

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Suites de fonctions

Solution 1

On montre aisément que $P \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$. Il est alors clair que (i) \implies (iii) (on a même l'équivalence).

Il est également évident que (iii) \implies (ii).

Reste à montrer que (ii) \implies (i). Supposons donc que (P_n) converge simplement. Soient x_0, \dots, x_d des réels distincts dans $[0, 1]$. Notons X_n le vecteur colonne de P_n dans la base canonique. Puisque (P_n) converge simplement sur $[0, 1]$, il existe des réels y_0, \dots, y_d tels que $P_n(x_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_k$. Notons $V = (x_i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$ et Y le vecteur colonne formé des y_k . On a donc $VX_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Y$ pour la norme infinie sur \mathbb{R}^{d+1} .

Or V est une matrice de Vandermonde inversible et la multiplication par V^{-1} étant continue, on en déduit que $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} V^{-1}Y$. On montre

facilement que $P \mapsto \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|$ où $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$. Le fait que (X_n) converge dans \mathbb{R}^{d+1} signifie donc que (P_n) converge dans $\mathbb{R}_d[X]$ pour la norme précédente.

REMARQUE. Comme \mathbb{R}^{d+1} et $\mathbb{R}_d[X]$ sont isomorphes, la convergence de (X_n) entraîne automatiquement la convergence de (P_n) . Il n'est pas nécessaire de parler de normes.

Solution 2

Soient a_0, \dots, a_p des éléments distincts de $[a, b]$ et notons L_0, \dots, L_p les polynômes de Lagrange associés ces $p + 1$ points. Il existe donc des suites $(\lambda_{0,n}), \dots, (\lambda_{p,n})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^p \lambda_{k,n} L_k$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $P_n(a_k) = \lambda_{k,n}$.

La convergence simple de (P_n) vers f montre que pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $(\lambda_{k,n})$ converge vers $\lambda_k = f(a_k)$. On en déduit que (P_n) converge simplement vers $\sum_{k=0}^p \lambda_k L_k$, ce qui prouve que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à p .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par inégalité triangulaire :

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n |\lambda_{k,n} - \lambda_k| |L_k(x)|$$

Les polynômes de Lagrange L_k étant continus sur le segment $[a, b]$, ils y sont bornés. Posons $M = \max_{0 \leq k \leq p} \|L_k\|_\infty$. On a donc

$$\|P_n - f\|_\infty \leq M \sum_{k=0}^n |\lambda_{k,n} - \lambda_k|$$

Comme chacune des suites $(\lambda_{k,n})$ converge vers λ_k , la suite (P_n) converge uniformément vers f .

Solution 3

Posons $f_n = f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (f'_n) est une suite extraite de la suite (f_n) : elle converge donc uniformément vers φ . Mais puisque (f_n) converge uniformément et donc a fortiori simplement vers φ , le théorème de dérivabilité des suites de fonctions nous assure que φ est de classe \mathcal{C}^1 et que $\varphi' = \varphi$. On en déduit que φ est colinéaire à la fonction exponentielle.

Réciproquement, si $f = \lambda \exp$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(f^{(n)})$ converge uniformément vers $\lambda \exp$ puisqu'elle est constante.

Solution 4

1. Soit $x \in \pi\mathbb{Z}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors $|\cos x| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cos^n x = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Finalement la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2. Posons $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'une part, $n \sin(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. D'autre part, $\cos^n(x_n) = e^{n \ln(\cos(1/n))}$ et

$$\ln(\cos(1/n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(1 + o(1/n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1/n)$$

de sorte que $\cos^n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = 1 \neq 0$ donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément.

Soit maintenant $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors pour tout $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$|f_n(x)| \leq n \cos^n(a) \sin(a)$$

donc

$$|f_n|_\infty \leq n \cos^n(a) \sin(a)$$

(c'est même une égalité) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n| = 0$ puisque $0 \leq \cos a < 1$. Ainsi (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Méthode n°1

Remarquons tout d'abord que f_n est positive et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt = -\frac{n}{n+1} [\cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est continue en 0, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|g(x) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in [0, \alpha]$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)| dt \\ &\leq \int_0^\alpha f_n(t)|g(t) - g(0)| dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)| dt \\ &\leq \int_0^\alpha f_n(t)\varepsilon dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\varepsilon dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty dt \\ &\leq \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} + \|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt \end{aligned}$$

Comme (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt = 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel

que pour tout entier $n \geq N$, $\|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt \leq \varepsilon$. On en déduit que pour $n \geq N$,

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt = 0$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt = \frac{ng(0)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(0)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt = g(0)$$

Méthode n°2

L'application $t \mapsto \cos^{n+1} t$ est bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, strictement décroissante et de classe \mathcal{C}^1 donc, par changement de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt = \frac{n}{n+1} \int_0^1 f(\arccos(\sqrt[n+1]{u})) du$$

La fonction $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction constante égale à $f(0)$ car f est continue en 0. De plus, g est bornée $[0, 1]$ (continue sur un segment) donc $u \mapsto g(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ est dominée par une constante (clairement intégrable sur le segment $[0, 1]$). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(\sqrt[n+1]{u}) du = \int_0^1 g(0) du = g(0)$$

On en conclut immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt = g(0)$$

Solution 5

1. Posons $g_n = f - f_n$. Alors la suite (g_n) est positive, décroissante et converge simplement vers la fonction nulle. Puisque g_n est continue sur le segment $[a, b]$, elle y admet un maximum M_n (positif) atteint en $\alpha_n \in [a, b]$. Puisque la suite (α_n) est à valeurs dans le segment $[a, b]$, on peut en extraire une suite $(\alpha_{\varphi(n)})$ convergeant vers $\alpha \in [a, b]$ d'après le théorème de Bozano-Weierstrass. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $(g_n(\alpha))$ converge vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $g_N(\alpha) \leq \varepsilon$. Soit un entier $n \geq N$. Alors $g_n \leq g_N$ et notamment $g_n(\alpha_n) \leq g_N(\alpha_n)$. Ainsi

$$M_n = g_n(\alpha_n) = g_N(\alpha) + (g_n(\alpha_n) - g_N(\alpha_n)) + (g_N(\alpha_n) - g_N(\alpha)) \leq \varepsilon + (g_N(\alpha_n) - g_N(\alpha))$$

Puisque $\varphi(n) \geq n \geq N$ on a également

$$M_{\varphi(n)} \leq \varepsilon + (g_N(\alpha_{\varphi(n)}) - g_N(\alpha))$$

Puisque la suite $(\alpha_{\varphi(n)})$ converge vers α et que g_N est continue, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N'$, $g_N(\alpha_{\varphi(n)}) - g_N(\alpha) \leq \varepsilon$. On en déduit que pour $n \geq \max\{N, N'\}$, $0 \leq M_{\varphi(n)} \leq 2\varepsilon$. Ceci signifie que la suite $(M_{\varphi(n)})$ converge vers 0.

Par ailleurs, puisque la suite (g_n) est décroissante, la suite (M_n) est également décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge. On vient de voir que 0 est une valeur d'adhérence donc (M_n) converge vers 0. Puisque $0 \leq f - f_n \leq M_n$, (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

2. On peut déjà affirmer que f est croissante en tant que limite simple d'une suite de fonctions croissantes. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et un entier naturel non nul $p \geq \frac{f(b) - f(a)}{\varepsilon}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la croissance de f , il existe des entiers a_0, \dots, a_p

tels que $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_p = b$ et $f(a_k) = f(a) + k \frac{f(b) - f(a)}{p}$. On a donc $f(a_{k+1}) - f(a_k) = \frac{f(b) - f(a)}{p} \leq \varepsilon$.

Comme f est limite simple de la suite (f_n) , pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_k$, $|f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon$. Posons $N = \max\{N_0, \dots, N_k\}$ et donnons-nous un entier $n \geq N$.

Soit $x \in [a, b]$. Il existe $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}]$. Par croissance de f et f_N

$$f_n(x) - f(x) \leq f_n(a_{k+1}) - f(a_k) = f_n(a_{k+1}) - f(a_{k+1}) + f(a_{k+1}) - f(a_k) \leq 2\varepsilon$$

et

$$f(x) - f_n(x) \leq f(a_{k+1}) - f_n(a_k) = f(a_{k+1}) - f(a_k) + f(a_k) - f_n(a_k) \leq 2\varepsilon$$

Finalement, $|f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$ i.e. $\|f - f_n\|_\infty \leq 2\varepsilon$. La suite (f_n) converge donc uniformément vers f .

Solution 6

Pour simplifier, posons $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Il est classique de montrer que (u_n) converge vers e^{-1} . Montrons alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{u_n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x) \, dx = \int_{e^{-1}}^1 f(x) \, dx$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{u_n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x) \, dx - \int_{e^{-1}}^1 f(x) \, dx \right| &\leq \left| \int_{u_n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x) \, dx - \int_{e^{-1}}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x) \, dx \right| + \left| \int_{e^{-1}}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x) \, dx - \int_{e^{-1}}^1 f(x) \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_{u_n}^{e^{-1}} x^{\frac{1}{n}} f(x) \, dx \right| + \int_{e^{-1}}^1 (1 - x^{\frac{1}{n}}) |f(x)| \, dx \\ &\leq |e^{-1} - u_n| \|f\|_{\infty} + (1 - e^{-\frac{1}{n}}) \int_{e^{-1}}^1 |f(x)| \, dx \end{aligned}$$

Il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir le résultat escompté.

Solution 7

Remarquons déjà que $f([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et que les seuls points fixes de f sont 0 et $\frac{1}{2}$.

Etudions la convergence simple. Tout d'abord, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit maintenant $x \in]0, 1[$ et posons $u_n = f_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Puisque $f([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n(1 - 2u_n) \geq 0$$

donc (u_n) est croissante à partir du rang 1. La suite (u_n) converge donc en vertu du théorème de convergence monotone. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que f est continue sur $[0, 1]$, (u_n) converge vers un point fixe ℓ de f . Mais par croissance de (u_n) à partir du rang 1, $\ell \geq u_1 = 2x(1 - x) > 0$ donc $\ell = \frac{1}{2}$.

En conclusion, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $g : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{0, 1\} \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$.

On montre aisément par récurrence que les f_n sont continues sur $[0, 1]$ mais g n'est pas continue sur $[0, 1]$ donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Solution 8**Convergence simple.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $|\cos x| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ par croissances comparées. La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R} .

Convergence uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \exp\left(n \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or $\sin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et

$$\cos \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$\ln\left(n \cos \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)\right) = e^{-\frac{1}{2}}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

Solution 9**Convergence simple.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, alors $|\sin x| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R} .

Convergence uniforme. Remarquons que les $|f_n|$ sont paires et π -périodiques. Ainsi $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \|f_n\|_{\infty, [0, \frac{\pi}{2}]}$. On peut donc se contenter d'étudier la convergence uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. f_n est clairement dérivable sur cet intervalle et

$$\forall x \in [0, \pi], f'_n(x) = \sin^{n-1}(x)(n \cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^{n-1}(x)(n - (n+1) \sin^2 x)$$

Ainsi f_n atteint son maximum sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en $x_n = \arcsin \sqrt{\frac{n}{n+1}}$. De plus, f_n est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On rappelle que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1, 1]$. On en déduit que

$$\|f_n\|_{\infty} = f_n(x_n) = \sin^n x_n \cdot \frac{1}{\sqrt{1n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} = 0$ et (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R} .

Solution 10

1. Soit $x \in [0, 1]$. On a bien $0 \leq P_0(x) = 0 \leq \sqrt{x}$. Supposons que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $x - P_n(x)^2 \geq 0$ donc $P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$ et

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))\right) \geq 0$$

donc $P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$. On conclut par récurrence.

2. On reprend l'inégalité précédente

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))\right) \leq (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

On prouve alors aisément par récurrence que

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq (\sqrt{x} - P_0(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n = \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

3. On pose $g_n : t \mapsto t \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$. L'étude de la fonction g_n montre qu'elle atteint son maximum en $\frac{2}{n+1}$. Ainsi

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq g_n(\sqrt{x}) \leq g_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \frac{2}{n+1}$$

On en déduit que (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Solution 11

1. La fonction f_n est clairement positive et une étude de fonctions montre qu'elle admet un maximum en n . Ainsi

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq f_n(x) \leq f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

On rappelle la formule de Stirling

$$n! \sim_{n \rightarrow +\infty} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} = 0$$

donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

2. En posant $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$, une intégration par parties montre que $I_{n+1} = I_n$ donc $I_n = I_0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$.
Evidemment, $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$.

REMARQUE. On ne peut pas ici appliquer le théorème d'interversion limite/intégrale car la convergence uniforme n'a pas lieu sur un segment.

Solution 12

On a clairement $f_n(1) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = 0$. Si $x \in [0, 1[$, la suite $(f_n(x))$ est géométrique de raison $x \in [0, 1[$ donc converge vers 0. Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

De plus, f_n est positive sur $[0, 1]$ et atteint son maximum en $\frac{n}{n+1}$ (étude facile). Ainsi

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

On montre facilement que $\|f_n\|_\infty \sim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-1} e^{-1}$. Ainsi (f_n) converge uniformément si et seulement si $\alpha < 1$.

Solution 13

1. Remarquons déjà que si $x < 0$, $\ln(1 + nx)$ n'est pas définie à partir d'un certain rang. Ensuite $f_n(0) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

Supposons donc $x > 0$. Par concavité de \ln , $0 \leq f_n(x) \leq \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$. Or $\frac{nx}{1 + n^2 x^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Finalement, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ .

2. Posons $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. (x_n) est bien à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et $f_n(x_n) = \frac{\ln 2}{2}$. Notamment, $(f_n(x_n))$ ne converge pas vers 0. La suite (f_n) ne converge donc pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Solution 14

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'énoncé

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f(2^n x) - 2f(2^{n-1} x)| \leq M$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |h_n(x) - h_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{2^n}$$

Notamment,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|h_n - h_{n-1}\|_\infty \leq \frac{M}{2^n}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum h_n - h_{n-1}$ converge normalement et donc uniformément sur \mathbb{R} . Comme il s'agit d'une série télescopique, la suite (h_n) converge uniformément vers une fonction h sur \mathbb{R} . Comme chacune des fonctions h_n est continue sur \mathbb{R} , h l'est également.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)| \leq M$$

puis

$$|h_n(x+y) - h_n(x) - h_n(y)| \leq \frac{M}{2^n}$$

Par convergence simple de (h_n) vers h , on obtient bien $h(x+y) = h(x) + h(y)$.

3. On montre classiquement que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Par inégalité triangulaire,

$$|h_{n+1}(x) - f(x)| \leq |h_{n+1}(x) - h_n(x)| + |h_n(x) - f(x)|$$

Or on a vu à la première question que

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \frac{M}{2^{n+1}}$$

donc

$$|h_{n+1}(x) - f(x)| \leq \frac{M}{2^{n+1}} + |h_n(x) - f(x)|$$

Autrement dit

$$|h_{n+1}(x) - f(x)| - |h_n(x) - f(x)| \leq \frac{M}{2^{n+1}}$$

Comme la suite (h_n) converge simplement vers h , la série télescopique $\sum_{n \in \mathbb{N}} |h_{n+1}(x) - f(x)| - |h_n(x) - f(x)|$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h_{n+1}(x) - f(x)| - |h_n(x) - f(x)| = |h(x) - f(x)| - |h_0(x) - f(x)| = |h(x) - f(x)|$$

Ainsi

$$|h(x) - f(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2^{n+1}} = M$$

La fonction $h - f$ est donc bien bornée.

5. Ainsi $f = h + (f - h)$ est bien la somme d'une homothétie et d'une fonction bornée.

De plus, si $f(x) = \lambda x + b(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et b bornée sur \mathbb{R} , alors pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \lambda + \frac{b(x)}{x}$ de sorte que

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \text{ Ainsi } \lambda \text{ est uniquement déterminé et, par suite, } b \text{ également.}$$

Solution 15

1. Tout d'abord, $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$. Par conséquent, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction constante égale à 1 sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$|f_n(x) - 1| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \right| \leq x^2 \left| \frac{1}{nx} \right| = \frac{|x|}{n}$$

Cette égalité est encore valable pour $x = 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Alors, pour tout $x \in [-a, a]$,

$$|f_n(x) - 1| \leq \frac{a}{n}$$

de sorte que (f_n) converge uniformément sur $[-a, a]$. On en déduit que (f_n) converge uniformément sur $[-a, a]$.

2. Puisque $\sin u \sim_{u \rightarrow 0} u$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(n) = 2 \neq 1$. La suite (f_n) ne converge donc pas uniformément sur \mathbb{R} .

Solution 16

Tout d'abord, $f_n(2) = f_n(-2) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(2) = f_n(-2) = 0$.

Soit ensuite $x \in]-2, 2[$. Alors

$$f_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(x^2 - 4)}{n(x + 2)} = x - 2$$

Ainsi (f_n) converge uniformément vers la fonction $f : x \in [-2, 2] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = -2 \\ x - 2 & \text{sinon} \end{cases}$.

Les applications (f_n) sont clairement continues sur $[-2, 2]$ mais f ne l'est pas. Ainsi (f_n) ne peut converger uniformément sur $[-2, 2]$. Par contre, pour tout $x \in [0, 2]$,

$$|f_n(x) - (x - 2)| = \frac{2 - x}{1 + n(x - 2)} = \varphi_n(2 - x)$$

avec $\varphi_n : u \in [0, 2] \mapsto \frac{u}{1+nu}$. Une étude de fonctions montre que φ_n est positive sur $[0, 2]$ et croissante sur $[0, 2]$. On en déduit que pour tout $x \in [0, 2]$,

$$|f_n(x) - (x-2)| = \frac{2-x}{1+n(x-2)} \leq \varphi_n(2) = \frac{2}{1+2n}$$

On en déduit que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 2]$.

Solution 17

On prouve aisément par récurrence que les fonctions f_n sont impaires et π -antipériodiques. Il est de plus clair que $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$. Soit alors $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$. On prouve aisément que $f_n(x) \in]0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par concavité de \sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f_{n+1}(x) \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} f_n(x) = f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(f_n(x))$ est donc croissante à partir du rang 1 et majorée : elle converge. Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \in [0, 1]$. Par continuité de \sin , $\ell = \sin\left(\frac{\pi\ell}{2}\right)$. La stricte concavité de \sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ montrerait que $\ell \in \{0, 1\}$. Mais comme la notion de *stricte* concavité n'est pas au programme, on peut étudier $\varphi : t \mapsto t - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ sur $[0, 1]$. On trouve que φ'' est positive sur $[0, 1]$ et ne s'annule qu'en 0. Ainsi φ' est strictement croissante sur $[0, 1]$. De plus, $\varphi'(0) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$ et $\varphi'(1) = 1 > 0$ donc φ' s'annule une unique fois sur $[0, 1]$ en un point α . φ est donc strictement croissante sur $[0, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, 1]$. Comme $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, φ ne s'annule qu'en 0 et 1 sur $[0, 1]$. On a donc bien $\ell \in \{0, 1\}$. Mais $f_1(x) > 0$ et $(f_n(x))$ est croissante à partir du rang 1 donc $\ell \geq f_1(x) > 0$ puis $\ell = 1$.

Les f_n étant π -antipériodiques et impaires, on en déduit que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } \sin(x) > 0 \\ -1 & \text{si } \sin(x) < 0 \end{cases}$$

Une récurrence montrerait que les f_n sont continues sur \mathbb{R} mais f ne l'est pas : la convergence ne peut donc pas être uniforme.

Séries de fonctions

Solution 18

1. Posons $f_n(x) = \frac{nx^{2n-1}}{1-x^{2n}}$ pour $n \geq 1$. Remarquons que les f_n sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- Si $|x| > 1$, $|f_n(x)| \geq \frac{n}{|x|}$. Ainsi $|f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.
- Si $|x| < 1$, $|f_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n|x|^{2n-1}$. Or la série $\sum_{n \geq 1} n|x|^{2n-1}$ converge d'après le critère de d'Alembert. La série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge donc absolument.

La série $\sum_{n \geq 1}$ converge donc simplement sur $D =]-1, 1[$ qui est le domaine de définition de f .

2. Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur D et pour tout $x \in D$,

$$f'_n(x) = \frac{nx^{2n-2}(2n-1+x^{2n})}{(1-x^{2n})^2}$$

Soit $a \in]0, 1[$. Pour $x \in]-a, a[$,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{2n^2 a^{2n-2}}{1-a^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n^2 a^{2n-2}$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} 2n^2 a^{2n-2}$ converge d'après le critère de d'Alembert. On en déduit que $\sum_{n \geq 1} \frac{2n^2 a^{2n-2}}{1-a^{2n}}$ converge puis que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur $[-a, a]$. Puis que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[-a, a]$, on en déduit que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-a, a]$. Ceci étant valable pour tout $a \in]0, 1[$, S est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$.

3. On a facilement $f'_n \geq 0$ sur D pour tout $n \geq 1$. De plus f'_n ne s'annule qu'en 0. On en déduit que $S' \geq 0$ sur D et ne s'annule qu'en 0. Ainsi S est strictement croissante sur D .
4. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1[$, $f_n(x) \geq x^{2n-1}$. Or $\sum_{n \geq 1} x^{2n-1} = \frac{x}{1-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$. Ainsi $\lim_{1^-} S = +\infty$. Toutes les f_n étant impaires, S est également impaire et on en déduit $\lim_{-1^+} S = -\infty$.

Solution 19

1. On remarque tout d'abord que les f_n sont définies sur $] -1, +\infty[$. On calcule un développement limité de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \frac{1}{n+1+x} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{n+1+x} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \left(-\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right) \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, on en déduit que $\sum_{n \geq 1} f_{n+1} - f_n$ converge simplement sur $] -1, +\infty[$.

2. La convergence simple de la série $\sum_{n \geq 1} f_{n+1} - f_n$ équivaut à la convergence simple de la suite (f_n) vers une fonction f . Notons f sa limite et posons $g_n = f_{n+1} - f_n$. g_n est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et pour $x \in] -1, +\infty[$:

$$g'_n(x) = -\frac{1}{2(n+1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

De plus, pour $x \in] -1, +\infty[$

$$|g'_n(x)| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

ce qui prouve que $\sum_{n \geq 1} g'_n$ converge normalement. Comme $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge simplement vers une fonction g , on en déduit que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$. De plus, en utilisant un télescopage, $g = f - f_1$. Comme f_1 est elle-même de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$, on en déduit que f est de classe \mathcal{C}^1 .

3. Comme $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement, cette série converge uniformément. Par conséquent, la suite (f_n) converge uniformément. Par conséquent :

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$$

Or, par une intégration facile :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(t) dt &= \left(2 \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) - 2\sqrt{n} \\ &= 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - 2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\int_0^1 f(t) dt = -2$.

Solution 20

Posons $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On montre classiquement que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$F_n(x) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n f_n(x)$ est triviale. Supposons donc $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|F_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

Par une transformation d'Abel, on trouve

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(x) = a_n F_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k-1}) F_k(x)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|a_n F_n(x)| \leq \frac{a_n}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

La suite $(a_n F_n(x))$ converge donc vers 0 puisque (a_n) converge vers 0. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|(a_n - a_{n-1}) F_n(x)| \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

La série télescopique $\sum_{n \geq 1} a_n - a_{n-1}$ converge puisque (a_n) converge. La série $\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n-1}) F_n(x)$ converge donc absolument. La suite de

ses sommes partielles, à savoir la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k-1}) F_k(x)$, converge donc.

La transformation d'Abel montre donc que la suite de terme général $\sum_{k=1}^n a_k f_k(x)$ converge i.e. la série $\sum_{n \geq 1} a_n f_n(x)$ converge.

On en conclut la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 1} a_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

Solution 21

Supposons que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} . Alors la suite de terme général. $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k f_k$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction nulle. En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k f_k\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 0$$

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $\frac{k\pi}{2n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction sin est concave sur cet intervalle donc

$$f_k\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sin \frac{k\pi}{2n} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k\pi}{2n} = \frac{k}{n}$$

Par ailleurs, la suite (a_n) est positive donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k f_k\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{ka_k}{n}$$

Par décroissance de la suite (a_n) ,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{ka_k}{n} \geq \frac{(n+1)a_{n+1}}{2} \geq \frac{na_n}{2} \geq 0$$

Finalement,

$$0 \leq na_n \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} a_k f_k\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

donc la suite (na_n) converge vers 0 par encadrement.

Réciproquement, supposons que la suite (na_n) converge vers 0. Montrons d'abord la convergence simple. Il est clair que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n f_n$ converge simplement en tout point de $2\pi\mathbb{Z}$. Donnons-nous maintenant un réel $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On va alors utiliser une transformation d'Abel.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k f_k &= \sum_{k=1}^n a_k (S_k - S_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k S_k - \sum_{k=n-1}^{p-1} a_{k+1} S_k \\ &= a_{n+1} S_n + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) S_k \end{aligned}$$

On calcule alors classiquement

$$S_n(x) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

On en déduit que $|S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} S_n(x) = 0$$

et, comme (a_n) est décroissante,

$$0 \leq |(a_n - a_{n+1}) S_n(x)| \leq \frac{a_n - a_{n+1}}{|\sin(x/2)|}$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n - a_{n+1}$ converge car (a_n) converge donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n - a_{n+1}) S_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

La suite de terme général $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) S_k(x)$ converge donc. D'après la transformation d'Abel précédemment écrite, la suite de terme général $\sum_{k=1}^n a_k f_k(x)$ converge également. Autrement dit, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f_n(x)$ converge. Finalement, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

On peut alors poser $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k f_k$. A nouveau, par transformation d'Abel

$$\sum_{k=n+1}^p a_k f_k = \sum_{k=1}^p a_k f_k - \sum_{k=1}^n a_k f_k = a_{p+1} S_p - a_{n+1} S_n + \sum_{k=n+1}^p (a_k - a_{k+1}) S_k$$

puis, en faisant tendre p vers $+\infty$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) S_k - a_{n+1} S_n$$

car pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(S_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée et (a_p) converge vers 0.

On a déjà vu que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, |(a_k - a_{k+1}) S_k(x)| \leq \frac{a_k - a_{k+1}}{|\sin(x/2)|}$$

et la série télescopique $\sum a_n - a_{n+1}$ converge puisque la suite (a_n) converge vers 0. On a donc par inégalité triangulaire

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, |R_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) + a_{n+1} |S_n(x)| \leq \frac{2a_{n+1}}{|\sin(x/2)|}$$

Comme les f_n sont 2π -périodiques, on va supposer que $x \in]0, \pi]$. Par positivité et concavité de \sin sur $[0, \pi/2]$,

$$|\sin(x/2)| = \sin(x/2) \geq \frac{x}{\pi}$$

Finalement,

$$\forall x \in]0, \pi], |R_n(x)| \leq \frac{2\pi a_{n+1}}{x}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (na_n) converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $na_n \leq \varepsilon$ pour tout entier $n \geq N$. Fixons alors $x \in]0, \pi]$ et posons $p = \lfloor \pi/x \rfloor$. Soit un entier $n \geq N$.

- Si $n \geq \max\{p, N\}$, alors

$$|R_n(x)| \leq \frac{2\pi a_{n+1}}{x} \leq \frac{2\pi a_{p+1}}{x} \leq 2(p+1)a_{p+1} \leq 2\varepsilon$$

- Sinon, $N \leq n < p$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^p a_k \sin(kx) + R_p(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^p a_k |\sin(kx)| + |R_p(x)| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^p a_k kx + |R_p(x)| \quad \text{car } |\sin(u)| \leq |u| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^p k a_k x + 2\varepsilon \quad \text{d'après le cas précédent} \\ &\leq (p-n)x\varepsilon + 2\varepsilon \quad \text{car } k a_k \leq \varepsilon \text{ pour } k \geq N \\ &\leq px\varepsilon + 2\varepsilon \leq (\pi+2)\varepsilon \quad \text{par définition de } p \end{aligned}$$

Dans tous les cas, $|R_n(x)| \leq (\pi+2)\varepsilon$ pour tout $x \in]0, \pi]$. Cette inégalité est encore vraie de manière évidente lorsque $x = 0$ et donc finalement vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque R_n est 2π -périodique et impaire. Ceci montre que (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle i.e. que $\sum a_n f_n$ converge uniformément.

Solution 22

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\frac{1}{\text{sh}(nx)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-nx}$ et $\sum e^{-nx}$ est une série à termes positifs convergente (série géométrique de raison $e^{-x} \in [0, 1[$). Ainsi la série $\sum \frac{1}{\text{sh}(nx)}$ converge. f est donc définie sur \mathbb{R}_+^* . Mais f est manifestement impaire donc f est définie sur \mathbb{R}^* .

On utilise ensuite une comparaison à une intégrale. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\text{sh}(xt)}$ est décroissante de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(xt)} \leq f(x) \leq \frac{1}{\text{sh } x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(xt)}$$

Une primitive de $\frac{1}{\text{sh}}$ étant $t \mapsto \ln(\text{th}(x/2))$, on trouve

$$-\frac{1}{x} \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq f(x) \leq \frac{1}{\text{sh } x} - \frac{1}{x} \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

On montre aisément que $\ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x$ et on sait que $\frac{1}{\text{sh } x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$. Comme $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{\ln x}{x}\right)$, on en déduit que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$$

Comme f est impaire, on peut affirmer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln|x|}{x}$$

REMARQUE. On peut également remarquer que pour $x \in]0, 1]$, par le changement de variable $u = xt$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(xt)} = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{du}{\text{sh } u} = \frac{1}{x} \int_x^1 \frac{du}{\text{sh } u} + \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{du}{\text{sh } u}$$

Mais $\frac{1}{\operatorname{sh} u} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u}$, $u \mapsto \frac{1}{u}$ est positive sur \mathbb{R}_+^* et $\int_0^1 \frac{du}{u}$ diverge, donc

$$\int_x^1 \frac{du}{\operatorname{sh} u} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{du}{u} = -\ln x$$

On en déduit donc que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}(xt)} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\frac{\ln x}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et on peut alors à nouveau conclure que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4e^{-2nx}$ et $\sum e^{-2nx}$ est une série à termes positifs convergente (série géométrique de raison $e^{-2x} \in [0, 1[$). Ainsi la série $\sum \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ converge. g est donc définie sur \mathbb{R}_+^* . Mais g est manifestement impaire donc g est définie sur \mathbb{R}^* .

Posons ensuite $u_n(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_0 u_n = \frac{1}{n^2}$. De plus, $\operatorname{sh} x$ est convexe sur \mathbb{R}_+ donc $\operatorname{sh} x \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et donc $\frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et même pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (parité). On en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge normalement sur \mathbb{R}^* . On peut alors utiliser le théorème d'interversion limite/série

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ou encore $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) = \pi^2/6$. Par conséquent,

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$$

Solution 23

1. On raisonne par récurrence. Tout d'abord, g_0 est bornée. Si on suppose g_n bornée pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\forall x \in [0, 1], |g_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |g_n(1-t)| dt \leq \int_0^x \|g_n\|_\infty dt = x \|g_n\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty$$

Notamment, g_{n+1} est bornée. On a donc montré par récurrence que g_n est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En fait, on a montré plus précisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, $|g_{n+1}(x)| \leq x \|g_n\|_\infty$. Ainsi pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|g_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |g_n(1-t)| dt \leq \int_0^x (1-t) \|g_{n-1}\|_\infty dt \leq \int_0^1 (1-t) \|g_{n-1}\|_\infty dt = \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty$$

Par conséquent, $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty$.

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g_{2n}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \|g_0\|_\infty$ et $\|g_{2n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \|g_1\|_\infty$. On vérifie alors qu'en prenant $K = \max(\|g_0\|_\infty, \sqrt{2} \|g_1\|_\infty)$, on a $\|g_n\|_\infty \leq \frac{K}{\sqrt{2}^n}$.

REMARQUE. On calcule aisément $\|g_0\|_\infty = \|g_1\|_\infty = 1$ de sorte que $K = \sqrt{2}$.

Comme la série $\sum \frac{1}{\sqrt{2}^n}$ est une série géométrique convergente, il en est de même de la série $\sum \|g_n\|_\infty$. Par conséquent, la série $\sum g_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ et donc simplement. La fonction G est bien définie sur $[0, 1]$.

Tout d'abord, g_0 est dérivable de dérivée nulle. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est également dérivable d'après le théorème fondamental de l'analyse et $g'_n(x) = g_{n-1}(1-x)$. La série $\sum g'_n$ converge donc normalement et donc uniformément. On en déduit que G est dérivable et que

$$\forall x \in [0, 1], G'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_{n-1}(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(1-x) = G(1-x)$$

Cette égalité montre à nouveau que G' est dérivable et que

$$\forall x \in [0, 1], G''(x) = -G'(1-x) = -G(x)$$

3. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $G = \alpha \cos + \beta \sin$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(0) = 0$ donc $G(0) = g_0(0) = 1$. De plus, $G'(1) = G(0) = 1$. On en déduit que $\alpha = 1$ et $-\alpha \sin(1) + \beta \cos(1) = 1$ puis que $\beta = \frac{1 + \sin(1)}{\cos(1)}$.

Solution 24

1. Supposons qu'il existe une telle suite. Notamment

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 2$$

On en déduit notamment que $a_n^2 \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^4 = 4$$

de sorte que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n^2 - a_n^4 = 0$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2(2 - a_n^2) = 0$$

Notre remarque initiale montre qu'il s'agit d'une somme de termes positifs. Par conséquent, $a_n = 0$ ou $a_n^2 = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 2$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p^2 = 2$ et $a_n = 0$ pour tout entier naturel $n \neq p$. Mais alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^6 = a_p^6 = 2^3 = 8 \neq 6$$

On a donc montré par l'absurde qu'il n'existe pas de suite vérifiant la condition de l'énoncé.

2. Supposons qu'il existe une telle suite (a_n) . Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 1$$

Puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = \frac{1}{4}$$

on a $a_n^2 \leq \frac{1}{4}$ i.e. $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Posons $\varphi_n(k) = k^2 a_n^k$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq 2$

$$|\varphi_n(k)| = k^2 |a_n|^{k-2} |a_n|^2 \leq \frac{k^2}{2^{k-2}} a_n^2$$

La suite $(k^2/2^{k-2})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 donc est bornée. On en déduit qu'il existe M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq 2$

$$|\varphi_n(k)| \leq M a_n^2$$

Comme la série $\sum \frac{1}{a_n^2}$ converge, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$ converge normalement sur \mathbb{N} . De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_n(k) = 0$ par la majoration précédente. Par le théorème de la double limite,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 0$$

ce qui contredit le fait que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 1$$

Solution 25

1. Posons $f_n : t \mapsto \ln(1 + e^{nt})$. Si $t \in \mathbb{R}_+$, alors la suite $(f_n(t))$ ne converge pas vers 0 donc la série $\sum f_n(t)$ diverge. Si $t \in \mathbb{R}_-^*$, alors $f_n(t) \sim e^{-nt}$ et la série $\sum e^{-nt}$ est une série géométrique à termes positifs convergente (de raison $e^{-t} \in]0, 1[$). Par conséquent, la série $\sum_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$ converge. Finalement, le domaine de définition de f est \mathbb{R}_+^* .

2. On sait que $0 \leq \ln(1 + u) \leq u$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{nt}$$

Fixons $a \in \mathbb{R}_-^*$. Alors pour tout $t \in]-\infty, a]$,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{nt} \leq e^{na}$$

et donc $\|f_n\|_\infty \leq e^{na}$ où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme uniforme sur $] -\infty, a]$. A nouveau, la série géométrique $\sum e^{na}$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $] -\infty, a]$. A fortiori, elle converge uniformément sur $] -\infty, a]$. Par ailleurs, f_n admet pour limite 0 en $-\infty$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\ln 2$ si $n = 0$. Le théorème d'interversion limite/série permet alors d'affirmer que

$$\lim_{-\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{-\infty} f_n = \ln 2$$

3. En étudiant la fonction $u \mapsto \ln(1 + u) - u + \frac{u^2}{2}$, on prouve que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \ln(1 + u) \geq u - \frac{u^2}{2}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*, f_n(t) \geq e^{nt} - \frac{1}{2}e^{2nt}$$

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*, f(t) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{nt} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2nt} = \frac{1}{1 - e^t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{2t}} = \frac{1 + 2e^t}{2(1 - e^{2t})}$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2e^t}{2(1 - e^{2t})} = +\infty$, $\lim_{0^-} f = +\infty$.

Solution 26

1. Soit $t \in]0, 1[$. Puisque $-t^b \in]-1, 0[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-t^b)^n = \frac{1}{1 + t^b}$. On en déduit que

$$\frac{t^{a-1}}{1 + t^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

avec $u_n(t) = (-1)^n t^{a-1+nb}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $a - 1 + nb > -1$, $|u_n|$ est intégrable sur $]0, 1]$ et

$$\int_0^1 |u_n|(t) dt = \int_0^1 t^{a-1+nb} dt = \frac{1}{a+nb}$$

La série $\sum \frac{1}{a+nb}$ diverge. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

3. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_N(t) dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-1)^n t^{a-1+nb} dt \\ &= \int_0^1 t^{a-1} \cdot \frac{1 - (-1)^{N+1} t^{(N+1)b}}{1 + t^b} dt \quad (\text{somme des termes d'une suite géométrique}) \\ &= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} dt - (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(N+1)b}}{1 + t^b} dt \end{aligned}$$

Or

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{a-1+(N+1)b}}{1 + t^b} dt \leq \int_0^1 t^{a-1+(N+1)b} dt = \frac{1}{a + (N+1)b}$$

Ainsi, par théorème des gendarmes

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(N+1)b}}{1 + t^b} dt = 0$$

de sorte que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} dt$$

4. On déduit de la question précédente que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a + nb}$$

5. D'après la question précédente, en prenant $a = 1$ et $b = 3$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$$

On décompose $\frac{1}{1+X^3}$ en éléments simples. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$F = \frac{1}{1+X^3} = \frac{1}{X+1} X^2 - X + 1 = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$

On trouve $a = ((X+1)F)(-1) = \frac{1}{3}$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0 = a + b$ donc $b = -\frac{1}{3}$. Enfin, $F(0) = 1 = a + c$ donc $c = \frac{2}{3}$. On peut réécrire sous la forme

$$F(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{X-2}{X^2-X+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{X^2-X+1}$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{t+1} &= [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) \\ \int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt &= [\ln(t^2-t+1)]_0^1 = 0 \\ \int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1} &= \int_0^1 \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Solution 27

1. Si $x \leq 0$, la suite $(f_n(x))$ ne tend pas vers 0 donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x > 0$, on vérifie que $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n(x)$ diverge. On en déduit que le domaine de définition de f est \mathbb{R}_+^* .
2. Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f_n est décroissante et positive, $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = f_n(a)$. A nouveau, la série $\sum f_n(a)$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement et, par suite, uniformément sur $[a, +\infty[$. Comme les f_n sont clairement continues sur $[a, +\infty[$, f est continue sur $[a, +\infty[$. Par caractère local de la continuité, f est continue sur \mathbb{R}_+^* .
3. On a montré que $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $[1, +\infty[$ par exemple. Remarquons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On peut donc appliquer le théorème de la double limite

$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

Solution 28

1. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_{n+1} est de classe \mathcal{C}^1 et $f'_{n+1} = f_n$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^n est que $f_n^{(k)} = f_{n-k}$. Remarquons également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(a) = 0$ i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(a) = 0$. Fixons $x \in [a, b]$ et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f_n entre a et x .

$$\left| f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \max_{[a,x]} |f_n^{(n)}| \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Or pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$f_n^{(k)}(a) = f_{n-k}(a) = 0$$

et $f_n^{(n)} = f$ donc

$$|f_n(x)| \leq \max_{[a,x]} |f| \frac{(x-a)^n}{n!} \leq \|f\|_{\infty} \frac{(b-a)^n}{n!}$$

Par conséquent

$$\|f_n\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \frac{(b-a)^n}{n!}$$

Comme la série exponentielle $\sum \frac{(b-a)^n}{n!}$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

2. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement vers $F - f$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f'_n$, c'est-à-dire la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_{n-1}$ converge normalement sur $[a, b]$. On en déduit que $F - f_0$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et que

$$(F - f)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = F$$

La fonction $\varphi : x \mapsto e^{-x}(F(x) - f(x))$ est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et

$$\varphi'(x) = -e^{-x}(F(x) - f(x)) + e^{-x}(F - f)'(x) = -e^{-x}(F(x) - f(x)) + e^{-x}F(x) = e^{-x}f(x)$$

Ainsi φ est une primitive de $x \mapsto e^{-x}f(x)$ sur $[a, b]$. Par ailleurs

$$\varphi(a) = e^{-a}(F(a) - f(a)) = 0$$

car $f_n(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\forall x \in [a, b], \varphi(x) = \int_a^x e^{-t} f(t) dt$$

ou encore

$$\forall x \in [a, b], F(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t) dt$$

Solution 29

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Via des développements limités usuels :

$$\begin{aligned} x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) &= \frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

donc $u_n(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n(x)$ converge. La série $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u'_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}$$

On montre classiquement que

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

donc

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \leq u'_n(x) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

ou encore

$$\frac{x-1}{(n+1)(n+x)} \leq u'_n(x) \leq \frac{x}{n(n+x)}$$

Ainsi

$$|u'_n(x)| \leq \frac{x+1}{n^2}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in [0, a], |u'_n(x)| \leq \frac{a+1}{n^2}$$

La série $\sum u'_n$ converge donc normalement sur $[0, a]$. Ainsi g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, a]$ et, par suite, sur \mathbb{R}_+ .

3. On a clairement $u_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit immédiatement que $f(1) = 0$.

Les u'_n sont clairement croissantes sur \mathbb{R}_+ donc g' l'est également. Par ailleurs, $f'(x) = g'(x) - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ donc f' est croissante sur \mathbb{R}_+ comme somme de deux fonctions croissantes. On en déduit que f est convexe sur \mathbb{R}_+ .

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(x+1) - g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x+1) - u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+x} = 0$, $g'(x+1) - g'(x) = \frac{1}{x+1}$ par télescopage. Posons $\psi(x) = f(x+1) - f(x) - \ln(x) = g(x+1) - g(x) - \ln(x+1)$.

Alors ψ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et

$$\psi'(x) = g'(x+1) - g'(x) - \frac{1}{x+1} = 0$$

Ainsi ψ est constante sur \mathbb{R}_+ . Mais comme $\psi(x) = g(x+1) - g(x) - \ln(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, ψ est en fait prolongeable par continuité (et même prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^1) sur \mathbb{R}_+ puisqu'on a vu que g était de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ . En notant encore ψ ce prolongement, $\psi(0) = g(1) - g(0) - \ln(0+1) = 0$. Par conséquent, ψ est constamment nulle sur \mathbb{R}_+ . On en déduit que $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

4. Posons $f_n(x) = x \ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$.

Soit $x \in]0, 1]$. Par convexité de la fonction de f ,

$$\frac{f(n+x) - f(n)}{x} \leq \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \ln(n)$$

ou encore

$$f(n+x) \leq x \ln(n) + f(n)$$

Par ailleurs, par télescopage

$$f(n) = f(n) - f(1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) - f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \ln(k) = -\ln(n) + \ln(n!)$$

et

$$f(n+x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1+x) - f(k+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(x+k) = -\ln(x+n) + \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$$

On en déduit que

$$f(x) - \ln(x+n) + \sum_{k=0}^n \ln(x+k) \leq x \ln(n) - \ln(n) + \ln(n!)$$

ou encore

$$f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \leq f_n(x)$$

Toujours par convexité de f ,

$$\ln(n-1) = \frac{f(n) - f(n-1)}{n - (n-1)} \leq \frac{f(n+x) - f(n)}{x}$$

ou encore

$$x \ln(n-1) + f(n) \leq f(n+x)$$

ce qui équivaut à

$$x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + x \ln(n) + f(n) \leq f(n+x)$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient

$$f_n(x) \leq f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) - x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Finalement

$$f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \leq f_n(x) \leq f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) - x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

On procède par récurrence, et on note \mathcal{P}_p l'assertion

$$\forall x \in]p, p+1], \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

On vient de montrer que \mathcal{P}_0 est vraie. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_p est vraie. Donnons-nous alors $x \in]p, p+1]$ et remarquons que

$$f_n(x+1) - f_n(x) = \ln(x) - \ln\left(\frac{x+n+1}{n}\right)$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x+1) = f(x) + \ln(x) = f(x+1)$$

Ceci prouve que \mathcal{P}_{p+1} est vraie. Par récurrence, \mathcal{P}_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Solution 30

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $|u_n(x)| \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$. La série $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$ converge en tant que série exponentielle. La série $\sum |u_n(x)|$ converge donc par majoration. La série $\sum u_n(x)$ converge donc (absolument). On en déduit que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
2. D'après la question précédente, $\|u_n\|_\infty \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$. A nouveau, la série $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$ donc la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge par majoration. La série $\sum u_n$ converge donc normalement sur \mathbb{R} et donc uniformément sur \mathbb{R} .
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $v_n(x) = \frac{\alpha^n e^{inx}}{n!} = \frac{(\alpha e^{ix})^n}{n!}$. La série $\sum v_n(x)$ est une série exponentielle. Elle converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = e^{\alpha e^{ix}} = e^{\alpha \cos x} e^{i\alpha \sin x}$$

Ainsi

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(v_n(x)) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \right) = e^{\alpha \cos x} \cos(\alpha \sin x)$$

4. a. Fixons $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que les fonctions u_n sont paires et donc C également. Par conséquent, $x \mapsto \sin(nx) \cos(nx)$ est impaire et $J_n = 0$.

Posons ensuite $w_k(x) = \cos(nx)u_k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k(x) = \cos(nx)C(x)$. De plus, $\|w_k\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$ donc $\sum w_k$ converge normalement sur \mathbb{R} et donc uniformément sur \mathbb{R} . En particulier, $\sum w_k$ converge uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$. Enfin, les w_k sont bien continues sur $[-\pi, \pi]$. On peut donc affirmer que

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} w_k(x) \, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) \, dx$$

D'après l'indication de l'énoncé

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) \, dx = \frac{\alpha^k}{2k!} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)) \, dx$$

On en déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n = 0 \\ \frac{\pi \alpha^n}{n!} & \text{si } k = n \neq 0 \end{cases}$$

Par conséquent, $I_0 = 2\pi$ et $I_n = \frac{\pi \alpha^n}{n!}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

- b. On en déduit immédiatement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\cos^2(nx) = \frac{1 + \cos(2nx)}{2}$ de sorte que

$$\frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{1}{2} \cdot u_n(2x)$$

Or les séries $\sum \frac{\alpha^n}{n!}$ et $\sum u_n(2x)$ convergent donc $\sum \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$ converge également. Ainsi S est définie sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(2x) = \frac{e^\alpha}{2} + \frac{1}{2} C(2x) = \frac{e^\alpha}{2} + e^{\alpha \cos 2x} \cos(\alpha \sin 2x)$$

Solution 31

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées.
2. Posons $f_n : \mapsto (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$. Alors $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \frac{1}{n+1}$ donc la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+ . Néanmoins, en vertu du critère spécial des séries alternées et en notant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \|f_{n+1}\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \frac{1}{n+2}$$

donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

3. Les fonctions f_n étant continues sur \mathbb{R}_+ et $\sum f_n$ convergeant uniformément sur \mathbb{R}_+ , S est continue sur \mathbb{R}_+ .

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \delta_{n,0}$ donc d'après le théorème de la double limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 1$.

4. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^x$ avec λ dérivable sur \mathbb{R}_+^* ce qui donne $\lambda'(x)e^x = -\frac{e^x}{e^x + 1}$ ou encore $\lambda'(x) = -\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. On peut donc choisir, $\lambda(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Les solutions sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + \ln(1 + e^{-x})e^x$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Remarquons que les f_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et que $f'_n(x) = -(-1)^n \frac{ne^{-nx}}{n+1}$. Soit $a > 0$. Alors $\|f'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = \frac{ne^{-na}}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f'_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Ainsi S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{ne^{-nx}}{n+1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nx} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} = -\frac{1}{1+e^{-x}} + S(x) = -\frac{e^x}{e^x + 1} + S(x)$$

Ainsi S est solution de l'équation différentielle de la question précédente sur \mathbb{R}_+^* . Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x) = \lambda e^x + \ln(1 + e^{-x})e^x$$

Or $\ln(1 + e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x})e^x = 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} S = 1$, on a alors $\lambda = 0$. Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x) = \ln(1 + e^{-x})e^x$$

Par continuité de S et $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})e^x$ sur \mathbb{R}_+

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(x) = \ln(1 + e^{-x})e^x$$

Solution 32

1. Tout d'abord, $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge.
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x^2}$ donc $\sum u_n(x)$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.
- La série $\sum u_n$ converge donc simplement sur \mathbb{R} .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors u_n est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{(1 + nx^2) - 2nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{n(1 + nx^2)^2}$$

On en déduit les variations de u_n sur \mathbb{R}_+ .

x	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
$u'_n(x)$	+	0	-
$u_n(x)$	0	$u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	0

Comme u_n est impaire et positive sur \mathbb{R}_+ ,

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

On en déduit que $\sum \|u_n\|_\infty$ converge i.e. $\sum u_n$ converge normalement sur \mathbb{R} .

A fortiori, $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} et les fonctions u_n sont toutes continues sur \mathbb{R} donc S est continue sur \mathbb{R} .

3. Les fonctions u_n sont toutes de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On a déjà montré que $\sum u_n$ convergeait simplement sur \mathbb{R} .

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, par inégalité triangulaire,

$$|u'_n(x)| \leq \frac{1 + nx^2}{n(1 + nx^2)^2} = \frac{1}{n(1 + nx^2)} \leq \frac{1}{n(1 + na^2)}$$

Ainsi

$$\|u'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{n(1 + na^2)}$$

Comme $\frac{1}{n(1 + na^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 a^2}$, $\sum \frac{1}{n(1 + na^2)}$ converge par comparaison à une série de Riemann puis $\sum \|u'_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$ converge.

Ainsi $\sum u'_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Ceci étant valable pour tout $a > 0$, S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Mais comme S est impaire, S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons $\alpha_N = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Soit $x \in]0, \alpha_N]$. Pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$0 < 1 + nx^2 \leq 1 + Nx^2 \leq 2$$

donc

$$\frac{u_n(x)}{x} \geq \frac{1}{2n}$$

Ainsi

$$\frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

Comme les u_n sont positives sur \mathbb{R}_+ ,

$$\forall x \in]0, \alpha_N], \frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

Mais comme les fonctions $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{S_N(x)}{x}$ sont impaires, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| \leq \alpha_N$,

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

On sait que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. Fixons $M \in \mathbb{R}_+$. Il existe alors N tel que $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq M$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ tel

que $|x| \leq \alpha_N$, $\frac{S(x)}{x} \geq M$. Par définition de la limite, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$.

Comme $S(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x) - S(0)}{x - 0} = +\infty$. La fonction S n'est donc pas dérivable en 0. On peut cependant affirmer que la courbe de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Solution 33

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .
2. Tout d'abord, les f_n sont continues sur \mathbb{R} . Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a, a], |f_n(x)| \leq \frac{2a}{n^2}$$

Ainsi $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{2a}{n^2}$. On en déduit que $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$. Comme $\mathbb{R} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}_+} [-a, a]$, S est continue sur \mathbb{R} .

3. On ne peut manifestement pas utiliser une éventuelle convergence uniforme de $\sum f_n$ sur \mathbb{R} , auquel cas on obtiendrait $\lim_{+\infty} S = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 0$.

Considérons donc, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction décroissante $\varphi_x : t \mapsto \frac{2x}{x^2 + t^2}$ et procédons à une comparaison série/intégrale.

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_x(n) \leq \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$$

ou encore

$$\pi - 2 \arctan(1/x) \leq S(x) \leq \pi$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{+\infty} S = \pi$.

Solution 34

1. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{x^n \sin(nx)}{n} \right| \leq |x|^n$$

Or $\sum |x|^n$ converge donc $\frac{x^n \sin(nx)}{n}$ converge (absolument). La fonction f est donc bien définie sur $] -1, 1[$.

2. Posons $f_n : x \mapsto \frac{x^n \sin(nx)}{n}$. La question précédente montre que $\sum f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, f'_n(x) = x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx)$$

Soit $a \in [0, 1[$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on obtient par inégalité triangulaire,

$$|f'_n(x)| \leq a^{n-1} + a^n =$$

Ainsi $\|f'_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq a^{n-1} + a^n$. Comme $\sum a^{n-1} + a^n$ converge, $\sum f'_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a, a]$. On en déduit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$.

3. On peut de plus affirmer que

$$\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx)$$

Puisque $|xe^{ix}| = |x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{inx} = \frac{1}{1 - xe^{ix}}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \sin(nx) = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{i(n+1)x} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix}}{1 - xe^{ix}} \right)$$

Or

$$\frac{e^{ix}}{1 - xe^{ix}} = \frac{e^{ix}(1 - xe^{-ix})}{(1 - xe^{ix})(1 - xe^{-ix})} = \frac{e^{ix} - x}{(1 - x \cos x)^2 + (x \sin x)^2}$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \sin(nx) = \frac{\sin x}{(1 - x \cos x)^2 + (x \sin x)^2}$$

De la même manière,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx} = \frac{xe^{ix}}{1 - xe^{ix}} = \frac{xe^{ix} - x^2}{(1 - x \cos x)^2 + (x \sin x)^2}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(nx) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx} \right) = \frac{x \cos x - x^2}{(1 - x \cos x)^2 + (x \sin x)^2}$$

On obtient bien

$$f'(x) = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{(1 - x \cos x)^2 + (x \sin x)^2}$$

4. Posons $g(x) = \arctan \left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right)$. Par opérations, g est bien de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$ et $g'(x) = f'(x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$. Or il est clair que $f(0) = g(0) = 0$ donc $f = g$ sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Solution 35

- Si $x > 0$, $v_n(x) = o(1/n^2)$ par croissances comparées donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n(x)$ converge.
Si $x < 0$, alors $v_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n(x)$ diverge grossièrement.
Enfin, $v_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n(0)$ diverge grossièrement.
Finalement, le domaine de définition de S est \mathbb{R}_+^* .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors v_n est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $v'_n(x) = (\ln(n) - n)v_n(x) \leq 0$ donc v_n est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est continue sur \mathbb{R}_+^* . Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [a, +\infty[$, $0 \leq v_n(x) \leq v_n(a)$ donc $\|v_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq v_n(a)$. D'après la première question, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n(a)$ converge donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge normalement et a fortiori uniformément sur $[a, +\infty[$.
Par conséquent, S est continue sur $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} [a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.
- Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $v_n(x) = e^{(\ln(n)-n)x}$ et $\ln(n) - n < 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Par théorème de la double limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} v_n = 1$. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ convergerait uniformément sur $]0, +\infty[$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1$ convergerait, ce qui est évidemment faux. Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, v'_n(x) = (\ln(n) - n)v_n(x)$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par décroissance de v_n ,

$$|v'_n(x)| = (n - \ln(n))v_n(x) \leq nv_n(x) \leq nv_n(a) = n^{a+1}e^{-na}$$

A nouveau, $n^{a+1}e^{-na} = o(1/n^2)$ par croissances comparées, ce qui permet de conclure que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v'_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$. On en déduit que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} [a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

Solution 36

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $((-1)^n u_n(x))$ est décroissante de limite nulle. La série $\sum u_n(x)$ converge donc en vertu du critère spécial des séries alternées. Ainsi f est définie sur \mathbb{R}_+^* .
Montrons que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Posons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. En vertu du critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} \leq \frac{1}{n+1}$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = 0$. Ceci signifie que $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* .

Par théorème de transfert, f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

2. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x+1) = \frac{1}{x} - f(x+1)$$

Comme f est continue en 1, on peut écrire $f(x) = \frac{1}{x} - f(1) + o(1)$. A fortiori, $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

Remarquons maintenant que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}(x)$$

donc

$$2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) + u_{n+1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)(x+n+1)}$$

Posons $v_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{(x+n)(x+n+1)}$. On peut montrer comme précédemment que $\sum v_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* grâce au critère spécial des séries alternées. Mais encore plus simplement, $\|v_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ donc $\sum v_n$ converge normalement et a fortiori uniformément sur $[1, +\infty[$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = 0$ par théorème d'interversion série/limite. On en déduit que $2f(x) = \frac{1}{x} + o(1)$. A fortiori, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

3. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{n+x-1} dt$$

On ne peut malheureusement pas appliquer le théorème d'interversion terme à terme. Posons donc

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k+x-1} dt$$

de sorte que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$$

Alors

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k+x-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} \cdot \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{n+x} dt \end{aligned}$$

Or

$$0 \leq \int_0^1 t^{n+x} dt \leq \int_0^1 t^{n+x} dt = \frac{1}{n+x+1}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{n+x} dt = 0$. On en déduit que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

Solution 37

- La série $\sum f_n$ converge uniformément donc simplement sur X et la suite (R_n) de ses restes converge uniformément sur X vers la fonction nulle i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty = 0$. Puisque $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$, $f_n = R_{n-1} - R_n$ puis, par inégalité triangulaire, $\|f_n\|_\infty \leq \|R_{n-1}\|_\infty + \|R_n\|_\infty$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ i.e. (f_n) converge uniformément sur X vers la fonction nulle.
- Supposons que la série $\sum f_{n+1} - f_n$ converge uniformément sur X . Notons S sa somme. Alors la suite (S_n) des sommes partielles converge uniformément vers S sur X . Par télescopage, $S_n = f_{n+1} - f_0$ donc $\|f_n - (S + f_0)\|_\infty = \|S_{n-1} - S\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (f_n) converge uniformément sur X vers $S + f_0$.
Réciproquement, supposons que (f_n) converge uniformément sur X . Notons f sa limite. Dans ce cas, $\|S_n - (f - f_0)\|_\infty = \|f_{n+1} - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi (S_n) converge uniformément sur X vers $f - f_0$. Par définition, $\sum f_{n+1} - f_n$ converge uniformément sur X .

Séries alternées

Solution 38

- Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $(e^{-\lambda_n x})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puisque $x > 0$. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ converge i.e. la série $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .
- Supposons que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* . Alors la suite (f_n) convergerait uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+^* . Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\lambda_n} \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite de terme général $f_n(1/\lambda_n) = (-1)^n e^{-1}$ ne converge pas vers 0. La série $\sum f_n$ ne converge donc pas uniformément sur \mathbb{R}_+^* .
- D'après le critère spécial des séries alternées

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, |S(t)| \leq e^{-\lambda_0 t}$$

Or $t \mapsto e^{-\lambda_0 t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc S également.

Toujours d'après le critère des séries alternées,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \left| S(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) \right| \leq e^{-\lambda_{n+1} t}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^{+\infty} S(t) dt - \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} f_k(t) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} \left(S(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) \right) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| S(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_{n+1}t} dt$$

ou encore

$$\left| \int_0^{+\infty} S(t) dt - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\lambda_k} \right| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}}$$

On obtient alors en passant à la limite

$$\int_0^{+\infty} S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

Solution 39

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $\left(\frac{1}{x+n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle de sorte que la série $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. La série $\sum u_n(x)$ converge donc et

$$\forall x \in [a, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n}$$

La suite des restes $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+^* i.e. la série $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* . Les u_n étant continues sur \mathbb{R}_+^* , f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

via le changement d'indice $k \mapsto k-1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'une part,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$$

D'autre part,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

En additionnant ces deux inégalités,

$$2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^k}{x+k} - \frac{(-1)^k}{x+k+1} \right] = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A nouveau, la série $\sum \frac{(-1)^n x}{(x+n+1)(x+n)}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Notamment,

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)} \right| \leq \frac{1}{(x+1)x}$$

On en déduit d'après la question précédente que

$$2f(x) - \frac{1}{x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

A fortiori

$$2f(x) - \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

5. D'après la question 2,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1)$$

Comme f est continue en 1,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{x} - f(1) + o(1)$$

A fortiori

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Tout d'abord, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ converge puisque $\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $x-1 > -1$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que

$$\forall t \in [0, 1[, \frac{1}{1+t} = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k \right] + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt &= \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k+x-1} dt \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \\ &= \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x+k} \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\forall t \in [0, 1], 0 \leq \frac{t^{n+x}}{1+t} \leq t^{n+x}$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+x} dt = \frac{1}{n+x+1}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+x} dt = 0$$

de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x+k} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

i.e.

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

Solution 40

1. Si $x > 0$, la suite de terme général $1/n^x$ décroît vers 0. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge donc en vertu du critère spécial des séries alternées. Si $x \leq 0$, la suite de terme général $(-1)^{n-1}/n^x$ ne converge pas vers 0 donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge grossièrement. Le domaine de définition de S est donc \mathbb{R}_+^* .

2. Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^a}$$

Comme $a > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge. La série de fonctions définissant S converge donc normalement et a fortiori uniformément sur $[a, +\infty[$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \delta_{n,1}$. D'après le théorème d'interversion limite/série, $\lim_{+\infty} S = 1$.

REMARQUE. En utilisant la majoration d'un reste d'une série alternée, on peut même montrer que la série définissant S converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $x \in D$. D'une part,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

et d'autre part,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^x}$$

Par sommation de deux séries convergentes,

$$2S(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$$

4. Soit $x \in D$. Tout d'abord, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$. Par ailleurs, la fonction $f : t \mapsto t^x$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* car elle est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(t) = \frac{x(x+1)}{t^{x+2}} \geq 0$. D'après l'inégalité des pentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} \leq \frac{f(n+2) - f(n+1)}{(n+2) - (n+1)}$$

ou encore

$$f(n) - f(n+1) \geq f(n+1) - f(n+2)$$

ou enfin

$$u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} u_n(x)$ vérifie donc le critère spécial des séries alternées. En particulier

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x) \right| \leq |u_1(x)|$$

ou encore

$$|2S(x) - 1| \leq 1 - \frac{1}{2^x}$$

On en déduit grâce au théorème des gendarmes que $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2S(x) - 1 = 0$. i.e. $\lim_{0^+} S = \frac{1}{2}$.

Solution 41

1. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite de terme général $\frac{1}{n+x}$ décroît vers 0 donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge. Ainsi S est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Posons $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* . De plus, les u_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* de dérivées $u'_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ vérifie à nouveau le critère des séries alternées. Cette série converge donc et on peut majorer la valeur absolue du reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u'_k(x) \right| \leq \frac{1}{(n+1+x)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Le reste converge donc uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+^* i.e. la série $\sum u'_n$ converge uniformément. Par conséquent, S est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

2. Toujours d'après le critère spécial des séries alternées, $S'(x)$ est du signe du premier terme de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$, c'est-à-dire du signe de $-\frac{1}{x^2}$. Par conséquent, S' est négative sur \mathbb{R}_+^* de sorte que S est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par changement d'indice

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x} = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} = \frac{1}{x} - S(x+1)$$

Comme S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , elle est a fortiori continue en 1. Ainsi $x \mapsto S(x+1)$ admet une limite finie en 0. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$,
 $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Par décroissance de S , pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$S(x+1) \leq S(x) \leq S(x-1)$$

puis

$$S(x+1) + S(x) \leq 2S(x) \leq S(x-1) + S(x)$$

ou encore

$$\frac{1}{x} \leq 2S(x) \leq \frac{1}{x-1}$$

On en déduit sans peine à l'aide du théorème des gendarmes que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Solution 42

1. Posons $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{1+nx}$. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n f_n(x)$ vérifie clairement (?) le critère spécial des séries alternées donc converge. S est donc bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Notons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f_k$. Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, +\infty[, |R_n(x)| \leq f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(a)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n+1}(a) = 0$ donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$ i.e. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n f_n$ converge uniformément vers S sur $[a, +\infty[$. Comme les f_n sont continues sur $[a, +\infty[$, S l'est également. D'après le caractère local de la continuité, S est continue sur \mathbb{R}_+^* .

2. On a montré que S convergeait uniformément sur $[1, +\infty[$ par exemple. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n f_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On peut donc appliquer le théorème de la double limite :

$$\lim_{+\infty} S = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} (-1)^n f_n = 1$$

3. Les f_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$ et montrons que la série $\sum (-1)^n f'_n(x)$ vérifie encore le critère des séries alternées. Tout d'abord,

$$f'_n(x) = -\frac{n}{(1+nx)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{nx^2}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = 0$. Ensuite, après calcul,

$$f'_{n+1}(x) - f'_n(x) = \frac{n(n+1)x^2 - 1}{(1+nx)^2(1+(n+1)x)^2}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n+1)x^2 = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de x !) tel que pour tout $n \geq N$, $f'_{n+1}(x) - f'_n(x) \geq 0$: la suite $(f'_n(x))$ est donc croissante à partir du rang N . On peut finalement appliquer le critère des séries alternées de sorte que $\sum (-1)^n f'_n$ converge.

Soit à nouveau $a \in \mathbb{R}_+^*$. Choisissons N tel que pour tout $n \geq N$, $n(n+1)a^2 \geq 1$. Alors pour tout $n \geq N$ et tout $x \geq a$, $n(n+1)x^2 \geq 1$ et la série $\sum (-1)^n f'_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées à partir du rang N . Notamment

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a, +\infty[, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f'_k(x) \right| \leq |f'_{n+1}(x)| = \frac{n+1}{(1+(n+1)x)^2} \leq \frac{n+1}{(1+(n+1)a)^2}$$

REMARQUE. Il est essentiel de remarquer que cette fois-ci, N ne dépend plus de x mais seulement de a .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{(1+(n+1)a)^2} = 0$, la série $\sum (-1)^n f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Comme $\sum f_n$ converge également simplement sur cet intervalle, S est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ et par suite sur \mathbb{R}_+^* .

Solution 43

1. Soit $x \in J$. Puisque $x > 0$, la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur J .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty, J} = \sup_{x \in J} \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum \|f_n\|_{\infty, J}$ diverge également. Autrement dit, $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

3. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur J , il suffit de montrer que la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur J . Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. D'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in J, |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Ainsi

$$\|R_n\|_{\infty, J} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, J} = 0$ i.e. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur J . Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur J .

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $J = [1, +\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n = 1$$

5. a. Il s'agit à nouveau du critère spécial des séries alternées.

b. Remarquons que

$$\forall x \in J, \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right)$$

De plus,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| = \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{\sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{(\sqrt{1+nx} + \sqrt{nx})\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in J, \left| \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{K}{x^{3/2}}$$

en posant $K = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. On en déduit bien que

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Solution 44

On notera $\|\cdot\|_\infty$ la norme uniforme sur $[0, 1]$.

1. Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Il est clair que $S(0) = S(1) = 0$. Soit $x \in]0, 1[$. La série $\sum (-1)^{n+1} x^{2n+2} = \sum (-x^2)^{n+1}$ est une série géométrique de raison $-x^2 \in]-1, 0[$ donc elle converge. De plus,

$$S(x) = \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^{n+1} = -\frac{x^2 \ln(x)}{1+x^2}$$

2. Notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ pour $x \in [0, 1]$. La suite de terme général $|u_n(x)|$ est monotone et de limite nulle (constamment nulle si $x = 0$ ou $x = 1$). D'après le critère spécial des séries alternées :

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$$

Une rapide étude de $|u_n| = -u_n$ sur $[0, 1]$ montre que $|u_n|$ admet un maximum en $\exp\left(\frac{-1}{2n+2}\right)$ et que $\|u_n\|_\infty = \frac{e^{-1}}{2n+2}$. Ainsi

$\|R_n\|_\infty \leq \frac{e^{-1}}{2n+4}$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty = 0$. Ceci prouve que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers S car elle converge simplement vers S et son reste converge uniformément vers la fonction nulle.

3. Les u_n sont continues sur $[0, 1]$ puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2n+2} \ln(x) = 0$. Comme $\sum u_n$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$, on peut procéder à une interversion série intégrale. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x^2 \ln(x)}{1+x^2} dx = - \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) dx = - \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x) dx = - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_{n-1}(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 x^{2n} \ln(x) dx$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 x^{2n} \ln(x) dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dx$$

Cette intégration par parties est légitime car

- $x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et \ln sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$ de dérivées respectives $x \mapsto x^{2n}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \ln(x) = 0$.

On peut rajouter que

$$\int_0^1 x^{2n} \ln(x) dx = -\frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dx = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit le résultat annoncé.

REMARQUE. On aurait pu utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour le calcul de l'intégrale mais ce n'était pas ce qui était suggéré par la question précédente.

Solution 45

On pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{\ln(nx)}$.

1. Soit $x \in]1, +\infty[$. La suite $(f_n(x))$ est décroissante et de limite nulle donc $\sum (-1)^{n-1} f_n(x)$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.
2. D'après la première question $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$. Notons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} f_k$. D'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [2, +\infty[, |R_n(x)| \leq f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(2)$$

On en déduit que $\|R_n\|_{\infty, [2, +\infty[} \leq f_{n+1}(2)$ puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, [2, +\infty[} = 0$. Ainsi (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[2, +\infty[$. On en déduit que $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{+\infty} f_n = 0$ donc

$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 0$$

Toujours d'après le critère des séries alternées,

$$\forall x \in]1, +\infty[, \left| f(x) - \frac{1}{\ln(x)} \right| = |R_1(x)| \leq f_2(x) \leq \frac{1}{\ln 2}$$

Notamment,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{\ln(x)} + \mathcal{O}(1)$$

A fortiori, $\lim_{1^+} f = +\infty$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, f'_n(x) = -\frac{1}{x \ln^2(nx)}$$

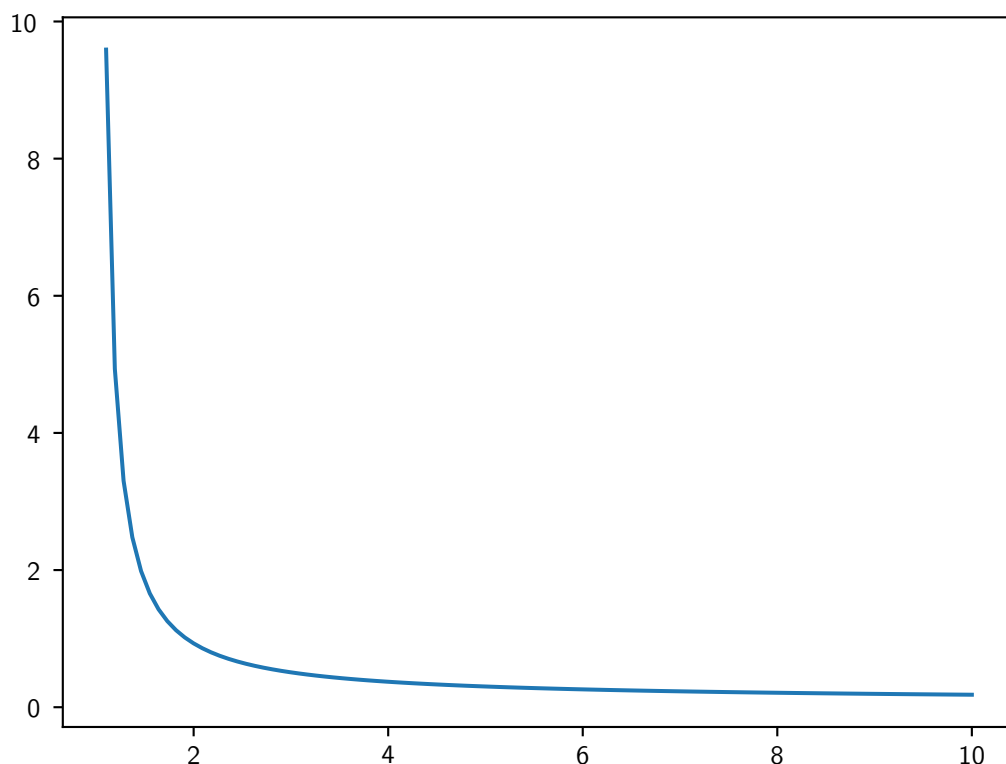
Si $x \in]1, +\infty[$, la suite $(f'_n(x))$ est croissante de limite nulle donc $\sum (-1)^{n-1} f'_n(x)$ converge i.e. $\sum (-1)^{n-1} f'_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$. On note alors $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} f'_k$. Fixons $a > 1$. Alors

$$\forall x \in [a, +\infty[, |r_n(x)| \leq |f'_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{a \ln^2(na)}$$

On en déduit à nouveau que (r_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$ et donc que $\sum (-1)^{n-1} f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Par théorème de transfert \mathcal{C}^1 , f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f'_n(x)$$

Toujours d'après le critère spécial des séries alternées, $f'(x)$ est du signe du premier terme de cette somme, à avoir du signe de $f'_1(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x} < 0$. La fonction f est donc décroissante sur $]1, +\infty[$.



Approximations

Solution 46

Remarquons déjà que, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b f(t)P(t) dt = 0$ pour toute fonction polynomiale P .

Le théorème de Weierstrass permet d'affirmer qu'il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t)^2 dt = \int_a^b f(t)(f(t) - P_n(t)) dt + \int_a^b f(t)P_n(t) dt = \int_a^b f(t)(f(t) - P_n(t)) dt$$

Comme f^2 est positive

$$\int_a^b f(t)^2 dt = \left| \int_a^b f(t)^2 dt \right| = \left| \int_a^b f(t)(f(t) - P_n(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \cdot |f(t) - P_n(t)| dt \leq \|f - P_n\|_\infty \int_a^b |f(t)| dt$$

Comme (P_n) converge uniformément vers f , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$ puis $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. Or f^2 est continue et positive sur $[a, b]$ donc elle y est nulle. f est donc également nulle sur $[a, b]$.

Solution 47

On notera $\|\cdot\|$ une norme sur E (peu importe laquelle, elles sont toutes équivalentes puisque E est de dimension finie).

- Il existe des réels a_0, \dots, a_n tels que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ et φ est constante sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$. Notons c_k la valeur de φ sur $]a_k, a_{k+1}[$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{i\lambda t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{i\lambda} (e^{i\lambda a_{k+1}} - e^{i\lambda a_k})$$

Puisque $x \mapsto e^{i\lambda x}$ est bornée, on en déduit sans peine que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) dt = 0$$

2. Il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. Posons $\Phi_n : \lambda \mapsto \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi_n(t) dt$ et

$F : \lambda \mapsto \int_a^b e^{i\lambda t} F(t) dt$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$|F(\lambda) - \Phi_n(\lambda)| \leq \int_a^b |e^{i\lambda t}| \cdot \|f(t) - \varphi_n(t)\| dt \leq (b-a)\|f - \varphi_n\|_\infty$$

et donc

$$\|F - \Phi_n\|_\infty \leq (b-a)\|f - \varphi_n\|_\infty$$

REMARQUE. La première norme uniforme est une norme uniforme sur \mathbb{R} tandis que la seconde est une norme uniforme sur $[a, b]$.

Puisque (φ_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, l'inégalité précédente montre que (Φ_n) converge uniformément vers F sur \mathbb{R} . D'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Phi_n(\lambda)$$

D'après la question précédente, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Phi_n(\lambda) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0$, ce qui répond à la question.

3. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \|f(t)\| dt$ et $\int_{-\infty}^0 \|f(t)\| dt$ convergent. Ainsi $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_b^{+\infty} \|f(t)\| dt = 0$ et $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^a \|f(t)\| dt = 0$. Il existe donc des réels a et b tels que $a < b$, $\int_b^{+\infty} \|f(t)\| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\int_{-\infty}^a \|f(t)\| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

D'après la question précédente, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$. Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit donc $\lambda \geq \lambda_0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt \right| &\leq \left| \int_{-\infty}^a e^{i\lambda t} f(t) dt \right| + \left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| + \left| \int_b^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^a \|f(t)\| dt + \frac{\varepsilon}{3} + \int_b^{+\infty} \|f(t)\| dt \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

Solution 48

Soit $g \in B$. Alors $|g(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [a, b]$ de sorte que

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)||g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Posons ensuite pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n : t \in [a, b] \mapsto \frac{nf(t)}{1 + n|f(t)|}$$

Il est clair que $|g_n(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [a, b]$ donc $g_n \in E$. De plus,

$$\forall t \in [a, b], 0 \leq |f(t)| - f(t)g_n(t) = \frac{|f(t)|}{1 + n|f(t)|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{|f(t)|}{\frac{1}{n} + |f(t)|} \leq \frac{1}{n}$$

Ceci prouve que la suite $(f g_n)$ converge uniformément vers $|f|$ sur $[a, b]$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)g_n(t) \, dt = \int_a^b |f(t)| \, dt$$

Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure,

$$\sup_{g \in B} \int_a^b f(t)g(t) \, dt = \int_a^b |f(t)| \, dt$$