

DEVOIR SURVEILLÉ N°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Remarquons que deux endomorphismes semblables ont même trace. En effet, pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi \in GL(E)$, on a par propriété de la trace

$$\text{tr}(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) = \text{tr}(\varphi^{-1} \circ \varphi \circ u) = \text{tr}(u)$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant **(C3)**. Par linéarité de la trace, $\text{tr}(u) = \text{tr}(-u) = -\text{tr}(u)$ i.e. $\text{tr}(u) = 0$.

Si u vérifie **(C3)** alors $\text{tr}(u) = 0$

2 E étant de dimension 2, $\chi_u = X^2 - \text{tr}(u)X + \det(u) = X^2 - \delta^2$. Ce polynôme annulant u (Cayley-Hamilton) on en déduit que $u^2 = \delta^2 \text{Id}_E$.

Le spectre est l'ensemble des racines de χ_u et vaut ici $\{\delta, -\delta\}$. Ainsi u possède deux valeurs propres. Or $\dim E = 2$ et les sous-espaces propres de u sont en somme directe, ils ne peuvent qu'être de dimension 1.

$$u^2 = \delta^2 \text{Id}_E, \text{Sp}(u) = \{\delta, -\delta\}, \dim(E_\delta(u)) = \dim(E_{-\delta}(u)) = 1$$

REMARQUE. Si on ne connaît pas encore le théorème de Cayley-Hamilton, on remarque tout de même que $\text{Sp}(u) = \{\delta, -\delta\}$. Comme $\text{card Sp}(u) = 2 = \dim E$, u est diagonalisable. Sa matrice dans une base de vecteurs propres est alors $\text{diag}(\delta, -\delta)$. On en déduit que la matrice de u^2 dans cette même base est $\delta^2 I_2$ i.e. $u^2 = \delta^2 \text{Id}_E$.

3 Notons e_+ un vecteur propre pour δ et e_- un vecteur propre pour $-\delta$. Comme (e_+, e_-) est libre, $e_+ + e_- \neq 0_E$. Ainsi $D = \text{vect}(e_+ + e_-)$ est une droite. De plus, $u(D) = \text{vect}(\delta e_+ - \delta e_-) = \text{vect}(e_+ - e_-)$ car $\delta \neq 0$. Or (e_+, e_-) est libre, ce qui permet de prouver aisément que $e_+ - e_- \notin D$. Ainsi $u(D) \not\subset D$.

Posons $F = D = \text{vect}(e_+ + e_-)$ et $G = u(D) = \text{vect}(e_+ - e_-)$. La liberté de (e_+, e_-) permet aisément de montrer la liberté de $(e_+ + e_-, e_+ - e_-)$. Comme $\dim E = 2$, $(e_+ + e_-, e_+ - e_-)$ est une base de E de sorte que $E = F \oplus G$.

Enfin, $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

u est échangeur

4 Un calcul par blocs montre que

$$\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}$$

On montre de même que

$$\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} \text{ est somme de deux matrices de carré nul}$$

5 On vérifie par un calcul par blocs, par exemple, que $D^2 = I_n$. D est donc inversible et $D^{-1} = D$. Le calcul par blocs donne aussi

$$DMD^{-1} = DMD = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} = -M$$

Par définition de la similitude,

M et $-M$ sont semblables

6 Notons $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_p)$. Comme $u(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G}$, on peut poser $A = \text{mat}_{\mathcal{G}}(u(\mathcal{F})) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et comme $u(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}$, on peut poser $B = \text{mat}_{\mathcal{F}}(u(\mathcal{G})) \in \mathcal{M}_{n,p}$. On a alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$. Finalement,

il existe $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$

7 Supposons \mathcal{F} et \mathcal{G} non nuls. D'après la question précédente, il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$. En notant a et b les endomorphismes dont les matrices dans la base \mathcal{B} sont respectivement $\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$, on a bien $u = a + b$, $a^2 = b^2 = 0$: u vérifie **(C2)**. La question 5 montre de même que u et $-u$ sont semblables : u vérifie **(C3)**.

Si \mathcal{F} est nul, alors $\mathcal{G} = E$ et $\text{Im}(u) = u(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F} = \{0\}$. u est l'endomorphisme nul qui vérifie immédiatement **(C2)** et **(C3)**. C'est la même chose si $\mathcal{G} = \{0\}$ (travailler alors avec $\mathcal{F} = E$).

u vérifie **(C2)** et **(C3)**

8 Puisque $f^2 = 0$, $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Par conséquent, $\dim \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. D'après le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f))$$

On a donc

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \text{ et } \dim(\text{Ker}(f)) \geq \frac{\dim(E)}{2}$$

9 Soit $x \in \text{Ker}(a) \cap \text{Ker}(b)$. On a $u(x) = a(x) + b(x) = 0$ et comme u est injective $x = 0$. Ceci montre que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Ker}(b)$ sont en somme directe.

De plus,

$$\forall x \in E, x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \text{Ker}(a) + \text{Ker}(b)$$

car $a^2 = b^2 = 0$. Ainsi

$$E = \text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)$$

De plus $\text{Im}(a) \subset \text{Ker}(a)$ (car $a^2 = 0$) et $\text{Im}(b) \subset \text{Ker}(b)$ (car $b^2 = 0$). Ainsi $\text{Im}(a) \cap \text{Im}(b) \subset \text{Ker}(a) \cap \text{Ker}(b) = \{0_E\}$. $\text{Im}(a)$ et $\text{Im}(b)$ sont en somme directe.

De plus,

$$\forall x \in E, x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \text{Im}(a) + \text{Im}(b)$$

donc $E = \text{Im}(a) \oplus \text{Im}(b)$.

Ainsi

$$\dim E = \dim \text{Im}(a) + \dim \text{Im}(b) = \dim \text{Ker}(a) + \dim \text{Ker}(b)$$

d'où

$$(\dim \text{Ker}(a) - \dim \text{Im}(a)) + (\dim \text{Ker}(b) - \dim \text{Im}(b)) = 0$$

Comme $\text{Im}(a) \subset \text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(b) \subset \text{Ker}(b)$, il s'agit d'une somme de deux termes positifs. On en déduit que ces termes sont nuls. Ainsi $\dim \text{Im}(a) = \dim \text{Ker}(a)$ et $\dim \text{Im}(b) = \dim \text{Ker}(b)$. Par conséquent,

$$\text{Im}(a) = \text{Ker}(a) \text{ et } \text{Im}(b) = \text{Ker}(b)$$

10 On a $u(\text{Ker}(a)) \subset a(\text{Ker}(a)) + b(\text{Ker}(a)) = b(\text{Ker}(a)) \subset \text{Im}(b) = \text{Ker}(b)$ et de même $u(\text{Ker}(b)) \subset \text{Ker}(a)$. Comme $\text{Ker}(a)$ et $\text{Ker}(b)$ sont supplémentaires dans E ,

$$u \text{ est échangeur}$$

11 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}(v^k) \subset \text{Ker}(v \circ v^k) = \text{Ker}(v^{k+1})$ donc

$$(\text{Ker}(v^k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ croît pour l'inclusion}$$

12 L'ensemble $\{\dim \text{Ker}(v^k), k \in \mathbb{N}\}$ est une partie de \mathbb{N} majorée par $\dim E$. Elle admet donc un plus grand élément d . Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(v^p) = d$. Pour $k \geq p$, $\text{Ker}(v^p) \subset \text{Ker}(v^k)$. Ainsi $d = \dim \text{Ker}(v^p) \leq \dim \text{Ker}(v^k)$. Mais par définition de d , $\dim \text{Ker}(v^k) \leq d$ de sorte que $\dim \text{Ker}(v^k) = \dim \text{Ker}(v^p) = d$ puis $\text{Ker}(v^k) = \text{Ker}(v^p)$ puisque $\text{Ker}(v^p) \subset \text{Ker}(v^k)$.

On peut conclure que

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall k \geq p, \text{Ker}(v^k) = \text{Ker}(v^p)$$

Mais pour $k < p$, $\text{Ker}(v^k) \subset \text{Ker}(v^p)$ par croissance de la suite $(\text{Ker}(v^k))$. Finalement,

$$\text{Ker}(v^p) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(v^k)$$

Si p convient, tout entier plus grand que p convient aussi et on peut supposer p pair quitte à le changer en $p + 1$.

13 Par définition,

$$\text{Ker}(v^{2p}) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(v^k) = \text{Ker}(v^p)$$

De plus, par croissance de la suite $(\text{Ker}(v^k))_{k \in \mathbb{N}}$, $\text{Ker}(v^p) \subset \text{Ker}(v^{2p})$. Ainsi

$$E_\lambda^c(f) = \text{Ker}(v^p) = \text{Ker}(v^{2p})$$

Soit $x \in E_\lambda^c(f) \cap \text{Im}(v^p)$. Il existe y tel que $x = v^p(y)$ et $v^{2p}(y) = v^p(x) = 0$ montre que $y \in \text{Ker}(v^{2p}) = \text{Ker}(v^p)$ et donc que $x = v^p(y) = 0$. On a donc $E_\lambda^c(f) \cap \text{Im}(v^p) = \{0_E\}$.

Par théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(v^p) + \dim \text{Im}(v^p) = \dim E$$

Ainsi

$$E = \text{Ker}(v^p) \oplus \text{Im}(v^p) = E_\lambda^c(f) \oplus \text{Im}(v^p)$$

Enfin, $v^p = (f - \lambda \text{Id}_E)^p$ et f appartiennent à l'algèbre commutative $\mathbb{K}[f]$. Comme $v^p = (f - \lambda \text{Id}_E)^p$ et f commutent, $\text{Ker}(v^p) = E_\lambda^c(f)$ et $\text{Im}(v^p)$ sont stables par f .

$$E_\lambda^c(f) \text{ et } \text{Im}(v^p) \text{ sont des supplémentaires de } E \text{ stables par } f.$$

14 Supposons, par l'absurde, que λ soit valeur propre de $f|_{\text{Im}(v^p)}$. Il existe alors $x \in \text{Im}(v^p)$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$ c'est à dire tel que $x \in \text{Ker}(v) \subset E_\lambda^c(f)$. Comme $E_\lambda^c(f)$ et $\text{Im}(v^p)$ sont en somme directe, $x = 0$ et ceci est contradictoire. Ainsi λ n'est pas valeur propre de $f|_{\text{Im}(v^p)}$.
 $(X - \lambda)^p$ annule $f|_{E_\lambda^c(f)}$ car $E_\lambda^c(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^p$. La seule valeur propre possible pour $f|_{E_\lambda^c(f)}$ est donc λ .

$$\lambda \notin \text{Sp}(f|_{\text{Im}(v^p)}) \text{ et } \text{Sp}(f|_{E_\lambda^c(f)}) \subset \{\lambda\}$$

Si $E_\lambda^c(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors $f|_{E_\lambda^c(f)}$ possède au moins une valeur propre car son polynôme caractéristique est scindé dans \mathbb{C} . Ainsi $\text{Sp}(f|_{E_\lambda^c(f)}) = \{\lambda\}$.

15 Comme $\text{Im } v^p$ est stable par f , on peut considérer l'endomorphisme g de $\text{Im } v^p$ induit par f . Comme χ_g est scindé sur \mathbb{C} , g possède au moins une valeur propre α . Cette valeur propre est a fortiori une valeur propre de f donc $\alpha \in \{\lambda, \mu\}$. On peut avoir $\alpha = \lambda$ sinon il existerait un vecteur non nul dans $E_\lambda(g) \cap \text{Im } v^p \subset E_\lambda^c(f) \cap \text{Im } v^p = \{0_E\}$. Ainsi μ est la seule valeur propre de g . En raisonnant comme précédemment, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Im } v^p = E_\mu^c(g) \oplus \text{Im } w^q$ en posant $w = g - \mu \text{Id}_{\text{Im } v^p}$. Si $\text{Im } w^q \neq \{0_E\}$, χ_g étant scindé, les questions précédentes montrent que la restriction de g à $\text{Im } w^q$ posséderait une nouvelle valeur propre distincte de λ et μ , qui serait encore une valeur propre de f . Comme f ne possède que deux valeurs propres, $\text{Im } w^q = \{0\}$ et $E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(g)$. Or $E_\mu^c(g) = E_\mu^c(f) \cap \text{Im } v^p \subset E_\mu^c(f)$ donc $E \subset E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$. L'inclusion réciproque étant évidente, $E = E_\lambda^c(f) + E_\mu^c(f)$. Enfin, $E_\lambda^c(f)$ et $E_\mu^c(f)$ sont stables par f donc leur intersection également. Si cette intersection n'était pas nulle, la question précédente montre que l'endomorphisme induit par f sur cette intersection ne pourrait posséder qu'une seule valeur propre qui serait à la fois λ et μ , ce qui contredit $\lambda \neq \mu$. Ainsi $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f) = \{0_E\}$ et

$$E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$$

REMARQUE. L'énoncé du problème cherche à ne pas sortir du programme de PSI, ce qui oblige à toutes ces contorsions. Avec le programme de MP, on peut plus simplement utiliser le lemme des noyaux. Si f ne possède que deux valeurs propres λ et μ , alors il existe des entiers r et s tels que $\chi_f = (X - \lambda)^r (X - \mu)^s$ car χ_f est scindé sur \mathbb{C} . D'après le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, $E = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^p \oplus \text{Ker}(f - \mu \text{Id}_E)^q$, ce qui suffit pour la suite du problème. On aura compris que $E_\lambda^c(f)$ désigne le sous-espace *caractéristique* de f associé à la valeur propre λ .

16 Tout d'abord,

$$u^2 = a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2 = a \circ b + b \circ a$$

Ainsi

$$u^2 \circ a = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a$$

et

$$a \circ u^2 = a \circ b \circ a + b \circ a^2 = a \circ b \circ a$$

de sorte que

$$a \circ u^2 = u^2 \circ a$$

On montre de la même manière que

$$b \circ u^2 = u^2 \circ b$$

17 Comme a commute avec u^2 , il commute avec toutes les itérées de u^2 et donc avec u^p puisque p est pair. On en déduit que $G = \text{Im}(u^p)$ est stable par a . On montre de même que G est stable par b . Comme $a^2 = b^2 = 0$, on en déduit que

$$a_G^2 = b_G^2 = 0$$

18 Notons $F = E_0^c(u)$. F et G sont stables par u .

D'après la question **14**, 0 est la seule valeur propre de l'endomorphisme u_F de F induit par u donc u_F est nilpotent.

Toujours d'après la question **14**, 0 n'est pas valeur propre l'endomorphisme u_G de G induit par u donc u_G est inversible.

D'après le résultat admis, il existe une décomposition $F = F_1 \oplus F_2$ telle que $u(F_1) \subset F_2$ et $u(F_2) \subset F_1$.

Avec la question précédente, u_G vérifie **(C2)** et comme c'est un automorphisme, la troisième partie s'applique. Il existe une décomposition $G = G_1 \oplus G_2$ telle que $u(G_1) \subset G_2$ et $u(G_2) \subset G_1$.

Comme F et G sont en somme directe, on montre aisément que F_1 et G_1 sont en somme directe de même que F_2 et G_2 . En posant $H_1 = F_1 \oplus G_1$ et $H_2 = F_2 \oplus G_2$, on a bien

$$E = F \oplus G = (F_1 \oplus F_2) \oplus (G_1 \oplus G_2) = (F_1 \oplus G_1) \oplus (F_2 \oplus G_2) = H_1 \oplus H_2$$

et

$$u(H_1) = u(F_1) + u(G_1) \subset F_2 + G_2 = H_2 \quad \text{et} \quad u(H_2) = u(F_2) + u(G_2) \subset F_1 + G_1 = H_1$$

$$u \text{ est échangeur}$$

19 Puisque $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$, on a également $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$. On en déduit que

$$\varphi^2 \circ u = \varphi \circ (\varphi \circ u) = -\varphi \circ u \circ \varphi = -(\varphi \circ u) \circ \varphi = u \circ \varphi^2$$

$$\boxed{\varphi^2 \circ u = u \circ \varphi^2}$$

20 Comme E est \mathbb{C} -espace vectoriel, φ^2 possède une valeur propre λ . La question **13** donne $E = E_\lambda^c(\varphi^2) \oplus \text{Im}(\nu^p)$ où $\nu = \varphi^2 - \lambda \text{Id}_E$ et $E_\lambda^c(\varphi^2) = \text{Ker } \nu^p$ pour un bon entier p .

Notons $F = \text{Ker}(\nu^p)$ et $G = \text{Im}(\nu^p)$. F et G sont stables par φ puisque φ commute avec ν^p . Comme u commute avec φ^2 et donc avec ν^p , ils sont également stables par u .

Comme F et G sont stables par φ et u , on vérifie aisément que les endomorphismes u_F et u_G induits par u vérifient encore la condition **(C3)**.

L'indécomposabilité de u indique alors que F ou G est nul. Comme λ est valeur propre de φ^2 , F n'est pas nul donc $G = \text{Im } \nu^p$ l'est. On en déduit que $(X - \lambda)^p$ est un polynôme annulateur de φ^2 puis que λ est l'unique valeur propre de φ^2 . Comme φ est inversible, φ^2 l'est également et $\lambda \neq 0$.

Soit α une racine carrée (complexe) de λ . Puisque $\lambda \neq 0$, $\alpha \neq 0$. De plus, $(X^2 - \lambda)^p = (X - \alpha)^p(X + \alpha)^p$ annule φ donc $\text{Sp}(\varphi) \subset \{-\alpha, \alpha\}$.

$$\boxed{\text{Sp}(\varphi) \subset \{\alpha, -\alpha\} \text{ avec } \alpha^2 = \lambda \neq 0 \text{ unique valeur propre de } \varphi^2}$$

21 Comme $\alpha \neq -\alpha$ et $\text{Sp}(\varphi) \subset \{-\alpha, \alpha\}$, on peut appliquer la question **15** et obtenir

$$E = E_\alpha^c(\varphi) \oplus E_{-\alpha}^c(\varphi)$$

Montrons ensuite que $u(E_\alpha^c(\varphi)) \subset E_{-\alpha}^c(\varphi)$ et $u(E_{-\alpha}^c(\varphi)) \subset E_\alpha^c(\varphi)$.

Notons que l'hypothèse **(C3)** donne $u \circ \varphi = -\varphi \circ u$ puis

$$u \circ (\varphi - \alpha \text{Id}_E) = -(\varphi + \alpha \text{Id}_E) \circ u$$

On montre alors aisément par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u \circ (\varphi - \alpha \text{Id}_E)^k = (-1)^k (\varphi + \alpha \text{Id}_E)^k \circ u$$

On sait qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $E_\alpha^c(\varphi) = \text{Ker}(\varphi - \alpha \text{Id}_E)^p$. La relation précédente appliquée à $k = p$ donne $u(E_\alpha^c(\varphi)) \subset E_{-\alpha}^c(\varphi)$. De même, en appliquant la relation précédente à $k = q$ où $E_{-\alpha}^c(\varphi) = \text{Ker}(\varphi + \alpha \text{Id}_E)^q$, on obtient $u(E_{-\alpha}^c(\varphi)) \subset E_\alpha^c(\varphi)$.

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

22 On procède par récurrence sur la dimension de l'espace.

Initialisation. On suppose que u est un endomorphisme d'un espace E de dimension 1 qui vérifie **(C3)**. Comme $\dim E = 1$, l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ est commutative et la condition **(C3)** donne $u = 0$. On peut alors considérer la décomposition $E = E \oplus \{0_E\}$ pour en conclure que u est échangeur.

Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'au rang n . Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension $n + 1$ et qui vérifie **(C3)**. Si u est indécomposable, il est échangeur avec ce qui précède.

Sinon, il existe une décomposition $E = F \oplus G$ avec F et G non nuls stables par u et tels que u_F et u_G vérifient **(C3)**. L'hypothèse de récurrence s'applique à u_F et u_G et permet de décomposer F et G . Comme en question **18**, on en déduit une décomposition de E qui montre que u est échangeur.

$$\boxed{\text{(C3) implique (C1)}}$$