

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1 ★★

Soit a et b deux fonction impaires continues sur \mathbb{R} . Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrer que f est paire.

Exercice 2 ★★

Périodicité

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T -périodiques sur \mathbb{R} et f une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$. Montrer que f est T -périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$.

Exercice 3 ★

Résoudre sur $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ puis $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - xy = 1$$

Exercice 4 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle $xy' - \alpha y = 0$. Déterminer l'unique solution f vérifiant $f(1) = 1$.
2. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle $xy' - \alpha y = f$. Déterminer l'unique solution g vérifiant $g(1) = 0$.
3. On définit par récurrence une suite de fonctions (u_n) sur \mathbb{R}_+^* de la manière suivante :
 - $u_0 = f$;
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est l'unique solution de l'équation différentielle $xy' - \alpha y = u_n$ sur \mathbb{R}_+^* valant 0 en 1.

REMARQUE. On a donc $u_1 = g$.

Déterminer par récurrence u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 ★★★★★

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 6 ★

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - (1 - i)y' - 2(1 + i)y = 0$.
2. Donner l'unique solution f vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

Exercice 7 ★★★★★

Soit f une application de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f + f'' \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

Exercice 8 ★★★★★

Mines MP 2010

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On considère l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. On suppose que q est non constamment nulle au voisinage de $+\infty$ et que l'on dispose d'une solution y strictement positive sur \mathbb{R}_+ et on pose $f = \frac{y'}{y}$.

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
2. Montrer que f ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+ .
3. Montrer que f est décroissante sur \mathbb{R}_+ puis qu'elle y est strictement positive.

4. Montrer que q est intégrable sur \mathbb{R}_+ et que $\int_{[x, +\infty[} q_{x \rightarrow +\infty} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 9 ★

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*

$$(E) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Résoudre l'équation (E).
4. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 10 ★★

Soient a, b et x_0 des réelles tels que $a^2 \neq b$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que

$$\begin{cases} f'' + af' + bf = 0 \\ f^{(3)}(x_0) = f(x_0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est nulle sur \mathbb{R} .

Exercice 11

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$$

2. Résoudre ensuite sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y = \frac{1}{1 + t^2}$$

Exercice 12 ★★

Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle $y'' + y = \tan t$.

Exercice 13 ★★★

1. Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) \\ y & \longmapsto & (x \mapsto xy'(x)) \end{cases}$$

2. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle

$$x^2 y'' + xy' - \alpha^2 y = 0$$

Exercice 14 ★★

On étudie l'équation différentielle $(t^2 + 1)y'' - 2y = t$.

1. Déterminer une solution polynomiale non nulle φ de l'équation homogène associée.
2. Résoudre l'équation homogène en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.
3. Exprimer la solution générale de l'équation étudiée.

Exercice 15 ★★★★★**ENS MP 2010**

Soient q une application continue périodique non identiquement nulle de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ et f une solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Montrer que f s'annule une infinité de fois sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 16 ★★★

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction 2π -périodique. Montrer que l'équation différentielle $y'' + y = f$ admet des solutions 2π -périodiques si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin t \, dt = 0$$

Exercice 17 ★★★**TPE-EIVP MP 2018**

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} .

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

1. On considère f une fonction solution de (E) sur $[0, 1]$ s'annulant une infinité de fois. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = f'(x) = 0$
2. Déterminer toutes les solutions de (E) s'annulant une infinité de fois sur $[0, 1]$.

Exercice 18 ★★

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$.
2. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos(nt)$$

Exercice 19**CCP MP**

1. Montrer qu'il existe une solution h de l'équation $xy'' + y' + y = 0$ développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.
2. Montrer que h ne s'annule qu'une fois sur $]0, 2[$.

Exercice 20**CCINP MP 2024**

On considère les équations différentielles :

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

$$(H) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

On note $I =]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I .

1. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.
2. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur \mathbb{R} .
Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$.
3. On note pour $x \in I$, $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $h(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x^2}$. On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$.
Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.
4. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ des solutions de (H) sur \mathbb{R} ?

Exercice 21**CCINP MP 2024**

On considère l'équation différentielle (E) : $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$.

1. Déterminer les solutions développables en séries entières et préciser leurs domaines de définition.
2. Résoudre l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+^* . On pourra utiliser la méthode de Lagrange : on pose $y = hz$ avec h une solution particulière de l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+^* et z une fonction quelconque.
3. En procédant au changement de variable $x = t^{2/3}$, retrouver le résultat de la question précédente.

Systèmes différentiels

Exercice 22 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2019

Résoudre, à l'aide de matrices, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + 6y \\ y' = -3x - 6y \\ z' = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$

Exercice 23 ★★★

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$.

Exercice 24 ★★

CCINP (ou CCP) PSI 2021

Soit le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -2t \\ 4t & 1+3t \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de $A(t)$.
2. En déduire qu'il existe P indépendant de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
3. Résoudre le système différentiel.

Exercice 25 ★★

TPE-EIVP MP 2014

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 9x(t) - 5y(t) + 2t \\ y'(t) = 10x(t) - 6y(t) + e^t \end{cases}$$

Exercice 26 ★★

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x + 3y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

Exercice 27 ★★

Saint-Cyr PSI 2019

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donner une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.

2. Trouver les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, avec $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 28 ★★

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit \mathcal{S} l'ensemble des fonctions $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$$

- Montrer que $V: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ appartient à \mathcal{S} .
- Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrer que $AX \in \mathcal{S}$.
 - En déduire une base de \mathcal{S} .
- Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrer que X est bornée sur \mathbb{R} .
 - Soient $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PMP^{-1}$. Soit $Y: \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et telle que $Y' = MY$. Montrer que Y est bornée sur \mathbb{R} .
- On introduit sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $(X | Z) = X^T Z$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable sur \mathbb{R} . Soit $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 et telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = (A + b(t)I_2)X(t)$$

Soit $f: t \mapsto \|X(t)\|^2$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 2b(t)f(t)$$

- Montrer que la fonction X de la question précédente est bornée.

Exercice 29

CCINP (ou CCP) MP 2017

- Soit $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues. On suppose qu'il existe C une constante positive telle que

$$\forall t \in [a, b], u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s) \, ds$$

- On pose

$$f(t) = \frac{C + \int_a^t u(s)v(s) \, ds}{\exp\left(\int_a^t v(s) \, ds\right)}$$

Calculer $f(a)$, puis montrer que f est décroissante.

- En déduire que

$$\forall t \in [a, b], u(t) \leq C \exp\left(\int_a^t v(s) \, ds\right)$$

- Soit $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Soit $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de l'équation différentielle (E): $x'(t) = A(t)x(t)$. On considère une norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n ainsi que la norme $\|\cdot\|$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$.
 - On pose $g(t) = \|x(t)\|^2$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $g'(t) \leq 2g(t) \cdot \|A(t)\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
 - On suppose que $\int_0^{+\infty} \|A(s)\| \, ds$ converge. Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) sont bornées sur \mathbb{R}_+ .

Changement de variable

Exercice 30 ★★

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' - xy' - 3y = x^4$$

1. a. Montrer que f est une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.
 b. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* .
2. a. Montrer que f est une solution de (E) sur \mathbb{R}_-^* si et seulement si $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.
 b. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_-^* .
3. Déterminer les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 31**CCINP (ou CCP) MP 2013**

On se donne l'équation différentielle $4x^2 y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale de degré 2 à l'équation.
2. Résoudre l'équation sur \mathbb{R}_+^* . On pourra poser $x = e^t$.
3. Résoudre l'équation sur \mathbb{R}_-^* .

Problèmes de raccord**Exercice 32 ★★****Problème de raccordement**

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $x^2 y' - y = 0$.

Exercice 33 ★★

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.

Exercice 34 ★★**Raccordement**

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $xy' - y = x$.

Exercice 35 ★★**Raccordement**

On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' - y' - x^3 y = 0$.

1. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* en effectuant le changement de variable $t = x^2$.
2. En déduire les solutions sur \mathbb{R}_-^* .
3. Résoudre (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 36 ★★**Problème de raccord**

Résoudre sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) : $ty' + (1 - t)y = e^{2t}$.

Exercice 37 ★★**Mines MP**

Résoudre sur \mathbb{R}_+^*

$$x \ln(x) y' - (3 \ln(x) + 1)y = 0$$

Wronskien**Exercice 38 ★★★****CCP MP 2017**

On considère l'équation différentielle suivante sur \mathbb{R}_+^*

$$(E) : x'' + 2 \frac{x'}{t} + x = 0$$

1. Montrer que $\varphi_1 : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est solution de (E).
2. A l'aide du wronskien, chercher une autre solution de (E).

Exercice 39 ★★★

Soient q une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ . On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + qy = 0$.

1. Soit f une solution bornée de (E) sur \mathbb{R}_+ . Montrer que f' admet une limite en $+\infty$ puis déterminer la valeur de cette limite.
2. Soient f et g deux solutions bornées de (E) sur \mathbb{R}_+ . Étudier le wronskien $w = fg' - f'g$ des solutions f et g .
En déduire que f et g sont liées. Que peut-on en conclure ?

Exercice 40 ★★★**Zéros entrelacés**

1. Soient p et q deux fonctions continues sur \mathbb{R} telles que $p \leq q$ sur \mathbb{R} . Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 telles que $u'' + pu = 0$ et $v'' + qv = 0$. On suppose que u s'annule en des réels a et b avec $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$.
 - a. On pose $W = u'v - uv'$. Déterminer W' .
 - b. En déduire que v s'annule sur $[a, b]$.
2. Application. Soient r une fonction continue sur \mathbb{R} , f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telle que $f'' + rf = 0$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$.
 - a. On suppose $r \geq M^2$. Montrer que tout intervalle fermé de longueur $\frac{\pi}{M}$ contient au moins un zéro de f .
 - b. On suppose $r \leq M^2$. On suppose que f s'annule en des réels a et b tels que $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que $b - a \geq \frac{\pi}{M}$.

Divers**Exercice 41 ★★★****Equation fonctionnelle de l'exponentielle matricielle**

Déterminer les applications $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivables en 0 vérifiant :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, M(s + t) = M(s)M(t)$$

Exercice 42 ★★★**Banque Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) > 0$, et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 , telle que $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = Ax(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ℓ , telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \ell(x(t)) = 0$.

Exercice 43 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées.

Exercice 44 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble S_α des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $f'(x) = -f(\alpha - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe \mathcal{C}^2 .
2. Montrer que les éléments de S_α sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Conclure.

Exercice 45 ★★

Déterminer les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$$

Exercice 46 ★★

Déterminer les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x)$$