

# INTÉGRALES À PARAMÈTRES

$\mathbb{K}$  désigne les corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Passage à la limite

### Théorème 1.1 Convergence dominée

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On suppose que

(H1) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$ ;

(H2)  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ ;

(H3)  $f$  est continue par morceaux sur  $I$ ;

(H4) il existe une fonction positive  $\varphi$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

**REMARQUE.** L'intégrabilité des  $f_n$  sur  $I$  est garantie par la condition de domination.

### Exemple 1.1

On pose  $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{t^n + e^t}$  et  $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On souhaite déterminer la limite de la suite  $(I_n)$ .

(H1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est bien continue (par morceaux) sur  $\mathbb{R}_+$ .

(H2) La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{1+e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

(H3)  $f$  est bien continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .

(H4) De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, |f_n(t)| \leq e^{-t}$$

et la fonction  $\varphi : t \mapsto e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{e}$$

**REMARQUE.** Comme bien souvent, on peut en fait se passer du théorème de convergence dominée. En effet, en posant

$$J_n = \int_0^1 f_n(t) dt \qquad K_n = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt$$

on a  $I_n = J_n + K_n$ . On découpe cette intégrale en deux car le comportement de  $t^n$  change selon que  $t \leq 1$  ou  $t \geq 1$ .

On se doute alors que  $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{e^t} = 1 - e^{-1}$ , ce que l'on montre par le théorème des gendarmes. En effet

$$(1 - e^{-1}) - J_n = \int_0^1 \frac{dt}{e^t} - \int_0^1 \frac{dt}{t^n + e^t} = \int_0^1 \frac{t^n dt}{e^t(t^n + e^t)}$$

On en déduit que

$$0 \leq J_n - (1 - e^{-1}) \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

et ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 1 - \frac{1}{e}$ .

On se doute de même que  $K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et on utilise à nouveau le théorème des gendarmes : pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n + e^t} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1}$$

On a donc bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$ .

Finalement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1 - e^{-1}$ .

### Exercice 1.1

Déterminer la limite de la suite de terme général  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ .

### Méthode Convergence dominée à intervalle « variable »

Si l'on souhaite étudier la convergence d'une suite d'intégrale  $\left( \int_{I_n} f_n \right)$ , on peut se ramener au cas d'application du théorème de convergence dominée en considérant un intervalle  $I$  contenant tous les  $I_n$  ainsi que les fonctions  $g_n : t \in$

$$I \mapsto \begin{cases} f_n(t) & \text{si } t \in I_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

### Exercice 1.2

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{x^2}{n} \right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

**Théorème 1.2 Convergence dominée**

Soient  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $a \in \bar{J}$  (éventuellement  $a = \pm\infty$ ). On suppose que :

- (H1) pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- (H2) pour tout  $t \in I$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = g(t)$  où  $g$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- (H3) il existe une fonction positive  $\varphi$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors  $g$  est intégrable sur  $I$  et

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I g(t) dt$$

**Exercice 1.3**

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-t}}{x+t} dt$ .

**Théorème 1.3 Intégration terme à terme (cas positif)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . On suppose que

- (H1) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- (H2) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est **intégrable** sur  $I$ ;
- (H3)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ ;

- (H4)  $f$  est continue par morceaux sur  $I$ ;

Alors on a cette égalité dans  $[0, +\infty]$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

**Théorème 1.4 Intégration terme à terme (cas général)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On suppose que

- (H1) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- (H2) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est **intégrable** sur  $I$ ;
- (H3)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ ;
- (H4)  $f$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- (H5) la série  $\sum \int_I |f_n(t)| dt$  converge.

Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

**Exemple 1.2**

On souhaite montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Par développement en série entière

$$\forall t \in ]0, 1[, \frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \ln(t)$$

Posons  $f_n : t \in ]0, 1[ \mapsto (-1)^n t^n \ln(t)$ . Alors

- (H1) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue (par morceaux) sur  $]0, 1[$ ;
- (H2) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $]0, 1[$  puisque  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_n = 0$  si  $n > 0$ ,  $f_0(t) = o(1/\sqrt{t})$  et  $\lim_1 f_n = 0$ ;
- (H3)  $\sum f_n$  converge simplement vers  $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t}$  sur  $]0, 1[$ ;
- (H4)  $f$  est continue (par morceaux) sur  $]0, 1[$ ;
- (H5) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^1 |f_n(t)| dt = - \int_0^1 t^n \ln(t) dt = \frac{1}{(n+1)^2}$  par intégration par parties et  $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$  converge.

Par intégration terme à terme,  $f$  est intégrable sur  $]0, 1[$  (ce qu'on aurait pu montrer directement) et

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

**Méthode**

Il se peut que l'on ne puisse pas procéder à une interversion série/intégrale via le théorème d'intégration terme à terme. L'idée est alors de considérer des sommes partielles.

**Exemple 1.3**

Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . On souhaite montrer que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

On remarque déjà que (série géométrique)

$$\forall t \in [0, 1[, \frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a-1+nb}$$

Posons alors  $f_n : t \in [0, 1[ \mapsto (-1)^n t^{a-1+nb}$ . Il est clair que  $\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{a+nb}$  mais  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a+nb}$  diverge et on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

Posons alors pour  $t \in [0, 1[$ ,

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) = t^{a-1} \cdot \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1+t^b}$$

**(H1)** Les fonctions  $S_n$  sont bien continues (par morceaux) sur  $[0, 1[$ .

**(H2)** La suite  $(S_n)$  converge simplement vers  $f : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$  sur  $[0, 1[$ .

**(H3)**  $f$  est bien continue (par morceaux) sur  $[0, 1[$ .

**(H4)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $t \in [0, 1[$ ,

$$|S_n(t)| = \left| t^{a-1} \cdot \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1+t^b} \right| \leq 2t^{a-1}$$

et  $t \mapsto 2t^{a-1}$  est intégrable sur  $[0, 1[$ .

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 S_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

ou encore

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{a-1+kb} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

Comme il s'agit de sommes **finies**, ceci peut encore s'écrire

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{a-1+kb} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

ce qui signifie que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{a+nb}$  converge (on le savait déjà par critère spécial des séries alternées) et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

**REMARQUE.** On pouvait aisément se passer du théorème de convergence dominée. En effet

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb} &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{a-1+kb} dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{a-1+kb} dt \quad (\text{somme finie}) \\
 &= \int_0^1 t^{a-1} \cdot \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1 + t^b} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(n+1)b}}{1 + t^b} dt
 \end{aligned}$$

Alors

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{a-1+(n+1)b}}{1 + t^b} dt \leq \int_0^1 t^{a-1+(n+1)b} dt = \frac{1}{a + (n+1)b}$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(n+1)b}}{1 + t^b} dt = 0$$

puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} dt$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} dt$$

## 2 Continuité

### Théorème 2.1

Soient  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que :

**(H1)** pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;

**(H2)** pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$ ;

**(H3)** il existe une fonction positive  $\varphi$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors  $F : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est continue sur  $A$ .

**REMARQUE.** La dernière condition est une condition dite de **domination**.

**Exemple 2.1**

Montrons que  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2 t^2)}{1+t^2} dt$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Posons  $f : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{\sin(x^2 t^2)}{1+t^2}$ .

(H1) pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ ;

(H2) pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ;

(H3) pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ,

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

On en déduit que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**REMARQUE.** La continuité étant une notion locale, on peut remplacer la condition de domination sur  $A$  par la domination au voisinage de tout point de  $A$ . En particulier, il suffit de montrer la domination sur tout compact de  $A$ . Si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , il suffit de montrer la domination sur tout segment de  $A$ .

**Exemple 2.2**

Montrons que  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Posons  $f : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ .

(H1) pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ ;

(H2) pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ;

(H3) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 < a \leq b$ . Pour tout  $(x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, |f(x, t)| \leq \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

On vérifie aisément que  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  puisque  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}}$  avec  $1-a < 1$  et  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  par croissances comparées.

On en déduit que  $\Gamma$  est continue sur  $\bigcup_{0 < a \leq b} [a, b] = \mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 2.1**

Montrer que l'application  $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  est continue sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

**Exercice 2.2**

Montrer que l'application  $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  est continue sur  $P = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

### 3 Dérivabilité

#### Théorème 3.1

Soient  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- (H1) pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ;
- (H2) pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ ;
- (H3) pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- (H4) il existe une fonction positive  $\varphi$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors  $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  et

$$\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

**REMARQUE.** La dérivabilité étant une notion locale, on peut remplacer la domination sur  $J$  par la domination sur tout segment de  $J$ .

#### Exercice 3.1

Montrer que  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée. En déduire  $F(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Corollaire 3.1

Soient  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- (H1) pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$ ;
- (H2) pour tout  $x \in J$  et pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- (H3) pour tout  $x \in J$  et pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ;
- (H4) il existe une fonction positive  $\varphi$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors  $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  et

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in J, F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$$



**REMARQUE.** A nouveau, la domination sur tout segment de  $J$  suffit.

### Corollaire 3.2

Soient  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- (H1) pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $J$  ;
- (H2) pour tout  $x \in J$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- (H3) pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une fonction positive  $\varphi_k$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$$

Alors  $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $J$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in J, F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$

**REMARQUE.** A nouveau, la domination sur tout segment de  $J$  suffit.

**REMARQUE.** On peut aussi remplacer la dernière hypothèse de domination par l'hypothèse suivante : il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

- $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est intégrable sur  $I$  ;
- pour tout entier  $k \geq n$ , il existe une fonction positive  $\varphi_k$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$$

### Exercice 3.2

Montrer que la fonction  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .