Réduction algébrique

Polynômes annulateurs

Solution 1

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et M un vecteur propre associé. Alors $\mathrm{M} + \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n = \lambda\mathrm{M}$ puis en considérant la trace des deux membres, $(n+1)\,\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathrm{M})$. Si $\lambda = n+1$ ou $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$. Si $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$ alors $\mathrm{M} = \lambda\mathrm{M}$ et donc $\lambda = 1$. Ainsi $\mathrm{Sp}(u) \subset \{1, n+1\}$.
Déterminons les sous-espaces propres associés à ces potentielles valeurs propres. Clairement, le sous-espace associé à la valeur propre 1 est l'hyperplan des matrices de traces nulles. De plus, I_n est clairement un vecteur propre associé à la valeur propre $n+1$ donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $n+1$ est $\mathrm{vect}(\mathrm{I}_n)$ puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> **Remarque.** On constate que u est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> **Remarque.** Si $n = 1$, 1 n'est en fait pas valeur propre puisqu'alors le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle est le sous-espace nul.

Solution 2

1. Soit A une matrice vérifiant la condition de l'énoncé. Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$ annule A et est scindé à racines simples : A est donc diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{1, 2\}$.
   - Si la seule valeur propre de A est 1, alors $\mathrm{A} = \mathrm{I}_2$.
   - Si la seule valeur propre de A est 2, alors $\mathrm{A} = 2\mathrm{I}_2$.
   - Si A admet 1 et 2 pour valeurs propres, alors il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$ avec $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Réciproquement les matrices I_2, $2\mathrm{I}_2$ et PBP^{-1} avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ conviennent.
2. Soit A une matrice vérifiant la condition de l'énoncé. Le polynôme $\mathrm{X}^3 - 8\mathrm{X}^2 + 21\mathrm{X} - 18 = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)^2$ annule A. D'après le lemme des noyaux, $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_2)^2$.
   - Si $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2) = 2$, alors $\mathrm{A} = 2\mathrm{I}_2$.
   - Si $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_2)^2 = 1$, alors il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$ avec $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   - Si $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)^2 = 2$, alors le polynôme $(\mathrm{X}-3)^2$ annule A : A est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{3\}$. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$.

   Réciproquement, les matrices ci-dessus conviennent.

   > **Remarque.** On peut en fait montrer qu'on peut se ramener à $a = 1$ dans le dernier cas.

Solution 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M}^3 - \mathrm{M}^2 - \mathrm{M} - 2\mathrm{I}_n = 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2 = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-j)(\mathrm{X}-\overline{j})$ est un polynôme annulateur de M. On en déduit que $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \{2, j, \overline{j}\}$. De plus, P est simplement scindé donc M est diagonalisable.
Notons p, q, r les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - 2\mathrm{I}_n)$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - j\mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - \overline{j}\mathrm{I}_n)$. On a donc $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 2p + qj + r\overline{j} = 0$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on en déduit $2p - \frac{q}{2} - \frac{r}{2} = 0$ et $q - r = 0$ puis $2p = q = r$. Ainsi $n = p + q + r = 5p$ est un multiple de 5.

On peut alors affirmer que M est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $D = \operatorname{diag}(2, j, j, \bar{j}, \bar{j})$.
Réciproquement soit $n \in \mathbb{N}^*$ un multiple de 5 et considérons une matrice M semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $D = \operatorname{diag}(2, j, j, \bar{j}, \bar{j})$. Alors $\operatorname{tr}(M) = \frac{n}{5}\operatorname{tr}(D) = 0$. De plus, P(M) est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $P(D) = \operatorname{diag}(P(2), P(j), P(j), P(\bar{j}), P(\bar{j})) = \operatorname{diag}(0, 0, 0, 0, 0)$. On a donc bien $P(M) = 0$.

> **Remarque.** Si n n'est pas un multiple de 5, il n'existe pas de matrice vérifiant les conditions de l'énoncé.

Solution 4

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Alors $X^5 - X^2 = X^2(X^3 - 1)$ est un polynôme annulateur de M. On en déduit que $\operatorname{Sp}(M) \subset \{0, 1, j, \bar{j}\}$. Notons $m_0, m_1, m_j, m_{\bar{j}}$ les multiplicités respectives (éventuellement nulles) de $0, 1, j, \bar{j}$. Alors

$$0m_0 + m_1 + jm_j + \bar{j}m_{\bar{j}} = \operatorname{tr}(M) = n$$

En considérant la partie réelle, on obtient

$$m_1 - \frac{1}{2}m_j - \frac{1}{2}m_{\bar{j}} = n$$

Or $m_1 \leq n$, $m_j \geq 0$ et $m_{\bar{j}} \geq 0$ donc $m_1 = n$ et $m_j = m_{\bar{j}} = 0$. Par ailleurs

$$m_0 + m_1 + m_j + m_{\bar{j}} = n$$

donc $m_0 = 0$. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de M. Par conséquent, M est inversible. Comme $M^5 - M^2 = 0$, $M^3 - I_n = 0$ en multipliant par M^{-2}. Par conséquent, $X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de M scindé à racines simples. On en déduit que M est diagonalisable. Comme 1 est sa seule valeur propre, $M = I_n$.
Réciproquement, I_n vérifie bien les conditions de l'énoncé : c'est donc l'unique matrice vérifiant les conditions de l'énoncé.

Solution 5

Puisque F est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme $u_{|F}$ induit par u. On remarque que P est aussi un polynôme annulateur de $u_{|F}$. Les polynômes $P_i^{\alpha_i}$ étant premiers entre eux deux à deux, le lemme des noyaux permet d'affirmer que $F = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(u_{|F})$. Or pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\operatorname{Ker} P_i(u_{|F}) = F \cap \operatorname{Ker} P_i(u) = F \cap N_i$. Ainsi $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F \cap N_i$.

Solution 6

On remarque que $C^3 - C^2 - 3C = 0$. Ainsi $X^3 - X^2 - 3X = X(X^2 - X - 3)$ est un polynôme scindé à racines simples (le polynôme de degré 2 n'admet évidemment pas 0 pour racine et est de disciminant strictement positif). Par conséquent C est diagonalisable et donc semblable à une matrice diagonale D. On voit alors aisément que $A = 3C - C^2$ est semblable à la matrice diagonale $3D - D^2$ et que $B = C^2 - 2C$ est semblable à la matrice diagonale $D^2 - 2D$. A et B sont donc diagonalisables.

Solution 7

Comme $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$, 0 est racine simple de P. Il existe donc Q non divisible par X tel que $P = XQ$. Comme X est irréductible, X et Q sont premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux,

$$E = \operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$$

Comme $XQ = P$, $Q(f) \circ f = P(f) = 0$ donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} Q(f)$. Par ailleurs, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = Q(0) + XR$. Ainsi

$$Q(f) = Q(0)\operatorname{Id}_E + f \circ R(f)$$

Si on se donne $x \in \operatorname{Ker} Q(f)$, on a donc $Q(0)x + f \circ R(f)(x) = 0_E$ et donc $x = -\frac{1}{Q(0)}f(R(f)(x)) \in \operatorname{Im} f$ car $Q(0) \neq 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} Q(f) \subset \operatorname{Im} f$ puis $\operatorname{Ker} Q(f) = \operatorname{Im} f$ par double inclusion, ce qui permet de conclure.

> **Remarque.** Si on suppose E de dimension finie, on peut se passer de montrer l'inclusion $\operatorname{Ker} Q(f) \subset \operatorname{Im} f$. En effet, on sait déjà que
>
> $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} Q(f)$$

et le théorème du rang montre que

$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$$

Ainsi $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, \mathrm{Q}(f)$ et, comme $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, \mathrm{Q}(f)$, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, \mathrm{Q}(f)$, ce qui permet de conclure.

Solution 8

$\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X} - j)(\mathrm{X} - \overline{j})$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples. Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \subset \{0, j, \overline{j}\}$ et A est diagonalisable. Notons $m_0, m_j, m_{\overline{j}}$ les multiplicités (éventuellement nulles) de 0, j, $\overline{j}$. Comme A est à coefficients réels, il en est de même de son polynôme caractéristique de sorte que $m_j = m_{\overline{j}}$. De plus, $m_0 + m_j + m_{\overline{j}} = n$ donc $m_0 = n - 2m_j$. Comme A est diagonalisable, $m_0 = \dim \mathrm{Ker}\, \mathrm{A}$. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}\, \mathrm{A} = n - \dim \mathrm{Ker}\, \mathrm{A} = 2m_j$. Le rang de A est donc bien pair.

Solution 9

Notons $u : \mathrm{P} \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$. La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que $u - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]}$ est nilpotent. L'indice de nilpotence est inférieur à $\dim \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}] = n$ donc $(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]})^n = 0$. Ceci donne par la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k = 0$$

Puisqu'on a clairement $u^k(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k)$, on en déduit le résultat demandé.

Solution 10

1. **a.** Remarquons que pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}_2$, $u(\mathrm{M})_1 = \mathrm{M}_2$ et $u(\mathrm{M})_2 = \mathrm{M}_1$.
Soient $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{A}') \in \mathrm{E}_2^2$. Alors

$$u(\lambda\mathrm{A} + \lambda'\mathrm{A}')_1 = (\lambda\mathrm{A} + \lambda\mathrm{A}')_2 = \lambda\mathrm{A}_2 + \lambda'\mathrm{A}'_2 = \lambda u(\mathrm{A})_1 + \lambda u(\mathrm{A})_1 u(\lambda\mathrm{A} + \lambda'\mathrm{A}')_2 \quad = (\lambda\mathrm{A} + \lambda\mathrm{A}')_1 = \lambda\mathrm{A}_1 + \lambda'\mathrm{A}'_1 = \lambda u(\mathrm{A})_2 + \lambda u(\mathrm{A})_2$$

Par conséquent, $u(\lambda\mathrm{A} + \lambda'\mathrm{A}') = \lambda u(\mathrm{A}) + \lambda' u(\mathrm{A}')$.
u est bien linéaire : c'est un endomorphisme de E_2.

b. D'après la remarque de la question précédente, $u(\mathrm{K}_1) = \mathrm{K}_3$, $u(\mathrm{K}_2) = \mathrm{K}_4$, $u(\mathrm{K}_3) = \mathrm{K}_1$ et $u(\mathrm{K}_4) = \mathrm{K}_2$. On en déduit que

$$\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul montre que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_4$ i.e. $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2}$. u est bien un automorphisme de E_2.

c. Puisque $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2}$, u est une symétrie.

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1,\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + \mathrm{L}_2 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2}) = \mathrm{vect}(\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_4)$. De même,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{M} + \mathrm{I}_4) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1,\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_2 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2}) = \mathrm{vect}(\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_4)$. Finalement, u est la symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_4)$ parallélement à $\mathrm{vect}(\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_4)$.

2. Notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de E_n. Dans le cas $n = 2$, par antisymétrie du déterminant,

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(u(A)_1, u(A)_2) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_2, A_1) = -\det_{\mathcal{B}_c}(A_1, A_2) = -\det(A)$$

Dans le cas $n = 3$

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(u(A)_1, u(A)_2, u(A)_3) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_2 + A_3, A_1 + A_3, A_1 + A_2)$$

Par multilinéarité et caractère alterné du déterminant,

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_2, A_3, A_1) + \det_{\mathcal{B}_c}(A_3, A_1, A_2)$$

Enfin, puisque les 3-cycles sont de signature 1, le caractère antisymétrique du déterminant donne

$$\det(u(A)) = 2\det_{\mathcal{B}_c}(A_1, A_2, A_3) = 2\det(A)$$

3. On note $S = \sum_{k=1}^{n} A_k$. Ainsi

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(S - A_1, \dots, S - A_n)$$

A nouveau, le caractère multilinéaire et alterné du déterminant donne

$$\begin{aligned}\det(u(A)) &= \det_{\mathcal{B}_c}(-A_1, \dots, -A_n) + sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_c}(-A_1, \dots, -A_{k-1}, S, -A_{k+1}, \dots, -A_n)\\ &= (-1)^n \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_n) + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, S, A_{k+1}, \dots, A_n)\end{aligned}$$

Encore une fois le caractère multilinéaire et alterné du déterminant donne

$$\det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, S, A_{k+1}, \dots, A_n) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, \sum_{i=1}^{n} A_i, A_{k+1}, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, A_i, A_{k+1}, \dots, A_n) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots$$

Finalement,

$$\det(u(A)) = (-1)^n \det(A) + (-1)^{n-1} n \det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(A)$$

4. **a.** Soit $A \in E_n$. Posons $B = u(A)$ et $C = u(B) = u^2(A)$. Alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ B_j = \left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) - A_j$$

et

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1, n]\!],\ C_j &= \sum_{k=1}^{n} B_k - B_j\\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{l=1}^{n} A_l\right) - A_k\right) - \sum_{k=1}^{n} A_k + A_j\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_l - 2\sum_{k=1}^{n} A_k + A_j \qquad = (n-2)\sum_{k=1}^{n} A_k + A_j = (n-2)(B_j + A_j) + A_j \quad = (n-2)u(A)_j + (n-1)A_j\end{aligned}$$

On en déduit que $u^2(A) = (n-2)u(A) + (n-1)A$. Ceci étant valable pour tout $A \in E_n$, $u^2 - (n-2)u + (n-1)\,\mathrm{Id}_{E_n} = 0$. Ainsi $X^2 - (n-2)X + (n-1) = (X+1)(X-(n-1))$ est un polynôme annulateur de u.

b. Comme $n \neq 0$, $n - 1 \neq -1$ et donc le polynôme $(X+1)(X-(n-1))$ est scindé à racines simples : u est diagonalisable.
Pour $A \in E_n$,

$$u(A) = -A \iff \forall j \in [\![1, n]\!],\ u(A)_j = -A_j \iff \sum_{k=1}^{n} A_k = 0$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est donc l'ensemble des matrices dont la somme des colonnes est nulle.

Soit A dans le sous-espace propre associé à la valeur propre $n - 1$. Alors, en posant $S = \sum_{k=1}^{n} A_k$,

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ S - A_j = (n-1)A_j$$

ou encore

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{A}_j = \frac{1}{n}\mathrm{S}$$

Toutes les colonnes de A sont donc égales. Inversement, on vérifie imédiattement que si toutes les colonnes de A sont égales, alors $u(\mathrm{A}) = (n-1)\mathrm{A}$. Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre $n-1$ est l'ensemble des matrices ayant toutes leurs colonnes égales.

> **Remarque.** On pourrait préciser que $\dim \mathrm{E}_{-1}(u) = n^2 - n$ et $\dim \mathrm{E}_{n-1}(u) = n$.

c. **i.** En raisonnant par blocs, les colonnes de AJ_n sont toutes égales à $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k$. On en déduit que les colonnes de AU_n sont celles de $u(\mathrm{A})$. Autrement dit, $\mathrm{AU}_n = u(\mathrm{A})$.

ii. Un calcul direct donne $\mathrm{J}_n^2 = n\mathrm{J}_n$ donc

$$\mathrm{U}_n^2 = \mathrm{J}_n^2 - 2\mathrm{J}_n + \mathrm{I}_n = n\mathrm{J}_n - 2\mathrm{J}_n + \mathrm{I}_n = n(\mathrm{U}_n + \mathrm{I}_n) - 2(\mathrm{U}_n + \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n = (n-2)\mathrm{U}_n + (n-1)\mathrm{I}_n$$

Ainsi pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{E}_n$,

$$u^2(\mathrm{A}) = u(\mathrm{A})\mathrm{U}_n = \mathrm{AU}_n^2 = (n-2)\mathrm{AU}_n + (n-1)\mathrm{A} = (n-2)u(\mathrm{A}) + (n-1)\mathrm{A}$$

On en déduit à nouveau que $u^2 - (n-2)u - (n-1) = 0$ i.e. que $\mathrm{X}^2 - (n-2)\mathrm{X} - (n-1)$ annule A.

> **Remarque.** L'exercice est vraiment mal posé. En remarquant que $u(\mathrm{A}) = \mathrm{AU}_n$, toutes les questions précédentes se traitent de manière beaucoup plus naturelle. Par exemple,
>
> $$\det(u(\mathrm{A})) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{U}_n)$$
>
> et $\det(\mathrm{U}_n)$ se calcule beaucoup plus facilement par opérations sur lignes ou colonnes.

Solution 11

---

1. Un calcul par blocs donne $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-i)(\mathrm{X}+i)$. Comme $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ est l'ensemble des racines de χ_A, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{0, i, -i\}$.
Enfin, χ_A est scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}$) donc A est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

2. Comme $\mathrm{X}^3 + \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-i)(\mathrm{X}+i)$ est un polynôme annulateur de M scindé à racines simples, M est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \{0, i, -i\}$. 0 ne peut être la seule valeur propre de M car sinon M serait semblable à la matrice nulle et donc nulle. De plus, comme M est à coefficients réels, χ_M l'est également de sorte que les valeurs propres non réelles de M sont conjuguées. Ainsi $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{0, i, -i\}$. On en déduit que M est bien semblable à D.

3. Comme A et M sont toutes deux semblables à D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, A et M sont également semblables l'une à l'autre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car la similitude est une relation d'équivalence.
Montrons que M est également semblable à A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Comme A est semblable à D, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{D}) = 2$ puis $\dim \mathrm{Ker}(u) = 1$ d'après le théorème du rang. Notons e_1 un vecteur directeur de la droite $\mathrm{Ker}(u)$.
Comme $\mathrm{X}^3 + \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1)$ est un polynôme annulateur de u et comme X et X^2+1 sont premiers entre eux, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Notons e_2 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $e_3 = u(e_2)$. Comme $u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ commute avec u, son noyau est stable par u de sorte que $e_3 = u(e_2) \in \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
Montrons que (e_2, e_3) est une base de $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Tout d'abord, $\dim \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(u) = 2$ donc il suffit de montrer que (e_2, e_3) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha e_2 + \beta e_3 = 0$ ou encore $\alpha e_2 + \beta u(e_2) = 0$. En appliquant u, on obtient $\alpha u(e_2) + \beta u^2(e_2) = 0$. Comme $e_2 \in \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, $u^2(e_2) = -u_2$ donc $\alpha e_3 - \beta e_2 = 0$. Ainsi $\begin{cases} \alpha e_2 + \beta e_3 = 0 \\ -\beta e_2 + \alpha e_3 = 0 \end{cases}$. En éliminant e_3, on obtient $(\alpha^2 + \beta^2)e_2 = 0$ et donc $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ puis $\alpha = \beta = 0$ car α et β sont réels. Ainsi (e_2, e_3) est bien libre et c'est une base de $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
Comme $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin, $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$ donc la matrice de u dans cette base est A. On en déduit que M est semblable à A.

Solution 12

Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} - 5$ est un polynôme annulateur de A. On étudie alors les variations de P sur $\mathbb{R}$. Puisque $\mathrm{P}' = 3\mathrm{X}^2 - 3 = 3(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\mathrm{P}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\mathrm{P}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Notamment, P possède une unique racine réelle $\alpha > 1$. Comme P est à coefficients réels, P possède également deux racines complexes non réelles conjuguées λ et $\overline{\lambda}$. Comme P annule A, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{\alpha, \lambda, \overline{\lambda}\}$. Notons m_α, m_λ et $m_{\overline{\lambda}}$ les multiplicités (éventuellement nulles) respectives de α, λ et $\overline{\lambda}$. Comme χ_A est à coefficients réels, $m_\lambda = m_{\overline{\lambda}}$. Comme P est scindé à racines simples (sur $\mathbb{C}$), A est trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$). Notamment

$$\det(\mathrm{A}) = \alpha^{m_\alpha}\lambda^{m_\lambda}\overline{\lambda}^{m_{\overline{\lambda}}} = \alpha^{m_\alpha}|\lambda|^{2m_\lambda} > 0$$

car $\alpha > 1 > 0$ et $|\lambda|^2 > 0$.

Diagonalisabilité

Solution 13

φ est clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on constate que $\varphi^4 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Ainsi $\mathrm{X}^4 - 1$ est un polynôme annulateur de φ. Par conséquent, $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$. On trouve que $\mathrm{E}_1(\varphi) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{E}_{-1}(\varphi) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$. Puisque

$$\dim \mathrm{E}_1(\varphi) + \dim \mathrm{E}_{-1}(\varphi) = 2 < 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

φ n'est pas diagonalisable.

Solution 14

1. Supposons $x \neq 0$ et soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}_x$. Alors
$$-\frac{1}{x}\mathrm{M}(\mathrm{M} + \mathrm{I}_n) = -\frac{1}{x}(\mathrm{M} + \mathrm{I}_n)\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$$
donc $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}^{-1} = -\frac{1}{x}(\mathrm{M} + \mathrm{I}_n)$.
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}_0$. Alors $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = 0$. Si M est inversible, alors, en multipliant par M^{-1}, $\mathrm{M} = -\mathrm{I}_n$ et $-\mathrm{I}_n$ est bien inversible. La seule matrice inversible de E_0 est $-\mathrm{I}_n$.

2. Remarquons que $\mathrm{P}_x = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + x$ est un polynôme annulateur de toutes les matrices de E_x.
Si le discriminant de P_x est strictement négatif i.e. $x > \frac{1}{4}$, alors les matrices de E_x ne possèdent pas de valeur propre réelle et ne sont donc pas diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Si le discriminant de P_x est strictement positif i.e. $x < \frac{1}{4}$, alors P_x est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples donc toutes les matrices de E_x sont diagonalisables.
Si $x = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}_{\frac{1}{4}} = \left(\mathrm{X} + \frac{1}{2}\right)^2$. On vérifie que $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{E}_{\frac{1}{4}}$ mais n'est pas diagonalisable.
Ainsi E_x ne contient que des matrices diagonalisables si et seulement si $x < \frac{1}{4}$.

3. Remarquons que $P_{-2} = (X-1)(X+2)$. Les spectres des matrices de E_{-2} sont inclus dans $\{1, -2\}$. Soit $M \in E_{-2}$. Notons m_1 et m_{-2} les multiplicités (éventuellement nulles) des valeurs propres 1 et -2.
Comme les matrices de E_{-2} sont diagonalisables, $m_1 + m_{-2} = n$ et $m_1 - 2m_{-2} = \operatorname{tr}(M)$. Ainsi $\operatorname{tr}(M) = n - 3m_{-2}$ puis

$$T \subset \{n-3k,\ k \in [\![0,n]\!]\}$$

Réciproquement, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $M = \begin{pmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & -2I_k \end{pmatrix} \in E_{-2}$ et $\operatorname{tr}(M) = n - 3k \in T$. Ainsi

$$T = \{n-3k,\ k \in [\![0,n]\!]\}$$

Solution 15

---

1. On a $f = \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + 2g$ avec $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$. Comme $\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et g sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f en est un également.

2. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = 3M$$
$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = -M$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$
$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer (détailler si cela ne semble pas clair) que

$$\operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$
$$\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

On en déduit que f est diagonalisable, que ses valeurs propres sont 3 et -1 et que les sous-espaces propres associés respectifs sont $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. Déjà répondu à la question précédente.

4. Comme la trace et le déterminant d'un endomorphisme trigonalisable sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité et comme f est diagonalisable,

$$\operatorname{tr}(f) = 3 \cdot \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + (-1) \cdot \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = 3\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n(n+2)$$
$$\det(f) = 3^{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \cdot (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Solution 16

---

1. On constate que

$$(\lambda + \mu)M = \lambda^2 A + \mu^2 B + \lambda\mu(A+B) = M^2 + \lambda\mu I_p$$

ou encore

$$M^2 - (\lambda+\mu)M + \lambda\mu I_p = 0$$

Comme $\lambda\mu \neq 0$,

$$\frac{1}{\lambda\mu} M\left((\lambda+\mu)I_p - M\right) = I_p$$

Ceci prouve que M est inversible et que

$$M^{-1} = \frac{1}{\lambda\mu}\left((\lambda+\mu)I_p - M\right)$$

2. A partir des deux premières égalités, on obtient $(\lambda-\mu)\mathrm{A} = \mathrm{M} - \mu\mathrm{I}_p$. Comme $\lambda \neq \mu$, on peut affirmer que $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\lambda-\mu}(\mathrm{M}-\mu\mathrm{I}_p)$.

3. Un calcul donne
$$\mathrm{A}^2 = \frac{1}{(\lambda-\mu)^2}(\mathrm{M}^2 - 2\mu\mathrm{M} + \mu^2\mathrm{I}_p)$$
Or on a vu à la première question que $\mathrm{M}^2 = (\lambda+\mu)\mathrm{M} - \lambda\mu\mathrm{I}_p$ donc
$$\mathrm{A}^2 = \frac{1}{(\lambda-\mu)^2}\left((\lambda-\mu)\mathrm{M} - (\lambda\mu-\mu^2)\mathrm{I}_p\right) = \frac{\lambda-\mu}{(\lambda-\mu)^2}(\mathrm{M}-\mu\mathrm{I}_p) = \mathrm{A}$$
Ainsi A est une matrice de projecteur.
De plus, comme $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$,
$$\mathrm{B}^2 = (\mathrm{I}_p - \mathrm{A})^2 = \mathrm{I}_p - 2\mathrm{A} + \mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_p - \mathrm{A} = \mathrm{B}$$
donc B est une matrice de projecteur.

4. D'après la première question, $\mathrm{X}^2 - (\lambda+\mu)\mathrm{X} + \lambda\mu = (\mathrm{X}-\lambda)(\mathrm{X}-\mu)$ est un polynôme annulateur de M. Comme $\lambda \neq \mu$, ce polynôme est scindé à racines simples donc M est diagonalisable. On peut également affirmer que $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \{\lambda,\mu\}$.
Cette inclusion peut être stricte. Par exemple, si $\mathrm{A} = \mathrm{I}_p$ et $\mathrm{B} = 0$, alors $\mathrm{M} = \lambda\mathrm{I}_p$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{\lambda\}$. De même, si $\mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{B} = \mathrm{I}_p$, alors $\mathrm{M} = \mu\mathrm{I}_p$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{\mu\}$.

Solution 17

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(v)$. On montre classiquement que $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Ker}(v - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est stable par u : u induit donc un endomorphisme u_λ de E_λ. Puisque u est diagonalisable, u annule un polynôme scindé à racines simples à coefficients dans $\mathbb{K}$. A fortiori, u_λ annule ce même polynôme et est donc également diagonalisable. Notons $\mathcal{B}_\lambda$ une base de E_λ dans laquelle la matrice de u_λ est diagonale. Notons alors $\mathcal{B}$ la juxtaposition des bases $\mathcal{B}_\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Comme v est diagonalisable, E est la somme directe des sous-espaces propres de v et $\mathcal{B}$ est donc une base de E. Par construction, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale et celle de v l'est évidemment puisque $\mathcal{B}$ est la juxtaposition de bases de sous-espaces propres de v.

Solution 18

Méthode n°1 : A est diagonalisable donc il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Par conséquent, $\mathrm{A}^\top = (\mathrm{P}^{-1})^\top\mathrm{D}^\top\mathrm{P}^\top = (\mathrm{P}^\top)^{-1}\mathrm{D}\mathrm{P}^\top$. Ainsi $\mathrm{A}^\top$ est également diagonalisable.
Méthode n°2 : A est diagonalisable donc admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples. Alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}^\top) = \mathrm{P}(\mathrm{A})^\top = 0$ donc $\mathrm{A}^\top$ est également diagonalisable.

Solution 19

1. Notons (e_1, e_2, e_3) la base dans laquelle la matrice de g est G. On a $g(e_1) = e_2$ et $g(e_2) = e_3$ donc $(e_1, e_2, e_3) = (e_1, g(e_1), g^2(e_1))$ est une base de E et g est cyclique. On trouve sans peine
$$\chi_g = \mathrm{X}^3 - 6\mathrm{X}^2 + 11\mathrm{X} - 6 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)$$
Comme χ_g est simplement scindé, g est diagonalisable.

2. Un endomorphisme cyclique n'est pas tojours diagonalisable. Considérons par exemple un endomorphisme f nilpotent d'indice $n-1$. Il existe alors $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. On montre alors classiquement que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Ainsi f est bien cyclique mais f n'est évidemment pas diagonalisable dès que $n \geq 2$.

3. Soit f un endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont distinctes deux à deux. Il existe donc une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. De plus, en notant λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i, les λ_i sont deux à deux distincts. Notons $x_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^n e_i$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^k(x_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i^k e_i$. La matrice de la famille $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est une matrice de Vandermonde associée au n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme les λ_i dont distincts deux à deux, cette matrice est inversible et la famille $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Ainsi f est cyclique.

4. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. On montre que l'ensemble $\{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(f)(x_0) = 0_\mathrm{E}\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Puisque les idéaux de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ sont principaux, cet idéal est engendré par un polynôme π_{f,x_0}. Puisque $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, on a nécessairement $\deg \pi_{f,x_0} = n$. Mais π_f appartient aussi à l'idéal sus-mentionné donc π_{f,x_0} divise π_f. Ainsi $n = \deg \pi_{f,x_0} \le \deg \pi_f \le n$ puis $\deg \pi_f = n$. Comme f est diagonalisable, $\deg \pi_f = \operatorname{card} \operatorname{Sp}(f)$. On en déduit que $\operatorname{card} \operatorname{Sp}(f) = n$ et donc que les valeurs propres de f sont deux à deux distinctes.

Solution 20

1. On montre par exemple aisément que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{G}$. Puisque le morphisme de groupe $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{G} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^n \end{array}\right.$ ne peut être injectif puisque $\mathbb{Z}$ est infini et que G est fini. Son noyau contient donc un entier non nul n tel que $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_2$. On peut même supposer n positif quitte à le changer en son opposé.
Puisque le polynôme $\mathrm{X}^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annule M, M est diagonalisable. On peut également ajouter que ses valeurs propres sont des racines de l'unité et en particulier des complexes de module 1.

Si M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ses valeurs propres ne peuvent être que 1 ou -1. Dans ce cas, M est semblable à I_2, $-\mathrm{I}_2$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Dans tous les cas, $\mathrm{M}^6 = \mathrm{I}_2$.
Si M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, elle l'est quand même dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont des complexes de module 1 conjugués puisque M est à coefficients réels. M est donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Puisque la trace est un invariant de similitude, $2\cos\theta = \operatorname{tr}(\mathrm{M}) \in \mathbb{Z}$. Puisque cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, $\cos\theta \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$.

- Si $\cos\theta = \pm 1$, $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \pm 1$ et on est ramené au cas précédent (en fait, M serait diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et on a supposé que ce n'était pas le cas).
- Si $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, alors $\theta \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Il est alors clair que $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.
- Si $\cos\theta = \dfrac{-1}{2}$, alors $\theta \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$. Il est alors clair que $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.
- Si $\cos\theta = 0$, alors $\theta \equiv \pm\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. Il est alors clair que $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.

Solution 21

1. Puisque $\mathrm{X}^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{-1, 1\}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Ainsi pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = \pm 1$ et, a fortiori, $\lambda_k \equiv 1[2]$. Puisque $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) \equiv n[2]$.

2. Les valeurs propres de A ne peuvent pas toutes être égales à 1 ou -1 sinon, A serait semblable à I_n ou $-\mathrm{I}_n$ et donc égale à I_n ou $-\mathrm{I}_n$.
En notant a le nombre de valeurs propres égales à 1 et b le nombre de valeurs propres égales à -1. On a donc $a + b = n$, $1 \le a \le n-1$ et $1 \le b \le n-1$. Ainsi $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) = a - b$ est compris entre $-n+2$ et $n-2$ i.e. $|\operatorname{tr}(\mathrm{A})| \le n-2$.

Solution 22

1. Remarquons déjà que

$$\det(\mathrm{M}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \mathrm{M}_{\sigma(k),k} \in \mathbb{Z}$$

Supposons que $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Alors $\det(\mathrm{M})\det(\mathrm{M}^{-1}) = \det(\mathrm{M}\mathrm{M}^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1$. Mais d'après la remarque initiale, $\det(\mathrm{M})$ et $\det(\mathrm{M}^{-1})$ sont entiers. Ainsi $\det(\mathrm{M}) = \pm 1$ i.e. $|\det \mathrm{M}| = 1$.
Supposons que $|\det(\mathrm{M})| = 1$. Tout d'abord, $\det(\mathrm{M}) \neq 0$ donc $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus, d'après la formule de la comatrice, $\mathrm{M}^{-1} = \pm \operatorname{com}(\mathrm{M})^\top$. Les cofacteurs de M sont, au signe près, des déterminants de matrices extraites de M : ce sont donc des entiers toujours

d'après notre remarque initiale. Ainsi M^{-1} est à coefficients entiers et $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
Enfin, $\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ puisque $\mathrm{I}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $\det(\mathrm{I}_n) = 1$. Soit $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})^2$. Alors $\mathrm{MN} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $|\det(\mathrm{MN})| = |\det(\mathrm{M})||\det(\mathrm{N})| = 1$ donc $\mathrm{MN} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Enfin, si $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors $\mathrm{M}^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ par définition de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est donc bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2. Comme $\mathrm{X}^d - 1$ est simplement scindé dans $\mathbb{C}$ et annule M, M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. De plus, ses valeurs propres sont des racines de l'unité : elles sont donc notamment de module 1. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^k = \frac{1}{3^k}\mathrm{P}(\mathrm{D} - \mathrm{I}_n)^k\mathrm{P}^{-1}$$

Par inégalité triangulaire, les coefficients diagonaux de $(\mathrm{D} - \mathrm{I}_n)$ sont de module inférieure ou égale à 2. On en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{3^k}(\mathrm{D} - \mathrm{I}_n)^k = 0$$

Enfin, l'application $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{PXP}^{-1}$ est linéaire donc continue puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{A}^k = 0$.

3. Considérons l'application φ qui à une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ associe la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ dont les coefficients sont les classes de ceux de M dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. La compatibilité de la congruence avec la somme et le produit permet d'affirmer que φ est un morphisme d'anneaux. Le même argument permet aussi d'affirmer que, pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det(\varphi(\mathrm{M})) = \overline{\det(\mathrm{M})}$ (utiliser la formule définissant le déterminant).
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Notons d son cardinal. On va montrer que l'application φ induit un morphisme injectif de G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{G}$. Notamment, $|\det(\mathrm{M})| = 1$ d'après la première question. Alors $\det(\varphi(\mathrm{M})) = \pm\overline{1} \neq \overline{0}$ donc $\varphi(\mathrm{M}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. On a donc bien $\varphi(\mathrm{G}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. De plus, $\varphi(\mathrm{MN}) = \varphi(\mathrm{M})\varphi(\mathrm{N})$ pour tout $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathrm{G}^2$ d'après une remarque précédente. On en déduit que φ induit bien un morphisme de groupe de G dans $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\varphi(\mathrm{M})$ soit le neutre du groupe $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Ceci signifie que les coefficients de $\mathrm{M} - \mathrm{I}_n$ dont des multiples de 3 donc $\mathrm{A} = \frac{1}{3}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_n)$ est à coefficients entiers. Comme d est l'ordre de G, $\mathrm{M}^d = \mathrm{I}_n$ et la question précédente permet d'affirmer que (A^k) converge vers 0. Comme A est à coefficients entiers, la suite (A^k) est nulle à partir d'un certain rang i.e. A est nilpotente. Mais on a vu à la question précédente que A était diagonalisable donc A est nulle puis $\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.
En conclusion, φ induit bien un morphisme injectif de G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Notamment,

$$d = \operatorname{card} \mathrm{G} \leq \operatorname{card} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \leq \operatorname{card} \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 3^{n^2}$$

Solution 23

---

1. Notons $u_1, \dots, u_p$ les endomorphismes canoniquement associés à $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_p$.

a. Les sous-espaces propres de u_1 sont stables par u_2 car u_1 et u_2 commutent. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)$. Comme u_2 est diagonalisable, il induit un endomorphisme diagonalisable de $\mathrm{E}_\lambda(u_1)$. Notons $\mathcal{B}_\lambda$ une base de diagonalisation de cet endomorphisme. Comme $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u_1)} \mathrm{E}_\lambda(u_1)$, la concaténation des bases $\mathcal{B}_\lambda$ est une base de $\mathcal{B}_\lambda$. On vérifie sans peine que c'est une base de diagonalisation commune de u_1 et u_2. On en déduit alors que A_1 et A_2 sont simultanément diagonalisables.

b. On note $\mathrm{HR}(p)$ l'assertion :

> si $u_1, \dots, u_p$ sont des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux, alors ils sont simultanément diagonalisables.

$\mathrm{HR}(1)$ est évidemment vraie. Supposons $\mathrm{HR}(p)$ vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Soient alors $u_1, \dots, u_{p+1}$ des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{p+1})$. Alors $\mathrm{E}_\lambda(u_{p+1})$ est stable par $u_1, \dots, u_p$. Les endomorphismes de $\mathrm{E}_\lambda(u_{p+1})$ induits par $u_1, \dots, u_p$ sont encore diagonalisables et commutent deux à deux. On peut ainsi trouver une base commune $\mathcal{B}_\lambda$ de diagonalisation de ces endomorphismes induits. A nouveau, la concaténation des base $\mathcal{B}_\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{p+1})$ est une base commune de diagonalisation de $u_1, \dots, u_{p+1}$ de sorte que $\mathrm{HR}(p + 1)$ est vraie. Ainsi $\mathrm{HR}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrons que G est commutatif. Remarquons que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{G}^2$. Alors $\mathrm{AB} = (\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{BA}$. Comme le polynôme simplement scindé $\mathrm{X}^2 - 1$ annule tous les éléments de G, ceux-ci sont tous diagonalisables. On peut de plus préciser que le spectre de chaque élement de G est inclus dans $\{-1, 1\}$.

Si l'on considère une partie finie F de G de cardinal p, la question précédente montre qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ diagonalisant tous les éléments de F. L'application $M \in A \mapsto P^{-1}MP$ est une injection de A dans le groupe D_n des matrices diagonales à coefficients diagonaux égaux à ± 1. Ainsi $p \le 2^n$.
Ainsi G est fini de cardinal inférieur à 2^n.

> **Remarque.** On peut préciser la réponse même si ce n'est pas utile pour la question suivante. Il existe une matrice P diagonalisant tous les éléments de G. Le morphisme $M \in G \mapsto P^{-1}MP$ est une injection de G dans D donc G est isomorphe à un sous-groupe de D. Son cardinal divise donc 2^n. Il existe ainsi $k \in [\![0, p]\!]$ tel que $\operatorname{card} G = 2^k$.

3. Notons S_n l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = I_n$. On définit de la même manière S_m. Supposons qu'il existe un isomorphisme φ de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $GL_m(\mathbb{C})$. On vérifie sans peine que φ induit une bijection de S_n sur S_m. Les sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$ inclus dans S_n sont donc isomorphes aux sous-groupes de $GL_m(\mathbb{C})$ inclus dans S_m. Notamment, le sous-groupe D_n défini dans la question précédente est isomorphe à un sous-groupe de $GL_m(\mathbb{C})$ inclus dans S_m. Ainsi S_m contient un sous-groupe d'ordre 2^n. D'après la question précédente, on a donc $2^n \le 2^m$. Mais de manière symétrique $2^m \le 2^n$ donc $n = m$.

Trigonalisabilité

Solution 24

On fait l'hypothèse de récurrence $HR(n)$ suivante :

> Si u et v sont deux endomorphismes trigonalisables d'un espace vectoriel E de dimension n tels que $u \circ v = v \circ u$, alors u et v trigonalisent dans une base commune.

Initialisation : $HR(1)$ est trivialement vraie puisque, dans ce cas, la matrice de tout endomorphisme dans une base quelconque est triangulaire supérieur.
Hérédité : Supposons $HR(n)$ pour un certain $n \ge 1$. Soient alors E un espace vectoriel de dimension $n+1$ et u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrons tout d'abord que u et v possèdent un vecteur propre commun. Puisque v est trigonalisable, v possède au moins une valeur propre λ. On montre alors classiquement que le sous-espace propre $E_\lambda = \operatorname{Ker}(v - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par u. u induit un endomorphisme u_λ de E_λ. Comme u est trigonalisable, u annule un polynôme scindé à coefficients dans $\mathbb{K}$. A fortiori, u_λ annule ce même polynôme et est donc également trigonalisable. Par conséquent, u_λ possède une valeur propre et donc un vecteur propre e_1. Ce vecteur e_1 est donc également un vecteur propre de u et un vecteur propre de v puisqu'il appartient au sous-espace propre E_λ de v.
Comme $e_1 \ne 0_E$, on peut compléter ce vecteur en une base $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ de E. Les matrice de u et v dans cette base sont respectivement de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

avec $A', B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $E' = \operatorname{vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ et soient u' et v' les endomorphismes de E' de matrices respectives A' et B' dans la base $(e_2, \dots, e_{n+1})$ de E'.
On montre alors que si P est un polynôme, alors

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} P(\lambda) & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P(A') & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Comme u est trigonalisable, u annule un polynome scindé à coefficients dans $\mathbb{K}$ et donc A annule ce même polynôme. La remarque précédente montre que A' annule également ce polynôme : A' est donc trigonalisable et u' également. On montre de même que v' est trigonalisable.
Puisque u et v commutent, A et B commutent, ce qui entraîne la commutativité de A' et B' après un calcul par blocs et enfin la commutativité de u' et v'. On peut alors appliquer $HR(n)$: il existe donc une base $(e'_2, \dots, e'_{n+1})$ de E' dans laquelle les matrices de u' et v' sont triangulaires supérieures. Il suffit alors de vérifier que les matrices de u et v dans la base $(e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$ de E sont également triangulaires supérieures.
Conclusion : Par récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \ge 1$.

Solution 25

Remarquons tout d'abord que pour $S \in GL_n(\mathbb{C})$, $\overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$.
Commençons par le sens le plus simple : supposons qu'il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\overline{S}^{-1}$. Dans ce cas,

$$A\overline{A} = S\overline{S}^{-1}\overline{S\overline{S}^{-1}} = S\overline{S}^{-1}\overline{S}S^{-1} = I_n$$

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur n.
Si $n = 1$, alors $A = (\lambda)$ avec $|\lambda| = 1$. On a donc $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Il suffit alors de prendre $S = \left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)$.
On suppose maintenant la propriété vraie à un rang $n - 1 \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A\overline{A} = I_n$.
Montrons d'abord que toutes les valeurs propres de A sont de module 1. Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P + iQ$. Ainsi $(P+iQ)(P-iQ) = I_n$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient $P^2 + Q^2 = I_n$ et $QP - PQ = 0$. Ainsi P et Q commutent et trigonalisent dans une base commune i.e. il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et $U, V \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ telles que $P = RUR^{-1}$ et $Q = RVR^{-1}$. Posons $T = U + iV$. On a donc $A = RTR^{-1}$ et $\overline{A} = R\overline{T}R^{-1}$. La diagonale de T contient les valeurs propres de A. Comme $A\overline{A} = I_n$, on en déduit que toutes les valeurs propres de A sont de module 1.
Soit λ une valeur propre de A (il en existe toujours une complexe). On a donc $|\lambda| = 1$. On a à nouveau $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $\mu = e^{\frac{i\theta}{2}}$, de sorte que $\frac{\mu}{\overline{\mu}} = 1$. Soit X un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ. Dans ce cas, $\overline{X}$ est également un vecteur propre de X associé à la valeur propre λ. En effet, $AX = \lambda X$ donc $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$ puis $A\overline{AX} = \overline{\lambda}A\overline{X}$. Puisque $A\overline{A} = I_n$, on obtient $\overline{X} = \overline{\lambda}A\overline{X}$ puis $A\overline{X} = \lambda\overline{X}$ puisque $\frac{1}{\overline{\lambda}} = \lambda$. On peut supposer X réel. En effet, les vecteurs $X + \overline{X}$ et $i(X - \overline{X})$ sont réels et l'un des deux est non nul. L'un de ces deux vecteurs est donc un vecteur propre réel associé à la valeur propre λ. On peut compléter X en une base de $\mathbb{C}^n$ à l'aide de vecteurs réels (ceux de la base canonique, par exemple). Notons P la matrice de cette base dans la base canonique. Posons $B = P^{-1}AP$. Cette matrice est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \lambda & Y^\top \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right)$ avec $Y \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On a $B\overline{B} = P^{-1}AP\overline{P}^{-1}\overline{AP} = I_n$ car $\overline{P} = P$ et $\overline{P}^{-1} = P^{-1}$ (P est à coefficients réels). On en déduit que $C\overline{C} = I_n$. D'après notre hypothèse de récurrence, il existe $T \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $C = T\overline{T}^{-1}$.
Montrons qu'il existe $Z \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $Z - \lambda\overline{Z} = Y^\top\overline{T}$. Puisque $B\overline{B} = 0$, on a en particulier $\lambda\overline{Y}^\top T + Y^\top\overline{T} = 0$. Notons $\varphi(z) = z + \lambda\overline{z}$ et $\psi(z) = z - \lambda\overline{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. φ et ψ sont des endomorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. On vérifie que $\varphi \circ \psi = 0$ en utilisant $|\lambda| = 1$. On a donc $\operatorname{Im}\psi \subset \operatorname{Ker}\varphi$. φ et ψ ne sont pas nuls donc $\dim \operatorname{Im}\psi \geq 1 \geq \dim \operatorname{Ker}\varphi$. Ainsi $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$. Les composantes de $Y\overline{T}$ sont dans $\operatorname{Ker}\varphi$ donc dans $\operatorname{Im}\psi$, ce qui justifie l'existence de Z.
Posons alors $U = \left(\begin{array}{c|c} \mu & Z^\top \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right)$. On a alors $\overline{U}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\overline{\mu}} & -\frac{1}{\mu}\overline{Z}^\top\overline{T}^{-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right)$. On vérifie alors que $U\overline{U}^{-1} = B$. Il suffit alors de poser $S = PUP^{-1}$ pour avoir $A = S\overline{S}^{-1}$.

Nilpotence

Solution 26

---

1. On a évidemment $\chi_A = X^3$ donc la seule valeur propre de A est 0. Si A était diagonalisable, elle serait donc semblable à la matrice nulle et donc nulle, ce qui n'est pas. Ainsi A n'est pas diagonalisable.

2. **a.** On a $B^6 = A^3 = 0$ donc X^6 est un polynôme annulateur de B. On en déduit que 0 est la seule valeur propre de A donc $\chi_A = X^3$.

   b. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $B^3 = 0$. A fortiori, $A^2 = B^4 = 0$, ce qui est absurde puisque $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Alors $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$ et $u(e_3) = e_2$. La matrice de u dans la base (e_2, e_1, e_3) est C. On en déduit que A est semblable à C.

Polynôme minimal

Solution 27

Remarquons que $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de A donc le polynôme minimal π_A divise $X^n - 1$. De plus, il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à n sinon la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ serait libre. On en déduit que $\pi_A = X^n - 1$. Or π_A divise χ_A et $\deg \chi_A = n$ donc $\chi_A = \pi_A = X^n - 1$. Les valeurs propres de A sont donc les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et sont toutes de multiplicités 1. Ainsi

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \frac{e^{2i\pi} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = 0$$

Solution 28

On notera classiquement π_M le polynôme minimal d'une matrice M.

1. Posons $n = \deg \pi_A$ et $P = X^n \pi_A\left(\frac{1}{X}\right)$. Comme A est inversible, le coefficient constant de π_A est non nul et $\deg P = n$. P est un polynôme annulateur de A^{-1} donc $\pi_{A^{-1}}$ divise P. En particulier, $\deg \pi_{A^{-1}} \leq n$. De même, en posant $p = \deg \pi_{A^{-1}}$ et $Q = X^p \pi_{A^{-1}}\left(\frac{1}{X}\right)$, $\deg Q = p$ et on trouve que π_A divise Q. En particulier, $\deg \pi_A \leq p$.
   Finalement, $\deg \Pi_{A^{-1}} = \deg P$. En notant a le coefficient constant (non nul) de π_A, on a $\pi_{A^{-1}} = \frac{1}{a} P$ car $\pi_{A^{-1}}$ est unitaire par convention.

2. Puisque pour tout polynôme P et toute matrice M à coefficients réels

$$P(M) = 0 \iff P(M)^\top = 0 \iff P(M^\top) = 0$$

   A et $A^\top = A^{-1}$ ont le même polynôme minimal. Si ce polynôme minimal était de degré impair, il admettrait une racine réelle λ. Ainsi A admettrait λ pour valeur propre. Soit X un vecteur propre associé à cette valeur propre. On a donc $AX = \lambda X$ et donc $\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|$ où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Mais comme A est orthogonale, $\|AX\| = \|X\|$ d'où $\lambda = \pm 1$ ($\|X\| \neq 0$ car un vecteur propre est non nul). Ceci contredit l'énoncé. C'est donc que le polynôme minimal de A est de degré pair.

Solution 29

1. On procède par récurrence. Tout d'abord,

$$f^0 \circ g - g \circ f^0 = 0 = 0 f^0$$

   Supposons que $f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors en composant par f à gauche,

$$f^{n+1} \circ g - f \circ g \circ f^n = n f^{n+1}$$

   Mais

$$f \circ g = g \circ f + f$$

   donc

$$f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} - f^{n+1} = n f^{n+1}$$

   ou encore

$$f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = (n+1) f^{n+1}$$

   Ainsi $f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

2. D'après la question précédente, les applications linéaires $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(f) \circ g - g \circ P(f) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & f \circ P'(f) \end{array}\right.$ coïncident sur la base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Elles sont donc égales et on en déduit le résultat voulu.

3. Si on applique la question précédente à $P = \pi_f$ le polynôme minimal de f, on obtient $f \circ \pi'_f(f) = 0$. Le polynôme $X\pi'_f$ annule donc f de sorte que π_f divise $X\pi'_f$. En considérant le degré p de π_f et le coefficient dominant, on a donc $p\pi_f = X\pi'_f$. Ainsi $\dfrac{\pi'_f}{\pi_f} = \dfrac{p}{X}$ de sorte que $\pi_f = X^p$. f est donc nilpotent.

Solution 30

---

1. Les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires et les autres colonnes sont toutes colinéaires à la seconde. Ainsi $\mathrm{rg}(A) = 2$ puis $\dim \mathrm{Ker}(A) = n - 2$.

2. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

3. Comme A est diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre 0 est la dimension du sous-espace propre associé, c'est-à-dire $n - 2$.

4. Remarquons que $\chi_A(1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Via l'opération $C_1 \leftarrow 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$, $\chi_A(1) = \begin{vmatrix} \alpha & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha$ où $\alpha = -\sum_{k=2}^{n} k^2 < 0$. Comme $\lim_{x \to +\infty} \chi_A(x) = +\infty$, χ_A admet une racine $\lambda > 1$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - \mu)$. Mais $\mathrm{tr}(A) = 1 = \lambda + \mu$ donc $\mu = 1 - \lambda$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ avec $\lambda > 1$.

5. Comme A est diagonalisable, π_A est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de A. Ainsi $\pi_A = X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda) = X^3 - X^2 + \lambda(1 - \lambda)X$ est un polynôme annulateur de A. Or $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - 1 + \lambda)$ donc, comme vu à la question précédente,
$$\lambda(1 - \lambda) = \chi_A(1) = -\sum_{k=2}^{n} k^2$$
Finalement, un polynôme annulateur de A est $X^3 - X^2 - \left(\sum_{k=2}^{n} k^2\right)X$.

Solution 31

---

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$$u^2(M) = u(M) + \mathrm{tr}(u(M))I_n = u(M) + (n+1)\,\mathrm{tr}(M)I_n = (n+2)u(M) - (n+1)M$$
Ainsi $X^2 - (n+2)X + (n+1)$ est un polynôme annulateur de u.

2. On constate que $X^2 - (n+2)X + (n+1) = (X - 1)(X - (n+1))$ est scindé à racines simples donc u est diagonalisable.

3. Le polynôme minimal π_u divise $(X - 1)(X - (n+1))$. Or on a clairement $u \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et, comme $n \geq 2$, $u \neq (n+1)\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $\pi_u \neq X - 1$ et $\pi_u \neq X - (n+1)$. Ainsi $\pi_u = (X - 1)(X - (n+1))$.
Notamment $\mathrm{Sp}(u) = \{1, n+1\}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est clairement l'hyperplan des matrices de trace nulle. Le sous-espace propre associé à la valeur popre $n + 1$ est donc une droite. Comme u est diagonalisable, les multiplicités des valeurs propres de u dans le polynôme caractéristique sont égales aux dimensions des sous-espaces propres. Ainsi $\chi_u = (X - 1)^{n^2-1}(X - (n + 1))$.

> **Remarque.** On peut vérifier que le sous-espace propre asssocié à la valeur propre 1 est $\mathrm{vect}(I_n)$.

Solution 32

---

1. On sait que le rang de B est le rang de la famille de ses colonnes. Comme les n dernières colonnes de B sont également les n dernières, le rang de B est celui de $\begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ 0 \end{pmatrix}$. Mais le rang de B est également le rang de la famille de ses lignes donc $\operatorname{rg} \mathrm{B} = \operatorname{rg} \mathrm{A}$.

2. Une récurrence simple montre que $\mathrm{B}^p = \begin{pmatrix} \mathrm{A}^p & \mathrm{A}^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. De plus, $\mathrm{B}^0 = \mathrm{I}_{2n} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.

   Soit $\mathrm{P} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \mathrm{X}^p \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{B}) &= a_0 \mathrm{I}_{2n} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \mathrm{B}^p \\
&= a_0 \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \begin{pmatrix} \mathrm{A}^p & \mathrm{A}^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & \mathrm{P}(\mathrm{A}) - a_0 \mathrm{I}_n \\ 0 & a_0 \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & \mathrm{P}(\mathrm{A}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{P}(0) \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   car $a_0 = \mathrm{P}(0)$.

3. Comme A est diagonalisable, le polynôme minimal π_A de A est scindé à racines simples.
   Supposons que A n'est pas inversible. Alors $0 \in \operatorname{Sp}(\mathrm{A})$ donc 0 est racine de π_A i.e. $\pi_\mathrm{A}(0) = 0$. D'après la question précédente, $\pi_\mathrm{A}(\mathrm{B}) = 0$ et donc B est diagonalisable puisque π_A est scindé à racines simples.
   Supposons que A est inversible. Alors 0 n'est pas racine de π_A. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}\pi_\mathrm{A}$ est donc encore scindé à racines simples et annule B d'après la question précédente. B est encore diagonalisable.
   De manière générale, un calcul par blocs donne $\chi_\mathrm{B} = \mathrm{X}^n \chi_\mathrm{A}$. Ainsi $\operatorname{Sp}(\mathrm{B}) = \operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \cup \{0\}$ car le spectre d'une matrice est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique.

Solution 33

1. Il suffit de développer le déterminant définissant χ_A par rapport à sa dernière colonne.

2. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a donc $u(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Ainsi $e_k = u^{k-1}(e_1)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Il s'ensuit que $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. En particulier, c'est une famille libre. Posons $p = \deg \pi_\mathrm{A}$ et supposons $p < n$. Posons $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^p + \sum_{k=0}^{p-1} c_k \mathrm{X}^k$. On sait que $\pi_\mathrm{A} = \pi_u$ annule u. Ainsi $u^p + \sum_{k=0}^{p-1} c_k u^k = 0$. En particulier, $u^p(e_1) + \sum_{k=0}^{p-1} c_k u^k(e_1) = 0$. La famille $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq p}$ est donc liée ce qui contredit la liberté de la famille $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1}$. Par conséquent, $p = n$.
   Ainsi $\deg \pi_\mathrm{A} = \deg \chi_\mathrm{A}$, π_A divise χ_A et π_A et χ_A sont unitaires, ce qui permet d'affirmer que $\pi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{A}$.

3. On sait que $\chi_{\mathrm{A}^\top} = \chi_\mathrm{A} = \mathrm{P}$. Ainsi $\operatorname{Sp}(\mathrm{A}^\top)$ est l'ensemble des racines de P. Soit donc λ une racine de P.
   Alors $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}^\top)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, n-2]\!], \ x_{k+1} = \lambda x_k \\ -\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k = \lambda x_{n-1} \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_k = \lambda^k x_0 \\ \mathrm{P}(\lambda)x_0 = 0 \end{cases}$$

La dernière égalité est toujours vraie puisque λ est racine de P. On en déduit que $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}^\top) = \mathrm{vect}\big((1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})\big)$.

Solution 34

1. **a.** Soit $x \in \mathrm{E}$. Vérifions que $\mathrm{I}_{u,x}$ est un idéal de$\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
   - Il est clair que $0 \in \mathrm{I}_{u,x}$.
   - Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{I}_{u,x}^2$. Alors
   $$(\mathrm{P}+\mathrm{Q})(u)(x) = \mathrm{P}(u)(x) + \mathrm{Q}(u)(x) = 0_\mathrm{E}$$
   donc $\mathrm{P}+\mathrm{Q} \in \mathrm{I}_{u,x}$.
   - Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \times \mathrm{I}_{u,x}$. Alors
   $$(\mathrm{PQ})(u)(x) = \mathrm{P}(u)(\mathrm{Q}(u)(x)) = \mathrm{P}(u)(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$$
   donc $\mathrm{PQ} \in \mathrm{I}_{u,x}$.

   Puisque π_u est un polynôme annulateur de u, a fortiori, $\pi_u(u)(x) = 0_\mathrm{E}$ donc $\pi_u \in \mathrm{I}_{u,x}$. Comme $\pi_{u,x}$ est un générateur de $\mathrm{I}_{u,x}$, π_u est un multiple de $\pi_{u,x}$.

   b. Soit $x \in \mathrm{E}$. $\mathrm{E}_{u,x}$ est l'image de l'application linéaire $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(u)(x) \end{array}\right.$: c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

   Soit $y \in \mathrm{E}_{u,x}$. Alors il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $y = \mathrm{P}(u)(x)$. Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $\pi_{u,x}$. Alors $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\pi_{u,x} + \mathrm{R}$ puis $y = \mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{R}(u)(x)$ puisque $\mathrm{Q}\pi_{u,x} \in \mathrm{I}_{u,x}$. Or $\deg \mathrm{R} \leq \deg \pi_{u,x} - 1$ donc $y \in \mathrm{vect}(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$, ce qui prouve que $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ est une famille génératrice de $\mathrm{E}_{u,x}$.

   Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\deg \pi_{u,x}-1} \lambda_k u^k(x) = 0_\mathrm{E}$. Posons $\mathrm{R} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg \pi_{u,x}-1} \lambda_k \mathrm{X}^k$. On a donc $\mathrm{R}(u)(x) = 0_\mathrm{E}$ i.e. $\mathrm{R} \in \mathrm{I}_{u,x}$. R est donc un multiple de $\pi_{u,x}$ et comme $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_{u,x}$, $\mathrm{R} = 0$ i.e. $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, \deg \pi_{u,x} - 1]\!]$. Ceci prouve que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ est libre.

   Finalement, $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ est une base de $\mathrm{E}_{u,x}$. On en déduit que $\dim \mathrm{E}_{u,x} = \deg \pi_{u,x}$.

   c. Soit $y \in \mathrm{E}_{u,x}$. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $y = \mathrm{P}(u)(x)$. Alors $u(y) = (\mathrm{XP})(u)(x)$ appartient également à $\mathrm{E}_{u,x}$. Ainsi $\mathrm{E}_{u,x}$ est stable par u.

   Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{I}_{u,x}$. Alors $\mathrm{Q}(u)(y) = (\mathrm{PQ})(u)(x) = \mathrm{P}(u)(\mathrm{Q}(u)(x)) = \mathrm{P}(u)(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$ donc Q est un polynôme annulateur de $u_{|\mathrm{E}_{u,x}}$. Réciproquement soit Q un polynôme annulateur de $u_{|\mathrm{E}_{u,x}}$. En particulier, $\mathrm{Q}(u)(x) = 0_\mathrm{E}$ donc $\mathrm{Q} \in \mathrm{I}_{u,x}$. Ainsi $\mathrm{I}_{u,x}$ est l'idéal annulateur de $u_{|\mathrm{E}_{u,x}}$ de sorte que $\pi_{u,x} = \pi_{u_{|\mathrm{E}_{u,x}}}$.

2. **a.** Posons $\mathrm{P}_i = \displaystyle\prod_{j \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}} \pi_{u,x_j}$ pour $i \in [\![1, p]\!]$. Alors

   $$\mathrm{P}(u)(x) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}(u)(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(u)\left(\pi_{u,x_i}(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(u)(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$$

   donc $\mathrm{P} \in \mathrm{I}_{u,x}$ de sorte que $\pi_{u,x}$ divise P.

   b. Soit $(y_1, \dots, y_p) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{u,x_i}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i = 0_\mathrm{E}$. Il existe des polynômes $\mathrm{Q}_1, \dots, \mathrm{Q}_p$ de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $y_i = \mathrm{Q}(u)(x_i)$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On a donc

   $$\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Q}_j(u)(x_j) = 0_\mathrm{E}$$

   Fixons $i \in [\![1, p]\!]$. En appliquant $\mathrm{P}_i(u)$ à l'égalité précédente, on obtient

   $$\sum_{j=1}^{p} \mathrm{P}_i(u)\left(\mathrm{Q}_j(u)(x_j)\right) = 0_\mathrm{E}$$

Mais comme pour $j \neq i$

$$\mathrm{P}_i(u)\left(\mathrm{Q}_j(u)(x_j)\right) = \mathrm{Q}_j(u)\left(\mathrm{P}_i(u)(x_j)\right) = \mathrm{Q}_j(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$$

il reste $(\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i)(u)(x_i) = 0_\mathrm{E}$. On en déduit que π_{u,x_i} divise $\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i$. Or π_{u,x_i} est premier avec P_i donc π_{u,x_i} divise Q_i par le théorème de Gauss. Ainsi $y_i = \mathrm{Q}_i(u)(x_i) = 0_\mathrm{E}$.
Ceci montre que $\mathrm{E}_{x_1}, \dots, \mathrm{E}_{x_p}$ sont en somme directe.

c. Par définition, $\pi_{u,x}(x) = 0_\mathrm{E}$ i.e. $\sum_{i=1}^{p} \pi_{u,x}(x_i) = 0_\mathrm{E}$. Mais pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\pi_{u,x}(x_i) \in \mathrm{E}_{u,x_i}$. Puisque $\mathrm{E}_{u,x_1}, \dots, \mathrm{E}_{u,x_p}$ sont en somme directe, $\pi_{u,x}(x_i) = 0_\mathrm{E}$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Ainsi π_{u,x_i} divise $\pi_{u,x}$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Mais comme $\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}$ sont premiers entre eux deux à deux, P divise $\pi_{u,x}$. Or on a déjà vu que $\pi_{u,x}$ divisait P donc $\mathrm{P} = \pi_{u,x}$ puisqu'il s'agit de deux polynômes unitaires.

Il est clair que $\mathrm{E}_{u,x} \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{u,x_i}$. De plus,

$$\dim \mathrm{E}_{u,x} = \deg \pi_{u,x} = \deg \mathrm{P} = \sum_{i=1}^{p} \deg \pi_{u,x_i} = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{E}_{u,x_i} = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{u,x_i}\right)$$

donc $\mathrm{E}_{u,x} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{u,x_i}$.

3. La décomposition en facteurs irréductibles de π_u s'écrit

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{M}_i^{\alpha_i}$$

où $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_p$ sont des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ distincts deux à deux et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des entiers naturels non nuls. En particulier, les polynômes $\mathrm{M}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathrm{M}_p^{\alpha_p}$ sont premiers entre eux deux à deux. Le lemme des noyaux permet alors d'affirmer que

$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker} \pi_u(u) = \bigoplus_{j=1}^{p} \operatorname{Ker} \mathrm{M}_j^{\alpha_j}(u)$$

Supposons qu'il existe $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i - 1}(u) = \operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i}(u)$. Alors le lemme des noyaux permet d'affirmer que le polynôme $\frac{\pi_u}{\mathrm{M}_i}$ est un polynôme annulateur de u, ce qui contredit la minimalité de π_u. Ainsi pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i - 1}(u) \subsetneq \operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i}(u)$.
Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, il existe donc $x_i \in \left(\operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i}(u)\right) \setminus \left(\operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i - 1}(u)\right)$.
Fixons $i \in [\![1,p]\!]$. Puisque $\mathrm{M}_i^{\alpha_i}(u)(x_i) = 0_\mathrm{E}$, π_{u,x_i} divise $\mathrm{M}_i^{\alpha_i}$. Puisque M_i est irréductible, il existe un entier naturel $\beta_i \leq \alpha_i$ tel que $\pi_{u,x_i} = \mathrm{M}_i^{\beta_i}$. Mais puisque $\mathrm{M}_i^{\alpha_i - 1}(u)(x_i) \neq 0_\mathrm{E}$, $\beta_i = \alpha_i$. Ainsi $\pi_{u,x_i} = \mathrm{M}_i^{\alpha_i}$.
Posons alors $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$. D'après la question précédente,

$$\pi_{u,x} = \prod_{i=1}^{p} \pi_{u,x_i} = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{M}_i^{\alpha_i} = \pi_u$$

4. On procède par implications circulaires.

$(i) \implies (ii)$ Supposons que $\pi_u = \chi_u$. On sait qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. En particulier, $\dim \mathrm{E}_{u,x} = \deg \pi_{u,x} = \deg \pi_u = \deg \chi_u = n$. Ainsi $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$.

$(ii) \implies (iii)$ Supposons qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$. Alors $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$. En posant $u^n(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)$, la matrice de u dans cette base est bien de la forme voulue.

$(iii) \implies (i)$ Supposons qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme de l'énoncé. Si on note x le premier vecteur de cette base, alors cette base est $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$. Ainsi $\mathrm{E} = \operatorname{vect}(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1} \subset \mathrm{E}_{u,x}$. Puisqu'on a évidemment $\mathrm{E}_{u,x} \subset \mathrm{E}$, on a alors $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$. En particulier, $\deg \pi_{u,x} = \dim \mathrm{E}_{u,x} = n$. Puisque $\pi_{u,x}$ divise π_u qui lui-même divise χ_u et que $\deg \chi_u = n$, il s'ensuit que $\pi_{u,x} = \pi_u = \chi_u$.

Solution 35

1. On constate que $U^2 = nU$ donc $X^2 - nX = X(X-n)$ est un polynômale annulateur de U. Or ni X ni $X - n$ n'annulent U. Donc $\pi_U = X(X-n)$.

2. On en déduit que U est diagonalisable (π_U est scindé à racines simples) et $\mathrm{Sp}(U) = \{0, n\}$. De plus, il est clair que $\mathrm{rg}\, U = 1$ donc $\dim E_0(u) = \dim \mathrm{Ker}\, U = n-1$. Par conséquent, $\dim E_n(U) = 1$. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On vérifie que $e_1 - e_i$ appartient à $E_0(U)$ pour $i \in [\![2, n]\!]$. Ces vecteurs sont clairement linéairement indépendants et $\dim E_0(U) = n-1$ donc ils forment une base de $E_0(U)$. Soit $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. Alors $v \in E_n(U)$ et $\dim E_n(U) = 1$ donc (v) est une base de $E_n(U)$. En notant $P = \begin{pmatrix} e_1 - e_2 & \dots & e_1 - e_n & v \end{pmatrix}$ et D la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (n, n) qui vaut 1, on a $U = PDP^{-1}$.

Solution 36

1. On calcule le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
\chi_{A_m}(X) &= \begin{vmatrix} X+m+1 & -m & -2 \\ m & X-1 & -m \\ 2 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X+m-1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ X+m-1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\
&= (X+m-1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} && \text{en factorisant la première colonne} \\
&= (X+m-1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 0 & 0 & X+m-1 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (X+m-1)^2(X-1)
\end{aligned}$$

On traite d'abord le cas $m = 0$. Alors $\chi_{A_0} = (X-1)^3$. Comme π_{A_0} divise χ_{A_0} et est unitaire, π_{A_0} vaut $(X-1)$, $(X-1)^2$ ou $(X-1)^3$. On $M \neq I_3$, $\pi_{A_0} \neq X - 1$. Un calcul montre que $(A_0 - I_3)^2 = 0$ donc $\pi_{A_0} = (X-1)^2$.
On suppose ensuite $m \neq 0$. Puisque $\mathrm{Sp}(A_m) = \{1, 1-m\}$ et π_{A_m} divise χ_{A_m}, π_{A_m} vaut $(X-1)(X+m-1)$ ou $(X-1)(X+m-1)^2$. Un calcul donne

$$(A - I_3)(A + (m-1)I_3) = \begin{pmatrix} m(2-m) & 0 & m(m-2) \\ 0 & 0 & 0 \\ m(2-m) & 0 & m(m-2) \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est nulle que si $m = 2$. On en déduit que $\pi_{A_2} = (X+1)(X-1)$ et si $m \neq 2$, $\pi_{A_m} = (X-1)(X+m-1)^2$.
On récapitule :

- $\pi_{A_0} = (X-1)^2$;
- $\pi_{A_2} = (X-1)(X+1)$;
- $\pi_{A_m} = (X-1)(X+m-1)^2$ si $m \notin \{0, 2\}$.

Solution 37

Notons $\pi_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme minimal de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\pi_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme minimal de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\pi_{\mathbb{R}}$ peut être vu comme un polynômes à coefficients complexes annulant A donc $\pi_{\mathbb{C}}$ divise $\pi_{\mathbb{R}}$ (dans $\mathbb{C}[X]$).
Notons $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de $\pi_{\mathbb{C}}$. Comme $\pi_{\mathbb{C}}$ annule A et A est à coefficients réels, on montre aisément que $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$ annule également A. On en déduit que π_A divise $\overline{\pi_A}$ (dans $\mathbb{C}[X]$). Mais comme $\pi_{\mathbb{C}}$ et $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$ sont unitaires et de même degré, ils sont égaux. On en déduit que $\pi_{\mathbb{C}}$ est à coefficients réels et annule A. Ainsi $\pi_{\mathbb{R}}$ divise $\pi_{\mathbb{C}}$ (dans $\mathbb{R}[X]$ et a fortiori dans $\mathbb{C}[X]$). Finalement, $\pi_{\mathbb{C}}$ et $\pi_{\mathbb{R}}$ se divisent l'un l'autre (dans $\mathbb{C}[X]$) et sont unitaires donc ils sont égaux.

Solution 38

$X^n - 1$ est un polynôme annulateur de A. Comme $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre, il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à n. Ainsi $\pi_A = X^n - 1$. De plus $\pi_A \mid \chi_A$ et $\deg \chi_A = n$ donc $\chi_A = \pi_A = X^n - 1$. Le coefficient de X^{n-1} dans χ_A est $-\operatorname{tr}(A)$. Comme $n \geq 2$, $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Solution 39

1. Cf. cours.

2. Comme $\mu_f(f) = 0$, le lemme des noyaux montre que

$$E = \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E)$$

Si on avait $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) = \{0\}$, on aurait $\operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E) = E$ et $X^2 + 4$ serait donc un polynôme annulateur de E, ce qui contredirait la défininition du polynôme minimal. Ainsi $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) \neq \{0\}$. On prouve de la même manière que $\operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E) \neq \{0\}$. Il existe donc des vecteurs non nuls x et y de E appartenant respectivement à $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f + 4\operatorname{Id}_E)$. On a alors $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.

3. Montrons que $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$. On sait que déjà que $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$. Comme $f^2 + \operatorname{Id}_E$ commute avec f, $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$ est stable par f de sorte que $f(x) \in \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha x + \beta f(x) = 0$. En appliquant f, on obtient $\alpha f(x) + \beta f^2(x) = 0$ ou encore $\alpha f(x) - \beta x = 0$. Alors

$$\alpha(\alpha x + \beta f(x)) - \beta(\alpha f(x) - \beta x) = (\alpha^2 + \beta^2)x = 0$$

Comme $x \neq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ puis $\alpha = \beta = 0$ car α et β sont réels. Ainsi $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$.
On montre de la même manière que $(y, f(y))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E)$. Ainsi $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) \geq 2$ et $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E) \geq 2$. Or $E = \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E)$ donc $\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E) = 4$. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) = \dim \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E) = 2$ puis que $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sont des bases respectives de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E)$. A nouveau, $E = \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E)$ donc $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E (adaptée à la décomposition en somme directe précédente).
La matrice de f dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 40

1. Comme les a_i ne sont pas nuls, les $n-1$ premières colonnes de $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sont non nulles et colinéaires et la dernière colonne n'est pas colinéaire aux précédentes. On en déduit que $\operatorname{rg}(f) = 2$.

2. D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} f = n - 2$. On en déduit que 0 est une valeur propre de f de multiplicité supérieure ou égale à $n-2$. Ainsi X^{n-2} divise χ_f. Comme χ_f est unitaire de degré n, il existe bien $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire tel que $\chi_f = X^{n-2}P$ et $\deg P = 2$.

> **Remarque.** Comme $\operatorname{mat}_{cB}(f)$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable de même que f. On en déduit que 0 est valeur propre de multiplicité exactement $n-2$. Ainsi 0 n'est pas racine de P ou encore $P(0) \neq 0$.

3. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = X^2 + \alpha X + \beta$. On sait que le coefficient de X^{n-1} dans χ_f est $-\operatorname{tr}(f)$ donc $\alpha = -\operatorname{tr}(f) = -a_1$.

4. Il est clair que

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \;\; f(e_i) = a_{n+1-i}e_n \qquad \text{et} \qquad f(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}e_i$$

On en déduit que

$$f^2(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n+1-i}^2 e_n + a_1 f(e_n) = a_1 f(e_n) + \mathrm{S}e_n$$

en posant $\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n+1-i}^2 = \sum_{i=2}^{n} a_i^2$.

5. D'après la question précédente, le sous-espace vectoriel $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(e_n, f(e_n))$ est stable par f. De plus, $f(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}e_i$ n'est pas colinéaire à e_n car $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et les a_i sont non nuls. Ainsi $(e_n, f(e_n))$ est une base de G et la matrice de l'endomorphisme f_{G} de G induit par f est $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{S} \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$. D'après le cours, $\chi_{f_{\mathrm{G}}} = \mathrm{X}^2 - a_1\mathrm{X} - \mathrm{S}$ divise $\chi_f = \mathrm{X}^{n-2}\mathrm{P}$. Comme $\chi_{f_{\mathrm{G}}}(0) = -\mathrm{S} \neq 0$, $\chi_{f_{\mathrm{G}}}$ est premier avec X^{n-2}. On en déduit que $\chi_{f_{\mathrm{G}}}$ divise P d'après le lemme de Gauss. Comme $\chi_{f_{\mathrm{G}}}$ et P sont unitaires et de degré 2, $\chi_{f_{\mathrm{G}}} = \mathrm{P}$ puis $\chi_f = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X}^2 - a_1\mathrm{X} - \mathrm{S})$.

6. La matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique réelle donc diagonalisable, de même que f. Le polynôme P est de discriminant $a_1^2 + 4\mathrm{S} > 0$ donc il est scindé à racines simples. De plus, 0 n'est pas racine de P. Comme f est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et possède les mêmes racines que χ_f. On en déduit que $\pi_f = \mathrm{XP} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2 - a_1\mathrm{X} - \mathrm{S})$.

Solution 41

Comme AB est diagonalisable, son polynôme minimal π_{AB} est scindé à racines simples. De plus, AB est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de A et n'est donc pas une racine de π_{AB}.
Comme $\pi_{\mathrm{AB}}(\mathrm{AB}) = 0$, $\mathrm{B}\pi_{\mathrm{AB}}(\mathrm{AB})\mathrm{A} = 0$ ou encore $\mathrm{P}(\mathrm{BA}) = 0$ avec $\mathrm{P} = \mathrm{X}\pi_{\mathrm{AB}}$. Or π_{AB} est scindé à racines simples et 0 n'est pas racine de π_{AB} donc P est encore scindé à racines simples. On en déduit que BA est diagonalisable.

Solution 42

Supposons que u est diagonalisable. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice D de u est diagonale. La matrice de u^2 dans cette même base est la matrice diagonale D^2. Ainsi u^2 est diagonalisable.
Supposons u^2 diagonalisable. Le polynôme minimal π_{u^2} de u^2 est alors scindé à racines simples. Il existe donc des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distincts deux à deux tels que $\pi_{u^2} = \prod_{i=1}^{r}(\mathrm{X} - \lambda_i)$. Comme $u \in \mathrm{GL(E)}$, $u^2 \in \mathrm{GL(E)}$ et aucun des λ_i n'est nul. Notons μ_i une racine carrée (non nulle) de λ_i. Posons

$$\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{r}(\mathrm{X}^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{r}(\mathrm{X} - \mu_i)(\mathrm{X} + \mu_i)$$

Comme les λ_i sont distincts deux à deux et non nuls, les $\pm\mu_i$ sont également distincts deux à deux de sorte que P est scindé à racines simples. De plus,

$$\mathrm{P}(u) = \pi_{u^2}(u^2) = 0$$

donc u est diagonalisable.

Solution 43

---

1. Sachant que pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathrm{AB})^\top = \mathrm{B}^\top\mathrm{A}^\top$, on prouve aisément par récurrence que $(\mathrm{A}^k)^\top = (\mathrm{A}^\top)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Par linéarité de la transposition,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})^\top = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\mathrm{A}^k)^\top = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\mathrm{A}^\top)^k = \mathrm{P}(\mathrm{A}^\top)$$

2. **Première méthode.** Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0 \iff \mathrm{P}(\mathrm{A})^\top = 0 \iff \mathrm{P}(\mathrm{A}^\top) = 0$$

Ainsi A et $\mathrm{A}^\top$ possédent le même idéal annulateur. Comme le polynôme minimal est l'unique générateur unitaire de cet idéal, $\pi_\mathrm{A} = \pi_{\mathrm{A}^\top}$.
Deuxième méthode. $\pi_\mathrm{A}(\mathrm{A}^\top) = \pi_\mathrm{A}(\mathrm{A})^\top = 0^\top = 0$ donc $\pi_{\mathrm{A}^\top}$ divise π_A. En appliquant ceci à $\mathrm{A}^\top$, $\pi_{(\mathrm{A}^\top)^\top} = \pi_\mathrm{A}$ divise $\pi_{\mathrm{A}^\top}$. Comme π_A et $\pi_{\mathrm{A}^\top}$ sont unitaires par définitions, $\pi_\mathrm{A} = \pi_{\mathrm{A}^\top}$.

Solution 44

---

1. On a clairement $\chi_\mathrm{M} = \chi_\mathrm{A}^2$ (déterminant triangulaire par blocs). Les polynômes χ_M et χ_A ont donc les mêmes racines. Ainsi $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$.

2. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} \mathrm{A}^n & 0 \\ n\mathrm{A}^n & \mathrm{A}^n \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & 0 \\ \mathrm{A}\mathrm{P}'(\mathrm{A}) & \mathrm{P}(\mathrm{A}) \end{pmatrix}$$

3. Supposons que M soit diagonalisable. Son polynôme minimal π_M est donc scindé à racines simples. D'après la question précédente, π_M et $\mathrm{X}\pi_\mathrm{M}'$ annulent A. Ainsi π_A divise π_M et $\mathrm{X}\pi_\mathrm{M}'$. Comme π_M est scindé à racines simples, $\pi_\mathrm{M} \wedge \pi_\mathrm{M}' = 1$. Or π_A divise π_M donc $\pi_\mathrm{A} \wedge \pi_\mathrm{M}' = 1$ également. D'après le lemme de Gauss, π_A divise X i.e. $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}$ puis $\mathrm{A} = 0$.
Réciproquement, si $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{M} = 0$ est diagonalisable.

Solution 45

---

1. Dire que $p = 0$ équivaut à dire que $\pi_u(0) \neq 0$, ou encore que $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$ ou enfin que $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

2. Remarquons que $\pi_u = \mathrm{X}^p\mathrm{Q}$ où 0 n'est pas racine de Q. Ainsi $\mathrm{X}^p \wedge \mathrm{Q} = 1$. D'après le lemme des noyaux, $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}(u)$. De plus, $\mathrm{Q}(u) \circ u^p = \pi_u(u) = 0$ donc $\mathrm{Im}(u^p) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}(u)$. Enfin, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}(u) = \dim(\mathrm{E}) - \dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}(u)$ donc $\mathrm{Im}(u^p) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}(u)$, ce qui conclut.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u^k) \oplus \mathrm{Im}(u^k)$. Notons R le polynôme minimal de $u_{|\,\mathrm{Im}\,u^k}$. Alors $\mathrm{X}^k\mathrm{R}$ annule u sur $\mathrm{Ker}\,u^k$ et sur $\mathrm{Im}\,u^k$ donc sur E. On en déduit que π_u divise $\mathrm{X}^k\mathrm{R}$. Par transitivité, X^p divise $\mathrm{X}^k\mathrm{R}$. Or, comme $k \geq 1$,

$$\mathrm{Ker}\,u_{|\,\mathrm{Im}\,u^k} = \mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Im}\,u^k \subset \mathrm{Ker}\,u^k \cap \mathrm{Im}\,u^k = \{0\}$$

Ainsi 0 n'est pas valeur propre de $u_{|\,\mathrm{Im}\,u^k}$ donc n'est pas racine de R. Par conséquent, $\mathrm{X}^p \wedge \mathrm{R} = 1$. D'après le lemme de Gauss, X^p divise X^k donc $p \leq k$.

Solution 46

---

1. On vérifie que pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{G}_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathrm{E}))$. Ainsi $u \mapsto \mathrm{G}_u$ est bien à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathrm{E}))$.
Il est clair que $u \mapsto \mathrm{G}_u$ est linéaire. De plus, $\mathrm{G}_{\mathrm{Id}_\mathrm{E}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$, $\mathrm{G}_{u \circ v} = \mathrm{G}_u \circ \mathrm{G}_v$. Ainsi $u \mapsto \mathrm{G}_u$ est bien un morphisme d'algèbres.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{G}_u = 0$. Alors $u = \mathrm{G}_u(\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = 0$ donc $u \mapsto \mathrm{G}_u$ est injectif.
On montre de la même manière que $u \mapsto \mathrm{D}_u$ est un morphisme d'algèbres injectif.

2. Démonstration laissée au lecteur. C'est en fait vrai pour tout morphisme d'algèbres $\Phi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$: pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\Phi(\mathrm{P}(x)) = \mathrm{P}(\Phi(x))$.

3. D'après une question précédente, $\mathrm{P}(\mathrm{G}_u) = 0 \iff \mathrm{G}_{\mathrm{P}(u)} = 0$. Mais, par injectivité de $u \mapsto \mathrm{G}_u$, $\mathrm{G}_{\mathrm{P}(u)} = 0 \iff \mathrm{P}(u) = 0$. Ainsi u et G_u ont le même idéal annulateur et également le même polynôme minimal i.e. $\pi_{\mathrm{G}_u} = \pi_u$.
On montre de la même manière que $\pi_{\mathrm{D}_u} = \pi_u$.

4. Il suffit d'utiliser la question précédente et le fait qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

5. Si u est diagonalisable, G_u et D_u le sont également. Comme G_u et D_u commutent, on montre classiquement qu'ils sont simultanément diagonalisables i.e. il existe une base de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ constituée de vecteurs propres communs à G_u et D_u. C'est aussi une base de vecteurs propres de $\mathrm{G}_u - \mathrm{D}_u$ qui est donc aussi diagonalisable.

6. On s'inspire des questions précédentes. Si u est nilpotent alors $\pi_u = \Pi_{\mathrm{G}_u} = \Pi_{\mathrm{D}_u} = \mathrm{X}^p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, donc G_u et D_u sont nilpotents. Comme ils commutent,
$$(\mathrm{G}_u - \mathrm{D}_u)^{2p-1} = \sum_{k=0}^{2p-1} \binom{2p-1}{k} \mathrm{G}_u^k \mathrm{D}_u^{2p-1-k}$$
Tous les termes de cette somme sont nuls puisque si $k \geq p$, $\mathrm{G}_u^k = 0$ et si $k < p$, $2p-1-k \geq p$ et $\mathrm{D}_u^{2p-1-k} = 0$. Donc $\mathrm{G}_u - \mathrm{D}_u$ est nilpotent.

Solution 47

---

1. Trivial.

2. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On montre aisément que B et $\mathrm{B}^\top$ ont même polynôme caractéristique et donc même spectre. Ainsi $\mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B}^\top)$. Soit alors Y un vecteur propre de $\mathrm{B}^\top$ associé à la valeur propre μ. Posons $\mathrm{M} = \mathrm{XY}^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{AM} = \mathrm{AXY}^\top = \lambda\mathrm{XY}^\top = \lambda\mathrm{M}$ et $\mathrm{MB} = \mathrm{XY}^\top\mathrm{B} = \mathrm{X}(\mathrm{B}^\top\mathrm{Y})^\top = \mu\mathrm{XY}^\top = \mu\mathrm{M}$. Ainsi $u(\mathrm{M}) = (\lambda - \mu)\mathrm{M}$. Comme X et Y sont non nuls, $\mathrm{M} \neq 0$ (il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $\mathrm{X}_i \neq 0$ et $\mathrm{Y}_j \neq 0$ de sorte que $\mathrm{M}_{i,j} = \mathrm{X}_i\mathrm{Y}_j \neq 0$). Ainsi $\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(u)$.

3. Remarquons que $\mathrm{AT} = \mathrm{T}(\mathrm{B} + \alpha\mathrm{I}_n)$. On montre alors aisément par récurrence que $\mathrm{A}^k\mathrm{T} = \mathrm{T}(\mathrm{B} + \alpha\mathrm{I}_n)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis que $\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{T} = \mathrm{TP}(\mathrm{B} + \alpha\mathrm{I}_n)$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

4. Notamment, si on considère $\mathrm{P} = \pi_\mathrm{A}$, on obtient $\mathrm{T}\pi_\mathrm{A}(\mathrm{B} + \alpha\mathrm{I}_n) = 0$. Comme $\mathrm{T} \neq 0$, $\pi_\mathrm{A}(\mathrm{B} + \lambda\mathrm{I}_n)$ n'est pas inversible. Or A est diagonalisable donc π_A est scindé à racines simples. Plus précisément, $\pi_\mathrm{A} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)$. Ainsi
$$\pi_\mathrm{A}(\mathrm{B} + \alpha\mathrm{I}_n) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{B} - (\lambda - \alpha)\mathrm{I}_n)$$
Comme le produit n'est pas inversible, un des facteurs ne l'est pas. Ainsi il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ tel que $\mathrm{B} - (\lambda - \alpha\mathrm{I}_n)$ n'est pas inversible. Autrement dit, $\lambda - \alpha \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$. Il existe donc $\mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$ tel que $\alpha = \lambda - \mu$.

5. On a montré par double inclusion que
$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda - \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Sp}(\mathrm{B})\}$$

Solution 48

---

1. D'après le théorème de Bezout, il existe $(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$ tel que $\mathrm{UP} + \mathrm{V}\mu_\mathrm{A} = 1$. En évaluant en A, on obtient $\mathrm{U}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{V}(\mathrm{A})\mu_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$. Puisque $\mu_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0$, $\mathrm{U}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ est inversible.

2. Supposons $\mathrm{B} = \mathrm{P}(\mathrm{A})$ inversible. Il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mu_\mathrm{B} = \mu_\mathrm{B}(0) + \mathrm{XQ}$. Comme B est inversible, $0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$ i.e. $\mu_\mathrm{B}(0) \neq 0$. Comme μ_B annule B, $\mu_\mathrm{B}(0)\mathrm{I}_n + \mathrm{BQ}(\mathrm{B}) = 0$. Ainsi, en posant $\mathrm{R} = -\frac{1}{\mu_\mathrm{B}(0)}\mathrm{Q}$, $\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{R}(\mathrm{B}) = (\mathrm{R} \circ \mathrm{P})(\mathrm{A}) = \mathrm{S}(\mathrm{A})$ en posant $\mathrm{S} = \mathrm{R} \circ \mathrm{P}$. Ainsi $\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{BB}^{-1} = \mathrm{I}_n$. On en déduit que $\mathrm{PS} - 1$ annule A puis que μ_A divise $\mathrm{PS} - 1$. Comme $\mathrm{P} \wedge \mu_\mathrm{A}$ divise μ_A, $\mathrm{P} \wedge \mu_\mathrm{A}$ divise $\mathrm{PS} - 1$. Mais $\mathrm{P} \wedge \mu_\mathrm{A}$ divise également P donc $\mathrm{P} \wedge \mu_\mathrm{A}$ divise 1. Finalement $\mathrm{P} \wedge \mu_\mathrm{A} = 1$.

Exponentielles

Solution 49

---

1. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, l'endomorphisme $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T$ est continu. En notant $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\exp(A^T) &= (\lim_{p\to+\infty} S_p)^T \\
&= \lim_{p\to+\infty} S_p^T && \text{par continuité de la transposition} \\
&= \lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}\right)^T \\
&= \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{(A^k)^T}{k!} && \text{par linéarité de la transposition} \\
&= \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{(A^T)^k}{k!} && \text{par propriété de la transposition} \\
&= \exp(A^T)
\end{aligned}$$

2. Puisque A est symétrique, $A^T = A$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$(\exp(A))^T = \exp(A^T) = \exp(A)$$

de sorte que $\exp(A)$ est symétrique.

3. Puisque $\frac{1}{2}A$ commute avec elle-même

$$\exp(A) = \exp(A/2 + A/2) = \exp(A/2)^2$$

Par propriété du déterminant,

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(A/2)^2) = \det(\exp(A/2))^2 \geq 0$$

De plus, $\exp(A)$ est inversible puisque $\exp(A)\exp(-A) = \exp(0) = I_n$ (A et $-A$ commutent) donc $\det(\exp(A)) \neq 0$. Ainsi $\det(\exp(A)) > 0$.

4.

$$\begin{aligned}
\exp(A)^T \exp(A) &= \exp(A^T)\exp(A) && \text{d'après la première question} \\
&= \exp(-A)\exp(A) && \text{car A est antisymétrique} \\
&= \exp(-A + A) && \text{car A et } -A \text{ commutent} \\
&= \exp(0) = I_n
\end{aligned}$$

Ainsi $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$. Mais la question précédente prouve que $\det(\exp(A)) > 0$ donc $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

Solution 50

Méthode n°1

On sait que $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$. On effectue la division euclidienne de X^n par χ_A. Il existe un polynôme Q_n et deux réels a_n et b_n tels que

$$X^n = \chi_A Q_n + a_n X + b_n$$

Après évaluation en 2 et 3, on obtient le système $\begin{cases} 2a_n + b_n = 2^n \\ 3a_n + b_n = 3^n \end{cases}$. On en déduit que $a_n = 3^n - 2^n$ et $b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$. Ainsi, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = \chi_A(A)Q_n(A) + a_n A + b_n I_2 = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I_2$$

Par conséquent,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}\right)A + \left(3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}\right)I_2 = (e^3 - e^2)A + (3e^2 - 2e^3)I_2 = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

Méthode n°2

Comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 3\}$. On calcule sans peine $E_2(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$ puis

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Un rapide calcul donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

Solution 51

Méthode n°1

On calcule $\chi_A = (X-2)^2(X-3)$. On effectue la division euclidienne de X^n par χ_A. Il existe un polynôme deux polynômes Q_n et R_n tels que

$$X^n = \chi_A Q_n + R_n \qquad \text{et} \qquad \deg R_n < 3$$

Alors 2 est racine double de $X^n - R_n$ et 3 est racine simple de $X^n - R^n$ ce qui donne

$$(X^n - R_n)(2) = (X^n - R_n)(3) = (X^n - R_n)'(3) = 0$$

En notant $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$ avec $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$, on obtient le système

$$\begin{cases} 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \\ \qquad 6a_n + b_n = 3n^{n-1}n \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a_n = 3^{n-1}n - 3^n + 2^n \\ b_n = 6 \cdot 3^n - 5 \cdot 3^{n-1}n - 6 \cdot 2^n \\ c_n = 9 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^{n-1}n - 8 \cdot 3^n \end{cases}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = \chi_A(A)Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$$

Par conséquent,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\right)A^2 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}\right)A + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!}\right)I_3 = e^2A^2 + (e^3 - 6e^2)A + (9e^2 - 2e^3)I_3 = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 10e^2 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 9e^2 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 11e^2 \end{pmatrix}$$

Méthode n°2

Comme χ_A est scindé, A est trigonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 3\}$. On calcule sans peine $E_2(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Enfin, on recherche $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$AU = 2U + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On trouve $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$ en posant

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\exp(\mathrm{A}) = \mathrm{P}\exp(\mathrm{T})\mathrm{P}^{-1}$. Or

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\exp(\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\exp(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 10e^2 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 9e^2 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 11e^2 \end{pmatrix}$$

Solution 52

Notons p l'indice de nilpotence de u. Alors

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{u^n}{n!}$$

Remarquons que

$$\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^n}{n!} = \left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^{n-1}}{n!}\right) \circ u = u \circ \left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^{n-1}}{n!}\right)$$

On en déduit automatiquement que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\operatorname{Im}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \subset \operatorname{Im}(u)$.
Soit $x \in \operatorname{Ker}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{u^k(x)}{k!} = 0_{\mathrm{E}}$$

Supposons $u(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Notons alors ℓ le plus grand entier naturel non nul vérifiant $u^\ell(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. En appliquant $u^{\ell-1}$ à la dernière relation, on obtient $u^\ell(x) = 0_{\mathrm{E}}$, ce qui est contradictoire. On en déduit que $u(x) = 0_{\mathrm{E}}$ i.e. $x \in \operatorname{Ker}(u)$. Par double inclusion, $\operatorname{Ker}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \operatorname{Ker}(u)$. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \operatorname{rg}(u)$. Or $\operatorname{Im}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \subset \operatorname{Im}(u)$ donc $\operatorname{Im}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \operatorname{Im}(u)$.