

## Rayon de convergence

### Exercice 1 ★★

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  des séries entières de rayon de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ . On note  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ . On suppose de plus que  $a_n b_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $R = \min(R_a, R_b)$ .

### Exercice 2 ★★★

#### Règle de Cauchy

Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . Déterminer le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ .

### Exercice 3 ★★★

Soit  $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $b_n = \frac{a_n}{\sum_{k=0}^n a_k}$ . Comparer les rayons des séries entières  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ .

### Exercice 4 ★★

#### Mines-Ponts MP 2016

Soit  $q > 0$ , on pose  $a_n = q^{\sqrt{n}}$  si  $n$  est un carré d'entier et  $a_n = 0$  sinon. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ .

### Exercice 5 ★

#### Règle de d'Alembert

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$1. \sum \frac{(-1)^n z^n}{\sqrt{n}}$$

$$3. \sum \binom{2n}{n} z^n$$

$$2. \sum 2^n \ln(n) z^n$$

$$4. \sum (n + 2^n i) z^n$$

### Exercice 6 ★★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$1. \sum \cos(n) z^n$$

$$2. \sum \frac{\sin n}{n} z^n$$

$$3. \sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^n$$

$$4. \sum_{n \in \mathbb{N}^*} d_n z^n \text{ où } d_n \text{ est le nombre de diviseurs positifs de } n$$

$$5. \sum a_n z^n \text{ où } a_n \text{ est la } n^{\text{ème}} \text{ décimale de } \pi$$

### Exercice 7 ★★

#### Séries lacunaires

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$1. \sum z^{n^2}$$

$$2. \sum 2^n z^{2^n}$$

$$3. \sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$$

## Calcul de sommes de séries entières

### Exercice 8 ★

Prouver la convergence et calculer la somme de la série suivante  $\sum_{n \geq 0} (n+1) 3^{-n}$ .

### Exercice 9 ★★★

#### ENS (non PSI) PC 2019

On pose  $E$  l'ensemble des suites à valeurs réelles de limite nulle et

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Montrer que :

$$\forall a \in E, \exists \varphi(a) \in E, \forall x \in ]0, 1[, f_{\varphi(a)}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{f_a(t)}{1-t} dt$$

**Exercice 10 ★★**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$ .

1. Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$ .
2. Quel est le sens de variation de  $(a_n)$  ?
3. Déterminer une relation simple entre  $a_n$  et  $a_{n+2}$ . En déduire un équivalent de  $(a_n)$ .
4. On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série entière.
5. Déterminer  $f(x)$  pour  $x \in ]-R, R[$ .

**Exercice 11 ★★**

Déterminer le rayon de convergence et la somme de  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) x^n$ .

**Exercice 12 ★★****CCP MP 2018**

1. Montrer que  $\arctan$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .
2. On considère la série entière  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$ . Donner son rayon de convergence  $R$ . On note  $f(x)$  la somme.
3. Donner une expression simple de  $f'$  et de  $f$ .
4. Que peut-on dire de la convergence sur  $[-R, R]$  ?
5. Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$ .

**Exercice 13 ★★★****Mines-Ponts MP 2018**

On note  $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Donner le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ .
2. Calculer la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

**Exercice 14 ★****Petites Mines PC 2017**

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} x^n$ .

**Exercice 15 ★★**

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ .
2. Déterminer  $f(x)$  pour  $x \in ]-R, R[$ .

**Exercice 16****CCINP MP 2022**

Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes.

1.  $\sum_{n \geq 1} n x^n$  ;
2.  $\sum_{n \geq 1} 2n x^{2n}$  ;
3.  $\sum_{n \geq 1} 2n^{(-1)^n} x^{2n}$ .

## Etude au bord du disque de convergence

### Exercice 17 ★★

CCP MP

On note  $f(x)$  la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ .

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série entière.
2. Y a-t-il convergence en  $R$  et  $-R$  ?
3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .
4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$ .

### Exercice 18 ★★

CCP MP 2018

Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $r_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta}$  et  $b_n = \frac{1}{r_n}$ .

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum b_n x^n$ .
2. Étudier la convergence de la série pour  $x = R$  et  $x = -R$ .

### Exercice 19 ★★★

Soit  $(a_n)$  une suite de premier terme  $a_0 > 0$  et telle que  $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ .
2. Étudier la convergence au bord de l'intervalle de convergence.

### Exercice 20 ★★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

1. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln(n) x^n$ .

On note  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n$ .

2. Montrer que

$$\forall x \in ]-1, 1[, S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

3. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} S(x)$ .

### Exercice 21 ★★

CCP MP

Soit  $(a_n)$  la suite définie par  $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Déterminer la limite de  $(a_n)$ .
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$ .
3. Déterminer le domaine de définition de  $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

On pourra déterminer la limite de  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$ .

### Exercice 22 ★★

Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ .

**Exercice 23 ★★**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  deux séries convergentes. On suppose que leur produit de Cauchy  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$  converge.

Montrer que  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ .

**REMARQUE.** On ne suppose pas que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  convergent absolument.

**Exercice 24 ★★★★★**

On considère un réel  $\theta \in ]0, 2\pi[$ .

1. On pose  $g : r \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n e^{in\theta}}{n}$ . Justifier que  $g$  est définie sur  $] -1, 1[$ .
2. Justifier que  $g$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ . Calculer  $g'(r)$ .
3. En déduire  $g(r)$  pour  $r \in ] -1, 1[$ .
4. Justifier que  $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$  converge.
5. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) + i \frac{\pi - \theta}{2}$$

**Exercice 25 ★★★**

Justifier la convergence et déterminer la somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ .

**Exercice 26 ★**

Justifier la convergence et déterminer la somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

**Equations différentielles****Exercice 27 ★★**

Soit  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$ .

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par  $f$ .
2. En déduire que  $f$  est développable en série entière en 0 et déterminer ce développement en série entière.

**Exercice 28 ★★**

Soit  $f : x \in ] -1, 1[ \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

1. Justifier que  $f$  est développable en série entière.
2. Montrer que  $f$  vérifie une équation différentielle d'ordre un.
3. En déduire le développement en série entière.
4. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

**Exercice 29 ★★★**

On considère la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$  dont on note  $S(x)$  la somme.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Montrer que  $S$  est solution sur son intervalle de convergence de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \quad x(x-4)y' + (x+2)y = 2$$

3. Résoudre l'équation homogène  $(\mathcal{E}_H)$  associée à  $(\mathcal{E})$  sur  $]0, 4[$ .

4. Vérifier que  $x \mapsto 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) - 2\sqrt{\frac{4-x}{x}}$  est une primitive de  $x \mapsto \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$  sur  $]0, 4[$ .

5. En déduire  $S(x)$  pour  $x \in ]0, 4[$ .

6. Calculer  $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ .

**Exercice 30 ★★**

On considère la suite  $(a_n)$  définie par  $a_0 = a_1 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$$

1. Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante et diverge vers  $+\infty$ .
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ .
3. Déterminer la somme  $S(x)$  de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  à l'aide d'une équation différentielle.
4. En déduire que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e}$ .

**Exercice 31 ★★****CCINP**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ . On note  $S$  sa somme.
2. Montrer que  $S$  vérifie une équation différentielle du type  $y'' + y' + y = f$  où l'on précisera  $f$ .
3. Résoudre l'équation différentielle et en déduire  $S$ .

**Produit de Cauchy****Exercice 32 ★★****Centrale PC**

On pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} H_n x^n$ .

**Exercice 33 ★★★**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$$

On note  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n x^n$ .

1. On suppose que  $R = \frac{1}{4}$ . Montrer que

$$\forall x \in ]-R, R[ \setminus \{0\}, S(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

2. En déduire  $u_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Justifier qu'on a bien  $R = \frac{1}{4}$ .

**Exercice 34 ★★★****Nombre d'involutions**

On rappelle qu'une involution d'un ensemble  $E$  est une application  $f : E \rightarrow E$  telle que  $f \circ f = \text{Id}_E$ . On note  $I_n$  le nombre d'involutions de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On convient que  $I_0 = 1$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$  est supérieur ou égal à 1. On note  $S(x)$  sa somme.

3. Montrer que

$$\forall x \in ]-1, 1[, S'(x) = (1+x)S(x)$$

4. En déduire une expression de  $S(x)$  puis de  $I_n$ .

**Exercice 35****E3A PC 2020**

On considère la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_0 = 1$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq 1$ .

2. On considère la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour  $x \in ]-1, 1[$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

3. a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ .
- b. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$ .
- c. On pose, lorsque cela est possible,  $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$ , produit de Cauchy réel des deux séries  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  et  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ . Justifier que le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$  est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel  $n$ , une expression de  $w_n$  à l'aide de la suite  $(a_n)$ .

- d. En déduire que l'on a pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$ .

4. Démontrer alors que pour tout  $x \in [0, 1[$ ,  $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ .

5. En déduire, pour tout  $x \in [0, 1[$ , une expression de  $f(x)$  à l'aide de fonctions usuelles.

On utilisera sans le redémontrer que l'on a :  $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ .

6. Justifier que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$  converge et calculer sa somme.

## Développements en série entière

### Exercice 36 ★★★★★

ENS MP 2011

Soit  $\mathbb{K}$  un corps fini et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de  $\mathbb{K}[X]$ . On pose

$$\zeta(t) = \prod_{P \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - t^{\deg P}}$$

1. Montrer que  $\zeta$  est défini sur un intervalle du type  $[0, t_0[$ .
2. Montrer que  $\zeta$  est développable en série entière au voisinage à droite de 0 et déterminer son développement.

### Exercice 37 ★★★

Nombres de Bell

On pose  $f(x) = e^{e^x}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est développable en série entière en 0 et donner les coefficients  $A_n$  de ce développement comme sommes de séries.

### Exercice 38 ★★

Déterminer le développement en série entière en 0 de  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt$ .

### Exercice 39 ★★

Déterminer le développement en série entière en 0 de  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .

### Exercice 40 ★★

Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . Développer en série entière  $f(x) = \frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1}$ .

### Exercice 41 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Développer en série entière  $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{2x + x^2})$ .

### Exercice 42 ★★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

On pose pour  $x \in \mathbb{R}$ , lorsque c'est possible :  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2ix}$ .

1. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $g$  n'est pas développable en série entière.

### Exercice 43 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Développer en séries entières les fonctions suivantes au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence :

1.  $f(z) = \frac{1}{6z^2 - 5z + 1}$ ,  $z \in \mathbb{C}$
2.  $g(x) = \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$
3.  $h(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$

### Exercice 44 ★★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023

Soit  $q \in ]-1, 1[$ .

1. Montrer qu'il existe une unique fonction  $f$  continue en 0 telle que  $f(0) = 1$  et

$$\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx)$$

2. Cette fonction est-elle développable en série entière ? Si oui, quel est son rayon de convergence ?

## Divers

### Exercice 45 ★★★★★

X MP 2010

Caractériser les suites  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telles que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  soit le développement en série entière en 0 d'une fraction rationnelle.

## Exercice 46 ★★★

Mines-Ponts MP 2017

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $Q$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, Q(z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)z^n}{n!}$$

On notera ce polynôme  $u(P)$ .

2. Montrer que  $u$  est un automorphisme de  $\mathbb{C}[X]$ .
3. Déterminer les éléments propres de  $u$ .

## Exercice 47 ★★★

Centrale MP 2018

Soit  $(a_n)_{n \geq 2}$  une suite de réels. On pose  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  et on suppose que

$$f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est définie et injective sur  $D$ .

1. Montrer que  $\forall z \in D, z \in \mathbb{R} \iff f(z) \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $\forall z \in D, \operatorname{Im}(z) > 0 \iff \operatorname{Im}(f(z)) > 0$ .
3. Soient  $r \in ]0, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer en fonction de  $r$  et  $n$  l'intégrale

$$I_n(r) = \int_0^\pi \operatorname{Im}(f(re^{i\theta})) \sin(n\theta) \, d\theta$$

4. En remarquant que  $|\sin(n\theta)| \leq n \sin(\theta)$  pour  $\theta \in [0, \pi]$ , montrer que  $|a_n| \leq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## Exercice 48 ★★★

Mines-Ponts MP 2017

$E$  est un ensemble à  $n$  éléments. On appelle *dérangement* une permutation de  $E$  sans point fixe. On note  $D_n$  le nombre de dérangements de  $E$ . On pose  $D_0 = 1$ .

1. Montrer l'égalité  $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$ .

On définit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$ .

2. Justifier que  $f$  est définie sur  $] -1, 1[$ .

3. Montrer que pour  $x$  dans  $] -1, 1[$ ,  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ .

4. En déduire l'égalité  $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .

5. Montrer que, lorsque  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $D_n$  est la partie entière de  $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$ .



**Exercice 49****Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019**

On cherche à résoudre l'équation

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

avec  $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .

1. Soit la suite  $(u_n)$  de fonctions définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

Montrer par récurrence que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers une certaine fonction  $u$ .

2. Montrer que  $u$  est solution de (E).
3. Donner les fonctions développables en série entière dont la restriction à  $\mathbb{R}_+$  est solution de (E).

**Exercice 50 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2021**Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1}$ .

1. Donner le domaine de convergence  $D$  de  $\sum f_n$ .
2. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ .
3. Étudier la convergence normale de  $\sum f_n$  sur  $[0, 1]$ .
4. Étudier la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $[0, 1]$ .
5. Quelle est la nature de la série  $\sum u_n$ , avec  $u_n = \int_0^1 \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1} dt$  ?
6. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

**Exercice 51 ★★★****Banque Mines-Ponts MP 2018**Soit  $(z_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite de complexes non nuls à valeurs dans le disque ouvert  $D(0, R)$  ( $R > 0$ ) et qui converge vers 0.

1. Soit  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  de rayon de convergence  $R$ , telle que  $\forall p \in \mathbb{N}, f(z_p) = 0$ .  
Montrer que  $a_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Que dire de deux séries entières  $f$  et  $g$  de même rayon de convergence  $R$  et telles que  $f(z_p) = g(z_p)$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  ?

**Exercice 52 ★★****Formule de Cauchy**Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On pose  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ .  
Soit  $r \in [0, R[$ . Montrer que

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

**Exercice 53 ★★★****Banque Mines-Ponts MP 2021**

On suppose qu'il existe une partie  $A$  de  $\mathbb{N}$  telle que

$$\sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$$

1. Soit  $I$  une partie finie de  $A$ . Calculer  $\int_0^{+\infty} \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx$ .
2. Montrer que  $A$  est fini.
3. Qu'en conclut-on ?

**Exercice 54 ★★★**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . On munit  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  d'une norme d'opérateur  $\|\cdot\|$ . Montrer que l'application  $\varphi : A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \mapsto \sum a_n A^n$  est continue sur la boule  $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \|A\| < R\}$ .

**Exercice 55 ★★****Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

Soit  $\alpha \in ]-1, 1[$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $w_n(x) = \frac{\alpha^n}{n} \cos nx$ . Soit  $W : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$ .

1. Montrer que  $W$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ ; exprimer  $W'$  à l'aide des fonctions usuelles.
2. Calculer  $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$ .

**Exercice 56****Magistère MP 2024**

Soit  $(a_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ . On note  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|f^{(k)}(x)| \leq 1$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n a_{n+1} < 0$ .
2. En déduire un expression de  $f$ .

**Exercice 57 ★★****CCINP MP 2024**

Soit  $f$  une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini. On note  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

1. Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt = a_n r^n$$

2. Montrer que si  $f$  est bornée, alors  $f$  est constante.