

DEVOIR SURVEILLÉ N°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

A l'attention des 3/2

Les 3/2 pourront admettre le résultat des questions 8 et 31. Par ailleurs, toutes les variables aléatoires de l'énoncé pourront être considérées comme des «variables aléatoires de MPSI», c'est-à-dire des variables aléatoires définies sur un univers *fini*.

Problème 1 – Centrale Maths 2 MP 2023

Notations

- Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.
- Étant donnés deux entiers naturels a et b , on note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.
- Pour deux suites de nombres réels $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$, la notation $u_m = O(v_m)$ signifie qu'il existe une suite bornée $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que l'on ait

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geq m_0, u_m = M_m v_m$$

- On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes.

I Résultats préliminaires

I.A Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que n désigne un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \text{ et } K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

- 1** Montrer que

$$I_n \geq \frac{1}{2^n}$$

- 2** Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1 .

3 Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

On pourra minorer $1+t^2$ par un polynôme de degré 1.

4 En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$I_n \sim K_n$$

5 Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n$.

6 En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.B

7 Justifier que

$$\sqrt{n}I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} du$$

8 Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

9 En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \text{ puis de } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$$

Dans toute la suite, on posera pour tout x réel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ et } \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

I.C Comportement asymptotique de $1 - \Phi$

Soit $x > 0$.

10 En écrivant que $\varphi(t) \leq \frac{t}{x} \varphi(t)$ pour tout $t \geq x$, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

11 À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, montrer que

$$\frac{x}{x^2+1} \varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$$

12 En déduire un équivalent simple de $1 - \Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.D Une inégalité maximale

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et Z_1, \dots, Z_n sont des variables aléatoires discrètes indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $R_p = \sum_{i=1}^p Z_i$.

On va montrer la propriété

$$\forall x > 0, \mathbb{P}\left(\left\{\max_{1 \leq p \leq n} |R_p| \geq 3x\right\}\right) \leq 3 \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_p| \geq x\})$$

On admet que les différentes fonctions intervenant dans cette inégalité sont bien des variables aléatoires discrètes.

Pour simplifier, notons A l'événement $\left\{\max_{1 \leq p \leq n} |R_p| \geq 3x\right\}$. Ainsi,

$$A = \left\{\omega \in \Omega \mid \max_{1 \leq p \leq n} |R_p(\omega)| \geq 3x\right\}$$

Dans le cas où $n \geq 2$, définissons de plus les événements

$$A_1 = \{|R_1| \geq 3x\} \text{ et } A_p = \left\{\max_{1 \leq i \leq p-1} |R_i| < 3x\right\} \cap \{|R_p| \geq 3x\}$$

pour $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

13 Exprimer l'événement A à l'aide des événements A_1, A_2, \dots, A_n .

14 Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\})$$

15 Justifier que pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a l'inclusion

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}$$

16 En déduire que

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\})$$

17 Conclure.

II Étude d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}}$$

De plus, on définit la fonction $B_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par les conditions

$$\begin{aligned} \forall x \in \left] -\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right[, & \quad B_n(x) = 0 \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in \left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right[, & \quad B_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \\ \forall x \in \left[\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right[, & \quad B_n(x) = 0 \end{aligned}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que la suite de fonctions $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction φ , définie dans la partie I. Autrement dit, on souhaite montrer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0 \text{ avec } \Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x) - \varphi(x)|$$

L'usage d'une figure pour appréhender la problématique de cette partie sera vivement apprécié.

II.A

- 18** Comparer les réels $-x_{n,k}$ et $x_{n,n-k}$.
- 19** Justifier l'existence du réel Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 20** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité

$$\Delta_n = \sup_{x \geq 0} |B_n(x) - \varphi(x)|$$

- 21** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que B_n est une application décroissante sur \mathbb{R}^+ .
On pourra distinguer selon que n est pair ou impair.

Dans la suite de cette partie, on fixe $\varepsilon > 0$. La limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ assure de l'existence d'un nombre $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(\ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

II.B

Dans cette sous-partie, on va montrer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, \ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| = 0$$

On introduit pour cela l'ensemble

$$I_n = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid x_{n,k} \in [0, \ell + 1]\}$$

dont on peut vérifier que c'est un intervalle d'entiers.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que n et k varient de sorte que $k \in I_n$.

- 22** Montrer que l'on a

$$k!(n-k)! = 2\pi e^{-n} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

pour n tendant vers l'infini.

On pourra utiliser la formule de Stirling rappelée en début d'énoncé.

- 23** En déduire que, pour n tendant vers $+\infty$, on a

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}$$

- 24** En déduire que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}$$

puis que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

- 25** Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier $n \geq n_1$,

$$\sup_{x \in [0, \ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

II.C

- 26** Pour tout $\ell > 0$, montrer qu'il existe un entier naturel n_2 , tel que, pour tout $n \geq n_2$,

$$B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell)$$

- 27** Conclure que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

III Applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. On considère une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi que X . On définit alors

$$S_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

On dit que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z} . On admettra que pour tout $n \geq 1$, S_n est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

III.A Théorème central limite

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f également continue par morceaux sur I .

- 28** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (respectivement $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$) est une suite de nombres réels appartenant à I qui converge vers $u \in I$ (respectivement $v \in I$), montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{u_n}^{v_n} f_n(x) dx = \int_u^v f(x) dx$$

On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = \frac{X_i + 1}{2}$ et $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

- 29** Montrer que, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(\{T_n = j\}) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x) dx$$

où $x_{n,j}$ a été défini dans la partie II.

Considérons un couple (u, v) de réels tel que $u < v$, et notons

$$J_n = \left\{ j \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \frac{n + u\sqrt{n}}{2} \leq j \leq \frac{n + v\sqrt{n}}{2} \right\}$$

30 Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right\}\right) = \sum_{j \in J_n} \mathbb{P}(\{T_n = j\})$$

31 En déduire que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right\}\right) = \int_u^v \varphi(x) \, dx$$

puis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \Phi(u)$$

où les applications φ et Φ ont été définies dans la partie I.

III.B Critère de tension

Dans cette dernière sous-partie, on fixe $\varepsilon \in]0, 1[$.

32 Montrer qu'il existe $x_0 \geq 1$ tel que l'on ait

$$\forall x \geq x_0, \exists n_x \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_x, x^2 \mathbb{P}(\{|S_n| \geq x\sqrt{n}\}) \leq \varepsilon$$

33 Pour x_0 et x comme à la question précédente, on fixe $N \geq \frac{n_x}{\varepsilon}$ et on choisit $n \geq N$. Montrer qu'alors

$$x^2 \mathbb{P}\left(\left\{\max_{1 \leq p \leq n} |S_p| \geq 3x\sqrt{n}\right\}\right) \leq 3\varepsilon$$