

DEVOIR SURVEILLÉ N°13

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

E3A MP 2010

On étudie dans cet exercice des équations de la forme

$$(\mathcal{E}_{p,q}) : M^2 + pM + qI_n = 0$$

où l'inconnue M est une matrice carrée de taille n à coefficients réels ($M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), p et q sont deux paramètres réels et I_n désigne la matrice identité de taille n .

1. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$E(M) = \{PMP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{R})\}$$

Démontrer que si M est solution de l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$, alors toute matrice de $E(M)$ est également solution.

Dans la suite, les ensembles de solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$ pourront être écrits sous la forme d'une réunion d'ensembles $E(A)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$:

$$M^2 - (a+b)M + abI_n = 0$$

avec a et b deux réels distincts.

- a. Démontrer que toute solution M de l'équation est diagonalisable (on énoncera complètement le théorème utilisé).
 - b. Déterminer les solutions de l'équation $\mathcal{E}_{-(a+b),ab}$.
3. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$ (c'est-à-dire l'équation $M^2 = 0$).
- a. On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^n canoniquement associé à la matrice M . Démontrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.
 - b. Énoncer précisément le théorème du rang.
 - c. Démontrer que $\text{rg } f \leq \frac{n}{2}$.
 - d. On pose $p = \text{rg } f$. Démontrer qu'il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_p & 0 \end{array} \right)$$

- e. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$.

4. On considère dans cette question l'équation (\mathcal{E}_{-2a,a^2}) :

$$M^2 - 2aM + a^2I_n = 0$$

avec a un réel.

- a. Démontrer que M est solution si et seulement si $N = M - aI_n$ vérifie $N^2 = 0$.
 - b. En déduire les solutions de l'équation (\mathcal{E}_{-2a,a^2}) .
5. Démontrer que si n est impair, l'équation $M^2 + I_n = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. On considère l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$ (c'est-à-dire l'équation $M^2 + I_n = 0$). On suppose que n est pair et on note $n = 2p$.
- a. Démontrer que toute solution M est diagonalisable sur \mathbb{C} .
 - b. Démontrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array} \right)$$

Exercice 2 ★★**E3A MP 2019**

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer

$$2 \cos(p) \cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad 2 \sin(p) \cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme e^z .

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction u_n de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur \mathcal{D} .
3. Donner pour tout $x \in \mathcal{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
4. Pour tout entier naturel n , on note

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) C(x) \, dx$$

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) C(x) \, dx$$

- a. Calculer J_n puis I_n .
 - b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
5. On pose enfin, lorsque cela existe $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 3 ★★

E3A MP Maths1 2015

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge. On admet alors que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

2. Dans la suite de l'énoncé, α désigne un réel strictement positif et x un réel.

a. Montrer que l'application $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.

b. Montrer que l'application $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur \mathbb{R} .

3. On pose

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt$$

a. Montrer que I est réelle.

b. Soient $A > 0$ et $B > 0$. On admet l'existence de l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx$. Montrer que

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{\cos(AB)}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

c. En déduire le calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx$ pour $B > 0$ puis pour B quelconque.

d. En déduire la valeur de I .

Exercice 4 ★★**D'après E3A 2011**

On identifiera les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant la relation

$$(\star) : P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1)$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $a_0 = \alpha$ et $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que si α est racine de P , a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b. On suppose $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. (a_n) est alors une suite de réels. Montrer que (a_n) est strictement monotone.
 - c. En déduire que P n'admet aucune racine strictement positive.
2.
 - a. Montrer que -1 n'est pas racine de P .
 - b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_n + 1$ en fonction de α et n .
 - c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = |a_n + 1|$. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur α la suite (r_n) est-elle strictement monotone ?
 - d. En déduire que si α est racine de P , alors $|\alpha + 1| = 1$.
 - e. Montrer que si α est racine de P , alors $|\alpha - 1| = 1$.
3. Montrer que si P est non constant, alors P admet 0 pour unique racine.
4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation (\star) .