# Devoir à la maison n°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1

**1** Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs deux à deux distincts. On peut supposer $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_{\lambda_i} = 0$. Supposons que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ et soit alors $j = \min\{i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \neq 0\}$. Alors $\sum_{i=j}^{n} \alpha_i \phi_{\lambda_i} = 0$. Mais, comme $\alpha_j \neq 0$ et $\lambda_j < \dots < \lambda_n$, $\sum_{i=j}^{n} \alpha_i \phi_{\lambda_i} \underset{0^+}{\sim} \alpha_j \phi_{\lambda_j}$ d'où une contradiction. Ainsi $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est nul et $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est libre.

**2** Notons $\mathrm{D}'_n$ le déterminant obtenu à partir de $\mathrm{D}_n$ en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{R}(a_1) \\ \mathrm{R}(a_2) \\ \vdots \\ \mathrm{R}(a_n) \end{pmatrix}$$

Comme $\mathrm{R}(a_1) = \dots = \mathrm{R}(a_{n-1}) = 0$, en développant $\mathrm{D}'_n$ par rapport à sa dernière colonne, on obtient $\mathrm{D}'_n = \mathrm{R}(a_n)\mathrm{D}_{n-1}$. Par ailleurs, en effectuant sur $\mathrm{D}'_n$ l'opération $\mathrm{C}_n \leftarrow \mathrm{C}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k \mathrm{C}_k$, on obtient $\mathrm{D}'_n = \mathrm{A}_n \mathrm{D}_n$ en factorisant la dernière colonne obtenue par $\mathrm{A}_n$. On en déduit que $\mathrm{A}_n \mathrm{D}_n = \mathrm{R}(a_n)\mathrm{D}_{n-1}$.

**3** Supposons que $b_n \neq b_k$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Remarquons alors que

$$\mathrm{A}_n = [(\mathrm{X} + b_n)\mathrm{R}(\mathrm{X})](-b_n) = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1}(b_n + a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k - b_n)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_n)}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_n - b_k)}$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{R}(a_n) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(a_n + b_k)}$$

On en déduit que

$$\mathrm{D}_n = \frac{\mathrm{R}(a_n)}{\mathrm{A}_n}\mathrm{D}_{n-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)(b_n - b_k)}{(a_n + b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n + b_k)}\mathrm{D}_{n-1}$$

Cette relation est encore valable s'il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ puisque $\mathrm{D}_n$ est alors nul (deux colonnes identiques).
On obtient alors la formule voulue par récurrence.

**4** Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(y_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - y_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} d(x, \mathrm{A}) = 0$. Autrement dit, $(y_n)$ converge vers $x$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, $x \in \overline{\mathrm{A}}$.

**5** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}$ donc $d(x, \mathrm{A}) \leq d(x, \mathrm{A}_{n+1}) \leq d(x, \mathrm{A}_n)$. La suite $(d(x, \mathrm{A}_n))$ est décroissante et minorée par $d(x, \mathrm{A})$ ; elle converge vers un réel $\delta \geq d(x, \mathrm{A})$. Supposons que $\delta > d(x, \mathrm{A})$. Par définition de la borne inférieure, il existe alors $y \in \mathrm{A}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x, \mathrm{A}) \leq \|x - y\| < \delta \leq d(x, \mathrm{A}_n)$$

Ceci est absurde puisque $y$ appartient à A et donc à l'un des $\mathrm{A}_n$.

**6** $B \cap V$ est la boule fermée de centre $x$ et de rayon $\|x\|$ de l'espace vectoriel normé V. On en déduit que $B \cap V$ est fermé et borné dans V qui est de dimension finie. Ainsi $B \cap V$ est compact de V et donc un compact de E.
Comme $B \cap V \subset V$, $d(x, V) \leq d(x, B \cap V)$. Soit alors $y \in V$.

- Si $y \in B$, alors $\|x - y\| \geq d(x, B \cap V)$.
- Si $y \notin B$, alors $\|x - y\| > \|x\|$. Or il est clair que $0_E \in B \cap V$ de sorte que

$$\|x - y\| > \|x\| = \|x - 0_E\| \geq d(x, B \cap V)$$

Finalement, pour tout $y \in V$, $\|x - y\| \geq d(x, B \cap V)$. On en déduit que $d(x, V) \geq d(x, B \cap V)$ puis $d(x, V) = d(x, B \cap V)$.

**7** L'application $y \mapsto \|x - y\|$ est continue car 1-lipschitzienne (considérer la seconde inégalité triangulaire). Cette application admet donc un minimum sur le compact $B \cap V$. Il existe donc $y \in \cap B \cap V \subset V$ tel que

$$\|x - y\| = \min_{y \in B \cap V} \|x - y\| = d(x, B \cap V) = d(x, V)$$

**8** Notons $y$ le projeté orthogonal de $x$ sur V. Alors $y \in V$ de sorte que $d(x, V) \leq \|x - y\|$. De plus, $x - y \in V^\perp$ et Pour tout $z \in F$, $y - z \in V$ et donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

ou encore

$$\forall z \in V, \|x - z\| \geq \|x - y\|$$

On en déduit que $d(x, V) \geq \|x - y\|$ puis que $d(x, V) = \|x - y\|$.
Soit $z \in V$ tel que $\|x - z\| = d(x, V) = \|x - y\|$. On a vu précédemment

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2$$

On en déduit que $\|y - z\| = 0$ i.e. $y = z$.

**9** Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ soit liée. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_n$ non nul tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0$. Par bilinéarité du produit scalaire, $\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $M(x_1, \dots, x_n)$, on a donc $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$. La famille des colonnes de $M(x_1, \dots, x_n)$ est donc liée et $G(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Réciproquement, supposons que la $G(x_1, \dots, x_n)$ soit liée. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_n$ non nul tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ i.e. $\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = 0$ ou encore $\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, x_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \in \text{vect}(x_1, \dots, x_n) \cap \text{vect}(x_1, \dots, x_n)^\perp = \{0\}$. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est donc liée.

**10** Notons $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ le projeté orthogonal de $x$ sur V. En effectuant l'opération $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i$, la dernière colonne de $G(x_1, \dots, x_n, x)$ devient par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, x - y \rangle \\ \langle x_2, x - y \rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, x - y \rangle \\ \langle x, x - y \rangle \end{pmatrix}$$

Or $x - y \in V^\perp$ donc $\langle x_i, x - y \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. De plus,

$$\langle x, x - y \rangle = \langle x - y, x - y \rangle + \langle y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 = d(x, V)^2$$

En développant le déterminant obtenu par rapport à sa dernière colonne, on obtient donc

$$G(x_1, \dots, x_n, x) = d(x, V)^2 G(x_1, \dots, x_n)$$

Comme $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, ce qui permet de conclure.

**11** Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq |f(x)| \leq N_\infty(f)$ puis, $|f(x)|^2 \leq N_\infty(f)^2$ et enfin, par croissance de l'intégrale

$$N_2(f)^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 \,dx \leq \int_0^1 N_\infty(f)^2 \,dx = N_\infty(f)^2$$

Ainsi $N_2(f) \leq N_\infty(f)$.
Soit A une partie de $\mathcal{C}([0,1])$ et $f \in \overline{(A)}^\infty$. Il existe donc une suite $(f_n)$ d'éléments de A convergeant vers $f$ pour la norme $N_\infty$. Ainsi $N_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq N_2(f_n - f) \leq N_\infty(f_n - f)$$

donc $N_2(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $(f_n)$ converge vers $f$ pour la norme $N_2$ et $f \in \overline{(A)}^2$. Par conséquent, $\overline{(A)}^\infty \subset \overline{(A)}^2$.

**12** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$N_2(\phi_0 - \phi_{1/n})^2 = \int_0^1 (1 - x^{1/n})^2 \,dx = \int_0^1 (1 - 2x^{1/n} + x^{2/n}) \,dx = 1 - \frac{2}{1/n+1} + \frac{1}{2/n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 2 + 1 = 0$$

Ainsi $(\phi_{1/n})$ est une suite délements de $V_0$ convergeant vers $\phi_0$ pour la norme 2. On en déduit que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

**13** Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. On considère une suite $(\psi_n)$ d'éléments de $V_0$ convergeant vers $\phi_0$ pour la norme $N_2$ (par exemple, la suite de la question précédente). Alors $(f\psi_n)$ est encore une suite d'éléments de $V_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N_2(f - f\psi_n)^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 |\phi_0(x) - \psi_n(x)|^2 \,dx \leq N_\infty(f)^2 N_2(\phi_0 - \psi_n)$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N_2(f - f\psi_n) \leq N_\infty(f) N_2(\phi_0 - \psi_n)$$

On en déduit que $N_2(f - f\psi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $(f\psi_n)$ converge vers $f$ pour la norme $N_2$. Ceci prouve que $V_0$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_2$.
Pour tout $f \in V_0$, $N_\infty(f - \phi_0) \geq |f(0) - \phi_0(0)| = 1$ donc $\phi_0 \notin \overline{V_0}^\infty$ et $V_0$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_\infty$.

**14** Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé. Alors $0 \in V \subset \overline{V}$. Soit $(x, y) \in (\overline{V})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe alors deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ d'éléments de V convergeant respectivement vers $x$ et $y$. Comme V est un sous-espace vectoriel, $(\lambda x_n + \mu y_n)$ est une suite d'éléments de V qui converge vers $\lambda x + \mu y$ par opérations. Ainsi $\lambda x + \mu y \in \overline{V}$. On en déduit que $\overline{V}$ est également un sous-espace vectoriel.

**15** Si V est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_\infty$, il est clair que $\phi_m \in \overline{V}^\infty$ pour tout entier $m \geq 0$.
Si $\phi_m \in \overline{V}^\infty$ pour tout entier $m \geq 0$, alors $\operatorname{vect}(\phi_m,\ m \in \mathbb{N}) \subset \overline{V}^\infty$ car $\overline{V}^\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1])$. Mais $\operatorname{vect}(\phi_m,\ m \in \mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_\infty$ d'après le théorème de Weierstrass. Comme $\overline{V}^\infty$ est fermé pour la norme $N_\infty$, $\mathcal{C}([0,1]) = \overline{\operatorname{vect}(\phi_m,\ m \in \mathbb{N})}^\infty \subset \overline{V}^\infty$ et donc $\overline{V}^\infty = \mathcal{C}([0,1])$.

**16** A nouveau, il est clair que si V est dense pour la norme $N_2$, il est clair que $\phi_m \in \overline{V}^2$ pour tout entier $m \geq 0$.
Supposons maintenant que $\phi_m \in \overline{V}^2$ pour tout entier $m \geq 0$. Pour simplifier, notons $W = \overline{V}^2$. Comme précédemment, $\mathcal{C}([0,1]) = \overline{\operatorname{vect}(\phi_m,\ m \in \mathbb{N})}^\infty \subset \overline{W}^\infty$. Ainsi $\overline{W}^\infty = \mathcal{C}([0,1])$. Or, d'après la question **11**, $\overline{W}^\infty \subset \overline{W}^2$ donc $\overline{W}^2 = \mathcal{C}([0,1])$. Mais comme $W = \overline{V}^2$, $\overline{W}^2 = \overline{V}^2$. Finalement $\overline{V}^2 = \mathcal{C}([0,1])$ i.e. V est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_2$.

**17** Remarquons tout d'abord que $(W_n)$ est croissante pour l'inclusion et que $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ de sorte que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $d(f, W) = \lim_{n\to+\infty} d(f, W_n)$ d'après la question **5**.
Supposons que W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_2$. Soit $\mu \in \mathbb{N}$. Alors $\phi_\mu \in \overline{W}$ et $\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = d(\phi_\mu, W) = 0$.
Supposons que pour tout entier $\mu \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$. Alors $d(\phi_\mu, W) = 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}$. Ceci signifie que $\phi_\mu \in \overline{W}^2$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}$ d'après la question **4**. Enfin, on déduit avec la question **16** que W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_2$.

**18** Soit $\mu \in \mathbb{R}_+$. D'après la question **10**,

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n})}$$

Or pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $\langle \phi_a, \phi_b \rangle = \dfrac{1}{\alpha + \beta + 1}$. Ainsi $G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n})$ est un déterminant de Cauchy $D_n$ dans lequel on a choisi $a_k = b_k = \lambda_k + 1/2$. Il en est de même pour $G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)$. En utilisant la relation de récurrence déterminée à la question **3**, on obtient

$$G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}) \frac{\prod_{k=0}^n (\mu - \lambda_k)^2}{(2\mu + 1) \prod_{k=0}^n (\lambda_k + \mu + 1)^2}$$

On en déduit que

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \frac{\prod_{k=0}^n |\mu - \lambda_k|}{\prod_{k=0}^n (\lambda_k + \mu + 1)}$$

> **Remarque.** On n'a en fait pas besoin de l'expression explicite des déterminants de Cauchy mais seulement de la relation de récurrence qui les lie.

**19** Soit $\mu \geq 0$.
Si $(\lambda_k)$ diverge vers $+\infty$, il est clair que $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$ converge vers 1.
Réciproquement, supposons que $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$ converge vers 1. Posons comme indiqué dans l'énoncé, $f : x \in [0, \mu] \mapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$. La suite $(|f(\lambda_k)|)$ converge alors vers 1. La fonction $f$ décroît de $\dfrac{\mu}{\mu + 1} < 1$ vers 0 sur $[0, \mu]$. On en déduit que $\lambda_k \geq \mu$ à partir d'un certain rang et la suite $(-f(\lambda_k))$ converge vers 1 La fonction $-f$ est continue et strictement croissante sur $[\mu, +\infty[$ donc elle induit une bijection de $[\mu, +\infty[$ sur $[0, 1[$ car $\lim_{-\infty} -f = 1$. Il s'ensuit que $\lim_1 (-f)^{-1} = +\infty$ et donc $(\lambda_k)$ diverge vers $+\infty$.

**20** Remarquons déjà que W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_2$ si et seulement si $d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ puisque, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu = \lambda_k$, alors $d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $n \geq k$.
Par passage au logarithme, W est donc dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_2$ si et seulement si $\sum_{k \in \mathbb{N}} \ln \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$ diverge vers $-\infty$ pour tout $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.
Si la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ converge, alors $\dfrac{1}{\lambda_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $\lambda_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (les $\lambda_k$ sont positifs). Soit $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. On en déduit alors qu'à partir d'un certain rang, $\lambda_k \geq \mu$ de sorte que

$$\ln \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = \ln \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1} = \ln\left(1 - \frac{2\mu + 1}{\lambda_k + \mu + 1}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} -\frac{2\mu + 1}{\lambda_k}$$

La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \ln \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$ converge donc.
Réciproquement, supposons que pour tout $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$, $\sum_{k \in \mathbb{N}} \ln \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$ converge. On choisit $\mu$ arbitrairement. Alors $\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ puis $\lambda_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'après la question précédente. On montre comme précédemment que

$$\ln \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \underset{k \to +\infty}{\sim} -\frac{2\mu + 1}{\lambda_k}$$

et on en déquit que $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ converge.
On a donc bien montré que W était dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ si et seulement si $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ divergeait.

**21** Supposons que W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_\infty$. Alors $\mathcal{C}([0,1]) = \overline{W}^\infty \subset \overline{W}^2$ d'après la question **11** et W est donc dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $N_2$. D'après la question précédente, $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge.

**22** Remarquons que puisque $\mu$ et les $\lambda_k$ sont dans $[1, +\infty[$, $(\phi_\mu - \psi)(0) = 0$. Par ailleurs,

$$(\phi_\mu - \psi)' = \mu phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k - 1}$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ s'annulant en 0, $\mathrm{N}_\infty(f) \leq \mathrm{N}_2(f')$.
Soit donc $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ s'annulant en 0. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x)^2 = \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq (\int_0^x \mathrm{d}t)^2 \left(\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^2 = \mathrm{N}_2(f)^2$$

Ainsi $|f(x)| \leq \mathrm{N}_2(f)$ pour tout $x \in [0,1]$ i.e. $\mathrm{N}_\infty(f) \leq \mathrm{N}_2(f')$.

**23** Supposons que $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ diverge. Alors la série $\sum \frac{1}{\lambda_k - 1}$ diverge également. En effet, si $\lambda_k \underset{\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{1}{\lambda_k - 1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda_k}$ et $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ diverge. Sinon, $\sum \frac{1}{\lambda_k - 1}$ diverge grossièrement. On en déduit avec la question **20** que $\mathrm{vect}(\phi_{\lambda_k - 1},\ k \in \mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\mathrm{N}_2$.
Remarquons déjà que puisque $\lambda_0 = 0$, $\phi_0 \in \mathrm{W} \subset \overline{\mathrm{W}}^\infty$. Soit alors un entier $\mu \geq 1$. Soit également $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathrm{vect}(\phi_{\lambda_k - 1},\ k \in \mathbb{N})$ dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\mathrm{N}_2$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\mathrm{N}_\infty(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} b_k \phi_{\lambda_k - 1}) \leq \varepsilon$$

On pose alors $\psi = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{\lambda_k} \phi_{\lambda_k}$ et la question précédente montre que

$$\mathrm{N}_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq \mathrm{N}_\infty(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} b_k \phi_{\lambda_k - 1}) \leq \varepsilon$$

On en déduit que $\phi_\mu \in \overline{\mathrm{W}}^\infty$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}$. Comme $\overline{\mathrm{W}}^\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1])$, $\mathrm{vect}(\phi_\mu,\ \mu \in \mathbb{N}) \subset \overline{\mathrm{W}}^\infty$. Comme $\overline{\mathrm{W}}^\infty$ est fermé pour la norme $\mathrm{N}^\infty$, $\overline{\mathrm{vect}(\phi_\mu,\ \mu \in \mathbb{N})}^\infty \subset \overline{\mathrm{W}}^\infty$. Le théorème de Weierstrass stipule que $\overline{\mathrm{vect}(\phi_\mu,\ \mu \in \mathbb{N})}^\infty = \mathcal{C}([0,1])$, ce qui permet de conclure.

**24** Posons $m = \inf_{k \geq 1} \lambda_k$, $\mu_k = \frac{\lambda_k}{m}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors $\mu_0 = 0$ et $\mu_k \geq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La question précédente montre que $\mathrm{V} = \mathrm{vect}(\phi_{\mu_k},\ k \in \mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\mathrm{N}_\infty$. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Posons $\mathrm{g} : x \mapsto f(x^{1/m})$. Il existe donc une suite $(v_n)$ d'éléments de V convergeant vers $g$ pour la norme $\mathrm{N}_\infty$ i.e. $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{g} - v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Posons alors $w_n : x \mapsto v_n(x^m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\phi_{\mu_k}(x^m) = \phi_{\lambda_k}(x)$, $(w_n)$ est alors une suite d'éléments de W. De plus, comme $x \mapsto x^m$ établit une bijection de $[0,1]$ dans lui-même,

$$\mathrm{N}_\infty(g - v_n) = \sup_{x\in[0,1]} |\mathrm{g}(x) - v_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\mathrm{g}(x^m) - v_n(x^m)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - w_n(x)| = \mathrm{N}_\infty(f - w_n)$$

Ainsi $\mathrm{N}_\infty(f - w_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $(w_n)$ est une suite d'éléments de W convergeant vers $f$ pour la norme $\mathrm{N}_\infty$. Il s'ensuit que W est encore dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\mathrm{N}_\infty$.