# Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

**Solution 1**

**1.** Posons $M_p = \frac{1}{p}I_n$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. La suite $(M_p)$ est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ et converge vers la matrice nulle qui n'est pas inversible. Par caractérisation séquentielle, $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.

**2.** Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. Ainsi $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Le singleton $\{0\}$ est fermé donc $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est ouvert. Comme l'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

**3.** Si M n'admet pas de valeurs propres strictement positives, alors $\chi_M(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On peut alors choisir $\rho > 0$ de manière arbitraite. Pour tout $\lambda \in ]0, \rho[$, $\chi_M(\lambda) \neq 0$ i.e. $M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
Si M admet des valeurs propres strictement positives, on note $\rho$ la plus petite d'entre elles. A nouveau, pour tout $\lambda \in ]0, \rho[$, $\chi_M(\lambda) \neq 0$ i.e. $M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
Posons alors $M_p = M - \frac{\rho}{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. La suite $(M_p)$ converge vers M et, d'après ce qui précède, est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$. Par caractérisation séquentielle, $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**4.** **Première méthode.** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(A_p)$ de matrices inversibles convergeant vers A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda I_n - BA_p = A_p^{-1}(\lambda I_n - A_pB)A_p$ donc $\lambda I_n - BA_p$ et $\lambda I_n - A_pB$ sont semblables : elles ont donc même déterminant i.e. $\det(\lambda I_n - BA_p) = \det(\lambda I_n - A_pB)$. Mais $\lim\limits_{p\to+\infty} \lambda I_n - BA_p = \lambda I_n - BA$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \lambda I_n - A_pB = \lambda I_n - AB$ par continuité des endomorphismes $M \mapsto BM$ et $M \mapsto MB$ sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme det est continue, on obtient par caractérisation séquentielle, $\lim\limits_{p\to+\infty} \det(\lambda I_n - BA_p) = \det(\lambda I_n - BA)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \det(\lambda I_n - A_pB) = \det(\lambda I_n - AB)$. Par unicité de la limite, $\det(\lambda I_n - BA) = \det(\lambda I_n - AB)$ i.e. $\chi_{BA}(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
**Deuxième méthode**. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \chi_{AB}(\lambda)$ et $g : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \chi_{AB}(\lambda)$. Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $BA = A^{-1}ABA$ donc BA et AB sont semblables de sorte que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ i.e. $f(A) = g(A)$. De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc les applications $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MB$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto BM$ sont continues. Comme det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les applications $f$ et $g$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, elles coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $f = g$. Ainsi,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$$

Comme deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini (en l'occurrence $\mathbb{R}$), sont égaux,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \chi_{AB} = \chi_{BA}$$

Si on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = 0$ donc $\pi_{AB} = X$ mais $BA = B \neq 0$ donc $\pi_{BA} \neq X = \pi_{AB}$.

**5.** Si on pose $A = I_n$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array}\right)$, alors $\det(A) = 1$ et $\det(B) = -1$. Notamment, A et B appartiennent à $GL_n(\mathbb{R})$.
Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, $\det(GL_n(\mathbb{R}))$ serait un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle, car det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mais, d'après ce qui précède, cet intervalle contiendrait $-1$ et 1 et donc également 0. Ceci est absurde puisque les matrices inversibles sont de déterminants non nuls. Ainsi $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

**Solution 2**

1. **a.** Un produit par blocs donne

$$M_{A,B,C,D}M_{I_n,E,0_n,I_n} = M_{A,AE+B,C,CE+D}$$

**b.** En prenant $E = -A^{-1}B$ dans la question précédente, on obtient

$$M_{A,B,C,D}M_{I_n,E,0_n,I_n} = M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B}$$

Par conséquent,

$$\det(M_{A,B,C,D})\det(M_{I_n,E,0_n,I_n}) = \det(M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B})$$

Les matrices $M_{I_n,E,0_n,I_n}$ et $M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B}$ sont triangulaires par blocs donc $\det(M_{I_n,E,0_n,I_n}) = \det(I_n)^2 = 1$ et $\det(M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B}) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$. Finalement,

$$\det(M_{A,B,C,D}) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

2. **a.** D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\det(M_{A,B,C,D}) &= \det(A)\det(D - CA^{-1}B)\\
&= \det(A(D - CA^{-1}B)) && \text{par propriété du déterminant}\\
&= \det(AD - ACA^{-1}B)\\
&= \det(AD - CAA^{-1}B) && \text{car A et C commutent}\\
&= \det(AD - CB)
\end{aligned}$$

**b.** **i.** Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$. Alors $\lambda I_n - A$ est inversible. De plus, $\lambda I_n - A$ et $-C$ commutent encore. On peut alors appliquer la question précédente pour affirmer que

$$\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(M_{\lambda I_n - A, -B, -C, \lambda I_n - D}) = \det((\lambda I_n - A)(\lambda I_n - D) - CB) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$$

avec $U = -(A + D)$ et $V = AD - CB$. Les applications $\lambda \mapsto \chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda)$ et $\lambda \mapsto \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$ sont polynomiales et coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$ : elles sont donc égales.

**ii.** Les deux applications précédentes sont donc égales en 0, ce qui donne

$$\det(M_{-A,-B,-C,-D}) = \det(AD - CB)$$

Or

$$\det(M_{-A,-B,-C,-D}) = \det(-M_{A,B,C,D}) = (-1)^{2n}\det(M_{A,B,C,D}) = \det(M_{A,B,C,D})$$

donc

$$\det(M_{A,B,C,D}) = \det(AD - CB)$$

3. **a.** D'une part, $(B^\top B)^\top = B^\top (B^\top)^\top = B^\top B$ donc $B^\top B$ est symétrique. D'autre part, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top B^\top BX = (BX)^\top BX = \|BX\|^2 \geq 0$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi B est bien symétrique positive.

**b.** Comme $I_n$ et $B^\top$ commutent, on peut appliquer la question **2.b.i** pour affirmer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \chi_S(\lambda) = \det(\lambda^2 - 2\lambda I_n + I_n - B^\top B) = \det((\lambda-1)^2 I_n - B^\top B) = \chi_{B^\top B}((\lambda-1)^2)$$

**c.** Remarquons déjà que S est bien symétrique.
Supposons que S soit symétrique définie positive. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(B^\top B)$. Comme $B^\top B$ est symétrique positive, $\mu \geq 0$. D'après la question précédente,

$$\chi_S(1 - \sqrt{\mu}) = \chi_{B^\top B}(\mu) = 0$$

donc $1 - \sqrt{\mu}$ est valeur propre de S. Comme S est symétrique définie positive, $1 - \sqrt{\mu} > 0$ puis $\mu < 1$. Les valeurs propres de $B^\top B$ sont donc toutes strictement inférieures à 1.
Supposons que toutes les valeurs propres de $B^\top B$ soient strictement inférieures à 1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$. Alors

$$\chi_{B^\top B}((\lambda-1)^2) = \chi_S(\lambda) = 0$$

d'après la question précédente. Ainsi $(\lambda - 1)^2$ est une valeur porpre de $B^\top B$ de sorte que $(\lambda-1)^2 < 1$ i.e. $-1 < \lambda - 1 < 1$ ou encore $0 < \lambda < 2$. On a alors $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc S est bien symétrique définie positive.

**4.** **a.** On montre d'abord par récurrence que $A_n$ est une matrice carrée de taille $2^n$.
Les matrices $2A_{n-1}$ et $iA_{n-1}$ commutent donc, d'après la question **2.b.ii**,

$$\det(A_n) = \det(2A_{n-1} \times (-2A_{n-1}) - iA_{n-1} \times iA_{n-1}) = \det(-3A_{n-1}^2) = (-3)^{2^{n-1}} \det(A_{n-1})^2$$

Mais comme $n > 1$, $2^{n-1}$ est pair donc

$$\det(A_n) = 3^{2^{n-1}} \det(A_{n-1})^2$$

**b.** Tout d'abord, $\det(A_1) = -3$. On montre ensuite par récurrence que $\det(A_n) = 3^{2^{n-1}n}$ pour tout entier $n \geq 2$. D'abord,

$$\det(A_2) = 3^2 \det(A_1)^2 = 3^4 = 3^{2^{2-1}\times 2}$$

Ensuite, supposons que $\det(A_n) = 3^{2^{n-1}n}$ pour un certain entier $n \geq 2$. Alors

$$\det(A_{n+1}) = 3^{2^n} \det(A_n)^2 = 3^{2^n} \left(3^{2^{n-1}n}\right)^2 = 3^{2^n} \cdot 3^{2^n n} = 3^{2^n(n+1)}$$

ce qui conclut la récurrence.

**c.** Les matrices $2A_{n-1}$ et $iA_{n-1}$ commutent donc, d'après la question **2.b.i**,

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \chi_{A_n}(\lambda) &= \det(\lambda^2 I_{2^{n-1}} - 3A_{n-1}^2) \\
&= \det\left(3\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} I_{2^{n-1}} - A_{n-1}\right)\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} I_{2^{n-1}} + A_{n-1}\right)\right) \\
&= 3^{2^{n-1}} \det\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} I_{2^{n-1}} - A_{n-1}\right)\det\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} I_{2^{n-1}} + A_{n-1}\right) \\
&= 3^{2^{n-1}} \chi_{A_{n-1}}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)\chi_{-A_{n-1}}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

**d.** Comme $\chi_{A_1} = X^2 - 3$, $\mathrm{Sp}(A_1) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. La relation de récurrence de la question précédente montre que

$$\mathrm{Sp}(A_n) = \left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(A_{n-1})\right) \cup \left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(-A_{n-1})\right) = \left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(A_{n-1})\right) \cup \left(-\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(A_{n-1})\right)$$

On en déduit par une récurrence évidente que $\mathrm{Sp}(A_n) = \{-\sqrt{3}^n, \sqrt{3}^n\}$.

# Problème 1

**1** On note $a_n = \dfrac{n^{n-1}}{n!}$ le coefficient de $x^n$ dans la série entière. D'après la formule de Stirling,

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e$ et le rayon de convergence de la série entière vaut $e^{-1}$ d'après la règle de d'Alembert.

**Remarque.** On peut se passer de la formule de Stirling dans cette question. En effet,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n n!}{(n+1)!} n^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Or $(n-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \cdot \dfrac{1}{n} = 1$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e$$

et le rayon de convergence de la série entière vaut $e^{-1}$ d'après la règle de d'Alembert.

**2** Toujours d'après la formule de Stirling,

$$\frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Par comparaison à une série de Riemman convergente, $\sum \dfrac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$ converge.

**3** Pour tout $x \in [-e^{-1}, e^{-1}]$,

$$|a_n x^n| = \left|\frac{n^{n-1}}{n!}x^n\right| \leq \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$$

D'après la question précédente, la série définissant $f$ converge normalement sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$.

**4** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$. La série $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$ d'après la question précédente. Ainsi $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$.

**5** Par concavité du logarithme, $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in ]-1, +\infty[$. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

puis

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$$

et enfin, par croissance de l'exponentielle,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

**6** Comme $f$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $e^{-1}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire $]-e^{-1}, e^{-1}[$.
On obtient la dérivée de $f$ en dérivant terme à terme :

$$\forall x \in ]-e^{-1}, e^{-1}[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$$

**7** Il est clair que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, e^{-1}[$.
Soit $x \in ]-e^{-1}, 0[$. Comme $x$ est négatif,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n |x|^n}{n!}$$

On vérifie alors le critère spécial des séries altermées. Posons $u_n = \dfrac{(n+1)^n|x|^n}{n!}$. Comme $\sum(-1)^n u_n$ converge, on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. De plus, en utilisant la question **5**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |x| \leq e|x| \leq 1$$

Comme $(u_n)$ est positive, on peut affirmer qu'elle est décroissante. La série $\sum(-1)^n u_n$ vérifie donc le critère spécial des séries alternées. La somme $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ est donc du signe de son premier terme $u_0$. Ainsi $f'(x) \geq 0$.
La fonction $f$ est donc croissante sur $]-e^{-1}, e^{-1}[$.

**8** Remarquons que

$$f\left(-\frac{1}{e}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$$

Posons $u_n = \dfrac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie à nouveau que la série $\sum(-1)^n u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{e} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e} \leq 1$$

Donc la suite $(u_n)$ est décroissante. Elle est également de limite nulle puisque $\sum(-1)^n u_n$ converge. Alors, d'après le théorème sur les séries alternées

$$\left|f\left(-\frac{1}{e}\right) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k\right| \leq |u_{n+1}| = u_{n+1}$$

On cherche donc $n$ tel que $u_{n+1} \leq 10^{-2}$. On propose un programme Python à cet effet.

```python
from math import factorial, exp

def approx(ϵ):
    u = exp(-1)
    s = 0
    n = 1
    while u > ϵ:
        s += (-1)**n * u
        u *= (1+1/n)**(n-1) * exp(-1)
        n += 1
    return s
```

```
>>> approx(10**-2)
-0.28352486503145236
```

**9** $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction polynôme et de l'exponentielle. On raisonne par récurrence sur $i$.
On a bien $\varphi(x) = P_0(e^x)(1-e^x)^m$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $P_0 = 1$. Soit $i \in [\![0, m-1]\!]$. Supposons qu'il existe un polynôme $P_i$ tel que $\varphi^{(i)}(x) = P_i(e^x)(1-e^x)^{m-i}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^{(i+1)}(x) = P_i'(e^x)e^x(1-e^x)^{m-i} - (m-i)P_i(e^x)e^x(1-e^x)^{m-i-1} = P_{i+1}(e^x)(1-e^x)^{m-i-1}$$

avec $P_{i+1} = X(1-X)P_i' - (m-i)XP_i$.
Par récurrence, il existe bien pour tout $i \in [\![0, m]\!]$ un polynôme $P_i$ tel que $\varphi^{(i)}(x) = P_i(e^x)(1-e^x)^{m-i}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**10** Soit un entier $m \geq 2$. D'après la formule du binôme,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(-1)^n e^{nx}$$

En dérivant $m-1$ fois, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(m-1)}(x) = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(-1)^n n^{m-1} e^{nx}$$

puis en évaluant en 0

$$\varphi^{(m-1)}(0) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}(-1)^n n^{m-1}$$

Mais, d'après la question précédente,

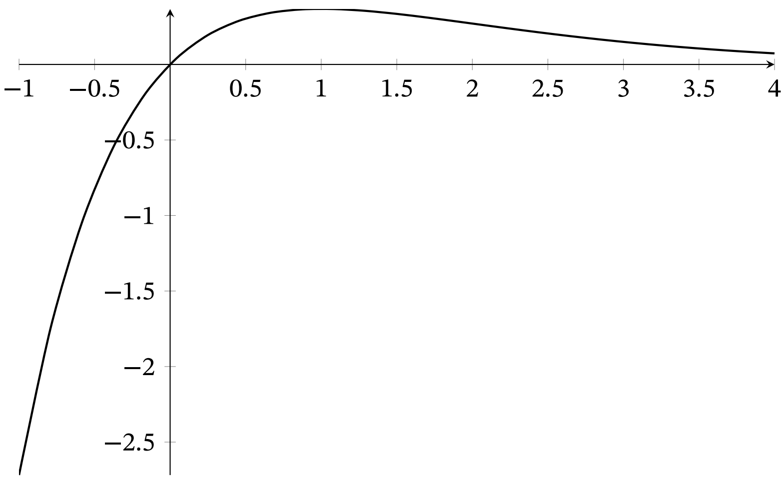
$$\varphi^{(m-1)}(0) = \mathrm{P}_{m-1}(1)(1-1)^{m-1} = 0$$

car $m - 1 \geq 1$. On en déduit le résultat demandé.

**11** La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(y) = (1-y)e^{-y}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On en déduit le tableau de variation suivant.

| $y$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(y)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(y)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $e^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

puis le graphe suivant




**12** La fonction $g$ est strictement croissante et continue sur $[-1, 0]$. Puisque

$$g(-1) = -e < -e^{-1} < 0 = g(0)$$

il existe un unique réel $\alpha \in ]-1, 0[$ tel que $g(\alpha) = -\frac{1}{e}$.
De plus, par croissance de $g$ sur $[\alpha, 1]$,

$$\forall y \in [\alpha, 1],\ g(\alpha) = -\frac{1}{e} \leq g(y) \leq g(1) = \frac{1}{e}$$

**13** On a vu précédemment que $f$ était définie et même continue sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$. Soit $y \in [\alpha, 1]$. D'après la question précédente, $g(y) = ye^{-y} \in [-e^{-1}, e^{-1}]$ donc $f$ est bien définie en $ye^{-y}$. De plus,

$$f(ye^{-y}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n e^{-ny}$$

Mais en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle,

$$\begin{aligned}
f(ye^{-y}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-ny)^m}{m!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-n} n^{m-n} y^{m-n}}{(m-n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \cdot \frac{(-1)^{m-n} n^{m-n} y^{m-n}}{(m-n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m
\end{aligned}$$

**14** Soit $y \in [\alpha, -\alpha]$. D'après le théorème de Fubini positif,

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} |z_{n,m}| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} |z_{n,m}| \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} |y|^m \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n^{m+n-1}}{n!m!} |y|^{m+n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}|y|^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(n|y|)^m}{m!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}|y|^n}{n!} e^{n|y|} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (|y|e^{|y|})^n
\end{aligned}$$

Or $y \in [\alpha, -\alpha]$, $-|y| \in [\alpha, 0]$ et donc $g(-|y|) \in [-e^{-1}, e^{-1}]$ i.e. $-|y|e^{|y|} \in [-e^{-1}, e^{-1}]$ et donc également $|y|e^{|y|} \in [-e^{-1}, e^{-1}]$. On a vu que la série définissant $f$ convergeait sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$ donc

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} |z_{n,m}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (|y|e^{|y|})^n < +\infty$$

Ceci prouve que la famille $(z_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est bien sommable.

**15** Soit $y \in [\alpha, -\alpha]$. On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini. D'une part, en reprenant les calculs de la question précédente

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} z_{n,m} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} z_{n,m} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{n^{m+n-1}}{n!m!} y^{m+n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}y^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-ny)^m}{m!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}y^n}{n!} e^{-ny} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (ye^{-y})^n \\
&= f(g(y))
\end{aligned}$$

D'autre part,

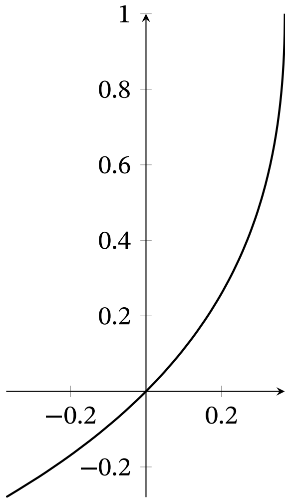
$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} z_{n,m} &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,m}\\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m\\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m y^m}{m!}\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}n^{m-1}\end{aligned}$$

D'après la question **10**, tous les termes d'indices $m \geq 2$ de cette somme sont nuls. Ainsi

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} z_{n,m} = y$$

Finalement, $f(g(y)) = y$.

**16** La question précédente montre que $f$ est la bijection réciproque de la bijection de $[\alpha, 1]$ sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$ induite par $g$. On en déduit le graphe suivant.




**17** La fonction $g$ est dérivable en $\alpha$ et $g'(\alpha) = (1-\alpha)e^{-\alpha} \neq 0$ donc $f$ est dérivable en $g(\alpha) = -\frac{1}{e}$. Par contre, $g$ est dérivable en 1 mais $g'(1) = 0$ donc $f$ n'est pas dérivable en $g(1) = \frac{1}{e}$. On peut préciser que le graphe de $f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.