

RÉDUCTION ALGÉBRIQUE

Polynômes annulateurs

Solution 1

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et M un vecteur propre associé. Alors $M + \text{tr}(M)I_n = \lambda M$ puis en considérant la trace des deux membres, $(n+1)\text{tr}(M) = \lambda\text{tr}(M)$. Si $\lambda = n+1$ ou $\text{tr}(M) = 0$. Si $\text{tr}(M) = 0$ alors $M = \lambda M$ et donc $\lambda = 1$. Ainsi $\text{Sp}(u) \subset \{1, n+1\}$.

Déterminons les sous-espaces propres associés à ces potentielles valeurs propres. Clairement, le sous-espace associé à la valeur propre 1 est l'hyperplan des matrices de traces nulles. De plus, I_n est clairement un vecteur propre associé à la valeur propre $n+1$ donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $n+1$ est $\text{vect}(I_n)$ puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

REMARQUE. On constate que u est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

REMARQUE. Si $n = 1$, 1 n'est en fait pas valeur propre puisqu'alors le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle est le sous-espace nul.

Solution 2

1. Soit A une matrice vérifiant la condition de l'énoncé. Le polynôme $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ annule A et est scindé à racines simples : A est donc diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$.

- Si la seule valeur propre de A est 1, alors $A = I_2$.
- Si la seule valeur propre de A est 2, alors $A = 2I_2$.
- Si A admet 1 et 2 pour valeurs propres, alors il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Réciproquement les matrices I_2 , $2I_2$ et PBP^{-1} avec $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ conviennent.

2. Soit A une matrice vérifiant la condition de l'énoncé. Le polynôme $X^3 - 8X^2 + 21X - 18 = (X-2)(X-3)^2$ annule A . D'après le lemme des noyaux, $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}(A - 2I_2) \oplus \text{Ker}(A - 3I_2)^2$.

- Si $\dim \text{Ker}(A - 2I_2) = 2$, alors $A = 2I_2$.
- Si $\dim \text{Ker}(A - 2I_2) = \dim \text{Ker}(A - 3I_2)^2 = 1$, alors il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- Si $\dim \text{Ker}(A - 3I_2)^2 = 2$, alors le polynôme $(X-3)^2$ annule A : A est trigonalisable et $\text{Sp}(A) = \{3\}$. Il existe donc $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ telle que $A = P \begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Réciproquement, les matrices ci-dessus conviennent.

REMARQUE. On peut en fait montrer qu'on peut se ramener à $a = 1$ dans le dernier cas.

Solution 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$ et $\text{tr}(M) = 0$. Le polynôme $P = X^3 - X^2 - X - 2 = (X-2)(X-j)(X-\bar{j})$ est un polynôme annulateur de M . On en déduit que $\text{Sp}(M) \subset \{2, j, \bar{j}\}$. De plus, P est simplement scindé donc M est diagonalisable.

Notons p, q, r les dimensions respectives de $\text{Ker}(M - 2I_p)$, $\text{Ker}(M - jI_q)$ et $\text{Ker}(M - \bar{j}I_r)$. On a donc $\text{tr}(M) = 2p + qj + r\bar{j} = 0$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on en déduit $2p - \frac{q}{2} - \frac{r}{2} = 0$ et $q - r = 0$ puis $2p = q = r$. Ainsi $n = p + q + r = 5p$ est un multiple de 5.

On peut alors affirmer que M est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $D = \text{diag}(2, j, j, \bar{j}, \bar{j})$. Réciproquement soit $n \in \mathbb{N}^*$ un multiple de 5 et considérons une matrice M semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $D = \text{diag}(2, j, j, \bar{j}, \bar{j})$. Alors $\text{tr}(M) = \frac{n}{5} \text{tr}(D) = 0$. De plus, $P(M)$ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $P(D) = \text{diag}(P(2), P(j), P(j), P(\bar{j}), P(\bar{j})) = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0)$. On a donc bien $P(M) = 0$.

REMARQUE. Si n n'est pas un multiple de 5, il n'existe pas de matrice vérifiant les conditions de l'énoncé.

Solution 4

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Alors $X^5 - X^2 = X^2(X^3 - 1)$ est un polynôme annulateur de M . On en déduit que $\text{Sp}(M) \subset \{0, 1, j, \bar{j}\}$. Notons $m_0, m_1, m_j, m_{\bar{j}}$ les multiplicités respectives (éventuellement nulles) de 0, 1, j, \bar{j} . Alors

$$0m_0 + m_1 + jm_j + \bar{j}m_{\bar{j}} = \text{tr}(M) = n$$

En considérant la partie réelle, on obtient

$$m_1 - \frac{1}{2}m_j - \frac{1}{2}m_{\bar{j}} = n$$

Or $m_1 \leq n$, $m_j \geq 0$ et $m_{\bar{j}} \geq 0$ donc $m_1 = n$ et $m_j = m_{\bar{j}} = 0$. Par ailleurs

$$m_0 + m_1 + m_j + m_{\bar{j}} = n$$

donc $m_0 = 0$. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de M . Par conséquent, M est inversible. Comme $M^5 - M^2 = 0$, $M^3 - I_n = 0$ en multipliant par M^{-2} . Par conséquent, $X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de M scindé à racines simples. On en déduit que M est diagonalisable. Comme 1 est sa seule valeur propre, $M = I_n$.

Réciproquement, I_n vérifie bien les conditions de l'énoncé : c'est donc l'unique matrice vérifiant les conditions de l'énoncé.

Solution 5

Puisque F est stable par u , on peut considérer l'endomorphisme $u|_F$ induit par u . On remarque que P est aussi un polynôme annulateur de $u|_F$. Les polynômes $P_i^{\alpha_i}$ étant premiers entre eux deux à deux, le lemme des noyaux permet d'affirmer que $F = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } P_i^{\alpha_i}(u|_F)$. Or pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\text{Ker } P_i(u|_F) = F \cap \text{Ker } P_i(u) = F \cap N_i$. Ainsi $F = \bigoplus_{i=1}^r F \cap N_i$.

Solution 6

On remarque que $C^3 - C^2 - 3C = 0$. Ainsi $X^3 - X^2 - 3X = X(X^2 - X - 3)$ est un polynôme scindé à racines simples (le polynôme de degré 2 n'admet évidemment pas 0 pour racine et est de discriminant strictement positif). Par conséquent C est diagonalisable et donc semblable à une matrice diagonale D . On voit alors aisément que $A = 3C - C^2$ est semblable à la matrice diagonale $3D - D^2$ et que $B = C^2 - 2C$ est semblable à la matrice diagonale $D^2 - 2D$. A et B sont donc diagonalisables.

Solution 7

Comme $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$, 0 est racine simple de P . Il existe donc Q non divisible par X tel que $P = XQ$. Comme X est irréductible, X et Q sont premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux,

$$E = \text{Ker } P(f) = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } Q(f)$$

Comme $XQ = P$, $Q(f) \circ f = P(f) = 0$ donc $\text{Im } f \subset \text{Ker } Q(f)$. Par ailleurs, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = Q(0) + XR$. Ainsi

$$Q(f) = Q(0) \text{Id}_E + f \circ R(f)$$

Si on se donne $x \in \text{Ker } Q(f)$, on a donc $Q(0)x + f \circ R(f)(x) = 0_E$ et donc $x = -\frac{1}{Q(0)}f(R(f)(x)) \in \text{Im } f$ car $Q(0) \neq 0$. Ainsi $\text{Ker } Q(f) \subset \text{Im } f$ puis $\text{Ker } Q(f) = \text{Im } f$ par double inclusion, ce qui permet de conclure.

REMARQUE. Si on suppose E de dimension finie, on peut se passer de montrer l'inclusion $\text{Ker } Q(f) \subset \text{Im } f$. En effet, on sait déjà que

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } Q(f)$$

et le théorème du rang montre que

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

Ainsi $\dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } Q(f)$ et, comme $\text{Im } f \subset \text{Ker } Q(f)$, $\text{Im } f = \text{Ker } Q(f)$, ce qui permet de conclure.

Solution 8

$X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - \bar{j})$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples. Ainsi $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, j, \bar{j}\}$ et A est diagonalisable. Notons $m_0, m_j, m_{\bar{j}}$ les multiplicités (éventuellement nulles) de $0, j, \bar{j}$. Comme A est à coefficients réels, il en est de même de son polynôme caractéristique de sorte que $m_j = m_{\bar{j}}$. De plus, $m_0 + m_j + m_{\bar{j}} = n$ donc $m_0 = n - 2m_j$. Comme A est diagonalisable, $m_0 = \dim \text{Ker } A$. D'après le théorème du rang, $\text{rg } A = n - \dim \text{Ker } A = 2m_j$. Le rang de A est donc bien pair.

Solution 9

Notons $u : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto P(X+1)$. La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que $u - \text{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$ est nilpotent. L'indice de nilpotence est inférieur à $\dim \mathbb{C}_{n-1}[X] = n$ donc $(u - \text{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]})^n = 0$. Ceci donne par la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k = 0$$

Puisqu'on a clairement $u^k(P) = P(X+k)$, on en déduit le résultat demandé.

Solution 10

1. a. Remarquons que pour $M \in E_2$, $u(M)_1 = M_2$ et $u(M)_2 = M_1$.

Soient $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et $(A, A') \in E_2^2$. Alors

$$u(\lambda A + \lambda' A')_1 = (\lambda A + \lambda' A')_2 = \lambda A_2 + \lambda' A'_2 = \lambda u(A)_1 + \lambda u(A)_1 u(\lambda A + \lambda' A')_2 = (\lambda A + \lambda' A')_1 = \lambda A_1 + \lambda' A'_1 = \lambda u(A)_2 + \lambda u(A)_2$$

Par conséquent, $u(\lambda A + \lambda' A') = \lambda u(A) + \lambda' u(A')$.

u est bien linéaire : c'est un endomorphisme de E_2 .

- b. D'après la remarque de la question précédente, $u(K_1) = K_3$, $u(K_2) = K_4$, $u(K_3) = K_1$ et $u(K_4) = K_2$. On en déduit que

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul montre que $M^2 = I_4$ i.e. $u^2 = \text{Id}_{E_2}$. u est bien un automorphisme de E_2 .

- c. Puisque $u^2 = \text{Id}_{E_2}$, u est une symétrie.

$$\text{Ker}(M - I_4) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1, \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_2 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Par conséquent, $\text{Ker}(u - \text{Id}_{E_2}) = \text{vect}(K_1 + K_3, K_2 + K_4)$. De même,

$$\text{Ker}(M + I_4) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1, \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Par conséquent, $\text{Ker}(u + \text{Id}_{E_2}) = \text{vect}(K_1 - K_3, K_2 - K_4)$. Finalement, u est la symétrie par rapport à $\text{vect}(K_1 + K_3, K_2 + K_4)$ parallélement à $\text{vect}(K_1 - K_3, K_2 - K_4)$.

2. Notons \mathcal{B}_c la base canonique de E_n . Dans le cas $n = 2$, par antisymétrie du déterminant,

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(u(A)_1, u(A)_2) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_2, A_1) = -\det_{\mathcal{B}_c}(A_1, A_2) = -\det(A)$$

Dans le cas $n = 3$

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(u(A)_1, u(A)_2, u(A)_3) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_2 + A_3, A_1 + A_3, A_1 + A_2)$$

Par multilinéarité et caractère alterné du déterminant,

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_2, A_3, A_1) + \det_{\mathcal{B}_c}(A_3, A_1, A_2)$$

Enfin, puisque les 3-cyles sont de signature 1, le caractère antisymétrique du déterminant donne

$$\det(u(A)) = 2 \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, A_2, A_3) = 2 \det(A)$$

3. On note $S = \sum_{k=1}^n A_k$. Ainsi

$$\det(u(A)) = \det_{\mathcal{B}_c}(S - A_1, \dots, S - A_n)$$

A nouveau, le caractère multilinéaire et alterné du déterminant donne

$$\begin{aligned} \det(u(A)) &= \det_{\mathcal{B}_c}(-A_1, \dots, -A_n) + \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}_c}(-A_1, \dots, -A_{k-1}, S, -A_{k+1}, \dots, -A_n) \\ &= (-1)^n \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_n) + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, S, A_{k+1}, \dots, A_n) \end{aligned}$$

Encore une fois le caractère multilinéaire et alterné du déterminant donne

$$\det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, S, A_{k+1}, \dots, A_n) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, \sum_{i=1}^n A_i, A_{k+1}, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots, A_{k-1}, A_i, A_{k+1}, \dots, A_n) = \det_{\mathcal{B}_c}(A_1, \dots,$$

Finalement,

$$\det(u(A)) = (-1)^n \det(A) + (-1)^{n-1} n \det(A) = (-1)^{n-1} (n-1) \det(A)$$

4. a. Soit $A \in E_n$. Posons $B = u(A)$ et $C = u(B) = u^2(A)$. Alors

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, B_j = \left(\sum_{k=1}^n A_k \right) - A_j$$

et

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j &= \sum_{k=1}^n B_k - B_j \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\left(\sum_{l=1}^n A_l \right) - A_k \right) - \sum_{k=1}^n A_k + A_j \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_l - 2 \sum_{k=1}^n A_k + A_j &= (n-2) \sum_{k=1}^n A_k + A_j = (n-2)(B_j + A_j) + A_j &= (n-2)u(A)_j + (n-1)A_j \end{aligned}$$

On en déduit que $u^2(A) = (n-2)u(A) + (n-1)A$. Ceci étant valable pour tout $A \in E_n$, $u^2 - (n-2)u + (n-1)\text{Id}_{E_n} = 0$. Ainsi $X^2 - (n-2)X + (n-1) = (X+1)(X-(n-1))$ est un polynôme annulateur de u .

b. Comme $n \neq 0$, $n-1 \neq -1$ et donc le polynôme $(X+1)(X-(n-1))$ est scindé à racines simples : u est diagonalisable.

Pour $A \in E_n$,

$$u(A) = -A \iff \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(A)_j = -A_j \iff \sum_{k=1}^n A_k = 0$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est donc l'ensemble des matrices dont la somme des colonnes est nulle.

Soit A dans le sous-espace propre associé à la valeur propre $n-1$. Alors, en posant $S = \sum_{k=1}^n A_k$,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, S - A_j = (n-1)A_j$$

ou encore

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_j = \frac{1}{n} S$$

Toutes les colonnes de A sont donc égales. Inversement, on vérifie immédiatement que si toutes les colonnes de A sont égales, alors $u(A) = (n-1)A$. Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre $n-1$ est l'ensemble des matrices ayant toutes leurs colonnes égales.

REMARQUE. On pourrait préciser que $\dim E_{-1}(u) = n^2 - n$ et $\dim E_{n-1}(u) = n$.

- c. i. En raisonnant par blocs, les colonnes de AJ_n sont toutes égales à $\sum_{k=1}^n A_k$. On en déduit que les colonnes de AU_n sont celles de $u(A)$. Autrement dit, $AU_n = u(A)$.
ii. Un calcul direct donne $J_n^2 = nJ_n$ donc

$$U_n^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n = nJ_n - 2J_n + I_n = n(U_n + I_n) - 2(U_n + I_n) + I_n = (n-2)U_n + (n-1)I_n$$

Ainsi pour tout $A \in E_n$,

$$u^2(A) = u(A)U_n = AU_n^2 = (n-2)AU_n + (n-1)A = (n-2)u(A) + (n-1)A$$

On en déduit à nouveau que $u^2 - (n-2)u - (n-1) = 0$ i.e. que $X^2 - (n-2)X - (n-1)$ annule A .

REMARQUE. L'exercice est vraiment mal posé. En remarquant que $u(A) = AU_n$, toutes les questions précédentes se traitent de manière beaucoup plus naturelle. Par exemple,

$$\det(u(A)) = \det(A) \det(U_n)$$

et $\det(U_n)$ se calcule beaucoup plus facilement par opérations sur lignes ou colonnes.

Solution 11

1. Un calcul par blocs donne $\chi_A = X(X^2 + 1) = X(X-i)(X+i)$. Comme $\text{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de χ_A , $\text{Sp}(A) = \{0, i, -i\}$.

Enfin, χ_A est scindé à racines simples (dans \mathbb{C}) donc A est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

2. Comme $X^3 + X = X(X-i)(X+i)$ est un polynôme annulateur de M scindé à racines simples, M est diagonalisable et $\text{Sp}(M) \subset \{0, i, -i\}$. 0 ne peut être la seule valeur propre de M car sinon M serait semblable à la matrice nulle et donc nulle. De plus, comme M est à coefficients réels, χ_M l'est également de sorte que les valeurs propres non réelles de M sont conjuguées. Ainsi $\text{Sp}(M) = \{0, i, -i\}$. On en déduit que M est bien semblable à D .

3. Comme A et M sont toutes deux semblables à D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, A et M sont également semblables l'une à l'autre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car la similitude est une relation d'équivalence.

Montrons que M est également semblable à A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notons u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A . Comme A est semblable à D , $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = \text{rg}(D) = 2$ puis $\dim \text{Ker}(u) = 1$ d'après le théorème du rang. Notons e_1 un vecteur directeur de la droite $\text{Ker}(u)$.

Comme $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de u et comme X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux, $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Notons e_2 un vecteur non nul de $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $e_3 = u(e_2)$. Comme $u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ commute avec u , son noyau est stable par u de sorte que $e_3 = u(e_2) \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Montrons que (e_2, e_3) est une base de $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Tout d'abord, $\dim \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker}(u) = 2$ donc il suffit de montrer que (e_2, e_3) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha e_2 + \beta e_3 = 0$ ou encore $\alpha e_2 + \beta u(e_2) = 0$. En appliquant u , on obtient $\alpha u(e_2) + \beta u^2(e_2) = 0$. Comme $e_2 \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, $u^2(e_2) = -u_2$ donc $\alpha e_3 - \beta e_2 = 0$. Ainsi $\begin{cases} \alpha e_2 + \beta e_3 = 0 \\ -\beta e_2 + \alpha e_3 = 0 \end{cases}$. En éliminant e_3 , on obtient $(\alpha^2 + \beta^2)e_2 = 0$ et donc $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ puis $\alpha = \beta = 0$ car α et β sont réels. Ainsi (e_2, e_3) est bien libre et c'est une base de $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Comme $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 . Enfin, $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$ donc la matrice de u dans cette base est A . On en déduit que M est semblable à A .

Solution 12

Le polynôme $P = X^3 - 3X - 5$ est un polynôme annulateur de A . On étudie alors les variations de P sur \mathbb{R} . Puisque $P' = 3X^2 - 3 = 3(X - 1)(X + 1)$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$P'(x)$	+	0	-	0
$P(x)$	$-\infty$	-3	-7	$+\infty$

Notamment, P possède une unique racine réelle $\alpha > 1$. Comme P est à coefficients réels, P possède également deux racines complexes non réelles conjuguées λ et $\bar{\lambda}$. Comme P annule A , $\text{Sp}(A) \subset \{\alpha, \lambda, \bar{\lambda}\}$. Notons m_α , m_λ et $m_{\bar{\lambda}}$ les multiplicités (éventuellement nulles) respectives de α , λ et $\bar{\lambda}$. Comme χ_A est à coefficients réels, $m_\lambda = m_{\bar{\lambda}}$. Comme P est scindé à racines simples (sur \mathbb{C}), A est trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$). Notamment

$$\det(A) = \alpha^{m_\alpha} \lambda^{m_\lambda} \bar{\lambda}^{m_{\bar{\lambda}}} = \alpha^{m_\alpha} |\lambda|^{2m_\lambda} > 0$$

car $\alpha > 1 > 0$ et $|\lambda|^2 > 0$.

Diagonalisabilité**Solution 13**

φ est clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on constate que $\varphi^4 = \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Ainsi $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de φ . Par conséquent, $\text{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$. On trouve que $E_1(\varphi) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-1}(\varphi) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$. Puisque

$$\dim E_1(\varphi) + \dim E_{-1}(\varphi) = 2 < 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

φ n'est pas diagonalisable.

Solution 14

1. Supposons $x \neq 0$ et soit $M \in E_x$. Alors

$$-\frac{1}{x}M(M + I_n) = -\frac{1}{x}(M + I_n)M = I_n$$

donc $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = -\frac{1}{x}(M + I_n)$.

Soit $M \in E_0$. Alors $M^2 + M = 0$. Si M est inversible, alors, en multipliant par M^{-1} , $M = -I_n$ et $-I_n$ est bien inversible. La seule matrice inversible de E_0 est $-I_n$.

2. Remarquons que $P_x = X^2 + X + x$ est un polynôme annulateur de toutes les matrices de E_x .

Si le discriminant de P_x est strictement négatif i.e. $x > \frac{1}{4}$, alors les matrices de E_x ne possèdent pas de valeur propre réelle et ne sont donc pas diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si le discriminant de P_x est strictement positif i.e. $x < \frac{1}{4}$, alors P_x est scindé sur \mathbb{R} à racines simples donc toutes les matrices de E_x sont diagonalisables.

Si $x = \frac{1}{4}$, $P_{\frac{1}{4}} = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2$. On vérifie que $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ appartient à $E_{\frac{1}{4}}$ mais n'est pas diagonalisable.

Ainsi E_x ne contient que des matrices diagonalisables si et seulement si $x < \frac{1}{4}$.

3. Remarquons que $P_{-2} = (X - 1)(X + 2)$. Les spectres des matrices de E_{-2} sont inclus dans $\{1, -2\}$. Soit $M \in E_{-2}$. Notons m_1 et m_{-2} les multiplicités (éventuellement nulles) des valeurs propres 1 et -2 .

Comme les matrices de E_{-2} sont diagonalisables, $m_1 + m_{-2} = n$ et $m_1 - 2m_{-2} = \text{tr}(M)$. Ainsi $\text{tr}(M) = n - 3m_{-2}$ puis

$$T \subset \{n - 3k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

Réiproquement, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $M = \begin{pmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & -2I_k \end{pmatrix} \in E_{-2}$ et $\text{tr}(M) = n - 3k \in T$. Ainsi

$$T = \{n - 3k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

Solution 15

- On a $f = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + 2g$ avec $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$. Comme $\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et g sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f en est un également.
- Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), f(M) = 3M$$

$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), f(M) = -M$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}(f - 3 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer (détailler si cela ne semble pas clair) que

$$\text{Ker}(f - 3 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f - 3 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

On en déduit que f est diagonalisable, que ses valeurs propres sont 3 et -1 et que les sous-espaces propres associés respectifs sont $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- Déjà répondu à la question précédente.

- Comme la trace et le déterminant d'un endomorphisme trigonalisable sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité et comme f est diagonalisable,

$$\text{tr}(f) = 3 \cdot \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + (-1) \cdot \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = 3 \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n(n+2)$$

$$\det(f) = 3^{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \cdot (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Solution 16

- On constate que

$$(\lambda + \mu)M = \lambda^2 A + \mu^2 B + \lambda\mu(A + B) = M^2 + \lambda\mu I_p$$

ou encore

$$M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p = 0$$

Comme $\lambda\mu \neq 0$,

$$\frac{1}{\lambda\mu} M((\lambda + \mu)I_p - M) = I_p$$

Ceci prouve que M est inversible et que

$$M^{-1} = \frac{1}{\lambda\mu} ((\lambda + \mu)I_p - M)$$

2. A partir des deux premières égalités, on obtient $(\lambda - \mu)A = M - \mu I_p$. Comme $\lambda \neq \mu$, on peut affirmer que $A = \frac{1}{\lambda - \mu}(M - \mu I_p)$.

3. Un calcul donne

$$A^2 = \frac{1}{(\lambda - \mu)^2}(M^2 - 2\mu M + \mu^2 I_p)$$

Or on a vu à la première question que $M^2 = (\lambda + \mu)M - \lambda\mu I_p$ donc

$$A^2 = \frac{1}{(\lambda - \mu)^2}((\lambda - \mu)M - (\lambda\mu - \mu^2)I_p) = \frac{\lambda - \mu}{(\lambda - \mu)^2}(M - \mu I_p) = A$$

Ainsi A est une matrice de projecteur.

De plus, comme $A^2 = A$,

$$B^2 = (I_p - A)^2 = I_p - 2A + A^2 = I_p - A = B$$

donc B est une matrice de projecteur.

4. D'après la première question, $X^2 - (\lambda + \mu)X + \lambda\mu = (X - \lambda)(X - \mu)$ est un polynôme annulateur de M . Comme $\lambda \neq \mu$, ce polynôme est scindé à racines simples donc M est diagonalisable. On peut également affirmer que $\text{Sp}(M) \subset \{\lambda, \mu\}$.

Cette inclusion peut être stricte. Par exemple, si $A = I_p$ et $B = 0$, alors $M = \lambda I_p$ et $\text{Sp}(M) = \{\lambda\}$. De même, si $A = 0$ et $B = I_p$, alors $M = \mu I_p$ et $\text{Sp}(M) = \{\mu\}$.

Solution 17

Soit $\lambda \in \text{Sp}(v)$. On montre classiquement que $E_\lambda = \text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par u : u induit donc un endomorphisme u_λ de E_λ . Puisque u est diagonalisable, u annule un polynôme scindé à racines simples à coefficients dans \mathbb{K} . A fortiori, u_λ annule ce même polynôme et est donc également diagonalisable. Notons \mathcal{B}_λ une base de E_λ dans laquelle la matrice de u_λ est diagonale. Notons alors \mathcal{B} la juxtaposition des bases \mathcal{B}_λ pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Comme v est diagonalisable, E est la somme directe des sous-espaces propres de v et \mathcal{B} est donc une base de E . Par construction, la matrice de u dans \mathcal{B} est diagonale et celle de v l'est également puisque \mathcal{B} est la juxtaposition de bases de sous-espaces propres de v .

Solution 18

Méthode n°1 : A est diagonalisable donc il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Par conséquent, $A^\top = (P^{-1})^\top D^\top P^\top = (P^\top)^{-1} D P^\top$. Ainsi A^\top est également diagonalisable.

Méthode n°2 : A est diagonalisable donc admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples. Alors $P(A^\top) = P(A)^\top = 0$ donc A^\top est également diagonalisable.

Solution 19

1. Notons (e_1, e_2, e_3) la base dans laquelle la matrice de g est G . On a $g(e_1) = e_2$ et $g(e_2) = e_3$ donc $(e_1, e_2, e_3) = (e_1, g(e_1), g^2(e_1))$ est une base de E et g est cyclique. On trouve sans peine

$$\chi_g = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$$

Comme χ_g est simplement scindé, g est diagonalisable.

2. Un endomorphisme cyclique n'est pas toujours diagonalisable. Considérons par exemple un endomorphisme f nilpotent d'indice $n - 1$. Il existe alors $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. On montre alors classiquement que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . Ainsi f est bien cyclique mais f n'est évidemment pas diagonalisable dès que $n \geq 2$.
3. Soit f un endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont distinctes deux à deux. Il existe donc une base (e_1, \dots, e_n) de E formée de vecteurs propres de f . De plus, en notant λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i , les λ_i sont deux à deux distincts. Notons $x_0 = \sum_{i=1}^n e_i$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f^k(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k e_i$. La matrice de la famille $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ dans la base (e_1, \dots, e_n) est une matrice de Vandermonde associée au n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme les λ_i sont distincts deux à deux, cette matrice est inversible et la famille $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . Ainsi f est cyclique.

4. Soit $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . On montre que l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x_0) = 0_E\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Puisque les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux, cet idéal est engendré par un polynôme π_{f,x_0} . Puisque $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E , on a nécessairement $\deg \pi_{f,x_0} = n$. Mais π_f appartient aussi à l'idéal sus-mentionné donc π_{f,x_0} divise π_f . Ainsi $n = \deg \pi_{f,x_0} \leq \deg \pi_f \leq n$ puis $\deg \pi_f = n$. Comme f est diagonalisable, $\deg \pi_f = \text{card } \text{Sp}(f)$. On en déduit que $\text{card } \text{Sp}(f) = n$ et donc que les valeurs propres de f sont deux à deux distinctes.

Solution 20

1. On montre par exemple aisément que c'est un sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $M \in G$. Puisque le morphisme de groupe $\begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ M & \longmapsto & M^n \end{cases}$ ne peut être injectif puisque \mathbb{Z} est infini et que G est fini. Son noyau contient donc un entier non nul n tel que $M^n = I_2$. On peut même supposer n positif quitte à le changer en son opposé. Puisque le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples dans \mathbb{C} et annule M , M est diagonalisable. On peut également ajouter que ses valeurs propres sont des racines de l'unité et en particulier des complexes de module 1.

Si M est diagonalisable dans \mathbb{R} , ses valeurs propres ne peuvent être que 1 ou -1 . Dans ce cas, M est semblable à $I_2, -I_2$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans tous les cas, $M^6 = I_2$.

Si M n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} , elle l'est quand même dans \mathbb{C} et ses valeurs propres sont des complexes de module 1 conjugués puisque M est à coefficients réels. M est donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Puisque la trace est un invariant de similitude, $2 \cos \theta = \text{tr}(M) \in \mathbb{Z}$. Puisque \cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, $\cos \theta \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$.

- Si $\cos \theta = \pm 1$, $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \pm 1$ et on est ramené au cas précédent (en fait, M serait diagonalisable dans \mathbb{R} et on a supposé que ce n'était pas le cas).
- Si $\cos \theta = \frac{1}{2}$, alors $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Il est alors clair que $M^{12} = I_2$.
- Si $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, alors $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$. Il est alors clair que $M^{12} = I_2$.
- Si $\cos \theta = 0$, alors $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Il est alors clair que $M^{12} = I_2$.

Solution 21

1. Puisque $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Ainsi pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k = \pm 1$ et, a fortiori, $\lambda_k \equiv 1[2]$. Puisque $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$, $\text{tr}(A) \equiv n[2]$.
2. Les valeurs propres de A ne peuvent pas toutes être égales à 1 ou -1 sinon, A serait semblable à I_n ou $-I_n$ et donc égale à I_n ou $-I_n$. En notant a le nombre de valeurs propres égales à 1 et b le nombre de valeurs propres égales à -1 . On a donc $a + b = n$, $1 \leq a \leq n - 1$ et $1 \leq b \leq n - 1$. Ainsi $\text{tr}(A) = a - b$ est compris entre $-n + 2$ et $n - 2$ i.e. $|\text{tr}(A)| \leq n - 2$.

Solution 22

1. Remarquons déjà que

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n M_{\sigma(k), k} \in \mathbb{Z}$$

Supposons que $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Alors $\det(M) \det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Mais d'après la remarque initiale, $\det(M)$ et $\det(M^{-1})$ sont entiers. Ainsi $\det(M) = \pm 1$ i.e. $|\det M| = 1$.

Supposons que $|\det(M)| = 1$. Tout d'abord, $\det(M) \neq 0$ donc $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus, d'après la formule de la comatrice, $M^{-1} = \pm \text{com}(M)^T$. Les cofacteurs de M sont, au signe près, des déterminants de matrices extraites de M : ce sont donc des entiers toujours

d'après notre remarque initiale. Ainsi M^{-1} est à coefficients entiers et $M \in GL_n(\mathbb{Z})$.

Enfin, $I_n \in GL_n(\mathbb{Z})$ puisque $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $\det(I_n) = 1$. Soit $(M, N) \in GL_n(\mathbb{Z})^2$. Alors $MN \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $|\det(MN)| = |\det(M)||\det(N)| = 1$ donc $MN \in GL_n(\mathbb{Z})$. Enfin, si $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, alors $M^{-1} \in GL_n(\mathbb{Z})$ par définition de $GL_n(\mathbb{Z})$. $GL_n(\mathbb{Z})$ est donc bien un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

- 2.** Comme $X^d - 1$ est simplement scindé dans \mathbb{C} et annule M , M est diagonalisable dans \mathbb{C} . De plus, ses valeurs propres sont des racines de l'unité : elles sont donc notamment de module 1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telle que $M = PDP^{-1}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \frac{1}{3^k} P(D - I_n)^k P^{-1}$$

Par inégalité triangulaire, les coefficients diagonaux de $(D - I_n)$ sont de module inférieure ou égale à 2. On en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^k} (D - I_n)^k = 0$$

Enfin, l'application $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto PXP^{-1}$ est linéaire donc continue puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. On en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

- 3.** Considérons l'application φ qui à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ associe la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ dont les coefficients sont les classes de ceux de M dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. La compatibilité de la congruence avec la somme et le produit permet d'affirmer que φ est un morphisme d'anneaux. Le même argument permet aussi d'affirmer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det(\varphi(M)) = \overline{\det(M)}$ (utiliser la formule définissant le déterminant).

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Notons d son cardinal. On va montrer que l'application φ induit un morphisme injectif de G dans $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Soit $M \in G$. Notamment, $|\det(M)| = 1$ d'après la première question. Alors $\det(\varphi(M)) = \pm \bar{1} \neq \bar{0}$ donc $\varphi(M) \in GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. On a donc bien $\varphi(G) \subset GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. De plus, $\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$ pour tout $(M, N) \in G^2$ d'après une remarque précédente. On en déduit que φ induit bien un morphisme de groupe de G dans $GL(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\varphi(M)$ soit le neutre du groupe $GL(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Ceci signifie que les coefficients de $M - I_n$ sont des multiples de 3 donc $A = \frac{1}{3}(M - I_n)$ est à coefficients entiers. Comme d est l'ordre de G , $M^d = I_n$ et la question précédente permet d'affirmer que (A^k) converge vers 0. Comme A est à coefficients entiers, la suite (A^k) est nulle à partir d'un certain rang i.e. A est nilpotente. Mais on a vu à la question précédente que A était diagonalisable donc A est nulle puis $M = I_n$.

En conclusion, φ induit bien un morphisme injectif de G dans $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Notamment,

$$d = \text{card } G \leq \text{card } GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \leq \text{card } \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 3^{n^2}$$

Solution 23

- 1.** Notons u_1, \dots, u_p les endomorphismes canoniquement associés à A_1, \dots, A_p .

- a.** Les sous-espaces propres de u_1 sont stables par u_2 car u_1 et u_2 commutent. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u_1)$. Comme u_2 est diagonalisable, il induit un endomorphisme diagonalisable de $E_\lambda(u_1)$. Notons \mathcal{B}_λ une base de diagonalisation de cet endomorphisme. Comme $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u_1)} E_\lambda(u_1)$, la concaténation des bases \mathcal{B}_λ est une base de \mathcal{B}_λ . On vérifie sans peine que c'est une base de diagonalisation commune de u_1 et u_2 . On en déduit alors que A_1 et A_2 sont simultanément diagonalisables.

- b.** On note $HR(p)$ l'assertion :

si u_1, \dots, u_p sont des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux, alors ils sont simultanément diagonalisables.

$HR(1)$ est évidemment vraie. Supposons $HR(p)$ vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Soient alors u_1, \dots, u_{p+1} des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u_{p+1})$. Alors $E_\lambda(u_{p+1})$ est stable par u_1, \dots, u_p . Les endomorphismes de $E_\lambda(u_{p+1})$ induits par u_1, \dots, u_p sont encore diagonalisables et commutent deux à deux. On peut ainsi trouver une base commune \mathcal{B}_λ de diagonalisation de ces endomorphismes induits. A nouveau, la concaténation des bases \mathcal{B}_λ pour $\lambda \in \text{Sp}(u_{p+1})$ est une base commune de diagonalisation de u_1, \dots, u_{p+1} de sorte que $HR(p+1)$ est vraie. Ainsi $HR(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

- 2.** Montrons que G est commutatif. Remarquons que $A^{-1} = A$ pour tout $A \in G$. Soit $(A, B) \in G^2$. Alors $AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$. Comme le polynôme simplement scindé $X^2 - 1$ annule tous les éléments de G , ceux-ci sont tous diagonalisables. On peut de plus préciser que le spectre de chaque élément de G est inclus dans $\{-1, 1\}$.

Si l'on considère une partie finie F de G de cardinal p , la question précédente montre qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ diagonalisant tous les éléments de F . L'application $M \in A \mapsto P^{-1}MP$ est une injection de A dans le groupe D_n des matrices diagonales à coefficients diagonaux égaux à ± 1 . Ainsi $p \leq 2^n$.

Ainsi G est fini de cardinal inférieur à 2^n .

REMARQUE. On peut préciser la réponse même si ce n'est pas utile pour la question suivante. Il existe une matrice P diagonalisant tous les éléments de G . Le morphisme $M \in G \mapsto P^{-1}MP$ est une injection de G dans D donc G est isomorphe à un sous-groupe de D . Son cardinal divise donc 2^n . Il existe ainsi $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ tel que $\text{card } G = 2^k$.

3. Notons S_n l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = I_n$. On définit de la même manière S_m . Supposons qu'il existe un isomorphisme φ de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $GL_m(\mathbb{C})$. On vérifie sans peine que φ induit une bijection de S_n sur S_m . Les sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$ inclus dans S_n sont donc isomorphes aux sous-groupes de $GL_m(\mathbb{C})$ inclus dans S_m . Notamment, le sous-groupe D_n défini dans la question précédente est isomorphe à un sous-groupe de $GL_m(\mathbb{C})$ inclus dans S_m . Ainsi S_m contient un sous-groupe d'ordre 2^n . D'après la question précédente, on a donc $2^n \leq 2^m$. Mais de manière symétrique $2^m \leq 2^n$ donc $n = m$.

Trigonalisabilité

Solution 24

On fait l'hypothèse de récurrence $HR(n)$ suivante :

Si u et v sont deux endomorphismes trigonalisables d'un espace vectoriel E de dimension n tels que $u \circ v = v \circ u$, alors u et v trigonalisent dans une base commune.

Initialisation : $HR(1)$ est trivialement vraie puisque, dans ce cas, la matrice de tout endomorphisme dans une base quelconque est triangulaire supérieure.

Héritérité : Supposons $HR(n)$ pour un certain $n \geq 1$. Soient alors E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrons tout d'abord que u et v possèdent un vecteur propre commun. Puisque v est trigonalisable, v possède au moins une valeur propre λ . On montre alors classiquement que le sous-espace propre $E_\lambda = \text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par u . u induit un endomorphisme u_λ de E_λ . Comme u est trigonalisable, u annule un polynôme scindé à coefficients dans \mathbb{K} . A fortiori, u_λ annule ce même polynôme et est donc également trigonalisable. Par conséquent, u_λ possède une valeur propre et donc un vecteur propre e_1 . Ce vecteur e_1 est donc également un vecteur propre de u et un vecteur propre de v puisqu'il appartient au sous-espace propre E_λ de v .

Comme $e_1 \neq 0_E$, on peut compléter ce vecteur en une base $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ de E . Les matrices de u et v dans cette base sont respectivement de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & A' & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{c|cccc} \mu & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & B' & & \\ 0 & & & & \end{array} \right)$$

avec $A', B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $E' = \text{vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ et soient u' et v' les endomorphismes de E' de matrices respectives A' et B' dans la base (e_2, \dots, e_{n+1}) de E' .

On montre alors que si P est un polynôme, alors

$$A = \left(\begin{array}{c|ccccc} P(\lambda) & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & & & \\ \vdots & & P(A') & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right)$$

Comme u est trigonalisable, u annule un polynôme scindé à coefficients dans \mathbb{K} et donc A annule ce même polynôme. La remarque précédente montre que A' annule également ce polynôme : A' est donc trigonalisable et u' également. On montre de même que v' est trigonalisable.

Puisque u et v commutent, A et B commutent, ce qui entraîne la commutativité de A' et B' après un calcul par blocs et enfin la commutativité de u' et v' . On peut alors appliquer $HR(n)$: il existe donc une base (e'_2, \dots, e'_{n+1}) de E' dans laquelle les matrices de u' et v' sont triangulaires supérieures. Il suffit alors de vérifier que les matrices de u et v dans la base $(e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$ de E sont également triangulaires supérieures.

Conclusion : Par récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Solution 25

Remarquons tout d'abord que pour $S \in GL_n(\mathbb{C})$, $\overline{S^{-1}} = \bar{S}^{-1}$.

Commençons par le sens le plus simple : supposons qu'il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\bar{S}^{-1}$. Dans ce cas,

$$A\bar{A} = S\bar{S}^{-1}\overline{S\bar{S}^{-1}} = S\bar{S}^{-1}\bar{S}S^{-1} = I_n$$

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur n .

Si $n = 1$, alors $A = (\lambda)$ avec $|\lambda| = 1$. On a donc $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Il suffit alors de prendre $S = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}$.

On suppose maintenant la propriété vraie à un rang $n - 1 \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A\bar{A} = I_n$.

Montrons d'abord que toutes les valeurs propres de A sont de module 1. Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P + iQ$. Ainsi $(P + iQ)(P - iQ) = I_n$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient $P^2 + Q^2 = I_n$ et $QP - PQ = 0$. Ainsi P et Q commutent et trigonalisent dans une base commune i.e. il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et $U, V \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ telles que $P = RUR^{-1}$ et $Q = RVR^{-1}$. Posons $T = U + iV$. On a donc $A = RTR^{-1}$ et $\bar{A} = R\bar{T}R^{-1}$. La diagonale de T contient les valeurs propres de A . Comme $A\bar{A} = I_n$, on en déduit que toutes les valeurs propres de A sont de module 1.

Soit λ une valeur propre de A (il en existe toujours une complexe). On a donc $|\lambda| = 1$. On a à nouveau $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $\mu = e^{\frac{i\theta}{2}}$, de sorte que $\frac{\mu}{\bar{\mu}} = 1$. Soit X un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ . Dans ce cas, \bar{X} est également un vecteur propre de X associé à la valeur propre λ . En effet, $AX = \lambda X$ donc $\bar{AX} = \bar{\lambda} \bar{X}$ puis $A\bar{AX} = \bar{\lambda} A\bar{X}$. Puisque $A\bar{A} = I_n$, on obtient $\bar{X} = \bar{\lambda} A\bar{X}$ puis $A\bar{X} = \lambda \bar{X}$ puisque $\frac{1}{\bar{\lambda}} = \lambda$. On peut supposer X réel. En effet, les vecteurs $X + \bar{X}$ et $i(X - \bar{X})$ sont réels et l'un des deux est non nul. L'un de ces deux vecteurs est donc un vecteur propre réel associé à la valeur propre λ . On peut compléter X en une base de \mathbb{C}^n à l'aide de vecteurs réels (ceux de la base canonique, par exemple). Notons P la matrice de cette base dans la base canonique. Posons $B = P^{-1}AP$. Cette matrice est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda & Y^\top \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array} \right) \text{ avec } Y \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ et } C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}). \text{ On a } B\bar{B} = P^{-1}A\bar{P}P^{-1}\bar{A}P = I_n \text{ car } \bar{P} = P \text{ et } \bar{P}^{-1} = P^{-1} (P \text{ est à coefficients réels}). \text{ On en}$$

déduit que $C\bar{C} = I_{n-1}$. D'après notre hypothèse de récurrence, il existe $T \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $C = T\bar{T}^{-1}$.

Montrons qu'il existe $Z \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $Z - \lambda \bar{Z} = Y^\top \bar{T}$. Puisque $B\bar{B} = 0$, on a en particulier $\lambda \bar{Y}^\top T + Y^\top \bar{T} = 0$. Notons $\varphi(z) = z + \lambda \bar{z}$ et $\psi(z) = z - \lambda \bar{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. φ et ψ sont des endomorphismes du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . On vérifie que $\varphi \circ \psi = 0$ en utilisant $|\lambda| = 1$. On a donc $\text{Im } \psi \subset \text{Ker } \varphi$. φ et ψ ne sont pas nuls donc $\dim \text{Im } \psi \geq 1 \geq \dim \text{Ker } \varphi$. Ainsi $\text{Im } \psi = \text{Ker } \varphi$. Les composantes de $Y^\top \bar{T}$ sont dans $\text{Ker } \varphi$ donc dans $\text{Im } \psi$, ce qui justifie l'existence de Z .

$$\text{Posons alors } U = \left(\begin{array}{c|c} \mu & Z^\top \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array} \right). \text{ On a alors } \bar{U}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\bar{\mu}} & -\frac{1}{\bar{\mu}} \bar{Z}^\top \bar{T}^{-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array} \right). \text{ On vérifie alors que } U\bar{U}^{-1} = B. \text{ Il suffit alors de poser } S = PUP^{-1}$$

pour avoir $A = S\bar{S}^{-1}$.

Nilpotence**Solution 26**

1. On a évidemment $\chi_A = X^3$ donc la seule valeur propre de A est 0. Si A était diagonalisable, elle serait donc semblable à la matrice nulle et donc nulle, ce qui n'est pas. Ainsi A n'est pas diagonalisable.

2. a. On a $B^6 = A^3 = 0$ donc X^6 est un polynôme annulateur de B . On en déduit que 0 est la seule valeur propre de A donc $\chi_A = X^3$.

- b. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $B^3 = 0$. A fortiori, $A^2 = B^4 = 0$, ce qui est absurde puisque $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{C}^3 . Alors $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$ et $u(e_3) = e_2$. La matrice de u dans la base (e_2, e_1, e_3) est C . On en déduit que A est semblable à C .

Polynôme minimal

Solution 27

Remarquons que $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de A donc le polynôme minimal π_A divise $X^n - 1$. De plus, il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à n sinon la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ serait libre. On en déduit que $\pi_A = X^n - 1$. Or π_A divise χ_A et $\deg \chi_A = n$ donc $\chi_A = \pi_A = X^n - 1$. Les valeurs propres de A sont donc les racines n èmes de l'unité et sont toutes de multiplicités 1. Ainsi

$$\text{tr}(A) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \frac{e^{2i\pi} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = 0$$

Solution 28

On notera classiquement π_M le polynôme minimal d'une matrice M .

- Posons $n = \deg \pi_A$ et $P = X^n \pi_A \left(\frac{1}{X} \right)$. Comme A est inversible, le coefficient constant de π_A est non nul et $\deg P = n$. P est un polynôme annulateur de A^{-1} donc $\pi_{A^{-1}}$ divise P . En particulier, $\deg \pi_{A^{-1}} \leq n$. De même, en posant $p = \deg \pi_{A^{-1}}$ et $Q = X^p \pi_{A^{-1}} \left(\frac{1}{X} \right)$, $\deg Q = p$ et on trouve que π_A divise Q . En particulier, $\deg \pi_A \leq p$. Finalement, $\deg \Pi_{A^{-1}} = \deg P$. En notant a le coefficient constant (non nul) de π_A , on a $\pi_{A^{-1}} = \frac{1}{a}P$ car $\pi_{A^{-1}}$ est unitaire par convention.

- Puisque pour tout polynôme P et toute matrice M à coefficients réels

$$P(M) = 0 \iff P(M)^T = 0 \iff P(M^T) = 0$$

A et $A^T = A^{-1}$ ont le même polynôme minimal. Si ce polynôme minimal était de degré impair, il admettrait une racine réelle λ . Ainsi A admettrait λ pour valeur propre. Soit X un vecteur propre associé à cette valeur propre. On a donc $AX = \lambda X$ et donc $\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^n . Mais comme A est orthogonale, $\|AX\| = \|X\|$ d'où $\lambda = \pm 1$ ($\|X\| \neq 0$ car un vecteur propre est non nul). Ceci contredit l'énoncé. C'est donc que le polynôme minimal de A est de degré pair.

Solution 29

- On procède par récurrence. Tout d'abord,

$$f^0 \circ g - g \circ f^0 = 0 = 0f^0$$

Supposons que $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors en composant par f à gauche,

$$f^{n+1} \circ g - f \circ g \circ f^n = nf^{n+1}$$

Mais

$$f \circ g = g \circ f + f$$

donc

$$f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} - f^{n+1} = nf^{n+1}$$

ou encore

$$f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = (n+1)f^{n+1}$$

Ainsi $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

- D'après la question précédente, les applications linéaires $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto P(f) \circ g - g \circ P(f) \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto f \circ P'(f) \end{cases}$ coïncident sur la base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Elles sont donc égales et on en déduit le résultat voulu.

3. Si on applique la question précédente à $P = \pi_f$ le polynôme minimal de f , on obtient $f \circ \pi'_f(f) = 0$. Le polynôme $X\pi'_f$ annule donc f de sorte que π_f divise $X\pi'_f$. En considérant le degré p de π_f et le coefficient dominant, on a donc $p\pi_f = X\pi'_f$. Ainsi $\frac{\pi'_f}{\pi_f} = \frac{p}{X}$ de sorte que $\pi_f = X^p$. f est donc nilpotent.

Solution 30

1. Les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires et les autres colonnes sont toutes colinéaires à la seconde. Ainsi $\text{rg}(A) = 2$ puis $\dim \text{Ker}(A) = n - 2$.
2. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.
3. Comme A est diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre 0 est la dimension du sous-espace propre associé, c'est-à-dire $n - 2$.

4. Remarquons que $\chi_A(1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Via l'opération $C_1 \leftarrow 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$, $\chi_A(1) = \begin{vmatrix} \alpha & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha$

où $\alpha = -\sum_{k=2}^n k^2 < 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_A(x) = +\infty$, χ_A admet une racine $\lambda > 1$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - \mu)$. Mais $\text{tr}(A) = 1 = \lambda + \mu$ donc $\mu = 1 - \lambda$. On en déduit que $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ avec $\lambda > 1$.

5. Comme A est diagonalisable, π_A est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de A . Ainsi $\pi_A = X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda) = X^3 - X^2 + \lambda(1 - \lambda)X$ est un polynôme annulateur de A . Or $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - 1 + \lambda)$ donc, comme vu à la question précédente,

$$\lambda(1 - \lambda) = \chi_A(1) = -\sum_{k=2}^n k^2$$

Finalement, un polynôme annulateur de A est $X^3 - X^2 - \left(\sum_{k=2}^n k^2\right)X$.

Solution 31

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$u^2(M) = u(M) + \text{tr}(u(M))I_n = u(M) + (n+1)\text{tr}(M)I_n = (n+2)u(M) - (n+1)M$$

Ainsi $X^2 - (n+2)X + (n+1)$ est un polynôme annulateur de u .
2. On constate que $X^2 - (n+2)X + (n+1) = (X-1)(X-(n+1))$ est scindé à racines simples donc u est diagonalisable.
3. Le polynôme minimal π_u divise $(X-1)(X-(n+1))$. Or on a clairement $u \neq \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et, comme $n \geq 2$, $u \neq (n+1)\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $\pi_u \neq X-1$ et $\pi_u \neq X-(n+1)$. Ainsi $\pi_u = (X-1)(X-(n+1))$. Notamment $\text{Sp}(u) = \{1, n+1\}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est clairement l'hyperplan des matrices de trace nulle. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $n+1$ est donc une droite. Comme u est diagonalisable, les multiplicités des valeurs propres de u dans le polynôme caractéristique sont égales aux dimensions des sous-espaces propres. Ainsi $\chi_u = (X-1)^{n^2-1}(X-(n+1))$.

REMARQUE. On peut vérifier que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\text{vect}(I_n)$.

Solution 32

1. On sait que le rang de B est le rang de la famille de ses colonnes. Comme les n dernières colonnes de B sont également les n dernières, le rang de B est celui de $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$. Mais le rang de B est également le rang de la famille de ses lignes donc $\text{rg } B = \text{rg } A$.

2. Une récurrence simple montre que $B^p = \begin{pmatrix} A^p & A^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. De plus, $B^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

Soit $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$\begin{aligned} P(B) &= a_0 I_{2n} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p B^p \\ &= a_0 \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \begin{pmatrix} A^p & A^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) - a_0 I_n \\ 0 & a_0 I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car $a_0 = P(0)$.

3. Comme A est diagonalisable, le polynôme minimal π_A de A est scindé à racines simples.

Supposons que A n'est pas inversible. Alors $0 \in \text{Sp}(A)$ donc 0 est racine de π_A i.e. $\pi_A(0) = 0$. D'après la question précédente, $\pi_A(B) = 0$ et donc B est diagonalisable puisque π_A est scindé à racines simples.

Supposons que A est inversible. Alors 0 n'est pas racine de π_A . Le polynôme $P = X\pi_A$ est donc encore scindé à racines simples et annule B d'après la question précédente. B est encore diagonalisable.

De manière générale, un calcul par blocs donne $\chi_B = X^n \chi_A$. Ainsi $\text{Sp}(B) = \text{Sp}(A) \cup \{0\}$ car le spectre d'une matrice est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique.

Solution 33

1. Il suffit de développer le déterminant définissant χ_A par rapport à sa dernière colonne.

2. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A . Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n . On a donc $u(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Ainsi $e_k = u^{k-1}(e_1)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il s'ensuit que $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1}$ est la base canonique de \mathbb{K}^n . En particulier,

c'est une famille libre. Posons $p = \deg \pi_A$ et supposons $p < n$. Posons $\pi_A = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} c_k X^k$. On sait que $\pi_A = \pi_u$ annule u . Ainsi

$u^p + \sum_{k=0}^{p-1} c_k u^k = 0$. En particulier, $u^p(e_1) + \sum_{k=0}^{p-1} c_k u^k(e_1) = 0$. La famille $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq p}$ est donc liée ce qui contredit la liberté de la famille $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1}$. Par conséquent, $p = n$.

Ainsi $\deg \pi_A = \deg \chi_A$, π_A divise χ_A et π_A et χ_A sont unitaires, ce qui permet d'affirmer que $\pi_A = \chi_A$.

3. On sait que $\chi_{A^\top} = \chi_A = P$. Ainsi $\text{Sp}(A^\top)$ est l'ensemble des racines de P . Soit donc λ une racine de P .

Alors $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in E_\lambda(A^\top)$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, x_{k+1} = \lambda x_k \\ - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k = \lambda x_{n-1} \end{array} \right.$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_k = \lambda^k x_0 \\ P(\lambda)x_0 = 0 \end{cases}$$

La dernière égalité est toujours vraie puisque λ est racine de P . On en déduit que $E_\lambda(A^\top) = \text{vect}((1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}))$.

Solution 34

- 1.** **a.** Soit $x \in E$. Vérifions que $I_{u,x}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

- Il est clair que $0 \in I_{u,x}$.
- Soit $(P, Q) \in I_{u,x}^2$. Alors

$$(P + Q)(u)(x) = P(u)(x) + Q(u)(x) = 0_E$$

donc $P + Q \in I_{u,x}$.

- Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times I_{u,x}$. Alors

$$(PQ)(u)(x) = P(u)(Q(u)(x)) = P(u)(0_E) = 0_E$$

donc $PQ \in I_{u,x}$.

Puisque π_u est un polynôme annulateur de u , a fortiori, $\pi_u(u)(x) = 0_E$ donc $\pi_u \in I_{u,x}$. Comme $\pi_{u,x}$ est un générateur de $I_{u,x}$, π_u est un multiple de $\pi_{u,x}$.

- b.** Soit $x \in E$. $E_{u,x}$ est l'image de l'application linéaire $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto P(u)(x) \end{cases}$: c'est donc un sous-espace vectoriel de E .

Soit $y \in E_{u,x}$. Alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$. Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $\pi_{u,x}$. Alors $P = Q\pi_{u,x} + R$ puis $y = P(u)(x) = R(u)(x)$ puisque $Q\pi_{u,x} \in I_{u,x}$. Or $\deg R \leq \deg \pi_{u,x} - 1$ donc $y \in \text{vect}(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$, ce qui prouve que $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ est une famille génératrice de $E_{u,x}$.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ tel que $\sum_{k=0}^{\deg \pi_{u,x}-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. Posons $R = \sum_{k=0}^{\deg \pi_{u,x}-1} \lambda_k X^k$. On a donc $R(u)(x) = 0_E$ i.e. $R \in I_{u,x}$. R est donc un multiple de $\pi_{u,x}$ et comme $\deg R < \deg \pi_{u,x}$, $R = 0$ i.e. $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, \deg \pi_{u,x} - 1 \rrbracket$. Ceci prouve que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ est libre.

Finalement, $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ est une base de $E_{u,x}$. On en déduit que $\dim E_{u,x} = \deg \pi_{u,x}$.

- c.** Soit $y \in E_{u,x}$. Il existe donc $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$. Alors $u(y) = (XP)(u)(x)$ appartient également à $E_{u,x}$. Ainsi $E_{u,x}$ est stable par u .

Soit $Q \in I_{u,x}$. Alors $Q(u)(y) = (PQ)(u)(x) = P(u)(Q(u)(x)) = P(u)(0_E) = 0_E$ donc Q est un polynôme annulateur de $u|_{E_{u,x}}$. Réciproquement soit Q un polynôme annulateur de $u|_{E_{u,x}}$. En particulier, $Q(u)(x) = 0_E$ donc $Q \in I_{u,x}$. Ainsi $I_{u,x}$ est l'idéal annulateur de $u|_{E_{u,x}}$ de sorte que $\pi_{u,x} = \pi_{u|_{E_{u,x}}}$.

- 2.** **a.** Posons $P_i = \prod_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{i\}} \pi_{u,x_j}$ pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors

$$P(u)(x) = \sum_{i=1}^p P(u)(x_i) = \sum_{i=1}^n P_i(u)(\pi_{u,x_i}(x_i)) = \sum_{i=1}^n P_i(u)(0_E) = 0_E$$

donc $P \in I_{u,x}$ de sorte que $\pi_{u,x}$ divise P .

- b.** Soit $(y_1, \dots, y_p) \in \prod_{i=1}^p E_{u,x_i}$ tel que $\sum_{i=1}^p y_i = 0_E$. Il existe des polynômes Q_1, \dots, Q_p de $\mathbb{K}[X]$ tels que $y_i = Q(u)(x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a donc

$$\sum_{j=1}^p Q_j(u)(x_j) = 0_E$$

Fixons $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. En appliquant $P_i(u)$ à l'égalité précédente, on obtient

$$\sum_{j=1}^p P_i(u)(Q_j(u)(x_j)) = 0_E$$

Mais comme pour $j \neq i$

$$P_i(u)(Q_j(u)(x_j)) = Q_j(u)(P_i(u)(x_j)) = Q_j(0_E) = 0_E$$

il reste $(P_i Q_i)(u)(x_i) = 0_E$. On en déduit que π_{u,x_i} divise $P_i Q_i$. Or π_{u,x_i} est premier avec P_i donc π_{u,x_i} divise Q_i par le théorème de Gauss. Ainsi $y_i = Q_i(u)(x_i) = 0_E$.

Ceci montre que E_{x_1}, \dots, E_{x_p} sont en somme directe.

- c. Par définition, $\pi_{u,x}(x) = 0_E$ i.e. $\sum_{i=1}^p \pi_{u,x}(x_i) = 0_E$. Mais pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\pi_{u,x}(x_i) \in E_{u,x_i}$. Puisque $E_{u,x_1}, \dots, E_{u,x_p}$ sont en somme directe, $\pi_{u,x}(x_i) = 0_E$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Ainsi π_{u,x_i} divise $\pi_{u,x}$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Mais comme $\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}$ sont premiers entre eux deux à deux, P divise $\pi_{u,x}$. Or on a déjà vu que $\pi_{u,x}$ divisait P donc $P = \pi_{u,x}$ puisqu'il s'agit de deux polynômes unitaires.

Il est clair que $E_{u,x} \subset \bigoplus_{i=1}^p E_{u,x_i}$. De plus,

$$\dim E_{u,x} = \deg \pi_{u,x} = \deg P = \sum_{i=1}^p \deg \pi_{u,x_i} = \sum_{i=1}^p \dim E_{u,x_i} = \dim \left(\bigoplus_{i=1}^p E_{u,x_i} \right)$$

$$\text{donc } E_{u,x} = \bigoplus_{i=1}^p E_{u,x_i}.$$

3. La décomposition en facteurs irréductibles de π_u s'écrit

$$\pi_u = \prod_{i=1}^p M_i^{\alpha_i}$$

où M_1, \dots, M_p sont des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$ distincts deux à deux et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des entiers naturels non nuls. En particulier, les polynômes $M_1^{\alpha_1}, \dots, M_p^{\alpha_p}$ sont premiers entre eux deux à deux. Le lemme des noyaux permet alors d'affirmer que

$$E = \text{Ker } \pi_u(u) = \bigoplus_{j=1}^p \text{Ker } M_j^{\alpha_j}(u)$$

Supposons qu'il existe $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\text{Ker } M_i^{\alpha_i-1}(u) = \text{Ker } M_i^{\alpha_i}(u)$. Alors le lemme des noyaux permet d'affirmer que le polynôme $\frac{\pi_u}{M_i}$ est un polynôme annulateur de u , ce qui contredit la minimalité de π_u . Ainsi pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Ker } M_i^{\alpha_i-1}(u) \subsetneq \text{Ker } M_i^{\alpha_i}(u)$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe donc $x_i \in (\text{Ker } M_i^{\alpha_i}(u)) \setminus (\text{Ker } M_i^{\alpha_i-1}(u))$.

Fixons $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Puisque $M_i^{\alpha_i}(u)(x_i) = 0_E$, π_{u,x_i} divise $M_i^{\alpha_i}$. Puisque M_i est irréductible, il existe un entier naturel $\beta_i \leq \alpha_i$ tel que $\pi_{u,x_i} = M_i^{\beta_i}$. Mais puisque $M_i^{\alpha_i-1}(u)(x_i) \neq 0_E$, $\beta_i = \alpha_i$. Ainsi $\pi_{u,x_i} = M_i^{\alpha_i}$.

Posons alors $x = \sum_{i=1}^p x_i$. D'après la question précédente,

$$\pi_{u,x} = \prod_{i=1}^p \pi_{u,x_i} = \prod_{i=1}^p M_i^{\alpha_i} = \pi_u$$

4. On procède par implications circulaires.

- (i) \implies (ii) Supposons que $\pi_u = \chi_u$. On sait qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. En particulier, $\dim E_{u,x} = \deg \pi_{u,x} = \deg \pi_u = \deg \chi_u = n$. Ainsi $E_{u,x} = E$.
- (ii) \implies (iii) Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $E_{u,x} = E$. Alors $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $E_{u,x} = E$. En posant $u^n(x) = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)$, la matrice de u dans cette base est bien de la forme voulue.
- (iii) \implies (i) Supposons qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme de l'énoncé. Si on note x le premier vecteur de cette base, alors cette base est $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$. Ainsi $E = \text{vect}(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1} \subset E_{u,x}$. Puisqu'on a évidemment $E_{u,x} \subset E$, on a alors $E_{u,x} = E$. En particulier, $\deg \pi_{u,x} = \dim E_{u,x} = n$. Puisque $\pi_{u,x}$ divise π_u qui lui-même divise χ_u et que $\deg \chi_u = n$, il s'ensuit que $\pi_{u,x} = \pi_u = \chi_u$.

Solution 35

- On constate que $U^2 = nU$ donc $X^2 - nX = X(X - n)$ est un polynôme annulateur de U . Or ni X ni $X - n$ n'annulent U . Donc $\pi_U = X(X - n)$.
- On en déduit que U est diagonalisable (π_U est scindé à racines simples) et $\text{Sp}(U) = \{0, n\}$. De plus, il est clair que $\text{rg } U = 1$ donc $\dim E_0(U) = \dim \text{Ker } U = n - 1$. Par conséquent, $\dim E_n(U) = 1$. Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On vérifie que $e_i - e_1$ appartient à $E_0(U)$ pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Ces vecteurs sont clairement linéairement indépendants et $\dim E_0(U) = n - 1$ donc ils forment une base de $E_0(U)$. Soit $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. Alors $v \in E_n(U)$ et $\dim E_n(U) = 1$ donc (v) est une base de $E_n(U)$. En notant $P = (e_1 - e_2 \ \dots \ e_1 - e_n \ v)$ et D la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (n, n) qui vaut 1, on a $U = PDP^{-1}$.

Solution 36

- On calcule le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
 \chi_{A_m}(X) &= \begin{vmatrix} X + m + 1 & -m & -2 \\ m & X - 1 & -m \\ 2 & -m & X + m - 3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} X + m - 1 & -m & -2 \\ 0 & X - 1 & -m \\ X + m - 1 & -m & X + m - 3 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\
 &= (X + m - 1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X - 1 & -m \\ 1 & -m & X + m - 3 \end{vmatrix} \quad \text{en factorisant la première colonne} \\
 &= (X + m - 1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X - 1 & -m \\ 0 & 0 & X + m - 1 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 &= (X + m - 1)^2(X - 1)
 \end{aligned}$$

On traite d'abord le cas $m = 0$. Alors $\chi_{A_0} = (X - 1)^3$. Comme π_{A_0} divise χ_{A_0} et est unitaire, π_{A_0} vaut $(X - 1)$, $(X - 1)^2$ ou $(X - 1)^3$. On $M \neq I_3$, $\pi_{A_0} \neq X - 1$. Un calcul montre que $(A_0 - I_3)^2 = 0$ donc $\pi_{A_0} = (X - 1)^2$.

On suppose ensuite $m \neq 0$. Puisque $\text{Sp}(A_m) = \{1, 1 - m\}$ et π_{A_m} divise χ_{A_m} , π_{A_m} vaut $(X - 1)(X + m - 1)$ ou $(X - 1)(X + m - 1)^2$. Un calcul donne

$$(A - I_3)(A + (m - 1)I_3) = \begin{pmatrix} m(2 - m) & 0 & m(m - 2) \\ 0 & 0 & 0 \\ m(2 - m) & 0 & m(m - 2) \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est nulle que si $m = 2$. On en déduit que $\pi_{A_2} = (X + 1)(X - 1)$ et si $m \neq 2$, $\pi_{A_m} = (X - 1)(X + m - 1)^2$.

On récapitule :

- $\pi_{A_0} = (X - 1)^2$;
- $\pi_{A_2} = (X - 1)(X + 1)$;
- $\pi_{A_m} = (X - 1)(X + m - 1)^2$ si $m \notin \{0, 2\}$.

Solution 37

Notons $\pi_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme minimal de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\pi_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme minimal de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\pi_{\mathbb{R}}$ peut être vu comme un polynômes à coefficients complexes annulant A donc $\pi_{\mathbb{C}}$ divise $\pi_{\mathbb{R}}$ (dans $\mathbb{C}[X]$).

Notons $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de $\pi_{\mathbb{C}}$. Comme $\pi_{\mathbb{C}}$ annule A et A est à coefficients réels, on montre aisément que $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$ annule également A. On en déduit que π_A divise $\overline{\pi_A}$ (dans $\mathbb{C}[X]$). Mais comme $\pi_{\mathbb{C}}$ et $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$ sont unitaires et de même degré, ils sont égaux. On en déduit que $\pi_{\mathbb{C}}$ est à coefficients réels et annule A. Ainsi $\pi_{\mathbb{R}}$ divise $\pi_{\mathbb{C}}$ (dans $\mathbb{R}[X]$ et a fortiori dans $\mathbb{C}[X]$). Finalement, $\pi_{\mathbb{C}}$ et $\pi_{\mathbb{R}}$ se divisent l'un l'autre (dans $\mathbb{C}[X]$) et sont unitaires donc ils sont égaux.

Solution 38

$X^n - 1$ est un polynôme annulateur de A. Comme $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre, il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à n . Ainsi $\pi_A = X^n - 1$. De plus $\pi_A \mid \chi_A$ et $\deg \chi_A = n$ donc $\chi_A = \pi_A = X^n - 1$. Le coefficient de X^{n-1} dans χ_A est $-\text{tr}(A)$. Comme $n \geq 2$, $\text{tr}(A) = 0$.

Solution 39

1. Cf. cours.

2. Comme $\mu_f(f) = 0$, le lemme des noyaux montre que

$$E = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E)$$

Si on avait $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = \{0\}$, on aurait $\text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E) = E$ et $X^2 + 4$ serait donc un polynôme annulateur de E, ce qui contredit la définition du polynôme minimal. Ainsi $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \neq \{0\}$. On prouve de la même manière que $\text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E) \neq \{0\}$. Il existe donc des vecteurs non nuls x et y de E appartenant respectivement à $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E)$. On a alors $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.

3. Montrons que $(x, f(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$. On sait que déjà que $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$. Comme $f^2 + \text{Id}_E$ commute avec f, $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ est stable par f de sorte que $f(x) \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha x + \beta f(x) = 0$. En appliquant f, on obtient $\alpha f(x) + \beta f^2(x) = 0$ ou encore $\alpha f(x) - \beta x = 0$. Alors

$$\alpha(\alpha x + \beta f(x)) - \beta(\alpha f(x) - \beta x) = (\alpha^2 + \beta^2)x = 0$$

Comme $x \neq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ puis $\alpha = \beta = 0$ car α et β sont réels. Ainsi $(x, f(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$.

On montre de la même manière que $(y, f(y))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E)$. Ainsi $\dim \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \geq 2$ et $\dim \text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E) \geq 2$. Or $E = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E)$ donc $\dim E = \dim \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) + \dim \text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E) = 4$. On en déduit que $\dim \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = \dim \text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E) = 2$ puisque $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sont des bases respectives de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E)$. A nouveau, $E = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + 4 \text{Id}_E)$ donc $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E (adaptée à la décomposition en somme directe précédente).

La matrice de f dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 40

1. Comme les a_i ne sont pas nuls, les $n - 1$ premières colonnes de $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sont non nulles et colinéaires et la dernière colonne n'est pas colinéaire aux précédentes. On en déduit que $\text{rg}(f) = 2$.

2. D'après le théorème du rang $\dim \text{Ker } f = n - 2$. On en déduit que 0 est une valeur propre de f de multiplicité supérieure ou égale à $n - 2$. Ainsi X^{n-2} divise χ_f . Comme χ_f est unitaire de degré n , il existe bien $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire tel que $\chi_f = X^{n-2}P$ et $\deg P = 2$.

REMARQUE. Comme $\text{mat}_{cB}(f)$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable de même que f. On en déduit que 0 est valeur propre de multiplicité exactement $n - 2$. Ainsi 0 n'est pas racine de P ou encore $P(0) \neq 0$.

3. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = X^2 + \alpha X + \beta$. On sait que le coefficient de X^{n-1} dans χ_f est $-\text{tr}(f)$ donc $\alpha = -\text{tr}(f) = -a_1$.

4. Il est clair que

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad f(e_i) = a_{n+1-i}e_n \quad \text{et} \quad f(e_n) = \sum_{i=1}^n a_{n+1-i}e_i$$

On en déduit que

$$f^2(e_n) = \sum_{i=1}^n a_{n+1-i}f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n+1-i}^2 e_n + a_1 f(e_n) = a_1 f(e_n) + S e_n$$

$$\text{en posant } S = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n+1-i}^2 = \sum_{i=2}^n a_i^2.$$

- 5.** D'après la question précédente, le sous-espace vectoriel $G = \text{vect}(e_n, f(e_n))$ est stable par f . De plus, $f(e_n) = \sum_{i=1}^n a_{n+1-i}e_i$ n'est pas colinéaire à e_n car (e_1, \dots, e_n) est libre et les a_i sont non nuls. Ainsi $(e_n, f(e_n))$ est une base de G et la matrice de l'endomorphisme f_G de G induit par f est $\begin{pmatrix} 0 & S \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$. D'après le cours, $\chi_{f_G} = X^2 - a_1X - S$ divise $\chi_f = X^{n-2}P$. Comme $\chi_{f_G}(0) = -S \neq 0$, χ_{f_G} est premier avec X^{n-2} . On en déduit que χ_{f_G} divise P d'après le lemme de Gauss. Comme χ_{f_G} et P sont unitaires et de degré 2, $\chi_{f_G} = P$ puis $\chi_f = X^{n-2}(X^2 - a_1X - S)$.
- 6.** La matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique réelle donc diagonalisable, de même que f . Le polynôme P est de discriminant $a_1^2 + 4S > 0$ donc il est scindé à racines simples. De plus, 0 n'est pas racine de P . Comme f est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et possède les mêmes racines que χ_f . On en déduit que $\pi_f = XP = X(X^2 - a_1X - S)$.

Solution 41

Comme AB est diagonalisable, son polynôme minimal π_{AB} est scindé à racines simples. De plus, AB est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de A et n'est donc pas une racine de π_{AB} .

Comme $\pi_{AB}(AB) = 0$, $B\pi_{AB}(AB)A = 0$ ou encore $P(BA) = 0$ avec $P = X\pi_{AB}$. Or π_{AB} est scindé à racines simples et 0 n'est pas racine de π_{AB} donc P est encore scindé à racines simples. On en déduit que BA est diagonalisable.

Solution 42

Supposons que u est diagonalisable. Il existe alors une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice D de u est diagonale. La matrice de u^2 dans cette même base est la matrice diagonale D^2 . Ainsi u^2 est diagonalisable.

Supposons u^2 diagonalisable. Le polynôme minimal π_{u^2} de u^2 est alors scindé à racines simples. Il existe donc des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distincts deux à deux tels que $\pi_{u^2} = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$. Comme $u \in \text{GL}(E)$, $u^2 \in \text{GL}(E)$ et aucun des λ_i n'est nul. Notons μ_i une racine carrée (non nulle) de λ_i . Posons

$$P = \prod_{i=1}^r (X^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^r (X - \mu_i)(X + \mu_i)$$

Comme les λ_i sont distincts deux à deux et non nuls, les $\pm\mu_i$ sont également distincts deux à deux de sorte que P est scindé à racines simples. De plus,

$$P(u) = \pi_{u^2}(u^2) = 0$$

donc u est diagonalisable.

Solution 43

- 1.** Sachant que pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$, on prouve aisément par récurrence que $(A^k)^T = (A^T)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Par linéarité de la transposition,

$$P(A)^T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (A^k)^T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (A^T)^k = P(A^T)$$

2. Première méthode. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(A) = 0 \iff P(A)^T = 0 \iff P(A^T) = 0$$

Ainsi A et A^T possèdent le même idéal annulateur. Comme le polynôme minimal est l'unique générateur unitaire de cet idéal, $\pi_A = \pi_{A^T}$.

Deuxième méthode. $\pi_A(A^T) = \pi_A(A)^T = 0^T = 0$ donc π_{A^T} divise π_A . En appliquant ceci à A^T , $\pi_{(A^T)^T} = \pi_A$ divise π_{A^T} . Comme π_A et π_{A^T} sont unitaires par définitions, $\pi_A = \pi_{A^T}$.

Solution 44

1. On a clairement $\chi_M = \chi_A^2$ (déterminant triangulaire par blocs). Les polynômes χ_M et χ_A ont donc les mêmes racines. Ainsi $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(M)$.

2. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ nA^n & A^n \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ AP'(A) & P(A) \end{pmatrix}$$

3. Supposons que M soit diagonalisable. Son polynôme minimal π_M est donc scindé à racines simples. D'après la question précédente, π_M et $X\pi'_M$ annulent A . Ainsi π_A divise π_M et $X\pi'_M$. Comme π_M est scindé à racines simples, $\pi_M \wedge \pi'_M = 1$. Or π_A divise π_M donc $\pi_A \wedge \pi'_M = 1$ également. D'après le lemme de Gauss, π_A divise X i.e. $\pi_A = X$ puis $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$, $M = 0$ est diagonalisable.

Solution 45

1. Dire que $p = 0$ équivaut à dire que $\pi_u(0) \neq 0$, ou encore que $0 \notin \text{Sp}(u)$ ou enfin que $u \in \text{GL}(E)$.

2. Remarquons que $\pi_u = X^p Q$ où 0 n'est pas racine de Q . Ainsi $X^p \wedge Q = 1$. D'après le lemme des noyaux, $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Ker } Q(u)$. De plus, $Q(u) \circ u^p = \pi_u(u) = 0$ donc $\text{Im}(u^p) \subset \text{Ker } Q(u)$. Enfin, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Im}(u^p) = \dim(E) - \dim \text{Ker } u^p = \dim \text{Ker } Q(u)$ donc $\text{Im}(u^p) = \text{Ker } Q(u)$, ce qui conclut.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $E = \text{Ker}(u^k) \oplus \text{Im}(u^k)$. Notons R le polynôme minimal de $u|_{\text{Im } u^k}$. Alors $X^k R$ annule u sur $\text{Ker } u^k$ et sur $\text{Im } u^k$ donc sur E . On en déduit que π_u divise $X^k R$. Par transitivité, X^p divise $X^k R$. Or, comme $k \geq 1$,

$$\text{Ker } u|_{\text{Im } u^k} = \text{Ker } u \cap \text{Im } u^k \subset \text{Ker } u^k \cap \text{Im } u^k = \{0\}$$

Ainsi 0 n'est pas valeur propre de $u|_{\text{Im } u^k}$ donc n'est pas racine de R . Par conséquent, $X^p \wedge R = 1$. D'après le lemme de Gauss, X^p divise X^k donc $p \leq k$.

Solution 46

1. On vérifie que pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $G_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$. Ainsi $u \mapsto G_u$ est bien à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Il est clair que $u \mapsto G_u$ est linéaire. De plus, $G_{\text{Id}_E} = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$ et pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $G_{u \circ v} = G_u \circ G_v$. Ainsi $u \mapsto G_u$ est bien un morphisme d'algèbres.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $G_u = 0$. Alors $u = G_u(\text{Id}_E) = 0$ donc $u \mapsto G_u$ est injectif.

On montre de la même manière que $u \mapsto D_u$ est un morphisme d'algèbres injectif.

2. Démonstration laissée au lecteur. C'est en fait vrai pour tout morphisme d'algèbres $\Phi : E \rightarrow F$: pour tout $x \in E$ et tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\Phi(P(x)) = P(\Phi(x))$.

3. D'après une question précédente, $P(G_u) = 0 \iff G_{P(u)} = 0$. Mais, par injectivité de $u \mapsto G_u$, $G_{P(u)} = 0 \iff P(u) = 0$. Ainsi u et G_u ont le même idéal annulateur et également le même polynôme minimal i.e. $\pi_{G_u} = \pi_u$.

On montre de la même manière que $\pi_{D_u} = \pi_u$.

4. Il suffit d'utiliser la question précédente et le fait qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.
5. Si u est diagonalisable, G_u et D_u le sont également. Comme G_u et D_u commutent, on montre classiquement qu'ils sont simultanément diagonalisables i.e. il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres communs à G_u et D_u . C'est aussi une base de vecteurs propres de $G_u - D_u$ qui est donc aussi diagonalisable.
6. On s'inspire des questions précédentes. Si u est nilpotent alors $\pi_u = \Pi_{G_u} = \Pi_{D_u} = X^p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, donc G_u et D_u sont nilpotents. Comme ils commutent,

$$(G_u - D_u)^{2p-1} = \sum_{k=0}^{2p-1} \binom{2p-1}{k} G_u^k D_u^{2p-1-k}$$

Tous les termes de cette somme sont nuls puisque si $k \geq p$, $G_u^k = 0$ et si $k < p$, $2p-1-k \geq p$ et $D_u^{2p-1-k} = 0$. Donc $G_u - D_u$ est nilpotent.

Solution 47

1. Trivial.
2. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . On montre aisément que B et B^\top ont même polynôme caractéristique et donc même spectre. Ainsi $\mu \in \text{Sp}(B^\top)$. Soit alors Y un vecteur propre de B^\top associé à la valeur propre μ . Posons $M = XY^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $AM = AXY^\top = \lambda XY^\top = \lambda M$ et $MB = XY^\top B = X(B^\top Y)^\top = \mu XY^\top = \mu M$. Ainsi $u(M) = (\lambda - \mu)M$. Comme X et Y sont non nuls, $M \neq 0$ (il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $X_i \neq 0$ et $Y_j \neq 0$ de sorte que $M_{i,j} = X_i Y_j \neq 0$). Ainsi $\lambda - \mu \in \text{Sp}(u)$.
3. Remarquons que $AT = T(B + \alpha I_n)$. On montre alors aisément par récurrence que $A^k T = T(B + \alpha I_n)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis que $P(A)T = TP(B + \alpha I_n)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
4. Notamment, si on considère $P = \pi_A$, on obtient $T\pi_A(B + \alpha I_n) = 0$. Comme $T \neq 0$, $\pi_A(B + \lambda I_n)$ n'est pas inversible. Or A est diagonalisable donc π_A est scindé à racines simples. Plus précisément, $\pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)$. Ainsi

$$\pi_A(B + \alpha I_n) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (B - (\lambda - \alpha)I_n)$$

Comme le produit n'est pas inversible, un des facteurs ne l'est pas. Ainsi il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $B - (\lambda - \alpha)I_n$ n'est pas inversible. Autrement dit, $\lambda - \alpha \in \text{Sp}(B)$. Il existe donc $\mu \in \text{Sp}(B)$ tel que $\alpha = \lambda - \mu$.

5. On a montré par double inclusion que

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)\}$$

Solution 48

1. D'après le théorème de Bezout, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UP + V\pi_A = 1$. En évaluant en A , on obtient $U(A)P(A) + V(A)\pi_A(A) = I_n$. Puisque $\pi_A(A) = 0$, $U(A)P(A) = I_n$ et $P(A)$ est inversible.
2. Supposons $B = P(A)$ inversible. Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_B = \mu_B(0) + XQ$. Comme B est inversible, $0 \notin \text{Sp}(B)$ i.e. $\mu_B(0) \neq 0$. Comme μ_B annule B , $\mu_B(0)I_n + BQ(B) = 0$. Ainsi, en posant $R = -\frac{1}{\mu_B(0)}Q$, $B^{-1} = R(B) = (R \circ P)(A) = S(A)$ en posant $S = R \circ P$. Ainsi $P(A)S(A) = BB^{-1} = I_n$. On en déduit que $PS - 1$ annule A puis que π_A divise $PS - 1$. Comme $P \wedge \pi_A$ divise π_A , $P \wedge \pi_A$ divise $PS - 1$. Mais $P \wedge \pi_A$ divise également P donc $P \wedge \pi_A$ divise 1. Finalement $P \wedge \pi_A = 1$.

Exponentielles

Solution 49

- 1.** Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, l'endomorphisme $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T$ est continu. En notant $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$, on a donc

$$\begin{aligned}\exp(A^T) &= (\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p)^T \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p^T \quad \text{par continuité de la transposition} \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \right)^T \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{(A^k)^T}{k!} \quad \text{par linéarité de la transposition} \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{(A^T)^k}{k!} \quad \text{par propriété de la transposition} \\ &= \exp(A^T)\end{aligned}$$

- 2.** Puisque A est symétrique, $A^T = A$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$(\exp(A))^T = \exp(A^T) = \exp(A)$$

de sorte que $\exp(A)$ est symétrique.

- 3.** Puisque $\frac{1}{2}A$ commute avec elle-même

$$\exp(A) = \exp(A/2 + A/2) = \exp(A/2)^2$$

Par propriété du déterminant,

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(A/2)^2) = \det(\exp(A/2))^2 \geq 0$$

De plus, $\exp(A)$ est inversible puisque $\exp(A)\exp(-A) = \exp(0) = I_n$ (A et $-A$ commutent) donc $\det(\exp(A)) \neq 0$. Ainsi $\det(\exp(A)) > 0$.

4.

$$\begin{aligned}\exp(A)^T \exp(A) &= \exp(A^T) \exp(A) \quad \text{d'après la première question} \\ &= \exp(-A) \exp(A) \quad \text{car } A \text{ est antisymétrique} \\ &= \exp(-A + A) \quad \text{car } A \text{ et } -A \text{ commutent} \\ &= \exp(0) = I_n\end{aligned}$$

Ainsi $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$. Mais la question précédente prouve que $\det(\exp(A)) > 0$ donc $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

Solution 50

Méthode n°1

On sait que $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$. On effectue la division euclidienne de X^n par χ_A . Il existe un polynôme Q_n et deux réels a_n et b_n tels que

$$X^n = \chi_A Q_n + a_n X + b_n$$

Après évaluation en 2 et 3, on obtient le système $\begin{cases} 2a_n + b_n = 2^n \\ 3a_n + b_n = 3^n \end{cases}$. On en déduit que $a_n = 3^n - 2^n$ et $b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$. Ainsi, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = \chi_A(A)Q_n(A) + a_n A + b_n I_2 = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I_2$$

Par conséquent,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \right) A + \left(3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \right) I_2 = (e^3 - e^2)A + (3e^2 - 2e^3)I_2 = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

Méthode n°2

Comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable. De plus, $\text{Sp}(A) = \{2, 3\}$. On calcule sans peine $E_2(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$ puis

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Un rapide calcul donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

Solution 51**Méthode n°1**

On calcule $\chi_A = (X-2)^2(X-3)$. On effectue la division euclidienne de X^n par χ_A . Il existe un polynôme deux polynômes Q_n et R_n tels que

$$X^n = \chi_A Q_n + R_n \quad \text{et} \quad \deg R_n < 3$$

Alors 2 est racine double de $X^n - R_n$ et 3 est racine simple de $X^n - R_n$ ce qui donne

$$(X^n - R_n)(2) = (X^n - R_n)(3) = (X^n - R_n)'(3) = 0$$

En notant $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$ avec $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$, on obtient le système

$$\begin{cases} 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \\ 6a_n + b_n = 3n^{n-1}n \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a_n = 3^{n-1}n - 3^n + 2^n \\ b_n = 6 \cdot 3^n - 5 \cdot 3^{n-1}n - 6 \cdot 2^n \\ c_n = 9 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^{n-1}n - 8 \cdot 3^n \end{cases}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = \chi_A(A)Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$$

Par conséquent,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \right) A^2 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} \right) A + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} \right) I_3 = e^2 A^2 + (e^3 - 6e^2)A + (9e^2 - 2e^3)I_3 = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 10e^2 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 9e^2 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 11e^2 \end{pmatrix}$$

Méthode n°2

Comme χ_A est scindé, A est trigonalisable. De plus, $\text{Sp}(A) = \{2, 3\}$. On calcule sans peine $E_2(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Enfin, on recherche $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$AU = 2U + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On trouve $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A = PTP^{-1}$ en posant

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\exp(A) = P \exp(T)P^{-1}$. Or

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 10e^2 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 9e^2 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 11e^2 \end{pmatrix}$$

Solution 52

Notons p l'indice de nilpotence de u . Alors

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{u^n}{n!}$$

Remarquons que

$$\exp(u) - \text{Id}_E = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^n}{n!} = \left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^{n-1}}{n!} \right) \circ u = u \circ \left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^{n-1}}{n!} \right)$$

On en déduit automatiquement que $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(\exp(u) - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(\exp(u) - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(u)$.

Soit $x \in \text{Ker}(\exp(u) - \text{Id}_E)$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{u^k(x)}{k!} = 0_E$$

Supposons $u(x) \neq 0_E$. Notons alors ℓ le plus grand entier naturel non nul vérifiant $u^\ell(x) \neq 0_E$. En appliquant $u^{\ell-1}$ à la dernière relation, on obtient $u^\ell(x) = 0_E$, ce qui est contradictoire. On en déduit que $u(x) = 0_E$ i.e. $x \in \text{Ker}(u)$. Par double inclusion, $\text{Ker}(\exp(u) - \text{Id}_E) = \text{Ker}(u)$. D'après le théorème du rang, $\text{rg}(\exp(u) - \text{Id}_E) = \text{rg}(u)$. Or $\text{Im}(\exp(u) - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(u)$ donc $\text{Im}(\exp(u) - \text{Id}_E) = \text{Im}(u)$.