

# FONCTIONS À VALEURS VECTORIELLES

Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées sont des fonctions définies sur un **intervalle**  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans un  **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie** ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

## 1 Dérivabilité

### 1.1 Définition

#### Définition 1.1 Dérivabilité en un point

Soit  $f : I \rightarrow E$ . On dit que  $f$  est **dérivable** en  $a \in I$  si  $t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$  admet une limite en  $a$ . Dans ce cas, cette limite est notée  $f'(a)$ .

#### Proposition 1.1 Dérivabilité et continuité

Soit  $f : I \rightarrow E$ . Si  $f$  est dérivable en  $a \in I$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

#### Définition 1.2 Négligeabilité

Soient  $f$  une fonction à valeurs dans  $E$  et  $g$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , toutes deux définies sur un voisinage de  $a$  (éventuellement non définies en  $a$ ). On dit que  $f$  est **négligeable** devant  $g$  en  $a$  si  $\lim_a \frac{f}{g} = 0$ . On note alors  $f = o_a(g)$ .

#### Proposition 1.2 Dérivabilité et développement limité

Une fonction  $f : I \rightarrow E$  est dérivable en  $a \in I$  si et seulement si  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en  $a$ . Dans ce cas, ce développement limité est

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + o(t - a)$$

#### Proposition 1.3 Dérivabilité et fonctions coordonnées

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors  $f : I \rightarrow E$  est dérivable en  $a \in I$  si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_i = e_i^* \circ f$  est dérivable en  $a$ . Dans ce cas,

$$f'(a) = \sum_{i=1}^n f'_i(a) e_i$$

**REMARQUE.** Le fait que  $f_i = e_i^* \circ f$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  signifie que :

$$\forall t \in I, f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i$$

**Définition 1.3** Dérivabilité à gauche, à droite

Soit  $f : I \rightarrow E$ .

Alors  $f$  est **dérivable à droite** en  $a \in I$  si  $t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$  admet une limite à droite en  $a$ .

De même,  $f$  est **dérivable à gauche** en  $a \in I$  si  $t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$  admet une limite à gauche en  $a$ .

**1.2 Opérations sur les fonctions dérivables****Proposition 1.4** Combinaison linéaire

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $E$  dérivables en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ). Alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ) et  $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ .

**Proposition 1.5**

Soient  $f : I \rightarrow E$  et  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$  dérivables en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ). Alors  $\lambda f$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ) et  $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$ .

**Proposition 1.6** Composition par une application linéaire

Soit  $f : I \rightarrow E$  dérivable en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ) et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $L \circ f$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ). De plus,  $(L \circ f)' = L \circ f'$ .

**Proposition 1.7** Dérivabilité et application bilinéaire

Soient  $f : I \rightarrow E$  et  $g : I \rightarrow F$  dérivables en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ). Soit  $B : E \times F \rightarrow G$  une application **bilinéaire**. Alors  $B(f, g)$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ). De plus,  $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$ .

**REMARQUE.**  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie.

**Exercice 1.1**

Soit  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une application dérivable. Montrer que si  $A(t)$  et  $A'(t)$  commutent pour tout  $t \in I$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$  est dérivable sur  $I$  et que  $(A^n)' = nA'A^{n-1} = nA^{n-1}A'$ .

**Corollaire 1.1**

Soient  $E$  un espace euclidien,  $f : I \rightarrow E$  et  $g : I \rightarrow E$  deux fonctions dérivables en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ). Alors  $\langle f, g \rangle$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ) et  $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$ .

**Exemple 1.1**

Si  $E$  est un espace euclidien et  $f : I \rightarrow E$  est une fonction dérivable sur  $I$  **ne s'annulant pas sur  $I$** , alors  $\|f\|$  est dérivable sur  $I$  et  $\|f\|' = \frac{\langle f', f \rangle}{\|f\|}$ .

**Proposition 1.8 Dérivabilité et application multilinéaire**

Soient  $f_1 : I \rightarrow E_1, \dots, f_p : I \rightarrow E_p$  dérivables en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ). Soit  $M : \prod_{i=1}^p E_i \rightarrow F$  une application **multilinéaire**. Alors  $M(f_1, \dots, f_p)$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ). De plus,

$$M(f_1, \dots, f_p)' = M(f_1', f_2, \dots, f_p) + M(f_1, f_2', \dots, f_p) + \dots + M(f_1, \dots, f_{p-1}', f_p')$$

**REMARQUE.**  $E_1, \dots, E_p$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie.

**Corollaire 1.2**

Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $f_1, \dots, f_p$  des applications de  $I$  dans  $E$  dérivables en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ). Alors  $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_p)$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ) et

$$\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_p)' = \det_{\mathcal{B}}(f_1', f_2, \dots, f_p) + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2', \dots, f_p) + \dots + \det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_{p-1}', f_p')$$

**Proposition 1.9 Composition**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : I \rightarrow J$  dérivable sur  $I$  et  $f : J \rightarrow E$  dérivable sur  $J$ . Alors  $f \circ \varphi$  est dérivable sur  $I$  et  $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$ .

**1.3 Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$** **Définition 1.4 Fonction de classe  $\mathcal{C}^k$** 

Soient  $f : I \rightarrow E$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  si  $f$  est dérivable  $k$  fois sur  $I$  et si  $f^{(k)}$  est continue sur  $I$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$ .

**Notation 1.1**

On note  $\mathcal{C}^k(I, E)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  à valeurs dans  $E$ .

**Proposition 1.10 Combinaison linéaire**

Soit  $(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, E)^2$ , où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(I, E)^2$ . De plus, si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$ .

**REMARQUE.** Ceci signifie que  $\mathcal{C}^k(I, E)$  est un  $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** et, plus précisément, un sous-espace vectoriel de  $E^I$ .

**Proposition 1.11 Composition par une application linéaire**

Soit  $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ , où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , et  $L \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $L \circ f \in \mathcal{C}^k(I, F)$ . De plus, si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$ .

**Proposition 1.12 Classe  $\mathcal{C}^k$  et application bilinéaire**

Soient  $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$  et  $g \in \mathcal{C}^k(I, F)$ . Soit  $B : E \times F \rightarrow G$  une application **bilinéaire**. Alors  $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, G)$ . De plus, si  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B(f^{(j)}, g^{(k-j)})$$

**Proposition 1.13 Classe  $\mathcal{C}^k$  et application multilinéaire**

Soient  $f_1 \in \mathcal{C}^k(I, E_1), \dots, f_p \in \mathcal{C}^k(I, E_p)$ . Soit  $M : \prod_{i=1}^p E_i \rightarrow F$  une application **multilinéaire**. Alors  $M(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{C}^k(I, F)$ .

**REMARQUE.**  $E_1, \dots, E_p$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie.

**Proposition 1.14 Composition**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}^k(I, J)$  et  $f \in \mathcal{C}^k(J, E)$ , où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Alors  $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(I, E)$ .

## 2 Intégration

### 2.1 Définition et propriétés générales

**Définition 2.1 Fonctions continues par morceaux**

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow E$  est dite **continue par morceaux** si ses coordonnées dans une base de  $E$  le sont.

Une fonction  $f : I \rightarrow E$  est dite **continue par morceaux** si elle est continue par morceaux sur **tout segment** de  $I$ .

**REMARQUE.** La continuité par morceaux ne dépend pas de la base choisie.

**Notation 2.1**

On notera  $\mathcal{C}_m(I, E)$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $E$

**Définition 2.2 Intégrale d'une fonction vectorielle**

Soient  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . La quantité

$$\sum_{k=1}^n \left( \int_a^b e_k^* \circ f(t) \, dt \right) e_k$$

est indépendante de la base de  $E$  choisie. On la note  $\int_a^b f(t) \, dt$ ,  $\int_{[a,b]} f$  ou  $\int_a^b f$ .

Les propriétés des intégrales des fonctions à valeurs **vectorielles** sont quasiment les mêmes que celles des intégrales à valeurs **numériques**.

**Proposition 2.1 Linéarité de l'intégrale**

Soit  $(f, g) \in \mathcal{C}_m([a, b], E)^2$ . Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) \, dt = \lambda \int_a^b f(t) \, dt + \mu \int_a^b g(t) \, dt$$

**REMARQUE.** Ceci signifie que l'application  $f \mapsto \int_a^b f(t) \, dt$  est une **application linéaire** de  $\mathcal{C}_m([a, b], E)$  dans  $E$ .

**Exercice 2.1**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$ . Montrer que

$$L\left(\int_a^b f(t) \, dt\right) = \int_a^b L(f(t)) \, dt$$

**Proposition 2.2 Relation de Chasles**

Soient  $a, b, c$  trois réels tels que  $a \leq c \leq b$  et  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$ . Alors

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt$$

**REMARQUE.** On en déduit notamment que  $\int_b^a f(t) \, dt = -\int_a^b f(t) \, dt$ .

**Proposition 2.3 Inégalité triangulaire**

Soit  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$ . Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$



**ATTENTION !** L'ordre des bornes importe. On doit avoir  $a \leq b$ .

**2.2 Sommes de Riemman****Définition 2.3 Somme de Riemann**

Soit  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$ . On appelle **somme de Riemann** de  $f$  l'une des deux sommes suivantes :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

$$R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k)$$

où  $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $n$  est un entier non nul.

**Proposition 2.4 Convergence des sommes de Riemann**

Soit  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$ . Alors les suites  $(R_n(f))$  et  $(R'_n(f))$  convergent vers  $\int_a^b f(t) dt$ .

**REMARQUE.** L'ordre des bornes n'est pas important.

**2.3 Théorème fondamental de l'analyse et conséquences****Définition 2.4 Primitive**

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, E)$ . On dit que  $F : I \rightarrow E$  est une **primitive** de  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ .

**Théorème 2.1 Théorème fondamental de l'analyse**

Soient  $f \in \mathcal{C}(I, E)$  et  $a \in I$ . Alors  $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est l'**unique primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $a$** .

**Corollaire 2.1**

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$ . Si  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $[a, b]$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

**Corollaire 2.2 Inégalité des accroissements finis**

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ . Si  $\|f'\| \leq K$  sur  $I$ , alors

$$\forall (a, b) \in I^2, \|f(b) - f(a)\| \leq K|b - a|$$

**REMARQUE.** Il est essentiel que  $I$  soit un **intervalle**.

**REMARQUE.** Ceci signifie que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne sur  $I$ .

**REMARQUE.** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un **segment**  $[a, b]$ ,  $\|f'\|$  est continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  : elle y admet donc un maximum  $M$ .  $f$  est alors  $M$ -lipschitzienne.

**Techniques de calcul**

Puisque l'intégrale d'une fonction vectorielle est définie à l'aide des intégrales de ses coordonnées dans une base (i.e. des intégrales de fonctions numériques), les techniques de calcul vues en première année s'appliquent encore :

- intégration par parties ;
- changement de variable.

### 3 Formules de Taylor

#### Proposition 3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], E)$ . Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

**REMARQUE.** L'ordre de  $a$  et  $b$  n'importe pas.

#### Proposition 3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], E)$ . Alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|$$

**REMARQUE.** L'ordre de  $a$  et  $b$  n'importe pas.

**REMARQUE.**  $\|f^{(n+1)}\|$  admet bien un maximum sur le **segment**  $[a, b]$  puisqu'elle y est **continue**.

#### Proposition 3.3 Formule de Taylor-Young

Soient  $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $a$  donné par

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k + o((t-a)^n)$$

ou de manière équivalente

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

## 4 Suites et séries de fonctions

### 4.1 Suites de fonctions

#### Théorème 4.1 Intersion limite / primitive

Soient  $(g_n)$  une suite de fonctions continues sur un **intervalle**  $I$  à valeurs dans  $E$  et  $a \in I$ . On suppose que  $(g_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $g$ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, G_n : x \in I \mapsto \int_a^x g_n(t) dt \quad \text{et} \quad G : x \in I \mapsto \int_a^x g(t) dt$$

Alors  $(G_n)$  converge uniformément vers la fonction  $G$  sur tout segment de  $I$ .

**Corollaire 4.1 Intersion limite / intégration**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur un **segment**  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$  convergeant **uniformément** sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

**Théorème 4.2 Intersion limite / dérivation**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions **de classe**  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $E$ . Si

- $(f_n)$  converge **simplement** vers une fonction  $f$  sur  $I$ ;
- $(f'_n)$  converge **uniformément** vers une fonction  $g$  sur tout segment de  $I$ .

Alors

- $(f_n)$  converge **uniformément** vers  $f$  sur tout segment de  $I$ ;
- $f$  est de **classe**  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ;
- $f' = g$ .

**Corollaire 4.2**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $E$ . Si

- pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $(f_n^{(j)})$  converge simplement sur  $I$ ;
- $(f_n^{(k)})$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .

Alors

- la limite simple  $f$  de  $(f_n)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ ;
- pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , la suite  $(f_n^{(j)})$  converge uniformément vers  $f^{(j)}$  sur tout segment de  $I$ .

**4.2 Séries de fonctions****Théorème 4.3 Intersion série / primitive**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions continues sur un **intervalle**  $I$  à valeurs dans  $E$  et  $a \in I$ . On suppose que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n : x \in I \mapsto \int_a^x f_n(t) dt \quad \text{et} \quad F : x \in I \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$$

Alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} F_n$  converge uniformément vers la fonction  $F$  sur tout segment de  $I$ .



**Corollaire 4.3 Intversion série / intégration**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions continues sur un **segment**  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$  convergeant **uniformément** sur  $[a, b]$ .  
Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \, dt$$

**Théorème 4.4 Intversion série / dérivation**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions **de classe**  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $E$ . Si

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge **simplement** sur  $I$ ;
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n$  converge **uniformément** sur tout segment de  $I$ .

Alors

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge **uniformément** sur tout segment de  $I$ ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de **classe**  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ;
- $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ .

**Proposition 4.1**

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors l'application  $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA)A$ .
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie**. Alors l'application  $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tu)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$ .

**Corollaire 4.4**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $E$ . Si

- pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(j)}$  converge simplement sur  $I$ ;
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .

Alors

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ ;
- pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(j)}$  converge uniformément vers  $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(j)}$  sur tout segment de  $I$ .

**Exercice 4.1**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer ses dérivées successives.

**4.3 Approximation uniforme****Théorème 4.5 Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier**

Soit  $f$  une fonction **continue par morceaux** sur un **segment**  $[a, b]$  à valeurs dans  $F$ . Alors il existe une suite  $(\varphi_n)$  de fonctions **en escalier** sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $F$  **convergeant uniformément** vers  $f$ .

**REMARQUE.** Si on note  $\mathcal{C}_m([a, b], F)$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $F$  et  $\mathcal{E}([a, b], F)$  l'ensemble des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $F$ , ceci signifie que  $\mathcal{E}([a, b], F)$  est **dense** dans  $\mathcal{C}_m([a, b], F)$  pour la norme uniforme.