Devoir surveillé n°12

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Si $X \sim X'$, alors $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X' = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $G_X = G_{X'}$.
Réciproquement, si $G_X = G_{X'}$, alors $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X' = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par unicité du développement en série entière et donc $X \sim X'$.

> **Remarque.** On peut utiliser l'unicité du développement en série entière puisque la série entière définissant une fonction génératrice a un rayon de convergence non nul (supérieur ou égal à 1.)

2 D'après la question précédente, $G_X = G_{Y+Z}$. Soit $t \in [-1, 1]$. Alors $|t^Y| \leq 1$ donc $t^Y \in L^1$. D'après la formule de transfert, $G_Y(t) = \mathbb{E}(t^Y)$. De même, $G_Z(t) = \mathbb{E}(t^Z)$ et $G_{Y+Z}(t) = \mathbb{E}(t^{Y+Z}) = \mathbb{E}(t^Y t^Z)$. Comme Y et Z sont indépendantes, t^Y et t^Z le sont également. Ainsi $\mathbb{E}(t^{Y+Z}) = \mathbb{E}(t^Y)\mathbb{E}(t^Z)$. Finalement, $G_X = G_{Y+Z} = G_Y G_Z$.

3 Posons $q = 1 - p$ et rappelons que $G_X(t) = (q + pt)^n$.
Supposons $n \geq 2$. En se donnant des variables aléatoires Y et Z indépendantes telles que $Y \sim \mathcal{B}(n-1, q)$ et $Z \sim \mathcal{B}(1, p)$, on a $G_X = G_Y G_Z = G_{Y+Z}$ puis $X \sim Y + Z$ en utilisant les questions précédentes. De plus, Y et Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et ni Y ni Z ne sont constantes presque sûrement. Ainsi X est décomposable.
Réciproquement, supposons que $n = 1$. Soient Y et Z des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X \sim Y + Z$. Remarquons alors que si $k \geq 2$, $\{Y = k\} \subset \{X \geq k\}$ donc $\mathbb{P}(Y = k) \leq \mathbb{P}(X \geq k) = 0$ puis $\mathbb{P}(Y = k) = 0$. De même, $\mathbb{P}(Y = k) = 0$. Ainsi G_Y et G_Z sont polynomiales de degré au plus 1. Comme G_X est également polynomiale de degré 1, l'égalité $G_X = G_Y G_Z$ donne que G_Y ou G_Z est une fonction constante. Ceci signifie que Y ou Z est constante presque sûrement (en fait, nulle presque sûrement). Ainsi X n'est pas décomposable.

4 **4.a** Remarquons que

$$(\deg U, \deg V) \in \{(0,4), (1,3), (2,2), (3,1), (4,0)\}$$

On peut supposer sans perte de généralité que U et V sont unitaires.
Supposons que $\deg U = \deg V = 2$. Il existe alors $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}_+)^4$ tel que $U(T) = T^2 + aT + b$ et $V(T) = T^2 + cT + d$. En identifiant les coefficients de A et UV, on obtient, $\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d + ac = 0 \\ ad + bc = 2 \\ bd = 1 \end{cases}$. Comme a, b, c, d sont positifs, on obtient $a = c = 0$ ce qui contredit $ad + bc = 2$.

Supposons que $\deg U = 1$ et $\deg V = 3$. En écrivant $U = T + a$ et $V = T^3 + bT^2 + cT + d$, on obtient $\begin{cases} a + b = 0 \\ ab + c = 0 \\ c + d = 2 \\ ad = 1 \end{cases}$.
Comme a, b, c, d sont positifs, on obtient $a = b = 0$, ce qui contredit $ad = 1$.
De la même manière, on ne peut avoir $\deg U = 3$ et $\deg V = 1$.
Ainsi U ou V est constant.

4.b Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$. Soit Y et Z des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(1/2)$. Alors

$$G_X(T) = \frac{1}{4}T^2 + \frac{1}{2}T + \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\right)^2 = G_Y(T)G_Z(T) = G_{Y+Z}(T)$$

donc $X \sim Y + Z$ et X est décomposable.
Par ailleurs, on vérifie aisément que $G_{X^2} = \frac{1}{4}A$. Soient Y et Z des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X^2 \sim Y + Z$. Comme X^2 est à valeurs dans $[\![0, 4]\!]$, on prouve comme à la question précédente que Y et Z sont presque sûrement à valeurs dans $[\![0, 4]\!]$. Ainsi G_Y et G_Z sont polynomiales et $G_Y G_Z = \frac{1}{4}A$. D'après la question précédente, G_Y ou G_Z est constante, ce qui prouve que Y ou Z est constante presque sûrement (en fait, nulle presque sûrement). Ainsi X^2 n'est pas décomposable.

$\boxed{5}$ **5.a** Pour tout $\omega \in \Omega$, il existe un unique couple d'entiers $(Q(\omega), R(\omega))$ tel que $X(\omega) = aQ(\omega) + R(\omega)$ (division euclidienne de $X(\omega)$ par a). Ceci garantit l'existence et l'unicité du couple (Q, R) demandées par l'énoncé.

5.b X est à valeurs dans $[\![0, n-1]\!]$ donc, puisque $n = ab$, (Q, R) est à valeurs dans $[\![0, b-1]\!] \times [\![0, a-1]\!]$. Par unicité du quotient et du reste d'une division euclidienne

$$\forall (q, r) \in [\![0, b-1]\!] \times [\![0, a-1]\!],\ \mathbb{P}((Q, R) = (q, r)) = \mathbb{P}(X = aq + r) = \frac{1}{n}$$

car $aq + r \in [\![0, n-1]\!]$.
On récupère les lois marginales à partir de la loi conjointe,

$$\forall q \in [\![0, b-1]\!],\ \mathbb{P}(Q = q) = \sum_{r=0}^{a-1} \mathbb{P}((Q, R) = (q, r)) = \frac{a}{n} = \frac{1}{b}$$
$$\forall r \in [\![0, a-1]\!],\ \mathbb{P}(R = r) = \sum_{q=0}^{b-1} \mathbb{P}((Q, R) = (q, r)) = \frac{b}{n} = \frac{1}{a}$$

Autrement dit Q et R suivent des lois uniformes respectivement sur $[\![0, b-1]\!]$ et $[\![0, a-1]\!]$.

5.c Posons $Y = aQ$. Remarquons que Y suit une loi uniforme sur $\{ak,\ k \in [\![0, b-1]\!]\}$. De plus,

$$\forall (k, r) \in [\![0, b-1]\!] \times [\![0, a-1]\!],\ \mathbb{P}(Y = ak, R = r) = \mathbb{P}(X = ak + r) = \frac{1}{n} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} = \mathbb{P}(Y = ak)\mathbb{P}(R = r)$$

Ainsi Y et R sont indépendantes. De plus, $a \geq 2$ et $b \geq 2$ donc Y et R ne sont pas presque sûrement constantes. Ainsi X est décomposable.
On en déduit que

$$G_X(T) = G_Y(T)G_R(T) = \left(\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} T^{ak}\right)\left(\frac{1}{a}\sum_{r=0}^{a-1} T^r\right)$$

$\boxed{6}$ On posera dans cette question $W(T) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$.

6.a Supposons acquis le résultat de l'énoncé et montrons qu'alors X est indécomposable. Soient Y et Z des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X \sim Y + Z$. On montre comme précédemment que Y et Z sont presque sûrement à valeurs dans $[\![0, n-1]\!]$; on en déduit notamment que G_Y et G_Z sont des polynômes. De plus, $G_X = G_Y G_Z$. Notons α et β les coefficients dominants respectifs de G_Y et G_Z et posons $U = G_X/\alpha$ et $V = G_X/\beta$ de sorte que U et V sont unitaires. Remarquons également que $G_X = \frac{1}{n}W$. L'égalité $G_X = G_Y G_Z$ donne alors $W = UV$ en divisant chacun des polynômes par son coefficient dominant respectif. Les coefficients de G_Y et G_Z sont positifs en tant que probabilités ; ceux de U et V le sont donc également. D'après le résultat admis, U ou V est constant donc G_Y ou G_Z également. Ceci signifie que Y ou Z est presque sûrement constante (presque sûrement nulle en fait).

6.b Remarquons que $W(T) = \frac{T^n - 1}{T - 1}$. Ainsi W est simplement scindé sur $\mathbb{C}$ et ses racines sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité distinctes de 1. Comme $UV = W$, il existe une partie R de $\mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ de cardinal r telle que $U(T) = \prod_{\omega \in R}(T - \omega)$. Alors

$$T^r U\left(\frac{1}{T}\right) = T^r \prod_{\omega \in R}\left(\frac{1}{T} - \omega\right) = \prod_{\omega \in R}(1 - \omega T) = \left(\prod_{\omega \in R} \omega\right)\left(\prod_{\omega \in R}\left(\frac{1}{\omega} - T\right)\right) = C\prod_{\omega \in R}\left(T - \frac{1}{\omega}\right)$$

en posant $C = \prod_{\omega \in R}(-\omega) = U(0)$. Pour $\omega \in R \subset \mathbb{U}$, $\frac{1}{\omega} = \overline{\omega}$. Ainsi

$$T^r U\left(\frac{1}{T}\right) = C\prod_{\omega \in R}(T - \overline{\omega})$$

Comme U est à coefficients réels,

$$T^r U\left(\frac{1}{T}\right) = CU(T)$$

De plus, $|C| = \prod_{\omega\in R} |\omega| = 1$. Mais $C = U(0)$ est le coefficient constant de U. C'est donc un réel positif et $C = 1$, puis $T^r U\left(\frac{1}{T}\right) = U(T)$.

On montre de la même manière que $T^s V\left(\frac{1}{T}\right) = V(T)$.

6.c Comme $U(T) = T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$, $u_k = u_{r-k}$ pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$. Comme le coefficient de T^r dans W(T) vaut 1, $\sum_{k=0}^{r} u_{r-k}v_k = 1$, en convenant que $u_0 = u_r = v_0 = v_s = 1$. Puisque $u_r v_0 = 1$, et $u_{r-k} = u_k$, $\sum_{k=1}^{r} u_k v_k = 0$. Comme les termes de la somme sont positifs, $u_k v_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$.

6.d On raisonne par récurrence. Tout d'abord, $(u_0, v_0) = (1, 1) \in \{0, 1\}^2$.
Supposons qu'il existe $k \in [\![0, r-1]\!]$ tel que $(u_j, v_j) \in \{0, 1\}^2$ pour tout $j \in [\![0, k]\!]$. Comme le coefficient de T^{k+1} dans $W = UV$ vaut 1, on a :

$$\sum_{j=0}^{k+1} u_j v_{k+1-j} = 1$$

Puisque $u_0 = v_0 = 1$, on a donc

$$u_{k+1} + v_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} u_j v_{k+1-j} = 1$$

Par hypothèse de récurrence, on peut affirmer que $\sum_{j=1}^{k} u_j v_{k+1-j} \in \mathbb{N}$ donc. De plus, u_{k+1} et v_{k+1} sont positifs. On en déduit que $u_{k+1} + v_{k+1} \in \{0, 1\}$. Mais d'après la question précédente, l'un au moins des deux coefficients u_{k+1} et v_{k+1} est nul. On en déduit immédiatement que $(u_{k+1}, v_{k+1}) \in \{0, 1\}^2$.
Par récurrence, $(u_k, v_k) \in \{0, 1\}^2$ pour tout $k \in [\![0, r]\!]$.

6.e On montre tout d'abord que $v_k \in \{0, 1\}$ pour tout $k \in [\![0, s]\!]$. C'est déjà vrai pour $k \in [\![0, r]\!]$ d'après la question précédente. Supposons alors qu'il existe $k \in [\![r, s-1]\!]$ tel que $v_j \in \{0, 1\}$ pour tout $j \in [\![0, k]\!]$. Le coefficient de T^{k+1} dans $W = UV$ vaut 1. On a donc

$$\sum_{j=0}^{r} u_j v_{k+1-j} = 1$$

ou encore

$$v_{k+1} + \sum_{j=1}^{r} u_j v_{k+1-j} = 1$$

A nouveau, $\sum_{j=1}^{r} u_j v_{k+1-j} \in \mathbb{N}$ et v_{k+1} est positif donc $v_{k+1} \in \mathbb{N}$. On a donc montré que $v_k \in \{0, 1\}$ pour tout $k \in [\![0, s]\!]$.
Finalement $n = W(1) = U(1)V(1)$ et $U(1) = \sum_{k=0}^{r} u_k \in \mathbb{N}$ et $V(1) = \sum_{k=0}^{r} v_k \in \mathbb{N}$. Comme n est premier, $U(1) = \sum_{k=0}^{r} u_k = 1$ ou $V(1) = \sum_{k=0}^{s} v_k = 1$. Comme U et V sont à coefficients positifs et que $u_0 = v_0 = 1$, on a donc $U = 1$ ou $V = 1$. D'après la question **6.a**, X est indécomposable.

7 Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat admis dans l'énoncé, il existe des variables aléatoires indépendantes $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ toutes constantes égales à $\frac{a}{m}$. Il est alors clair que $X \sim \sum_{i=1}^{m} X_{m,i}$. Ainsi X est infiniment divisible.

8 **8.a** Remarquons que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left\{X_i > \frac{M}{n}\right\} \subset \{X > M\} \subset \{|X| > m\} = \varnothing$$

Comme les X_i sont indépendantes, on en déduit que

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$$

Comme les X_i sont de même loi, tous les facteurs sont égaux. Ainsi

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$$

puis

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(X_i \leq \frac{M}{n}\right) = 1$$

De la même manière,

$$\bigcap_{i=1}^{n}\left\{X_i < -\frac{M}{n}\right\} \subset \{X < -M\} \subset \{|X| > m\} = \varnothing$$

Comme les X_i sont indépendantes, on en déduit que

$$\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i < -\frac{M}{n}\right) = 0$$

Comme les X_i sont de même loi, tous les facteurs sont égaux. Ainsi

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(X_i < -\frac{M}{n}\right) = 0$$

puis

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(X_i \geq -\frac{M}{n}\right) = 1$$

Enfin, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\left\{|X_i| \leq \frac{M}{n}\right\} = \left\{X_i \leq \frac{M}{n}\right\} \cap \left\{X_i \geq -\frac{M}{n}\right\}$ est presque sûr en tant qu'intersection d'événements presque certains.

8.b Puisque $X_i^2 \leq \frac{M^2}{n^2}$ presque sûrement,

$$\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 \leq \mathbb{E}(X_i^2) \leq \frac{M^2}{n^2}$$

Par indépendance des X_i,

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) \leq \frac{M^2}{n}$$

$\boxed{9}$ Par passage à la limite dans l'inégalité précédente lorsque $n \to +\infty$, on obtient $\mathbb{V}(X) = 0$. On en déduit que X est presque sûrement constante.

$\boxed{10}$ Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
Si $p \in \{0, 1\}$, X est presque sûrement constante donc infiniment divisible d'après la sous-partie précedente.
Sinon X est bornée mais pas presque sûrement constante. Donc X n'est pas infiniment divisible d'après la sous-partie précedente.

$\boxed{11}$ Posons $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\lambda = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. Alors

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(t-1)} = e^{\lambda(t-1)}$$

donc $S \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

$\boxed{12}$ Supposons que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat admis en début d'énoncé, il existe des variables aléatoires $X_1, \dots, X_m$ mutuellement indépendantes suivant la même loi $\mathcal{P}(\lambda/m)$. D'après la question précédente, $\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$ donc $X \sim \sum_{i=1}^{m} X_i$. On en déduit que X est infiniment divisible.

$\boxed{13}$ Posons $X = \sum_{i=1}^{r} iX_i$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On se donne des variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_r$ mutuellement indépendantes telles que $Y_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i/m)$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

> **Remarque.** Ce n'est pas exactement le résultat admis dans l'énoncé mais c'est un résultat qui est tout de même au programme et qui, de plus, est utilisé par l'énoncé !

Posons $Y = \sum_{i=1}^{r} iY_i$. D'après l'énoncé, il existe des variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_m$ mutuellement indépendantes suivant la même loi que Y. Posons $Z = \sum_{i=1}^{m} Z_i$. Pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}
G_Z(t) &= \prod_{i=1}^{m} G_{Z_i}(t) && \text{car les } Z_i \text{ sont mutuellement indépendantes} \\
&= G_Y(t)^m && \text{car } Z_i \sim Y \text{ pour tout } i \in [\![1, m]\!] \\
&= \left(\prod_{i=1}^{r} G_{iY_i}(t)\right)^m && \text{car les } iY_i \text{ sont mutuellement indépendantes} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{r} \mathbb{E}(t^{iY_i})\right)^m \\
&= \left(\prod_{i=1}^{r} G_{Y_i}(t^i)\right)^m \\
&= \left(\prod_{i=1}^{r} e^{\lambda_i(t^i-1)/m}\right)^m \\
&= \prod_{i=1}^{r} e^{\lambda_i(t^i-1)} \\
&= \prod_{i=1}^{r} G_{X_i}(t^i) \\
&= \prod_{i=1}^{r} \mathbb{E}(t^{iX_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{r} G_{iX_i}(t) \\
&= G_X(t) && \text{car les } iX_i \text{ sont mutuellement indépendantes}
\end{aligned}$$

Ainsi $X \sim Z = \sum_{i=1}^{m} Z_i$. On en déduit que X est infiniment divisible.

> **Remarque.** On peut en fait montrer un résultat plus général. En effet, si Y est une variable aléatoire indéfiniment divisible, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, αY est infiniment divisible. Par ailleurs, on peut montrer qu'une somme de variables aléatoires indépendantes infiniment divisibles est encore infiniment divisible. On en déduit alors que $\sum_{i=1}^{r} iX_i$ est infiniment divisible puisque les X_i le sont.

14 **14.a** Comme $B \sqcup \overline{B} = \Omega$, $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap \overline{B})$ puis $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$. De même, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$. On en déduit par inégalité triangulaire que

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbb{P}(B \cap \overline{A})| \leq \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$$

14.b D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq +\mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y \neq n\}) + \mathbb{P}(\{Y = n\} \cap \{X \neq n\})$$

Soit $t \in [-1, 1]$. Par inégalité trianglaire à nouveau,

$$|G_X(t) - G_Y(t)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n))t^n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)||t|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$$

On en déduit avec notre remarque initiale que

$$|G_X(t) - G_Y(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y \neq n\}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y = n\} \cap \{X \neq n\})$$

Or
$$\{X \neq Y\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{X = n\} \cap \{Y \neq n\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{Y = n\} \cap \{X \neq n\}$$
donc
$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y \neq n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y = n\} \cap \{X \neq n\})$$
et finalement
$$|G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y)$$

$\boxed{15}$ **15.a** Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $Z_n = \bigcup_{i\geq n} \{U_i \neq 0\}$. Tout d'abord, les $\{U_i \neq 0\}$ sont bien des événements car les U_i sont des variables aléatoires. On en déduit que Z_n est bien un événement en tant que réunion dénombrable d'événements. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = Z_{n+1} \cup \{U_n \neq 0\} \subset Z_n$ donc (Z_n) est bien décroissante pour l'inclusion.
Enfin, par sous-additivité,
$$0 \leq \mathbb{P}(Z_n) \leq \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$$

Or la série $\sum \mathbb{P}(U_i \neq 0)$ converge donc la suite de ses restes converge vers 0. Ainsi $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(U_i \neq 0) = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$ par encadrement.

15.b Notons F l'événement $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0\}$ est fini. Alors $\overline{F} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$. Par continuité décroissante, $\mathbb{P}(\overline{F}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$ puis $\mathbb{P}(F) = 1$.

15.c Notons D l'événement «S est définie». Alors $F \subset D$ donc $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(D) = 1$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient avec la question précédente :
$$\forall t \in [-1, 1],\ |G_S(t) - G_{S_n}(t)| \leq 2\mathbb{P}(S \neq S_n)$$
puis, en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme uniforme sur $[-1, 1]$:
$$\|G_{S_n} - G_S\|_\infty \leq 2\mathbb{P}(S \neq S_n)$$
Comme les U_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, elles sont positives de sorte que
$$\{S \neq S_n\} = \{S - S_n \neq 0\} = \bigcup_{i\geq n} \{U_i \neq 0\} = Z_n$$
Ainsi
$$\|G_{S_n} - G_S\|_\infty \leq 2\mathbb{P}(Z_n)$$
Par encadrement, $\|G_{S_n} - G_S\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. (G_{S_n}) converge uniformément vers G_S.

$\boxed{16}$ **16.a** Tout d'abord, $\mathbb{P}(X_i = 0) = e^{-\lambda_i}$ donc $\mathbb{P}(X_i \neq 0) = 1 - e^{-\lambda_i}$. Comme $\sum \lambda_i$ converge, $\lambda_i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\mathbb{P}(X_i \neq 0) = 1 - e^{-\lambda_i} \underset{i\to+\infty}{\sim} \lambda_i$. Puisque $\sum \lambda_i$ est un série à termes positifs convergente, $\sum \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ converge également.

16.b Comme les X_i sont mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, la question **15.c** montre que $\sum_{i\geq 1} X_i$ converge presque sûrement. Si on note S sa somme et S_n sa somme partielle de rang n, la même question montre que (G_{S_n}) converge uniformément vers G_S sur $[-1, 1]$. Or pour tout $t \in [-1, 1]$,
$$G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(t-1)} = \exp\left((t-1)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\lambda(t-1)}$$
Comme la convergence uniforme implique la convergence simple, on obtient par unicité de la limite,
$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = e^{\lambda(t-1)}$$
Ainsi $S \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

16.c Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\{i\mathrm{X}_i \neq 0\} = \{\mathrm{X}_i \neq 0\}$. On en déduit comme à la question précédente que $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} i\mathrm{X}_i$ converge presque sûrement et que la suite $\left(\prod_{i=1}^r \mathrm{G}_{i\mathrm{X}_i}\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément et donc simplement vers G_X sur $[-1,1]$. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathrm{Y}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\mathrm{Y}_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i/m)$. Pour les mêmes raisons, la série $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} i\mathrm{Y}_i$ converge presque sûrement. On note Y sa somme. A nouveau, la suite $\left(\prod_{i=1}^r \mathrm{G}_{i\mathrm{Y}_i}\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément et donc simplement vers G_Y sur $[-1,1]$.

On se donne ensuite $\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_m$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que Y. Posons $\mathrm{Z} = \sum_{i=1}^m \mathrm{Z}_i$.
Pour tout $t \in [-1,1]$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G}_\mathrm{Z}(t) &= \prod_{i=1}^m \mathrm{G}_{\mathrm{Z}_i}(t) \qquad \text{car les } \mathrm{Z}_i \text{ sont mutuellement indépendantes}\\
&= \mathrm{G}_\mathrm{Y}(t)^m \qquad \text{car } \mathrm{Z}_i \sim \mathrm{Y} \text{ pour tout } i \in [\![1,m]\!]\\
&= \left(\lim_{r\to+\infty} \prod_{i=1}^r \mathrm{G}_{i\mathrm{Y}_i}(t)\right)^m\\
&= \lim_{r\to+\infty} \left(\prod_{i=1}^r \mathrm{G}_{i\mathrm{Y}_i}(t)\right)^m\\
&= \lim_{r\to+\infty} \left(\prod_{i=1}^r \mathbb{E}(t^{i\mathrm{Y}_i})\right)^m\\
&= \lim_{r\to+\infty} \left(\prod_{i=1}^r \mathrm{G}_{\mathrm{Y}_i}(t^i)\right)^m\\
&= \lim_{r\to+\infty} \left(\prod_{i=1}^r e^{\lambda_i(t^i-1)/m}\right)^m\\
&= \lim_{r\to+\infty} \prod_{i=1}^r e^{\lambda_i(t^i-1)}\\
&= \lim_{r\to+\infty} \prod_{i=1}^r \mathrm{G}_{\mathrm{X}_i}(t^i)\\
&= \lim_{r\to+\infty} \prod_{i=1}^r \mathbb{E}(t^{i\mathrm{X}_i})\\
&= \lim_{r\to+\infty} \prod_{i=1}^r \mathrm{G}_{i\mathrm{X}_i}(t)\\
&= \mathrm{G}_\mathrm{X}(t)
\end{aligned}
$$

Ainsi $\mathrm{X} \sim \mathrm{Z} = \sum_{i=1}^m \mathrm{Z}_i$. On en déduit que X est infiniment divisible.

17 La suite (λ_k) est définie de manière unique par $\lambda_1 = \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{X}=1)}{\mathbb{P}(\mathrm{X}=0)}$ et la relation de récurrence

$$\forall k \geq 2,\ \lambda_k = \frac{1}{k\mathbb{P}(\mathrm{X}=0)}\left(k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) - \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j\mathbb{P}(\mathrm{X}=k-j)\right)$$

18 Par définitiion des λ_k,

$$k\lambda_k\mathbb{P}(\mathrm{X}=0) = k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) - \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j\mathbb{P}(\mathrm{X}=k-j)$$

Par inégalité triangulaire et positivité des probabilités,

$$k|\lambda_k|\mathbb{P}(\mathrm{X}=0) \leq k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) + \sum_{j=1}^{k-1} j|\lambda_j|\mathbb{P}(\mathrm{X}=k-j) \leq k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) + k\sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\mathbb{P}(\mathrm{X}=k-j)$$

puis

$$|\lambda_k|\mathbb{P}(X=0) \leq \mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\mathbb{P}(X=k-j)$$

Remarquons ensuite que pour $\ell \neq 0$, $\mathbb{P}(X=\ell) \leq 1-\mathbb{P}(X=0)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\mathbb{P}(X=k-j) \leq (1-\mathbb{P}(X=0))\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}|\lambda_j|\right)$$

19 L'inégalité précédente peut se réécrire

$$\left(1+\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\right)\mathbb{P}(X=0) \leq 1+\sum_{j=1}^{k-1}|\lambda_j|$$

En posant $u_k = 1+\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|$, on a donc $0 \leq u_k \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)}u_{k-1}$. Comme $u_0 = 1$, on montre aisément par récurrence que $u_k \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est le résultat attendu.

20 D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda_k| \leq 1+\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}$$

donc

$$|\lambda_k|\mathrm{P}(X=0)^k \leq 1$$

La suite $(\lambda_k\mathbb{P}(X=0)^k)$ est donc bornée et $\rho(X) \geq \mathbb{P}(X=0)$ par définition du rayon de convergence.

21 Par dérivation terme à terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence,

$$\forall t \in]-\rho(X),\rho(X)[,\ H_X'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\lambda_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\lambda_{k+1}t^k$$

Par ailleurs,

$$\forall t \in [-1,1],\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)t^k$$

Puisque $\sigma(X) = \min(1,\rho(X))$, on obtient par produit de Cauchy de deux séries entières :

$$\forall t \in]-\sigma(X),\sigma(X)[,\ H_X'(t)G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}(j+1)\lambda_{j+1}\mathbb{P}(X=k-j)\right)t^k$$

Mais, par changement d'indice,

$$\sum_{j=0}^{k}(j+1)\lambda_{j+1}\mathbb{P}(X=k-j) = \sum_{j=1}^{k+1} j\lambda_j\mathbb{P}(X=k+1-j) = (k+1)\mathbb{P}(X=k+1)$$

Ainsi

$$\forall t \in]-\sigma(X),\sigma(X)[,\ H_X'(t)G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\lambda_{k+1}\mathbb{P}(X=k+1)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}k\lambda_k t^{k-1} = G_X'(t)$$

par dérivation terme à terme de la série entière définissant G_X.
Comme G_X est solution de l'équation différentielle, $y' = H_X'y$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in]-\sigma(X),\sigma(X)[,\ G_X(t) = C\exp(H_X(t))$$

Comme $G_X(0) = \mathbb{P}(X=0)$ et $H_X(0) = \ln(\mathbb{P}(X=0))$, on obtient $C = 1$.

22 Comme X et Y sont indépendantes, pour tout t tel que $|t| < \min(\sigma(X),\sigma(Y))$,

$$\exp(H_{X+Y}(t)) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \exp(H_X(t))\exp(H_Y(t)) = \exp(H_X(t)+H_Y(t))$$

puis, par passage au logarithme,

$$H_{X+Y}(t) = H_X(t)+H_Y(t)$$

23 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. ALors

$$k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X = k - j) \geq k\lambda_k \mathbb{P}(X = 0)$$

car tous les termes de la somme sont positifs. Ainsi

$$0 \leq \lambda_k \leq \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 0)}$$

Comme la série $\sum \mathbb{P}(X = k)$ converge, il en est de même de la série $\sum \lambda_k$ par comparaison de séries à termes positifs.

24 Puisque $\sum \lambda_k$ converge, $\rho(X) \geq 1$. Avec la question **21**

$$\forall t \in]-1, 1[, \ G_X(t) = \exp(H_X(t))$$

Mais puisque les séries $\sum \mathbb{P}(X = k)$ et $\sum \lambda_k$ convergent, les séries entières $\sum \mathbb{P}(X = k)t^k$ et $\sum \lambda_k t^k$ convergent normalement sur $[-1, 1]$. On en déduit que G_X et H_X sont continues sur $[-1, 1]$. L'égalité précédente se prolonge alors sur $[-1, 1]$:

$$\forall t \in [-1, 1], \ G_X(t) = \exp(H_X(t))$$

En évaluant en 1, on obtient :

$$1 = G_X(1) = \exp(H_X(1)) = \exp\left(\ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k\right)$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = -\ln(\mathbb{P}(X = 0))$$

25 D'après la question précédente,

$$\forall t \in [-1, 1], \ G_X(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t^k - 1)\right)$$

Or en posant $S = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$, on a prouvé à la question **16.c** que

$$\begin{aligned}
\forall t \in [-1, 1], \ G_S(t) &= \lim_{r\to+\infty} \prod_{k=1}^{r} G_{kX_k}(t) \\
&= \lim_{r\to+\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} \exp\left(\lambda_k(t^k - 1)\right) \\
&= \lim_{r\to+\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k(t^k - 1)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t^k - 1)\right) \qquad \text{par continuité de l'expontentielle} \\
&= G_X(t)
\end{aligned}$$

On en déduit que $X \sim S = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$.

26 **26.a** Posons $S = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}$. Alors $\bigcap_{k=1}^{n} \{X_{n,k} < 0\} \subset \{S < 0\}$ donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_{n,k} < 0\}\right) \leq \mathbb{P}(\{S < 0\}) = 0$$

car S est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Comme les $X_{n,k}$ sont indépendants et de même loi, on a donc $\mathbb{P}(X_{n,1} < 0)^n = 0$ puis $\mathbb{P}(X_{n,1} < 0) = 0$ et enfin $\mathbb{P}(X_{n,1} \geq 0) = 1$.

26.b Notons $\mathrm{P} = \bigcap_{k=1}^{n} \{X_{n,k} \geq 0\}$. Alors $\mathbb{P}(\mathrm{P}) = \mathbb{P}(X_{n,1} \geq 0)^n = 1$. De plus,

$$\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \mathrm{P}) + \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \overline{\mathrm{P}})$$

Comme $\{S = 0\} \cap \overline{\mathrm{P}} \subset \overline{\mathrm{P}}$,

$$0 \leq \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \overline{\mathrm{P}}) \leq \mathbb{P}(\overline{\mathrm{P}}) = 0$$

de sorte que $\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \mathrm{P})$. Or

$$\{S = 0\} \cap \mathrm{P} = \bigcap_{k=1}^{n} \{X_{n,k} = 0\}$$

donc, comme les $X_{n,k}$ sont indépendants et de loi,

$$\mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \mathrm{P}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n,k} = 0) = \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)^n$$

Or $S \sim X$ donc $\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(X = 0) > 0$. On en déduit que $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) > 0$.

26.c Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Alors

$$\{X_{n,1} = x\} \cap \left(\bigcap_{k=2}^{n} \{X_{n,k} = 0\}\right) \subset \{S = x\}$$

Ainsi, par indépendance des $X_{n,k}$,

$$0 \leq \mathbb{P}(X_{n,1} = x) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X_{n,k} = 0) \leq \mathbb{P}(S = x) = \mathbb{P}(X = x) = 0$$

puis

$$\mathbb{P}(X_{n,1} = x) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X_{n,k} = 0)$$

Comme les $X_{n,k}$ sont de même loi, la question précédente montre que $\mathbb{P}(X_{n,k} = 0) > 0$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ donc $\mathbb{P}(X_{n,1} = x) = 0$. Ainsi $X_{n,1}$ est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Comme les $X_{n,k}$ sont de même loi, elles sont toutes presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$.

27 **27.a** On a montré précédemment que $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)^n$. Comme $\mathbb{P}(X = 0) > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(X = 0))\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

27.b Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\{X_{n,1} = i\} \subset \overline{\{X_{n,1} = 0\}}$ donc

$$0 \leq \mathbb{P}(X_{n,1} = i) \leq 1 - \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)$$

On conclut avec le théorème des gendarmes que

$$\mathbb{P}(X_{n,1} = i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

28 **28.a** Comme les $X_{n,k}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, on peut généraliser la question **22** pour affirmer que

$$H_X = \sum_{k=1}^{n} H_{X_{n,k}} = nH_n$$

28.b Notons $H_n(t) = \ln(\mathbb{P}(X_{n,1} = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k t^k$. Par unicité du développement en série entière, la question précédente montre que $\lambda_k = n\mu_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par définition des μ_k et λ_k,

$$kn\mathbb{P}(X_{n,1} = k) = \sum_{j=1}^{k} nj\mu_j \mathbb{P}(X_{n,1} = k - j) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X_{n,1} = k - j)$$

29 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.D'après la question **27**,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X_{n,1} = k - j) = k\lambda_k$$

On en déduit avec la question précédente, $n\mathbb{P}(X_{n,1} = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\mathbb{P}(X_{n,1} = k) \geq 0$ donc $\lambda_k \geq 0$ par passage à la limite. Ceci signifie que X est λ-positive.

30 **30.a** Les questions précédentes montrent que si X est infiniment divisible, alors elle est λ-positive, autrement dit $(i) \implies (ii)$.
La question **25** montre que si X est λ-positive, alors il existe une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables de Poisson indépendantes telle que $X \sim \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$, autrement dit $(ii) \implies (iii)$.
Enfin, la question **16.c** montre l'implication $(iii) \implies (i)$.

30.b Vu la question suivante, je pense qu'il faut traiter le cas d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}(X = 1) > 0$. On remarque alors que $Y = X - 1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1) > 0$ de sorte qu'on peut appliquer à Y le résultat de la question précédente.
Il est alors clair que X est infiniment divisible si et seulement si Y l'est. En effet, la variable aléatoire constante égale à 1 est indépendante de toute variable aléatoire.

30.c Posons $Y = X - 1$ de sorte que Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = p > 0$. On calcule $G_Y(t) = \dfrac{p}{1 - qt}$ en posant $q = 1 - p$ puis

$$H_Y(t) = \ln(G_Y(t)) = \ln(p) - \ln(1 - qt) = \ln(p) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} t^k$$

Avec les notations de l'énoncé, on a donc $\lambda_k = \dfrac{q^k}{k} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que Y est λ-positive. Ainsi Y est infiniment divisible et X également.