Devoir à la maison n°08

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I –

I.1 **I.1.a** Les points P, Q et R ont pour coordonnées respectives $(1,0)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On trouve sans difficulté les équations des droites suivantes :

$$(\mathrm{PQ}):\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \qquad (\mathrm{PR}):\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \qquad (\mathrm{QR}):\ x=-\frac{1}{2}$$

I.1.b Le point d'affixe $x+iy$ i.e. de coordonnées (x,y) appartient à T si et seulement si

$$x>-\frac{1}{2} \qquad y<-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \qquad y>\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

c'est-à-dire

$$2x+1>0 \qquad x+\sqrt{3}y-1<0 \qquad x-\sqrt{3}y-1<0$$

I.2 **I.2.a** On a clairement $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre de A.

I.2.b Comme A est trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres i.e. $\mathrm{tr}(\mathrm{A})=1+\lambda+\overline{\lambda}$. Les valeurs propres de A^2 sont 1, λ^2 et $\overline{\lambda}^2$ donc $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)=1+\lambda^2+\overline{\lambda}^2$.
Puisque $\lambda=a+ib$ et $\overline{\lambda}=a-ib$,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A})=1+2a \qquad \mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)=1+2(a^2-b^2)$$

I.2.c Les coefficients de A sont tous strictement positifs donc $\mathrm{tr}(\mathrm{A})>0$.
Pour la même raison

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A}^2)_{1,1}&=a_{1,1}^2+a_{1,2}a_{2,1}+a_{1,3}a_{3,1}>a_{1,1}^2\\
(\mathrm{A}^2)_{2,2}&=a_{2,1}a_{1,2}+a_{2,2}^2+a_{2,3}a_{3,2}>a_{2,2}^2\\
(\mathrm{A}^2)_{3,3}&=a_{3,1}a_{1,3}+a_{3,2}a_{2,3}+a_{3,3}^2>a_{3,3}^2
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)>a_{1,1}^2+a_{2,2}^2+a_{3,3}^2$.

I.2.d D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A})^2=\left(\sum_{k=1}^{3}1\cdot a_{k,k}\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{3}1^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3}a_{k,k}^2\right)=3(a_{1,1}^2+a_{2,2}^2+a_{3,3}^2)<3\,\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$$

I.2.e D'une part,

$$1+2a=\operatorname{tr}(A)>0$$

D'autre part,

$$0<3\operatorname{tr}(A^2)-\operatorname{tr}(A)^2=2\left(1+a^2-3b^2-2a\right)=2(a-\sqrt{3}b-1)(a+\sqrt{3}b-1)$$

I.2.f Remarquons que $a-\sqrt{3}b-1$ et $a+\sqrt{3}b-1$ sont de même signe. Si l'on avait $a-\sqrt{3}b-1>0$ et $a+\sqrt{3}b-1>0$, on aurait $a>1$ en additionant ces inégalités. Il s'ensuivrait que $|\lambda|^2=a^2+b^2>1$, ce qui n'est pas. Ainsi $a-\sqrt{3}b-1<0$ et $a+\sqrt{3}b-1<0$. D'après la question **I.1.b**, le point d'affixe λ appartient à T.

I.3 **I.3.a** D'après une relation d'Euler, $\lambda+\overline{\lambda}=2r\cos(\theta)$ donc $\alpha=\dfrac{1+\lambda+\overline{\lambda}}{3}$.
On remarque que $j^2=\overline{j}$ donc, toujours d'après une relation d'Euler,

$$j\lambda+j^2\overline{\lambda}=j\lambda+\overline{j\lambda}=re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}+re^{-i\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}=2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$$

puis $\beta=\dfrac{1+j\lambda+j^2\overline{\lambda}}{3}$.
Enfin,

$$j^2\lambda+j\overline{\lambda}=\overline{j}\lambda+\overline{\overline{j}\lambda}=re^{i\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}+re^{-i\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}=2\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$$

puis $\gamma=\dfrac{1+j^2\lambda+j\overline{\lambda}}{3}$.

I.3.b Puisque $1+j+\overline{j}=1+j+j^2=\dfrac{j^3-1}{j-1}=0$, il est clair que $\alpha+\beta+\gamma=1$.
Par ailleurs, en posant $\lambda=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\alpha=\frac{2a+1}{3}>0 \qquad \beta=\frac{1-a-\sqrt{3}b}{3} \qquad \gamma=\frac{1-a+\sqrt{3}b}{3}$$

Comme $r\in]0,1[$, et $|\cos|\leq 1$, il est clair que α, β et γ sont strictement positifs. On en déduit que A vérifie la propriété $(\mathcal{S})$.

I.3.c Un calcul immédiat montre que $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. On a clairement $A=\alpha I_3+\beta J+\gamma J^2$.

I.3.d Un calcul immédiat donne $\chi_J=X^3-1$. Les valeurs propres de J sont les racines de X^3-1, à savoir 1, j et j^2.

I.3.e Comme χ_J est scindé à racines simples, J est diagonalisable. Il existe donc $P\in GL_3(\mathbb{C})$ tel que $J=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}$. On en déduit que

$$A=P\left(\alpha I_3+\beta D+\gamma D^2\right)P^{-1}=P\begin{pmatrix}\alpha+\beta+\gamma&0&0\\0&\alpha+\beta j+\gamma j^2&0\\0&0&\alpha+\beta j^2+\gamma j\end{pmatrix}P^{-1}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha+\beta j+\gamma j^2$ et $\alpha+\beta j^2+\gamma j$. En utilisant les expressions de α, β et γ trouvées à la question **I.3.a** et le fait que $1+j+j^2=0$, on trouve

$$\alpha+\beta+\gamma=1 \qquad \alpha+\beta j+\gamma j^2=\overline{\lambda} \qquad \alpha+\beta j^2+\gamma j=\lambda$$

Les valeurs propres de A sont donc bien 1, λ et $\overline{\lambda}$.

Partie II –

II.1 Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(\mathrm{AU})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

donc AU = U. Comme U n'est pas nul, 1 est bien valeur propre de A.

II.2 **II.2.a** **II.2.a.i** Comme $\det(\mathrm{B}) = 0$, B n'est pas inversible. Il existe donc $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $\mathrm{BX} = 0$.

II.2.a.ii On a notamment

$$0 = (\mathrm{BX})_k = \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} x_j$$

et donc

$$b_{k,k} x_k = -\sum_{j \neq k} b_{k,j} x_j$$

Par inégalité triangulaire

$$|b_{k,k}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_j| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_k|$$

Remarquons que $|x_k| > 0$ car sinon $0 \leq |x_i| \leq |x_k| = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ puis $\mathrm{X} = 0$, ce qui n'est pas. On en déduit donc que

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

II.2.b Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, $\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = (-1)^n \chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = 0$. D'après la question précédente, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_j| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

c'est-à-dire

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|$$

Mais comme les $a_{k,j}$ sont positifs

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} a_{k,j}$$

De plus, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} = 1$ donc $\displaystyle\sum_{j \neq k} a_{k,j} = 1 - a_{k,k}$. Finalement,

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\lambda| = |(a_{k,k} - \lambda) + a_{k,k}| \leq |a_{k,k} - \lambda| + |a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k} + a_{k,k} = 1$$

car $a_{k,k} > 0$.

II.2.c D'après la question précédente,

$$|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{k,k}$$

puis

$$|a_{k,k} - e^{i\theta}|^2 \leq (1 - a_{k,k})^2$$

ou encore

$$(a_{k,k} - e^{i\theta})(a_{k,k} - e^{-i\theta}) \leq (1 - a_{k,k})^2$$

En développant, on obtient

$$a_{k,k}^2 - 2a_{k,k} \cos\theta + 1 \leq 1 - 2a_{k,k} + a_{k,k}^2$$

ou encore

$$a_{k,k} \cos\theta \geq a_{k,k}$$

Or $a_{k,k} > 0$ donc $\cos\theta \geq 1$. Mais $\cos\theta \leq 1$ donc $\cos\theta = 1$. Ainsi $\theta \equiv 0[2\pi]$ puis $\lambda = e^{i\theta} = 1$.

II.3 **II.3.a** Comme $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, $\chi_{\mathrm{A}}(1) = \det(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = 0$ donc $\det((\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{\mathsf{T}}) = 0$ ou encore $\det(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}^{\mathsf{T}}) = 0$. Par conséquent, $\chi_{\mathrm{A}^{\mathsf{T}}}(1) = 0$ et $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}^{\mathsf{T}})$.

De plus, $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) = \mathrm{rg}((\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)^{\mathsf{T}}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^{\mathsf{T}} - \mathrm{I}_n)$. D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A}^{\mathsf{T}} - \mathrm{I}_n)$ i.e. $\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \dim \mathrm{E}_1(\mathrm{A}^{\mathsf{T}})$.

II.3.b **II.3.b.i** Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(A^\top V)_i = V_i$ et donc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} v_j = v_i$$

Par inégalité triangulaire,

$$|v_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{j,i}||v_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$$

II.3.b.ii En additionnant ces inégalités,

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j| = \sum_{j=1}^{n} |v_j| \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} |v_i|$$

En notant $S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$, on a donc $|v_i| \leq S_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $\sum_{i=1}^{n} S_i - |v_i| = 0$. Une somme de termes positifs,n'étant nulle que si chacun des termes est nul,

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |v_i| = S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$$

II.3.b.iii Ces égalités se traduisent par le fait que $A^\top|V| = |V|$.
Supposons qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|v_i| = 0$. Alors

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j| = |v_i| = 0$$

Comme il s'agit à nouveau d'une somme de termes positifs, on aurait $a_{j,i}|v_j| = 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ et donc $|v_j| = 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ car les $a_{j,i}$ ne sont pas nuls. Finalement, on aurait V = 0n ce qui est exclus.

II.3.c **II.3.c.i** D'après la question précédente, les y_i ne sont pas nuls. On peut donc considérer la matrice colonne $Z = X - \frac{x_1}{y_1}Y$ qui appartient encore à $E_1(A^\top)$ (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$). Par construction $z_1 = 0$, mais d'après la question précédente, $Z = 0$: si Z n'était pas nul, toutes ses composantes seraient non nulles. On en déduit que tous les vecteurs de $E_1(A^\top)$ sont colinéaires à X i.e. $\dim E_1(A^\top) = 1$.

II.3.c.ii Soit V un vecteur non nul de $E_1(A^\top)$. D'après la question précédente, $|V| \in E_1(A^\top)$. Posons $\Omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}|v_i|}|V|$. A nouveau, $\Omega \in E_1(A^\top)$. Par construction, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$. On a vu que $|v_i| > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ donc $\omega_i > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Supposons qu'il existe un vecteur Ω' vérifiant les mêmes conditions. Alors Ω' est colinéaire à Ω puisque $\dim E_1(A^\top) = 1$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Omega' = \lambda\Omega$. En fait, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ car les coordonnées de Ω' et Ω sont strictement positives. De plus,

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \omega'_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \lambda$$

puis $\Omega' = \Omega$.

II.3.c.iii Enfin, puisque $A^\top\Omega = \Omega$,

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$$

II.3.d On a donc montré que

- les valeurs propres de A sont de module inférieur ou égal à 1 ;
- la seule valeur propre de A de module 1 est 1 ;
- $E_1(A)$ est engendré par $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$;
- les valeurs propres de $A^\top$ sont de module inférieur ou égal à 1 ;
- la seule valeur propre de $A^\top$ de module 1 est 1 ;
- aucune coordonnée d'un vecteur propre de $A^\top$ associé à la valeur propre 1 n'est nulle ;

- il existe un vecteur propre de $A^\top$ associé à la valeur propre 1 dont les coordonnées sont strictement positives et de somme 1.

II.4 **II.4.a** Montrons que N est une norme.

Positivité Comme les ω_i sont positifs, N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Homogénéité Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors

$$N(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i| = |\lambda| N(x)$$

Séparation Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $N(X) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \omega_i |\lambda x_i| = 0$. Mais comme il s'agit d'une somme de termes positifs, $\omega_i |x_i| = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Les ω_i ne sont pas nuls donc $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ i.e. $X = 0$.

Inégalité triangulaire Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$. Alors, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$

$$N(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i (|x_i| + |y_i|) = N(X) + N(Y)$$

II.4.b Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$N(AX) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \omega_i \right) |x_j|$$

Mais on a vu à la question **II.3.c** que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \omega_i = \omega_j$$

de sorte que

$$N(AX) \le \sum_{j=1}^{n} \omega_j |x_j| = N(X)$$

II.4.c En particulier, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et X un vecteur propre associé. Alors $N(AX) \le N(X)$ donne $|\lambda| N(X) \le N(X)$ puis $|\lambda| \le 1$ car $N(X) > 0$ (X n'est pas nul en tant que vecteur propre).

II.5 **II.5.a** Remarquons que $\Phi(X) = \Omega^\top X$. Ainsi

$$\Phi(AX) = \Omega^\top AX = (A^\top \Omega)^\top X$$

Or $\Omega \in E_1(A^\top)$, donc $A^\top \Omega = \Omega$ puis $\Phi(AX) = \Omega^\top X = \Phi(X)$.

II.5.b $E_1(A) = \mathrm{vect}(U)$ est une droite et $\mathrm{Ker}\,\Phi$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle. Pour montrer que $E_1(A)$ et $\mathrm{Ker}\,\Phi$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il suffit donc de montrer que $U \notin \mathrm{Ker}\,\Phi$. Or $\Phi(U) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \neq 0$ donc $U \notin \mathrm{Ker}\,\Phi$. On en déduit que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}\,\Phi$.

II.5.c D'après la question **II.5.a**,

$$\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda \Phi(X)$$

Or $\lambda \neq 1$ donc $\Phi(X) = 0$ i.e. $X \in \mathrm{Ker}\,\Phi$.

II.5.d Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A et ϕ la forme linéaire canoniquement associée à Φ. D'après ce qui précède, $\phi \circ u = \phi$ et $\mathbb{C}^n = E_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\,\phi$. L'égalité $\phi \circ u = \phi$ donne notamment $\mathrm{Ker}\,\phi \circ u = \mathrm{Ker}\,\phi$ de sorte que $\mathrm{Ker}\,\phi$ est stable par u. Dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{C}^n = E_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\,\phi$, la matrice de u est donc $\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On en déduit que $\chi_A = \chi_u = (X - \lambda)\chi_B$. Si 1 était racine de χ_B, 1 serait valeur propre de l'endomorphisme $u_{|\mathrm{Ker}\,\varphi}$ de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ induit par u. Notamment $u_{|\mathrm{Ker}\,\varphi}$ admettrait un vecteur propre $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ associé à la valeur propre 1. Ce vecteur x serait également un vecteur propre de u associée à la même valeur propre 1. On aurait donc $x \in E_1(u) \cap \mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$, ce qui contredit que x est un vecteur propre. Ainsi 1 n'est pas racine de χ_B : 1 est donc une racine simple de χ_A i.e. la multiplicité de la valeur propre de 1 dans χ_A vaut 1.