

NOM :

Prénom :

Note :

1. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose que  $f^3 + f^2 + f = 0$ . Montrer que

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$$

On sait que  $X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$  annule  $f$ . De plus  $X \wedge (X^2 + X + 1) = 1$  en vertu de la relation de Bézout  $1 \times (X^2 + X + 1) - (X + 1) \times X = 1$ . D'après le lemme des noyaux :

$$E = \text{Ker}(f^3 + f^2 + f) = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$$

Notamment, d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) = \dim E - \dim \text{Ker}(f) = \dim \text{Im } f$$

De plus,  $(f^2 + f + \text{Id}_E) \circ f = f^3 + f^2 + f = 0$  donc  $\text{Im } f \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$ . Ainsi  $\text{Im } f = \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$ , ce qui conclut. ■

2. Soient un entier  $n \geq 2$  et  $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \text{tr}(M)I_n$ . Montrer que  $u$  est un endomorphisme diagonalisable de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et déterminer son polynôme minimal.

Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $u^2(M) = \text{tr}(M)u(I_n) = n \text{tr}(M)I_n = nu(M)$ . Ainsi  $u^2 - nu = 0$ . Le polynôme simplement scindé  $X^2 - nX = X(X - n)$  annule  $u$  donc  $u$  est diagonalisable. De plus,  $\pi_u$  est unitaire et divise  $X(X - n)$ .

De plus,  $u(I_n) = nI_n$  donc  $n \in \text{Sp}(u)$  de sorte que  $n$  est une racine de  $\pi_u$ . Enfin, en choisissant une matrice  $A$  non nulle de trace nulle (il en existe car  $n \geq 2$ ),  $u(A) = 0$  donc  $0 \in \text{Sp}(A)$  de sorte que  $0$  est une racine de  $\pi_u$ .

On en déduit que  $\pi_u = X(X - n)$ . ■

3. Déterminer le polynôme minimal de  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On trouve  $\chi_A = X(X-1)^2$  de sorte que  $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$ . On sait que  $\pi_A$  divise  $\chi_A$  et que les racines de  $\chi_A$  sont 0 et 1. Ainsi le polynôme minimal de A vaut  $X(X-1)$  ou  $X(X-1)^2$ . On vérifie que  $A(A - I_3) = 0$  donc  $\pi_A = X(X-1)$ . ■

4. On pose  $f_n : x \mapsto \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ . Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement mais pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

Tout d'abord,  $f_n(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{R}$ . De plus, pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2nx}{n^2x^2} = \frac{2}{nx}$  de sorte que  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Ainsi  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

Par contre,  $f_n(1/n) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par conséquent,  $(f_n(1/n))$  ne converge vers 0 et  $(f_n)$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ . ■

5. Soit  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ . Déterminer le domaine de définition de  $\zeta$  et montrer que  $\zeta$  est continue sur son domaine de définition.

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$  converge si et seulement si  $x > 1$  donc le domaine de définition de  $\zeta$  est  $]1, +\infty[$ . Soit  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $]1, +\infty[$ . Soit  $a > 1$ . Alors  $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = \frac{1}{n^a}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^a}$  converge puisque  $a > 1$ . Ainsi

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a > 1$ .

Par conséquent,  $\zeta$  est continue sur  $]1, +\infty[$ . ■