INTERROGATION ÉCRITE N°08

NOM : Prénom : Note :

1. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Montrer que l'application $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$ n'est pas continue.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|X^k\|_\infty = 1$ *et* $\|D(X^k)\|_\infty = \|kX^{k-1}\|_\infty = k$. *Ainsi* $\dfrac{\|D(X^k)\|_\infty}{\|X^k\|_\infty} = k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. *Comme* D *est linéaire, on en déduit que* D *n'est pas un endomorphisme continu de* $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$. ∎

2. On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $\varphi : f \in E \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ est continue sur E et calculer sa norme subordonnée.

   Pour tout $f \in E$, *on a*

   $$|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,dx = \|f\|_\infty$$

   On en déduit que φ *est continue sur* E *par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.*
   Par ailleurs, $|||\varphi||| \leq 1$. *Enfin, si* f *est la fonction constante égale à* 1, *il est clair que* $\varphi(f) = 1$ *donc*

   $$|||\varphi||| \geq \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_\infty} = 1$$

   Par conséquent, $|||\varphi||| = 1$. ∎

3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(\mathrm{M})$ *est continue car* $\det(\mathrm{M})$ *est polynomial en les coefficients de* M.
   Or $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est l'image réciproque de l'ouvert* $\mathbb{K}^*$ *par l'application continue* $\det$ *donc* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est ouvert.* ∎

4. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Posons* $\mathrm{M}_p = \mathrm{M} - \frac{1}{p}\mathrm{I}_n$ *pour* $p \in \mathbb{N}^*$. *Comme le spectre de* M *est fini et que la suite* $(1/p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *prend une infinité de valeurs, il existe* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, *tel que* $\frac{1}{p} \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ *pour tout* $n \geq \mathrm{N}$. *Ainsi* $\mathrm{M}_p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *pour tout* $p \geq \mathrm{N}$. *Puisque* (M_p) *converge vers* M, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ∎

5. L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ possède-t-elle une limite en $(0,0)$? Justifier.

   D'une part, $(t,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$ *et* $f(t,t) = \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
   D'autre part, $(t,0) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$ *et* $f(t,0) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   On en déduit que f *n'admet pas de limite en* $(0,0)$. ∎