

Rayon de convergence

Exercice 1 ★★

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b . On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$. On suppose de plus que $a_n b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $R = \min(R_a, R_b)$.

Exercice 2 ★★★

Règle de Cauchy

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

Exercice 3 ★★★

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{a_n}{\sum_{k=0}^n a_k}$. Comparer les rayons des séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$.

Exercice 4 ★★

Mines-Ponts MP 2016

Soit $q > 0$, on pose $a_n = q^{\sqrt{n}}$ si n est un carré d'entier et $a_n = 0$ sinon. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.

Exercice 5 ★

Règle de d'Alembert

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$1. \sum \frac{(-1)^n z^n}{\sqrt{n}}$$

$$3. \sum \binom{2n}{n} z^n$$

$$2. \sum 2^n \ln(n) z^n$$

$$4. \sum (n + 2^n i) z^n$$

Exercice 6 ★★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$1. \sum \cos(n) z^n$$

$$2. \sum \frac{\sin n}{n} z^n$$

$$3. \sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^n$$

$$4. \sum_{n \in \mathbb{N}^*} d_n z^n \text{ où } d_n \text{ est le nombre de diviseurs positifs de } n$$

$$5. \sum a_n z^n \text{ où } a_n \text{ est la } n^{\text{ème}} \text{ décimale de } \pi$$

Exercice 7 ★★

Séries lacunaires

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$1. \sum z^{n^2}$$

$$2. \sum 2^n z^{2^n}$$

$$3. \sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$$

Calcul de sommes de séries entières

Exercice 8 ★

Prouver la convergence et calculer la somme de la série suivante $\sum_{n \geq 0} (n+1) 3^{-n}$.

Exercice 9 ★★★

ENS (non PSI) PC 2019

On pose E l'ensemble des suites à valeurs réelles de limite nulle et

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Montrer que :

$$\forall a \in E, \exists \varphi(a) \in E, \forall x \in]0, 1[, f_{\varphi(a)}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{f_a(t)}{1-t} dt$$

Exercice 10 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$.

1. Déterminer la limite de la suite (a_n) .
2. Quel est le sens de variation de (a_n) ?
3. Déterminer une relation simple entre a_n et a_{n+2} . En déduire un équivalent de (a_n) .
4. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
5. Déterminer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 11 ★★

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) x^n$.

Exercice 12 ★★**CCP MP 2018**

1. Montrer que \arctan est développable en série entière sur $] -1, 1[$.
2. On considère la série entière $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$. Donner son rayon de convergence R . On note $f(x)$ la somme.
3. Donner une expression simple de f' et de f .
4. Que peut-on dire de la convergence sur $[-R, R]$?
5. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$.

Exercice 13 ★★★**Mines-Ponts MP 2018**

On note $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.
2. Calculer la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

Exercice 14 ★**Petites Mines PC 2017**

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} x^n$.

Exercice 15 ★★

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.
2. Déterminer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 16**CCINP MP 2022**

Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes.

1. $\sum_{n \geq 1} n x^n$;
2. $\sum_{n \geq 1} 2n x^{2n}$;
3. $\sum_{n \geq 1} 2n^{(-1)^n} x^{2n}$.

Etude au bord du disque de convergence

Exercice 17 ★★

CCP MP

On note $f(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Y a-t-il convergence en R et $-R$?
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$.

Exercice 18 ★★

CCP MP 2018

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta}$ et $b_n = \frac{1}{r_n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum b_n x^n$.
2. Étudier la convergence de la série pour $x = R$ et $x = -R$.

Exercice 19 ★★★

Soit (a_n) une suite de premier terme $a_0 > 0$ et telle que $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.
2. Étudier la convergence au bord de l'intervalle de convergence.

Exercice 20 ★★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln(n) x^n$.

On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n$.

2. Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

3. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} S(x)$.

Exercice 21 ★★

CCP MP

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la limite de (a_n) .
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
3. Déterminer le domaine de définition de $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On pourra déterminer la limite de $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.

Exercice 22 ★★

Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 23 ★★

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ deux séries convergentes. On suppose que leur produit de Cauchy $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ converge.

Montrer que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.

REMARQUE. On ne suppose pas que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ convergent absolument.

Exercice 24 ★★★★★

On considère un réel $\theta \in]0, 2\pi[$.

1. On pose $g : r \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n e^{in\theta}}{n}$. Justifier que g est définie sur $] -1, 1[$.
2. Justifier que g est dérivable sur $] -1, 1[$. Calculer $g'(r)$.
3. En déduire $g(r)$ pour $r \in] -1, 1[$.
4. Justifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.
5. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) + i \frac{\pi - \theta}{2}$$

Exercice 25 ★★★

Justifier la convergence et déterminer la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 26 ★

Justifier la convergence et déterminer la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 27 ★★★**Une réciproque du théorème d'Abel**

Soit (a_n) une suite *positive* telle que la série entière $\sum a_n x^n$ possède un rayon de convergence $R > 0$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in] -R, R[$ et on suppose que f admet une limite ℓ en R . Montrer que la série $\sum a_n R^n$ converge vers ℓ .

Exercice 28**Banque Mines-Ponts MP 2024**

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum a_n$ converge et calculer sa somme.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que f est définie et continue sur $] -1, 1[$, puis déterminer un équivalent de f en $(-1)^+$.

Equations différentielles**Exercice 29 ★★**

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \text{sh}(\arcsin x)$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par f .
2. En déduire que f est développable en série entière en 0 et déterminer ce développement en série entière.

Exercice 30 ★★

Soit $f : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier que f est développable en série entière.
2. Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre un.
3. En déduire le développement en série entière.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 31 ★★★

On considère la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ dont on note $S(x)$ la somme.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Montrer que S est solution sur son intervalle de convergence de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \quad x(x-4)y' + (x+2)y = 2$$

3. Résoudre l'équation homogène (\mathcal{E}_H) associée à (\mathcal{E}) sur $]0, 4[$.

4. Vérifier que $x \mapsto 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) - 2\sqrt{\frac{4-x}{x}}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$ sur $]0, 4[$.

5. En déduire $S(x)$ pour $x \in]0, 4[$.

6. Calculer $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 32 ★★

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$$

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.
3. Déterminer la somme $S(x)$ de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ à l'aide d'une équation différentielle.
4. En déduire que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e}$.

Exercice 33 ★★**CCINP**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$. On note S sa somme.
2. Montrer que S vérifie une équation différentielle du type $y'' + y' + y = f$ où l'on précisera f .
3. Résoudre l'équation différentielle et en déduire S .

Produit de Cauchy**Exercice 34 ★★****Centrale PC**

On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} H_n x^n$.

Exercice 35 ★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$$

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n x^n$.

1. On suppose que $R = \frac{1}{4}$. Montrer que

$$\forall x \in]-R, R[\setminus \{0\}, S(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

2. En déduire u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Justifier qu'on a bien $R = \frac{1}{4}$.

Exercice 36 ★★★**Nombre d'involutions**

On rappelle qu'une involution d'un ensemble E est une application $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = \text{Id}_E$. On note I_n le nombre d'involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On convient que $I_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1. On note $S(x)$ sa somme.

3. Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, S'(x) = (1+x)S(x)$$

4. En déduire une expression de $S(x)$ puis de I_n .

Exercice 37**E3A PC 2020**

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq 1$.

2. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3. a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

- b. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

- c. On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n , une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n) .

- d. En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5. En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

6. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 38 ★★★**Banque Mines-Ponts MP 2023**

On note $p(n)$ le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + 2y + 3z = n$. On note $G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$.

1. Montrer que G est définie pour sur $] -1, 1[$ et que

$$\forall t \in] -1, 1[, G(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

2. En déduire un équivalent de $p(n)$.

Développements en série entière**Exercice 39 ★★★★★****ENS MP 2011**

Soit \mathbb{K} un corps fini et \mathcal{P} l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$. On pose

$$\zeta(t) = \prod_{P \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - t^{\deg P}}$$

1. Montrer que ζ est défini sur un intervalle du type $[0, t_0[$.
2. Montrer que ζ est développable en série entière au voisinage à droite de 0 et déterminer son développement.

Exercice 40 ★★★**Nombres de Bell**

On pose $f(x) = e^{e^x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est développable en série entière en 0 et donner les coefficients A_n de ce développement comme sommes de séries.

Exercice 41 ★★

Déterminer le développement en série entière en 0 de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt$.

Exercice 42 ★★

Déterminer le développement en série entière en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 43 ★★

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Développer en série entière $f(x) = \frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1}$.

Exercice 44 ★★**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Développer en série entière $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{2}x + x^2)$.

Exercice 45 ★★★★★**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2ix}$.

1. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
2. Montrer que g n'est pas développable en série entière.

Exercice 46 ★★**CCINP (ou CCP) MP 2021**

Développer en séries entières les fonctions suivantes au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence :

1. $f(z) = \frac{1}{6z^2 - 5z + 1}, z \in \mathbb{C}$

2. $g(x) = \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right), x \in \mathbb{R}$

3. $h(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, x \in \mathbb{R}$

Exercice 47 ★★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023

Soit $q \in]-1, 1[$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction f continue en 0 telle que $f(0) = 1$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx)$$

2. Cette fonction est-elle développable en série entière ? Si oui, quel est son rayon de convergence ?

Divers

Exercice 48 ★★★★★

X MP 2010

Caractériser les suites $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ soit le développement en série entière en 0 d'une fraction rationnelle.

Exercice 49 ★★★

Mines-Ponts MP 2017

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, Q(z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)z^n}{n!}$$

On notera ce polynôme $u(P)$.

2. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
3. Déterminer les éléments propres de u .

Exercice 50 ★★★

Centrale MP 2018

Soit $(a_n)_{n \geq 2}$ une suite de réels. On pose $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et on suppose que

$$f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est définie et injective sur D .

1. Montrer que $\forall z \in D, z \in \mathbb{R} \iff f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall z \in D, \operatorname{Im}(z) > 0 \iff \operatorname{Im}(f(z)) > 0$.
3. Soient $r \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer en fonction de r et n l'intégrale

$$I_n(r) = \int_0^\pi \operatorname{Im}(f(re^{i\theta})) \sin(n\theta) d\theta$$

4. En remarquant que $|\sin(n\theta)| \leq n \sin(\theta)$ pour $\theta \in [0, \pi]$, montrer que $|a_n| \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 51 ★★★

Mines-Ponts MP 2017

E est un ensemble à n éléments. On appelle *dérangement* une permutation de E sans point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de E . On pose $D_0 = 1$.

1. Montrer l'égalité $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.

On définit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$.

2. Justifier que f est définie sur $] -1, 1[$.
3. Montrer que pour x dans $] -1, 1[$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.
4. En déduire l'égalité $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.
5. Montrer que, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, D_n est la partie entière de $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$.

Exercice 52**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019**

On cherche à résoudre l'équation

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

avec $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Soit la suite (u_n) de fonctions définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

Montrer par récurrence que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une certaine fonction u .

2. Montrer que u est solution de (E).
3. Donner les fonctions développables en série entière dont la restriction à \mathbb{R}_+ est solution de (E).

Exercice 53 ★★**CCINP (ou CCP) MP 2021**Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1}$.

1. Donner le domaine de convergence D de $\sum f_n$.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.
3. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.
4. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \int_0^1 \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1} dt$?
6. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 54 ★★★**Banque Mines-Ponts MP 2018**Soit $(z_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls à valeurs dans le disque ouvert $D(0, R)$ ($R > 0$) et qui converge vers 0.

1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R , telle que $\forall p \in \mathbb{N}, f(z_p) = 0$.
Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Que dire de deux séries entières f et g de même rayon de convergence R et telles que $f(z_p) = g(z_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$?

Exercice 55 ★★**Formule de Cauchy**Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.Soit $r \in [0, R[$. Montrer que

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Exercice 56 ★★★**Banque Mines-Ponts MP 2021**

On suppose qu'il existe une partie A de \mathbb{N} telle que

$$\sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$$

1. Soit I une partie finie de A . Calculer $\int_0^{+\infty} \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx$.
2. Montrer que A est fini.
3. Qu'en conclut-on ?

Exercice 57 ★★★

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . On munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ d'une norme d'opérateur $\|\cdot\|$. Montrer que l'application $\varphi : A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \mapsto \sum a_n A^n$ est continue sur la boule $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \|A\| < R\}$.

Exercice 58 ★★**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

Soit $\alpha \in]-1, 1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n(x) = \frac{\alpha^n}{n} \cos nx$. Soit $W : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$.

1. Montrer que W est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ; exprimer W' à l'aide des fonctions usuelles.
2. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$.

Exercice 59**Magistère MP 2024**

Soit $(a_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $|f^{(k)}(x)| \leq 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n a_{n+1} < 0$.
2. En déduire une expression de f .

Exercice 60 ★★**CCINP MP 2024**

Soit f une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini. On note $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt = a_n r^n$$

2. Montrer que si f est bornée, alors f est constante.