Devoir à la maison n°14

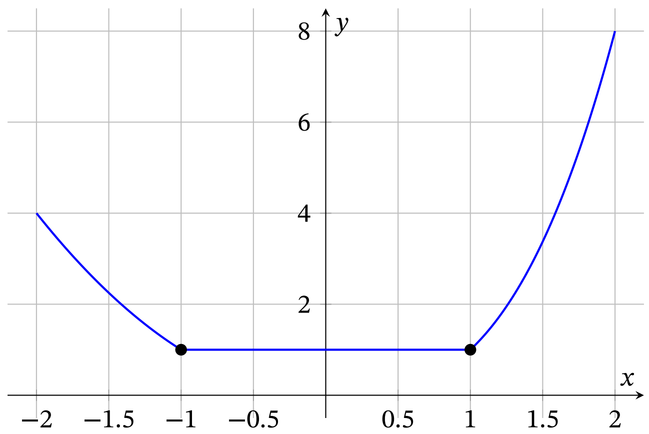
- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n admet une limite finie en 0. Comme $\lim\limits_{0^+} h = +\infty$, $\lim\limits_{0^+} h - P_n = +\infty$. Ainsi $\|h - P_n\|_{\infty,]0,1]} = +\infty$. En particulier, $\|h - P_n\|_{\infty,]0,1]}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi (P_n) ne peut converger uniformément vers h sur $]0,1]$.
Ceci signifie que le théorème de Weierstrass n'est valide que pour un *segment* et pas un intervalle de manière générale.

2 $\mathcal{R}_N$ est un sous-espace vectoriel de *dimension finie* de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. $\mathcal{R}_N$ est donc une partie fermée de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (quelle que soit la norme choisie).
Par caractérisation séquentielle des fermés, toute fonction qui est limite uniforme d'une suites à valeurs dans $\mathcal{R}_N$ est également dans $\mathcal{R}_N$.

3 **3.a** On laisse au lecteur le soin de montrer l'inégalité triangulaire et l'homogénéité. Enfin, si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $N_1(P) = 0$, alors P est nul sur $[-2,-1]$. P admet donc une inifinité de racines : c'est le polynôme nul.



3.b
Manifestement, f est continue sur $[-2,2]$. D'après le théorème de Wierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) convergeant uniformément vers f sur $[-2,2]$. En particulier, (P_n) converge uniformement vers f sur $[-2,-1]$. On en déduit que (P_n) converge vers X^2 pour la norme N_1. De la même manière, (P_n) converge vers X^3 pour la norme N_2.

4 **4.a** Par linéarité de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ pour tout polynôme P.

4.b D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales convergeant uniformement vers f sur $[a,b]$. Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, elle y est bornée et on peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|fP_n - f^2\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty$$

On en déduit que (fP_n) converge uniformément vers f^2 sur $[a,b]$. Par théorème d'interversion suite/intégrale, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)P_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)^2\,dt$$

Mais $\int_a^b f(t)P_n(t)\,dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en conclut que $\int_a^b f(t)^2\,dt = 0$. Comme f^2 est continue et positive sur $[a,b]$, f^2 est nulle sur $[a,b]$ i.e. f est nulle sur $[a,b]$.

$\boxed{5}$ Si $f \in \mathrm{F}^\perp$, alors $\displaystyle\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $f = 0$ avec la question précédente. Ainsi $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$. Par conséquent, $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{F} \subsetneq \mathrm{E}$ (par exemple, $\exp \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$).

$\boxed{6}$ **6.a** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $f_n : x \mapsto x^n e^{-(1-i)x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| = x^n e^{-x}$ donc $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}$. Ainsi f_n est intégrable en $+\infty$ et I_n converge.
Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_{n+1} = -\frac{1}{1-i}\left[x^{n+1}e^{-(1-i)x}\right]_0^{+\infty} + \frac{(n+1)}{1-i}\mathrm{I}_n = \frac{n+1}{(1-i)\mathrm{I}_n}$$

En effet, $|x^{n+1}e^{-(1-i)x}| = x^{n+1}e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées de sorte que $x^{n+1}e^{-(1-i)x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Puisque $\mathrm{I}_0 = \frac{1}{1-i}$, on montre aisément par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = \frac{n!}{(1-i)^n}\mathrm{I}_0 = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}$$

6.b Soit $k \in \mathbb{N}$. D'une part, puisque $e^{-(1-i)x} = e^{-x}e^{ix}$,

$$\mathrm{Im}(\mathrm{I}_{4k+3}) = \int_0^{+\infty} x^{4k+3}e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

D'autre part, puisque $1 - i = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$, un argument de I_{4k+3} est $(k+1)\pi$. Notamment, $\mathrm{I}_{4k+3} \in \mathbb{R}$ i.e. $\mathrm{Im}(\mathrm{I}_{4k+3}) = 0$. On en déduit bien que

$$\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin x\,\mathrm{d}x = 0$$

6.c En effectuant le changement de variable $u = x^4$,

$$\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} u^k e^{-\sqrt[4]{u}}\sin\left(\sqrt[4]{u}\right)\mathrm{d}u$$

Ainsi en posant $f : u \mapsto e^{-\sqrt[4]{u}}\sin\left(\sqrt[4]{u}\right)$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^k f(u)\,\mathrm{d}u = 0$.

6.d Supposons qu'il existe une suite (P_n) de fonction poslynomiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$. Remarquons que si f est une fonction polynomiale non constante, $f(u) - \mathrm{P}(u) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ de sorte que $f - \mathrm{P}$ n'est pas bornée. On en déduit que les polynômes P_n sont constants à partir d'un certain rang. Soit $c_n \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}_n = c_n$ (à partir d'un certain rang). Comme la convergence uniforme implique la convergence simple, $c_n = \mathrm{P}_n(0) \underset{n\to+_infty}{\longrightarrow} f(0) = 0$ et $c_n = \mathrm{P}_n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1) = e^{-1}\sin(1) \neq 0$, ce qui contredit l'unicité de la limite. On en déduit qu'il n'existe pas de suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{7}$ Tout d'abord, $u_0 \leq \sqrt{x}$. Supposons que $u_n \leq \sqrt{x}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

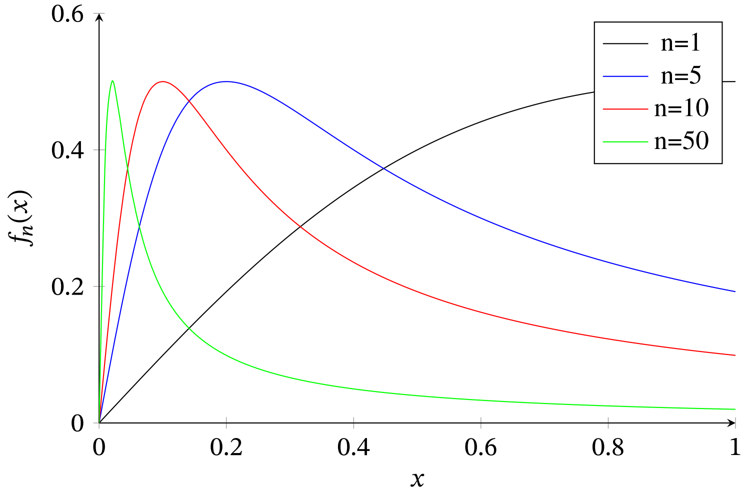
$$\sqrt{x} - u_{n+1} = \sqrt{x} - u_n - \frac{1}{2}(x - u_n^2) = \left(\sqrt{x} - u_n\right)\left(1 + \frac{1}{2}(\sqrt{x} + u_n)\right)$$

Or comme $x \in [0, 1]$,

$$\sqrt{x} + u_n \leq 2\sqrt{x} \leq 2$$

de sorte que $\sqrt{x} - u_{n+1} \geq 0$. On a donc montré par récurrence que $u_n \leq \sqrt{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On en déduit que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(x - u_n^2) \geq 0$ de sorte que (u_n) est croissante.
La suite (u_n) est croissante et majorée : elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. En passant à ma limite dans la relation de récurrence, on obtient $\ell^2 = x$. Comme $u_0 \geq 0$ et (u_n) est croissante, $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\ell \geq 0$ et donc que $\ell = \sqrt{x}$.

$\boxed{8}$ On peut citer l'exemple de Cantor. Posons $f_n : x \in [0, 1] \mapsto \frac{nx}{1 + n^2x^2}$. On montre aisément que (f_n) converge vers la fonction nulle (qui est bien continue) sur le segment $[0, 1]$ (traiter le cas $x = 0$ à part) mais la convergence n'est pas uniforme puisque $f_n(1/n) = 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite $(1/n)$ est bien à valeurs dans $[0, 1]$.



9 **9.a** C'est une conséquence directe de la question **7**. La suite $(\mathrm{P}_n(x))$ n'est autre que la suite (u_n) de cette question.

9.b On a prouvé à la question **7** que la suite (u_n) était croissante. Ceci signifie que la suite de fonctions (P_n) est croissante. On montre aisément par réccurrence que les fonctions P_n sont toutes continues sur $[0,1]$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est également continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de Dini admis par l'énoncé, (P_n) converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

10 **10.a** Soit $\alpha > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| > n\alpha\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\mathrm{S}_n)}{(n\alpha)^2}$$

Comme $\mathrm{S}_n \sim \mathcal{B}(n,x)$, $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) = nx$ et $\mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = nx(1-x)$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| > n\alpha\right) \leq \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}$$

Or pour tout $x \in [0,1]$,

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| > n\alpha\right) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

10.b D'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \mathrm{B}_n(f)(x)$$

11 **11.a** Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est uniformément continue en vertu du théorème de Heine. On en déduit l'existence de $\alpha > 0$ vérifiant la condition de l'énoncé. Notamment,

$$\forall k \in [\![0,n]\!], ; \left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha \implies \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$$

11.b Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)\right| &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)\\ &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)|\right)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)\\ &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right\}=\bigsqcup_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\{S_n=k\}$$

donc, par σ-additivité,

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\mathbb{P}(S_n=k)=\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$$

ce qui conclut.

11.c Puisque $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)=1$,

$$B_n(f)(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)=\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\mathbb{P}(S_n=k)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\mathbb{P}(S_n=k)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)$$

Par inégalité triangulaire,

$$|B_n(f)(x)-f(x)|\leq\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\mathbb{P}(S_n=k)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\right|+\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\mathbb{P}(S_n=k)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\right|$$

Remarquons que $\{|S_n-nx|>n\alpha\}=\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right\}$. D'après les questions **10.a** et la question précédente,

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\mathbb{P}(S_n=k)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\right|\leq\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$$

Par ailleurs, avec la question **11.a**,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\mathbb{P}(S_n=k)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\right|&\leq\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{P}(S_n=k)\\&\leq\varepsilon\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\mathbb{P}(S_n=k)\leq\varepsilon\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x\in[0,1]$,

$$|B_n(f)(x)-f(x)|\leq\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}+\varepsilon$$

> **Remarque.** Il est important de noter que α ne dépend pas de x.

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}=0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geq n_0$, $\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}\leq\varepsilon$. Finalement pour tout entier $n\geq n_0$,

$$|B_n(f)(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon$$

En particulier, pour tout entier $n\geq n_0$, $\|B_n(f)-f\|_\infty\leq 2\varepsilon$. Par définition de la limite, $\|B_n(f)-f\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Autrement dit, la suite, $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.