

# DEVOIR À LA MAISON N°21

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

**1** Il suffit de constater que  $X$  est bornée.

**2** Si  $Y$  est une variable aléatoire  $\mathcal{L}^1$  et *positive* sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , alors

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(Y \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\alpha}$$

**3** Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à  $|X|$  qui est bien une valeur aléatoire positive.

**4** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(t, \varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Par stricte croissance de l'exponentielle,  $\{S_n \geq \varepsilon\} = \{e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\}$ . Puisque  $e^{tnS_n}$  est une variable aléatoire positive, l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}}$$

Or

$$\mathbb{E}(e^{ntS_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_i})$$

car les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes et les variables aléatoires  $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$  le sont donc aussi. De plus, les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  suivent la même loi que  $X$  donc  $\mathbb{E}(e^{tX_i}) = \mathbb{E}(e^{tX})$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On en déduit bien que

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})^n}{e^{tn\varepsilon}}$$

**5** La fonction  $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc  $g_a$  l'est également. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'_a(x) = \frac{a - a^{-1}}{2} - \ln(a)e^{x \ln a}$$

Comme  $a > 1$ ,  $\ln(a) > 0$  de sorte que  $g'_a$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $g_a$  est donc concave sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que, sur  $[-1, 1]$ , le graphe de  $g_a$  est au-dessus de sa corde reliant les points d'abscisses  $-1$  et  $1$ . Comme  $g_a(-1) = g_a(1) = 0$ ,  $g_a$  est positive sur  $[-1, 1]$ .

**6** Soit  $t > 0$ . En posant  $a = e^t > 1$  dans la question précédente,

$$\forall x \in [-1, 1], \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t - e^{tx} \geq 0$$

**REMARQUE.** On aurait pu se passer de la question précédente. En effet,  $\frac{1-x}{2}$  et  $\frac{1+x}{2}$  sont deux réels positifs et de somme 1 donc, par convexité de l'exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t\right) \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

ou encore

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

|

**7** Comme  $X$  est à valeurs dans  $[-1, 1]$ , on peut appliquer la question précédente pour affirmer que

$$e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t$$

Par croissance et linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \frac{e^{-t}}{2}(1 - \mathbb{E}(X)) + \frac{e^t}{2}(1 + \mathbb{E}(X))$$

Comme  $X$  est centrée,  $\mathbb{E}(X) = 0$  de sorte que  $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t)$ .

**8** Remarquons que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n 2k} = \prod_{k=1}^n (2k-1) \geq 1$$

Autrement dit

$$\frac{1}{(2k)!} \leq \frac{1}{2^k k!}$$

Comme  $t^{2k} \geq 0$ ,

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k$$

On en déduit que

$$\text{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k = e^{t^2/2}$$

D'après la question précédente,

$$\forall t > 0, \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$$

**9** Remarquons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, -nt\varepsilon + nt^2/2 = \frac{n}{2}(t^2 - 2t\varepsilon) = \frac{n}{2}[(t - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2]$$

On en déduit que, par croissance de l'exponentielle,  $t \mapsto \exp(-nt\varepsilon + nt^2/2)$  admet un minimum en  $\varepsilon$  et que ce minimum vaut  $e^{-n\varepsilon^2/2}$ .

**10** On rappelle que

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})^n}{e^{tn\varepsilon}}$$

Or  $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$  pour tout  $t > 0$ . On en déduit que

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$$

D'après la question précédente, en prenant  $t = \varepsilon > 0$ , on obtient

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$$

Remarquons que  $\{|S_n| \geq \varepsilon\} = \{S_n \geq \varepsilon\} \sqcup \{-S_n \geq \varepsilon\}$ . Comme la variable aléatoire  $-X$  est également centrée et à valeurs dans  $[-1, 1]$ , on obtient de même que

$$\mathbb{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$$

**11** D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$$

Or  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-n\varepsilon^2/2}$  est une série géométrique de raison  $e^{-\varepsilon^2/2} \in ]0, 1[$  donc elle converge. Par majoration,  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$  converge.

**12** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$ . On peut également écrire,  $B_n = \bigcup_{m \geq n} \{|S_m| > \varepsilon\}$ . Comme les  $S_m$  sont des variables aléatoires, les ensembles  $\{|S_m| > \varepsilon\}$  sont des événements. Ainsi  $B_n(\varepsilon)$  est un événement comme réunion dénombrable d'événements. La suite  $(B_n)$  est décroissante pour l'inclusion donc, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n(\varepsilon))$$

Mais, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{|S_m| > \varepsilon\} \subset \{|S_m| \geq \varepsilon\}$  donc,

$$0 \leq \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}(|S_m| > \varepsilon) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}(|S_m| \geq \varepsilon)$$

En tant que reste d'une série convergente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}(|S_m| \geq \varepsilon) = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) = 0$  par encadrement. Finalement,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$$

**13** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On peut écrire

$$\Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \geq n} \{|S_m| \leq 1/k\}$$

Ainsi

$$\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{m \geq n} \{|S_m| > 1/k\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(1/k)$$

On en déduit que  $\overline{\Omega_k}$  est un événement comme intersection dénombrable d'événements, puis que  $\Omega_k$  est également un événement comme complémentaire d'un événement. Remarquons qu'une suite  $(u_n)$  converge vers 0 si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geq n, |u_m| \leq \frac{1}{k}$$

Par conséquent,

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \geq n} \{|S_m| \leq 1/k\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$$

donc  $A$  est un événement comme intersection dénombrable d'événements.

**14** On rappelle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(1/k)$$

donc  $\mathbb{P}(\overline{\Omega_k}) = 0$  d'après la question **12**. Ainsi  $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Autrement dit, les  $\Omega_k$  sont des événements presque sûrs.

On en déduit que  $A$  est un événement presque sûr comme intersection dénombrable d'événements presque sûrs.