DEVOIR À LA MAISON N°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Fonction dilogarithme

I Définition et étude de la fonction dilogarithme

On pose pour $t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t}$$

1 Justifier que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$. Dans la suite, on notera encore f ce prolongement.

On note alors pour $x \in]-\infty, 1[$

$$\mathrm{L}(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

2 Justifier que L peut se prolonger en une fonction continue sur $]-\infty, 1]$. On note encore L ce prolongement.

3 Justifier que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et donner sa dérivée.

4 Déterminer le sens de variation de L.

5 Déterminer la limite de L en $-\infty$.

II Relations fonctionnelles et valeurs particulières

6 **6.a** A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\mathrm{L}(1) = \int_0^{+\infty} \frac{x\, \mathrm{d}x}{e^x - 1}$$

6.b On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{I}_k = \int_0^{+\infty} xe^{-kx}\, \mathrm{d}x$$

Justifier la convergence de cette intégrale et calculer I_k.

6.c Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \dfrac{x}{e^x - 1} \leq 1$.

6.d En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \mathrm{L}(1) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k \leq \frac{1}{n}$$

6.e On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $L(1)$.

$\boxed{7}$ **7.a** Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$$

7.b En déduire la valeur de $L(-1)$.

$\boxed{8}$ **8.a** Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$L(x) + L(1 - x) = C - \ln(x)\ln(1 - x)$$

puis déterminer la valeur de C.

8.b En déduire la valeur de $L\left(\frac{1}{2}\right)$.

III Une équation différentielle

On considère les équations différentielles

$$\mathcal{E} : \; xy'' + y' = \frac{1}{1 - x}$$

et

$$\mathcal{E}' : \; xz' + z = \frac{1}{1 - x}$$

$\boxed{9}$ Résoudre $\mathcal{E}'$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$.

$\boxed{10}$ En déduire les solutions de $\mathcal{E}$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$. On exprimera ces solutions à l'aide de la fonction L.

$\boxed{11}$ Déterminer les éventuelles solutions de $\mathcal{E}$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.