# Equations différentielles

## Equations différentielles linéaires d'ordre 1

### Exercice 1 ★★

Soit $a$ et $b$ deux fonction impaires continues sur $\mathbb{R}$. Soit $f$ une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrer que $f$ est paire.

### Exercice 2 ★★ **Périodicité**

Soient $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+^*$, $a$ et $b$ deux fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$ et $f$ une solution de l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : \ y' + ay = b$. Montrer que $f$ est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(\mathrm{T})$.

### Exercice 3 ★

Résoudre sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ puis $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - xy = 1$$

### Exercice 4 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy' - \alpha y = 0$. Déterminer l'unique solution $f$ vérifiant $f(1) = 1$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy' - \alpha y = f$. Déterminer l'unique solution g vérifiant $g(1) = 0$.
3. On définit par récurrence une suite de fonctions $(u_n)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de la manière suivante :
   - $u_0 = f$ ;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}$ est l'unique solution de l'équation différentielle $xy' - \alpha y = u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ valant 0 en 1.

   **Remarque.** On a donc $u_1 = g$.

   Déterminer par récurrence $u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### Exercice 5 ★★★★

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

## Equations différentielles linéaires d'ordre 2

### Exercice 6 ★

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - (1 - i)y' - 2(1 + i)y = 0$.
2. Donner l'unique solution $f$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

### Exercice 7 ★★★

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f + f'' \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

### Exercice 8 ★★★ **Mines MP 2010**

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On considère l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. On suppose que $q$ est non constamment nulle au voisinage de $+\infty$ et que l'on dispose d'une solution $y$ strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $f = \dfrac{y'}{y}$.

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par $f$.
2. Montrer que $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle y est strictement positive.
4. Montrer que $q$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_{[x, +\infty[} q \underset{x \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$.

### Exercice 9 ★

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*

$$(\mathbf{E}) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à $(\mathbf{E})$.
2. Déterminer une solution particulière de $(\mathbf{E})$.
3. Résoudre l'équation $(\mathbf{E})$.
4. Déterminer l'unique solution $f$ de $(\mathbf{E})$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

### Exercice 10 ★★

Soient $a$, $b$ et $x_0$ des réelles tels que $a^2 \neq b$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que

$$\begin{cases} f'' + af' + bf = 0 \\ f^{(3)}(x_0) = f(x_0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que $f$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

### Exercice 11

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$$
2. Résoudre ensuite sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y = \frac{1}{1 + t^2}$$

### Exercice 12 ★★

Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle $y'' + y = \tan t$.

### Exercice 13 ★★★

1. Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme
$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) \\ y & \longmapsto & (x \mapsto xy'(x)) \end{cases}$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle
$$x^2y'' + xy' - \alpha^2 y = 0$$

### Exercice 14 ★★

On étudie l'équation différentielle $(t^2 + 1)y'' - 2y = t$.

1. Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi$ de l'équation homogène associée.
2. Résoudre l'équation homogène en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.
3. Exprimer la solution générale de l'équation étudiée.

### Exercice 15 ★★★★ ENS MP 2010

Soient $q$ une application continue périodique non identiquement nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et $f$ une solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Montrer que $f$ s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

### Exercice 16 ★★★

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction $2\pi$-périodique. Montrer que l'équation différentielle $y'' + y = f$ admet des solutions $2\pi$-périodiques si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin t \, dt = 0$$

**Exercice 17** ★★★ **TPE-EIVP MP 2018**

Soient $a$ et $b$ deux fonctions définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit (E) l'équation différentielle : $y''+a(t)y'+b(t)y=0$.

1. On considère $f$ une fonction solution de (E) sur $[0,1]$ s'annulant une infinité de fois. Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=f'(x)=0$
2. Déterminer toutes les solutions de (E) s'annulant une infinité de fois sur $[0,1]$.

**Exercice 18** ★★

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle $y''+y=\cos(nt)$.
2. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Résoudre l'équation différentielle
$$y''+y=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\cos(nt)$$

**Exercice 19** **CCP MP**

1. Montrer qu'il existe une solution $h$ de l'équation $xy''+y'+y=0$ développable en série entière et vérifiant $h(0)=1$.
2. Montrer que $h$ ne s'annule qu'une fois sur $]0,2[$.

**Exercice 20** **CCINP MP 2024**

On considère les équations différentielles :

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}):\ & x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1\\ (\mathrm{H}):\ & x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=0\end{aligned}$$

On note $\mathrm{I}=]0,+\infty[$, $\mathrm{S_I(E)}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $\mathrm{S_I(H)}$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

1. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{S_I(H)}$.
2. Démontrer qu'il existe une unique solution $f$ de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que pour tout $x\in\mathrm{I}$, $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$.
3. On note pour $x\in\mathrm{I}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ et $h(x)=\dfrac{\operatorname{sh}x}{x^2}$. On admet dans cette question que $g\in\mathrm{S_I(E)}$ et $h\in\mathrm{S_I(H)}$.
Donner, sans calculs, l'ensemble $\mathrm{S_I(E)}$.
4. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{S_{\mathbb{R}}(H)}$ des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 21** **CCINP MP 2024**

On considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}):\ 4xy''-2y'+9x^2y=0$.

1. Déterminer les solutions développables en séries entières et préciser leurs domaines de définition.
2. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra utiliser la méthode de Lagrange : on pose $y=hz$ avec $h$ une solution particulière de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $z$ une fonction quelconque.
3. En procédant au changement de variable $x=t^{2/3}$, retrouver le résultat de la question précédente.

## Systèmes différentiels

**Exercice 22** ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Résoudre, à l'aide de matrices, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + 6y \\ y' = -3x - 6y \\ z' = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$

**Exercice 23** ★★★

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$.

**Exercice 24** ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -2t \\ 4t & 1+3t \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de $A(t)$.
2. En déduire qu'il existe P indépendant de $t$ telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
3. Résoudre le système différentiel.

**Exercice 25** ★★ **TPE-EIVP MP 2014**

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 9x(t) - 5y(t) + 2t \\ y'(t) = 10x(t) - 6y(t) + e^t \end{cases}$$

**Exercice 26** ★★

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x + 3y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

**Exercice 27** ★★ **Saint-Cyr PSI 2019**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donner une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.
2. Trouver les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, avec $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$.

**Exercice 28 ★★**

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$$

1. Montrer que $V : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}$.
2. **a.** Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrer que $AX \in \mathcal{S}$.
   **b.** En déduire une base de $\mathcal{S}$.
3. **a.** Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.
   **b.** Soient $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PMP^{-1}$.
   Soit $Y : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $Y' = MY$. Montrer que Y est bornée sur $\mathbb{R}$.
4. On introduit sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $(X \mid Z) = X^{\top}Z$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
   Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = (A + b(t)I_2)X(t)$$
   Soit $f : t \mapsto \|X(t)\|^2$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 2b(t)f(t)$$
5. Montrer que la fonction X de la question précédente est bornée.

**Exercice 29** **CCINP (ou CCP) MP 2017**

1. Soit $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continues. On suppose qu'il existe C une constante positive telle que
   $$\forall t \in [a, b],\ u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)\ ds$$
   **a.** On pose
   $$f(t) = \frac{C + \int_a^t u(s)v(s)\ ds}{\exp\left(\int_a^t v(s)\ ds\right)}$$
   Calculer $f(a)$, puis montrer que $f$ est décroissante.
   **b.** En déduire que
   $$\forall t \in [a, b],\ u(t) \leq C \exp\left(\int_a^t v(s)\ ds\right)$$
2. Soit $A : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Soit $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ une solution de l'équation différentielle (E) : $x'(t) = A(t)x(t)$.
   On considère une norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que la norme $|||\cdot|||$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$.
   **a.** On pose $g(t) = \|x(t)\|^2$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $g'(t) \leq 2g(t) \cdot |||A(t)|||$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
   **b.** On suppose que $\int_0^{+\infty} |||A(s)|||\ ds$ converge. Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

## Changement de variable

**Exercice 30** ★★

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \; x^2y'' - xy' - 3y = x^4$$

1. **a.** Montrer que $f$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.

   **b.** En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. **a.** Montrer que $f$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.

   **b.** En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 31** **CCINP (ou CCP) MP 2013**

On se donne l'équation différentielle $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale de degré 2 à l'équation.
2. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra poser $x = e^t$.
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$.

## Problèmes de raccord

**Exercice 32** ★★ **Problème de raccordement**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$.

**Exercice 33** ★★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.

**Exercice 34** ★★ **Raccordement**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - y = x$.

**Exercice 35** ★★ **Raccordement**

On considère l'équation différentielle $(\text{E}) : xy'' - y' - x^3y = 0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en effectuant le changement de variable $t = x^2$.
2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 36** ★★ **Problème de raccord**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\text{E}) : \; ty' + (1-t)y = e^{2t}$.

**Exercice 37** ★★ **Mines MP**

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$

$$x\ln(x)y' - (3\ln(x) + 1)y = 0$$

## Wronskien

**Exercice 38** ★★★ **CCP MP 2017**

On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(\text{E}) : x'' + 2\frac{x'}{t} + x = 0$$

1. Montrer que $\varphi_1 : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est solution de (E).
2. A l'aide du wronskien, chercher une autre solution de (E).

**Exercice 39** ★★★

Soient $q$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : y'' + qy = 0$.

1. Soit $f$ une solution bornée de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f'$ admet une limite en $+\infty$ puis déterminer la valeur de cette limite.

2. Soient $f$ et $g$ deux solutions bornées de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Étudier le wronskien $w = fg' - f'g$ des solutions $f$ et $g$.
   En déduire que $f$ et $g$ sont liées. Que peut-on en conclure ?

**Exercice 40** ★★★ **Zéros entrelacés**

1. Soient $p$ et $q$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $p \leq q$ sur $\mathbb{R}$. Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $u'' + pu = 0$ et $v'' + qv = 0$. On suppose que $u$ s'annule en des réels $a$ et $b$ avec $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$.

   **a.** On pose $\mathrm{W} = u'v - uv'$. Déterminer $\mathrm{W}'$.

   **b.** En déduire que $v$ s'annule sur $[a, b]$.

2. Application. Soient $r$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' + rf = 0$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*$.

   **a.** On suppose $r \geq \mathrm{M}^2$. Montrer que tout intervalle fermé de longueur $\frac{\pi}{\mathrm{M}}$ contient au moins un zéro de $f$.

   **b.** On suppose $r \leq \mathrm{M}^2$. On suppose que $f$ s'annule en des réels $a$ et $b$ tels que $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que $b - a \geq \frac{\pi}{\mathrm{M}}$.

## Divers

**Exercice 41** ★★★ **Equation fonctionnelle de l'exponentielle matricielle**

Déterminer les applications $\mathrm{M} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivables en 0 vérifiant :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{M}(s + t) = \mathrm{M}(s)\mathrm{M}(t)$$

**Exercice 42** ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2019**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) > 0$, et $x : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = \mathrm{A}x(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle $\ell$, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ \ell(x(t)) = 0$.

**Exercice 43** ★★★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que les solutions du système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ sont toutes bornées.

**Exercice 44** ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble $\mathrm{S}_\alpha$ des fonctions $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f'(x) = -f(\alpha - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$.

2. Montrer que les éléments de $\mathrm{S}_\alpha$ sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

3. Conclure.

**Exercice 45** ★★

Déterminer les fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$$

**Exercice 46** ★★

Déterminer les fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f(-x)$$