

# DEVOIR SURVEILLÉ N°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

**1** **1.a** On calcule le polynôme caractéristique de A :  $\chi_A = (X + 2)(X - 1)^2$ . Par conséquent le spectre de A est  $\{-2; 1\}$ .

**1.b** On vérifie aisément que  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  en calculant son déterminant dans la base canonique. De plus,  $Au_1 = u_1$ ,  $Au_2 = u_2$  et  $Au_3 = -2u_3$  donc  $u_1, u_2$  et  $u_3$  sont des vecteurs propres de A.

**1.c** On vient de trouver une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de A donc A est diagonalisable.

**1.d**  $Bu_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  n'est pas colinéaire à  $u_1$  et de même pour  $u_2$  et  $u_3$  donc aucun élément de  $\mathcal{F}$  n'est vecteur propre de B donc a fortiori commun à A et B.

**2** **2.a**  $\chi_B = (X - 2)^3$  (on développe par rapport à la deuxième ligne) donc le spectre de B est  $\{2\}$ .

**2.b**  $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ . Les trois colonnes de cette matrice sont colinéaires à  $u_4$  donc  $\text{Im}_2(B) \subset \text{vect}(u_4)$  et  $u_4$  est la première colonne donc  $\text{vect}(u_4) \subset \text{Im}_2(B)$ . Par conséquent  $\text{Im}_2(B) = \text{vect}(u_4)$ . Le théorème du rang nous dit alors que  $\dim E_2(B) = 2$ .

**2.c** La somme des dimensions des sous espaces propres de B est égale à  $2 < 3$  donc B n'est pas diagonalisable.

**3** **3.a**  $Bu_5 = 2u_5$  et  $Au_5 = u_5$  donc  $\text{vect}(u_5) \subset E_1(A) \cap E_2(B)$ .

$E_1(A)$  et  $E_2(B)$  sont de dimension 2 donc cette intersection est de dimension 1 ou 2 (on a déjà un vecteur non nul dans l'intersection). Si elle est de dimension 2, alors  $E_1(A) = E_2(B)$  ce qui est absurde car  $u_1$  est dans  $E_1(A)$  mais pas dans  $E_2(B)$ . Par conséquent l'intersection est de dimension 1 et  $E_1(A) \cap E_2(B) = \text{vect}(u_5)$ .

**3.b** Comme  $u_3$  n'est pas vecteur propre de B et qu'il engendre  $E_{-2}(A)$ , il n'y a pas de vecteur propre commun à A et B dans  $E_{-2}(A)$ . De plus, 2 est la seule valeur propre de B donc les vecteurs propres communs à A et B sont dans  $E_1(A) \cap E_2(B)$ . D'après la question précédente, les vecteurs propres communs à A et B sont les vecteurs de la forme  $\lambda u_5$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

**4** **4.a**  $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  donc  $[A, B] = C$ .

**4.b** On calcule le polynôme caractéristique de C. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 5 & -3 & 1 \\ 2 & \lambda - 6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$ . On remplace  $L_1$  par

$L_1 - L_3$  :

$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 2 & \lambda - 6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$ . On utilise la linéarité par rapport à la première ligne puis on remplace  $C_1$  par  $C_1 + C_3$  :

$\chi_C(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 6 & -2 \\ \lambda + 6 & -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$ . Enfin, on développe par rapport à la première ligne :  $\chi_C(\lambda) = \lambda(\lambda - 6)(6 + \lambda)$ .

$\chi_C$  est scindé à racines simples donc  $C$  est diagonalisable. De plus les valeurs propres de  $C$  sont  $-6, 0$  et  $6$  donc  $C$  est semblable à  $D$ .

Le rangs de  $C$  et de  $D$  sont alors égaux et  $\text{rg}(C) = 2$ .

**5** **5.a** Soient  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $Ae = \lambda e$  et  $Be = \mu e$ . Alors  $ABe = \mu Ae = \lambda \mu e$  et de même pour  $BAe$  donc  $e \in \text{Ker}([A, B])$ .

**5.b** Le vecteur  $e$  n'est pas nul (car vecteur propre) donc  $\dim \text{Ker}[A, B] > 0$  d'après la question précédente. D'après le théorème du rang,  $\text{rg}([A, B]) < n$ .

**6** On suppose  $[A, B] = 0$ . Comme  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $A$  a au moins une valeur propre : soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ .  $[A, B] = 0$  donc  $\text{Ker}([A, B]) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B])$  :  $A$  et  $B$  vérifient la propriété  $\mathcal{H}$ .

**7** **7.a** Soit  $X \in E_\lambda(A)$ . Par hypothèse  $(AB - BA)X = 0$  soit  $ABX = BAX$ . Or  $AX = \lambda X$  donc  $A(BX) = \lambda BX$  ce qui signifie que  $BX \in E_\lambda(A)$  :  $\psi : X \mapsto BX$  est une application de  $E_\lambda(A)$  dans lui-même. De plus, par propriété du produit matriciel,  $\psi$  est linéaire donc  $\psi$  est un endomorphisme de  $E_\lambda(A)$ .

**7.b**  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  donc  $E_\lambda(A)$  est de dimension non nulle et comme  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\psi$  a au moins une valeur propre : il existe  $\mu \in \mathbb{C}$  et  $X \in E_\lambda(A)$  non nul tels que  $\psi(X) = \mu X$ . On a donc  $BX = \mu X$ ,  $AX = \lambda X$  et  $X$  non nul :  $X$  est un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ .

**8** En dimension 1, tous les vecteurs non nuls sont des vecteurs propres donc  $\mathcal{P}_1$  est vérifiée.

**9** **9.a**  $A$  et  $B$  ne vérifient pas  $\mathcal{H}$  donc  $E_\lambda(A)$  n'est pas inclus dans  $\text{Ker}(C)$  : il existe  $u \in E_\lambda(A)$  tel que  $u \notin \text{Ker}(C)$  :  $u$  est donc un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  qui vérifie  $Au = \lambda u$  et  $Cu \neq 0$ .

**9.b** Par hypothèse  $\text{Im } C$  est de dimension 1 et  $v = Cu$  est un vecteur non nul de cette image donc  $\text{Im } C = \text{vect}(v)$ .

**9.c**  $v = Cu$  donc  $v = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu$  soit  $v = (A - \lambda I)(Bu)$  :  $v \in \text{Im}_\lambda(A)$ . La question précédente permet alors de dire que  $\text{Im } C \subset \text{Im}_\lambda(A)$ .

**9.d**  $\text{Im } C$  est de dimension 1 donc  $1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A))$ .

$\lambda$  est valeur propre de  $A$  donc  $E_\lambda(A)$  a une dimension non nulle et, d'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$ . Finalement

$$1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$$

**9.e**  $A$  et  $A - \lambda I_n$  commutent donc  $[A, A - \lambda I_n] = 0$ .

Par définition  $[B, A - \lambda I_n] = B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B = BA - AB = -[A, B]$  d'où  $[B, A - \lambda I_n] = -C$ .

$\varphi$  et  $\psi$  sont des applications linéaires par propriétés du produit matriciel.

Soit  $X \in \text{Im}_\lambda(A)$  :  $X = (A - \lambda I_n)Y$  où  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .

Comme  $[A, A - \lambda I_n] = 0$ ,  $AX = (A - \lambda I_n)(AY)$  donc  $AX \in \text{Im}_\lambda(A)$ . Par conséquent  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\text{Im}_\lambda(A)$ .

De même  $BX = (A - \lambda I_n)(BY) - CY$ .  $CY \in \text{Im } C$  et  $\text{Im } C \subset \text{Im}_\lambda(A)$  donc  $CY \in \text{Im}_\lambda(A)$ ; on a aussi  $(A - \lambda I_n)(BY) \in \text{Im}_\lambda(A)$  donc  $BX \in \text{Im}_\lambda(A)$ . On en conclut que  $\psi$  est un endomorphisme de  $\text{Im}_\lambda(A)$ .

**9.f**  $\text{Im}([\varphi, \psi]) \subset \text{Im}(C)$  donc  $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$ . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\varphi$  et  $\psi$ , endomorphismes de  $\text{Im}_\lambda(A)$  qui est de dimension non nulle et strictement inférieure à  $n$  :  $\varphi$  et  $\psi$  ont un vecteur propre commun. A fortiori  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun.

**10**  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . On suppose que  $\mathcal{P}_k$  est vérifiée pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

Soit  $E$  de dimension  $n$ .

Soit  $\varphi$  et  $\psi$  deux d'endomorphismes de  $E$  tels que  $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$ .

On considère  $A$  et  $B$  les matrices associées respectivement à  $\varphi$  et  $\psi$  dans une base de  $E$ ,  $C = AB - BA$ .

Si  $\text{rg}(C) = 1$  et si  $A$  et  $B$  ne vérifient pas  $\mathcal{H}$ , alors, d'après la question 9,  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun :  $\varphi$  et  $\psi$  ont un vecteur propre commun ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) donc  $A$  a au moins une valeur propre.

Si  $\text{rg}(C) = 1$  et  $A, B$  vérifient  $\mathcal{H}$ , alors d'après 7,  $\varphi$  et  $\psi$  ont un vecteur propre commun.

Si  $\text{rg}(C) = 0$ , alors  $[A, B] = 0$  et, d'après les questions 6 et 7,  $\varphi$  et  $\psi$  ont un vecteur propre commun.

On en déduit que  $\mathcal{P}_n$  est vérifiée.

Par récurrence, on peut conclure que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

**11**  $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k}$ . On pose  $l = 2n - k$  pour obtenir  $g(P) = \sum_{l=0}^{2n} a_{2n-l} X^l$ .

**12** Pour tout polynôme  $P$ ,  $\deg P' \leq \deg P$  et la dérivation des polynômes est linéaire donc  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

La question précédente prouve que  $g$  est une application de  $E$  dans  $E$ .

Si  $(P, Q) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} g(P + \lambda Q) &= X^{2n}(P + \lambda Q)\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right) + X^{2n}Q\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= g(P) + \lambda g(Q) \end{aligned}$$

donc  $g$  est linéaire.  $g$  est donc un endomorphisme de  $E$ .

**13.a** Soit  $P$  un vecteur propre de  $g$  et  $\lambda$  la valeur propre associée.  $g(P) = \lambda P$ .

La question 11 prouve que  $g$  est injective donc  $\lambda$  ne peut pas être nul. Par conséquent  $P$  et  $g(P)$  ont le même degré que l'on appelle  $d$ . ( $P$  n'est pas nul car vecteur propre).

On reprend les notations de la question 11.  $a_d \neq 0$  donc si  $k = 2n - d$ ,  $a_{2n-k} \neq 0$  et donc  $\deg(g(P)) \geq 2n - d$ . Par conséquent  $d \geq 2n - d$  et donc  $\deg(P) \geq n$ .

**13.b**  $g(X^n) = X^n$  et  $X^n$  n'est pas le polynôme nul donc  $X^n$  est un vecteur propre de  $g$ .

**14.a** Soit  $f \in E$ . Il existe  $(a_0, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{K}^{2n+1}$  tel que  $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ . Alors

$$f^i(P) = P^{(i)} = \sum_{k=i}^{2n} a_k \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$$

Ainsi  $P \in \ker f^{(i)}$  si et seulement si  $a_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket i, 2n \rrbracket$  ou encore si et seulement si  $P \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$ . On a donc bien  $\ker f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$ .

**14.b** Si  $P$  est non nul de degré  $i-1$ , alors  $f^i(P) = 0P$  donc  $0 \in \text{Sp}(f^i)$ .

Remarquons que  $f^{2n+1} = 0$  donc  $f$  est nilpotent. A fortiori,  $f^i$  est nilpotent puisque  $(f^i)^{2n+1} = (f^{2n+1})^i = 0$ . D'après le cours,  $\text{Sp}(f^i) = \{0\}$ .

**15** Si  $i \geq n+1$ ,  $f^i(X^n) = 0X^n$  donc  $X^n$  est vecteur propre de  $f^i$ . Avec la question 13.b, on peut en déduire que  $X^n$  est un vecteur propre commun à  $f$  et  $g$ .

On suppose réciproquement que  $i$  est tel que  $f$  et  $g$  ont un vecteur propre commun.

Soit  $P$  un vecteur propre commun. D'après la question 13.a,  $\deg(P) \geq n$  et d'après la question 14.b,  $P \in \ker f^i$  donc d'après la question 14.a,  $\deg(P) \leq i-1$ . Ainsi,  $n \leq i-1$  soit  $i \geq n+1$ .

Finalement  $f$  et  $g$  ont un vecteur propre commun si et seulement si  $i \geq n+1$ .

**16** Pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ ,  $f(X^k) = kX^{k-1}$  et  $g(X^k) = X^{2n-k}$ . On en déduit que

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & 2n & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**17.a** En prenant  $n = 1$  dans la question précédente, on obtient bien  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Par produit matriciel,  $(A_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $(A_1)^3$  est la matrice nulle.

**17.b** On trouve  $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  qui est de rang 2.

$[(A_1)^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  qui est aussi de rang 2.

**17.c** Quand  $i = 2$ ,  $i \geq 1 + 1$  donc  $(A_1)^2$  et  $B_1$  ont un vecteur propre commun alors que la condition de la question **10** n'est pas vérifiée ; celle-ci n'est donc pas nécessaire.

Quand  $i = 1$ ,  $\text{rg}([A_1, B_1]) < 3$  mais  $A_1$  et  $B_1$  n'ont pas de vecteur propre commun donc la condition de la question **5.b** n'est pas suffisante.

**18**  $\dim E_\lambda(A) \geq 2$  donc on peut considérer deux vecteurs propres  $X$  et  $X'$  formant une famille libre associés à la valeur propre  $\lambda : X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$ .

Si  $x_1 = 0$  alors  $X \in \mathcal{N}$ .

Si  $x_1 \neq 0$ , on pose  $X'' = x'_1 X - x_1 X'$ . Alors  $X'' \in \mathcal{N}$  (la première composante de  $X''$  est nulle),  $X''$  n'est pas nul (car  $(X, X')$  est libre) et est dans  $E_\lambda(A)$  donc  $X''$  est un vecteur propre de  $A$ .

Dans tous les cas,  $A$  admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**19.a** Soit  $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  tel que  $A_{1,2} = 1$ ,  $A_{2,1} = -1$ , tous les autres coefficients nuls (ceci est possible car  $n \geq 2$ ).  $A$  n'est pas la matrice nulle et est antisymétrique donc  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0\}$ .

**19.b** Soit  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ ,  $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Pour tous  $i$  et  $j$ ,  $M_{i,j} = -M_{j,i}$  donc en particulier les coefficients diagonaux  $M_{i,i}$  sont nuls ; comme il y en a un par colonne, on en déduit que les colonnes de  $M$  sont des éléments de  $\mathcal{N}$ .

**19.c** Soit  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ . La transposition est linéaire et  $(AB)^\top = B^\top A^\top$  donc

$$\varphi(M)^\top = (AM)^\top + (MA^\top)^\top = M^\top A^\top + (A^\top)^\top M^\top = -MA^\top + AM^\top = -\varphi(M)$$

donc  $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

De même

$$\psi(M)^\top = (AMA^\top)^\top = AM^\top A^\top - \varphi(M)$$

$\varphi$  et  $\psi$  sont donc des applications de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  dans lui-même. De plus, elles sont linéaires par propriétés du produit matriciel donc  $\varphi$  et  $\psi$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

**19.d** Soit  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

$$\varphi \circ \psi(M) = \varphi(AMA^\top) = A(AMA^\top) + (AMA^\top)A^\top = A^2MA^\top + AM(A^\top)^2$$

et par ailleurs

$$\psi \circ \varphi(M) = \psi(AM + MA^\top) = A(AM + MA^\top)A^\top = A^2MA^\top + AM(A^\top)^2$$

Par conséquent, pour tout  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ ,  $\varphi \circ \psi(M) = \psi \circ \varphi(M)$  donc  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ .

**20** **20.a** •  $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  et  $X_2^\top \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$  donc  $X_1 X_2^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . De même  $X_2 X_1^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  donc  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . De plus

$$\begin{aligned} B^\top &= (X_1 X_2^\top)^\top - (X_2 X_1^\top)^\top \\ &= X_2 X_1^\top - X_1 X_2^\top \end{aligned}$$

donc  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

• On suppose  $B = 0$  de sorte que  $X_1 X_2^\top = X_2 X_1^\top$ . Posons  $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ . On a alors  $\alpha_j \beta_i = \alpha_i \beta_j$  pour tout

$(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Comme  $X_1$  est non nul en tant que vecteur propre, il existe  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\alpha_{i_0} \neq 0$ . Mais alors  $\beta_j = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_j$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  i.e.  $X_2 = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}} X_1$ . Mais la famille  $(X_1, X_2)$  est libre puisque  $X_1$  et  $X_2$  sont des vecteurs propres de  $A$  associés à des valeurs propres distinctes. On aboutit à une contradiction de sorte que  $B \neq 0$ .

• Pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $AX_i = \lambda_i X_i$  donc  $X_i^\top A^\top = \lambda_i X_i^\top$ .

$$\begin{aligned} AB + BA^\top &= AX_1 X_2^\top - AX_2 X_1^\top + X_1 X_2^\top A^\top - X_2 X_1^\top A^\top \\ &= \lambda_1 X_1 X_2^\top - \lambda_2 X_2 X_1^\top + \lambda_2 X_1 X_2^\top - \lambda_1 X_2 X_1^\top \\ &= \lambda_1 B + \lambda_2 B \end{aligned}$$

d'où  $AB + BA^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)B$ .

• De même

$$\begin{aligned} ABA^\top &= (AX_1)(X_2^\top A^\top) - (AX_2)(X_1^\top A^\top) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 X_1 X_2^\top - \lambda_2 \lambda_1 X_2 X_1^\top \end{aligned}$$

d'où  $ABA^\top = (\lambda_1 \lambda_2)B$ .

**20.b** A et  $I_n$  commutent donc  $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = A^2B - (\lambda_1 + \lambda_2)AB + \lambda_1\lambda_2 B$ . On multiplie la relation  $AB + BA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)B$  par A à gauche :  $A^2B + ABA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)AB$  donc  $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = -ABA^T + \lambda_1\lambda_2 B$ . Comme  $ABA^T = (\lambda_1\lambda_2)B$ , on conclut  $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0$ .

**20.c**  $B \neq 0$  donc l'une au moins des colonnes de B est non nulle ; soit C une colonne de B non nulle.  $(A - \lambda_2 I_n)B = 0$  donc  $(A - \lambda_2 I_n)C = 0_{n,1}$  soit  $AC = \lambda_2 C$ . C n'est pas nulle donc C est un vecteur propre de A.

De plus  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  donc  $C \in \mathcal{N}(A)$ , une des colonnes de B, est donc un vecteur propre de A sous forme normale.

**20.d**  $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0$  donc il existe X une colonne de  $(A - \lambda_2 I_n)B$  non nulle. Il existe alors U une des colonnes de B telle que  $X = (A - \lambda_2 I_n)U$ . Comme  $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0$ , on a également  $(A - \lambda_1 I_n)X = 0$  donc X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre  $\lambda_1$ . A nouveau, comme B est antisymétrique,  $U \in \mathcal{N}(A)$ . Or  $X = (A - \lambda_2 I_n)U$  et  $\lambda_2 \in \text{Sp}(A)$  donc X est un vecteur propre de A sous forme normale.

**21.a**  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux endomorphismes de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  tels que  $\text{rg}([\varphi, \psi]) = 0 \leq 1$  donc, d'après la partie II,  $\varphi$  et  $\psi$  ont un vecteur propre commun : il existe  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  non nulle vecteur propre de  $\varphi$  et de  $\psi$  ; il existe donc  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\varphi(B) = \alpha B$  soit  $AB + BA^T = \alpha B$  et il existe  $\beta \in \mathbb{C}$  tel que  $ABA^T = \beta B$ .

**21.b** On multiplie la relation  $AB + BA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)B$  par A à gauche :  $A^2B + ABA^T = \alpha AB$  mais  $ABA^T = \beta B$  donc  $A^2B + \beta B = \alpha AB$ . En factorisant par B, on obtient  $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0$ .

**21.c** Le polynôme  $X^2 - \alpha X + \beta$  à coefficients complexes a deux racines (éventuellement confondues) donc il existe  $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $X^2 - \alpha X + \beta = (X - \gamma)(X - \delta)$ . Alors  $A^2 - \alpha A + \beta I_n = (A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)$  et, la relation de la question précédente devient :  $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0$ .

**21.d** On suppose  $(A - \delta I_n)B = 0$  donc, si  $A - \delta I_n$  est inversible, alors  $B = 0$  ce qui est exclu donc  $A - \delta I_n$  n'est pas inversible et  $\delta \in \text{Sp}(A)$ . Une colonne non nulle de B est alors un vecteur propre de A sous forme normale (car B est antisymétrique).

**21.e** Puisque  $(A - \delta I_n)B \neq 0$ ,  $(A - \delta I_n)B$  possède une colonne non nulle. Autrement dit, il existe une colonne U de B telle que  $X = (A - \delta I_n)U \neq 0$ . Comme B est antisymétrique,  $U \in \mathcal{N}(A)$ . De plus,  $(A - \gamma I_n)X = 0$  (d'après la question 21.c) donc X est un vecteur propre de A (associé à la valeur propre  $\gamma$ ) sous forme normale.

**21.f** A n'a qu'une valeur propre  $\lambda$  et  $\delta \neq \lambda$  donc  $\delta$  n'est pas valeur propre de A et  $(A - \delta I_n)$  est inversible.

$A - \gamma I_n$  et  $A - \delta I_n$  commutent donc si on multiplie à gauche la relation de la question 21.c par  $(A - \delta I_n)^{-1}$ , on obtient  $(A - \gamma I_n)B = 0$ .

**21.g** On est alors revenu à la situation de la question 21.d et donc A possède un vecteur propre sous forme normale.

On considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  quelconque.

A a au moins une valeur propre.

Si A a une seule valeur propre, d'après les questions précédentes, A possède un vecteur propre sous forme normale.

Si A a au moins deux valeurs propres distinctes, alors d'après 20, A possède un vecteur propre sous forme normale.

On en conclut que, dans tous les cas, une matrice A de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  possède un vecteur propre sous forme normale.