# INTERROGATION ÉCRITE N°09

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2x^n$.

   *Le rayon de convergence de cette série entière est le même que celui de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$, *c'est-à-dire* 1. *De plus,*

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

   *donc, par dérivation terme à terme,*

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$$

   *puis*

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)x^n$$

   *Comme* $n^2 = (n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1$,

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{2-3(1-x)+(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

■

2. On pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

   *Il est clair que* $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ *(somme partielle d'une série exponentielle). On en déduit que* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. *Ainsi le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *vaut* 1 *par la règle de d'Alembert. De plus, les rayons de convergence des séries entières* $\sum \frac{z^n}{n!}$ *et* $\sum z^n$ *sont respectivement* $+\infty$ *et* 1. *On en déduit par produit de Cauchy que*

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,1),\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \frac{e^z}{1-z}$$

■

3. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace euclidien E de dimension 3 ainsi que $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $u$ est une rotation. On ne demande ni son axe, ni son angle.

   *Posons* $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. *On vérifie que* $\mathrm{A}^{\top}\mathrm{A} = \mathrm{I}_3$ *et* $\det(\mathrm{A}) = 1$. *Ainsi* $\mathrm{A} \in \mathrm{SO}(3)$ *puis* $u \in \mathrm{SO}(\mathrm{E})$ *car* $\mathcal{B}$ *est une base orthonormée de* E. *Comme* $\dim \mathrm{E} = 3$, $u$ *est une rotation.* ∎

4. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Montrer que $u^* \circ u$ est un endomorphisme auto-adjoint positif.

   *Tout d'abord,* $(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u$ *donc* $u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. *De plus, pour tout* $x \in \mathrm{E}$,

   $$\langle u^* \circ u(x), x \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle \geq 0$$

   *donc* $u \in \mathcal{S}^+(\mathrm{E})$. ∎

5. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

   *La suite de terme général* $\frac{1}{2n+1}$ *est décroissante et converge vers* 0. *Le critère spécial des séries alternées permet d'affirmer que* $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *converge. De plus, pour tout* $x \in ]-1, 1[$

   $$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x$$

   *Le théorème de convergence radiale d'Abel permet d'affirmer que*

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \lim_{x \to 1} \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

   ∎