

# DEVOIR À LA MAISON N°20

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

**1** **1.a** Notons  $f_n : A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \mapsto A^n$ . Les coefficients de  $A^n$  sont polynomiaux en les coefficients de  $A$  donc  $f_n$  est continue sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ .

**1.b** Récurrence évidente en utilisant la sous-multiplicativité de la norme subordonnée.

**1.c** Soit  $r \in [0, R[$ . On note  $B_r$  la boule fermée de centre 0 et de rayon  $r$  pour la norme  $\|\cdot\|$ . Alors

$$\forall A \in B_r, \|f_n(A)\| = |a_n| \|A^n\| \leq |a_n| \|A\|^n \leq |a_n| r^n$$

Or la série entière  $\sum a_n z^n$  converge absolument sur son disque ouvert de convergence donc  $\sum |a_n| r^n$  converge. On en déduit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $B_r$  pour tout  $r \in [0, R[$ . Or les  $f_n$  sont continues sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  donc  $\varphi$  est continue (et a fortiori définie) sur  $\mathcal{B}$ .

**2** **2.a** Il suffit de remarquer que  $\mathbb{C}[A]$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ .

**2.b**  $\varphi(A) \in \mathbb{C}[A]$  comme limite de la suite de terme général  $\sum_{k=0}^n a_k A^k$ , qui est à valeurs dans le fermé  $\mathbb{C}[A]$ .

On sait par ailleurs que  $(A^k)_{0 \leq k \leq r-1}$  est une base de  $\mathbb{C}[A]$  donc il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$  tel que  $\varphi(A) = P(A)$ .

**2.c** On vérifie que  $A^2 = A$  et donc  $A^n = A$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit que

$$\varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = I_d + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right) A = I_d + (e - 1)A$$

De plus, on a bien  $r = 2$ , puisque la famille  $(I_d, A)$  est libre tandis que la famille  $(I_d, A, A^2)$  est liée. On en déduit que  $P = 1 + (e - 1)X$ .

**3** Supposons qu'il existe  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \varphi(A) = P(A)$$

Notamment, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\varphi(\lambda I_d) = P(\lambda I_d)$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n = P(\lambda)$$

Par unicité du développement en série entière, la suite  $(a_n)$  est la suite des coefficients de  $P$  : elle est donc nulle à partir d'un certain rang.

Réciproquement, si  $(a_n)$  est nulle à partir d'un certain rang, on a bien

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \varphi(A) = P(A)$$

en posant  $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ .

**4** Remarquons que  $\exp(iA) = \cos(A) + i \sin(A)$  et que  $\exp(-iA) = \cos(A) - i \sin(A)$ . Comme  $iA$  et  $-iA$  commutent, on en déduit que

$$I_d = \exp(iA - iA) = \exp(iA) \exp(-iA) = (\cos(A) + i \sin(A))(\cos(A) - i \sin(A)) = \cos(A)^2 + \sin(A)^2 + i(\sin(A)\cos(A) - \cos(A)\sin(A))$$

Mais d'après la question **2.b**, les matrices  $\cos(A)$  et  $\sin(A)$  appartiennent à l'algèbre commutative  $\mathbb{C}[A]$  donc  $\sin(A)\cos(A) = \cos(A)\sin(A)$ . On en déduit que

$$\cos(A)^2 + \sin(A)^2 = I_d$$

**5** **5.a** D'après la question **1.b**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|(Re^{i\theta})^{-n} A^n\| = \|(R^{-1} e^{-i\theta} A)^n\| \leq \|R^{-1} e^{-i\theta} A\|^n = \left(\frac{\|A\|}{R}\right)^n$$

Comme  $\|A\| < R$ , la série *numérique*  $\sum \left(\frac{\|A\|}{R}\right)^n$  converge donc la série  $\sum (Re^{i\theta})^{-n} A^n$  converge absolument. Comme  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  est de dimension finie,  $\sum (Re^{i\theta})^{-n} A^n$  converge.

Pour tout  $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ , l'application  $X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \mapsto MX$  est linéaire donc continue puisque  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  est de dimension finie. On en déduit que

$$(Re^{i\theta} I_d - A)(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta} I_d - A)(Re^{i\theta})^{-1} (Re^{i\theta})^{-n} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n - (Re^{i\theta})^{-(n+1)} A^{n+1}$$

On a vu que la série  $\sum (Re^{i\theta})^{-n} A^n$  convergeait. On en déduit notamment que la suite  $((Re^{i\theta})^{-n} A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice nulle. Par lien suite/série télescopique,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n - (Re^{i\theta})^{-(n+1)} A^{n+1} = I_d$$

Ceci signifie donc bien que  $Re^{i\theta} I_d - A$  est inversible et que

$$(Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} = (Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n$$

**5.b** On choisit à nouveau  $R > \|A\|$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par continuité de la multiplication matricielle à droite

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} = (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta})^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-k} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{n-k-1} A^k$$

Posons  $\psi_k : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto (Re^{i\theta})^{n-k-1} A^k$ . Alors,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \|\psi_n(\theta)\| \leq R^{n-k+1} \|A\|^k = R^{n-1} \left(\frac{\|A\|}{R}\right)^k$$

Comme  $\frac{\|A\|}{R} < 1$ , la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} R^{n-1} \left(\frac{\|A\|}{R}\right)^k$  converge donc la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k$  converge normalement sur  $[0, 2\pi]$ . On peut donc procéder à une interversion série/intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} R^{n-k-1} \left( \int_0^{2\pi} e^{i(n-k-1)\theta} d\theta \right) A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} R^{n-1-k} \delta_{n-1,k} A^k = A^{n-1}$$

**5.c** Par linéarité de l'intégrale, la question précédente montre que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re^{i\theta} P(Re^{i\theta}) (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta = P(A)$$

En choisissant  $P = \chi_A$  on a donc

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re^{i\theta} \chi_A(Re^{i\theta}) (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta$$

**5.d** D'après la formule de la comatrice

$$\text{com}(\text{Re}^{i\theta} I_d - A)^\top (\text{Re}^{i\theta} I_d - A) = \det(\text{Re}^{i\theta} I_d - A) I_d = \chi_A(\text{Re}^{i\theta}) I_d$$

ou encore

$$\chi_A(\text{Re}^{i\theta}) (\text{Re}^{i\theta} I_d - A)^{-1} = \text{com}(\text{Re}^{i\theta} I_d - A)^\top = (P_{k,l}(\text{Re}^{i\theta}))_{1 \leq k,l \leq d}$$

où les  $P_{k,l}$  sont des polynômes. D'après la question précédente,

$$\forall (k, l) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2, \chi_A(A)_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (XP_{k,l})(\text{Re}^{i\theta}) d\theta$$

Comme le coefficient constant de  $XP_{k,l}$  est nul, ces intégrales sont nulles et  $\chi_A(A) = 0$ .

**6** Soit  $(x, y) \in \left] -\infty, \frac{M}{2} \right[$  tel que  $y \neq \alpha$ .

$$\forall t \in [\alpha, y], 2f(x+t) = f(2x) + f(2t)$$

donc

$$2 \int_\alpha^y f(x+t) dt = \int_\alpha^y f(2x) dt + \int_\alpha^y f(2t) dt$$

Via les changements de variables  $u = x+t$  et  $u = 2t$ , on obtient

$$2 \int_{x+\alpha}^{x+y} f(u) du = (y-\alpha)f(2x) + \frac{1}{2} \int_{2\alpha}^{2y} f(u) du$$

Comme  $F$  est une primitive de  $f$ ,

$$2F(x+y) - 2F(x+\alpha) = (y-\alpha)f(2x) + \frac{1}{2}F(2y) - \frac{1}{2}F(2\alpha)$$

ou encore

$$f(2x) = 2 \frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y-\alpha}$$

**7** Tout d'abord,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $] -\infty, M[$ . Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $] -\infty, M[$ . Alors  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $] -\infty, M[$ . La question précédente montre que  $x \mapsto f(2x)$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $] -\infty, \frac{M}{2}[$  i.e.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $] -\infty, M[$ . Par récurrence,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $] -\infty, M[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  i.e.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\infty, M[$ .

**8** En dérivant l'équation fonctionnelle  $(\star)$  par rapport à  $x$ , on obtient

$$\forall (x, y) \in \left] -\infty, \frac{M}{2} \right[ , f'(x+y) = f'(2x)$$

En dérivant maintenant cette relation par rapport à  $y$ , on obtient

$$\forall (x, y) \in \left] -\infty, \frac{M}{2} \right[ , f''(x+y) = 0$$

Comme  $\left\{ x+y, (x, y) \in \left] -\infty, \frac{M}{2} \right[ \right\} = ] -\infty, M[$ ,  $f''$  est nulle sur  $] -\infty, M[$ . On en déduit que  $f$  est une fonction affine. Réciproquement, toute fonction affine  $f$  est bien continue et vérifie  $(\star)$ . L'ensemble des solutions de  $(\star)$  est donc le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions affines. Une base en est  $(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ .

**9** On peut identifier  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  à  $\mathbb{R}$ . On cherche alors les fonction  $\xi$  continues telles que  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \xi(x) \in \mathbb{R}^*$ . Ce sont donc les fonctions continues qui ne s'annulent pas sur  $\mathbb{R}^*$ .

**10** Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Notons  $A$  la matrice suggérée par l'énoncé. Cette matrice est triangulaire par blocs donc  $\det(A) = ad - bc$ . De plus

$$\det(f_\xi(A)) = \begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(b) & \xi(0) & \cdots & \xi(0) \\ \xi(c) & \xi(d) & \xi(0) & \cdots & \xi(0) \\ \xi(c) & \xi(d) & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{M} & \\ \xi(c) & \xi(d) & & & \end{vmatrix}$$

où  $M \in \mathcal{M}_{d-2}(\mathbb{R})$ . En effectuant les opérations sur les lignes  $L_i \leftarrow L_i - L_2$  pour  $i \in \llbracket 3, d \rrbracket$ , on obtient

$$\det(f_\xi(A)) = \begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(b) & \xi(0) & \cdots & \xi(0) \\ \xi(c) & \xi(d) & \xi(0) & \cdots & \xi(0) \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & N & \\ 0 & 0 & & & \end{vmatrix} = (\xi(a)\xi(d) - \xi(b)\xi(c)) \det(N)$$

Ainsi la condition (▲) se traduit bien par  $ad \neq bc \implies \xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$ .

**11** Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x \neq y$ . Alors  $\xi(x)\xi(1) \neq \xi(y)\xi(1)$  en prenant  $(a, b, c, d) = (x, y, 1, 1)$  dans la question précédente car  $x \times 1 \neq y \times 1$ . Par ailleurs, en prenant  $(a, b, c, d) = (1, 1, 0, 1)$ , on obtient  $\xi(1)^2 \neq \xi(1)\xi(0)$  car  $1 \times 1 \neq 1 \times 0$ . Notamment,  $\xi(1) \neq 0$ . On en déduit que  $\xi(x) \neq \xi(y)$ . La fonction  $\xi$  est donc injective. Puisqu'elle est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle est strictement monotone sur  $\mathbb{R}$ .

**12** Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . En prenant cette fois  $(a, b, c, d) = (x, x, 0, 1)$ , on obtient  $\xi(x)\xi(1) \neq \xi(x)\xi(0)$  car  $x \times 1 \neq x \times 0$ . On en déduit que  $\xi(x) \neq 0$ .

**13** **13.a** Supposons  $\xi(0) \neq 0$ . Posons  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \xi(1)\xi(x) - \xi(0)\xi(2)$ . La fonction  $f$  est bien continue sur  $\mathbb{R}$  car  $\xi$  l'est. De plus,  $f(0) = (\xi(1) - \xi(2))\xi(0)$  et  $f(2) = (\xi(1) - \xi(0))\xi(2)$  donc

$$f(0)f(2) = (\xi(1) - \xi(2))(\xi(1) - \xi(0))\xi(0)\xi(2)$$

Comme  $\xi$  est strictement monotone,  $(\xi(1) - \xi(2))(\xi(1) - \xi(0)) < 0$ . De plus,  $\xi$  est continue et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc elle reste de même signe sur  $\mathbb{R}_+$ . On a donc  $\xi(0)\xi(2) > 0$ . On en déduit que  $f(0)f(2) < 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\alpha \in ]0, 2[$  tel que  $f(\alpha) = 0$  i.e.  $\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha)$ .

**13.b** D'après la condition (▲) et la question précédente, on a  $0 \times 2 = 1 \times \alpha$  i.e.  $\alpha = 0$ , ce qui contredit  $\alpha > 0$ . On en déduit que  $\xi(0) = 0$ .

**14** La question 10 nous dit que

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \xi(a)\xi(d) = \xi(b)\xi(c) \implies ad = bc$$

Notamment,

$$\forall (a, b, d) \in \mathbb{R}^2, \xi(a)\xi(d) = \xi(b)^2 \implies ad = b^2$$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(xy, x^2, y^2) \in \mathbb{I}^3$ . Alors

$$\xi(\eta(x^2))\xi(\eta(y^2)) = x^2y^2 = (xy)^2 = \xi(\eta(xy))^2$$

On en déduit donc que

$$\eta(x^2)\eta(y^2) = \eta(xy)^2$$

**15** **15.a** On pose  $M = \ln(\sup I)$  ( $M = +\infty$  si  $\sup I = +\infty$ ).

Tout d'abord,  $\exp$  est continue sur  $] -\infty, M[$  et  $\exp[ -\infty, M[ ] = ]0, \sup I[$ . Mais  $\xi(0) = 0$  donc  $0 \in I$ . Comme  $I$  est un intervalle,  $]0, \sup I[ = I \cap \mathbb{R}_+^*$ .

Ensuite,  $\eta$  est continue sur  $I \cap \mathbb{R}_+^*$  comme bijection réciproque d'une fonction continue et  $\eta(I \cap \mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$  par hypothèse. Enfin,  $\ln$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par composition,  $f$  est donc bien continue sur  $] -\infty, M[$ .

Soit  $(x, y) \in ] -\infty, \frac{M}{2}[$ . Alors, en utilisant la question précédente,

$$2f(x+y) = 2\ln(\eta(e^{x+y})) = \ln(\eta(e^x e^y)^2) = \ln(\eta((e^x)^2) \eta((e^y)^2)) = \ln(\eta(e^{2x})) + \ln(\eta(e^{2y})) = f(2x) + f(2y)$$

**15.b** D'après la question 8,  $f$  est une fonction affine. Il existe donc  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall t \in ] -\infty, M[, f(t) = \ln(\eta(e^t)) = at + b = a \ln(e^t) + b$$

Mais on a vu que  $\exp[ -\infty, M[ ] = I \cap \mathbb{R}_+^*$  donc

$$\forall x \in I \cap \mathbb{R}_+^*, \ln(\eta(x)) = a \ln(x) + b$$

puis

$$\forall x \in I \cap \mathbb{R}_+^*, \eta(x) = e^b x^a$$

De plus,  $\eta$  est continue en 0 de sorte que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta(x) = \eta(0) = 0$  donc  $a > 0$ . On a donc le résultat escompté en posant  $K_1 = e^b$  et  $\alpha_1 = a$ .

**15.c** Comme à la question **14**, on montre que pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(-xy, -x^2, -y^2) \in I^3$

$$\eta(-xy)^2 = \eta(-x^2)\eta(-y^2)$$

Posons alors,  $\theta(x) = -\eta(-x)$  pour  $x \in (-I) \cap \mathbb{R}_+^*$ .  $\eta$  est strictement monotone comme bijection réciproque d'une fonction strictement monotone. De plus,  $\eta(0) = 0$  et  $\eta$  est strictement positive sur  $I \cap \mathbb{R}_+^*$  donc  $\eta$  est strictement croissante. On en déduit que  $\eta$  est strictement négative sur  $I \cap \mathbb{R}_-^*$  et donc que  $\theta$  est strictement positive sur  $(-I) \cap \mathbb{R}_+^*$ . On prouve de même que  $g = \ln \circ \theta \exp$  est solution de  $(\star)$  sur  $] -\infty, M'[,$  où  $\exp[ ] - \infty, M' ] = (-I) \cap \mathbb{R}_+^*$ . Il existe donc des constantes  $K_2 < 0$  et  $\alpha_2 > 0$  telles que

$$\forall x \in (-I) \cap \mathbb{R}_+^*, \theta(x) = -K_2 x^{\alpha_2}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I \cap \mathbb{R}_-^*, \eta(x) = K_2(-x)^{\alpha_2}$$

**15.d**  $\eta$  est strictement croissante et c'est la bijection réciproque de  $\xi: \mathbb{R} \rightarrow I$ . On en déduit que  $\lim_{(\sup I)^-} \eta = +\infty$  et  $\lim_{(\inf I)^+} \eta = -\infty$ . Les expressions de  $\eta$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$  trouvées aux questions précédentes imposent alors que  $\sup I = +\infty$  et  $\inf I = -\infty$ . Ainsi  $I = \mathbb{R}$  car  $I$  est un intervalle.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la question **14**,

$$\xi(x \times 1)^2 = \xi(x^2)\xi(1^2) \quad \text{et} \quad \xi(x \times (-1))^2 = \xi(x^2)\xi((-1)^2)$$

On en déduit que  $\xi(x)^2 = \xi(-x)^2$ . Mais comme  $\xi$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  et strictement négative sur  $\mathbb{R}_-^*$ ,  $\xi(x) = -\xi(-x)$ .  $\xi$  est bien impaire.

**16** Comme  $\xi$  est strictement monotone et nulle en 0,  $\xi$  est soit strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ , soit strictement négative sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Le premier cas a déjà été traité. Il existe  $K > 0$  et  $\alpha > 0$  telles que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \eta(y) = Ky^\alpha$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \xi(x) = Cx^\beta$$

avec  $C = \frac{1}{K^{1/\alpha}} \neq 0$  et  $\beta = \frac{1}{\alpha} > 0$ .

Dans le second cas,  $-\xi: \mathbb{R} \rightarrow J$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  et vérifie la condition  $(\blacktriangle)$ . Sa bijection réciproque  $\theta$  est alors strictement positive sur  $J \cap \mathbb{R}_+^*$ . On montre à nouveau que  $J = \mathbb{R}$  et que  $-\xi$  est impaire de sorte que  $\xi$  est également impaire. De plus, il existe  $K > 0$  et  $\alpha > 0$  telles que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \theta(y) = Ky^\alpha$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \xi(x) = Cx^\beta$$

avec  $C = -\frac{1}{K^{1/\alpha}} \neq 0$  et  $\beta = \frac{1}{\alpha} > 0$ .

**17** La matrice  $A_\lambda$  est symétrique réelle donc diagonalisable. La matrice  $A_\lambda - (\lambda - 1)I_d$  ne comporte que des 1 donc elle est de rang 1. Ainsi  $\lambda - 1$  est une valeur propre de  $A_\lambda$  de multiplicité  $d - 1$ . Puisque  $\text{tr}(A_\lambda) = d\lambda$ , la seconde valeur propre de  $A_\lambda$  est  $d\lambda - (d - 1)(\lambda - 1) = \lambda + d - 1$  et elle est de multiplicité 1. Ainsi  $\det(A_\lambda) = (\lambda - 1)^{d-1}(\lambda + d - 1)$ .

**18** On montre comme à la question précédente que

$$\det(f_\xi(A_\lambda)) = (\xi(\lambda) - \xi(1))^{d-1}(\xi(\lambda) + (d - 1)\xi(1))$$

$\xi$  est impaire  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\xi(x) = Cx^\beta$  avec  $C \neq 0$  et  $\beta > 0$ . Ainsi en prenant  $\lambda = -(d - 1)^{1/\beta}$ ,  $\det(f_\xi(A_\lambda)) = 0$ . On en déduit que  $\det(A_\lambda) = 0$  donc  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -(d - 1)$ . Puisque  $\lambda < 0$ , on a nécessairement  $-(d - 1)^{1/\beta} = -(d - 1)$ . Notamment si  $d \geq 3$ ,  $\beta = 1$  puis  $\xi(x) = Cx$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Réciproquement, les fonctions  $\xi: x \mapsto Cx$  avec  $C \neq 0$  vérifient bien la condition  $(\blacktriangle)$ .

Dans le cas  $d = 2$ , on vérifie que toutes les fonctions  $\xi$  impaires, continues et telles que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\xi(x) = Cx^\beta$  avec  $C \neq 0$  et  $\beta > 0$  conviennent. Remarquons alors que  $\xi(xy) = \xi(x)\xi(y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  (distinguer suivant les signes de  $x$  et

$y$ ). Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Si  $\det(f_\xi(A)) = 0$ , alors  $\xi(a)\xi(d) = \xi(b)\xi(c)$  donc  $\xi(ad) = \xi(bc)$  puis  $ad = bc$  par injectivité de  $\xi$ . Ainsi  $\det(A) = 0$ .