitude de rapport 1 donc $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{Sim}(E)$. Soit $(u, v) \in \mathrm{Sim}(E)^2$. Notons k_u et k_v les rapports respectifs de u et v. Pour tout $x \in E$,

$$\|u \circ v(x)\| = k_u\|v(x)\| = k_u k_v\|x\|$$

donc $u \circ v$ est une similitude de rapport $k_u k_v > 0$. Ainsi $u \circ v \in \mathrm{Sim}(E)$. Enfin, pour tout $x \in E$,

$$\frac{1}{k}\|x\| = \frac{1}{k}\|u(u^{-1}(x))\| = \|u^{-1}(x)\|$$

donc u^{-1} est une similitude de rapport $1/k$. Ainsi $u^{-1} \in \mathrm{Sim}(E)$.
On en déduit que $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Notamment, $\mathrm{Sim}(E)$ est un groupe pour la loi de composition.

3 On sait que $u \in O(E)$ si et seulement si $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, la matrice de u^* dans la base $\mathcal{B}$ est $A^\top$. On en déduit que $u \in O(E)$ si et seulement si $A^\top A = I_n$.
Remarque u est une similitude de rapport k si et seulement si $\frac{1}{k}u$ est une isométrie vectorielle. On en déduit que u est une similitude de rapport k si et seulement si $A^\top A = k^2 I_n$.

4 On remarque $A^\top A = 9I_3$. On en déduit que u est une similitude de rapport 3. La matrice de u^{-1} dans la base canonique est alors $A^{-1} = \frac{1}{9}A^\top$.

5 Notons k le rapport de u. On a montré précédemment que u^{-1} était une similitude de rapport $\frac{1}{k}$. Soit $f \in O(E)$. On a donc pour tout $x \in E$,

$$\|u^{-1} \circ f \circ u(x)\| = \frac{1}{k}\|f(u(x))\| = \frac{1}{k}\|u(x)\| = \|x\|$$

donc $u^{-1} \circ f \circ u \in O(E)$.

6 Soit u un endomorphisme de E qui envoie toute sphère centrée en 0 sur une sphère centrée en 0. Notamment, u envoie la sphère unité S sur une sphère S′ centrée en 0. Notons $k > 0$ le rayon de S′. Soit $x \in E$ non nul. Alors $x/\|x\| \in S$. Ainsi $u(x/\|x\|) \in S'$. On en déduit par linéarité de u et homégénéité de la norme que

$$k = \left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|\frac{u(x)}{\|x\|}\right\| = \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

puis que $\|u(x)\| = k\|x\|$. Ceci est aussi évidemment vraie si $x = 0_E$ puisqu'alors $u(x) = 0_E$. On en conclut que u est une similitude de rapport k.

7 Supposons que u est la composée d'une homothétie non nulle $\alpha\,\mathrm{Id}_E$ $(\alpha \neq 0)$ et d'une isométrie v. On a donc $u = \alpha v$. Pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| = \|\alpha v(x)\| = |\alpha|\|v(x)\| = \alpha\|x\|$$

Ainsi u est une similitude de rapport $|\alpha|$.
Réciproquement, supposons que u est une similitude de rapport $k >$. On a déjà remarqué que $v = \frac{1}{k}u$ était une isométrie. Ainsi $u = kv$ est la composée (commutative) de l'homothétie $k\,\mathrm{Id}_E$ et de l'isométrie v.

8 On a déjà montré que A était la matrice d'une similitude de rapport $\sqrt{5}$. En posant $B = \frac{1}{\sqrt{5}}A$ on a alors $A = (\sqrt{5}I_2) \times B$, avec $\sqrt{5}I_2$ la matrice de l'homothétie $\sqrt{5}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et B la matrice d'une isométrie v. Puisque $\det v = \det B = 1$, v est une isométrie vectorielle directe du plan $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une rotation.

9 Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Par identités remarquables,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \\ \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

On en déduit par différence que

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Supposons que u est une similitude de rapport k. Alors

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right) \qquad \text{par linéarité de } u \qquad = \frac{k^2}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ &= k^2\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = k^2\langle x, y\rangle$. En particulier, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = k^2\langle x, x\rangle = k^2\|x\|^2$$

puis $\|u(x)\| = k\|x\|$. Donc u est une similitude de rapport k.

10 Soient u une similitude de rapport k. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ tel que $\langle x, y\rangle = 0$. Alors $\langle u(x), u(y)\rangle = k^2\langle x, y\rangle = 0$.

11 Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Par identité remarquable, $\langle e_i + e_j, e_i - e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1 = 0$. Comme u conserve l'orthogonalité, $\langle u(e_i + e_j), u(e_i - e_j)\rangle = 0$. Par linéarité de u, $\langle u(e_i) + u(e_j), u(e_i) - u(e_j)\rangle = 0$. A nouveau, par identité remarquable, $\|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2 = 0$ puis $\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$.

Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, $x = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle^2$. De plus, $u(x) = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle u(e_i)$. Comme u sonserve l'orthogonalité, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est orthogonale. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle^2\|u(e_i)\|^2 = k^2\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle^2 = k^2\|x\|^2$$

puis $\|u(x)\| = k\|x\|$. Ainsi u est une similitude de rapport k.

12 Soit $(x, y, \lambda, \mu) \in \mathrm{E}^2 \times \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}\|u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu(y)\|^2 &= \|u(\lambda x + \mu y)\|^2 + \lambda^2\|u(x)\|^2 + \mu^2\|u(y)\|^2 - 2\lambda\langle u(\lambda x + \mu y), u(x)\rangle - 2\mu\langle u(\lambda x + \mu y), u(y)\rangle + 2\lambda\mu\langle u(x) \\ &= k^2\|lax + \mu y\|^2 + k^2\lambda^2\|x\|^2 + k^2\mu^2\|y\|^2 - 2k^2\lambda\langle \lambda x + \mu y, x\rangle - 2k^2\mu\langle \lambda x + \mu y, y\rangle + 2k^2\lambda\mu\langle x, y\rangle \\ &= k^2\|lax + \mu y\|^2 + k^2\lambda^2\|x\|^2 + k^2\mu^2\|y\|^2 - 2k^2\lambda\langle \lambda x + \mu y, x\rangle - 2k^2\mu\langle \lambda x + \mu y, y\rangle + 2k^2\lambda\mu\langle x, y\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit que $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu y$ de sorte que u est linéaire i.e. u est un endomorphisme de E. La question **9** montre que u est une similitude de rapport k.