Interrogation écrite n°04

NOM : Prénom : Note :

1. Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{n}{5} - \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ ne possède pas de limite.

2. Pour $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on pose $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ et $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{P}) = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. On admet que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes.

3. Déterminer la signature et l'ordre de la permutation $\sigma \in S_7$ définie par

$$\sigma(1) = 4 \qquad \sigma(2) = 6 \qquad \sigma(3) = 7 \qquad \sigma(4) = 5 \qquad \sigma(5) = 1 \qquad \sigma(6) = 2 \qquad \sigma(7) = 3$$

4. On fixe $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi : M \in GL_n(\mathbb{K}) \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de groupe.

5. Déterminer les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, +)$.

6. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On pose $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) + \mathrm{rg}(\mathrm{B})$.