Devoir surveillé n°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Supposons que $A > 0$, $X \geq 0$ et $X \neq 0$. Il existe donc $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $X_{i_0} > 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}X_j \geq A_{i,i_0}X_{i_0} > 0$$

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$|(AB)_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}||B_{k,j}| = (|A||B|)_{i,j}$$

On en déduit que $|AB| \leq |A||B|$.

2 Pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est $|(X, Y)| \leq \|X\|\|Y\|$.
En prenant $X = (|z_1|, \dots, |z_n|)^\top$ et $Y = (|w_1|, \dots, |w_n|)^\top$, on obtient bien l'inégalité voulue.

3 On a alors $|1 + z|^2 = (1 + |z|)^2$ ou encore $(1 + z)(1 + \overline{z}) = 1 + 2|z| + |z|^2$. Sachant que $z\overline{z} = |z|^2$, on obtient $\mathrm{Re}(z) = |z| \geq 0$. De plus, $|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$ donc $\mathrm{Im}(z) = 0$. Ceci signifie que $z \in \mathbb{R}_+$.
Supposons maintenant que $|z + z'| = |z| + |z'|$. En divisant par $|z| > 0$ et en posant $\alpha = z'/z$, on obtient $|1 + \alpha| = 1 + |\alpha|$. D'après ce qui précède, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

4 Comme les z_i ne sont pas tous nuls, on peut quitte à les réordonner, supposer que $z_1 \neq 0$. Notons alors θ un argument de z_1. On a donc alors $z_1 = e^{i\theta}|z_1|$.
Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Par inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leq |z_1 + z_k| + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

Or, par hypothèse, $\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$ donc

$$|z_1 + z_k| + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |z_j| = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

puis $|z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k|$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_k = \alpha z_1$ d'après la question précédente. On a alors $|z_k| = \alpha|z_1|$ de sorte que

$$z_k = \alpha z_1 = \alpha e^{i\theta}|z_1| = e^{i\theta}|z_k|$$

5 Il est clair que $\chi_A = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$. On en déduit que

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc = (a - d)^2 + 4bc$$

6 D'après la question précédente, $\Delta \geq 4bc > 0$. χ_A possède donc deux racines réelles distinctes λ et μ. On peut supposer que $\lambda < \mu$. Ainsi A possède deux valeurs propres distinctes λ et μ : elle est donc diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Remarquons que $\lambda = \frac{1}{2}(a + d - \sqrt{\Delta})$ et $\mu = \frac{1}{2}(a + d + \sqrt{\Delta})$. Comme $\Delta > 0$, $-\sqrt{\Delta} < \sqrt{\Delta}$ et $\lambda < \mu$. Par ailleurs, $\lambda + \mu = a + d > 0$ donc $-\lambda < \mu$. Ainsi $|\lambda| < \mu$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Posons $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Il existe alors $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. On a alors $\mathrm{A}^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$ et $\mathrm{D}^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^k\mathrm{P}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Les applications $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{PMP}^{-1}$ et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ sont linéaires donc continues ($\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie). On en déduit que la suite (A^k) converge si et seulement si la suite D^k converge.
La suite (A^k) converge si et seulement si $\mu \in]-1,1]$ et $\lambda \in]-1,1]$. Mais comme $|\lambda| < \mu$, si $\mu < 1$, la suite (A^k) converge vers la matrice nulle. On en déduit que (A^k) converge vers une matrice non nulle si et seulement si $\mu = 1$ et dans ce cas, elle converge vers $\mathrm{L} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$. Par invariance du rang par similitude, $\mathrm{rg}(\mathrm{L}) = 1$. De plus, $\mathrm{L}^2 = \mathrm{L}$ donc L est une matrice de projecteur.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Dans ce cas,

$$\chi_\mathrm{B} = \mathrm{X}^2 - (2 - \alpha - \beta)\mathrm{X} + (1 - \alpha)(1 - \beta) - \alpha\beta = \mathrm{X}^2 - (2 - \alpha - \beta)\mathrm{X} + 1 - \alpha - \beta = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - (1 - \alpha - \beta))$$

Comme $\alpha + \beta > 0$, χ_B possède deux racines distinctes, à savoir 1 et $1 - \alpha - \beta$: elle est donc diagonalisable et semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{pmatrix}$. Or $\mathrm{Ker}(\mathrm{B} - \mathrm{I}_2) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{B} - (1 - \alpha - \beta)\mathrm{I}_2) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On peut donc choisir $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Comme B est à coefficients strictement positifs, ce qui précède montre que la suite (B^k) converge vers la matrice

$$\Lambda = \mathrm{S}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{S}^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta}\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha + \beta}\begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Tout d'abord, $\|\cdot\|_\infty$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|\mathrm{A}\|_\infty = 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}| = 0$. Comme tous les termes de ces sommes sont positifs, ils sont nuls. On en déduit que $\mathrm{A} = 0$.
Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, comme $|\lambda| \geq 0$,

$$\|\lambda\mathrm{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda||\mathrm{A}_{i,j}|\right) = \max_{1 \leq i \leq n} | \left(|\lambda| \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|\right) = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} | \left(\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|\right) = |\lambda|\|\mathrm{A}\|_\infty$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Par inégalité triangulaire,

$$\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j} + \mathrm{B}_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}| + \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{B}_{i,j}| \leq \|\mathrm{A}\|_\infty + \|\mathrm{B}\|_\infty$$

On en déduit que

$$\|\mathrm{A} + \mathrm{B}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j} + \mathrm{B}_{i,j}| \leq \|\mathrm{A}\|_\infty + \|\mathrm{B}\|_\infty$$

On a bien prouvé que $\|\cdot\|_\infty$ était une norme.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |(AB)_{i,j}| &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j} \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}||B_{k,j}| \qquad \text{par inégalité triangulaire} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,k}||B_{k,j}| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}| \left(\sum_{j=1}^{n} |B_{k,j}| \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}| \|B\|_\infty \\
&= \|B\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}| \leq \|B\|_\infty \|A\|_\infty
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est donc sous-multiplicative.

12 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Par inégalité triangulaire et en utilisant la question **2**,

$$|(AB)_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |B_{k,j}|^2 \right)^{1/2}$$

On en déduit que

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |(AB)_{i,j}|^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |B_{k,j}|^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |B_{k,j}|^2 \right) = \|A\|_2^2 \|B\|_2^2$$

Puis $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\nu(A) = 0$. Comme N est une norme $S^{-1}AS = 0$ puis $A = 0$.
Soit $(\lambda, A) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\nu(\lambda A) = N(\lambda S^{-1}AS) = |\lambda| N(S^{-1}AS) = |\lambda| \nu(A)$.
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Alors

$$\nu(A + B) = N(S^{-1}AS + S^{-1}BS) \leq N(S^{-1}AS) + N(S^{-1}BS) = \nu(A) + \nu(B)$$

Enfin,

$$\nu(AB) = N((S^{-1}AS)(S^{-1}BS)) \leq N(S^{-1}AS)N(S^{-1}BS) = \nu(A)\nu(B)$$

Donc ν est également une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

14 Les matrices A et $S^{-1}AS$ sont semblables donc possèdent le même spectre. Ainsi $\rho(A) = \rho(S^{-1}AS)$.

15 χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc A est trigonalisable. A est trigonalisable donc est semblable à une matrice triangulaire T dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est alors semblable à la matrice triangulaire T^k dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$. La question précédente permet d'affirmer que

$$\rho(A^k) = \rho(T^k) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i^k| = \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right)^k = \rho(T)^k = \rho(A)^k$$

De même, αA est semblable à αT donc

$$\rho(\alpha A) = \rho(\alpha T) = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha \lambda_i| = |\alpha| \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = |\alpha| \rho(T) = |\alpha| \rho(A)$$

16 Soit λ une valeur propre de A. Notons X un vecteur propre associé et H la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les colonnes sont égales à H. Comme $X \neq 0$, $H \neq 0$. De plus, $AH = \lambda H$. On en déduit que

$$|\lambda| N(H) = N(\lambda H) = N(AH) \leq N(A)N(H)$$

Comme $N(H) > 0$, $|\lambda| \leq N(A)$. Par conséquent,

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda| \leq N(A)$$

17 On peut déjà dire que $D_\tau^{-1}TD_\tau$ est triangulaire supérieure comme produit de telles matrices. Ainsi

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \implies (D_\tau^{-1}TD)_{i,j} = 0$$

De plus, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \leq j$,

$$(D_\tau^{-1}TD)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(D_\tau^{-1})_{i,k}T_{k,\ell}(D_\tau)_{k,\ell} = (D_\tau^{-1})_{i,i}T_{i,j}(D_\tau)_{j,j} = \tau^{j-i}T_{i,j}$$

18 D'après la question précédente, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \implies \lim_{\tau\to 0}(D_\tau^{-1}TD)_{i,j} = 0$ et $(D_\tau^{-1}TD)_{i,i} = T_{i,i}$. On en déduit que $\lim_{\tau\to 0} D_\tau^{-1}TD_\tau = \operatorname{diag}(T_{1,1},\dots,T_{n,n}) = L$. De plus, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^*$, on a par inégalité triangulaire

$$\left|\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty - \|L\|_\infty\right| \leq \|D_\tau^{-1}TD_\tau - L\|_\infty$$

donc

$$\lim_{\tau\to 0}\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty = \|L\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|T_{i,i}| = \rho(T)$$

Par définition de le limite, il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall \tau \in \mathbb{R},\ |\tau| \leq \delta \implies \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon$$

19 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est semblable à une matrice triangulaire T. On choisit alors $\tau \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\tau| \leq \delta$ où δ est défini dans la question précédente. On pose enfin $N(M) = \|D_\tau^{-1}MD_\tau\|_\infty$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est sous-multiplicative d'après la question **11** donc N est également une norme sous-multiplicative d'après la question **13**. La question précédente et la question **14** montrent alors que

$$N(A) = \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$$

20 Supposons que $\rho(A) < 1$. Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$ (on peut par exemple prendre $\varepsilon = \frac{1-\rho(A)}{2}$). On choisit alors la norme N telle que précédemment. Par sous-multiplicativité,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ N(A^k) \leq N(A)^k \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k$$

Puisque $0 \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$, $\lim_{k\to+\infty}(\rho(A)+\varepsilon)^k$ puis $\lim_{k\to+\infty} N(A^k) = 0$ i.e. (A^k) converge vers la matrice nulle.
Réciproquement supposons que (A^k) converge vers la matrice nulle. On se donne N une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (par exemple la norme $\|\cdot\|_\infty$). D'après la question **16**

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq \rho(A^k) \leq N(A^k)$$

On en déduit avec la question **15** que

$$\lim_{k\to+\infty}\rho(A)^k = \lim_{k\to+\infty}\rho(A^k) = 0$$

Ceci implique que $\rho(A) < 1$.

21 La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

22 Supposons que $r = 0$. Alors 0 est l'unique valeur propre de A. A étant diagonalisable, A est semblable à la matrice nulle : A est donc nulle. On en déduit par l'absurde que $r > 0$.

23 Comme A est symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(X_1,\dots,X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. On note alors λ_k la valeur propre associée au vecteur propre X_k. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ unitaire. Alors $X = \sum_{k=1}^{n}(X_k \mid X)X_k$. Comme $(X_1,\dots,X_n)$ est orthonormée,

$$X^\top AX = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(X_k \mid X)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\mu(X_k \mid X)^2 = \mu\|X\|_2^2 = \mu$$

24 Supposons qu'on ait égalité dans l'inégalité précédente. Alors

$$\sum_{k=1}^{n}(\mu - \lambda_k)(X \mid X_k)^2 = 0$$

Les termes de cette somme étant positifs, $(\mu-\lambda_k)(X \mid X_k)^2 = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. On en déduit que $(\mu-\lambda_k)(X \mid X_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Alors

$$AX = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(X \mid X_k)X_k = \sum_{k=1}^{n}\mu(X \mid X_k)X_k = \mu X$$

25 Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ unitaire. D'après la question **1**

$$|X\top AX| \leq |X^\top||A||X| = |X|^\top A|X|$$

car A est positive. De plus,

$$\||X|\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |X_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \|X\|_2^2 = 1$$

donc $|X|$ est également unitaire. D'après la question **23**, $|X|^\top A|X| \leq \mu$.

26 Soit λ une valeur propre de A. Notons X un vecteur propre unitaire associé à λ. D'après la question précédente,

$$|\lambda| = |X^\top AX| \leq \mu$$

De plus, la question précédente montre aussi que $\mu \geq 0$. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $|\lambda| \leq \mu = |\mu|$. On en déduit que $r = \mu$.

27 Soit X un vecteur propre de A unitaire associé à la valeur propre r. D'après la question **25** et la question précédente,

$$r = |r| = |X^\top AX| \leq |X|^\top A|X| \leq \mu = r$$

On en déduit notamment que $|X|^\top A|X| = r = \mu$. D'après la question **24**, $|X|$ est donc un vecteur propre associé à la valeur propre r.
Comme $A > 0$ et $|X| \geq 0$, la question **1** montre que $A|X| = r|X| > 0$. On en déduit que $|X| > 0$.

28 On a de plus, $|AX| = |rX| = r|X| = A|X|$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a donc

$$\left|\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}X_j\right| = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}|X_j| = \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|X_j|$$

D'après la question **4**,

$$\exists\theta \in \mathbb{R},\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ A_{i,j}X_j = e^{i\theta}|A_{i,j}X_j| = e^{i\theta}A_{i,j}X_j$$

Comme $A > 0$, les $A_{i,j}$ ne sont jamais nuls. Ainsi

$$\forall j \in [\![1, r]\!],\ X_j = e^{i\theta}|X_j|$$

Notamment, $e^{i\theta} = \dfrac{X_1}{|X_1|} = \pm 1$. On en déduit que $X = \pm|X|$.

29 Supposons que $\dim \mathrm{Ker}(A - rI_n) > 1$. On peut donc trouver deux vecteurs non nuls orthogonaux X et Y dans $\mathrm{Ker}(A - rI_n)$. Les deux questions précédentes montrent que les coefficients de X sont tous strictement positifs ou tous strictement négatifs, de même que ceux de Y. On en déduit que $(X \mid Y) = \sum_{k=1}^{n} X_kY_k \neq 0$, ce qui contredit le fait que X et Y sont orthogonaux. Ainsi $\dim \mathrm{Ker}(A - rI_n) = 1$.

30 Comme A est diagonalisable, la multiplicité de r est égale à la dimension du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A - rI_n)$, à savoir 1.
Supposons que $-r \in \mathrm{Sp}(A)$. Soit alors un vecteur X unitaire tel que $AX = -rX$. Alors $X^\top AX = -r$ puis $|X^\top AX| = r$. De plus, d'après la question **25**, on a $|X|^\top A|X| = r$ et, comme $|X|$ est encore unitaire, $|X|$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre r d'après la question **24**. Comme $X \notin \mathrm{Ker}(A - rI_n)$, $X \neq |X|$ i.e. $|X| - X \neq 0$. De plus, $|X| - X \geq 0$ et $A > 0$ donc $A(|X| - X) > 0$ d'après la question **1**. Ainsi $r(|X| + X) > 0$ i.e. $|X| + X > 0$. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k + |X_k| > 0$, ce qui entraîne $X_k > 0$. On en déduit que $X = -|X| \in \mathrm{Ker}(A - rI_n)$ ce qui est absurde.

> **Remarque.** Je ne vois pas l'intérêt de parler de la multiplicité au début de la question mais peut-être ai-je raté quelque chose.

31 Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\chi_A = X^2 - 1$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

32 r^p est la plus grande valeur propre de A^p et A^p est strictement positive donc $\mathrm{Ker}(A^p - r^pI_n)$ est de dimension 1, engendré par un vecteur strictement positif d'après les questions **28** et **29**. Comme A et I_n commutent $A^p - r^pI_n = B(A - rI_n)$ avec $B = \sum_{k=0}^{p-1} r^{p-1-k}A^k$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A - rI_n) \subset \mathrm{Ker}(A^p - r^pI_n)$. Comme $\mathrm{Ker}(A - rI_n)$ n'est pas nul, ces deux noyaux sont égaux.

33 Supposons p impair. Si $-r$ était valeur propre de A, alors $(-r)^p = -r^p$ serait valeur propre de A^p, ce qui contredirait le fait que r^p est la seule valeur propre de A^p de module égal à r^p. Ainsi $-r$ n'est pas valeur propre de A.
Si p est pair, $-r$ et r sont deux racines distinctes de $X^p - r^p$ donc $(X-r)(X+r)$ divise $X^p - r^p$. De plus, $X - r$ et $X + r$ sont premiers entre eux donc, d'après le lemme des noyaux,

$$\operatorname{Ker}(A - rI_n) \oplus \operatorname{Ker}(A + rI_n) \subset \operatorname{Ker}(A^p - r^p I_n)$$

Comme $\operatorname{Ker}(A - rI_n)$ et $\operatorname{Ker}(A^p - r^p I_n)$ sont de dimension 1, $\dim \operatorname{Ker}(A + rI_n) = 0$ i.e. $-r$ n'est pas valeur propre de A.
Quel que soit le cas de figure, r est l'unique valeur propre de A de module égal à r.

34 Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$. Il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|X_i| = \|X\|_\infty$. Alors

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} X_j = \lambda X_i$$

ou encore

$$(\lambda - A_{i,i}) X_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_{i,j} X_j$$

Par inégalité triangulaire

$$|\lambda - A_{i,i}||X_i| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{i,j}||X_j|$$

Par définition de i,

$$|\lambda - A_{i,i}|\|X\|_\infty \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{i,j}|\|X\|_\infty$$

Comme $X \neq 0$, $\|X\|_\infty > 0$ de sorte que

$$|\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{i,j}|$$

ce qui conclut.

35 On procède comme indiqué dans l'énoncé. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(D^{-1}AD)$. Posons $C = D^{-1}AD$. Alors $C_{i,j} = X_i^{-1} A_{i,j} X_j$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. On applique alors la question précédente à C. Il existe donc $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|\lambda - C_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |C_{i,j}|$$

Ceci s'écrit encore

$$|\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} X_i^{-1}|A_{i,j}|X_j$$

On en déduit que

$$|\lambda - A_{i,i}| \leq X_i^{-1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{i,j} X_j$$

Or $BX = \rho(B)X$ donc, en particulier,

$$\sum_{j=1}^{n} B_{i,j} X_j = \rho(B) X_i$$

ou encore

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{i,j} X_j = (\rho(B) - B_{i,i}) X_i$$

En reportant dans la dernière inégalité,

$$|\lambda - A_{i,i}| \leq \rho(B) - B_{i,i}$$

ce qui conclut.