

DEVOIR À LA MAISON N°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – BECEAS 2020

I Intégrales généralisées de Dirichlet

On considère la fonction

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ (sous réserve de convergence)

$$I_n = \int_0^{+\infty} g(t)^n dt$$

- 1** 1.a Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- 1.b A l'aide d'une intégration par parties, montrer que I_1 converge.
On admet que $I_1 = \frac{\pi}{2}$.
- 1.c Déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$ pour $j \in \mathbb{N}^*$.
- 1.d Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $t \mapsto \ln(g(t))$.
- 1.e On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
Donner un équivalent de $\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt$ lorsque n tend vers l'infini.
- 2** Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
- 2.a Montrer que l'intégrale I_n converge.
- 2.b Que vaut I_2 ?
- 3** On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $h_n(t) = \sin^n(t)$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
- 3.a Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Montrer que $h_n^{(k)}$ est bornée.
- 3.b Montrer que $h_n^{(k)}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}$.
- 3.c Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$.

3.d Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$ et montrer que

$$I_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$$

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

4.a Montrer que pour tout réel t

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n}(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}$$

4.b En déduire que pour tout réel t

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt)$$

4.c En déduire l'égalité

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$$

5 Etude asymptotique de la suite de terme général I_n .

5.a Montrer que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(t)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

5.b **5.b.i** Etudier la monotonie de g sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5.b.ii A l'aide de la question **1.d**, donner un équivalent de $\ln(g(\varepsilon_n))$ où $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

5.b.iii En déduire que

$$\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

5.c **5.c.i** Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, $|e^{-u} - 1| \leq 2u$.

5.c.ii Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, b]$,

$$-t^3 \leq \ln(g(t)) + \frac{t^2}{6} \leq 0$$

On utilisera le résultat de la question **1.d**.

5.c.iii En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\varepsilon_n} g(t)^n dt - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \frac{\ln^4 n}{2n}$$

5.d En déduire que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

On se souviendra du résultat de **1.e**.

II Montées d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$

On appelle, pour tout entier naturel n non nul, *montée* d'une liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ d'entiers naturels *distincts deux à deux* toute sous-liste $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_q)$ (avec $p \leq q$) vérifiant les conditions :

- $p = 1$ ou $a_{p-1} > a_p$;
- $a_p < a_{p+1} < \dots < a_q$ (si $p < q$) ;
- $q = n$ ou $a_q > a_{q+1}$.

On note $M(a)$ le nombre de montées de la liste a . Par exemple, les montées de la liste $a = (2, 5, 7, 6, 1, 4, 3, 8)$ sont $(2, 5, 7)$, (6) , $(1, 4)$ et $(3, 8)$, et donc $M(a) = 4$.

On définit de même la notion de descente d'une liste a d'entiers naturels distincts deux à deux et son nombre de descentes $D(a)$. Par exemple, les descentes de la liste $a = (2, 5, 7, 6, 1, 4, 3, 8)$ sont (2) , (5) , $(7, 6, 1)$, $(4, 3)$ et (8) , et donc $D(a) = 5$.

On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n l'ensemble des n -listes d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ *distincts deux à deux*.

Il est clair que, pour toute liste a de S_n , on a $1 \leq M(a) \leq n$ et $1 \leq D(a) \leq n$.

Enfin, pour tout entier naturel k , on note $E_n(k)$ le nombre de listes a de S_n ayant exactement k montées. Autrement dit, $E_n(k) = \text{card}\{a \in S_n, M(a) = k\}$. On a donc, $E_n(0) = 0$ ainsi que $E_n(k) = 0$ pour tout entier $k > n$.

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

6.a Déterminer les valeurs de $E_n(1)$ et $E_n(n)$.

6.b Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donner un exemple de liste a de S_n pour laquelle $M(a) = k$.

7 Déterminer, pour tout entier naturel n non nul et pour toute liste a de S_n , la valeur de $M(a) + D(a)$. En notant pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, s_i la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de (a_1, a_2, \dots, a_i) , on évaluera, en fonction du nombre s_i , la somme s_{i+1} des nombres de montées et de descentes de $(a_1, a_2, \dots, a_{i+1})$.

8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On associe à toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ la liste

$$\Psi(a) = (n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_n)$$

8.a Vérifier que l'application Ψ est une bijection de S_n sur S_n .

8.b En déduire, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité $E_n(k) = E_n(n+1-k)$.

9 **Calcul de $E_n(2)$.**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

9.a Quel est le nombre de couples (A, B) de parties *non vides* de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $A \cup B = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $A \cap B = \emptyset$.

9.b Etablir l'égalité $E_n(2) = 2^n - (n+1)$.

10 **Une relation de récurrence.**

Soit n un entier naturel non nul. À toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ de S_{n+1} , on associe la liste $\varphi_n(a)$ de S_n obtenue en ôtant l'élément $n+1$ de la liste a . Par exemple, dans le cas particulier où $n = 5$, si $a = (3, 4, 1, 5, 6, 2)$, alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$ et si $a = (6, 3, 4, 1, 5, 2)$, alors $\varphi_5(a) = (3, 3, 4, 1, 5, 2)$.

10.a Soit $b = (b_1, \dots, b_n)$ un élément de S_n . Comment s'écrivent les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est b ?

10.b Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et soit $b \in S_n$ tel que $M(b) = k$. Quelles sont les valeurs possibles de $M(a)$ pour un élément a de S_{n+1} dont l'image par φ_n est b ?

10.c Etablir, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k)$$

Vérifier que cette formule tient également pour $k = 0$ et pour tout entier $k > n$.

10.d Donner, en détaillant le calcul de $E_5(3)$, les valeurs de $E_n(k)$ pour tous les couples d'entiers (n, k) tels que $1 \leq k \leq n \leq 5$. On consignera les résultats dans un tableau, n étant l'indice de ligne et k l'indice de colonne.

11 La formule de Worpitzky.

Etablir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité

$$E_n(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n$$

On raisonnera par récurrence sur l'entier n .

12 Une égalité miraculeuse !

Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité

$$E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi} (2n-1)! I_{2n}$$