

NOM :

Prénom :

Note :

1. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Montrer que $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$ puis que $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$.

Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned}
 x &\in \text{Ker}(u^*) \\
 \iff u^*(x) &= 0_E \\
 \iff \forall y \in E, \langle u^*(x), y \rangle &= 0 \\
 \iff \forall y \in E, \langle x, u(y) \rangle &= 0 \\
 \iff \forall z \in \text{Im}(u), \langle x, z \rangle &= 0 \\
 \iff x &\in \text{Im}(u)^\perp
 \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$. En appliquant cette égalité à u^* , on obtient $\text{Ker}((u^*)^*) = \text{Im}(u^*)^\perp$ i.e. $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u^*)^\perp$. Or E est de dimension finie donc $\text{Ker}(u)^\perp = (\text{Im}(u^*)^\perp)^\perp = \text{Im}(u^*)$. ■

2. On munit \mathbb{R}^3 de son produit scalaire usuel. On note s la réflexion par rapport au plan P d'équation $x + y + z = 0$. Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

Notons que $a = (1, 1, 1)$ est un vecteur normal à P . Ainsi le projeté orthogonal d'un vecteur u sur P^\perp est $v = \frac{\langle u, a \rangle}{\|a\|^2} a = \frac{1}{3} \langle u, a \rangle a$ puis $s(u) = u - 2v$. En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , on trouve alors

$$\begin{aligned}
 s(e_1) &= e_1 - \frac{2}{3} \langle e_1, a \rangle a = \frac{1}{3} (1, -2, -2) \\
 s(e_2) &= e_2 - \frac{2}{3} \langle e_2, a \rangle a = \frac{1}{3} (-2, 1, -2) \\
 s(e_3) &= e_3 - \frac{2}{3} \langle e_3, a \rangle a = \frac{1}{3} (-2, -2, 1)
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. ■

3. On se donne deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Etablir que ces deux matrices sont semblables en utilisant l'endomorphisme u associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E .

Comme la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est A , on a $u(e_1) = e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = e_1 + e_3$ et $u(e_3) = e_1$. La matrice de u dans la base (e_2, e_1, e_3) est donc B . On en déduit que A et B sont semblables. ■

4. L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x^2(1 - x^2)\}$ est-il une partie compacte de \mathbb{R}^2 ?

L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 - x^2(1 - x^2)$ est polynomiale donc continue. Ainsi A est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f . Soit $(x, y) \in A$. Alors $x^2(1 - x^2) = y^2 \geq 0$ donc $x^2 \in [0, 1]$ i.e. $x \in [-1, 1]$. De plus, $y^2 = x^2(1 - x^2) \leq 1$ donc $y \in [-1, 1]$.

Finalement $A \subset [-1, 1]^2$ donc A est borné.

Comme \mathbb{R}^2 est de dimension finie, A est compact comme fermé borné de \mathbb{R}^2 . ■