

DEVOIR À LA MAISON N°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

Partie I – Etude de la suite (v_n)

I.1 La suite (v_n) vérifie la relation : $v_0 > 0$, $v_1 > 0$ et $\forall n \geq 0$, $\sqrt{v_n} \sqrt{v_{n+1}} v_{n+2} = 1$.

Si elle converge vers une limite l finie ou infinie, alors $l \geq 0$ et par continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$, on a $l^2 = 1$.

La seule limite possible de (v_n) est 1.

I.2 I.2.a La suite (w_n) vérifie la relation de récurrence $w_{n+2} = -\frac{w_{n+1} + w_n}{2}$.

I.2.b L'espace vectoriel F est de dimension 2. On le vérifie en montrant que $(w_n) \mapsto (w_0, w_1)$ est un isomorphisme de F dans \mathbb{R}^2 .

On cherche des éléments de F de la forme (r^n) avec $r \neq 0$, en reportant dans la relation de récurrence, on obtient $r^2 = -\frac{r+1}{2}$, soit $r = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$.

Donc $\left(\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{4} \right)^n, \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{4} \right)^n \right)$ est une base de F .

I.2.c $\left| \frac{-1+i\sqrt{7}}{4} \right| = \left| \frac{-1-i\sqrt{7}}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{4} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{4} \right)^n = 0$.

On en déduit que si $(x_n) \in F$, alors $x_n = \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

I.3 $(w_n) \in F$ donc, d'après la question **I.2.c**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$, or $v_n = e^{w_n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ et $\sum v_n$ diverge.

De plus $v_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ converge absolument donc

$\sum (v_n - 1)$ converge absolument.

Partie II – Norme subordonnée

II.1 Remarquons que l'application $f_A : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mapsto AX$ est linéaire et donc continue puisque $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est de dimension finie. De plus, $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \|X\| \leq 1\}$ est compact toujours car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Ainsi f_A est bornée sur \mathcal{B} . En notant N_∞ la norme uniforme sur les applications bornées sur \mathcal{B} , on a donc $\|f_A\| = N_\infty(f_A)$. On vérifie alors aisément que $\|\cdot\|$ est une norme sachant que N_∞ en est une.

Homogénéité Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il est clair que $f_{\lambda A} = \lambda f_A$ donc

$$\| \lambda A \| = N_\infty(f_{\lambda A}) = N_\infty(\lambda f_A) = |\lambda| N_\infty(f_A) = |\lambda| \|A\|$$

Inégalité triangulaire Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Il est clair que $f_{A+B} = f_A + f_B$. Alors

$$\|A + B\| = N_\infty(f_{A+B}) = N_\infty(f_A + f_B) \leq N_\infty(f_A) + N_\infty(f_B) = \|A\| + \|B\|$$

Séparation Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| = 0$. Alors $N_\infty(f_A) = 0$ donc f_A est nulle sur \mathcal{B} . Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Si $X = 0$ alors $f_A(X) = 0$. Sinon $X/\|X\| \in \mathcal{B}$ donc $f_A(X/\|X\|) = 0$ puis $f_A(X) = 0$. Ainsi f_A est nulle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ i.e. $A = 0$.

II.2 Si $B = 0$, alors $AB = 0$ et donc $\|AB\| = \|A\| \|B\| = 0$. Supposons $B \neq 0$ de sorte que $\|B\| \neq 0$. Soit $X \in \mathcal{B}$. Alors $\|BX\| \leq \|B\|$ ou encore $BX/\|B\| \in \mathcal{B}$ donc $\|ABX/\|B\|\| \leq \|A\|$ i.e. $\|ABX\| \leq \|A\| \|B\|$. Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{B}$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Partie III – Etude de normes matricielles

$$\text{III.1 III.1.a } DZ = \begin{pmatrix} m_{1,1}z_1 \\ m_{2,2}z_2 \\ \vdots \\ m_{n,n}z_n \end{pmatrix} \text{ donc } \|DZ\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |m_{i,i}z_i| \leq m \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| = m\|Z\|_\infty.$$

$$\boxed{\|DZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty}.$$

III.1.b Si $\|Z\|_\infty \leq 1$, alors on a $\|DZ\|_\infty \leq m$ d'où $\|D\|_\infty = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|X\|_\infty \leq 1} \|DX\|_\infty \leq m$.

De plus, il existe un entier $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $m = |m_{j,j}|$. En prenant $z_j = 1$ et pour $k \neq j$, $z_k = 0$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$,

on a $\|DZ\|_\infty = m$ et $\|Z\|_\infty = 1$ d'où $\|D\|_\infty \geq m$.

Finalement $\boxed{\|D\|_\infty = m}$.

III.2 III.2.a $N_P(X) = \|PX\|_\infty$.

Si P n'est pas inversible, en prenant $X \in \ker P$ non nul, on a $N_P(X) = 0$ et $X \neq 0$ donc N_P n'est pas une norme.

Si P est inversible, alors

- N_P est une application de \mathbb{C}^n dans \mathbb{R}^+
- $\forall X \in \mathbb{C}^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}, N_P(\lambda X) = \|\lambda PX\|_\infty = |\lambda| \|PX\|_\infty = |\lambda| N_P(X)$.
- $\forall (X, Y) \in (\mathbb{C}^n)^2, N_P(X + Y) = \|P(X + Y)\|_\infty = \|PX + PY\|_\infty \leq \|PX\|_\infty + \|PY\|_\infty = N_P(X) + N_P(Y)$.
- $\forall X \in \mathbb{C}^n, N_P(X) = 0 \implies \|PX\|_\infty = 0 \implies PX = 0 \implies X = 0$ (car $\|\cdot\|_\infty$ est une norme et P est inversible).

donc N_P est une norme.

Finalement, $\boxed{N_P \text{ est une norme si et seulement si } P \text{ est une matrice inversible}}$.

$$\text{III.2.b } \|A\|_P = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|X\|_P \leq 1} \|AX\|_P = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty \leq 1} \|PAX\|_\infty = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty \leq 1} \|PAP^{-1}PX\|_\infty$$

Or P est inversible, donc $X \mapsto PX$ est une bijection de \mathbb{C}^n sur \mathbb{C}^n donc

$$\sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty \leq 1} \|PAP^{-1}PX\|_\infty = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|X\|_\infty \leq 1} \|PAP^{-1}X\|_\infty = \|PAP^{-1}\|_\infty,$$

On a donc bien $\boxed{\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty}$.

III.3 III.3.a On sait que λ est une valeur propre de A associée au vecteur X si et seulement si λ est une valeur propre de PAP^{-1} associée au vecteur PX .

A et PAP^{-1} ont donc le même spectre et donc $\boxed{\rho(A) = \rho(PAP^{-1})}$.

III.3.b Il existe une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Soit X un vecteur propre unitaire associé à λ . $\rho(A) = |\lambda| = \|\lambda X\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq \|A\|_\infty$.

En utilisant **III.2.b**, on en déduit : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1}) \leq \|PAP^{-1}\|_\infty = \|A\|_P$, et donc $\boxed{\rho(A) \leq \|A\|_P}$.

III.3.c On suppose A diagonalisable. Il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = PAP^{-1}$. D'après **III.2.b**, $\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty = \|D\|_\infty$, d'après **III.1.b**, $\|D\|_\infty = \rho(D)$ et comme A et D sont semblables, $\rho(D) = \rho(A)$.

Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\|A\|_P = \rho(A)$.

III.3.d $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$P_A(X) = 1 - X^3$, les valeurs propres de A sont 1, j et j^2 donc $\boxed{\rho(A) = 1}$.

Les vecteurs propres associés à 1, j et j^2 sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

Si $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$, alors $D = PAP^{-1}$ et d'après **III.3.c** $\|A\|_P = \rho(A)$.

III.3.e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

A est de rang 1 et E_0 a pour équation $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$.

Une base de E_0 est : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

D'autre part, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\frac{n(n+1)}{2}$.

A est donc diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres est n)

Si $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$,

alors $D = PAP^{-1}$ et d'après **III.3.c** $\|A\|_P = \rho(A)$.

III.4 III.4.a Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \|AZ\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|) \\ &\leq \max(|az_1| + |bz_2|, |cz_1| + |dz_2|) \leq \max(|a| + |b|, |c| + |d|) \max(|z_1|, |z_2|) = m\|Z\|_\infty. \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\|AZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty}$.

On en déduit $\|A\|_\infty \leq m$.

Si on suppose que $m = |a| + |b|$, alors on choisit z_1 et z_2 de module 1 tels que $|a| = az_1$ et $|b| = bz_2$. On a alors $\|AZ\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|) = \max(m, |cz_1 + dz_2|) = m$ et $\|Z\|_\infty = 1$.

De même si $m = |c| + |d|$.

On en déduit $\|A\|_\infty \geq m$.

On a donc $\|A\|_\infty = m$.

III.4.b **III.4.b.i** $A \in M_2(\mathbb{C})$, non diagonalisable.

On travaille dans \mathbb{C} , donc $\text{Sp}(A) \neq \emptyset$.

Si $\text{Sp}(A)$ possédait deux éléments, alors le polynôme caractéristique de A serait scindé à racines simples et A serait diagonalisable, donc $\text{Sp}(A)$ ne contient qu'un élément.

III.4.b.ii On choisit une base $e = (e_1, e_2)$ de E , avec e_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre α .

La matrice dans la base e de f est alors triangulaire supérieure, avec les valeurs propres sur la diagonale. Elle est

donc de la forme $\text{mat}_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

III.4.b.iii β est non nul car A n'est pas diagonalisable.

Posons $e'_1 = \frac{\beta}{\epsilon} e_1$ et $e'_2 = e_2$.

$e' = (e'_1, e'_2)$ est une base de \mathbb{C}^2 , $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = f(e_2) = \beta e_1 + \alpha e_2 = \epsilon e'_1 + \alpha e'_2$.

On a donc $\text{mat}_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \epsilon \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Il existe donc une base e' de \mathbb{C}^2 telle que $\text{mat}_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où $|\beta'| \leq \epsilon$.

III.4.b.iv Notons $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Il existe une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$.

On a alors $\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty = \|T\|_\infty = |\alpha| + |\beta'| \leq |\alpha| + \epsilon = \rho(A) + \epsilon$.

Il existe donc une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\|A\|_P \leq \rho(A) + \epsilon$.

III.4.c D'après **III.4.b.iv**, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \quad \|A\|_P \leq \rho(A) + \epsilon$.

On a donc $\inf_{P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})} \|A\|_P \leq \rho(A)$.

D'après **III.3.b**, si $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ alors $\|A\|_P \geq \rho(A)$.

On a donc $\inf_{P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})} \|A\|_P \geq \rho(A)$.

Finalement $\inf_{P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})} \|A\|_P = \rho(A)$.

III.4.d $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\|A\|_\infty = \max(|-3| + |8|, |-2| + |5|) = 11$.

$P_A(X) = (X - 1)^2$ et $\dim(E_1) = 1$ donc A est non diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{1\}$.

On a donc $\rho(A) = 1$ et d'après **III.4.b.iii**, A est semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $|\beta'| \leq 1$.

Il existe donc $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$.

$\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty = \|T\|_\infty = 1 + |\beta'| \leq 2$.

Il existe donc une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\|A\|_P \leq 2$.

III.4.e On utilise la question **III.4.b.iv** avec $\epsilon = \frac{1 - \rho(A)}{2} > 0$.

On a alors $\|A\|_P \leq \rho(A) + \epsilon = \frac{1 + \rho(A)}{2} < 1$.

On sait que la norme subordonnée est une norme d'algèbre, donc $\|A^n\|_P \leq \|A\|_P^n$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|_P = 0$.

Partie IV – Etude de la suite (u_n)

IV.1 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (0, -\frac{2}{(x+y)^2})$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1, -\frac{2}{(x+y)^2})$.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, donc f est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

IV.2 $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point fixe de f si et seulement si $(a, b) = (b, \frac{2}{a+b})$.

Le seul point fixe de f dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est $(1, 1)$.

IV.3 $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = (0, -\frac{1}{2})$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = (1, -\frac{1}{2})$ donc $J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

IV.4 Le polynôme caractéristique de $J_{(1,1)}$ est $P_{J_{(1,1)}}(X) = X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$. Ses valeurs propres sont $\frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}$ et $\frac{-1 - i\sqrt{7}}{4}$ de module $\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\rho(J_{(1,1)}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$J_{(1,1)}$ est donc diagonalisable (2 valeurs propres distinctes) et d'après la question **III.3.c**,

il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $\|J_{(1,1)}\|_P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

IV.5 IV.5.a $J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$ et $(x, y) \mapsto \frac{1}{(x+y)^2}$ est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

$(x, y) \mapsto J_{(x,y)}$ est donc continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. On est en dimension finie, donc la continuité ne dépend pas du choix des normes.

Soit $\epsilon = \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. (car $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$)

Ecrivons la continuité de J en $(1, 1)$ pour la norme $\|\cdot\|_P$ au départ et la norme $\|\cdot\|_P$ à l'arrivée :

$\exists \eta > 0 \quad \forall (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad (\|(1, 1) - (x_0, y_0)\|_P \leq \eta \implies \|J_{(x_0, y_0)} - J_{(1,1)}\|_P \leq \epsilon).$

De l'inégalité triangulaire on déduit :

$\|J_{(x_0, y_0)} - J_{(1,1)}\|_P \leq \epsilon \implies \|J_{(x_0, y_0)}\|_P \leq \|J_{(1,1)}\|_P + \epsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} + \epsilon = \alpha.$

D'où finalement, $\exists \eta > 0 \quad \forall (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad (\|(1, 1) - (x_0, y_0)\|_P \leq \eta \implies \|J_{(x_0, y_0)}\|_P \leq \alpha).$

IV.5.b Posons $\psi(t) = (1, 1) + t[(x_0, y_0) - (1, 1)]$.

f est C^1 sur D et ψ est C^1 de $[0, 1]$ dans D , par composition, φ est C^1 sur $[0, 1]$.

Par composition, pour tout $t \in [0, 1]$

$$\varphi'(t) = df_{\psi(t)}(\psi'(t)) = df_{\psi(t)}((x_0, y_0) - (1, 1))$$

ou, quitte à confondre \mathbb{R}^2 et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\varphi'(t) = J_{\psi(t)}((x_0, y_0) - (1, 1))$$

Majorons $\|\varphi'(t)\|_P$ pour appliquer l'inégalité des accroissements finis.

$$\|\varphi'(t)\|_P \leq \|J_{\psi(t)}\|_P \|(x_0, y_0) - (1, 1)\|_P$$

Or $\|(1, 1) - \psi(t)\|_P = t\|(x_0, y_0) - (1, 1)\|_P \leq \eta$

donc d'après **IV.5.a**, $\|J_{\psi(t)}\|_P \leq \alpha$ et $\|\varphi'(t)\|_P \leq \alpha\|(x_0, y_0) - (1, 1)\|_P$

φ est de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 , $\forall t \in [0, 1]$, $\|\varphi'(t)\|_P \leq \alpha\|(x_0, y_0) - (1, 1)\|_P$, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\|\varphi(0) - \varphi(1)\|_P \leq \alpha\|(x_0, y_0) - (1, 1)\|_P$ ou encore $\|(1, 1) - f(x_0, y_0)\|_P \leq \alpha\|(1, 1) - (x_0, y_0)\|_P$.

IV.5.c Montrons par récurrence sur n que $\forall n \geq n_0, (u_n, u_{n+1}) \in D$.

Par hypothèse, pour $n = n_0, (u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$.

Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné, $(u_n, u_{n+1}) \in D$.

On a alors : $\|(1, 1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P = \|(1, 1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P$ et d'après la question précédente,

$$(u_n, u_{n+1}) \in D \implies \|(1, 1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \eta.$$

Donc $\|(1, 1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P \leq \eta$ et $(u_n, u_{n+1}) \in D$.

Finalement, la propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\boxed{\forall n \geq n_0, (u_n, u_{n+1}) \in D}.$$

IV.5.d Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq n_0, \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P.$$

Pour $n = n_0$, la relation est évidente.

Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné,

$$\|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P.$$

$$\text{Alors, } \|(1, 1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P = \|(1, 1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P$$

et comme $(u_n, u_{n+1}) \in D$, d'après la question **IV.5.b**,

$$\|(1, 1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P$$

$$\text{On a donc } \|(1, 1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P \leq \alpha^{n+1-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P.$$

Finalement, la propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P}.$$

IV.5.e Les normes $\|\cdot\|_P$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes (dimension finie), il existe donc un réel $c > 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leq c\|\cdot\|_P$.

$$\text{On a alors, } \forall n \geq n_0, |1 - u_n| \leq \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_\infty \leq c\|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq c\alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P,$$

et donc $\boxed{u_n = 1 + O(\alpha^n)}$.

$$\textbf{IV.5.f } u_n = 1 + O(\alpha^n) \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1.$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}, \boxed{\sum u_n \text{ diverge}} \text{ et } \boxed{\sum (u_n - 1) \text{ converge absolument}}.$$

Partie V – Suite de l'étude

V.1 V.1.a La suite (x_n) ne converge pas vers λ : $\exists \tau > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N |x_n - \lambda| > \tau$.

En utilisant cette relation, on construit une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{\varphi(n)} - \lambda| > \tau$.

La suite $(x_{\varphi(n)})$ est bornée (extraite de (x_n)), on peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers une limite λ' . Nécessairement, $|\lambda' - \lambda| \geq \tau > 0$ donc $\lambda' \neq \lambda$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ admet une valeur d'adhérence } \lambda' \neq \lambda}$.

V.1.b Toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence. D'après la question précédente, si une suite est bornée et non convergente, alors elle possède au moins deux valeurs d'adhérences.

Donc $\boxed{\text{toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence est convergente}}$.

V.1.c (x_n) est une suite bornée.

Si $\ell_- = \ell_+$, alors (x_n) est bornée et possède une unique valeur d'adhérence, donc d'après la question précédente, elle est convergente.

Si (x_n) est convergente, alors elle possède une unique valeur d'adhérence donc $\ell_- = \ell_+$.

Finalement $\boxed{(x_n) \text{ est convergente si et seulement si } \ell_- = \ell_+}$.

V.2 V.2.a Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha}$ par récurrence double sur n .

Par hypothèse, pour $n = 0$ et $n = 1$, la relation est vraie.

$$\text{Supposons que pour un entier } n \geq n_0 \text{ donné, } \alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha} \text{ et } \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

$$\text{Alors, } u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1} + u_n} \leq \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}} = \alpha$$

$$\text{et } u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1} + u_n} \geq \frac{2}{\alpha + \alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{donc } \alpha \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{\alpha}$$

Finalement, la propriété est vraie au rang 0 et 1 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha}}.$$

V.2.b ℓ_- est la plus petite valeur d'adhérence de la suite (u_n) . C'est donc la limite d'une suite extraite que l'on notera $u_{\psi(n)}$.

la suite $u_{\psi(n)-2}$ est alors bornée, elle possède une sous-suite $u_{\psi \circ \chi(n)-2}$ qui converge vers une limite a . En posant $\varphi : n \mapsto \psi \circ \chi(n) - 2$, on a alors :

$u_{\varphi(n)+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_-$ et $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, or $u_{\varphi(n)+1} = \frac{2}{u_{\varphi(n)+2}} - u_{\varphi(n)}$ donc $(u_{\varphi(n)+1})$ converge. On note b sa limite.

Par passage à la limite dans $u_{\varphi(n)+2} = \frac{2}{u_{\varphi(n)+1} + u_{\varphi(n)}}$, on obtient $\ell_- = \frac{2}{a+b}$.

De plus $a \leq \ell_+$ et $b \leq \ell_+$ donc $\ell_- \geq \frac{2}{\ell_+ + \ell_+} = \frac{1}{\ell_+}$. On en déduit $\ell_- \ell_+ \geq 1$.

V.2.c On procède de même en considérant une sous-suite $u_{\psi(n)}$ qui converge vers ℓ_+ et on obtient $\ell_- \ell_+ \leq 1$ d'où $\ell_- \ell_+ = 1$.

V.2.d De même qu'en (b), on construit successivement :

$(u_{\psi(n)})$ qui converge vers ℓ_-

$(u_{\psi \circ \chi(n)-3})$ qui converge vers une limite a .

$(u_{\psi \circ \chi \circ \omega(n)-2})$ qui converge vers une limite b .

En posant $\varphi : n \mapsto \psi \circ \chi \circ \omega(n) - 3$, on a alors :

$u_{\varphi(n)+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_-$, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ et $u_{\varphi(n)+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$.

Or $u_{\varphi(n)+2} = \frac{2}{u_{\varphi(n)+3}} - u_{\varphi(n)+1}$ donc $(u_{\varphi(n)+2})$ converge. On note c sa limite.

Par passage à la limite dans $u_{\varphi(n)+2} = \frac{2}{u_{\varphi(n)+1} + u_{\varphi(n)}}$ et dans $u_{\varphi(n)+3} = \frac{2}{u_{\varphi(n)+2} + u_{\varphi(n)+1}}$

on obtient $c = \frac{2}{a+b}$ et $\ell_- = \frac{2}{b+c}$.

On a donc $b+c = \frac{2}{\ell_-} = 2\ell_+$ et $b \leq \ell_+$ et $c \leq \ell_+$, donc $b = c = \ell_+$.

De même $\ell_+ = c = \frac{2}{a+b}$ donc $a = b = \ell_-$.

On a alors $b = \ell_+$ et $b = \ell_-$ d'où $\ell_+ = \ell_-$.

$\ell_+ = \ell_-$, $\ell_- \ell_+ \geq 1$ et (u_n) est une suite de réels positifs donc $\ell_+ = \ell_- = 1$ et donc La suite (u_n) converge vers 1.

V.2.e La suite $((u_n, u_{n+1}))$ converge vers $(1, 1)$ donc

il existe bien un entier n_0 tel que $((u_{n_0}, u_{n_0+1})) \in D$.