Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

A l'attention des 3/2

Les 3/2 pourront admettre le résultat des questions 8 et 31. Par ailleurs, toutes les variables aléatoires de l'énoncé pourront être considérées comme des «variables aléatoires de MPSI», c'est-à-dire des variables aléatoires définies sur un univers *fini*.

Problème 1

1 Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leq 2$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq \frac{1}{2^n}$. Ainsi $\mathrm{I}_n \geq \int_0^1 \frac{1}{2^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}$.

2 L'application $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ avec $2n \geq 2 > 1$. On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ sur $[0,+\infty[$ puis l'existence de K_n.
Il est clair que $\mathrm{K}_1 = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

3 Supposons $n \geq 2$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $0 < 1+t \leq 1+t^2$ de sorte que $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(1+t)^n}$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} = \frac{2}{2^n(n-1)}$$

Or $\frac{1}{2^n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n n}$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$$

4 D'après la question précédente, $\mathrm{K}_n - \mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$. A fortiori, $\mathrm{K} - n - \mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Mais d'après la question**1**, $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\mathrm{I}_n)$ donc $\mathrm{K}_n - \mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\mathrm{I}_n)$ i.e. $\mathrm{K}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_n$.

5 Par intégration par parties,

$$\mathrm{K}_n = \int_0^{+\infty} 1\cdot(1+t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[t(1+t^2)^{-n}\right]_0^{+\infty} + 2n\int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime car

$$\lim_{t\to+\infty} t(1+t^2)^{-n} = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_n &= 2n\int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2n\int_0^{+\infty} (1+t^2-1)(1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2n\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t - 2n\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2n\mathrm{K}_n - 2n\mathrm{K}_{n+1}
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\mathrm{K}_n = \mathrm{K}_{n+1} + \frac{1}{2n}\mathrm{K}_n$$

6 D'après la question précédnte, $\mathrm{K}_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\mathrm{K}_n$. On montre par récurrence que $\mathrm{K}_n = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}(n-1)!^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la formule de Stirling, on montre que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{K}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

7 Il suffit d'effectuer le changement de variable linéaire $u = \sqrt{n}t$.

8 On pose $f_n : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} & \text{si } u \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Pour $u \leq \sqrt{n}$, $f_n(u) = \exp(-n\ln(1+u^2/n))$ donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $u \mapsto e^{-u^2}$. De plus, par concavité de ln, $f_n(u) \leq \exp(-u^2)$ pour $u \in \mathbb{R}_+$. La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\sqrt{n}\mathrm{I}_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2/n)^n} = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

9 Avec les questions précédentes,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathrm{I}_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Via le changement de variable, $t = u/\sqrt{2}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

Par parité de $u \mapsto e^{-u^2/2}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

10 Comme $\varphi(t) \leq \frac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geq x$,

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, $-\varphi$ est une primitive de $t \mapsto t\varphi(t)$ donc

$$\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -[\varphi(t)]_x^{+\infty} = \varphi(x)$$

car $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$.

Remarque. Ceci prouve en sus la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

On a donc bien

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

11 On considère la fonction

$$\Psi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (x^2+1)\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - x\varphi(x)$$

La fonction Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Psi'(x) = 2x\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - (x^2+1)\varphi(x) - \varphi(x) - x\varphi'(x)$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Psi'(x) = 2x\int_x^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t - 2\varphi(x) \leq 0$$

en utilisant l'inégalité de la question précédente. La fonction Ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: elle admmet donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$. Or, comme φ est positive, $\Psi(x) \geq -x\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\varphi(x) = 0$ donc $\ell \geq 0$ par passage à la limite. Par décroissance de Ψ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Psi(x) \geq \ell \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

12 Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t = 1$, $1 - \Phi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après les deux questions précédentes,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{x\varphi(x)}{x^2+1} \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

Par encadrement, $1 - \Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

13 Notons $\mathrm{B}_0 = \varnothing$ et $\mathrm{B}_p = \displaystyle\bigcup_{1\leq k\leq p} \{|\mathrm{R}_k| \geq 3x\}$ pour $p \in [\![1, n]\!]$. Alors $\mathrm{B}_{p-1} \subset \mathrm{B}_p$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ de sorte que

$$\mathrm{A} = \bigcup_{p=1}^{n} \{|\mathrm{R}_p| \geq 3x\} = \mathrm{B}_n = \bigsqcup_{p=1}^{n} \mathrm{B}_p \setminus \mathrm{B}_{p-1} = \bigsqcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p$$

car $\mathrm{A}_p = \mathrm{B}_p \setminus \mathrm{B}_{p-1}$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.

14 Remarquons que

$$\mathrm{A} = (\{|\mathrm{R}_n| \geq x\} \cap \mathrm{A}) \sqcup (\{|\mathrm{R}_n| < x\} \cap \mathrm{A}) \subset \{|\mathrm{R}_n| \geq x\} \sqcup \left(\bigcup_{p=1}^{n} (\{|\mathrm{R}_n| < x\} \cap \mathrm{A}_p)\right)$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leq \mathbb{P}(\{|\mathrm{R}_n| \geq x\}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=1}^{n} (\{|\mathrm{R}_n| < x\} \cap \mathrm{A}_p)\right) \leq \mathbb{P}(\{|\mathrm{R}_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| < x\} \cap \mathrm{A}_p\right)$$

15 Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Par inégalité triangulaire, $|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| \geq |\mathrm{R}_p| - |\mathrm{R}_n|$. Ainsi

$$\{|\mathrm{R}_p| \geq 3x\} \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\} \subset \{|\mathrm{R}_p| - |\mathrm{R}_n| > 2x\} \subset \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}$$

Finalement,

$$\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\} \subset \mathrm{A}_p$$

et

$$\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\} \subset \{|\mathrm{R}_p| \geq 3x\} \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\} \subset \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}$$

donc

$$\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\} \subset \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}$$

16 Tout d'abord, d'après la question précédente,

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

Ainsi

$$\sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right) \leq \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

Or, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, A_p s'écrit en fonction des variables aléatoires $\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_p$ tandis que $\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \mathrm{Z}_k$. Comme $\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions garantit que les événements A_p et $\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}$ sont indépendants. Ainsi

$$\sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right) = \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A}_p)\mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right) \leq \max_{1\leq p\leq n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right) \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A}_p)$$

Comme $\mathrm{A} = \bigsqcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p$, $\sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A}_p) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) \leq 1$. Ainsi

$$\sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right) \leq \max_{1\leq p\leq n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

puis

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leq \mathbb{P}(\{|\mathrm{R}_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right) \leq \mathbb{P}(\{|\mathrm{R}_n| \geq x\}) + \max_{1\leq p\leq n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

17 On vérifie sans peine que $x_{n,n-k} = -x_{n,k}$.

18 φ est bornée car à valeurs dans $]0, 1/\sqrt{2\pi}]$. B_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs donc B_n est également bornée. On en déduit que $\mathrm{B}_n - \varphi$ est bornée, ce qui justifie l'existence de Δ_n.

19 Posons $\mathrm{I}_{n,k} = \left]x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ ainsi que $y_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k-1}{\sqrt{n}}$ pour $k \in [\![0, n+1]\!]$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $x \in \mathrm{I}_{n,k}$, $-x \in \mathrm{I}_{n,n-k}$ et

$$\mathrm{B}_n(-x) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{n-k}\frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} = \mathrm{B}_n(x)$$

De plus, pour $x \in \left]-\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\cup \left]\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$, $-x \in \left]-\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\cup \left]\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$ et $\mathrm{B}_n(-x) = \mathrm{B}_n(x)$.
La partie $\mathrm{A} = \mathbb{R} \setminus \{y_{n,k},\ k \in [\![0, n+1]\!]\}$ est donc symétrique par rapport à 0 et la restriction de B_n à A est paire. Comme φ est paire sur $\mathbb{R}$, la restriction de $\psi_n = |\mathrm{B}_n - \varphi|$ à A est également paire. On en déduit que $\psi_n(\mathrm{A}) = \psi_n(\mathrm{A} \cap \mathbb{R}_+)$.
Remarquons que B_n est continue à droite sur $\mathbb{R}$. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, ψ_n est continue à droite sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\psi_n(\mathbb{R}) = \overline{\psi_n(\mathrm{A})}$ et que $\psi_n(\mathbb{R}_+) = \overline{\psi_n(\mathrm{A} \cap \mathbb{R}_+)}$. En effet, on peut par exemple constater que tout $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite à valeurs dans $\mathrm{A} \cap [x, +\infty[$.
Comme $\psi_n(\mathrm{A}) = \psi_n(\mathrm{A} \cap \mathbb{R}_+)$, on a également $\overline{\psi_n(\mathrm{A})} = \overline{\psi_n(\mathrm{A} \cap \mathbb{R}_+)}$ i.e. $\psi_n(\mathbb{R}) = \psi_n(\mathbb{R}_+)$. Ainsi

$$\Delta_n = \sup_{\mathbb{R}} \psi_n = \sup \psi_n(\mathbb{R}) = \sup \psi_n(\mathbb{R}_+) = \sup_{\mathbb{R}_+} \Psi_n = \sup_{x\geq 0} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)|$$

20 Soit $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $\mathrm{I}_{n,k} \cap \mathbb{R}_+ \neq \varnothing$. Alors $x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ i.e. $2k > n-1$. Remarquons que pour un tel k,

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n-1-2k}{(k+1)!(n-k)!} < 0$$

De plus, $\binom{n}{n} = 1 > 0$. On en déduit que B_n est bien décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

21 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathrm{I}_n$. Alors

$$0 \leq -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \leq \ell + 1$$

de sorte que

$$\frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n}{2} + \frac{\ell+1}{2}\sqrt{n}$$

Notamment, $k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ pat minoration. On peut donc écrire

$$k! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Mais les inégalités précédentes montrent également que $k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ de sorte que

$$k! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

De même,

$$\frac{n}{2} - \frac{\ell+1}{2}\sqrt{n} \leq n-k \leq \frac{n}{2}$$

donc $n-k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi

$$(n-k)! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}\sqrt{2\pi(n-k)}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n-k}\right)\right)$$

Mais à nouveau, $n-k \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$ donc

$$(n-k)! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}\sqrt{2\pi(n-k)}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} k!(n-k) &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^{k}\sqrt{2\pi k}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}\sqrt{2\pi(n-k)}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 2\pi e^{-n}k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{22}}$ A nouveau,

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

de sorte qu'avec la question précédente,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n^n\sqrt{n}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_n(x_{n,k}) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}\binom{n}{k} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{n^{n+1}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2^{n+1}k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{n^{k+1/2}n^{n-k+1/2}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2^{k+1/2}2^{n-k+1/2}k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{23}}$ Puisque $x_{n,k} = -\sqrt{n} + \dfrac{2k}{\sqrt{n}}$,

$$1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = \frac{2k}{n} \qquad 1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = 2-\frac{2k}{n} \qquad \frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} = k-n/2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} &= \left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{k-n/2}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{n/2-k} \\ &= \left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{k+1/2}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{n-k+1/2} \\ &= \left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_n(x_{n,k}) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Par définition de $\mathrm{I}_{n,k}$, $0 \leq x_{n,k} \leq \ell + 1$ donc $x_{n,k}^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} &= \exp\left(-\frac{n+1}{2}\ln\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{n}{2}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(-\frac{x_{n,k}^2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^4}{n^2}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{x_{n,k}^2}{n}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\exp\left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} &= \exp\left(-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}\ln\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}\left(\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} &= \exp\left(\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}\ln\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}\left(-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n(x_{n,k}) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

24 D'après la question précédente,

$$\mathrm{B}_n(x_{n,k}) - \varphi - x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{=} \varphi(x_{n,k})\,\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Comme φ est bornée,

$$\mathrm{B}_n(x_{n,k}) - \varphi - x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Notamment,

$$B_n(x_{n,k}) - \varphi - x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0,\ \forall k \in I_n,\ |B_n(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k})| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Comme $\sqrt{n} + 1/\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\sqrt{n} + 1/\sqrt{n} \geq \ell$.
La fonction φ est continue sur le segment $[0, \ell]$ donc elle y est uniformément continue. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, \ell],\ |x - y| \leq \alpha \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

On choisit alors $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{N_2}} \leq \alpha$. A fortiori, pour tout $n \geq N_2$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq \alpha$.

Posons alors $n_1 = \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Soit $n \geq N_1$. Soit également $x \in [0, \ell]$. Puisque $n \geq N_1$, $[0, \ell] \subset [0, \sqrt{n} + 1/\sqrt{n}]$. Il existe donc $k \in I_n$ tel que $x \in [x_{n,k} - 1/\sqrt{n}, x_{n,k} + 1/\sqrt{n}[$. Alors $|x - x_{n,k}| \leq 1/\sqrt{n} \leq \alpha$ car $n \geq N_2$ de sorte que $|\varphi(x) - \varphi(x_{n,k})| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$. Enfin, comme $n \geq N_0$, $|B_n(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k})| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$. Par inégalité triangulaire,

$$|B_n(x) - \varphi(x)| = |B_n(x_{n,k}) - \varphi(x)| \leq |B_n(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k})| + |\varphi(x_{n,k}) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

25 On répète la question précédente avec $x = \ell$ et $\varepsilon = 2\varphi(\ell) > 0$. Ainsi il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$, $|B_n(\ell) - \varphi(\ell)| \leq \varphi(\ell)$ puis

$$B_n(\ell) = |B_n(\ell)| = |(B_n(\ell) - \varphi(\ell)) + \varphi(\ell)| \leq |B_n(\ell) - \varphi(\ell)| + |\varphi(\ell)| \leq 2\varphi(\ell)$$

26 Soit $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Si $x \in [0, \ell]$, alors $|B_n(x) - \varphi(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Si $x \in [\ell, +\infty[$, donc, par décroissance de B_n et φ

$$|B_n(x) - \varphi(x)| \leq B_n(x) + \varphi(x) \leq B_n(\ell) + \varphi(\ell) \leq 3\varphi(\ell) \leq \frac{3\varepsilon}{2}$$

Ainsi pour $n \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$\Delta_n = \sup_{\mathbb{R}} |B_n - \varphi| = \sup_{\mathbb{R}_+} |B_n - \varphi| \leq \frac{3\varepsilon}{2}$$

On en déduit que (Δ_n) converge vers 0.

27 Remarquons que

$$\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,dx - \int_u^v f(x)\,dx = \int_{u_n}^{v_n} (f_n(x) - f(x))\,dx + \int_{u_n}^{u} f(x)\,dx + \int_v^{v_n} f(x)\,dx$$

D'une part,

$$\left|\int_{u_n}^{v_n} (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leq |v_n - u_n| \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

Or $|u_n - v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |u - v|$ et $\|f_n - f\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\int_{u_n}^{v_n} (f_n(x) - f(x))\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, comme (u_n) converge vers u, $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$ est un fermé borné inclus dans I. Il existe alors $(a, b) \in I^2$ tel que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\} \subset [a, b] \subset I$. Comme f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, elle y est bornée. Ainsi

$$\left|\int_{u_n}^{u} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\min(u_n,u)}^{\max(u_n,u)} |f(x)|\,dx \leq |u_n - u| \|f\|_{\infty,[a,b]}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{u_n}^{u} f(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De même, $\displaystyle\int_v^{v_n} f(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Finalement, $\displaystyle\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_u^v f(x)\,dx$.

28 Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{n}\frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{j}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{j}$$

Or les x_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ donc T_n suit la loi binomiale de paramètres n et $1/2$. On en déduit que $\mathbb{P}(\{\mathrm{T}_n = j\}) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{j}$.

29 On remarque que $\mathrm{S}_n = 2\mathrm{T}_n - n$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leq v\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{u\sqrt{n} \leq 2\mathrm{T}_n - n \leq v\sqrt{n}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{n+u\sqrt{n}}{2} \leq \mathrm{T}_n \leq \frac{n+v\sqrt{n}}{2}\right\}\right) = \sum_{j\in \mathrm{J}_n} \mathbb{P}(\{\mathrm{T}_n = j\})$$

30 Posons $a_n = \left\lceil \dfrac{n+u\sqrt{n}}{2} \right\rceil$ et $b_n = \left\lfloor \dfrac{n+v\sqrt{n}}{2} \right\rfloor$ de sorte que $\mathrm{J}_n = [\![a_n, b_n]\!]$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leq v\right\}\right) = \sum_{j=a_n}^{b_n} \mathbb{P}(\{\mathrm{T}_n = j\}) = \sum_{j=a_n}^{b_n} \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u_n}^{v_n} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x$$

en posant $u_n = -\sqrt{n} + \dfrac{2a_n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = -\sqrt{n} + \dfrac{2b_n}{\sqrt{n}}$. Or

$$\frac{n+u\sqrt{n}}{2} \leq a_n < \frac{n+u\sqrt{n}}{2} + 1$$

donc

$$u \leq u_n < u + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$. De la même manière, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$. Comme (B_n) converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$ la question **27** montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leq v\right\}\right) = \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Par continuité croissante (utiliser la caractérisation séquentielle de la limite pour se ramener à des unions dénombrables)

$$\mathbb{P}\left(u \leq \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{v\to+\infty} \mathbb{P}\left(u \leq \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leq v\right)$$