Devoir surveillé n°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Soit $(\sigma,\sigma')\in B_n^2$. Alors pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$,

$$[\omega(\sigma)\omega(\sigma')]_{i,j}=\sum_{k=1}^n[\omega(\sigma)]_{i,k}[\omega(\sigma')]_{k,j}=\sum_{k=1}^n\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)}=\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}=[\omega(\sigma\circ\sigma')]_{i,j}$$

Ainsi $\omega(\sigma)\omega(\sigma')=\omega(\sigma\circ\sigma')$.

2 Soit $\sigma\in B_n$. Alors pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$,

$$[\omega(\sigma)^\top]_{i,j}=[\omega(\sigma)]_{j,i}=\delta_{j,\sigma(i)}=\delta_{i,\sigma^{-1}(j)}=[\omega(\sigma^{-1})]_{i,j}$$

Par conséquent, $\omega(\sigma)^\top=\omega(\sigma^{-1})$ et, d'après la question précédente,

$$\omega(\sigma)^\top\omega(\sigma)=\omega(\sigma^{-1})\omega(\sigma)=\omega(\sigma^{-1}\circ\sigma)=\omega(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]})=I_n$$

Finalement, $\omega(\sigma)\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et donc $\omega(B_n)\subset\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3 Posons $D=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$, $D_\sigma=\mathrm{diag}(d_\sigma(1),\dots,d_\sigma(n))$ et $\Omega=\omega(\sigma)$. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$,

$$[D\Omega]_{i,j}=\sum_{k=1}^n D_{i,k}\Omega_{k,j}=d_i\delta_{i,\sigma(j)}$$

et

$$[\Omega D_\sigma]_{i,j}=\sum_{k=1}^n\Omega_{i,k}D_{k,j}=\delta_{i,\sigma(j)}d_{\sigma(j)}$$

Or il est clair que $d_i\delta_{i,\sigma(j)}=\delta_{i,\sigma(j)}d_{\sigma(j)}$ donc $D\Omega=\Omega D_\sigma$.

4 Posons $D=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ et $D'=\mathrm{diag}(d'_1,\dots,d'_n)$. D'après les questions suivantes :

$$\begin{aligned}
&\exists M\in\omega(B_n),\ D'=M^\top DM\\
\iff&\exists\sigma\in B_n,\ D'=\omega(\sigma)^\top D\omega(\sigma)\\
\iff&\exists\sigma\in B_n,\ \omega(\sigma)D'=\omega(\sigma)\omega(\sigma)^\top D\omega(\sigma)\\
\iff&\exists\sigma\in B_n,\ \omega(\sigma)D'=D\omega(\sigma)\\
\iff&\exists\sigma\in B_n,\ \omega(\sigma)\,\mathrm{diag}(d'_1,\dots,d'_n)=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)\omega(\sigma)\\
\iff&\exists\sigma\in B_n,\ \omega(\sigma)\,\mathrm{diag}(d'_1,\dots,d'_n)=\omega(\sigma)\,\mathrm{diag}(d_{\sigma(1)},\dots,d_{\sigma(n)})\\
\iff&\exists\sigma\in B_n,\ \mathrm{diag}(d'_1,\dots,d'_n)=\mathrm{diag}(d_{\sigma(1)},\dots,d_{\sigma(n)})\\
\iff&\exists\sigma\in B_n,\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ d'_i=d_{\sigma(i)}
\end{aligned}$$

En voyant d et d' comme des applications de $[\![1,n]\!]$ dans $\mathbb{R}$, cette dernière condition équivaut à l'existence de $\sigma\in B_n$ tel que $d'=d\circ\sigma$.
Supposons qu'il existe $\sigma\in B_n$ tel que $d'=d\circ\sigma$. Alors $\mathrm{Im}(d')=\mathrm{Im}(d)$ puisque σ est surjective. Ceci signifie que D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux. Soit $y\in\mathrm{Im}(d)=\mathrm{Im}(d')$. Alors $(d')^{-1}(\{y\})=\sigma^{-1}(d^{-1}(y))$ puis $\mathrm{card}(d')^{-1}(\{y\})=\mathrm{card}\,d^{-1}(\{y\})$ car σ est bijective. Ceci signifie que les coefficients diagonaux ont le même nombre

d'occurrences dans D et D′.
Réciproquement, supposons que D et D′ aient le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D′. Notons X l'ensemble des valeurs des coefficients diagonaux de D et D′. Notons pour $x \in X$, $I_x = \{i \in [\![1,n]\!],\ d_i = x\}$ ainsi que $J_x = \{i \in [\![1,n]\!],\ d'_i = x\}$. D'après notre supposition, pour tout $x \in X$ $\operatorname{card} I_x = \operatorname{card} J_x$. Il existe donc une bijection σ_x de I_x vers J_x. Comme les I_x forment une partition de $[\![1,n]\!]$ de même que les J_x, on construit bien une permutation $\sigma \in B_n$, en posant $\sigma_{|I_x} = \sigma_x$ pour tout $x \in X$. Par construction, on a bien $d'_i = d_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

5 C'est une simple conséquence du théorème spectral.

6 Notons $\{s_1,\dots,s_n\} = \{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ où les λ_i sont deux à deux distincts. D'après le théorème sur les polynômes interpolateurs de Lagrange, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\lambda_j) = f(\lambda_j)$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$. Or pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $j \in [\![1,p]\!]$ tel que $s_i = \lambda_j$ donc $P(s_i) = f(s_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

7 Pour simplifier, posons $D = \operatorname{diag}(s_1,\dots,s_n)$ et $D' = \operatorname{diag}(s'_1,\dots,s'_n)$. On prouve aisément par récurrence que $S^k = \Omega^\top D^k \Omega$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis par linéarité de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \Omega^\top X \Omega$, $P(S) = \Omega^\top P(D)\Omega$. De même, $P(S) = (\Omega')^\top P(D')\Omega'$. Comme D est diagonale,

$$P(D) = \operatorname{diag}(P(s_1),\dots,P(s_n)) = \operatorname{diag}(f(s_1),\dots,f(s_n))$$

Or $\operatorname{Sp}(S) = \{s_1,\dots,s_n\} = \{s'_1,\dots,s'_n\}$ donc on on également $P(s'_i) = f(s'_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ puis

$$P(D') = \operatorname{diag}(P(s'_1),\dots,P(s'_n)) = \operatorname{diag}(f(s'_1),\dots,f(s'_n))$$

Finalement,

$$P(S) = (\Omega')^\top \operatorname{diag}((f(s'_i))_{1\le i\le n})\Omega' = \Omega^\top \operatorname{diag}((f(s_i))_{1\le i\le n})\Omega$$

Comme $\operatorname{diag}(f(s_1),\dots,f(s_n))$ est diagonale et donc symétrique, on montre sans peine que $\Omega^\top \operatorname{diag}((f(s_i))_{1\le i\le n})\Omega \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

8 Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(\varphi,\psi) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^2$. Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. Il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(s_1,\dots,s_n) \in I^n$ tels que $S = \Omega^\top \operatorname{diag}(s_1,\dots,s_n)\Omega$. Par définition,

$$\begin{aligned}
u(\lambda\varphi+\mu\psi)(S) &= \Omega^\top \operatorname{diag}(((\lambda\varphi+\mu\psi)(s_i))_{1\le i\le n})\Omega \\
&= \Omega^\top \left(\lambda \operatorname{diag}((\varphi(s_i))_{1\le i\le n}) + \mu \operatorname{diag}((\psi(s_i))_{1\le i\le n})\right)\Omega \\
&= \lambda\Omega^\top \left(\operatorname{diag}((\varphi(s_i))_{1\le i\le n})\right)\Omega + \mu\Omega^\top \left(\operatorname{diag}((\psi(s_i))_{1\le i\le n})\right)\Omega \\
&= \lambda u(\varphi)(S) + \mu u(\psi)(S)
\end{aligned}$$

Ainsi u est linéaire. Puisque tr est également linéaire, $v = \operatorname{tr}\circ u$ est aussi linéaire.
Soit $x \in I$. En prenant $\Omega = I_n$ et $s_1 = \cdots = s_n = x$, on obtient

$$u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n$$

9 Soit $\varphi \in \operatorname{Ker} u$. D'après la question précédente, $u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n = 0$ pour tout $x \in I$. Ainsi φ est nulle sur I. Par conséquent, $\operatorname{K}eru = \{0\}$ et u est injective.
Si $n = 1$, alors en identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, alors l'ensemble des applications de $\mathcal{S}_n(I)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est tout simplement $\mathbb{R}^I$ et la question précédente montre alors que $u(\varphi) = \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^I$. Par conséquent, $u = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^I}$ est surjective. Si $n \ge 2$, on peut choisir une application constante Φ de $\mathcal{S}_n(I)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}I_n$. Supposons que cette application Φ admette un antécédent φ par u. Alors pour tout $x \in I$, on aurait $\Phi(xI_n) = u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n$, ce qui contredirait la définition de Φ. Ainsi u n'est pas surjective.

10 Puisque f est polynomiale, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. Il existe donc $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(s_1,\dots,s_n) \in I^n$ tels que

$$S = \Omega^\top \operatorname{diag}(s_1,\dots,s_n)\Omega$$

Par définition

$$f(S) = \Omega^\top \operatorname{diag}(f(s_1),\dots,f(s_n))\Omega = \Omega^\top \operatorname{diag}(P(s_1),\dots,P(s_n))\Omega$$

Posons $D = \operatorname{diag}(s_1,\dots,s_n)$. Comme D est diagonale, $P(D) = \operatorname{diag}(P(s_1),\dots,P(s_n))$ puis

$$P(S) = P(\Omega^\top D\Omega) = \Omega^\top P(D)\Omega = f(S)$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$. Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(f)(xI_n) = P(xI_n)$ ou encore $f(x)I_n = P(x)I_n$. On en déduit que $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc que f est polynomiale.

11 Supposons que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{\mathrm{I}})^{\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ sur I. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathrm{I})$. A nouveau, il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(s_1, \dots, s_n) \in \mathrm{I}^n$ tels que $\mathrm{S} = \Omega^\top \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u(\varphi_k)(\mathrm{S}) = \Omega^\top \operatorname{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n))\Omega$. Comme $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ sur I, $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_k(s_i) = \varphi(s_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n)) = \operatorname{diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$$

Enfin, l'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \Omega^\top\mathrm{M}\Omega$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc cette application est continue. On en déduit par caractérisation séquentielle de la continuité que

$$\lim_{k\to+\infty} u(\varphi_k)(\mathrm{S}) = \lim_{k\to+\infty} \Omega^\top \operatorname{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n))\Omega = \Omega^\top \operatorname{diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))\Omega = u(\varphi)(\mathrm{S})$$

Autrement dit, $(u(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $u(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(\mathrm{I})$. Comme tr est linéaire et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sorte que

$$\lim_{k\to+\infty} v(\varphi_k)(\mathrm{S}) = \lim_{k\to+\infty} \operatorname{tr}(u(\varphi_k)(\mathrm{S})) = \operatorname{tr}(u(\varphi(\mathrm{S}))) = v(\varphi)(\mathrm{S})$$

A nouveau, $(v(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $v(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(\mathrm{I})$.
Supposons maintenant que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur I. Munissons par exemple $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|$. Remarquons que si $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}
\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|\Omega^\top\mathrm{M}\Omega\|^2 &= \operatorname{tr}((\Omega^\top\mathrm{M}\Omega)^\top(\Omega^\top\mathrm{M}\Omega)) \\
&= \operatorname{tr}(\Omega^\top\mathrm{M}^\top\Omega\Omega^\top\mathrm{M}\Omega) \\
&= \operatorname{tr}(\Omega^\top\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\Omega) \\
&= \operatorname{tr}(\Omega\Omega^\top\mathrm{M}^\top\mathrm{M}) \\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}) = \|\mathrm{M}\|^2
\end{aligned}$$

Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathrm{I})$. Avec les mêmes notations que précédemment et la remarque ci-dessus,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|u(\varphi_k)(\mathrm{S}) - u(\varphi)(\mathrm{S})\|^2 = \|\operatorname{diag}(\varphi_k(s_1) - \varphi(s_1), \dots, \varphi_k(s_n) - \varphi(s_n))\|^2 = \sum_{i=1}^n (\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i))^2 \leq n\|\varphi_k - \varphi\|_\infty^2$$

ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|u(\varphi_k)(\mathrm{S}) - u(\varphi)(\mathrm{S})\| \leq \sqrt{n}\|\varphi_k - \varphi\|_\infty$$

Ce majorant est indépendant de S et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc $(u(\varphi_k))$ converge uniformément vers $u(\varphi)$. Comme tr est linéaire et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on peut noter C la norme subordonnée de tr à la norme euclidienne (et à la valeur absolue). Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathrm{I}),\ |v(\varphi_k)(\mathrm{S}) - v(\varphi)(\mathrm{S})| \leq \mathrm{C}\|u(\varphi_k)(\mathrm{S}) - u(\varphi)(\mathrm{S})\| \leq \mathrm{C}\sqrt{n}\|\varphi_k - \varphi\|_\infty$$

On conclut comme précédemment que $(v(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $v(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(\mathrm{I})$.

12 Comme S est symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeus propres associés. Sans perte de généralité, on peut supposer $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Soit alors $\mathrm{X} \in \Sigma$. Il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{X} = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i\mathrm{X}_i$. Comme $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ est orthonormée

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{X} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$$

De plus,

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{S}\mathrm{X} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2\lambda_i$$

donc, comme $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ et $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$,

$$\lambda_1 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \lambda_n$$

i.e.

$$\lambda_1 \leq \mathrm{X}^\top\mathrm{S}\mathrm{X} \leq \lambda_n$$

De plus, $\mathrm{X}_1 \in \Sigma$ et $\mathrm{X}_1^\top\mathrm{X}_1 = \lambda_1$ de même que $\mathrm{X}_n \in \Sigma$ et $\mathrm{X}_n^\top\mathrm{S}\mathrm{X}_n = \lambda_n$ donc

$$\min(\operatorname{Sp}(\mathrm{S})) = \lambda_1 = \min_{\mathrm{X}\in\Sigma} \mathrm{X}^\top\mathrm{S}\mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad \max(\operatorname{Sp}(\mathrm{S})) = \lambda_n = \max_{\mathrm{X}\in\Sigma} \mathrm{X}^\top\mathrm{S}\mathrm{X}$$

$\boxed{13}$ Soient $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(I)^2$ et $t \in [0,1]$. Tout d'abord, $S = (1-t)S_1 + tS_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors pour tout $X \in \Sigma$

$$X^T SX = (1-t)X^T S_1 X + (1-t)X^T S_2 X$$

donc, d'après la question précédente

$$(1-t)\min \mathrm{Sp}(S_1) + t \in \mathrm{Sp}(S_2) \leq X^T SX \leq (1-t)\max \mathrm{Sp}(S_1) + t \max \mathrm{Sp}(S_2)$$

puis, toujours d'après la question précédente, en notant $m = (1-t)\min \mathrm{Sp}(S_1) + t \in \mathrm{Sp}(S_2)$ et $M = (1-t)\max \mathrm{Sp}(S_1) + t \max \mathrm{Sp}(S_2)$;

$$\mathrm{Sp}(S) \subset [m, M]$$

Comme $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(I)^2$, $(\min \mathrm{Sp}(S_1), \max \mathrm{Sp}(S_1), \min \mathrm{Sp}(S_2), \max \mathrm{Sp}(S_2)) \in I^4$ puis, comme I est un intervalle donc convexe, $(m, M) \in I^2$ puis $\mathrm{Sp}(S) \subset [m, M] \subset I$. Ainsi $S \in \mathcal{S}_n(I)$ et $\mathcal{S}_n(I)$ est convexe.
Vérifions maintenant que ρ est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Tout d'abord, ρ est bien positive par définition.
Homogénéité. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. On montre aisément que $\mathrm{Sp}(tM) = t\,\mathrm{Sp}(M)$. Ainsi

$$\rho(tM) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(tM)\} = \max\{|\lambda t|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\} = |t| \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\} = |t|\rho(M)$$

Séparation. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $\rho(M) = 0$. Alors $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ et M est diagonalisable donc M est semblable à la matrice nulle puis $M = 0$.
Inégalité triangulaire. Soit $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. Pour tout $X \in \Sigma$,

$$|X^T(S_1 + S_2)X| \leq |X^T S_1 X| + |X^T S_2 X| \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$$

ou encore

$$-\rho(S_1) - \rho(S_2) \leq X^T(S_1 + S_2)X \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$$

D'après la question précédente,

$$-\rho(S_1) - \rho(S_2) \leq \min \mathrm{Sp}(S_1 + S_2) \leq \max \mathrm{Sp}(S_1 + S_2) \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$$

puis

$$\mathrm{Sp}(S_1 + S_2) \subset [-\rho(S_1) - \rho(S_2), \rho(S_1) + \rho(S_2)]$$

Ceci signifie que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(S_1 + S_2)$, $|\lambda| \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$ et enfin que $\rho(S_1 + S_2) \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$.

$\boxed{14}$ Remarquons déjà que χ est en fait à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, chaque coefficient de $\chi(M)$ est polynomial en les coefficients de M. Les applications coordonnées de χ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sont donc continues de sorte que χ est elle-même continue.

$\boxed{15}$ Comme la suite (M_k) converge, elle est bornée. Ceci signifie que la suite $(\rho(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est elle-même bornée. Par définition de ρ, la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc aussi bornée. Comme elle est à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^n$, elle est à valeurs dans un compact et elle admet alors une valeur d'adhérence que nous noterons Λ. Il existe donc une application $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Lambda$. Par définition de $\mathrm{Sp}_\uparrow$,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Lambda_{\alpha(k),1} \leq \cdots \leq \Lambda_{\alpha(k),n}$$

puis, par passage à la limite,

$$\Lambda_1 \leq \cdots \leq \Lambda_n$$

donc Λ est croissante.

$\boxed{16}$ Remarquons déjà que $(M_{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers M en tant que suite extraite de la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Notons à nouveau Λ la limite de la suite $(\Lambda_{\alpha(k)})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\chi(M_{\alpha(k)}) = \prod_{i=1}^{n}(X - \Lambda_{\alpha(k),i})$$

L'application $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}_1[X] \mapsto \prod_{i=1}^{n} P_i$ est multilinéaire et $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie donc cette application est continue. Comme χ est également continue, on obtient par passage à la limite

$$\chi(M) = \prod_{i=1}^{n}(X - \Lambda_i)$$

Notamment, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ sont les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On prouve comme à la question précédente que Λ est croissante, ce qui signifie que $\Lambda = \mathrm{Sp}_\uparrow(M)$.

17 On a montré précédemment que la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ était à valeurs dans un compact de $\mathbb{R}^n$. La question précédente montre que cette suite admet $\mathrm{Sp}_\uparrow(\mathrm{M})$ comme unique valeur d'adhérence. On en déduit que $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Sp}_\uparrow(\mathrm{M})$. Autrement dit, $\mathrm{Sp}_\uparrow(\mathrm{M}_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Sp}_\uparrow(\mathrm{M})$. Ainsi $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue par caractérisation séquentielle de la continuité.

18 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne définie par $\|\mathrm{M}\|^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^\top\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \|\Omega\|^2 = \mathrm{tr}(\Omega^\top\Omega) = \mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = n$$

donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée.
L'application $f : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{M}^\top, \mathrm{M})$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc f est continue. L'application $g : (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{AB}$ est bilinéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc g est continue. Ainsi $h = g \circ f$ est continue. De plus, $h(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = h^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$. Finalement, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
Ainsi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée et fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

19 Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. On considère à nouveau une suite $(\mathrm{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et convergeant vers une matrice M. Il existe alors une suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}_k = \Omega_k^\top \operatorname{diag}(\Lambda_k)\Omega_k$$

en notant à nouveau $\Lambda_k = \mathrm{Sp}_\uparrow(\mathrm{M}_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u(\varphi)(\mathrm{M}_k) = \Omega_k^\top \operatorname{diag}(\varphi(\Lambda_k))\Omega_k$$

Remarque. On note $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Comme $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue, (Λ_k) converge vers $\Lambda = \mathrm{Sp}_\uparrow(\mathrm{M})$ puis, comme φ est continue, $(\varphi(\Lambda_k))$ converge vers $\varphi(\Lambda)$. La suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc on peut en extraire une suite $(\Omega_{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En passant à la limite dans la relation suivante

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}_{\alpha(k)} = \Omega_{\alpha(k)}^\top \operatorname{diag}(\Lambda_{\alpha(k)})\Omega_{\alpha(k)}$$

on obtient

$$\mathrm{M} = \Omega^\top \operatorname{diag}(\Lambda)\Omega$$

et en passant à la limite dans la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u(\varphi)(\mathrm{M}_{\alpha(k)}) = \Omega_{\alpha(k)}^\top \operatorname{diag}(\varphi(\Lambda_{\alpha(k)}))\Omega_{\alpha(k)}$$

on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} u(\varphi)(\mathrm{M}_{\alpha(k)}) = \Omega^\top \operatorname{diag}(\varphi(\Lambda))\Omega = u(\varphi)(\mathrm{M})$$

Ainsi, si $(u(\varphi)(\mathrm{M}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers $u(\varphi)(\mathrm{M})$.
Soit S une valeur d'adhérence de la suite $(u(\varphi)(\mathrm{M}_k))_{k\in\mathbb{N}}$. Il existe donc une suite extraite $(u(\varphi)(\mathrm{M}_{\beta(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers S. En appliquant ce qui précède à la suite $(\mathrm{M}_{\beta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ au lieu de la suite $(\mathrm{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on prouve que $\mathrm{S} = u(\varphi)(\mathrm{M})$. Ainsi $u(\varphi)(\mathrm{M})$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u(\varphi)(\mathrm{M}_k))_{k\in\mathbb{N}}$.
Comme précédemment, la suite (Λ_k) est à valeurs dans un compact. Comme φ est continue, l'application $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est également continue. L'image d'un compact par une application continue est un compact donc $(\varphi(\Lambda_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est également à valeurs dans un compact. Par définition de ρ, la suite $(u(\varphi)(\mathrm{M}_k))$ est donc également à valeurs dans un compact. Comme $u(\varphi)(\mathrm{M})$ est son unique valeur d'adhérence, elle converge vers $u(\varphi)(\mathrm{M})$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, $u(\varphi)$ est continue.
Enfin, on a déjà vu que la trace était continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $v(\varphi)$ est également continue par composition.

20 Soient $\mathrm{U} \in \mathcal{U}_\mathrm{S}$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Il existe donc $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{U} = \Omega^\top\mathrm{S}\Omega$. En notant $(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $[\mathrm{U}]_{k,k} = \mathrm{E}_k^\top\mathrm{U}\mathrm{E}_k = (\Omega\mathrm{E}_k)^\top\mathrm{S}(\Omega\mathrm{E}_k)$. Or $\Omega\mathrm{E}_k \in \Sigma$ donc, d'après la question **12**, $\min\mathrm{Sp}(\mathrm{S}) \leq [\mathrm{U}]_{k,k} \leq \max\mathrm{Sp}(\mathrm{S})$. Comme $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathrm{I})$, $(\min\mathrm{Sp}(\mathrm{S}), \max\mathrm{Sp}(\mathrm{S})) \in \mathrm{I}^2$ puis, comme I est un intervalle, $[\mathrm{U}]_{k,k} \in \mathrm{I}$.
Comme $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathrm{I})$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathrm{I}^n$ tel que S est orthosemblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Par conséquent, U est également orthosemblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i.e. il existe $\mathrm{W} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{U} = \mathrm{W}^\top \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathrm{W}$. Ainsi

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ [\mathrm{U}]_{k,k} = \sum_{\ell=1}^{n} [\mathrm{W}]_{\ell,k}^2 \lambda_\ell$$

Comme $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\sum_{\ell=1}^{n} [W]_{\ell,k}^2 = 1$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Par convexité de f sur I,

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ f([U]_{k,k}) \leq \sum_{\ell=1}^{n} [W]_{\ell,k}^2 f(\lambda_\ell)$$

puis

$$\sum_{k=1}^{n} f([U]_{k,k}) \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [W]_{\ell,k}^2 f(\lambda_\ell) = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} [W]_{\ell,k}^2\right) f(\lambda_\ell)$$

A nouveau, comme $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\sum_{k=1}^{n} [W]_{\ell,k}^2 = 1$ pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} f([U]_{k,k}) \leq \sum_{\ell=1}^{n} f(\lambda_\ell) = v(f)(S)$$

Par ailleurs, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{U}_S$ et

$$\sum_{k=1}^{n} f([D]_{k,k}) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) = v(f)(S)$$

Ainsi

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{n} f([U]_{k,k}),\ U \in \mathcal{U}_S\right\} = v(f)(S)$$

21 Soient $(A, B) \in \mathcal{S}_n(I)^2$ et $t \in [0,1]$. Posons alors $S = (1-t)A + tB$. Soit $U \in \mathcal{U}_S$. Il existe donc $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$U = \Omega^\top S\Omega = (1-t)\Omega^\top A\Omega + t\Omega^\top B\Omega = (1-t)C + tD$$

en posant $C = \Omega^\top A\Omega \in \mathcal{U}_A$ et $D = \Omega^\top B\Omega \in \mathcal{U}_B$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$[U]_{k,k} = (1-t)[C]_{k,k} + t[D]_{k,k}$$

puis, par convexité de f

$$f([U]_{k,k}) \leq (1-t)f([C]_{k,k}) + tf([D]_{k,k})$$

et enfin

$$\sum_{k=1}^{n} f([U]_{k,k}) \leq (1-t)\sum_{k=1}^{n} f([C]_{k,k}) + t\sum_{k=1}^{n} f([D]_{k,k})$$

Mais, puisque $C \in \mathcal{U}_A$ et $D \in \mathcal{U}_B$, on obtient d'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} f([U]_{k,k}) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)$$

Ceci étant vrai pour tout $U \in \mathcal{U}_S$, on a encore d'après la question précédente,

$$v(f)(S) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)$$

c'est-à-dire

$$v(f)((1-t)A + tB) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)$$

22 Supposons f convexe sur I. D'après la question précédente, $v(f)$ est convexe sur $\mathcal{S}_n(I)$. Réciproquement, supposons $v(f)$ convexe sur $\mathcal{S}_n(I)$. Soient alors $(a,b) \in I^2$ et $t \in [0,1]$. Alors

$$v(f)((1-t)aI_n + tbI_n) \leq (1-t)v(f)(aI_n) + tv(f)(bI_n)$$

ou encore

$$v(f)(((1-t)a + tb)I_n) \leq (1-t)v(f)(aI_n) + tv(f)(bI_n)$$

Or d'après la question **8**,

$$\forall x \in I,\ u(f)(xI_n) = f(x)I_n$$

donc

$$\forall x \in I,\ v(f)(xI_n) = \operatorname{tr}(f(x)I_n) = nf(x)$$

On en déduit que

$$nf((1-t)a + tb) \leq n(1-t)f(a) + ntf(b)$$

puis

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Ceci signifie que f est convexe sur I.