

# DEVOIR À LA MAISON N°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – CCP Maths 2 MP 2019

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

### I Etude de quelques exemples

- 1** Justifier que deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ont même trace, même déterminant, même rang et même polynôme caractéristique.
- 2** On se donne deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que ces deux matrices ont même trace, même déterminant, même rang et même polynôme caractéristique.

Ces deux matrices sont-elles semblables ? On pourra vérifier que l'une d'entre elles est diagonalisable. Ont-elles le même polynôme minimal ?

- 3** On se donne deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Etablir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

- en utilisant l'endomorphisme  $u$  associé à  $A$  dans une base  $(e_1, e_2, e_3)$  d'un espace vectoriel  $E$  et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de  $E$  ;
- en prouvant que le polynôme  $X^3 - 3X - 1$  admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

- 4** Démontrer que toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang 1 est semblable à une matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

- 5 Application.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  et  $u$  un endomorphisme de rang 1 vérifiant  $u^2 \neq 0$ . Démontrer que  $u$  est diagonalisable.  
On pourra calculer  $U^2$ .

- 6** Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

- 7** On se donne  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.

Déterminer le rang de la matrice  $A$  et en déduire que 0 est valeur propre de  $A$ .

Justifier que  $2(\alpha + \beta)$  et  $2(\alpha - \beta)$  sont aussi valeurs propres de  $A$ .

Préciser une base de vecteurs propres de  $A$ .

Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

- 8** Démontrer que quels que soient les réels non nuls  $a$  et  $b$  et le réel  $\lambda$ , les matrices  $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  sont semblables.

## II Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Il existe une matrice  $P$  inversible à coefficients complexes telle que  $B = P^{-1}AP$ . Écrivons  $P = R + iS$  où  $R$  et  $S$  sont deux matrices à coefficients réels.

- 9** Démontrer que  $RB = AR$  et  $SB = AS$ .
- 10** Justifier que la fonction  $x \mapsto \det(R + xS)$  est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel  $x$  tel que la matrice  $R + xS$  soit inversible.
- 11** Conclure que  $A$  et  $B$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- 12 Application.** Démontrer que toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de polynôme caractéristique  $X^3 + X$  est semblable

à la matrice  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

## III Polynôme caractéristique et polynôme minimal

On s'intéresse dans cette partie à la proposition  $P_n$  :

Deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 13** En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, démontrer que la proposition  $P_n$  est vraie pour  $n = 2$ .  
On admet qu'elle l'est également pour  $n = 3$ .
- 14** Démontrer que la proposition  $P_n$  est fausse pour  $n = 4$ . On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.