Devoir à la maison n°20

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 **1.a** Notons $f_n : A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \mapsto A^n$. Les coefficients de A^n sont polynomiaux en les coefficients de A donc f_n est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

1.b Récurrence évidente en utilisant la sous-multiplicativité de la norme subordonnée.

1.c Soit $r \in [0, R[$. On note B_r la boule fermée de centre 0 et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall A \in B_r,\ \|f_n(A)\| = |a_n|\|A^n\| \leq |a_n|\|A\|^n \leq |a_n|r^n$$

Or la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument sur son disque ouvert de convergence donc $\sum |a_n|r^n$ converge. On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur B_r pour tout $r \in [0, R[$. Or les f_n sont continues sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ donc φ est continue (et a fortiori définie) sur $\mathcal{B}$.

2 **2.a** Il suffit de remarquer que $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

2.b $\varphi(A) \in \mathbb{C}[A]$ comme limite de la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} a_k A^k$, qui est à valeurs dans le fermé $\mathbb{C}[A]$.
On sait par ailleurs que $(A^k)_{0\leq k\leq r-1}$ est une base de $\mathbb{C}[A]$ donc il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$ tel que $\varphi(A) = P(A)$.

2.c On vérifie que $A^2 = A$ et donc $A^n = A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que

$$\varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = I_d + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) A = I_d + (e-1)A$$

De plus, on a bien $r = 2$, puisque la famille (I_d, A) est libre tandis que la famille (I_d, A, A^2) est liée. On en déduit que $P = 1 + (e-1)X$.

3 Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}),\ \varphi(A) = P(A)$$

Notamment, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(\lambda I_d) = P(\lambda I_d)$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n = P(\lambda)$$

Par unicité du développement en série entière, la suite (a_n) est la suite des coefficients de P : elle est donc nulle à partir d'un certain rang.
Réciproquement, si (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, on a bien

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}),\ \varphi(A) = P(A)$$

en posant $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.

$\boxed{4}$ Remarquons que $\exp(i\mathrm{A}) = \cos(\mathrm{A}) + i\sin(\mathrm{A})$ et que $\exp(-i\mathrm{A}) = \cos(\mathrm{A}) - i\sin(\mathrm{A})$. Comme $i\mathrm{A}$ et $-i\mathrm{A}$ commutent, on en déduit que

$$\mathrm{I}_d = \exp(i\mathrm{A}-i\mathrm{A}) = \exp(i\mathrm{A})\exp(-i\mathrm{A}) = (\cos(\mathrm{A})+i\sin(\mathrm{A}))(\cos(\mathrm{A})-i\sin(\mathrm{A})) = \cos(\mathrm{A})^2+\sin(\mathrm{A})^2+i(\sin(\mathrm{A})\cos(\mathrm{A}) - \cos(\mathrm{A})\sin(\mathrm{A}))$$

Mais d'après la question **2.b**, les matrices $\cos(\mathrm{A})$ et $\sin(\mathrm{A})$ appartiennent à l'algèbre commutative $\mathbb{C}[\mathrm{A}]$ donc $\sin(\mathrm{A})\cos(\mathrm{A}) = \cos(\mathrm{A})\sin(\mathrm{A})$. On en déduit que

$$\cos(\mathrm{A})^2 + \sin(\mathrm{A})^2 = \mathrm{I}_d$$

$\boxed{5}$ **5.a** D'après la question **1.b**,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-n})\mathrm{A}^n\| = \|(\mathrm{R}^{-1}e^{-i\theta}\mathrm{A})^n\| \leq \|\mathrm{R}^{-1}e^{-i\theta}\mathrm{A}\|^n = \left(\frac{\|\mathrm{A}\|}{\mathrm{R}}\right)^n$$

Comme $\|\mathrm{A}\| < \mathrm{R}$, la série *numérique* $\sum\left(\frac{\|\mathrm{A}\|}{\mathrm{R}}\right)^n$ converge donc la série $\sum(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-n})\mathrm{A}^n$ converge absolument. Comme $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\sum(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-n})\mathrm{A}^n$ converge.
Pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, l'application $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{MX}$ est linéaire donc continue puisque $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est de dimension finie. On en déduit que

$$(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d - \mathrm{A})(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-n})\mathrm{A}^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d - \mathrm{A})(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-1}(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-n})\mathrm{A}^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-n}\mathrm{A}^n - (\mathrm{R}e^{i\theta})^{-(n+1)}\mathrm{A}^{n+1}$$

On a vu que la série $\sum(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-n})\mathrm{A}^n$ convergeait. On en déduit notamment que la suite $\left((\mathrm{R}e^{i\theta})^{-n})\mathrm{A}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle. Par lien suite/série télescopique,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-n}\mathrm{A}^n - (\mathrm{R}e^{i\theta})^{-(n+1)}\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{I}_d$$

Ceci signifie donc bien que $\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d - \mathrm{A}$ est inversible et que

$$(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d - \mathrm{A})^{-1} = (\mathrm{R}e^{i\theta})^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-n}\mathrm{A}^n$$

5.b On choisit à nouveau $\mathrm{R} > \|\mathrm{A}\|$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par continuité de la multiplication matricielle à droite

$$\forall\theta \in [0, 2\pi],\ (\mathrm{R}e^{i\theta})^n(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d - \mathrm{A})^{-1} = (\mathrm{R}e^{i\theta})^n(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{R}e^{i\theta})^{-k}\mathrm{A}^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{R}e^{i\theta})^{n-k-1}\mathrm{A}^k$$

Posons $\psi_k : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto (\mathrm{R}e^{i\theta})^{n-k-1}\mathrm{A}^k$. Alors,

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \|\psi_n(\theta)\| \leq \mathrm{R}^{n-k+1}\|\mathrm{A}\|^k = \mathrm{R}^{n-1}\left(\frac{\|\mathrm{A}\|}{\mathrm{R}}\right)^k$$

Comme $\frac{\|\mathrm{A}\|}{\mathrm{R}} < 1$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{R}^{n-1}\left(\frac{\|\mathrm{A}\|}{\mathrm{R}}\right)^k$ converge donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\psi_k$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On peut donc procéder à une interversion série/intégrale :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mathrm{R}e^{i\theta})^n(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d - \mathrm{A})^{-1}\ d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{R}^{n-k-1}\left(\int_0^{2\pi}e^{i(n-k-1)\theta}\right)\mathrm{A}^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{R}^{n-1-k}\delta_{n-1,k}\mathrm{A}^k = \mathrm{A}^{n-1}$$

5.c Par linéarité de l'intégrale, la question précédente montre que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{P}(\mathrm{R}e^{i\theta})(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d - \mathrm{A})^{-1}\ d\theta = \mathrm{P}(\mathrm{A})$$

En choisissant $\mathrm{P} = \chi_\mathrm{A}$ on a donc

$$\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{R}e^{i\theta}\chi_\mathrm{A}(\mathrm{R}e^{i\theta})(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d - \mathrm{A})^{-1}\ d\theta$$

5.d D'après la formule de la comatrice

$$\operatorname{com}(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d-\mathrm{A})^\top(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d-\mathrm{A})=\det(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d-\mathrm{A})\mathrm{I}_d=\chi_\mathrm{A}(\mathrm{R}e^{i\theta})\mathrm{I}_d$$

ou encore

$$\chi_\mathrm{A}(\mathrm{R}e^{i\theta})(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d-\mathrm{A})^{-1}=\operatorname{com}(\mathrm{R}e^{i\theta}\mathrm{I}_d-\mathrm{A})^\top=(\mathrm{P}_{k,l}(\mathrm{R}e^{i\theta}))_{1\leq k,l\leq d}$$

où les $\mathrm{P}_{k,l}$ sont des polynômes. D'après la question précédente,

$$\forall(k,l)\in[\![1,d]\!]^2,\ \chi_\mathrm{A}(\mathrm{A})_{k,l}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mathrm{XP}_{k,l})(\mathrm{R}e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

Comme le coefficient constant de $\mathrm{XP}_{k,l}$ est nul, ces intégrales sont nulles et $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A})=0$.

6 Soit $(x,y)\in\left]-\infty,\frac{\mathrm{M}}{2}\right[^2$ tel que $y\neq\alpha$.

$$\forall t\in[\alpha,y],\ 2f(x+t)=f(2x)+f(2t)$$

donc

$$2\int_\alpha^y f(x+t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^y f(2x)\,\mathrm{d}t+\int_\alpha^y f(2t)\,\mathrm{d}t$$

Via les changements de variables $u=x+t$ et $u=2t$, on obtient

$$2\int_{x+\alpha}^{x+y}f(u)\,\mathrm{d}u=(y-\alpha)f(2x)+\frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{2y}f(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme F est une primitive de f,

$$2\mathrm{F}(x+y)-2\mathrm{F}(x+\alpha)=(y-\alpha)f(2x)+\frac{1}{2}\mathrm{F}(2y)-\frac{1}{2}\mathrm{F}(2\alpha)$$

ou encore

$$f(2x)=2\frac{\mathrm{F}(x+y)-\mathrm{F}(x+\alpha)-\frac{1}{4}\mathrm{F}(2y)+\frac{1}{4}\mathrm{F}(2\alpha)}{y-\alpha}$$

7 Tout d'abord, f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]-\infty,\mathrm{M}[$. Supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-\infty,\mathrm{M}[$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-\infty,\mathrm{M}[$. La question précédente montre que $x\mapsto f(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\left]-\infty,\frac{\mathrm{M}}{2}\right[$ i.e. f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-\infty,\mathrm{M}[$. Par récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-\infty,\mathrm{M}[$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ i.e. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,\mathrm{M}[$.

8 En dérivant l'équation fonctionnelle $(\star)$ par rapport à x, on obtient

$$\forall(x,y)\in\left]-\infty,\frac{\mathrm{M}}{2}\right[^2,\ f'(x+y)=f'(2x)$$

En dérivant maintenant cette relation par rapport à y, on obtient

$$\forall(x,y)\in\left]-\infty,\frac{\mathrm{M}}{2}\right[^2,\ f''(x+y)=0$$

Comme $\left\{x+y,\ (x,y)\in\left]-\infty,\frac{\mathrm{M}}{2}\right[^2\right\}=]-\infty,\mathrm{M}[$, f'' est nulle sur $]-\infty,\mathrm{M}[$. On en déduit que f est une fonction affine. Réciproquement, toute fonction affine f est bien continue et vérifie $(\star)$. L'ensemble des solutions de $(\star)$ est donc le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions affines. Une base en est $(x\mapsto 1, x\mapsto x)$.

9 On peut identifier $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$. On cherche alors les fonction ξ continues telles que $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\xi(x)\in\mathbb{R}^*$. Ce sont donc les fonctions continues qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}^*$.

10 Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. Notons A la matrice suggérée par l'énoncé. Cette matrice est triangulaire par blocs donc $\det(\mathrm{A})=ad-bc$. De plus

$$\det(f_\xi(\mathrm{A}))=\begin{vmatrix}\xi(a)&\xi(b)&\xi(0)&\cdots&\xi(0)\\\xi(c)&\xi(d)&\xi(0)&\cdots&\xi(0)\\\xi(c)&\xi(d)&&&\\\vdots&\vdots&&\mathrm{M}&\\\xi(c)&\xi(d)&&&\end{vmatrix}$$

où $M \in \mathcal{M}_{d-2}(\mathbb{R})$. En effectuant les opérations sur les lignes $L_i \leftarrow L_i - L_2$ pour $i \in [\![3, d]\!]$, on obtient

$$\det(f_\xi(A)) = \begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(b) & \xi(0) & \cdots & \xi(0) \\ \xi(c) & \xi(d) & \xi(0) & \cdots & \xi(0) \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & N & \\ 0 & 0 & & & \end{vmatrix} = (\xi(a)\xi(d) - \xi(b)\xi(c)) \det(N)$$

Ainsi la condition (▲) se traduit bien par $ad \neq bc \implies \xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$.

11 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$. Alors $\xi(x)\xi(1) \neq \xi(y)\xi(1)$ en prenant $(a, b, c, d) = (x, y, 1, 1)$ dans la question précédente car $x \times 1 \neq y \times 1$. Par ailleurs, en prenant $(a, b, c, d) = (1, 1, 0, 1)$, on obtient $\xi(1)^2 \neq \xi(1)\xi(0)$ car $1 \times 1 \neq 1 \times 0$. Notamment, $\xi(1) \neq 0$. On en déduit que $\xi(x) \neq \xi(y)$. La fonction ξ est donc injective. Puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

12 Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En prenant cette fois $(a, b, c, d) = (x, x, 0, 1)$, on obtient $\xi(x)\xi(1) \neq \xi(x)\xi(0)$ car $x \times 1 \neq x \times 0$. On en déduit que $\xi(x) \neq 0$.

13 **13.a** Supposons $\xi(0) \neq 0$. Posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \xi(1)\xi(x) - \xi(0)\xi(2)$. La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$ car ξ l'est. De plus, $f(0) = (\xi(1) - \xi(2))\xi(0)$ et $f(2) = (\xi(1) - \xi(0))\xi(2)$ donc

$$f(0)f(2) = (\xi(1) - \xi(2))(\xi(1) - \xi(0))\xi(0)\xi(2)$$

Comme ξ est strictement monotone, $(\xi(1) - \xi(2))(\xi(1) - \xi(0)) < 0$. De plus, ξ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle reste de même signe sur $\mathbb{R}_+$. On a donc $\xi(0)\xi(2) > 0$. On en déduit que $f(0)f(2) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0, 2[$ tel que $f(\alpha) = 0$ i.e. $\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha)$.

13.b D'après la condition (▲) et la question précédente, on a $0 \times 2 = 1 \times \alpha$ i.e. $\alpha = 0$, ce qui contredit $\alpha > 0$. On en déduit que $\xi(0) = 0$.

14 La question **10** nous dit que

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ \xi(a)\xi(d) = \xi(b)\xi(c) \implies ad = bc$$

Notamment,

$$\forall (a, b, d) \in \mathbb{R}^2,\ \xi(a)\xi(d) = \xi(b)^2 \implies ad = b^2$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(xy, x^2, y^2) \in I^3$. Alors

$$\xi(\eta(x^2))\xi(\eta(y^2)) = x^2y^2 = (xy)^2 = \xi(\eta(xy))^2$$

On en déduit donc que

$$\eta(x^2)\eta(y^2) = \eta(xy)^2$$

15 **15.a** On pose $M = \ln(\sup I)$ ($M = +\infty$ si $\sup I = +\infty$).
Tout d'abord, exp est continue sur $]-\infty, M[$ et $\exp(]-\infty, M[) =]0, \sup I[$. Mais $\xi(0) = 0$ donc $0 \in I$. Comme I est un intervalle, $]0, \sup I[= I \cap \mathbb{R}_+^*$.
Ensuite, η est continue sur $I \cap \mathbb{R}_+^*$ comme bijection réciproque d'une fonction continue et $\eta(I \cap \mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$ par hypothèse.
Enfin, ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, f est donc bien continue sur $]-\infty, M[$.
Soit $(x, y) \in \left]-\infty, \frac{M}{2}\right[$. Alors, en utilisant la question précédente,

$$2f(x + y) = 2\ln(\eta(e^{x+y})) = \ln(\eta(e^x e^y)^2) = \ln(\eta((e^x)^2)\eta((e^y)^2)) = \ln(\eta(e^{2x})) + \ln(\eta(e^{2y})) = f(2x) + f(2y)$$

15.b D'après la question **8**, f est une fonction affine. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in]-\infty, M[,\ f(t) = \ln(\eta(e^t)) = at + b = a\ln(e^t) + b$$

Mais on a vu que $\exp(]-\infty, M[) = I \cap \mathbb{R}_+^*$ donc

$$\forall x \in I \cap \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\eta(x)) = a\ln(x) + b$$

puis

$$\forall x \in I \cap \mathbb{R}_+^*,\ \eta(x) = e^b x^a$$

De plus, η est continue en 0 de sorte que $\lim_{x \to 0^+} \eta(x) = \eta(0) = 0$ donc $a > 0$. On a donc le résultat escompté en posant $K_1 = e^b$ et $\alpha_1 = a$.

15.c Comme à la question **14**, on montre que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(-xy, -x^2, -y^2) \in \mathrm{I}^3$

$$\eta(-xy)^2 = \eta(-x^2)\eta(-y^2)$$

Posons alors, $\theta(x) = -\eta(-x)$ pour $x \in (-\mathrm{I}) \cap \mathbb{R}_+^*$. η est strictement monotone comme bijection réciproque d'une fonction strictement monotone. De plus, $\eta(0) = 0$ et η est strictement positive sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+^*$ donc η est strictement croissante. On en déduit que η est strictement négative sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_-^*$ et donc que θ est strictement positive sur $(-\mathrm{I}) \cap \mathbb{R}_+^*$. On prouve de même que $g = \ln \circ \theta \exp$ est solution de $(\star)$ sur $]-\infty, \mathrm{M}'[$ où $\exp(]-\infty, \mathrm{M}'[) = (-\mathrm{I}) \cap \mathbb{R}_+^*$. Il existe donc des constantes $\mathrm{K}_2 < 0$ et $\alpha_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in (-\mathrm{I}) \cap \mathbb{R}_+^*,\ \theta(x) = -\mathrm{K}_2 x^{\alpha_2}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_-^*,\ \eta(x) = \mathrm{K}_2(-x)^{\alpha_2}$$

15.d η est strictement croissante et c'est la bijection réciproque de $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{I}$. On en déduit que $\lim\limits_{(\sup \mathrm{I})^-} \eta = +\infty$ et $\lim\limits_{(\inf \mathrm{I})^+} \eta = -\infty$. Les expressions de η sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ trouvées aux questions précédentes imposent alors que $\sup \mathrm{I} = +\infty$ et $\inf \mathrm{I} = -\infty$. Ainsi $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ car I est un intervalle.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question **14**,

$$\xi(x \times 1)^2 = \xi(x^2)\xi(1^2) \qquad \text{et} \qquad \xi(x \times (-1))^2 = \xi(x^2)\xi((-1)^2)$$

On en déduit que $\xi(x)^2 = \xi(-x)^2$. Mais comme ξ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$, $\xi(x) = -\xi(-x)$. ξ est bien impaire.

16 Comme ξ est strictement monotone et nulle en 0, ξ est soit strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, soit strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.
Le premier cas a déjà été traité. Il existe $\mathrm{K} > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \eta(y) = \mathrm{K}y^\alpha$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \xi(x) = \mathrm{C}x^\beta$$

avec $\mathrm{C} = \dfrac{1}{\mathrm{K}^{1/\alpha}} \neq 0$ et $\beta = \dfrac{1}{\alpha} > 0$.
Dans le second cas, $-\xi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{J}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie la condition $(\blacktriangle)$. Sa bijection réciproque θ est alors strictement positive sur $\mathrm{J} \cap \mathbb{R}_+^*$. On montre à nouveau que $\mathrm{J} = \mathbb{R}$ et que $-\xi$ est impaire de sorte que ξ est également impaire. De plus, il existe $\mathrm{K} > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \theta(y) = \mathrm{K}y^\alpha$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \xi(x) = \mathrm{C}x^\beta$$

avec $\mathrm{C} = -\dfrac{1}{\mathrm{K}^{1/\alpha}} \neq 0$ et $\beta = \dfrac{1}{\alpha} > 0$.

17 La matrice A_λ est symétrique réelle donc diagonalisable. La matrice $\mathrm{A}_\lambda - (\lambda-1)\mathrm{I}_d$ ne comporte que des 1 donc elle est de rang 1. Ainsi $\lambda - 1$ est une valeur propre de A_λ de multiplicité $d-1$. Puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{A}_\lambda) = d\lambda$, la seconde valeur prore de A_λ est $d\lambda - (d-1)(\lambda-1) = \lambda + d - 1$ et elle est de multiplicité 1. Ainsi $\det(\mathrm{A}_\lambda) = (\lambda-1)^{d-1}(\lambda+d-1)$.

18 On montre comme à la question précédente que

$$\det(f_\xi(\mathrm{A}_\lambda)) = (\xi(\lambda) - \xi(1))^{d-1}(\xi(\lambda) + (d-1)\xi(1))$$

ξ est impaire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\xi(x) = \mathrm{C}x^\beta$ avec $\mathrm{C} \neq 0$ et $\beta > 0$. Ainsi en prenant $\lambda = -(d-1)^{1/\beta}$, $\det(f_\xi(\mathrm{A}_\lambda)) = 0$. On en déduit que $\det(\mathrm{A}_\lambda) = 0$ donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -(d-1)$. Puisque $\lambda < 0$, on a nécessairement $-(d-1)^{1/\beta} = -(d-1)$. Notamment si $d \geq 3$, $\beta = 1$ puis $\xi(x) = \mathrm{C}x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, les fonctions $\xi\colon x \mapsto \mathrm{C}x$ avec $\mathrm{C} \neq 0$ vérifient bien la condition $(\blacktriangle)$.
Dans le cas $d = 2$, on vérifie que toutes les fonctions ξ impaires, continues et telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\xi(x) = \mathrm{C}x^\beta$ avec $\mathrm{C} \neq 0$ et $\beta > 0$ conviennent. Remarquons alors que $\xi(xy) = \xi(x)\xi(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (distinguer suivant les signes de x et y). Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Si $\det(f_\xi(\mathrm{A})) = 0$, alors $\xi(a)\xi(d) = \xi(b)\xi(c)$ donc $\xi(ad) = \xi(bc)$ puis $ad = bc$ par injectivité de ξ. Ainsi $\det(\mathrm{A}) = 0$.