

# DEVOIR SURVEILLÉ N°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 – D'après Capes externe 2008

### Introduction

Etant donné un entier naturel  $n$ , on considère  $\pi(n)$  le nombre de nombres premiers compris entre 0 et  $n$ . Ce sujet s'intéresse au comportement de la suite  $(\pi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Il est composé de deux grandes parties I et II.

La partie I vise à établir l'encadrement suivant :

$$\frac{n \ln 2}{\ln n} \leq \pi(n) \leq \frac{ne}{\ln n}$$

valable pour tout  $n$  suffisamment grand. Elle est composée de deux sous-parties, I.A et I.B, consacrées respectivement à la minoration et à la majoration annoncées.

Ce genre d'encadrement suggère l'existence d'un lien asymptotique fort entre les suites  $(\pi(n))_n$  et  $\left(\frac{n}{\ln n}\right)_n$ . La partie II s'intéresse à cette question puisque son objectif principal est de montrer le résultat suivant :

**Théorème** (Tchebychev). *S'il existe un réel  $c > 0$  tel que  $\pi(n) \sim c \frac{n}{\ln n}$ , alors nécessairement  $c = 1$ .*

Elle est composée de quatre sous-parties II.A, II.B, II.C et II.D. C'est dans la partie II.C qu'on établit le théorème annoncé. La preuve qu'on en propose repose sur l'étude du comportement asymptotique de la suite  $\left(\sum_{p \text{ premier} \leq n} \frac{1}{p}\right)_n$ . Cette étude est réalisée au début de la partie II.C. Les parties II.A et II.B sont consacrées à l'établissement de formules importantes pour la suite. Dans la partie II.A, on établit une formule due à Legendre qui donne l'expression de la valuation  $p$ -adique de  $n!$ . Dans la partie II.B, on démontre un théorème de Mertens qui précise le comportement asymptotique de la suite  $\left(\sum_{p \text{ premier} \leq n} \frac{\ln p}{p}\right)_n$ . La partie II.D est une application de la formule asymptotique trouvée dans la partie II.C. On y étudie la densité de l'ensemble des entiers possédant de grands facteurs premiers.

Les parties de ce problème ne sont pas indépendantes entre elles.

### Notations et rappels

- On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers.
- Si  $E$  est un ensemble, on note  $\#E$  le cardinal de cet ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de  $E$ .
- Si  $x$  est un nombre réel, on note  $\lfloor x \rfloor$  sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ ; autrement dit,  $\lfloor x \rfloor$  est l'unique élément de  $\mathbb{Z}$  vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

- On rappelle que, si  $a$  et  $b$  sont deux nombres entiers tels que  $0 \leq b \leq a$ , le coefficient binomial  $\binom{a}{b}$  est égal à  $\frac{a!}{(a-b)!b!}$ .
- Si  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  désignent deux suites numériques, on notera  $u_n \sim v_n$ , pour dire que ces suites sont *équivalentes*. On notera  $u_n = o(v_n)$  pour dire que la suite  $(u_n)_n$  est *négligeable* devant la suite  $(v_n)_n$  et enfin on notera  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$  pour dire que la suite  $(u_n)_n$  est *dominée* par la suite  $(v_n)_n$ , c'est-à-dire qu'il existe un réel  $c$  et un entier  $n_0$  tels que, pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $|u_n| \leq c|v_n|$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\pi(n)$  le nombre de nombres premiers compris dans l'intervalle  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ; ainsi, on a  $\pi(0) = \pi(1) = 0$ ,  $\pi(3) = 2$ ,  $\pi(4) = 2$  etc.  
Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $\delta(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$ , de sorte que si l'on pose  $\delta(0) = 0$ , on voit que  $\delta$  est la fonction caractéristique de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{N}$  (c'est-à-dire  $\delta(n) = 1$  si  $n$  est premier et  $\delta(n) = 0$  sinon).
- Dans tout le texte la lettre  $p$  désignera toujours et exclusivement un nombre premier**, ceci y compris lorsque la lettre  $p$  sera utilisée comme symbole d'indice d'une somme ou d'un produit. Par exemple, la notation  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$  désigne la somme des inverses des nombres premiers inférieurs ou égaux au nombre réel  $x$ .
- Etant donné un entier  $n \geq 1$  et un nombre premier  $p$ , on appelle *valuation  $p$ -adique* de  $n$  l'entier noté  $v_p(n)$  et égal à l'exposant de  $p$  dans la décomposition en facteurs premiers de  $n$ . Par exemple, si l'on prend  $n = 350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$  on a  $v_2(350) = 1$ ,  $v_3(350) = 0$ ,  $v_5(350) = 2$ ,  $v_7(350) = 1$  et  $v_p(350) = 0$  pour tout nombre premier  $p \geq 11$ .

On admettra les propriétés (élémentaires) suivantes :

- $v_p(n)$  est l'unique entier  $k$  tel que  $p^k$  divise  $n$  et  $p^{k+1}$  ne divise pas  $n$ .
- Pour tout  $n \geq 1$  fixé, la suite  $(v_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$  est nulle à partir d'un certain rang, de sorte que l'on peut écrire  $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$ , ce produit pouvant être considéré comme un produit fini. Cette écriture est la décomposition de  $n$  en facteurs premiers.
- Pour tous  $n, m$  entiers naturels non nuls et tout  $p \in \mathcal{P}$ , on a

$$v_p(mn) = v_p(n) + v_p(m)$$

- Pour tous  $n, m$  entiers naturels non nuls et tout  $p \in \mathcal{P}$ , on a

$$v_p(\text{pgcd}(m, n)) = \min\{v_p(m), v_p(n)\} \quad \text{et} \quad v_p(\text{ppcm}(m, n)) = \max\{v_p(m), v_p(n)\}$$

Aucune preuve de ces quatre résultats n'est demandée.

## I Une estimation à la Tchebychev

### I.A Une minoration de la fonction $\pi$

On considère, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'entier  $\Delta_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$ . Dans cette partie, nous allons établir une minoration de  $\Delta_n$  puis en déduire une minoration de  $\pi(n)$ .

On considère  $a, b \in \mathbb{N}$  vérifiant  $1 \leq b \leq a$  et l'on pose :

$$I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b} dx$$

**1** **1.a** Expliciter  $I(1, a)$  en fonction de  $a$ .

**1.b** Montrer que si  $b < a$  alors  $I(b+1, a) = \frac{b}{a-b} I(b, a)$ .

**1.c** En déduire que  $I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}}$ .

**2** **2.a** Montrer que  $I(b, a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$ .

**2.b** En déduire que l'entier  $b \binom{a}{b}$  divise l'entier  $\Delta_a$ .

**3** Soit  $n \geq 1$  un entier.

**3.a** Montrer que les entiers  $n \binom{2n}{n}$  et  $(2n+1) \binom{2n}{n}$  divisent l'entier  $\Delta_{2n+1}$ .

**3.b** En déduire que l'entier  $n(2n+1) \binom{2n}{n}$  divise  $\Delta_{2n+1}$ .

**3.c** Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ , on a l'inégalité :  $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$ .

**3.d** En déduire que  $(2n+1) \binom{2n}{n} \geq 4^n$ .

**3.e** En déduire que  $\Delta_{2n+1} \geq 4^n n$ .

**3.f** Montrer que si  $n \geq 9$ , alors  $\Delta_n \geq 2^n$ .

**4** Soit  $n \geq 1$  un entier.

**4.a** Soit  $p \in \mathcal{P}$ ; montrer que  $p^{v_p(\Delta_n)} \leq n$ .

**4.b** Montrer que  $\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)}$ .

**4.c** En déduire que  $\Delta_n \leq n^{\pi(n)}$ .

**5** Montrer que pour tout  $n \geq 9$ , on a

$$\pi(n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln n}$$

## I.B Une majoration de la fonction $\pi$

**6** On cherche dans cette question à majorer simplement le produit  $\prod_{p \leq n} p$  en fonction de l'entier  $n \geq 1$ .

**6.a** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers tels que  $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$ . Montrer que le produit  $\prod_{a < p \leq b} p$  divise l'entier  $\binom{b}{a}$  (le produit considéré est supposé être égal à 1 dans le cas où il n'y aurait pas de nombre premier dans l'intervalle  $]a, b]$ ).

**6.b** Montrer que pour tout entier  $m \geq 1$ , on a  $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$ .

**6.c** Montrer que pour tout entier  $m \geq 1$ , on a  $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m$ .

**6.d** Prouver finalement que pour tout entier  $n \geq 1$  on a

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$$

On pourra raisonner par récurrence.

**7** **7.a** Montrer que pour tout entier  $m \geq 1$ , on a  $m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$ .

**7.b** Dédurre de ce qui précède que, pour tout  $n \geq 2$ , on a  $\pi(n)! \leq 4^n$  et que par suite, on a

$$\pi(n) \ln \pi(n) - \pi(n) \leq n \ln 4$$

**8** On souhaite montrer, à partir du résultat précédent, que pour tout  $n \geq 2$  on a

$$\pi(n) \leq \frac{ne}{\ln n}$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un entier  $n_0 \geq 2$  tel que  $\pi(n_0) > \frac{n_0 e}{\ln n_0}$ .

**8.a** Montrer que la fonction  $x \mapsto x \ln x - x$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ . En déduire que

$$\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0}$$

**8.b** Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  est majorée par  $e^{-1}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Conclure.  
On donne  $\ln 4 \approx 1,386$  et  $e \approx 2,718$ .

## II Autour d'un théorème de Mertens

### II.A Une formule de Legendre sur la valuation p-adique de $n!$

On considère un entier  $n \geq 2$  et un nombre premier  $p$ . Pour tout entier  $k \geq 0$ , on considère les sous-ensembles finis  $U_k$  et  $\Omega_k$  de  $\mathbb{N}$  définis par

$$U_k = \{a \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid p^k \text{ divise } a\}$$

$$\Omega_k = \{a \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid v_p(a) = k\}$$

**9** Calculer, pour tout  $k \geq 0$ ,  $\#U_k$  puis  $\#\Omega_k$  en fonction de  $n$ ,  $p$  et  $k$ .

**10** Montrer que  $v_p(n!) = \sum_{k \geq 0} k \# \Omega_k$  et en déduire la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

### II.B Un théorème de Mertens

Dans toute cette partie II.B, on considère un entier  $n \geq 2$ .

**11** Prouver que pour tout  $p \in \mathcal{P}$  on a

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

**12** En déduire que

$$n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leq n} \ln p < \ln n! \leq n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

**13** Dans cette question on établit plusieurs majorations techniques utiles aux deux questions suivantes.

**13.a** Montrer la convergence de la série  $\sum \frac{r}{2^r}$  et prouver que  $\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2$ .

**13.b** Montrer que pour tout entier  $r \geq 1$ ,

$$\sum_{2^{r-1} < m \leq 2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \frac{r \ln 2}{2^r}$$

**13.c** En déduire que la série  $\sum \frac{\ln m}{m(m-1)}$  est convergente et que l'on a :

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \ln 4$$

**13.d** Montrer qu'il existe un réel  $\theta_n \in [0, 1]$  tel que :

$$\ln n! = n \ln n - n + 1 + \theta_n \ln n$$

**14** Prouver, en utilisant les résultats des questions **12** et **13**, que :

$$\ln n - (1 + \ln 4) < \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p}$$

**15** De même, en utilisant les questions **12**, **13** et **6.d**, montrer que :

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} < \ln n + \ln 4.$$

En déduire que

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1)$$

(théorème de Mertens).

## II.C Le comportement asymptotique de $\left(\sum_{p \leq n} \frac{1}{p}\right)_n$

**16** Dans cette question on établit des résultats préliminaires utiles pour la suite.

**16.a** Montrer que la série  $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$  converge.

**16.b** Montrer qu'il existe un réel  $\ell$  tel que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + \ell + o(1)$$

**17** On note  $(\psi(n))_{n \geq 2}$  la suite définie par  $\psi(n) = \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p}$ . On considère un entier  $n \geq 3$ .

**17.a** Montrer que

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \left( \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) + \frac{\psi(n)}{\ln n}$$

**17.b** Prouver, en utilisant le théorème de Mertens, que :

$$\psi(k) \left( \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) = \frac{1}{k \ln k} + o\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right)$$

**18** Dédurre de ce qui précède qu'il existe une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \ln \ln n + \lambda + o(1)$$

**19** Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n}$$

En déduire que s'il existe un réel  $c > 0$  tel que  $\pi(n) \sim c \frac{n}{\ln n}$ , alors  $c = 1$  (théorème de Tchebychev).

## II.D Une application à l'étude des entiers possédant de grands facteurs premiers

Etant donné un entier  $n \geq 2$ , on note  $P^+(n)$  le plus grand facteur premier apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de  $n$ . Par exemple,  $P^+(50) = P^+(2 \cdot 5^2) = 5$ . On s'intéresse dans cette question à l'ensemble  $A$  constitué des entiers  $n \geq 2$  vérifiant  $P^+(n) > \sqrt{n}$  (c'est ce qu'on entend par *entiers possédant de grands facteurs premiers* dans le titre de cette partie). L'objectif de cette partie est de montrer que l'ensemble  $A$  possède une densité valant  $\ln 2$ . En d'autres termes, si pour un réel  $x \geq 2$  on pose  $A(x) = A \cap [0, x]$  et  $a(x) = \#A(x)$  le cardinal de  $A(x)$ , nous allons montrer que la suite  $\left(\frac{a(n)}{n}\right)_n$  possède une limite (on dira alors que  $A$  possède une *densité*) et que cette limite vaut  $\ln 2$  (qui sera donc appelée la *densité* de  $A$ ). Ce résultat signifiera que, «moralement», il y a une proportion de  $\ln 2 \approx 0,69$  entiers dans  $\mathbb{N}$  qui possèdent de grands facteurs premiers.

**20** En utilisant la question 18, montrer que la suite  $\left(\sum_{\sqrt{n} < p \leq n} \frac{1}{p}\right)_n$  possède une limite et donner cette limite.

**21** Soit  $x \geq 2$  un réel.

**21.a** Soient  $p \in \mathcal{P}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $n = mp$ . Montrer que

$$(p = P^+(n) \text{ et } n \in A(x)) \iff m < p \leq x/m$$

**21.b** Soient  $p, p' \in \mathcal{P}$  et  $m, m' \in \mathbb{N}^*$  tels que  $m < p \leq x/m$  et  $m' < p' \leq x/m'$ . Montrer que

$$mp = m'p' \iff (p = p' \text{ et } m = m')$$

**21.c** En déduire que les entiers de la forme  $mp$  avec  $p \in \mathcal{P}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , et vérifiant  $m < p \leq x/m$  décrivent de manière biunivoque l'ensemble  $A(x)$ .

**21.d** Prouver finalement que

$$a(x) = \sum_{p \leq x} \min \left\{ p-1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right\}$$

**22** Soit  $x \geq 1$  un réel.

**22.a** Montrer que pour tout nombre premier  $p$ , on a l'équivalence

$$p-1 \leq \lfloor x/p \rfloor \iff p \leq \varphi(x)$$

$$\text{où } \varphi(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

**22.b** Montrer que  $\sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x} + 1$ .

**22.c** En déduire que

$$a(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \lfloor x/p \rfloor$$

**22.d** En utilisant les encadrements obtenus dans la partie I, démontrer que

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} (p-1) = o(x)$$

**22.e** En utilisant la question 20 et les encadrements obtenus dans la partie I, montrer que

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = x \ln 2 + o(x)$$

**22.f** Conclure.