Réduction géométrique

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Solution 1

Puisque A et B sont semblables, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $PA = BP$. On peut poser $P = Q + iR$ avec $(Q, R) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Puisque A et B sont réelles, on obtient $QA = BQ$ et $RA = BR$ par passage aux parties réelle et imaginaire.
Posons $D(\lambda) = \det(P + \lambda Q)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Puisque le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, D est une fonction polynomiale. Puisque $D(i) \neq 0$, D n'est pas constamment nulle sur $\mathbb{C}$. Elle ne peut pas être constamment nulle sur $\mathbb{R}$ car elle serait alors nulle sur $\mathbb{C}$ puisque $\mathbb{R}$ est infini.
Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $D(\lambda) \neq 0$. Alors $S = Q + \lambda R$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est inversible et $SA = BS$, ce qui prouve que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Solution 2

Considérons les matrices

$$L = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline -CA^{-1} & I_q \end{array}\right) \text{ et } R = \left(\begin{array}{c|c} I_p & -A^{-1}B \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$$

On constate que $LMR = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right)$. Comme $\det(L) = \det(R) = 1$, L et R sont inversibles et $\operatorname{rg}(LMR) = \operatorname{rg}(M)$. Notons $r = \operatorname{rg} S$. On sait alors qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ et $Q \in GL_q(\mathbb{R})$ tels que $PSQ = J_r$ où J_r est la matrice diagonale de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ dont les r premiers coefficients diagonaux valent 1 et les autres sont nuls. En posant

$$L' = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) \text{ et } R' = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$$

on a $L'LMRR' = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & J_r \end{array}\right)$. A nouveau comme L′ et R′ sont inversibles (déterminant non nuls), $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(L'LMRR') = p + r$. Comme A est inversible, $\operatorname{rg}(A) = p$, ce qui conclut.

Solution 3

1. Posons $L : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g$ et $R : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto g \circ f$. Alors $\Phi = L - R$. De plus, L et R sont des endomorphismes de E qui commutent. En effet, pour tout $g \in E$, $L \circ R(g) = R \circ L(g) = f \circ g \circ f$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\Phi^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} L^{p-k} \circ R^k$$

On en déduit que pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$,

$$\Phi^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$$

Dans la formule écrite au rang $p = 2n - 1$, pour $0 \leq k \leq p$, on a soit $k \geq n$, soit $p - k \geq n$ donc tous les termes de la somme précédente sont nuls. Φ est donc nilpotent d'indice inférieur ou égal à $2n - 1$.

2. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} a$. a induit un isomorphisme $\tilde{a}$ de S sur $\operatorname{Im} a$. Soit T un supplémentaire de $\operatorname{Im} a$. On pose $b(x) = \tilde{a}^{-1}(x)$ pour $x \in \operatorname{Im} a$ et $b(y) = 0$ pour $y \in T$. Ainsi on a bien $a \circ b \circ a = a$.

> **Remarque.** On peut aussi raisonner matriciellement. Notons A la matrice de a dans une base de E. On sait qu'il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ tel que $A = PJ_rQ$ où $n = \dim E$, $r = \operatorname{rg}(A)$ et $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $J_r^2 = J_r$, on obtient $ABA = A$ en posant $B = Q^{-1}J_rP^{-1}$. Il suffit de prendre pour b l'endomorphisme de E dont la matrice est B dans la base précédente.

Montrons que Φ est d'ordre $2n-1$ exactement. Pour $p=2n-2$ et $0 \leq k \leq p$, on a soit $k \leq n$, soit $p-k \leq n$ sauf pour $k=n-1$. Ainsi

$$\Phi^{2n-2}(g) = (-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1} f^{n-1} \circ g \circ f^{n-1}$$

D'après ce qui précéde, il existe $g_0 \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^{n-1} \circ g_0 \circ f^{n-1} = f^{n-1}.$$

Par conséquent, $\Phi^{2n-2}(g_0) = f^{n-1} \neq 0$.

Solution 4

Puisque $\operatorname{Im} p_k \subset E$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^n \operatorname{Im} p_k \subset E$. De plus, $E = \operatorname{Im} \operatorname{Id}_E = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n p_k\right) \subset \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} p_k$. Par double inclusion, $\sum_{k=1}^n \operatorname{Im} p_k = E$.

Montrons maintenant que la somme est directe. Les p_k étant des projecteurs, $\operatorname{rg} p_k = \operatorname{tr}(p_k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. De plus, $\sum_{k=1}^n p_k = \operatorname{Id}_E$ donc, par linéarité de la trace $\sum_{k=1}^n \operatorname{tr}(p_k) = \operatorname{tr}(\operatorname{Id}_E)$ ou encore $\sum_{k=1}^n \operatorname{rg}(p_k) = \dim E$. C'est donc que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p_1, \dots, \operatorname{Im} p_n$ sont en somme directe.

Solution 5

1. On peut prouver facilement que E, F, G, H sont stables par combinaison linéaire mais on peut également déterminer des parties génératrices de E, F, G, H.
   $E = \operatorname{vect}((1)_{n\in\mathbb{N}})$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   $F = \operatorname{vect}(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   $G = \operatorname{vect}\left(\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Une suite constante est clairement 4-périodique donc $E \subset H$.
   Soit $(u_n) \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} = u_n$ donc (u_n) est 2-périodique et a fortiori 4 périodique. Ainsi $F \subset H$.
   Soit $(u_n) \in G$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = -u_{n+2} = u_n$ donc (u_n) est 4-périodique. Ainsi $G \subset H$.

3. Soit $((u_n),(v_n),(w_n)) \in E \times F \times G$ tel que $(u_n)+(v_n)+(w_n) = (0)$. On a ainsi

   - $u_n + v_n + w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
   - $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = 0$ i.e. $u_n - v_n + w_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
   - $u_{n+2} + v_{n+2} + w_{n+2} = 0$ i.e. $u_n + v_n - w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - $u_{n+3} + v_{n+3} + w_{n+3} = 0$ i.e. $u_n - v_n - w_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   En additionnant d'une part la première et la troisième égalité et d'autre part la seconde et la quatrième égalité, on obtient $u_n + v_n = 0$ et $u_n - v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $u_n = w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que $w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. E, F, G sont bien en somme directe. On aurait pu utiliser les suites engendrant E, F, G pour arriver au même résultat.
   Puisque E, F, G sont inclus dans H, alors $E + F + G \subset H$. Soit maintenant $(z_n) \in H$.
   Analyse : On suppose qu'il existe $((u_n),(v_n),(w_n)) \in E \times F \times G$ tel que $z_n = u_n + v_n + w_n$. En particulier,

$$\begin{cases} u_0 + v_0 + w_0 = z_0 \\ u_0 - v_0 + w_1 = z_1 \\ u_0 + v_0 - w_0 = z_2 \\ u_0 - v_0 - w_1 = z_3 \end{cases}$$

On trouve aisément

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{z_0+z_1+z_2+z_3}{4} \\ v_0 = \dfrac{z_0-z_1+z_2-z_3}{4} \\ w_0 = \dfrac{z_0-z_2}{2} \\ w_1 = \dfrac{z_1-z_3}{2} \end{cases}$$

Synthèse : Soit

- (u_n) la suite constante égale à $\dfrac{z_0+z_1+z_2+z_3}{4}$
- (v_n) la suite de premier terme $v_0 = \dfrac{z_0-z_1+z_2-z_3}{4}$ et vérifiant $v_{n+1}+v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (w_n) la suite de premiers termes $w_0 = \dfrac{z_0-z_2}{2}$ et $w_1 = \dfrac{z_1-z_3}{2}$ vérifiant $w_{n+2}+w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vérifie alors que

$$\begin{cases} u_0+v_0+w_0 = z_0 \\ u_1+v_1+w_1 = z_1 \\ u_2+v_2+w_2 = z_2 \\ u_3+v_3+w_3 = z_3 \end{cases}$$

Puisque $(u_n), (v_n), (w_n)$ et (z_n) sont 4-périodiques, on peut affirmer que $u_n+v_n+w_n = z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $(z_n) = (u_n)+(v_n)+(w_n)$. Ainsi $\mathrm{H} \subset \mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}$.
Par double inclusion, $\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G} = \mathrm{H}$ et $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ étant en somme directe, $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{H}$.

Solution 6

1. On a $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\mathrm{B} & a_{12}\mathrm{B} \\ \hline a_{21}\mathrm{B} & a_{22}\mathrm{B} \end{array}\right)$ et $\mathrm{C} \otimes \mathrm{D} = \left(\begin{array}{c|c} c_{11}\mathrm{D} & c_{12}\mathrm{D} \\ \hline c_{21}\mathrm{D} & c_{22}\mathrm{D} \end{array}\right)$. Un calcul par blocs donne

$$(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}).(\mathrm{C} \otimes \mathrm{D}) = \left(\begin{array}{c|c} (a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21})\mathrm{BD} & (a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22})\mathrm{BD} \\ \hline (a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21})\mathrm{BD} & (a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22})\mathrm{BD} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} ac_{11}\mathrm{BD} & ac_{12}\mathrm{BD} \\ \hline ac_{21}\mathrm{BD} & ac_{22}\mathrm{BD} \end{array}\right) = (\mathrm{AC}) \otimes (\mathrm{BD})$$

en notant ac_{ij} le coefficient en position (i, j) de la matrice AC.

2. $\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & 0_2 \\ \hline 0_2 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ donc $\det(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{B}) = (\det \mathrm{B})^2$.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à $\mathrm{A} \otimes \mathrm{I}_2$. Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{C}^4$. Alors la matrice de u dans la base (e_1, e_3, e_2, e_4) est $\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{A}$. On a donc $\det(\mathrm{A} \otimes \mathrm{I}_2) = \det u = \det(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{A}) = (\det \mathrm{A})^2$ d'après ce qui précède.
D'après la première question, $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = (\mathrm{A} \otimes \mathrm{I}_2).(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{B})$. Ainsi $\det(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) = (\det \mathrm{A})^2(\det \mathrm{B})^2$.

3. Puisqu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, d'après la question précédente, $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est inversible si et seulement si A et B le sont. Dans ce cas, on a d'après la première question

$$(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}).(\mathrm{A}^{-1} \otimes \mathrm{B}^{-1}) = (\mathrm{AA}^{-1}) \otimes (\mathrm{BB}^{-1}) = \mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_4$$

Solution 7

Remarquons que

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & -\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{S} \end{array}\right)$$

En passant aux déterminants, on obtient

$$\det(\mathrm{M}) \cdot \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & -\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_q \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{S} \end{array}\right|$$

Il ne s'agit plus que de déterminants triangulaires par blocs :

$$\det(\mathrm{M})\det(\mathrm{I}_p)\det(\mathrm{I}_q) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{S})$$

et finalement $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{S})$.

Solution 8

---

1. Si $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{AM} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus $\mathrm{A}(\lambda\mathrm{M} + \mu\mathrm{N}) = \lambda\mathrm{AM} + \mu\mathrm{AN}$.

2. Notons classiquement $(\mathrm{E}_{11}, \mathrm{E}_{12}, \mathrm{E}_{21}, \mathrm{E}_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$m(\mathrm{E}_{11}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{11}\mathrm{E}_{11} + a_{21}\mathrm{E}_{21} \qquad m(\mathrm{E}_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\mathrm{E}_{12} + a_{21}\mathrm{E}_{22}$$

$$m(\mathrm{E}_{21}) = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}\mathrm{E}_{11} + a_{22}\mathrm{E}_{21} \qquad m(\mathrm{E}_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}\mathrm{E}_{12} + a_{22}\mathrm{E}_{22}$$

Ainsi la matrice de m_A dans la base $(\mathrm{E}_{11}, \mathrm{E}_{21}, \mathrm{E}_{12}, \mathrm{E}_{22})$ (attention à l'ordre !) est la matrice définie par blocs $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0_n \\ \hline 0_n & \mathrm{A} \end{array}\right)$. On a donc $\det(m_\mathrm{A}) = (\det \mathrm{A})^2$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note à nouveau $m_\mathrm{A} : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AM} \end{cases}$. m_A est encore un endomorphisme. On note $(\mathrm{E}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Remarquons que $\mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{kl} = \delta_{jk}\mathrm{E}_{il}$. On a alors

$$m_\mathrm{A}(\mathrm{E}_{ij}) = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{kl}\mathrm{E}_{kl}\mathrm{E}_{ij} = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{kl}\delta_{li}\mathrm{E}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathrm{E}_{kj}$$

La matrice de m_A dans la base $(\mathrm{E}_{11}, \mathrm{E}_{21}, \dots, \mathrm{E}_{n1}, \mathrm{E}_{12}, \mathrm{E}_{22}, \dots, \mathrm{E}_{2n}, \dots, \mathrm{E}_{n1}, \mathrm{E}_{n2}, \dots, \mathrm{E}_{nn})$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont tous égaux à A. On en déduit que $\det(m_\mathrm{A}) = (\det \mathrm{A})^n$.

Eléments propres

Solution 9

- Supposons $\lambda = 0$. Alors $\mathrm{Ker}(g \circ f) \neq \{0_\mathrm{E}\}$ et donc $g \circ f$ est non inversible. Ainsi $\det(g \circ f) = 0$. Mais alors

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(g \circ f) = 0$$

Donc $f \circ g$ est non inversible i.e. 0 est valeur propre de $f \circ g$.

- Supposons $\lambda \neq 0$. Alors il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que $g \circ f(x) = \lambda x$. Par conséquent, $f \circ g \circ f(x) = \lambda f(x)$. On ne peut avoir $f(x) = 0_\mathrm{E}$ sinon on aurait $g \circ f(x) = \lambda x = 0_\mathrm{E}$, ce qui est impossible puisque $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_\mathrm{E}$. Ainsi $f(x)$ est un vecteur propre de $f \circ g$ associée à la valeur propre λ.

Solution 10

Rappelons que tout endomorphisme d'un espace vectoriel *complexe* de dimension finie possède au moins une valeur propre (son polynôme caractéristique admet au moins une racine complexe) et donc également un vecteur propre.

1. On propose deux méthodes.
Première méthode.
    - Si v possède une valeur propre λ non nulle, notons x un vecteur propre associé. Alors $v(x) = \lambda x$ et $u \circ v(x) = \lambda u(x) = 0_\mathrm{E}$ puis $u(x) = 0_\mathrm{E}$ car $\lambda \neq 0$. Ainsi x est un vecteur propre de u pour la valeur propre 0. u et v ont bien un vecteur propre commun.

- Si $v = 0$, alors tout vecteur propre de x est un vecteur propre de v pour la valeur propre 0. A nouveau, u et v ont bien un vecteur propre commun.
- Si $v \neq 0$ et v possède 0 pour unique valeur propre, alors v est nilpotent. En effet, v est trigonalisable puisque E est un espace vectoriel complexe. De plus, son indice de nilpotence p vérifie $p \geq 2$ puisque $v \neq 0$. Il existe donc $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = v^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Puisque $p \geq 2$, on peut écrire $u \circ v^{p-1} = u \circ v \circ v^{p-2} = 0$. Alors $u(y) = u \circ v^{p-1}(x) = 0$ et $v(y) = v^p(y) = 0_{\mathrm{E}}$ donc y est un vecteur propre commun de u et v pour la valeur propre 0.

Deuxième méthode. Si $v = 0$, on conclut comme dans la méthode précédente. Sinon, $\operatorname{Im} v \neq 0$ est stable par v. L'endomorphisme de $\operatorname{Im} v$ induit par v possède donc un vecteur propre y associé à une valeur propre λ. Mais comme $u \circ v = 0$, u est nul sur $\operatorname{Im} v$. Ainsi y est un vecteur propre commun de u et v (respectivement associé aux valeurs propres 0 et λ).

2. On remarque que $u \circ (v - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = 0$. D'après la première question, u et $v - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ ont un vecteur propre commun, qui est également un vecteur propre commun de u et v.

3. On remarque que $(u - b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ v = 0$. D'après la première question, $u - b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et v ont un vecteur propre commun, qui est également un vecteur propre commun de u et v.

4. Comme $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, u et v sont inversibles. Notons λ une valeur propre de v et x un vecteur propre associé. Alors $v(x) = \lambda x$ puis $x = \lambda v^{-1}(x)$. Notamment $\lambda \neq 0$ car $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ (on peut aussi arguer du fait que v est inversible de sorte que $0 \notin \operatorname{Sp}(v)$) puis $f(x) = v^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$. Ainsi x est un vecteur propre commun de u et v.

5. Si $a = 0$ ou $b = 0$, il suffit d'appliquer une des questions précédentes. Supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Remarquons alors que

$$(u - b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ (v - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = ab\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$

ou encore

$$\frac{1}{a}(u - b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ \frac{1}{b}(v - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$

D'après la question précédente, $\frac{1}{a}(u - b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\frac{1}{b}(v - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ possèdent un vecteur propre commun. On vérifie sans peine que x est également un vecteur propre commun de u et v.

Solution 11

Soient λ une valeur propre de $u \circ v$ et x un vecteur propre associé à cette valeur propre.

- Si $\lambda \neq 0$, alors $v(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ sinon $u \circ v(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et donc $\lambda x = 0_{\mathrm{E}}$, ce qui est impossible puisque $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_{\mathrm{E}}$. De plus, $v \circ u \circ v(x) = \lambda v(x)$ et λ est donc une valeur propre de λ de u.
- Si $\lambda = 0$, alors $u \circ v$ n'est pas inversible, d'où $\det(u \circ v) = 0$. De plus, $\det(v \circ u) = \det(v)\det(u) = \det(u)\det(v) = \det(u \circ v) = 0$. Ainsi, $v \circ u$ n'est pas inversible i.e. 0 est valeur propre de $v \circ u$.

On a montré que toute valeur propre de $u \circ v$ est une valeur propre de $v \circ u$. La réciproque se montre de manière symétrique.

Solution 12

Soient λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé dont on note x_j les composantes. On a donc pour $1 \leq i \leq n$:

$$(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j$$

Choisissons un indice i pour lequel $|x_i|$ est maximal. En particulier, $x_i \neq 0$ car X est non nul (c'est un vecteur propre). Ainsi

$$\begin{aligned}
|\lambda - a_{i,i}| &= \left|\sum_{j \neq i} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}\right| \\
&\leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \frac{|x_j|}{|x_i|} && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| = \mathrm{R}_i && \text{car } |x_j| \leq |x_i| \text{ pour } 1 \leq j \leq n
\end{aligned}$$

Ceci signifie bien que $\lambda \in \mathrm{D}_i$.

Solution 13

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul. Posons $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ avec $n = \deg \mathrm{P}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$. Alors $\varphi(\mathrm{P}) = \lambda \mathrm{P}$ si et seulement si $\lambda a_k = k a_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Puisque $a_n \neq 0$, ceci équivaut à $\lambda = n$ et $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.
Ainsi les valeurs propres de φ sont les entiers naturels et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}_n(\varphi) = \mathrm{vect}(\mathrm{X}^n)$.

Solution 14

1. T est linéaire par linéarité d l'intégrale.
   Soit $f \in \mathrm{E}$. Alors $x \mapsto \int_0^x f(t)e^t \, \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme primitive de la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ $t \mapsto f(t)e^t$. Enfin, $\mathrm{T}(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$.

2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$ tels que $\mathrm{T}(f) = \lambda f$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x)e^x = \int_0^x f(t)e^t \, \mathrm{d}t$ ou encore $\lambda g(x) = \int_0^x g(t) \, \mathrm{d}t$ en posant $g(x) = f(x)e^x$.
   Si $\lambda = 0$, alors $\int_0^x g(t)e^t \, \mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant, on obtient $g = 0$ puis $f = 0$, ce qui prouve que 0 n'est pas valeur propre de T.
   Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $g(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x g(t) \, \mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que g est dérivable. On remarque également que $g(0) = 0$.
   En dérivant, on obtient $g'(x) = \frac{1}{\lambda} g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par unicité de la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{\lambda} y \\ y(0) = 0 \end{cases}$, g est nulle et f également de sorte que λ n'est pas valeur propre de f.
   Finalement, T n'admet aucune valeur propre.

Solution 15

1. La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et nulle en 0, elle admet une limite finie en 0 à savoir $f'(0)$. Cette fonction est donc prolongeable par continuité en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, ce qui justifie la définition de l'intégrale $\int_0^x \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2. La linéarité de Φ provient de la linéarité de l'intégrale.
   Soit $f \in \mathrm{E}$. Il est clair que $\Phi(f)(0) = 0$ et $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ en tant que primitive d'une fonction continue, à savoir $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ prolongée par continuité en 0. Ainsi $\Phi(f) \in \mathrm{E}$.

3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$ tels que $\Phi(f) = \lambda f$. Alors $\Phi(f)' = \lambda f'$ et donc $f(x) = \lambda x f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
   Si $\lambda = 0$, alors $f = 0$ de sorte que 0 n'est pas une valeur propre de Φ. Supposons donc $\lambda \neq 0$. Ainsi $f'(x) = \frac{f(x)}{\lambda x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   On en déduit qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \mathrm{A} x^{\frac{1}{\lambda}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $f'(x) = \frac{\mathrm{A}}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda} - 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc f' admet une limite finie en 0. Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, alors nécessairement $\mathrm{A} = 0$ de sorte que $f = 0$. Dans ce cas, λ n'est pas une valeur propre de Φ.
   Réciproquement soit $\lambda \in]0, 1]$ et posons $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. On vérifie que f_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
   $$\mathrm{T}(f_\lambda)(x) = \int_0^x \frac{f_\lambda(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \int_0^x t^{\frac{1}{\lambda} - 1} \, \mathrm{d}t = \left[\lambda t^{\frac{1}{\lambda}} \right]_0^x = \lambda f_\lambda(x)$$
   Ainsi λ est bien valeur propre de Φ et f_λ est un vecteur propre associé.
   Finalement, λ est valeur propre de Φ si et seulement si $\lambda \in]0, 1]$ et, dans ce cas, $\mathrm{E}_\lambda(\Phi) = \mathrm{vect}(f_\lambda)$.

Solution 16

1. Tout d'abord, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de application continue f. On en déduit que $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable en 0 en tant que primitive de application continue f et sa dérivée en 0 vaut donc $f(0)$. On en déduit que
$$\lim_{x\to 0} \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$
ce qui prouve que $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est prolongeable en 0 en une application continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. La linéarité de T provient de la linéarité de l'intégrale. La question précédente montre que si $f \in \mathrm{E}$, alors $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$.

3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$ tels que $\mathrm{T}(f) = \lambda f$.
Si $\lambda = 0$, alors $\mathrm{T}(f) = 0$ d'où $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. En dérivant, f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Finalement, f est nulle sur $\mathbb{R}_+$ car f est continue en 0 ou bien car $f(0) = \mathrm{T}(f)(0) = 0$. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de T.
Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $f = \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)$. Puisque $\mathrm{T}(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f l'est également. De plus, $\lambda x f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ donc, en dérivant, $f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \mathrm{A}x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, f n'admet une limite finie en 0 que si $\mathrm{A} = 0$ de sorte que f est nulle. Dans ce cas, λ n'est pas valeur propre de f.
Réciproquement, soit $\lambda \in]0, 1]$ et posons $f_\lambda : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On vérifie que f_λ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$\mathrm{T}(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\lambda t^{\frac{1}{\lambda}}\right]_0^x = \lambda x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \lambda f_\lambda(x)$$
Cette égalité est encore valable pour $x = 0$ par continuité de f_λ et $\mathrm{T}(f_\lambda)$ en 0 de sorte que $\mathrm{T}(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$.
Finalement, λ est valeur propre de T si et seulement si $\lambda \in]0, 1]$ et, dans ce cas, $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{T}) = \mathrm{vect}(f_\lambda)$.

Solution 17

1. En posant $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$ de sorte que $1 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ et V un vecteur propre associé. Alors
$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^n \mathrm{A}_{i,j}\mathrm{V}_j = \lambda \mathrm{V}_i$$
Notons i_0 l'indice d'un coefficient de V de module maximal. Par inégalité triangulaire
$$|\lambda||\mathrm{V}_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^n \mathrm{A}_{i_0,j}\mathrm{V}_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |\mathrm{A}_{i_0,j}\mathrm{V}_j|$$
Mais les $\mathrm{A}_{i_0,j}$ sont des réels positifs et $|\mathrm{V}_j| \leq |\mathrm{V}_{i_0}|$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ de sorte que
$$|\lambda||\mathrm{V}_{i_0}| \leq |\mathrm{V}_{i_0}| \sum_{j=1}^n \mathrm{A}_{i_0,j} = |\mathrm{V}_{i_0}|$$
Enfin, $|\mathrm{V}_{i_0}| = \|\mathrm{V}\|_\infty > 0$ car, sinon, V serait nul. On en déduit que $|\lambda| < 1$.

Solution 18

1. Φ est linéaire par linéarité de l'intégration. Soit $f \in \mathrm{E}$. Par la relation de Chasles

$$\forall x \in [0,1],\ \Phi(f)(x) = \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t - x\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, $\Phi(f)$ est donc dérivable et a fortiori continue. Ainsi $\Phi(f) \in \mathrm{E}$. Φ est donc bien un endomorphisme de E.

2. Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après la question précédente, $\Phi(f)$ est dérivable et on a donc

$$\forall x \in [0,1],\ \Phi(f)'(x) = xf(x) - \int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t - xf(x) = -\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

$\Phi(f)'$ est à nouveau dérivable et $\Phi(f)'' = -f$.
Soit λ une valeur propre de Φ et f un vecteur propre associé.
Si $\lambda = 0$, on a $\Phi(f) = 0$ et donc $f = -\Phi(f)'' = 0$, ce qui contredit le fait que f est un vecteur propre. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de Φ.
Supposons donc $\lambda \neq 0$. Alors $f = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)$. Ainsi f est deux fois dérivable et $f'' = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)'' = -\frac{1}{\lambda}f$. Par ailleurs, $f(0) = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)(0) = 0$ et $f'(1) = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)'(1) = 0$.
Supposons $\lambda < 0$. Comme $f'' = -\frac{1}{\lambda}f$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \alpha\operatorname{ch}\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) + \beta\operatorname{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$$

Comme $f(0) = 0$, $\alpha = 0$. Puis comme $f'(1) = 0$, $\beta = 0$. Ainsi $f = 0$ et λ ne peut être valeur propre de Φ.
Supposons $\lambda > 0$. Comme $f'' = -\frac{1}{\lambda}f$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \alpha\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta\sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Comme $f(0) = 0$, $\alpha = 0$. Puis comme $f'(1) = 0$, $\beta\cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = 0$. On ne peut avoir $\beta = 0$ sinon $f = 0$. Ainsi $\cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = 0$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Ainsi $\lambda = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2}$.
Par conséquent, les valeurs propres de Φ sont les $\lambda_n = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2}$ et les sous-espaces propres associés sont les $\operatorname{vect}(f_n)$ où $f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution 19

Déterminons dans un premier temps le noyau de ϕ. Comme (a, b) est libre

$$\begin{aligned} & x \in \operatorname{Ker}\phi \\ \iff & \langle a \mid x\rangle = \langle b \mid x\rangle = 0 \\ \iff & x \in \operatorname{vect}(a,b)^\perp \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{vect}(a,b)^\perp$.
Par ailleurs, comme a et b sont unitaires,

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= (1 + \langle a \mid b\rangle)(a+b) \\ \phi(a-b) &= (1 - \langle a \mid b\rangle)(a+b) \end{aligned}$$

Ainsi si $\langle a \mid b\rangle = 0$,
$$\mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}(a+b, a-b) = \mathrm{vect}(a,b)$$
et sinon
$$\mathrm{Ker}\left(\phi - (1+\langle a \mid b\rangle)\,\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{vect}(a+b)$$
$$\mathrm{Ker}\left(\phi - (1-\langle a \mid b\rangle)\,\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{vect}(a-b)$$

Pour récapituler, 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\mathrm{vect}(a,b)^\perp$.
Si $\langle a \mid b\rangle = 0$, 1 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\mathrm{vect}(a,b)$.
Si $\langle a \mid b\rangle \neq 0$, $1+\langle a \mid b\rangle$ et $1-\langle a \mid b\rangle$ sont valeurs propres et leurs sous-espaces propres associés respectifs sont $\mathrm{vect}(a+b)$ et $\mathrm{vect}(a-b)$.
Dans tous les cas, la somme des dimensions de ces sous-espaces propres est égale à la dimension de E donc on a bien trouvé toutes les valeurs propres de ϕ. On peut également en conclure que ϕ est diagonalisable. On aurait aussi pu constater que ϕ est un endomorphisme symétrique pour justifier qu'il était diagonalisable. En effet, pour tout $(x,y) \in E^2$,
$$\langle \phi(x) \mid y\rangle = \langle x \mid \phi(y)\rangle = \langle a \mid x\rangle\langle a \mid y\rangle + \langle b \mid x\rangle\langle b \mid y\rangle$$

Solution 20

φ est clairement linéaire. De plus,
$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \varphi(X^k) = (k-n)X^{k+1} + kX^k \in \mathbb{R}_n[X]$$
Par linéarité, $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ de sorte que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont $0, 1, \dots, n$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(\varphi) = [\![0,n]\!]$ et que tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$ et P_k le vecteur propre unitaire associé à la valeur propre k. Alors $\varphi(P) = kP$ ou encore
$$\frac{P_k'}{P_k} = \frac{nX+k}{X(X+1)} = \frac{k}{X} + \frac{n-k}{X+1}$$
On en déduit que $P_k = X^k(X+1)^{n-k}$.

Solution 21

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et M un vecteur propre associé. Alors $M + \mathrm{tr}(M)I_n = \lambda M$ puis en considérant la trace des deux membres, $(n+1)\,\mathrm{tr}(M) = \lambda\,\mathrm{tr}(M)$. Si $\lambda = n+1$ ou $\mathrm{tr}(M) = 0$. Si $\mathrm{tr}(M) = 0$ alors $M = \lambda M$ et donc $\lambda = 1$. Ainsi $\mathrm{Sp}(u) \subset \{1, n+1\}$.
Déterminons les sous-espaces propres associés à ces potentielles valeurs propres. Clairement, le sous-espace associé à la valeur propre 1 est l'hyperplan des matrices de traces nulles. De plus, I_n est clairement un vecteur propre associé à la valeur propre $n+1$ donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $n+1$ est $\mathrm{vect}(I_n)$ puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> **Remarque.** On constate que u est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> **Remarque.** Si $n = 1$, 1 n'est en fait pas valeur propre puisqu'alors le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle est le sous-espace nul.

Solution 22

On posera $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto px + q$.

1. Remarquons que pour $f \in E$, $u(f) = f \circ \varphi$. Ainsi u est clairement linéaire. Comme φ est affine donc $\mathcal{C}^\infty$, $u(f) \in E$ pour tout $f \in E$. Ainsi $f \in \mathcal{L}(E)$. Comme $p \neq 0$, φ est bijective. En posant $u(f) = f \circ \varphi^{-1}$ pour $f \in E$, on vérifie aisément que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}_E$ donc $u \in GL(E)$.

2. Comme $u \in GL(E)$, $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et f un vecteur propre associé. Alors $f \neq 0$ et il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. On montre aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(f)(x) = f(\varphi^n(x)) = \lambda^n f(x)$. La suite de terme général $u_n = \varphi^n(x)$ vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \varphi(u_n) = pu_n + q$.

C'est donc une suite arithmético-géométrique. Comme $p \in]-1,1[$, on montre classiquement que (u_n) converge vers l'unique point fixe de φ, à savoir 1. Par continuité de f, la suite de terme général $f(u_n) = \lambda^n f(x)$ converge (vers $f(1)$). Ceci n'est possible que si $\lambda \in]-1,1]$.
On a donc montré que $\mathrm{Sp}(u) \subset]-1,1] \setminus \{0\}$.

3. Soit f un vecteur propre de u et λ sa valeur propre associée. On a donc $u(f) = \lambda f$. En dérivant n fois, on obtient $p^n u(f^{(n)}) = \lambda f^{(n)}$ i.e. $u(f^{(n)}) = \dfrac{\lambda}{p^n} f^{(n)}$. Comme $\lambda \neq 0$ et $p \in]-1,1[\setminus\{0\}$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\dfrac{\lambda}{p^k}\right| > 1$. Comme $\mathrm{Sp}(u) \subset [-1,1]$, $f^{(k)}$ ne peut être un vecteur propre de u de sorte que $f^{(k)} = 0$.

4. Soit f un vecteur propre de u et λ sa valeur propre associée de sorte que $f(px+q) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La question précédente montre que f est polynomiale. Notons n son degré.

Première méthode. En notant α le coefficient dominant de f, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha x^n$. Ainsi $f \circ \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha p^n x^n$ car $p \neq 0$ et $\lambda f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda\alpha x^n$. L'égalité $f \circ \varphi = \lambda f$ impose alors $\lambda = p^n$.
On vu précédemment que $p^k u(f^{(k)}) = \lambda f^{(k)} = p^n f^{(k)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$. En évaluant en 1, on obtient $p^n f^{(k)}(1) = p^k f^{(k)}(1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $p+q=1$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $p^k \neq p^n$ donc $f^{(k)}(1) = 0$. Ainsi 1 est une racine de f de multiplicité supérieure ou égale à n mais comme f est de degré n, $f \in \mathrm{vect}(f_n)$ où $f_n : x \mapsto (x-1)^n$.

Deuxième méthode. Posons $g(x) = f(x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda g(x) = \lambda f(x+1) = f(p(x+1)+q) = f(px+1) = g(px)$$

car $p+q=1$. Posons alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où $a_n \neq 0$. En identifiant les coefficients de $f(px)$ et $\lambda g(x)$, on a $\lambda a_k = p^k a_k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Comme $a_n \neq 0$, on obtient $\lambda = p^n$ puis $p^n a_k = p^k a_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme $p \neq 0$, $p^k \neq p^n$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ de sorte que $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi $g(x) = a_n x^n$ puis $f(x) = a_n(x-1)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit à nouveau que $f \in \mathrm{vect}(f_n)$.

On a donc montré que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{p^n, n \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(u - p^n \mathrm{Id_E}) \subset \mathrm{vect}(f_n)$.
Réciproquement, on vérifie que $u(f_n) = p^n f_n$ en tirant partie du fait que $p+q=1$.
En conclusion, $\mathrm{Sp}(u) = \{p^n, n \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}_{p^n}(u) = \mathrm{vect}(f_n)$.

Solution 23

Puisque E est un espace vectoriel complexe, v possède au moins une valeur propre λ. Le sous-espace propre $\mathrm{E}_\lambda(v)$ associé à la valeur propre λ est stable par u car u commute avec v. L'endomorphisme de $\mathrm{E}_\lambda(v)$ induit par u possède alors un vecteur propre (toujours car $\mathrm{E}_\lambda(v)$ est un espace vectoriel complexe). Ce vecteur propre est alors évidemment un vecteur propre de u. Mais c'est également un vecteur propre de v (associé à la valeur propre λ) puisqu'il appartient au sous-espace propre $\mathrm{E}_\lambda(v)$.

Solution 24

1. Tout d'abord, f est clairement linéaire. On vérifie ensuite que $f(1) = \mathrm{X}^2 \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $f(\mathrm{X}^2) = 1 \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Comme $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est stable par f et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.

2. La question précédente montre que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit sans peine que $\chi_\mathrm{A} = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)$. Ainsi $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1, -1\}$. On calcule ensuite $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{E}_{-1}(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

3. On déduit de la question précédente que $\mathrm{Sp}(f) = \{1, -1\}$, $\mathrm{E}_1(f) = \mathrm{vect}(\mathrm{X}^2+1, \mathrm{X})$ et $\mathrm{E}_{-1}(f) = \mathrm{vect}(\mathrm{X}^2-1)$.

Solution 25

Notons u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés à A et B. Alors $u \circ v = 0$ de sorte que $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$.

Supposons que $v = 0$. Remarquons que u possède une valeur propre car χ_u est scindé sur $\mathbb{C}$. Ainsi u possède également un vecteur propre qui est aussi un vecteur propre de v puisque $v = 0$.
Supposons que $v \neq 0$. Alors u induit un endomorphisme $\tilde{u}$ de $\operatorname{Im} u$ car $\operatorname{Im} u$ est évidemment stable par u. Comme $\operatorname{Im} u \neq \{0\}$, $\tilde{u}$ possède un vecteur propre $x \in \operatorname{Im} u$ pour les mêmes raisons que précédemment. Alors x est aussi un vecteur propre de u et $x \in \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$ donc x est aussi un vecteur propre de v.
Dans tous les cas, u et v possèdent un vecteur propre commun. Il en est donc de même de A et B.

Polynôme caractéristique

Solution 26

Tout d'abord,

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \mathrm{X} + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Première méthode. En numérotant $\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_{n-1}$ les lignes de ce déterminant et en effectuant l'opération $\mathrm{L}_0 \leftarrow \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{X}^k \mathrm{L}_k$, on obtient

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{P}(\mathrm{X}) \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \mathrm{X} + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

avec $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$. En développant par rapport à la première ligne, on obtient $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$.
Deuxième méthode. En développant par le déterminant définissant $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ par rapport à sa dernière colonne, on obtient

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k \mathrm{D}_k(\mathrm{X}) + (\mathrm{X} + a_{n-1}) \det(\mathrm{XI}_{n-1})$$

avec

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{X}) = \left|\begin{array}{ccccc|ccccc} \mathrm{X} & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ -1 & \mathrm{X} & 0 & \ddots & \vdots & & & & & \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 & & & (\mathbf{0}) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \mathrm{X} & & & & & \\ \hline & & & & & -1 & \mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 & -1 & \mathrm{X} & \ddots & \vdots \\ & & (\mathbf{0}) & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathrm{X} \\ & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{array}\right|$$

où le bloc supérieur gauche est de taille k et le bloc inférieur droit est de taille $n-1-k$. Comme il s'agit d'un déterminant diagonal par blocs, on obtient $\mathrm{D}_k(\mathrm{X}) = (-1)^{n-1-k}\mathrm{X}^k$ puis

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k + \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} + a_{n-1}) = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$$

Solution 27

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det((\lambda I_n - A)^\top) = \det(\lambda I_n - A^\top) = \chi_{A^\top}(\lambda)$$
Ainsi A et $A^\top$ ont même polynôme caractéristique.

2. Les valeurs propres d'une matrice sont les racines du polynôme caractéristique donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.

3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Alors
$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = \mathrm{rg}((A - \lambda I_n)^\top) = \mathrm{rg}(A^\top - \lambda I_n)$$
D'après le théorème du rang,
$$\dim E_\lambda(A) = \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \dim \mathrm{Ker}(A^\top - \lambda I_n) = \dim E_\lambda(A^\top)$$

> **Remarque.** Ceci prouve également que A et $A^\top$ ont même spectre puisque $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \geq 1$.

Solution 28

1. En développant le déterminant définissant $P_{n+1}(X)$ par rapport à sa dernière colonne, on obtient
$$\begin{aligned}
P_{n+1}(X) &= \begin{vmatrix} X-a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & X-a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & X-a_n & -b_n \\ 0 & \cdots & 0 & -b_n & X-a_{n+1} \end{vmatrix} \\
&= (X-a_{n+1})P_n(X) + b_n \left|\begin{array}{c|c} & 0 \\ & \vdots \\ XI_{n-1} - A_{n-1} & 0 \\ & -b_{n-1} \\ \hline 0 \ \cdots \ 0 \ 0 & -b_n \end{array}\right| \\
&= (X-a_{n+1})P_n(X) - b_n^2 P_{n-1}(X)
\end{aligned}$$

2. **a.** Il suffit de remarquer que A_n est symétrique réelle.

   b. La matrice extraite de l'énoncé est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont $-b_1, \dots, -b_{n-1}$. Son déterminant est donc $(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} b_i$. Notamment ce déterminant n'est pas nul.

   c. La matrice $\lambda I_n - A_n$ possède une matrice extraite inversible de taille $n-1$ donc $\mathrm{rg}(\lambda I_n - A_n) \geq n-1$. Mais $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_n)$ donc $\dim \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A_n) \geq 1$. D'après le théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{rg}(\lambda I_n - A_n) \leq n-1$. Finalement, $\mathrm{rg}(\lambda I_n - A_n) = n-1$.

   d. D'après la question précédente et le théorème du rang, tous les sous-espaces propres de A_n sont de dimension 1. Comme A_n est diagonalisable, P_n est scindé et les multiplicités de ses racines sont égales aux dimensions des sous-espaces propres correspondants. On en déduit que P_n est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$\Delta_n(x) = P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)$$
D'après la question **1**,
$$P_{n+1}(X) = (X-a_{n+1})P_n(X) - b_n^2 P_{n-1}(X)$$

donc

$$P'_{n+1}(x) = (x - a_{n+1})P'_n(x) + P_n(x) - b_n^2 P'_{n-1}(x)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta_n(x) &= (x - a_{n+1})P'_n(x)P_n(x) + P_n^2(x) - b_n^2 P'_{n-1}P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) \\
&= P'_n(x)\left[(x - a_{n+1})P_n(x) - P_{n+1}(x)\right] + P_n^2(x) - b_n^2 P'_{n-1}(x)P_n(x) \\
&= b_n^2 P'_n(x)P_{n-1}(x) + P_n^2(x) - b_n^2 P'_{n-1}(x)P_n(x) \\
&= P_n^2(x) + b_n^2 \Delta_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

b. Il est clair que $P_1(x) = (x - a_1)$ et que $P_2(x) = (x - a_1)(x - a_2) - b_1^2$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta_1(x) &= P'_2(x)P_1(x) - P'_1(x)P_2(x) \\
&= \left[(x - a_1) + (x - a_2)\right](x - a_1) - \left[(x - a_1)(x - a_2) - b_1^2\right] \\
&= (x - a_1)^2 + b_1^2 > 0
\end{aligned}$$

car $b_1 \neq 0$.
La question précédente alliée à une récurrence évidente montre que $\Delta_n(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Notons $f_n : x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ ainsi que $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les zéros de P_n. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. f_n est dérivable sur $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ et

$$\forall x \in]\lambda_i, \lambda_{i+1}[, \ f'_n(x) = \frac{\Delta_n(x)}{P_n(x)^2} > 0$$

Ainsi f_n est strictement croissante sur $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$. P_{n+1} ne peut pas s'annuler en λ_i car sinon $\Delta_n(\lambda_i) = 0$ ce qui contredirait la stricte positivité de Δ_n. Ainsi f_n admet une limite infinie en λ_i^+. Pour les mêmes raisons, f_n admet une limite infinie en λ_{i+1}^-. Par stricte croissance de f_n, $\lim\limits_{\lambda_i^+} f_n = -\infty$ et $\lim\limits_{\lambda_{i+1}^-} f_n = +\infty$. Enfin, f_n est continue sur $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ donc f_n de même que P_{n+1} s'annule une unique fois sur $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$.

> **Remarque.** On a donc prouvé que P_{n+1} possédait $n-1$ racines comprises entre les racines consécutives de P_n. Comme P_{n+1} possède $n+1$ racines, ses deux dernières racines appartiennent à $]-\infty, \lambda_1[\cup]\lambda_n, +\infty[$. Mais comme f_n est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, \lambda_1[$ et $]\lambda_n, +\infty[$, elle ne peut s'annuler qu'une fois sur chacun de ces deux intervalles. Ainsi P_{n+1} possède encore une racine dans $]-\infty, \lambda_1[$ et une racine dans $]\lambda_n, +\infty[$.

Solution 29

---

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\chi_{u \circ v}(\lambda) &= \det(u \circ v - \lambda \operatorname{Id}_E) \\
&= \det(u \circ (v - \lambda u^{-1})) \\
&= \det(u)\det(v - \lambda u^{-1}) \\
&= \det(v - \lambda u^{-1})\det(u) \\
&= \det((v - \lambda u^{-1}) \circ u) \\
&= \det(v \circ u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \chi_{v \circ u}(\lambda)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\chi_{u \circ v} = \chi_{v \circ u}$ puisque ces deux polynômes coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{K}$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $\mu \in \mathbb{K} \setminus \operatorname{Sp}(u)$, $u - \mu \operatorname{Id}_E$ est inversible donc d'après la question précédente

$$\det((u - \mu \operatorname{Id}_E) \circ v - \lambda \operatorname{Id}_E) = \det(v \circ (u - \mu \operatorname{Id}_E) - \lambda \operatorname{Id}_E)$$

Les deux membres de cette égalité définissent des fonctions polynomiales de la variable μ qui coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{K} \setminus \operatorname{Sp}(u)$. Elles coïncident donc en tout point de $\mathbb{K}$ et notamment en 0. Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_{u \circ v}(\lambda) = \chi_{v \circ u}(\lambda)$ et donc $\chi_{u \circ v} = \chi_{v \circ u}$.

Solution 30

1. Les coefficients dans les cofacteurs de A sont du type $-\mathrm{A}_{ij}$ ou $\lambda - \mathrm{A}_{ij}$, ce qui explique que chaque cofacteur de A est polynomial en λ. De plus, chaque cofacteur de A possède exactement $n-1$ coefficients du type $\lambda - \mathrm{A}_{ii}$ donc est de degré au plus $n-1$ en λ. On en déduit le résultat demandé.

2. Notons $\mathrm{C}_1(\lambda), \dots, \mathrm{C}_n(\lambda)$ les vecteurs colonnes de $\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}$, de sorte que
$$\mathrm{P}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \det(\mathrm{C}_1(\lambda), \dots, \mathrm{C}_n(\lambda)$$
Par multilinéarité du déterminant, on obtient
$$\mathrm{P}'(\lambda) = \sum_{k=1}^n \det(\mathrm{C}_1(\lambda), \dots, \mathrm{C}_{k-1}(\lambda), \mathrm{C}'_k(\lambda), \mathrm{C}_{k+1}(\lambda), \dots, \mathrm{C}_n(\lambda))$$
Or $\mathrm{C}'_k(\lambda) = \mathrm{E}_k$ où E_k est le k-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. En développant
$$\det(\mathrm{C}_1(\lambda), \dots, \mathrm{C}_{k-1}(\lambda), \mathrm{C}'_k(\lambda), \mathrm{C}_{k+1}(\lambda), \dots, \mathrm{C}_n(\lambda))$$
par rapport à la k-ème colonne, on trouve que celui-ci vaut le cofacteur en position (k, k) de la matrice $\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}$, autrement dit B_{kk}. Ainsi $\mathrm{P}'(\lambda) = \sum_{k=1}^n \mathrm{B}_{kk} = \mathrm{tr}(\mathrm{B})$.

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{P}'(\lambda) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}(\lambda))$ i.e.
$$n\lambda^{n-1} - p_1(n-1)\lambda^{n-2} \cdots - p_{n-1} = \lambda^{n-1}\,\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) + \lambda^{n-2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{B}_1) \cdots + \mathrm{tr}(\mathrm{B}_{n-1})$$
En identifiant coefficient par coefficient, on obtient $p_k(n-k) = -\,\mathrm{tr}(\mathrm{B}_k)$.
Par ailleurs, $(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{B}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{I}_n = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{I}_n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, ce qui s'écrit également
$$(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k}\mathrm{B}_k = (\lambda^n - \sum_{k=1}^n p_k \lambda^{n-k})\mathrm{I}_n$$
Après un changement d'indice et en tirant parti du fait que $\mathrm{B}_n = 0$, on trouve pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$
$$\lambda^n \mathrm{B}_0 + \sum_{k=1}^n \lambda^k(\mathrm{B}_k - \mathrm{A}\mathrm{B}_{k-1}) = \lambda^n \mathrm{I}_n - \sum_{k=1}^n p_k \lambda^{n-k} \mathrm{I}_n$$
En identifiant «coefficient» par «coefficient» (les coefficients des puissances de λ sont des matrices, mais on peut raisonner indépendamment sur chaque coefficient des matrices si cela vous choque), on obtient $\mathrm{B}_0 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{B}_k - \mathrm{A}\mathrm{B}_{k-1} = -p_k \mathrm{I}_n$ i.e. $\mathrm{B}_k = \mathrm{A}\mathrm{B}_{k-1} - p_k \mathrm{I}_n$ pour $1 \leq k \leq n$.
En reportant cette expression de B_k dans la relation $p_k(n-k) = -\,\mathrm{tr}(\mathrm{B}_k)$ trouvée plus haut, on obtient
$$p_k(n-k) = -\,\mathrm{tr}(\mathrm{A}\mathrm{B}_{k-1} - p_k \mathrm{I}_n) = -\,\mathrm{tr}(\mathrm{A}\mathrm{B}_{k-1}) + np_k$$
ce qui s'écrit encore $p_k = \dfrac{1}{k}\,\mathrm{tr}(\mathrm{A}\mathrm{B}_{k-1})$ pour $1 \leq k \leq n$.

4. On sait que $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}\mathrm{B}_{n-1} - p_n \mathrm{I}_n$ d'après la question précédente et on a posé $\mathrm{B}_n = 0$ donc $\mathrm{A}\mathrm{B}_{n-1} = p_n \mathrm{I}_n$. A est donc inversible si $p_n \neq 0$ et dans ce cas, $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{p_n}\mathrm{B}_{n-1}$.

5.
```python
from numpy.polynomial import Polynomial
import numpy as np

def polycar(A):
  n,p=A.shape
  if n!=p:
    return
  Id=np.eye(n)
```

```
    B=Id
    X=Polynomial([0,1])
    P=X**n
    for k in range(1,n+1):
      p=np.trace(A@B)/k
      B=A@B-p*Id
      P=P-p*X**(n-k)
    return P

  def inverse(A):
    n,p=A.shape
    if n!=p:
      return
    Id=np.eye(n)
    B=Id
    for k in range(1,n):
      p=np.trace(A@B)/k
      B=A@B-p*Id
    p=np.trace(A@B)/n
    return B/p
```

Solution 31

Remarquons tout d'abord que E_p est un espace vectoriel de dimension p. On peut par exemple voir que l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{E}_p & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})\end{array}\right.$ est un isomorphisme.

Posons $\omega_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{p}\right)$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$. On vérifie que $2\omega_k^n - \omega_k^{n+1} - \omega_k^{n-1} = 2\left(1 - \cos\dfrac{2k\pi}{p}\right)\omega_k^n$. Autrement dit la suite (ω_k^n) est un vecteur propre de D_p associée à la valeur propre $2\left(1 - \cos\dfrac{2k\pi}{p}\right)$. La famille formée des suites (ω_k^n) pour $0 \leq k \leq p-1$ est libre. On peut par exemple voir qu'elle est orthonormale pour le produit hermitien $((u_n), (v_n)) \mapsto \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_k\overline{v_k}$. C'est donc une base de E_p.

Ainsi les valeurs propres de D_p sont exactement les $\lambda_k = 2\left(1 - \cos\dfrac{2k\pi}{p}\right)$ pour $0 \leq k \leq p-1$ et elles sont toutes de multiplicité 1 dans le polynôme caractéristique. Or le coefficient de X dans ce polynôme est $(-1)^{p-1}\sigma_{p-1}$ où σ_{p-1} est la $(p-1)^{\text{ème}}$ fonction symétrique des λ_k. Puisque $\lambda_0 = 0$, on a tout simplement $\sigma_{p-1} = \prod_{k=1}^{p-1}\lambda_k$.

Posons $\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{p-1}\left(\mathrm{X}^2 - 2\cos\dfrac{2k\pi}{p} + 1\right)$ de sorte que $\sigma_{p-1} = \mathrm{P}(1)$. De plus, $\mathrm{X}^2 - 2\cos\dfrac{2k\pi}{p} + 1 = (\mathrm{X} - \omega_k)(\mathrm{X} - \overline{\omega_k})$ donc $\mathrm{P} = \left(\dfrac{\mathrm{X}^n - 1}{\mathrm{X} - 1}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{p-1}\mathrm{X}^k\right)^2$. On en déduit que $\sigma_{p-1} = \mathrm{P}(1) = p^2$. Le coefficient de X dans le polynôme caractéristique de D_p est donc $(-1)^{p-1}p^2$.

Solution 32

Notons A, B, et C les matrices de f, g et h dans une base de E. On a alors $\mathrm{CB} = \mathrm{AC}$. Comme C est de rang r, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $\mathrm{C} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}^{-1}$, où J_r désigne traditionnellement la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis les r premiers coefficients diagonaux qui valent 1. On a donc $\mathrm{PJ_RQ}^{-1}\mathrm{B} = \mathrm{APJ_RQ}^{-1}$ ou encore $\mathrm{J}_r(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ}) = (\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})\mathrm{J}_r$. Comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, on peut supposer pour simplifier que $\mathrm{J}_r\mathrm{B} = \mathrm{AJ}_r$. En effectuant un calcul par blocs, on trouve que A et B sont respectivements de la forme $\begin{pmatrix}\mathrm{M} & * \\ 0 & *\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\mathrm{M} & 0 \\ * & *\end{pmatrix}$ où M est un bloc carré de taille r. On en déduit que χ_M, qui est bien un polynôme de degré r, divise χ_A et χ_B et donc également χ_f et χ_g.

La réciproque est fausse dès que $n \geq 2$. En effet, on peut encore raisonner matriciellement en considèrant A la matrice nulle et B une matrice non nulle nilpotente. Alors $\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B} = \mathrm{X}^n$ de sorte que χ_A et χ_B ont un facteur commun de degré n (à savoir X^n). Mais il n'existe évidemment pas de matrice C de rang n (i.e. inversible) telle que $\mathrm{CB} = \mathrm{AC}$ car AC est nulle tandis que CB ne l'est pas (C est inversible et B est non nulle).

Solution 33

Remarquons que

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ \hline -\mathrm{B} & \mathrm{I}_p \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{I}_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{AB} & -\mathrm{A} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_p \end{array}\right)$$

En considérant les déterminants, on obtient

$$\left|\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ \hline -\mathrm{B} & \mathrm{I}_p \end{array}\right| = \chi_{\mathrm{AB}}(\lambda)$$

Remarquons maintenant que

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline \mathrm{B} & \lambda \mathrm{I}_p \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ \hline -\mathrm{B} & \mathrm{I}_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_p - \mathrm{BA} \end{array}\right)$$

En considérant les déterminants, on obtient maintenant

$$\lambda^p \left|\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ \hline -\mathrm{B} & \mathrm{I}_p \end{array}\right| = \lambda^n \chi_{\mathrm{BA}}(\lambda)$$

Finalement, $\lambda^p \chi_{\mathrm{AB}}(\lambda) = \lambda^n \chi_{\mathrm{B}}\mathrm{A}(\lambda)$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{X}^p \chi_{\mathrm{AB}} = \mathrm{X}^n \chi_{\mathrm{BA}}$$

Si $n = p$, on obtient bien $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$ par intégrité de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Solution 34

---

1. La matrice A de u dans la base $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\chi_u(\mathrm{X}) = \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{X}-1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\chi_u(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)^{2n+1} - 1$$

2. $\chi_u(0) = -2 \neq 0$ donc 0 n'est pas valeur propre de u et u est inversible.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ i.e. $(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{2n+1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} u^k = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$

ou encore

$$u \circ \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} (-1)^{2n-k} u^k = 2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$

Ainsi en posant $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} (-1)^{2n-k} \mathrm{X}^k$, on a bien $u^{-1} = \mathrm{P}(u)$.

3. Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u. Autrement dit,

$$\mathrm{Sp}(u) = 1 + \mathbb{U}_{2n+1} = \left\{1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}},\ k \in [\![0, 2n]\!]\right\} = \left\{2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![0, 2n]\!]\right\}$$

4. Comme $\operatorname{card} \mathbb{U}_{2n+1} = 2n+1$ et $\deg \chi_u = 2n+1$, toutes les valeurs propres de u sont simples (on en déduit également que u est diagonalisable, ce qui n'est pas demandé). D'après les liens entre les coefficients et les racines d'un polynôme

$$\prod_{k=0}^{2n} 2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^{2n+1}\chi_u(0) = 2$$

En notant P_n le produit à calculer,

$$2^{2n+1}\mathrm{P}_n \prod_{k=0}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = 2$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k = n(2n+1)$,

$$\prod_{k=0}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = e^{in\pi} = (-1)^n$$

Finalement,

$$\mathrm{P}_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$$

Diagonalisation

Solution 35

La matrice de Φ dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{array}\right)$. On en déduit $\operatorname{tr}(\Phi) = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = n$.

Solution 36

Supposons que u et v commutent et donnons-nous $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Pour tout $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$, $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in \mathrm{E}_\lambda(u)$, ce qui prouve que $\mathrm{E}_\lambda(u)$ est stable par v.

Supposons maintenant tout sous-espace propre de u stable par v. Puisque u est diagonalisable, $\mathrm{E} = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors il existe une famille $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \in \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$ telle que $x = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$. D'une part,

$$v(u(x)) = v\left(u\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda\right)\right) = v\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda x_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda v(x_\lambda)$$

D'autre part, en notant que $v(x_\lambda) \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$

$$u(v(x)) = u\left(v\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda\right)\right) = u\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} v(x_\lambda)\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda v(x_\lambda)$$

Finalement, $v(u(x)) = u(v(x))$ donc u et v commutent.

Solution 37

Puisque u est diagonalisable, on sait que $\mathrm{E} = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Choisissons une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition en somme directe. On montre sans peine qu'un endomorphisme de E commute avec u si et seulement si il stabilise ses sous-espaces propres autrement dit si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant de la taille du sous-espace propre correspondant. Il est clair que l'ensemble des matrices de cette forme est un sous-espace vectoriel de dimension $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (\dim \mathrm{E}_\lambda(u))^2$. Puisque l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme, on en déduit que la dimension du commutant de u est également $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (\dim \mathrm{E}_\lambda(u))^2$.

Solution 38

On montre que A est diagonalisable et plus précisément que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Le commutant de D est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ où (a, b, c, d, e) décrit $\mathbb{K}^5$.

Il suffit alors de remarquer que $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ commute avec D si et seulement si PMP^{-1} commute avec A. Le commutant de A est donc l'ensemble des matrices de la forme

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2a-c+4b+2d+e & 6a+3c-8b-4d-2e & -2a-c+2b+d+e \\ -a+2b+e & 3a-4b-2e & -a+b+e \\ c-2d+2e & -3c+4d-4e & c-d+2e \end{pmatrix}$$

où (a, b, c, d, e) décrit $\mathbb{K}^5$.

Solution 39

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Pour tout $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{E}_\lambda(u)$, $u(x) = \lambda x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{E}_\lambda(u)$ donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{E}_\lambda(u)$ est stable par u. Par conséquent, G est stable par u.

2. On sait que F est stable par u et que u est diagonalisable donc $u_{|\mathrm{F}}$ est également diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(u_{|\mathrm{F}}) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et quitte à poser $\mathrm{E}_\lambda(u_{|\mathrm{F}}) = \{0\}$ si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u_{|\mathrm{F}})$, on a $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u_{|\mathrm{F}})$. On conclut en remarquant que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$
$$\mathrm{E}_\lambda(u_{|\mathrm{F}}) = \mathrm{Ker}(u_{|\mathrm{F}} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{F}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \cap \mathrm{F} = \mathrm{E}_\lambda(u) \cap \mathrm{F}$$

3. Soit $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{F}_\lambda$ où pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E}_\lambda(u)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors pour tout $x \in \mathrm{F}_\lambda$, $u(x) = \lambda x \in \mathrm{F}_\lambda$ donc F_λ est stable par u. Par conséquent, F est stable par u.
Réciproquement, soit F un sous-espace stable par u et posons $\mathrm{F}_\lambda = \mathrm{F} \cap \mathrm{E}_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors F_λ est un sous-espace vectoriel de E_λ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{F}_\lambda$ d'après la question précédente.

Solution 40

1. Le polynôme caractéristique de A est
$$\chi_\mathrm{A} = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3) - 2 = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 4 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-4)$$
Ainsi A est diagonalisable et le spectre de A est $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1, 4\}$. On vérifie que
$$\mathrm{A}x_1 = x_1 \qquad \text{avec} \qquad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
et que
$$\mathrm{A}x_2 = 4x_2 \qquad \text{avec} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme A est de taille 2, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 4 dont donc de dimension 1. Ce sont respectivement $\operatorname{vect}(x_1)$ et $\operatorname{vect}(x_2)$.
De plus, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Alors $AM = M^3 = MA$. Alors $AMx_1 = MAx_1 = Mx_1$ donc Mx_1 est un vecteur propre de A. Comme le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\operatorname{vect}(x_1)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Mx_1 = \lambda x_1$. Donc $\lambda^2 x_1 = M^2 x_1 = Ax_1 = x_1$ puis $\lambda^2 = 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$ et $Mx_1 = \pm x_1$. De même, $Ax_2 = \pm 2x_2$. On peut alors affirmer que

$$M = P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Réciproquement ces quatres matrices conviennent.

> **Remarque.** Les quatre matrices en question sont
>
> $$\pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 41

On calcule $\chi_A = (X-2)(X-1)^2$, $E_2(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi A est diagonalisable. De même, $\chi_B = (X-2)(X-1)^2$, $E_2(B) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ mais $E_1(B) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donc B n'est pas diagonalisable. Donc A et B ne sont pas semblables même si elles ont mêmes valeurs propres et même polynôme caractéristique.

Solution 42

1. On trouve $\chi_A = X^2 + 7X - 8 = (X+8)(X-1)$. De plus, $E_{-8}(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_1(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Alors en posant $Y = P^{-1}XP$, l'équation $X^3 = A$ équivaut à $Y^3 = D$. Supposons que $X^3 = A$ i.e. $Y^3 = D$. Alors Y commute avec $Y^3 = D$. En notant, $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $YD = DY$ donne $b = c = 0$. Par conséquent, Y est diagonale. L'équation $Y^3 = D$ équivaut $a^3 = -8$ et $d^3 = 1$ i.e. $a = -2$ et $d = 1$ ou encore $Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'unique solution de l'équation $X^3 = A$ est alors

$$P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 43

1. On trouve $A = aI_3 + bJ + cJ^2$.

2. On trouve $\chi_J = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$. Comme χ_J est scindé à racines simples, J est diagonalisable.

3. Les sous-espaces propres associés à 1, j et j^2 sont respectivement engendrés par $\omega_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$. Remarquons que $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ car J est diagonalisable.
Enfin, $A\omega_0 = (a+b+c)\omega_0$, $A\omega_1 = (a+bj+cj^2)\omega_1$, $A\omega_2 = (a+bj^2+cj^4)\omega_2$ donc $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ est également une base de vecteurs propres de A. Ainsi A est diagonalisable. En posant $P = a + bX + cX^2$, $D = \begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 \\ 0 & P(j) & 0 \\ 0 & 0 & P(j^2) \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, $A = QDQ^{-1}$.

Solution 44

On vérifie que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u\left((X-a)^k\right) = k(X-a)^k$. Ainsi tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ est valeur propre de u est un vecteur propre associé est $(X-a)^k$. Comme $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$, u est diagonalisable et ses valeurs propres sont exactement les entiers compris entre 0 et n.

Solution 45

1. La linéarité de Φ est évidente. Pour montrer que $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, il suffit de montrer que $\Phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ car $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors, en convenant qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle

$$\Phi(X^k) = (X+1)X^k - X(X+1)^k = (1-k)X^k - \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} X^j \in \mathbb{R}_n[X]$$

Φ est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. D'après la question précédente, la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les $1-k \in [\![0, n]\!]$. On peut donc affirmer que les valeurs propres de Φ sont ces mêmes coefficients diagonaux. Φ possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ donc Φ est diagonalisable. De plus, on peut préciser que tous les sous-espaces propres de Φ sont de dimension 1.

Recherchons maintenant les éléments propres de Φ. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Posons $\Gamma_k = \prod_{i=0}^{k-1} X - i$ (en particulier $\Gamma_0 = 1$). On vérifie aisément que $\Phi(\Gamma_k) = (1-k)\Gamma_k$. Comme les sous-espaces propres de Φ sont de dimension 1, le sous-espace propre associé à la valeur propre $1-k$ est la droite vectorielle $\mathrm{vect}(\Gamma_k)$.

Solution 46

Puisque $\mathrm{rg}(A) = 1$, 0 est valeur propre de A et $\dim E_0 = \dim \operatorname{Ker} A = n-1$. Ainsi X^{n-1} divise χ_A. On a alors $\chi_A = X^{n-1}(X-\lambda)$. Comme la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, $\lambda = \mathrm{tr}(A)$.
Si $\lambda = 0$, alors A n'est pas diagonalisable puisque la multiplicité de 0 dans χ_A n'est pas égale à la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
Si $\lambda \neq 0$, alors λ est valeur propre de A. Comme E_0 et E_λ sont en somme directe, $\dim E_0 + \dim E_\lambda \leq n$ i.e. $\dim E_\lambda \leq 1$. De plus, $\dim E_\lambda \geq 1$ donc $\dim E_\lambda = 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est alors égale à n et A est diagonalisable.

Solution 47

1. On a $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + 2g$ avec $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$. Comme $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et g sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f en est un également.

2. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = 3M$$
$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = -M$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$
$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer (détailler si cela ne semble pas clair) que

$$\operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$
$$\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

On en déduit que f est diagonalisable, que ses valeurs propres sont 3 et -1 et que les sous-espaces propres associés respectifs sont $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. Déjà répondu à la question précédente.

4. Comme la trace et le déterminant d'un endomorphisme trigonalisable sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité et comme f est diagonalisable,

$$\operatorname{tr}(f) = 3 \cdot \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + (-1) \cdot \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = 3\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n(n+2)$$
$$\det(f) = 3^{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \cdot (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Solution 48

1. Après un calcul sans difficulté, on trouve que
$$\chi_A = (X-1)^3.$$
Si la matrice A était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, elle serait semblable à I_3 donc égale à I_3, ce qui n'est pas le cas : A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. Après tout calcul on trouve que :
$$\chi_B = (X+1)^2(X-1)^2$$
et
$$\dim(\operatorname{Ker}(B + I_3)) < 2$$
donc B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3. On trouve sans peine que
$$\chi_C = (X-3)(X+3)(X-1)(X+1).$$
Comme $C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ admet quatre valeurs propres réelles distinctes, C est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. On trouve sans peine que
$$\chi_D = X(X-1)(X-2).$$
D est donc diagonalisable que $\mathbb{R}$ en tant que matrice de taille trois admettant trois valeurs propres réelles dictinctes.

Solution 49

Posons $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_M = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X+2)$. Comme χ_M est scindé à racines simples, M est diagonalisable. De plus, $\operatorname{Sp}(M) = \{1, 2\}$, $E_1(M) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(M) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On en déduit notamment que $D = P^{-1}MP$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule aussi aisément $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On propose ensuite plusieurs manières de procéder.

Méthode n°1. A est diagonalisable donc il existe une base $(U_1, \dots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres respectivement associées. En s'inspirant de la réduction de M, on vérifie qu'en posant $X_i = \begin{pmatrix} 2U_i \\ U_i \end{pmatrix}$ et $Y_i = X_i = \begin{pmatrix} U_i \\ U_i \end{pmatrix}$, $BX_i = \lambda_i X_i$ et $BY_i = 2\lambda_i Y_i$. Ainsi les X_i et les Y_i sont des vecteurs propres de B. On vérifie manitenant que $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$. Puisque cette famille compte $2n$ éléments, il sufit de montrer sa liberté. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^{2n}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i = 0$$

En raisonnant par blocs, on a donc

$$2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i U_i = 0 \qquad (L_1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i U_i = 0 \qquad (L_2)$$

En considérant $(L_1) - (L_2)$, on obtient $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i = 0$ et en considérant $2(L_2) - (L_1)$, on otient $\sum_{i=1}^{n} \beta_i U_i = 0$. Comme $(U_1, \dots, U_n)$ est libre, les α_i et les β_i sont nuls. Ainsi $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de B : B est diagonalisable.

Méthode n°2. Comme A est diagonalisable, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $\Delta = P^{-1}QP$ soit diagonale. En s'inspirant de la réduction de A, on pose $R = \begin{pmatrix} 2Q & Q \\ Q & Q \end{pmatrix}$. On vérifie alors que R est inversible d'inverse $R = \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1} \end{pmatrix}$. On vérifie ensuite que

$$R^{-1}BR = \begin{pmatrix} Q^{-1}AQ & 0 \\ 0 & 2Q^{-1}AQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}$$

$R^{-1}BR$ est donc bien une matrice diagonale : B est donc diagonalisable.

Solution 50

1. On calcule le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
\chi_{A_m}(X) &= \begin{vmatrix} X+m+1 & -m & -2 \\ m & X-1 & -m \\ 2 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X+m-1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ X+m-1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\
&= (X+m-1)\begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} && \text{en factorisant la première colonne} \\
&= (X+m-1)\begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 0 & 0 & X+m-1 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (X+m-1)^2(X-1)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(A_m) = \{1, 1-m\}$.
Comme la multiplicité de 1 dans A_m vaut 1, on en déduit que $\dim E_1(A_m) = 1$ puis

$$E_1(A_m) = \mathrm{Ker}(A_m - I_n) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -m-2 & m & 2 \\ -m & 0 & m \\ -2 & m & 2-m \end{pmatrix} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Si $m = 0$, $\mathrm{Sp}(A_0) = \{1\}$ et on vient alors de déterminer l'unique sous-espace propre de A_0.
Supposons donc $m \neq 0$ et déterminons $E_{1-m}(A_m)$.

$$\begin{aligned}
E_{1-m}(A_m) &= \mathrm{Ker}(A_m + (m-1)I_n) \\
&= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ -m & m & m \\ -2 & m & 2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ -m & m & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ -m & m & m \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ 2-m & 0 & m-2 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1
\end{aligned}$$

On en déduit que si $m \neq 2$,

$$E_{1-m}(A_m) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{car } m \neq 0$$

Et si $m = 2$,

$$E_{1-m}(A_m) = E_{-1}(A_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

On récapitule.

Cas $m = 0$ $\mathrm{Sp}(A_0) = \{1\}$ et $E_1(A_0) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Cas $m = 2$ $\mathrm{Sp}(A_2) = \{-1, 1\}$, $E_1(A_2) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-1}(A_2) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Cas $m \notin \{0, 2\}$ $\mathrm{Sp}(A_m) = \{1, 1-m\}$, $E_1(A_m) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{1-m}(A_m) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2. On peut par exemple utiliser le fait que A_m est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 3. On en déduit que A_m est diagonalisable si et seulement si $m = 2$.
De plus, A_m est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(A_m)$ i.e. $m \neq 1$.

3. Dans le cas où A_m est diagonalisable i.e. $m = 2$, une base de vecteurs propres est vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On peut donc choisir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 51

Dans la suite, on posera $n = \dim \mathrm{E}$.

Supposons u diagonalisable et donnons-nous un sous-espace vectoriel F de E. Fixons une base $(f_1, \dots, f_p)$ de F. Puisque u est diagonalisable, il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. D'après le théorème de la base incomplète, on peut alors compléter la famille libre $(f_1, \dots, f_p)$ en une base $(f_1, \dots, f_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ où $e_{p+1}, \dots, e_n$ sont des vecteurs propres de u. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est alors un supplémentaire de F stable par u.

Supposons maintenant que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E stable par u. Soit H un hyperplan de E. Alors il existe une droite supplémentaire de H dans E stable par u. Alors un vecteur directeur e_1 de cette droite est un vecteur propre de u.
Supposons avoir prouvé l'existence d'une famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ $(1 \leq p \leq n-1)$ formée de vecteurs propres de u. Soit alors H un hyperplan contenant les vecteurs $e_1, \dots, e_p$. A nouveau, il existe une droite supplémentaire de H dans E stable par u et un vecteur directeur e_{p+1} de cette droite est un vecteur propre de u. Puisque H et $\mathrm{vect}(e_{p+1})$ sont en somme directe, la famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$ est libre.
Par récurrence, il existe une famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de u. Puisque $n = \dim \mathrm{E}$, cette famille est une base et u est donc diagonalisable.

Solution 52

1. **a.** Comme f est bijectif, A est inversible. Alors

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{AB}} &= \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A}(\mathrm{XA}^{-1} - \mathrm{B})) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{XA}^{-1} - \mathrm{B}) \\ &= \det(\mathrm{XA}^{-1} - \mathrm{B})\det(\mathrm{A}) = \det((\mathrm{XA}^{-1} - \mathrm{B})\mathrm{A}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{BA}) = \chi_{\mathrm{BA}}\end{aligned}$$

   On peut également remarquer que $\mathrm{AB} = \mathrm{A}(\mathrm{BA})\mathrm{A}^{-1}$ donc AB et BA sont semblables et ont même polynome caractéristique.

   b. Supposons que $f \circ g$ est diagonalisable. Alors AB est diagonalisable et il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Alors $\mathrm{BA} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{PD}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{P})^{-1}$. Donc BA est diagonalisable et $g \circ f$ également.
   De même, si on remarque que AB et BA sont semblables, alors AB est diagonalisable si et seulement si BA l'est i.e. $f \circ g$ est diagonalisable si et seulement si $g \circ f$ l'est.

2. **a.** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$. Si $\lambda \neq 0$, considérons un vecteur propre x associé à λ. Alors $f \circ g(x) = \lambda x$. Remarquons que $g(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ car $\lambda x \neq 0_{\mathrm{E}}$. De plus, $g \circ f(g(x)) = \lambda g(x)$ donc λ est un vecteur propre de $g \circ f$. Si $\lambda = 0$, alors $f \circ g$ n'est pas inversible. Ainsi $\det(f \circ g) = 0$. Par conséquent $\det(g \circ f) = \det(g)\det(g) = \det(f)\det(g) = \det(f \circ g) = 0$. Donc $g \circ f$ n'est pas inversible et $0 \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$. On a donc montré que $\mathrm{Sp}(g \circ f) \subset \mathrm{Sp}(f \circ g)$. En inversant les rôles de f et g, on a l'inclusion réciproque de sorte que $\mathrm{Sp}(f \circ g) = \mathrm{Sp}(g \circ f)$.

   b. Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. AB est diagonale donc diagonalisable mais BA ne l'est pas. En effet, la seule valeur propre de BA est 0, donc, si BA était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc elle serait nulle, ce qu'elle n'est pas.

Solution 53

Comme AB est diagonalisable, il existe une base $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de AB. Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre X_i. Alors pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{BABX}_i = \lambda_i \mathrm{BX}_i$ de sorte que $\mathrm{Y}_i = \mathrm{BX}_i$ est un vecteur propre de BA.
Comme AB est inversible, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{B} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{AB} = \{0\}$ donc $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathrm{BX}$ est injective. Or $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ donc $(\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_n)$ est une base de $\mathrm{Im}\,\mathrm{B}$.
Remarquons que $\mathrm{Im}\,\mathrm{B}$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$ sont tous deux des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$. Soit $\mathrm{Y} \in \mathrm{Im}\,\mathrm{B} \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$. Ainsi il existe $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Y} = \mathrm{BX}$ et $\mathrm{ABX} = \mathrm{AY} = 0$. Comme AB est inversible, $\mathrm{X} = 0$ puis $\mathrm{Y} = 0$. Ainsi $\mathrm{Im}\,\mathrm{B} \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = \{0\}$. Comme AB est inversible, $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,\mathrm{AB} \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$ donc $\mathrm{Im}\,\mathrm{A} = \mathbb{R}^n$. D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = p - n$. Comme $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathrm{BX}$ est injective, $\dim \mathrm{Im}\,\mathrm{B} = n$. Ainsi $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{A} + \dim \mathrm{Im}\,\mathrm{B} = p = \dim \mathbb{R}^p$. On en déduit que $\mathrm{Im}\,\mathrm{B} \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = \mathbb{R}^p$.
Donnons nous une base $(\mathrm{Y}_{n+1}, \dots, \mathrm{Y}_p)$ de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$. Comme $\mathrm{BAY}_i = 0$ pour tout $i \in [\![n+1, p]\!]$, $\mathrm{Y}_{n+1}, \dots, \mathrm{Y}_p$ sont des vecteurs propres de BA. Comme $\mathbb{R}^p = \mathrm{Im}\,\mathrm{B} \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$, $(\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de BA de sorte que BA est diagonalisable.

Solution 54

1. D'une part, $f = f \circ g - g = (f - \mathrm{Id}_E) \circ g$ donc $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$. D'autre part, $g = f \circ g - f = f \circ (g - \mathrm{Id}_E)$ donc $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} g \leq \dim \operatorname{Ker} f$ et que $\dim \operatorname{Im} g \leq \dim \operatorname{Im} f$. Mais, d'après le théorème du rang, on a également
$$\dim \operatorname{Im} g = \dim E - \dim \operatorname{Ker} g \geq \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$$
donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} g$. Or $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Im} f$. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Ker} f$. Or $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$ donc $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$.

2. Comme g est diagonalisable, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de E. Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i. Alors $f \circ g(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$ i.e. $(\lambda_i - 1)f(e_i) = \lambda_i e_i$. On ne peut avoir $\lambda_i = 1$ sinon on devrait avoir $\lambda_i = 0$ car $e_i \neq 0_E$. Ainsi $f(e_i) = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} e_i$. Les e_i sont donc également des vecteurs propres de f et comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, f est diagonalisable.
Ensuite, $f \circ g(e_i) = \lambda_i f(e_i) = \dfrac{\lambda_i^2}{\lambda_i - 1} e_i$ donc $f \circ g$ est aussi diagonalisable pour les mêmes raisons. On peut également affirmer que $\operatorname{Sp}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} \varphi$ avec $\varphi : t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \dfrac{t^2}{t-1}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\varphi'(t) = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant.

t	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi $\operatorname{Sp}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R} \setminus]0, 4[$.

Solution 55

1. Comme f est diagonalisable, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i. Soit alors x un vecteur propre de f^k et λ sa valeur propre associé. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. D'une part,
$$f^k(x) = \lambda x = \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i e_i$$
et d'autre part,
$$f^k(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^k(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k e_i$$
Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, $\lambda \alpha_i = \alpha_i \lambda_i^k$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Si $\alpha_i \neq 0$, alors $\lambda = \lambda_i^k$ et, comme k est impair, on peut écrire $\lambda_i = \sqrt[k]{\lambda}$ puis $\alpha_i \lambda_i = \alpha_i \sqrt[k]{\lambda}$. Remarquons que cette dernière égalité est encore vraie lorsque $\alpha_i = 0$. Finalement, $\alpha_i \lambda_i = \alpha_i \sqrt[k]{\lambda}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ puis
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i = \sqrt[k]{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sqrt[k]{\lambda} x$$
donc x est un vecteur propre de f.

2. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E formée de vecteur propres de $f^k = g^k$. D'après la question précédente, $(u_1, \dots, u_n)$ est également une base de vecteurs propres de f et g. Si on note λ_i la valeur propre de f associée à u_i et μ_i la valeur propre de g associée à u_i, alors l'égalité $f^k = g^k$ donne $\lambda_i^k = \mu_i^k$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Comme k est impair, on a donc $\lambda_i = \mu_i$, ce qui donne $f(u_i) = \lambda_i u_i = \mu_i u_i = g(u_i)$. Les endomorphismes f et g coïncident donc sur la base $(u_1, \dots, u_n)$ de E : ils sont égaux.

Trigonalisation

Solution 56

1. Après un calcul sans difficulté, on trouve que $\chi_A = (X-1)^3$ de sorte que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Si la matrice A était diagonalisable, elle serait semblable à I_3 donc égale à I_3, ce qui n'est pas le cas. A n'est donc pas diagonalisable.

2. On souhaite déterminer un base (U_1, U_2, U_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} AU_1 = U_1 \\ AU_2 = U_2 \\ AU_3 = U_3 + U_2 \end{cases}$. Pour cela, on choisit un vecteur U_3 qui n'est pas dans $\mathrm{Ker}(A - I_3)$. Par exemple, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose ensuite $U_2 = AU_3 - U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On choisit enfin un vecteur U_1 dans $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ non colinéaire à U_2. Par exemple, $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. En écrivant $T = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la formule du binôme donne $T^n = I_3 + nN$ puisque $N^k = 0$ pour $n \geq 3$. A l'aide de la formule de la comatrice ou de la méthode de Gauss, on montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   > **Remarque.** On peut même remarquer que P est une matrice de transvection. On en déduit immédiatement son inverse.

   Un calcul sans difficulté montre alors que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-n & n \\ 0 & -n & n+1 \end{pmatrix}$.

4. On sait que $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, on trouve $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & -e & 2e \end{pmatrix}$.

   > **Remarque.** On aurait aussi pu remarquer que $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$. On trouve sans difficulté $\exp(T) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ et on aboutit au même résultat.

Solution 57

Soit $A \in GL_3(\mathbb{C})$ une matrice semblable à son inverse. Notons α, β, γ les racines du polynôme caractéristique comptée avec multiplicité. On a donc $(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3)(A - \gamma I_3) = 0$. En multipliant par $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}A^{-3}$, on obtient $(A^{-1} - \frac{1}{\alpha}I_3)(A^{-1} - \frac{1}{\beta}I_3)(A^{-1} - \frac{1}{\gamma}I_3) = 0$. Ainsi $(X - \frac{1}{\alpha})(X - \frac{1}{\beta})(X - \frac{1}{\gamma})$ est le polynôme caractéristique de A^{-1}. A et A^{-1} étant semblables, elles ont même polynôme caractéristique. On montre alors par l'absurde qu'au moins un des trois complexes α, β, γ est égal à son inverse et donc égal à ± 1. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$ telles que les racines du polynôme caractéristique (comptées avec multiplicité) soient $\pm 1, \lambda, \frac{1}{\lambda}$.

Réciproquement soit $A \in GL_3(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique admet pour racines $\pm 1, \lambda, \frac{1}{\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Quitte à changer A en $-A$, on peut supposer que les racines sont $1, \lambda, \frac{1}{\lambda}$.

- Si $\lambda \neq \pm 1$, les complexes $1, \lambda, \frac{1}{\lambda}$ sont distincts : A et A^{-1} sont donc diagonalisables et semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$. A et A^{-1} sont donc semblables entre elles.
- Si $\lambda = -1$ et si $\dim E_{-1}(A) = 2$, alors on a également $\dim E_{-1}(A^{-1}) = 2$ et A et A^{-1} sont donc toutes deux diagonalisables et semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Si $\lambda = -1$ et si $\dim E_{-1}(A) = 1$, alors on a également $\dim E_{-1}(A^{-1}) = 1$ et A et A^{-1} sont donc toutes semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Si $\lambda = 1$ et si $\dim E_1(A) = 3$, alors $A = A^{-1} = I_3$.
- Si $\lambda = 1$ et si $\dim E_1(A) = 2$, alors on a également $\dim E_{-1}(A^{-1}) = 2$ et A et A^{-1} sont donc toutes deux semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $\lambda = 1$ et si $\dim E_1(A) = 1$, alors on a également $\dim E_{-1}(A^{-1}) = 1$ et A et A^{-1} sont donc toutes deux semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 58

---

1. **Première méthode.** Il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $C = P^{-1}BP$ soit trigonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de C i.e. les valeurs propres de B. La matrice $\chi_A(C)$ est également triangulaire et a pour coefficients diagonaux $\chi_A(\lambda_1), \dots, \chi_A(\lambda_n)$. Les spectres de A et B étant disjoints, ces coefficients sont non nuls, ce qui prouve que $\chi_A(C)$ est inversible. Or les matrices $\chi_A(B)$ et $\chi_A(C)$ sont semblables puisque $\chi_A(C) = \chi_A(P^{-1}BP) = P^{-1}\chi_A(B)P$. Donc $\chi_A(B)$ est également inversible.

   Deuxième méthode. Avec les mêmes notations, $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Ainsi $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n}(B - \lambda_i I_n)$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \notin \mathrm{Sp}(B)$ donc $B - \lambda_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe, $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

2. On montre par récurrence que $A^n X = XB^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre ensuite le résultat voulu par bilinéarité du produit matriciel. On a notamment $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$. Or $\chi_A(A) = A$ d'après Cayley-Hamilton donc $X\chi_A(B) = 0$. Comme $\chi_A(B)$ est inversible, $X = 0$.

3. Considérons l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & AX - XB \end{array} \right.$. Φ est clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la question précédente montre que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. que Φ est injectif. Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, Φ est également surjectif, ce qui prouve le résultat voulu.