

DEVOIR À LA MAISON N°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

1 Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + cy = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution d'où l'unicité de la solution $\varphi(f)$ de classe \mathcal{C}^1 sur I et vérifiant $\varphi(f)(0) = 0$. Remarquons qu'en posant $\psi(x) = \varphi(f)(x)e^{cx}$ pour $x \in I$, ψ est également de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall x \in I, \psi'(x) = e^{cx}(\varphi(f))'(x) + c\varphi(f)(x) = e^{cx}f(x)$$

De plus, $\psi(0) = 0$. Ainsi ψ est l'unique primitive de $x \mapsto e^{cx}f(x)$ s'annulant en 0. D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall x \in I, \psi(x) = \int_0^x e^{ct}f(t) dt$$

puis

$$\forall x \in I, \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct}f(t) dt$$

2 Soient $(f, g) \in \mathcal{C}^0(I)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= e^{-cx} \int_0^x e^{ct}(\lambda f + \mu g)(t) dt \\ &= e^{-cx} \int_0^x e^{ct}(\lambda f(t) + \mu g(t)) dt \\ &= \lambda e^{-cx} \int_0^x e^{ct}f(t) dt + \mu e^{-cx} \int_0^x e^{ct}g(t) dt \\ &= \lambda \varphi(f)(x) + \mu \varphi(g)(x) \\ &= (\lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g))(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$ et φ est bien linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$.

3 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $|f|$ et 1 pour le produit scalaire $(h, k) \mapsto \int_I hk$, on obtient :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b 1 dt} = \sqrt{b-a} \|f\|_2$$

De plus,

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b f(t)^2 dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty^2 dt = (b-a) \|f\|_\infty^2$$

donc

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_\infty$$

On peut donc poser $M_1 = \sqrt{b-a}$ et $M_2 = b-a$.

4 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.

$$\forall x \in I, |\varphi(f)(x)| = e^{-cx} \left| \int_0^x e^{ct} f(t) dt \right| \leq e^{-ca} \int_a^b e^{ct} |f(t)| dt \leq e^{-ca} \|f\|_\infty \int_a^b e^{ct} dt = e^{-ca} \frac{e^{cb} - e^{ca}}{c} \|f\|_\infty = \frac{e^{c(b-a)} - 1}{c} \|f\|_\infty$$

Par conséquent, $\|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty$ avec $M_0 = \frac{e^{c(b-a)} - 1}{c}$.

5 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.

$$\forall x \in I, |\varphi(f)(x)| = e^{-cx} \left| \int_0^x e^{ct} f(t) dt \right| \leq e^{-ca} \int_a^b e^{ct} |f(t)| dt \leq e^{-ca} \int_a^b e^{cb} |f(t)| dt = e^{c(b-a)} \|f\|_1$$

Il suffit donc de poser $A = e^{c(b-a)}$.

En intégrant que $[a, b]$, on obtient

$$\|\varphi(f)\|_1 \leq A(b-a) \|f\|_1$$

Il suffit donc de poser $C = A(b-a)$.

6 D'après les questions précédentes, il suffit de poser $B = AM_1$.

Alors

$$\forall x \in I, \varphi(f)(x)^2 \leq B^2 \|f\|_2^2$$

En intégrant sur $[a, b]$, on obtient,

$$\int_a^b \varphi(f)(x)^2 dx \leq (b-a) B^2 \|f\|_2^2$$

c'est-à-dire

$$\|\varphi(f)\|_2 \leq B\sqrt{b-a} \|f\|_2$$

Il suffit donc de poser $K = B\sqrt{b-a}$.

7 Par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, les questions précédentes assurent que l'endomorphisme φ est continu pour chacune des normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

8 Pour tout $x \in I$,

$$\varphi(f_\lambda)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f_\lambda(t) dt = e^{-cx} \int_0^x e^{(c-\lambda)t} dt = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda x} - e^{-cx}}{c - \lambda} & \text{si } c \neq \lambda \\ xe^{-cx} & \text{si } c = \lambda \end{cases}$$

9 D'après le cours, pour tout $a > 0$, $x \mapsto e^{-ax}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Notamment, f_λ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . De même, si $c \neq \lambda$, $\varphi(f_\lambda)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur \mathbb{R}_+ . Enfin, $x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $xe^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc f_c est aussi intégrable sur \mathbb{R}_+ .

De manière générale, pour $a > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$. Notamment, comme f_λ est positive sur \mathbb{R}_+ , $\|f_\lambda\|_1 = \frac{1}{\lambda}$. Remarquons que, si $\lambda \neq c$, $\varphi(f_\lambda)$ est encore positive (numérateur et dénominateur de même signe). On en déduit que

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1/\lambda - 1/c}{c - \lambda} = \frac{1}{\lambda c}$$

Enfin, f_c est encore positive sur \mathbb{R}_+ et, par intégration par parties,

$$\|\varphi(f_c)\|_1 = \int_0^{+\infty} xe^{-cx} dx = -\frac{1}{c} [xe^{-cx}]_0^{+\infty} + \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} e^{-cx} dx = \frac{1}{c^2}$$

On a donc $\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1}{\lambda c}$ de manière générale.

10 Les mêmes arguments permettent de prouver que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur \mathbb{R}_+ .

On trouve également comme à la question précédente que $\|f_\lambda\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ et que, lorsque $\lambda \neq c$,

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_2^2 = \frac{1}{(c-\lambda)^2} \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2c} - \frac{2}{\lambda+c} \right) = \frac{1}{2c\lambda(\lambda+c)}$$

donc $\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}}$. Par double intégration par parties, on obtient

$$\|\varphi(f_c)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2cx} dx = -\frac{1}{2c} [x^2 e^{-2cx}]_0^{+\infty} + \frac{1}{2c} \int_0^{+\infty} 2x e^{-2cx} dx = -\frac{1}{2c^2} [x e^{-2cx}]_0^{+\infty} + \frac{1}{2c^2} \int_0^{+\infty} e^{-2cx} dx = \frac{1}{4c^3}$$

de sorte que $\|\varphi(f_c)\|_2 = \frac{1}{2\sqrt{c^3}}$. On a donc $\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}}$ de manière générale.

11 Soit $f \in L^1(I)$.

$$\forall x \in I, |\varphi(f)(x)| = e^{-cx} \left| \int_0^x e^{-ct} f(t) dt \right| \leq e^{-cx} \int_0^x e^{-ct} |f(t)| dt \leq e^{-cx} \int_0^{+\infty} |f(t)| dt = e^{-cx} \|f\|_1$$

En intégrant sur \mathbb{R}_+ , on obtient que $\varphi(f) \in L^1(I)$ et

$$\|\varphi(f)\|_1 \leq \frac{1}{c} \|f\|_1$$

Par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, φ est un endomorphisme continu de $L^1(I)$.

De plus, $\|\varphi\| \leq \frac{1}{c}$. Par ailleurs, pour tout $\lambda > 0$,

$$\|\varphi\| \geq \frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_1}{\|f_\lambda\|_1} = \frac{1}{c}$$

donc $\|\varphi\| = \frac{1}{c}$.

12 Fixons $X > 0$. Par définition de φ , $f = g' + cg$ puis $g'g + cg^2 = fg$ en intégrant sur le segment $[0, X]$, on obtient

$$\int_0^X g'(t)g(t) dt + c \int_0^X g(t)^2 dt = \int_0^X f(t)g(t) dt$$

On remarque que $\frac{1}{2}g^2$ est la primitive de gg' nulle en 0 donc

$$\frac{g(X)^2}{2} + c \int_0^X g(t)^2 dt = \int_0^X f(t)g(t) dt$$

Comme $g(X)^2 \geq 0$,

$$c \int_0^X g(t)^2 dt \leq \int_0^X f(t)g(t) dt$$

puis, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$c \int_0^X g(t)^2 dt \leq \sqrt{\int_0^X f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^X g(t)^2 dt}$$

Si $\int_0^X g(t)^2 dt \neq 0$, on obtient en divisant par $\sqrt{\int_0^X g(t)^2 dt}$:

$$c \sqrt{\int_0^X g(t)^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^X f(t)^2 dt}$$

Mais cette inégalité est encore évidemment valide si $\int_0^X g(t)^2 dt = 0$. A fortiori, comme f^2 est positive,

$$\sqrt{\int_0^X g(t)^2 dt} \leq \frac{1}{c} \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt} = \frac{1}{c} \|f\|_2$$

Mais comme g^2 est positive, la fonction $X \mapsto \sqrt{\int_0^X g(t)^2 dt}$ est croissante. De plus, elle est majorée par $\frac{1}{c}\|f\|_2$ donc elle admet une limite en $+\infty$. Ceci signifie que $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$ converge i.e. $g = \varphi(f) \in L^2(I)$. De plus, $\|\varphi(f)\|_2 \leq \frac{1}{c}\|f\|_2$. Ainsi φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$ par caractérisation de la continuité des applications linéaires. On peut ajouter que $\|\varphi\| \leq \frac{1}{c}$. Mais pour tout $\lambda > 0$,

$$\|\varphi\| \geq \frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}} = \frac{1}{c(\lambda+c)}$$

Passant à la limite lorsque λ tend vers 0^+ , on obtient $\|\varphi\| \geq \frac{1}{c}$. Finalement, $\|\varphi\| = \frac{1}{c}$.

13 **13.a** Soit $(f, g) \in H(I)^2$. On sait que $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$. Or f^2 et g^2 sont intégrables sur I donc fg l'est également. Pour la même raison, $f'g'$ est intégrable sur I .

13.b L'application ϕ est clairement symétrique. La bilinéarité de ϕ provient de la linéarité de l'intégrale et de la dérivation. Enfin, si f vérifie $\phi(f, f) = 0$, alors $\int_I f^2 + \int_I (f')^2 = 0$. Comme il s'agit d'une somme de deux termes positifs, $\int_I f^2 = \int_I (f')^2 = 0$. Notamment, $\|f\|_2 = 0$ donc $f = 0$. On a bien vérifié que ϕ était un produit scalaire.

13.c $\|\cdot\|_H$ est tout simplement la norme euclidienne associée au produit scalaire ϕ .

14 **14.a** Soit $f \in L^2(I)$. On a supposé que φ était un endomorphisme de $L^2(I)$ donc $\varphi(f) \in L^2(I)$. Par conséquent $\varphi(f)' = f - c\varphi(f) \in L^2(I)$.

Ainsi $\varphi(f) \in L^2(I)$ et $\varphi(f)' \in L^2(I)$ donc $\varphi(f) \in H(I)$. De plus, $\varphi(f)(0) = 0$ par définition donc $\varphi(f) \in K$.

Enfin, remarquons que

$$\forall g \in H(I), \|g\|_H^2 = \|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2$$

On a supposé que φ était continu pour la norme $\|\cdot\|_2$. On peut donc poser $N = \|\Phi\|$. D'après la remarque précédente,

$$\|\varphi(f)\|_H^2 = \|\varphi(f)\|_2^2 + \|\varphi(f)'\|_2^2$$

Tout d'abord, $\|\varphi(f)\|_2 \leq N\|f\|_2$. De plus, on rappelle que $\varphi(f)' + c\varphi(f) = f$ de sorte que, par inégalité triangulaire,

$$\|\varphi(f)'\|_2 = \|f - c\varphi(f)\|_2 \leq \|f\|_2 + c\|\varphi(f)\|_2 \leq (1 + Nc)\|f\|_2$$

Finalement,

$$\|\varphi(f)\|_H^2 \leq (N^2 + (1 + Nc)^2)\|f\|_2^2$$

En posant $A = \sqrt{N^2 + (1 + Nc)^2}$, on a bien le résultat voulu.

14.b On a vérifié à la question précédente que φ était bien une application linéaire de $L^2(I)$ dans \mathbb{K} .

Soit $f \in \text{Ker } \varphi$. Alors $\varphi(f) = 0$ puis $f = \varphi(f)' + c\varphi(f) = 0$. Ainsi $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ et φ est injective.

Soit $g \in K$. Posons $f = g' + cg$. Puisque g et g' appartiennent à $L^2(I)$, f également. De plus, g est solution de l'équation différentielle $y' + cy = 0$ et vérifie la condition initiale $g(0) = 0$. Par unicité de la solution à un problème de Cauchy, $g = \varphi(f)$ et φ est surjective.

On peut donc conclure que φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K .

14.c Il suffit d'utiliser la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

14.d Soit $g \in K$. Posons $f = \varphi^{-1}(g)$. Alors $g = \varphi(f)$ de sorte que $f = g' + cg$. Par inégalité triangulaire,

$$\|f\|_2 = \|g' + cg\|_2 \leq \|g'\|_2 + c\|g\|_2$$

Mais comme $\|g\|_H^2 = \|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2$, on a clairement $\|g\|_2 \leq \|g\|_H$ et $\|g'\|_2 \leq \|g\|_H$. Ainsi

$$\|\varphi^{-1}(g)\|_2 = \|f\|_2 \leq (1 + c)\|g\|_H$$

A nouveau, φ^{-1} est continue par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.