

DEVOIR À LA MAISON N°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

1 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

Par propriété de la trace, $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$.

Par propriété du déterminant,

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

Deux matrices semblables sont a fortiori équivalentes et ont donc même rang : $\text{rg}(B) = \text{rg}(A)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$B - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda I_n = P^{-1}(A - \lambda I_n)P$$

Donc $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont semblables donc ont même déterminant d'après ce qui précède. Ainsi

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) = \chi_A(\lambda)$$

Ainsi $\chi_B = \chi_A$.

2 Il est clair que $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 5$. Comme A et B sont triangulaires à coefficients diagonaux non nuls, $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 3$. Comme A et B sont triangulaires, $\det(A) = \det(B) = 4$ et $\chi_A = \chi_B = (X - 1)(X - 2)^2$.

On a donc $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B) = \{1, 2\}$.

Posons $P = (X - 1)(X - 2)$. On vérifie que $P(A) = 0$. Comme $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$, on a donc $\mu_A = P$. Comme μ_A est simplement scindé, A est diagonalisable.

Comme $\text{Sp}(B) = \{1, 2\}$, si B était diagonalisable, on aurait de même $\mu_B = P$. Or $P(B) \neq 0$ donc $\mu_B \neq 0$.

Comme A et B n'ont pas le même polynôme minimal, A et B ne sont pas semblables.

- 3**
- Comme la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est A, on a $u(e_1) = e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = e_1 + e_3$ et $u(e_3) = e_1$. La matrice de u dans la base (e_2, e_1, e_3) est donc B. On en déduit que A et B sont semblables.
 - Un calcul donne $\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X - 1$ (en utilisant la règle de Sarrus par exemple). Posons $P = X^3 - 3X - 1$. Alors $P' = 3X^2 - 3 = 3(X - 1)(X + 1)$. Ainsi P est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Or $\lim_{X \rightarrow -\infty} P = -\infty$, $P(-1) = 1 > 0$, $P(1) = -3 < 0$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} P = +\infty$. Comme P est continu sur \mathbb{R} , P s'annule exactement trois fois sur \mathbb{R} en vertu du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Comme $\deg P = 3$, P possède exactement trois racines toutes réelles. On les note α, β et γ . Comme $\chi_A = \chi_B = P$ est simplement scindé, A et B sont toutes deux diagonalisables et semblables à la même matrice diagonale de coefficients diagonaux α, β et γ . Comme la similitude est une relation d'équivalence, A et B sont semblables.

4 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. D'après le théorème du rang dim $\text{Ker } u = n - 1$. Choisissons un supplémentaire S de $\text{Ker } u$. Dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = S \oplus \text{Ker } u$, la matrice de u est de la forme de U. Ainsi A est semblable à U.

5 D'après la question précédente, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice U de la forme donnée à la question précédente. On trouve $U^2 = a_n U$. Or $U^2 \neq 0$ donc $a_n \neq 0$. Ainsi $X^2 - a_n X = X(X - a_n)$ est un polynôme annulateur de U (et donc de u) simplement scindé. u est donc diagonalisable.

- 6** Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$. Alors $\chi_A = X^2$. Notamment $\text{Sp}(A) = \{0\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et donc nulle, ce qui n'est pas. A n'est donc pas diagonalisable.

7 Les deux dernières colonnes de A sont les mêmes que les deux premières. Supposons que ces deux colonnes soient liées. Il existerait alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\beta = \lambda\alpha$ et $\alpha = \lambda\beta$ et donc $\alpha = \lambda^2\alpha$. Comme $\alpha \neq 0$, on aurait donc $\lambda^2 = 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$ puis $\alpha = \pm\beta$, ce qui est exclu. Ainsi les deux premières colonnes de A sont linéairement indépendantes de sorte que $\text{rg}(A) = 2$. Notamment $\text{rg}(A) < 4$, A n'est donc pas inversible : $0 \in \text{Sp}(A)$.

En posant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AU = 2(\alpha + \beta)U$ donc $2(\alpha + \beta) \in \text{Sp}(A)$. En posant $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a $AV = 2(\alpha - \beta)V$ donc $2(\alpha - \beta) \in \text{Sp}(A)$.

D'après le théorème du rang $\dim \text{Ker}(A) = 2$. On voit facilement que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\text{Ker } A$.

Ainsi (U, V, X, Y) est une base de vecteurs propres de A.

8 Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En notant (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , on a donc

$$u(e_1) = \lambda e_1 \quad u(e_2) = \lambda e_2 + b e_1$$

Posons $f_1 = \frac{a}{b}e_1$ et $f_2 = e_2$. Comme $\frac{a}{b} \neq 0$, (f_1, f_2) est encore une base de \mathbb{R}^2 . De plus,

$$u(f_1) = \frac{a}{b}u(e_1) = \lambda \cdot \frac{a}{b}e_1 = \lambda f_1 \quad u(f_2) = u(e_2) = \lambda e_2 + b e_1 = \lambda e_2 + b \cdot \frac{a}{b}e_1 = \lambda f_2 + b f_1$$

La matrice de u dans la base (f_1, f_2) est donc $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On en déduit que les matrices $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

9 On a $PB = AP$ i.e. $(R + iS)B = A(R + iS)$ ou encore $RB + iSB = AR + iAS$. Comme les matrices RB, SB, AR et AS sont à coefficients réels, on obtient $RB = AR$ et $SB = AS$ en identifiant parties réelle et imaginaire.

10 On sait que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}$. Comme chaque coefficient de $\det(R + xS)$ est une fonction affine de x , la formule précédente permet d'affirmer que $\varphi : x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions affines.

De plus, $\varphi(i) = \det(P) \neq 0$ car P est inversible. Ainsi φ n'est pas identiquement nulle (sur \mathbb{C}). Si φ était nulle sur \mathbb{R} , elle admettrait une infinité de racines : tous ses coefficients seraient nuls donc elle serait nulle sur \mathbb{C} . Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $R + xS$ est inversible.

11 Comme $RB = AR$ et $SB = AS$, $(R + xS)B = A(R + xS)$. Puisque $Q = R + xS \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $B = Q^{-1}AQ$ et A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12 $\chi_A = X^3 + X = X(X-i)(X+i)$ est simplement scindé dans \mathbb{C} donc A est diagonalisable et semblable à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Un calcul évident montre que $\chi_B = X^3 + X$. Pour les mêmes raisons que précédemment, B est également semblable à D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On en déduit que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Comme A et B sont à coefficients réels, elles sont également semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

13 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ telle que $\chi_A = \chi_B$ et $\mu_A = \mu_B$.

- Si $\chi_A = \chi_B$ est simplement scindé dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors A et B sont toutes deux semblables à une même matrice diagonale dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elles sont donc semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Dans le deuxième cas, puisque A et B sont à coefficients réels, le résultat de la partie précédente sont encore semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Sinon, $\chi_A = \chi_B = (X - \lambda)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, on a donc $\mu_A = \mu_B = (X - \lambda)$ ou $\mu_A = \mu_B = (X - \lambda)^2$.
 - Si $\mu_A = \mu_B = (X - \lambda)$, alors A et B sont toutes deux égales à λI_2 . A fortiori, elles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Si $\mu_A = \mu_B = (X - \lambda)^2$, alors A et B ne sont pas diagonalisables puisque leur polynôme minimal n'est pas simplement scindé mais elles sont quand même trigonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque leur polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} . Les matrices A et B sont donc respectivement semblables à des matrices $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec a et b non nuls (sinon A et B seraient diagonalisables). Le résultat de la question 8 permet alors d'affirmer que A et B sont encore semblables.

14 Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\chi_A = \chi_B = X^4$. De plus, A et B sont nilpotentes d'indice 2 donc $\mu_A = \mu_B = X^2$. Pourtant, A et B ne sont manifestement pas semblables puisque $\text{rg}(A) = 1$ et $\text{rg}(B) = 2$ de sorte que $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B)$.