Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

A l'attention des 3/2

Les 3/2 pourront admettre le résultat des questions 8 et 31. Par ailleurs, toutes les variables aléatoires de l'énoncé pourront être considérées comme des «variables aléatoires de MPSI», c'est-à-dire des variables aléatoires définies sur un univers *fini*.

Problème 1

1 Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leq 2$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq \frac{1}{2^n}$. Ainsi $\mathrm{I}_n \geq \int_0^1 \frac{1}{2^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}$.

2 L'application $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ avec $2n \geq 2 > 1$. On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ sur $[0,+\infty[$ puis l'existence de K_n.
Il est clair que $\mathrm{K}_1 = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

3 Supposons $n \geq 2$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $0 < 1+t \leq 1+t^2$ de sorte que $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(1+t)^n}$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} = \frac{2}{2^n(n-1)}$$

Or $\frac{1}{2^n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n n}$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$$

4 D'après la question précédente, $\mathrm{K}_n - \mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$. A fortiori, $\mathrm{K} - n - \mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Mais d'après la question **1**, $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\mathrm{I}_n)$ donc $\mathrm{K}_n - \mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\mathrm{I}_n)$ i.e. $\mathrm{K}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_n$.

5 Par intégration par parties,

$$\mathrm{K}_n = \int_0^{+\infty} 1\cdot(1+t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[t(1+t^2)^{-n}\right]_0^{+\infty} + 2n\int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime car

$$\lim_{t\to+\infty} t(1+t^2)^{-n} = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_n &= 2n\int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2n\int_0^{+\infty} (1+t^2-1)(1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2n\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t - 2n\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2n\mathrm{K}_n - 2n\mathrm{K}_{n+1}
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\mathrm{K}_n = \mathrm{K}_{n+1} + \frac{1}{2n}\mathrm{K}_n$$

6 D'après la question précédnte, $\mathrm{K}_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\mathrm{K}_n$. On montre par récurrence que $\mathrm{K}_n = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}(n-1)!^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la formule de Stirling, on montre que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{K}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

7 Il suffit d'effectuer le changement de variable linéaire $u = \sqrt{n}t$.

8 On pose $f_n : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} & \text{si } u \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Pour $u \leq \sqrt{n}$, $f_n(u) = \exp(-n\ln(1+u^2/n))$ donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $u \mapsto e^{-u^2}$. De plus, par concavité de ln, $f_n(u) \leq \exp(-u^2)$ pour $u \in \mathbb{R}_+$. La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\sqrt{n}\mathrm{I}_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2/n)^n} = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

9 Avec les questions précédentes,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathrm{I}_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Via le changement de variable, $t = u/\sqrt{2}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

Par parité de $u \mapsto e^{-u^2/2}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

10 Comme $\varphi(t) \leq \frac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geq x$,

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, $-\varphi$ est une primitive de $t \mapsto t\varphi(t)$ donc

$$\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -[\varphi(t)]_x^{+\infty} = \varphi(x)$$

car $\lim_{+\infty} \varphi = 0$.

Remarque. Ceci prouve en sus la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

On a donc bien

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

11 On considère la fonction

$$\Psi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (x^2+1)\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - x\varphi(x)$$

La fonction Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Psi'(x) = 2x\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - (x^2+1)\varphi(x) - \varphi(x) - x\varphi'(x)$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Psi'(x) = 2x \int_x^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t - 2\varphi(x) \leq 0$$

en utilisant l'inégalité de la question précédente. La fonction Ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: elle admmet donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$. Or, comme φ est positive, $\Psi(x) \geq -x\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\varphi(x) = 0$ donc $\ell \geq 0$ par passage à la limite. Par décroissance de Ψ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Psi(x) \geq \ell \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

12 Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t = 1$, $1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après les deux questions précédentes,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{x\varphi(x)}{x^2+1} \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

Par encadrement, $1 - \Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

13 Notons $\mathrm{B}_0 = \varnothing$ et $\mathrm{B}_p = \bigcup\limits_{1\leq k\leq p} \{|\mathrm{R}_k| \geq 3x\}$ pour $p \in [\![1, n]\!]$. Alors $\mathrm{B}_{p-1} \subset \mathrm{B}_p$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ de sorte que

$$\mathrm{A} = \bigcup_{p=1}^{n} \{|\mathrm{R}_p| \geq 3x\} = \mathrm{B}_n = \bigsqcup_{p=1}^{n} \mathrm{B}_p \setminus \mathrm{B}_{p-1} = \bigsqcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p$$

car $\mathrm{A}_p = \mathrm{B}_p \setminus \mathrm{B}_{p-1}$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.

14 Remarquons que

$$\mathrm{A} = (\{|\mathrm{R}_n| \geq x\} \cap \mathrm{A}) \sqcup (\{|\mathrm{R}_n| < x\} \cap \mathrm{A}) \subset \{|\mathrm{R}_n| \geq x\} \sqcup \left(\bigcup_{p=1}^{n} \left(\{|\mathrm{R}_n| < x\} \cap \mathrm{A}_p\right)\right)$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leq \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geq x\}\right) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=1}^{n} \left(\{|\mathrm{R}_n| < x\} \cap \mathrm{A}_p\right)\right) \leq \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geq x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| < x\} \cap \mathrm{A}_p\right)$$