Suites

Exercice 1 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note (E_n) l'équation $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$.

1. Montrer qu'il existe des suites (u_n) et (v_n) telles que, pour n assez grand, u_n et v_n vérifient (E_n) et $0 < u_n < e < v_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite
3. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 2 ★★★ **Centrale**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = 1$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Etudier la convergence de la suite (x_n).
3. Calculer sa limite.

Exercice 3 **ENSEA**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos x = nx$ possède une unique solution $x_n \in [0, 1]$.
2. Déterminer la limite de (x_n).
3. Etudier la monotonie de (x_n).
4. Etablir que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$.

Exercice 4 ★★★ **CCINP (ou CCP) PC 2014**

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En déduire la limite de $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Polynômes

Exercice 5 ★★ **Banque CCP**

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposez en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^{2n} - 2\mathrm{X}^n \cos(n\theta) + 1$$

Exercice 6 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

Montrer que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 7 ★★★★ **Stabilité**

1. Déterminer les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathrm{P}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
2. Déterminer les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
3. Déterminer les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathrm{P}(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 8 ★★ **CCP PC**

Soient x, y, z trois complexes non nuls tels que $x + y + z = 0$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

Exercice 9 **CCINP (ou CCP) PC 2019**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(z^{n+1}) = f(z)f(z^n) - f(z^{n-1})$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n et de coefficient dominant un tel que : $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z^n) = P_n(f(z))$. On donnera une expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1}.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le seul polynôme Q vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z^n) = Q(f(z))$ est P_n.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. On pose $z_k = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}}$. Calculer $f(z_k^n)$. Que peut-on en déduire ? Donner une expression des P_n.
5. **a.** Montrer que $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   b. En déduire le coefficient constant de P_n.
6. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
7. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Exercice 10 ★★ **Mines-Ponts MP**

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

Exercice 11 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2016**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère la suite de polynômes définie par : $N_0 = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $N_k(X) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$. On considère l'endomorphisme de E défini par $u(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer le noyau de u.
2. Montrer que $(N_0, \dots, N_n)$ est une base de E.
3. Calculer $u(N_k)$.
4. Montrer que u est nilpotent. Quel est son indice de nilpotence ?
5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer qu'il existe un unique $Q \in E$ tel que $u(Q) = P$ et $Q(0) = 0$.

Algèbre générale

Exercice 12 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2015**

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

1. Rappeler la définition d'un anneau et d'un idéal.
2. Soit I un idéal de A. Montrer que si $1_A \in I$, alors $I = A$.
3. On pose $I_a = \{ax,\ x \in A\}$. Montrer que I_a est bien un idéal de A.
4. On suppose que A n'est pas l'anneau nul. Montrer que A est un corps si et seulement si les seuls idéaux de A sont $\{0_A\}$ et A.

Exercice 13 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2022**

Pour un anneau A, on dit qu'un idéal I de A est premier si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in A^2,\ xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I$$

Soit A un anneau abélien dont tous les idéaux sont premiers. Montrer que A est un anneau intègre, puis que A est un corps.

Exercice 14 ★★★★ **ENS MP 2011**

On s'intéresse aux sous-groupes discrets de $(\mathbb{C},+)$ et $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\times)$.

1. Donner des exemples de tels sous-groupes.
2. Soit Γ un sous-groupe discret non trivial de $(\mathbb{C},+)$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda\Gamma = \Gamma$. Montrer que $\lambda^4 = 1$ ou $\lambda^6 = 1$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et Γ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. A quelle condition sur λ le sous-groupe Γ est-il discret ?

Exercice 15 ★★ **Mines-Ponts MP 2016**

Soit p un nombre premier impair et k un diviseur premier de $2^p - 1$. Montrer que $k \equiv 1[2p]$.

Exercice 16 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit G un groupe fini. On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre au plus 2. Que peut-on dire du cardinal de G ?

Exercice 17 **C.C.E. Mines MP 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose pour $h \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}(h) = \begin{pmatrix} a^h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{E} = \{\mathrm{A}(h),\ h \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est un groupe multiplicatif isomorphe à $(\mathbb{R},+)$.
2. Calculer $\exp(t\mathrm{V})$ avec $\mathrm{V} = \mathrm{A}'(0)$

Exercice 18 ★★ **Caractéristique d'un anneau**

Soit $(\mathrm{A},+,\times)$ un anneau non nul. Si 1_A est d'ordre fini n dans le groupe $(\mathrm{A},+)$, on dit que A est de *caractéristique* n. Sinon, on dit que A est de caractéristique nulle.

1. Déterminer les caractéristiques des anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Montrer que si A est de caractéristique n, $nx = 0_\mathrm{A}$ pour tout $x \in \mathrm{A}$.
3. On suppose que A est un anneau intègre. Montrer que la caractéristique de A est soit nulle, soit un nombre premier.
4. On suppose que A est un anneau commutatif dont la caractéristique est un nombre premier p. Montrer que l'application $f : x \in \mathrm{A} \mapsto x^p$ est un endomorphisme d'anneau.
   Que peut-on dire de f si A est intègre ? si A est intègre et fini ?
5. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéristique p. Montrer que p est un nombre premier puis qu'on peut munir $\mathbb{K}$ d'une structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel. En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{card}\,\mathrm{F} = p^n$.

Algèbre linéaire

Exercice 19 ★★ **CCP MP**

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, on note S_p l'ensemble des suites réelles u vérifiant :

$$\exists \mathrm{P} \in \mathbb{R}_p[\mathrm{X}],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \alpha u_n + \mathrm{P}(n)$$

1. Montrer que si $u \in \mathrm{S}_p$, P est unique. On notera P_u ce polynôme.
2. Montrer que S_p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Montrer que l'application $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{S}_p & \longrightarrow & \mathbb{R}_p[\mathrm{X}] \\ u & \longmapsto & \mathrm{P}_u \end{array} \right.$ est linéaire et donner une base de son noyau.
4. Quelle est l'image de ϕ ? Donner une base de S_p. On pourra utiliser les polynômes $\mathrm{R}_k = (\mathrm{X}+1)^k - \alpha \mathrm{X}^k$ avec $k \in [\![0,p]\!]$.
5. Application : déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7$.

Exercice 20 ★★★ **Mines P' 1995**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n. On pose

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathrm{E}) \\ g & \longmapsto & f \circ g - g \circ f \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\Phi^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$. En déduire que Φ est nilpotent.
2. Soit $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $a \circ b \circ a = a$. En déduire l'indice de nilpotence de Φ.

Exercice 21 ★★★ **Centrale MP**

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in \mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2,\ f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Justifier qu'il existe $(p_1, p_2) \in \mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$ tel que $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$.
2. Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
3. Montrer que $\dim \mathrm{H}_1 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$ et $\dim \mathrm{H}_2 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2$.
4. Quel est le nombre de choix possibles pour le couple $(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$?

Exercice 22 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})^2$ avec E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\dim \mathrm{Ker}(u + v) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)) + \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v))$$

Exercice 23 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Résoudre le système

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{r} a^2x + a^3y + az = m \\ a^2x + y + az = m \\ x + ay + a^2z = m \end{array} \right.$$

Exercice 24 ★ **CCP 2010**

Soit f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ associe le polynôme $\tilde{\mathrm{P}}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{\mathrm{P}}(x) = \int_x^{x+1} \mathrm{P}(t)\, \mathrm{d}t$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f induit un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Calculer $\det(f_n)$ en fonction de n.

Exercice 25 ★★★ **ENS 2010**

On considère l'ensemble des matrices de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

1. Combien de coefficients faut-il changer au plus pour rendre une telle matrice inversible ?
2. Combien y a-t-il de telles matrices ? Calculer la moyenne des déterminants au carré de ces matrices.

Exercice 26 ★★★ **Centrale MP 2017**

On considère une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour toute matrice carrée d'ordre $n > 0$ réelle inversible $\mathrm{A} = (a_{i,j})$, la matrice $\mathrm{A}' = (f(a_{i,j}))$ soit également inversible.

1. Montrer que pour tous réels distincts x et y, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire que f est injective.
2. On suppose f surjective. En considérant les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ pour x, y, z réels avec $z \neq x + y$ montrer que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
3. Montrer que f est surjective. Conclure quant à f.

Exercice 27 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. On pose $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$.

Montrer que $\mathrm{D} = 0 \iff x = y$.

Exercice 28 ★★★ **Centrale PSI**

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $a_1, \dots, a_n$ des complexes et $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X} - a_i)$.

Calculer $\mathrm{D}(x) = \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{P}(x)}{x-a_1} & \frac{\mathrm{P}(x)}{x-a_2} & \dots & \frac{\mathrm{P}(x)}{x-a_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$ pour $x \in \mathbb{C}$.

Arithmétique

Exercice 29 ★★★ **Mines-Ponts MP**

Montrer que si p est un entier premier différent de 2 et 5, alors il divise un des entiers de l'ensemble $\{1, 11, 111, 1111, \dots\}$.

Exercice 30 ★★★ **Centrale MP 2012**

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$n(n+1)(n+2) = m^2$$

Exercice 31 ★★★ **Mines-Ponts MP 2018**

Soient $a_1, \dots, a_r$ des entiers naturels non nuls premiers entre eux deux à deux.

1. On pose pour $i \in [\![1, r]\!]$,

$$c_i = \prod_{j \in [\![1,r]\!] \setminus \{i\}} a_j$$

Montrer que $c_1, \dots, c_r$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

2. Soit $b \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un unique uplet $(y, x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ tel que

$$\forall k \in [\![1, r]\!],\ 0 \leq x_k < a_k \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{a_1 \dots a_r} = y + \sum_{k=1}^{r} \frac{x_k}{a_k}$$

Exercice 32 ★★★★ **X MP 2001**

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 3[4]$.

2. Soit $p > 2$ un nombre premier. Montrer que $\forall u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*,\ u^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$.

3. Combien y a-t-il de $u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tels que $u^{\frac{p-1}{2}} = -1$?

4. Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$.

5. Si $u \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ vérifie $u^{\frac{p-1}{2}} = -1$, que peut-on dire de la structure de l'ensemble K des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} x & yu \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$?

Exercice 33 ★★ **Mines-Ponts MP 2012**

Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs ne peut pas être égal au produit de deux nombres premiers.

Exercice 34 ★★★★ **Centrale-Supélec MP 2015**

Soit N une application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}^+$. On dit que N est une valeur absolue si et seulement si :

(i) $\forall x \in \mathbb{Q},\ \mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0$;

(ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ \mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$;

(iii) $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ \mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.

Une valeur absolue N est dite *ultramétrique* si $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ \mathrm{N}(x+y) \leq \max(\mathrm{N}(x), \mathrm{N}(y))$.
N est dite *triviale* si elle est constante sur $\mathbb{Q}^*$.
Si p est un nombre premier, on note $\nu_p(n)$ la valuation p-adique définie sur les entiers. On pose par convention $\nu_p(0) = +\infty$.

1. Soit N une valeur absolue. Déterminer $\mathrm{N}(1)$ et $\mathrm{N}(-1)$.
2. Soient $q = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ où $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et p un nombre premier. Montrer que $\nu_p(a) - \nu_p(b)$ ne dépend que de q. On le notera $\nu_p(q)$.
3. On définit pour $q \in \mathbb{Q}$, $|q|_p = p^{-\nu_p(q)}$. Montrer que $|.|_p$ est une valeur absolue ultramétrique.
4. Soit N une valeur absolue ultramétrique non triviale. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et p premier tels que $\mathrm{N} = |.|_p^\alpha$.

Exercice 35 ★★ **Mines-Ponts MP 1998**

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier a impair

$$a^{2^{n-1}} \equiv 1\,[2^n]$$

Exercice 36 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

1. Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier.
2. Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

Exercice 37 ★★★★ **Centrale-Supélec MP 2019**

On pose $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier et impair, $\mathcal{C} = \left\{x^2,\ x \in \mathbb{F}_p \setminus \{\overline{0}\}\right\}$.

1. Que dire de la structure algébrique de $\mathbb{F}_p$ et de $\mathcal{C}$?
2. Expliciter $\mathcal{C}$ pour $p = 11$.
3. Soit P un polynôme de degré strictement inférieur à d et à coefficients entiers, avec $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ tel que les a_i soient distincts modulo p et tel que p divise les $\mathrm{P}(a_i)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, p divise $\mathrm{P}(n)$.
4. Montrer que $\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{F}_p,\ x^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}\right\}$.

Exercice 38 ★★★ **C.C.E. Mines MP 2015**

Soit P un polynôme à coefficients entiers et quatre entiers $(\lambda_i)_{1\leq i\leq 4}$ distincts tels que $\mathrm{P}(\lambda_i) = 7$ pour i entre 1 et 4. Montrer que l'équation $\mathrm{P}(n) = 14$ n'admet pas de solution entière.

Intégrales impropres

Exercice 39 **Centrale-Supélec MP 2022**

1. Enoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t$.
3. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 40 ★★★ **Centrale PSI**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\,dt$$

On suppose que φ admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f admet pour limite 0 en $+\infty$.

Exercice 41 ★★★★ **Mines-Ponts MP 2016**

1. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$ et f de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{+\infty} f' + af = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{+\infty} f'' + f' + f = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.
3. Généraliser.

Exercice 42 ★★★ **Centrale MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ continue de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Montrer que g est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 43 ★★★ **Banque Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f'.
3. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est définie et la calculer.

Exercice 44 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2017**

On pose pour tout x non nul,

$$\mathrm{F}(x) = \int_x^{7x} \frac{1 - e^{-t}}{t^2}\,dt$$

Déterminer $\lim_{x\to0^+} \mathrm{F}(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$.

Exercice 45 ★★ **CCP MP**

1. Déterminer le domaine de définition $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2}\,dt$.
2. Calculer $\mathrm{F}(1)$.
3. Calculer $\mathrm{F}(x)$ pour tout x dans le domaine de définition de f.

Exercice 46 ★★★ **TPE-EIVP PSI 2017**

Soit $a > 1$, Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que pour tout x dans $[1, +\infty[$:

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer en fonction de $\int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et de ℓ.

Exercice 47 ★★★ **CCP MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et π-périodique vérifiant

$$\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^\pi f(t)e^{-t/n}\,\mathrm{d}t \qquad v_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t/n}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que u_n et v_n sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier qu'il existe une suite (a_n), que l'on précisera, telle que $v_n = a_n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$.
4. Montrer que (u_n) converge vers 0. Montrer que (v_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 48 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$. Montrer que cette intégrale converge. Donner sa valeur.

Exercice 49 ★★ **Banque Mines-Ponts MP 2023**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissante. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
La réciproque est-elle vraie ?

Convexité

Exercice 50 ★★

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $f \geq 0$ sur $[a, b]$ et on souhaite montrer qu'il n'existe qu'une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' - fy = g$ s'annulant en a et b.
Soient donc φ_1 et φ_2 deux solutions de l'équation différentielle $y'' - fy = g$ s'annulant en a et b.

1. Montrer que $(\varphi_1 - \varphi_2)^2$ est convexe.
2. En déduire que $\varphi_1 = \varphi_2$.

Exercice 51 ★★ **TPE**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ convexe sur $[0, 2\pi]$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

Exercice 52 ★★★ **X MP**

Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ continue et concave telle que $f(0) = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Exercice 53 ★★★ **Entropie**

Soient $p_1, \dots, p_n$ des réels strictement positifs et de somme 1. On pose $\mathrm{H}(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$.

1. Montrer que $0 \leq \mathrm{H}(p) \leq \ln(n)$.
2. Soient $q_1, \dots, q_n$ des réels strictement positifs et de somme 1. Montrer que

$$\mathrm{H}(p) \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i)$$

Exercice 54 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2017**

1. Etudier la convexité des fonctions ln et exp.
2. Démontrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ dans $(\mathbb{R}_+)^n$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3. Démontrer que si S est une matrice réelle symétrique alors :
$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{X}^\top \mathrm{S}\mathrm{X} \geq 0$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(\mathrm{S}) \subset \mathbb{R}_+$.
4. Démontrer que si S est une matrice réelle d'ordre n symétrique à valeurs propres positives, alors $(\det(\mathrm{S}))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\operatorname{tr}(\mathrm{S})$.
5. Démontrer que pour toute matrice réelle d'ordre n, $\det(\mathrm{M})^2 \leq \left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})\right)^n$.

Exercice 55 ★★★★ **ENS Ulm/Lyon/Cachan MP 2001**

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, on note

$$\mathrm{E}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > f(x)\}$$

l'épigraphe de f.
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe une unique application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\mathrm{E}_h = \mathrm{E}_f + \mathrm{E}_g$.
2. On suppose f et g convexes. Montrer que h est convexe.
3. Montrer que f et g peuvent être de classe $\mathcal{C}^\infty$ sans que h le soit.

Suites et séries de fonctions

Exercice 56 ★★ **CCP MP**

On pose $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$?
3. Soit g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\ \mathrm{d}t = g(0)$$

Exercice 57 ★★ **Mines-Ponts PC**

On pose $f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+x}}\right) - 2\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geq 1} f_{n+1} - f_n$.
2. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer $\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 58 ★★★ **Mines-Télécom MP 2018**

1. Déterminer l'ensemble de définition de la série de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$. Donner un équivalent simple de f en 0.

2. Mêmes questions avec $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

Exercice 59 ★★ **Mines-Télécom MP 2017**

On définit la suite de fonctions (g_n) de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par $g_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(1-t)\ \mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$.

2. On pose $\mathrm{G} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.
Montrer que G est bien définie sur $[0,1]$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par G.

3. En déduire l'expression de G.

Exercice 60 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2019**

1. Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = k$?

2. Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}$?

Exercice 61 **CCINP (ou CCP) PC 2019**

Soit $t \in \mathbb{R}$ et on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{nt})$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Montrer que $\lim_{t\to-\infty} f(t) = \ln(2)$.

3. Montrer que $\lim_{t\to 0^-} f(t) = +\infty$.

Exercice 62 **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Pour $t \in]0,1[$, écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme de série $\sum_{n\geq 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)|\ \mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire ?

3. Soit $\mathrm{S_N}(t) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n(t)$. Démontrer

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{S_N}(t)\ \mathrm{d}t$$

4. En déduire

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

5. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 63 ★★★ **Arts et Métiers PSI**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_0 = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [a, b],\ f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Déterminer la nature de la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sur $[a, b]$.

2. On note F la somme de cette série. Montrer que

$$\forall x \in [a, b],\ \mathrm{F}(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Exercice 64 ★★★★ **Centrale MP**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. On note g la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. On pose $f : x \mapsto g(x) - \ln(x)$. Montrer que f vérifie les trois conditions suivantes :

(i) $f(1) = 0$.

(ii) f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$;

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) - f(x) = \ln(x)$;

4. Réciproquement, soit f vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} x \ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x + k)$$

Exercice 65 ★★ **E3A MP 2019**

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer

$$2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \qquad 2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme e^z.
Soit α un réel non nul fixé.
Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $\mathrm{C} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathcal{D}$.

3. Donner pour tout $x \in \mathcal{D}$ une expression de $\mathrm{C}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Pour tout entier naturel n, on note

$$\mathrm{J}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\mathrm{C}(x)\ \mathrm{d}x \qquad \mathrm{I}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\mathrm{C}(x)\ \mathrm{d}x$$

a. Calculer J_n puis I_n.

b. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $\mathrm{S}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 66 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Etudier la convergence simple de $\sum_{n\geq0}(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$. On note, pour $x\in\mathbb{R}_+$, $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n+1}$.
2. La série de fonctions considérée converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$? Converge-t-elle uniformément ?
3. Montrer que sa somme est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite en $+\infty$.
4. Résoudre $y'-y=-\dfrac{e^x}{e^x+1}$ sur $]0,+\infty[$.
5. En déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 67 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2023**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $v_n(x)=n^xe^{-nx}$. Soit $S: x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de S.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Donner la limite de S en $+\infty$ à l'aide du théorème de la double limite.
4. $\sum_{n\geq1}v_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?
5. S est-elle dérivable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 68 **Banque Mines-Ponts MP 2023**

On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\ u_n(x)=\frac{(-1)^n}{x+n}$$

On définit $f: x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$.

1. f est-elle bien définie ? Continue ?
2. Trouver un équivalent de f en 0^+, puis en $+\infty$.
3. Écrire $f(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Exercice 69 ★★

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
2. Montrer que la série $\sum f_{n+1}-f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite (f_n) converge uniformément sur X.

Exercice 70 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit (λ_n) une suite strictement croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$. On pose pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x)=(-1)^ne^{-\lambda_nx}$$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Etudier sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On pose $S=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}S(t)\,dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty}S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

Exercice 71 ★★ **CCINP (ou CCP) PC 2017**

On considère pour $x > 0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. f est-elle bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Montrer que
$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$
3. Montrer que
$$\forall x > 0,\ 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$
4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de f en 0^+.
6. Montrer que :
$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 72 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$
2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, trouver la monotonie de S.
3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}(x+1) + \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x}$$
puis en déduire un équivalent simple de S en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 73 ★★ **E3A PSI 2020**

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $\mathrm{J} = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur J.
On note alors $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathrm{J}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur J.
3. Etudier alors sa convergence uniforme sur J.
4. Déterminer $\ell = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
   - **a.** Justifier la convergence de la série $\sum u_n$. On note $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.
   - **b.** Montrer que l'on a au voisinage de l'infini :
$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Intégrales à paramètres

Exercice 74 ★★ **CCP MP**

On pose $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$?
3. Soit g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(0)$$

Exercice 75 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

1. Pour quelles valeurs de n l'intégrale est-elle définie ?
2. Calculer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
4. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge et calculer sa somme S sous la forme d'une intégrale.
5. Calculer S.

Exercice 76 ★★★ **Banque Mines-Ponts PC 2023**

Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ telle que $f(0) \neq 0$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
Trouver un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 77 **Mines-Ponts MP 2018**

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^x \frac{\ln(t)\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

Exercice 78 **Mines-Ponts MP 2017**

A toute fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on associe la fonction $\mathrm{R}(h)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{R}(h)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

A toute fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on associe fonction $\mathrm{S}(g)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{S}(g)(x) = g(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que R et S sont des applications linéaires à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. On pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2}.
3. Soit P un polynôme. Montrer que $\mathrm{S} \circ \mathrm{R}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$.
4. Montrer que pour $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\mathrm{S} \circ \mathrm{R}(g) = g$.

Exercice 79 **CCP MP**

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une équation différentielle vérifiée par g sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Donner un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 80 ★★ **Mines Télécom MP 2016**

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} \, dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
2. Montrer que $|\sin u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer F''.
4. Déterminer la fonction F.

Exercice 81 ★★ **Centrale MP 2011**

Soit $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} \, dt$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)} \, dt}{1+t^2}$.

1. Montrer que $f^2 + g$ est constante. Quelle est sa valeur ?
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$.

Exercice 82 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \, dt$.

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. **a.** Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
   b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. **a.** Montrer que f est solution de (E) : $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.
   b. Déterminer la fonction f.

Exercice 83 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt} \, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer une équation différentielle dont F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, puis résoudre cette équation différentielle.

Exercice 84 **Mines-Ponts MP**

On définit une fonction f par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sh}(x\sqrt{t}) \, dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement en série entière.
3. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 85 ★ **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

1. Montrer que
$$\forall x \in [-1,1], \quad \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

Exercice 86 ★ **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente.

1. Calculer $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$.
3. Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 87 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Montrer que $\mathrm{I} = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie.
2. Donner la décomposition en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ et préciser son rayon de convergence.
3. Écrire I comme somme d'une série.
4. Donner la valeur exacte de I sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 88 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.
2. Montrer que $\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 89 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Rappeler le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un segment.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < \mathrm{R}$.

Exercice 90 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}$ sur $]0,1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \in]0,1] \mapsto x^{2n}(\ln x)^2$. Montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0,1]$ et calculer $\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer une expression de $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ sous forme de somme.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

Exercice 91 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$. On pose : $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(x+1)^n}$ et $\mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que J_n est bien définie et étudier sa limite en $+\infty$.
2. Calculer $f_n'(x)$ et en déduire un équivalent de J_n.
3.
   a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \mathrm{J}_n z^n$.

   b. Calculer la somme de cette série entière sous forme intégrale.

Exercice 92 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2014**

On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer des équivalents simples de f aux bornes de son domaine de définition.

Réduction

Exercice 93 ★★ **Mines-Ponts MP 2016**

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires a et b de E formant une famille libre.
Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \langle a \mid x\rangle a + \langle b \mid x\rangle b \end{cases}$$

Exercice 94 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit l'endomorphisme

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres de u, ainsi que les espaces propres associés.

Exercice 95 **X MP 2010**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_n$ si et seulement si il existe $\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{S}\overline{\mathrm{S}}^{-1}$.

Exercice 96 ★ **CCP MP 2010**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectres disjoints.

1. Montrer que $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{B})$ est inversible.
2. Soit X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{AX} = \mathrm{XB}$. Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{X} = \mathrm{X}\mathrm{P}(\mathrm{B})$ et en déduire que $\mathrm{X} = 0$.
3. Montrer que pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{AX} - \mathrm{XB} = \mathrm{M}$.

Exercice 97 **ENS MP 2018**

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que les polynômes caractéristiques de A et B sont premiers entre eux si et seulement si il n'existe pas de matrice $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{AX} = \mathrm{XB}$.

Exercice 98 ★★★ **Mines-Ponts MP 2018**

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$.
On suppose qu'il existe $h \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ de rang $r \geq 1$ tel que $h \circ g = f \circ h$. Montrer que χ_f et χ_g ont un facteur commun de degré r.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 99 ★★ **CCP 2015**

Soient E un espace vectoriel de dimension $2n+1$ et de base $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ ainsi que u l'endomorphisme de E tel que $u(e_1) = e_1 + e_{2n+1}$ et $u(e_i) = e_{i-1} + e_i$ pour tout $i \in [\![2, 2n+1]\!]$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de u.
2. Montrer que u est inversible et déterminer un polynôme P tel que $u^{-1} = \mathrm{P}(u)$.
3. Déterminer les valeurs propres complexes de u.
4. En déduire $\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 100 ★ **TPE MP 2010**

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$ et $\text{tr}(M) = 0$.

Exercice 101 **TPE-EIVP PSI 2017**

Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$, $C^3 = 5A + 6B$. A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 102 ★★★★ **X MP**

Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver le rang minimal et le rang maximal des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^\top = M$.

Exercice 103 **CCP MP 2010**

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$. Montrer que $\text{rg}(u)$ est pair.

Exercice 104 ★★★★ **Mines-Ponts MP 2015**

On note $GL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversible et dont l'inverse appartient aussi à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $(GL_2(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.
2. Soit G un sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour toute matrice $M \in G$, $M^{12} = I_2$.

Exercice 105 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit $n \geqslant 2$ entier. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_n$ et $A \neq \pm I_n$.

1. Montrer que $\text{tr}(A) \equiv n[2]$.
2. Montrer que $|\text{tr}(A)| \leq n - 2$.

Exercice 106 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A, et la diagonaliser si possible.
2. Résoudre l'équation $M^2 = A$ pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 107 ★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A et B sont-elles semblables ?

Exercice 108 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A s'écrit PDP^{-1} avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On cherche à résoudre l'équation $X^3 = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Montrer que si X est solution de cette équation, alors $P^{-1}XP$ commute avec D puis qu'elle est diagonale.
   Résoudre l'équation.

Exercice 109 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A en fonction de J et J^2.
2. Calculer le polynôme caractéristique de J. La matrice J est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser A.

Exercice 110 **Banque Mines-Ponts MP 2023**

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables commutant entre elles.
   a. Montrez que A_1 et A_2 sont simultanément diagonalisables.
   b. Conclure pour $A_1, \dots, A_p$ (on fera une récurrence).
2. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ inclus dans $\{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^2 = I_n\}$. Montrer que G est fini. Que dire de son cardinal ?
3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ distincts. Existe-t-il un isomorphisme de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $GL_m(\mathbb{C})$?

Exercice 111 ★★★ **D'après Centrale MP**

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire dans E stable par u. Le résultat persiste-t-il si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 112 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note f et g deux endomorphismes de E et on note A et B leurs matrices dans une même base de E.

1. On suppose f et g bijectifs dans cette question.
   a. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
   b. Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. a. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même spectre.
   b. Donner un exemple de matrices telles que AB soit diagonalisable mais pas BA.

Exercice 113 ★★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019**

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E vérifiant $f \circ g = f + g$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.
2. On suppose g diagonalisable. Montrer que f et $f \circ g$ sont aussi diagonalisables et que $\operatorname{Sp}(f \circ g) \subset \mathbb{R} \backslash]0, 4[$.

Exercice 114 ★★

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X + 1)P(X) - XP(X + 1)$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les éléments propres de Φ. Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 115 ★ **CCP 2018**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$, telle que $\operatorname{rg}(A) = 1$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 116 ★★ **CCP MP 2018**

Soient x un nombre réel et E_x l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M + xI_n = 0$.

1. Si $x \neq 0$, montrer qu'une matrice $M \in E_x$ est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à E_0 ?
2. Pour quelles valeurs de x tous les éléments de E_x sont ils diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Déterminer l'ensemble T des traces des éléments de E_{-2}. Quel est son cardinal ?

Exercice 117 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + 2M^\top \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $\operatorname{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Exercice 118 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2018**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 119 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On définit : $\forall m \in \mathbb{R}$, $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres et sous-espaces propres de A_m.
2. Donner les valeurs de m pour lesquelles A_m soit diagonalisable. Même question pour l'inversibilité.
3. Si A_m est diagonalisable, déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 120 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et admet une unique valeur propre réelle a. Montrer que $a > 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier.
3. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \sin(\pi a^n)$ converge.

Exercice 121 ★★ **Mines-Télécom MP 2018**

Soient A une matrice diagonalisable et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 122 ★★ **Magistère MP 2017**

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB - BA = A$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^kB - BA^k = kA^k$.
2. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 123 ★★★ **Magistère MP 2017**

Montrer que l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes est égal à celui des matrices de trace nulle.

Exercice 124 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$. On considère f un endomorphisme de E.

1. La condition «f est de rang 1» est-elle suffisante/nécessaire pour que f soit un projecteur ?
2. On suppose f de rang 1 et de trace 1, montrer que f est un projecteur.
3. Construire une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

Exercice 125 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et telle que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 126 **ENS MP 2011**

1. Soit A une matrice inversible réelle. Exprimer le polynôme minimal de A^{-1} en fonction de celui de A.
2. Soit A une matrice orthogonale réelle telle que 1 et -1 ne soient pas racines de son polynôme minimal. Montrer que A et A^{-1} ont même polynôme minimal. Montrer que le degré de ce polynôme minimal est pair.

Exercice 127 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}$ où $n \geq 3$.

1. Quel est le rang de A ? la dimension du noyau de A ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in]1, +\infty[$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1-\lambda\}$.
5. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 128 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Donner le rang de B en fonction du rang de A.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

3. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B l'est aussi, et donner ses valeurs propres.

Exercice 129 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On définit : $\forall m \in \mathbb{R}, A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$. Déterminer le polynome minimal de A_m.

Exercice 130 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère un entier $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et telle que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 131 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Comparer le spectre de A et celui de M.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer P(M) en fonction de P(A) et P′(A).
3. Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur A quant à la diagonalisabilité de M.

Exercice 132 ★★

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on considère les endomorphismes $G_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v$ et $D_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto v \circ u$.

1. Montrer que les applications $u \mapsto G_u$ et $u \mapsto D_u$ sont des morphismes d'algèbres injectifs.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(G_u) = G_{P(u)}$ et $P(D_u) = D_{P(u)}$.
3. Montrer que $\pi_{G_u} = \pi_{D_u} = \pi_u$.
4. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes : (i) u est diagonalisable ; (ii) G_u est diagonalisable ; (iii) D_u est diagonalisable.
5. Montrer que si u est diagonalisable, alors $G_u - D_u$ l'est également.
6. Montrer que si u est nilpotent, alors $G_u - D_u$ l'est aussi.

Séries et familles sommables

Exercice 133 ★★ **Mines-Télécom MP 2018**

Convergence et somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, où $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\, \mathrm{d}x$. On pourra travailler sur les sommes partielles de la série.

Exercice 134 ★★★ **X (non PC/PSI) MP 2021**

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 135 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Donner la définition de la convergence d'une série puis montrer que si $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) tend vers 0.
2. Soit (u_n) une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.
   - **a.** On suppose que $\lim_{n\to\infty} nu_n = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Montrer que $\lambda = 0$.
   - **b.** Montrer que $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$.
   - **c.** Montrer que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge puis montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$.

Exercice 136 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n\, \mathrm{d}x$.

1. Calculer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2}$.
3. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
4. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \mathrm{I}_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 137 ★★ **CCINP (ou CCP) PC 2021**

On pose pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right)$$

et pour tout entier $n \geq 3$,

$$v_n = \ln\left(\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}}\right)$$

Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} v_n$ converge, puis que la série $\sum_{n\geq 3} u_n$ diverge.

Exercice 138 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que

$$\int_{u_n}^{1} \frac{e^t}{t}\, dt = n$$

On pourra considérer la fonction $x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t}\, dt$.

2. Étudier la monotonie de (u_n) et sa limite.

3. On pose $v_n = n + \ln u_n$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite sous forme d'une intégrale.

4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 139 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 2,\ a_n = 2a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

Montrer que (a_n) est définie, puis que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 140 ★★★ **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to\infty} a_n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = 1$$

1. Montrer que la suite (a_n) converge vers 0 et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ diverge.

2. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$. Monter que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2\, dt = 1$$

3. Monter que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

Exercice 141 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell$$

2. Soient $a > 0$, $\lambda > 0$, $\alpha > 1$ et $f : [0,a] \to [0,a]$ continue admettant un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$$

a. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit le seul point fixe de f dans $[0,\varepsilon]$.

b. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in [0,\varepsilon]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers 0.

c. Trouver un équivalent de $f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$ quand x tend vers 0.

d. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

e. Appliquer aux fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 142 ★★ **D'après Mines-Télécom MP 2016**

Soit (v_n) une suite telle que $v_n = \dfrac{\cos(v_{n-1})}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la limite puis un équivalent de v_n. En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$.
2. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n v_n$.

Exercice 143 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 144 ★★★

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 145 ★★ **CCINP (ou CCP) PC 2019**

On pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geq 2$.

1. Nature de $\sum_{n\geq 2} \ln(1+a_n)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=2}^{n} (1+a_k)\right)$.

Exercice 146 ★★ **Constante γ d'Euler**

1. Montrer que $\ln(n) - \ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 147 **Navale PSI 2019**

Trouver un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$.

Exercice 148 **CCINP (ou CCP) MP 2022**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{3^n n!}\prod_{k=1}^{n}(3k-2) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^{2/3}}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. En étudiant la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$
Montrer que la série $\sum w_n$ converge.
4. En déduire qu'il existe deux réels α et C tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^\alpha}$.

Exercice 149 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} te^{-int}\,dt$.
2. Soient I une partie finie de $\mathbb{N}^*$, $(a_n)_{n\in I}$ et $(b_n)_{n\in I}$ deux suites finies de réels positifs. Montrer que
$$\sum_{(n,m)\in I^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi\sqrt{\sum_{n\in I} a_n^2 \sum_{n\in I} b_n^2}$$
3. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles telles que les familles $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soient sommables. Montrer que $\left(\dfrac{a_n b_m}{n+m}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et que
$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n^2}$$

Séries entières

Exercice 150 ★★ CCP MP

On note $f(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Y a-t-il convergence en R et $-$R ?
3. Déterminer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.
4. Montrer que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 0$.

Exercice 151 ★★ CCP MP 2018

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta}$ et $b_n = \frac{1}{r_n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum b_n x^n$.
2. Étudier la convergence de la série pour $x = \mathrm{R}$ et $x = -\mathrm{R}$.

Exercice 152 ★★★ CCINP (ou CCP) MP 2021

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln(n)x^n$.

   On note $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln(n)x^n$.
2. Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{S}(x) = \frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$$
3. En déduire que
$$\lim_{x\to 1}\mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
4. Déterminer $\lim_{x\to 1}\mathrm{S}(x)$.

Exercice 153 ★★ CCP MP

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la limite de (a_n).
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
3. Déterminer le domaine de définition de $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   On pourra déterminer la limite de $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.

Exercice 154 ★★★★ X MP 2010

Caractériser les suites $(a_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ soit le développement en série entière en 0 d'une fraction rationnelle.

Exercice 155 ★★★ Mines-Ponts MP 2017

1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Q}(z) = e^{-z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{P}(n)z^n}{n!}$$
   On notera ce polynôme $u(\mathrm{P})$.
2. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
3. Déterminer les éléments propres de u.

Révisions Oraux

Exercice 156 ★★★ **Centrale MP 2018**

Soit $(a_n)_{n\geq 2}$ une suite de réels. On pose $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ et on suppose que

$$f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est définie et injective sur D.

1. Montrer que $\forall z \in \mathrm{D},\ z \in \mathbb{R} \iff f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathrm{D},\ \mathrm{Im}(z) > 0 \iff \mathrm{Im}(f(z)) > 0$.
3. Soient $r \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer en fonction de r et n l'intégrale

$$\mathrm{I}_n(r) = \int_0^\pi \mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))\sin(n\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

4. En remarquant que $|\sin(n\theta)| \leq n\sin(\theta)$ pour $\theta \in [0,\pi]$, montrer que $|a_n| \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 157 ★★★ **Mines-Ponts MP 2017**

E est un ensemble à n éléments. On appelle *dérangement* une permutation de E sans point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de E. On pose $\mathrm{D}_0 = 1$.

1. Montrer l'égalité $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}_k$.

On définit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{D}_n}{n!} x^n$.

2. Justifier que f est définie sur $]-1,1[$.
3. Montrer que pour x dans $]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.
4. En déduire l'égalité $\mathrm{D}_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
5. Montrer que, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, D_n est la partie entière de $\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 158 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019**

On cherche à résoudre l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

avec $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Soit la suite (u_n) de fonctions définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

Montrer par récurrence que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une certaine fonction u.

2. Montrer que u est solution de (E).
3. Donner les fonctions développables en série entière dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ est solution de (E).

Exercice 159 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = \dfrac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}$.

1. Donner le domaine de convergence D de $\sum f_n$.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.
3. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
4. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \int_0^1 \dfrac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t$?
6. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 160 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls à valeurs dans le disque ouvert $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ $(\mathrm{R}>0)$ et qui converge vers 0.

1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R, telle que $\forall p \in \mathbb{N},\ f(z_p) = 0$. Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Que dire de deux séries entières f et g de même rayon de convergence R et telles que $f(z_p) = g(z_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$?

Exercice 161 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

Soit $\alpha \in]-1,1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n(x) = \dfrac{\alpha^n}{n}\cos nx$. Soit $\mathrm{W} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$.

1. Montrer que W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; exprimer W′ à l'aide des fonctions usuelles.
2. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 162 ★★★★ **ENS MP 2011**

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini et $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On pose

$$\zeta(t) = \prod_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-t^{\deg \mathrm{P}}}$$

1. Montrer que ζ est défini sur un intervalle du type $[0, t_0[$.
2. Montrer que ζ est développable en série entière au voisinage à droite de 0 et déterminer son développement.

Exercice 163 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Développer en série entière $f : x \mapsto \ln(1-\sqrt{2}x+x^2)$.

Exercice 164 ★★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2ix}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g n'est pas développable en série entière.

Exercice 165 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Développer en séries entières les fonctions suivantes au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence :

1. $f(z) = \dfrac{1}{6z^2-5z+1}$, $z \in \mathbb{C}$
2. $g(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{1-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$
3. $h(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice 166 ★★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

Soit $q \in]-1,1[$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction f continue en 0 telle que $f(0)=1$ et
$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x)=\frac{1+x}{1-x}f(qx)$$
2. Cette fonction est-elle développable en série entière ? Si oui, quel est son rayon de convergence ?

Exercice 167 ★★ **Centrale PC**

On pose $\mathrm{H}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{H}_n x^n$.

Exercice 168 ★★ **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $q>0$, on pose $a_n=q^{\sqrt{n}}$ si n est un carré d'entier et $a_n=0$ sinon. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n x^n$.

Exercice 169 ★★ **CCP MP 2018**

1. Montrer que arctan est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2. On considère la série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)}x^{2k+1}$. Donner son rayon de convergence R. On note $f(x)$ la somme.
3. Donner une expression simple de f' et de f.
4. Que peut-on dire de la convergence sur $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$?
5. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Exercice 170 ★★★ **Mines-Ponts MP 2018**

On note $a_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(2+t^2)^{n+1}}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n x^n$.
2. Calculer la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

Exercice 171 ★ **Petites Mines PC 2017**

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n$.

Probabilités

Exercice 172 **Mines-Ponts MP 2018**

On considère n ampoules s'allumant aléatoirement de manière indépendante, la probabilité que la i-ème s'allume étant de p_i. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre d'ampoules qui sont allumées.

1. Donner l'espérance et la variance de Y.
2. On note $m=\mathbb{E}(\mathrm{Y})$. Déterminer, à m fixé, les p_i tels que $\mathbb{V}(\mathrm{Y})$ soit maximale. Quelle loi suit Y pour de tels p_i ?

Exercice 173 ★★ **CCINP (ou CCP) PC 2017**

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. Déterminer la loi de $\mathrm{Z}=\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

Exercice 174 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soient X, Y, Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(Z > X + Y)$.

Exercice 175 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Une urne contient initialement une boule blanche. On effectue un ou plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée :

- si on obtient pile, on ajoute une boule noire et on lance à nouveau la pièce ;
- si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

On note X le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 176 ★★★★ **Centrale-Supélec MP 2021**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.

1. Écrire explicitement les lois suivies par X et Y.
2. **a.** Déterminer la loi conjointe du couple (U, V) puis les lois de U et de V.
   b. Montrer que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes.
3. Réciproquement, on suppose que X et Y sont indépendantes de même loi, et que U et V sont indépendantes telles que
$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(\{U = n\} \cap \{V = m\}) \neq 0$$
Montrer que X et Y suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 177 **CCINP (ou CCP) MP 2018**

On cherche à obtenir toutes les pièces d'un puzzle de n pièces différentes. On achète chaque semaine une pièce emballée, chaque pièce étant équiprobable. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note Y_k le nombre d'achats à effectuer, sachant qu'on a eu une $(k-1)^{\text{ème}}$ pièce différente, avant d'avoir une $k^{\text{ème}}$ pièce qu'on n'a pas déjà eue.

1. **a.** Les variables aléatoires Y_k sont-elles mutuellement indépendantes ? Justifier que Y_1 peut s'écrire comme une constante simple.
   b. Donner la loi de Y_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$. Donner l'espérance, puis la variance de Y_k.
2. On note X le nombre d'achats à effectuer avant d'avoir le puzzle complet. Exprimer X en fonction des Y_k. Donner l'espérance de X en fonction de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
3. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de H_n. En déduire un équivalent quand $n \to +\infty$ de l'espérance de X.

Exercice 178 **Centrale MP**

Peut-on piper deux dés de manière à ce qu'il y ait équiprobabilité sur l'ensemble des sommes possibles obtenues en les lançant simultanément ?

Exercice 179 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

On note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$ et $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Quelle valeur doit prendre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la relation $\mathbb{P}(\{n\}) = \lambda n^{-s}$ définisse une loi de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$?
   On considère l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ dans la suite.
2. On pose $A_r = r\mathbb{N}^*$ pour $r \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(A_r)$.
3. Montrer que la $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
4. Montrer que : $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p} = \{1\}$.
   En déduire que $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$.
5. La famille $\left(\frac{1}{p}\right)_{p\in\mathcal{P}}$ est-elle sommable ?

Exercice 180 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit un entier $k \geq 2$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{k}}$.

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de piles.
   Montrer que la probabilité que X_n soit divisible par k converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.

Exercice 181 **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3. On effectue une série de tirages indépendants avec remise d'un jeton. On note :

- Y la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir deux nombres différents ;
- Z la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir les trois numéros.

1. Reconnaître la loi de $Y - 1$.
2. En déduire la loi de Y.
3. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
4. Déterminer la loi du couple (Y, Z).
5. En déduire la loi de Z.

Exercice 182 **C.C.E. Mines MP 2015**

On considère un péage composé de m guichets. On note N la variable aléatoire égale au nombre de voitures utilisant le péage en 1h. N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le choix du guichet se fait de manière aléatoire et indépendamment des autres voitures. On note X la variable aléatoire égale au nombre de voitures ayant pris le guichet n°1.

1. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = k \mid N = n)$ pour $0 \leq k \leq n$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!}$.
3. Donner la loi de X.
4. Espérance et variance de X ?

Exercice 183 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = I_X$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 184 **ENS Ulm MPI 2019**

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de «piles» soit égal au double du nombre de «faces». Quelle est la probabilité qu'on ne s'arrête jamais ?

Exercice 185 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

1. Une urne contient n boules blanches et n boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément n boules de l'urne.
   a. Quel est le nombre de tirages possibles ?
   b. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une unité. Elle peut aller à tout instant, soit à droite, soit à gauche, avec équiprobabilité. On note C_n l'événement : «la puce est en O après n sauts». On donne : $P(C_0) = 1$.
   a. Déterminer $\mathbb{P}(C_{2n+1})$ et $\mathbb{P}(C_{2n})$.
   b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_{2n})$ à l'aide de la formule de Stirling.
3. La puce peut à présent se déplacer suivant deux directions (droite, gauche, haut, bas) avec équiprobabilité.
   a. Montrer que $\mathbb{P}(C_{2n}) = \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$.
   b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_{2n})$.

Exercice 186 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2019**

On considère la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série.
2. Calculer sa somme $S(t)$ sur $]-R, R[$.
3. On se donne une variable aléatoire X telle que, $\forall t \in [-1,1],\ G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   a. Que vaut λ ?
   b. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Equations différentielles

Exercice 187 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Résoudre, à l'aide de matrices, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + 6y \\ y' = -3x - 6y \\ z' = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$

Exercice 188 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -2t \\ 4t & 1+3t \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de $A(t)$.
2. En déduire qu'il existe P indépendant de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
3. Résoudre le système différentiel.

Exercice 189 ★★ **TPE-EIVP MP 2014**

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 9x(t) - 5y(t) + 2t \\ y'(t) = 10x(t) - 6y(t) + e^t \end{cases}$$

Exercice 190 ★★ **Saint-Cyr PSI 2019**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donner une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.

2. Trouver les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, avec $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 191 **CCINP (ou CCP) MP 2013**

On se donne l'équation différentielle $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale de degré 2 à l'équation.
2. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra poser $x = e^t$.
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 192 ★★★ **Mines MP 2010**

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On considère l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. On suppose que q est non constamment nulle au voisinage de $+\infty$ et que l'on dispose d'une solution y strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $f = \dfrac{y'}{y}$.

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
2. Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle y est strictement positive.
4. Montrer que q est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_{[x,+\infty[} q \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 193 ★★★★ **ENS MP 2010**

Soient q une application continue périodique non identiquement nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et f une solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Montrer que f s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 194 ★★★ **TPE-EIVP MP 2018**

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

1. On considère f une fonction solution de (E) sur $[0,1]$ s'annulant une infinité de fois. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = f'(x) = 0$
2. Déterminer toutes les solutions de (E) s'annulant une infinité de fois sur $[0,1]$.

Exercice 195 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr}(A) > 0$, et $x : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = Ax(t)$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ℓ, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ \ell(x(t)) = 0$.

Exercice 196 ★★★ **Zéros entrelacés**

1. Soient p et q deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $p \leq q$ sur $\mathbb{R}$. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $u'' + pu = 0$ et $v'' + qv = 0$. On suppose que u s'annule en des réels a et b avec $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a,b[$.
   a. On pose $W = u'v - uv'$. Déterminer W'.
   b. En déduire que v s'annule sur $[a,b]$.
2. Application. Soient r une fonction continue sur $\mathbb{R}$, f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' + rf = 0$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$.
   a. On suppose $r \geq M^2$. Montrer que tout intervalle fermé de longueur $\dfrac{\pi}{M}$ contient au moins un zéro de f.
   b. On suppose $r \leq M^2$. On suppose que f s'annule en des réels a et b tels que $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a,b[$. Montrer que $b - a \geq \dfrac{\pi}{M}$.

Topologie

Exercice 197 ★★★★ **Centrale MP 2018**

Soient E un espace vectoriel normé, K un compact de E et $g : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ une application 1-lipschitzienne. On cherche à montrer que g est surjective si, et seulement si, c'est une isométrie.

1. On commence par supposer g surjective. On considère x et y dans K ainsi que x_n et y_n des antécédents par g^n de x et y respectivement. On note (x', y') une valeur d'adhérence de la suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $x - y$ est une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\|x - y\|$. En déduire que g est une isométrie.
3. On suppose maintenant que g est une isométrie. Montrer que g est surjective. Donner un contre-exemple lorsque K est seulement bornée.

Exercice 198 ★★★★ **Centrale MP**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Pour un compact K non vide, on pose $\delta(\mathrm{K}) = \sup_{(x,y)\in\mathrm{K}^2} \|x - y\|$. Montrer que $\delta(\mathrm{K})$ est bien défini. La borne supérieure est-elle atteinte ?
2. Pour $a \in \mathrm{E}$, on note $\mathcal{S}_a$ l'ensemble des compacts de E symétriques par rapport à a. Pour B compact de E, on pose
$$\mathrm{T(B)} = \left\{x \in \mathrm{B} \mid \forall y \in \mathrm{B}, \|x - y\| \leq \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})\right\}$$
Montrer que T induit une application de $\mathcal{S}_a$ dans $\mathcal{S}_a$.
3. Soit $\mathrm{B}_0 \in \mathcal{S}_a$. On pose $\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{T}(\mathrm{B}_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\bigcap_{n\geq 0} \mathrm{B}_n$.
4. En déduire que toute isométrie de E conserve les milieux.
Remarque : une isométrie de E *est une application* $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *telle que* $\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$ *pour tout* $(x, y) \in \mathrm{E}^2$.

Exercice 199 ★★★ **Mines MP**

Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé et $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ telle que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Soit (x_n) une suite de premier terme $x_0 \in \mathrm{K}$ et telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge vers l'unique point fixe de f.
3. Donner un contre-exemple en ne supposant plus K compact.

Exercice 200 ★★★ **Principe du maximum pour les polynômes (X 2019)**

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On note
$$\mathrm{B} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$$
Montrer que
$$\max_{z\in\mathrm{B}} |\mathrm{P}(z)| = \max_{z\in\mathrm{S}} |\mathrm{P}(z)|$$

Exercice 201 **X MP 2010**

Soit A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{A} = \mathbb{R}^n$.

Exercice 202 **ENS MP 2010**

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x \mapsto x^{a_n})_{n\geq 0}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\ \|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f^2}$;

(ii) la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ diverge.

Exercice 203 **Mines MP**

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est encore un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou dense dans E.

Exercice 204 ★★★ **CCP MP 2016**

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels distincts ($n \geq 1$). On pose $N(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(\alpha_k)|$. Montrer que N est une norme non euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 205 ★★★ **CCP MP 2019**

Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
On dit qu'une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge *fortement* vers $x \in E$ si $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$ et que (x_n) converge *faiblement* vers x si $\forall y \in E$, $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$.

1. **a.** Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.
   b. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
2. Montrer que (x_n) converge fortement vers x si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
3. Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.
4. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 206 ★★★ **Centrale PSI 2010**

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \left(\int_{[0,1]} f^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in E,\ \|f\|_2 \leq b\|f\|_\infty$.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in V,\ \|f\|_\infty \leq c\|f\|_2$.
3. Soit V un sous-espace vectoriel de E. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall f \in V,\ \|f\|_\infty \leq n\|f\|_2$. Montrer que V est de dimension finie et que $\dim V \leq n^2$.

Exercice 207 ★★★ **D'après Centrale MP 2006**

On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.
Pour $f \in E$, on pose

$$N_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f| \qquad N(f) = N_\infty(f + f'') \qquad N_1(f) = N_\infty(f) + N_\infty(f'')$$

1. Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.
2. Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N ni à N_1.
3. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)(f(t) + f''(t))\,dt$$

4. Montrer que N et N_1 sont équivalentes.

Exercice 208 **CCP 2013**

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme uniforme. On pose

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0,\ \int_0^1 f(t)\,dt \geq 1 \right\}$$

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on peut choisir $\alpha \in]0,1]$ tel que la fonction

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)x & \text{si } x \leq \alpha \\ 1+\frac{1}{n} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

appartienne à A.

4. En déduire la distance $d(0, A)$.

Exercice 209 ★★ **Petites Mines MP 2016**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose

$$O = \{ f \in E \mid f(1) > 0 \} \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ f \in E,\ \int_0^1 f(t)\,dt \leq 0 \right\}$$

1. Montrer que O est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que F est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$ et pour $\|\cdot\|_1$.
3. O est-il ouvert pour $\|\cdot\|_1$?

Exercice 210 ★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$, on pose $\|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$. Soit $b \in \mathbb{C}$. On définit l'application $f : P \in E \mapsto P(b)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Etudier la continuité de f et calculer sa norme subordonnée le cas échéant.

Exercice 211 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2022**

On fixe $\omega \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose :

$$T_\omega(f)(x) = \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\,dt} \int_0^x f(t)\omega(t)\,dt$$

1. Montrer que $T_\omega(f)$ est prolongeable par continuité en 0.
2. Soit $a > 0$. Montrer que T_ω est un endomorphisme continu et injectif de $\mathcal{C}^0([0,a], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.
3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, non nulle, telle que : $T_\omega(f) = \lambda f$.
   - **a.** Donner une équation différentielle vérifiée par f et la résoudre.
   - **b.** Montrer que $\lambda \in]0,1]$.

Exercice 212 ★★★

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que $\chi_{\exp(AB)} = \chi_{\exp(BA)}$.

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 213 ★★★ **ENS MP 2010**

Montrer que $\Phi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à une matrice associe sa plus grande valeur propre est une application convexe.

Exercice 214 ★★★ **ENS MP 2010**

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline I_n & A \end{array}\right)$. Trouver les valeurs propres de B.

Exercice 215 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\forall(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A)^2,\ \lambda + \mu \neq 0$;

(ii) $\forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists! M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ AM + MA = B$.

Exercice 216 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les coefficients diagonaux sont nuls et D une matrice diagonale.
Montrer que $S + D$ est semblable à D si, et seulement si, S est nulle.

Exercice 217 **CCINP (ou CCP) PC 2019**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^n = 0$.

1. Montrer que si M est symétrique, alors $M = 0$.
2. Montrer que si $M^\top M = MM^\top$, alors $M = 0$.

Exercice 218 ★★★ **ENS MP**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ non nul tel que les projetés orthogonaux de $e_1, \dots, e_n$ sur $\mathrm{vect}(u)$ aient la même norme.
2. Montrer que cette norme commune est indépendante du vecteur u choisi et l'exprimer en fonction de $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$.

Exercice 219 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Montrer que :

$$\forall P \in E, \left|\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\, dt\right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\, dt}$$

Exercice 220 ★★★ **ENS MP 2010**

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

Exercice 221 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$. On rappelle que $A_0 = 1$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\, dt$.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n.
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

Exercice 222 ★★★★ **ENS MP 2010**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ laissant stable $(\mathbb{R}_+)^n$.

Exercice 223 ★★ **Petites Mines 2009**

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E. On pose $v = \mathrm{Id}_E - u$. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont orthogonaux et supplémentaires.

Exercice 224 ★★ **Mines MP 2011**

Soient E un espace euclidien de dimension 3 ainsi que deux éléments f et g de SO(E) tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que f et g sont soit deux rotations de même axe soit des symétries par rapport à des droites orthogonales entre elles.

Exercice 225 ★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E)^\perp$.
2. En déduire que $(f - \mathrm{Id}_E)^2 = 0 \implies f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 226 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^\top = A^2 + A - I_n$.
On appelle a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Décrire a si A est symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.
2. Décrire a si on ne suppose plus A symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.

Exercice 227 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$$

1. Montrer que la matrice de u dans une base orthonormale de E est antisymétrique.
2. Montrer que $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ est stable par u.
3. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ avec N inversible.
4. Montrer que le rang de u est pair.

Exercice 228 ★★★ **Mines-Ponts MP 2016**

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires a et b de E formant une famille libre.
Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b \end{cases}$$

Exercice 229 ★★ **CCP MP 2016**

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E. On pose $f(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k\rangle u_k$ pour $x \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint défini positif.
2. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, défini positif telle que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormale de E.

Exercice 230

Soit E un espace euclidien.

1. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)^{\perp} = \mathrm{Im}(u)$.

2. Soit $u \in \mathcal{S}^{+}(\mathrm{E})$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle u(x), x\rangle = 0 \iff u(x) = 0_{\mathrm{E}}$.

3. Soit $(u, v) \in \mathcal{S}^{+}(\mathrm{E})^2$.

a. Montrer que $u + v \in \mathcal{S}^{+}(\mathrm{E})$.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(u + v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.

c. Montrer que $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

Exercice 231 ★★★

Soit E un espace euclidien.

1. Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E. Montrer que $v = \exp(u)$ est un automorphisme auto-adjoint défini positif de E.

2. Soit v un endomorphisme auto-adjoint défini posif de E. Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-ajoint de E tel que $v = \exp(u)$. Cet endomorphisme u est-il unique ?

Exercice 232 ★★★ **Centrale-Supélec MP 2023**

Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Établir l'identité de polarisation.

2. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle s(x), s(y)\rangle = c\langle x, y\rangle$.
- $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle s(x), s(y)\rangle = 0$.

3. Trouver les $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que : pour tout sous-espace V de E, $u(\mathrm{V}^{\perp}) \subset u(\mathrm{V})^{\perp}$.

Exercice 233 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2023**

On considère un espace euclidien E dont le produit scalaire est noté, pour tous vecteurs x et y de E : $\langle x|y\rangle$. On fixe deux vecteurs non nuls u et v de E.

1. Pour tout vecteur x de E, on pose : $(u \otimes v)(x) = \langle v|x\rangle u$.

a. Justifier que $u \otimes v$ est linéaire et donner son rang.

b. Déterminer les éléments propres de $u \otimes v$.

c. L'endomorphisme $u \otimes v$ est-il diagonalisable ?

2. Calculer $(u \otimes v)^2 = (u \otimes v) \circ (u \otimes v)$ et retrouver le résultat de la question **1.c**.

3. Soit g un endomorphisme de E. On note g^* son adjoint. Montrer que g commute avec $u \otimes v$ si et seulement si il existe un réel α tel que : $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$.

Calcul différentiel

Exercice 234 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2019**

On note $\mathrm{E} = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et E^* son dual.
On définit

$$\mathrm{D} = \left\{\varphi \in \mathrm{E}^*, \forall (f, g) \in \mathrm{E}^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\right\}$$

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E^* non réduit à 0.

2. Montrer que l'application $a \in \mathbb{R}^n \mapsto (f \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{d}f(0) \cdot a)$ est injective.

3. Donner une base de D.
Indication : On pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$.

Exercice 235 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable, telle que $\mathrm{d}f(x)$ soit injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et vérifiant $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g : x \to \|f(x) - a\|^2$ où $a \in \mathbb{R}^n$.

1. Justifier que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $\mathrm{d}g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Montrer que g admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

3. Conclure.

Exercice 236 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2023**

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$, c'est-à-dire que

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|\mathrm{AB}\| \leq \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$

1. Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|\mathrm{H}\| < 1$. Montrer que $\mathrm{I}_n - \mathrm{H}$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}^n$.

2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $f : \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^{-1}$.

- **a.** Montrer que f est différentiable en I_n et que $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)(\mathrm{H}) = -\mathrm{H}$.
- **b.** Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On remarquera que $(\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1} = (\mathrm{M}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}))^{-1}$.

Exercice 237 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme auto-adjoint f de E dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que : $\forall h \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\},\ (f(h) \mid h) > 0$.

2. Soient $u \in \mathrm{E}$ fixé et $g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) \mid x) - (u \mid x)$.

- **a.** Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point de E.
- **b.** Montrer qu'il existe un unique vecteur $z_0 \in \mathrm{E}$ point critique de g.
- **c.** Montrer que g admet un minimum global en z_0.

Exercice 238 ★★ **CCP PSI 2015**

On considère les ensembles

$$\mathrm{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$

et

$$\mathrm{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < y < 1\}$$

ainsi que la fonction F définie sur K par

$$\mathrm{F}(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur T ?

2. La fonction F admet-elle un minimum sur K ? un maximum sur K. Si oui, déterminer leurs valeurs.

Exercice 239 ★★★ **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace euclidien, que l'on munit de sa norme euclidienne, et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ différentiable, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}f(x)$ soit injective, et vérifiant $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.
Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g : x \in \mathrm{E} \mapsto \|f(x) - a\|^2$ où $a \in \mathrm{E}$.

1. Pour $x \in \mathrm{E}$, calculer $\mathrm{d}g(x)$.
2. Montrer que g admet un minimum sur E.
3. Conclure.

Exercice 240 ★★

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$. Déterminer le minimum et le maximum éventuels de f sur $\mathrm{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 241 ★★

Etudier les extrema globaux de $f : (x, y) \mapsto 2x - y$ sous la contrainte $\mathrm{g}(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$.

Exercice 242 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Soit la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}\right.$.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Étudier l'existence de dérivées partielles secondes de f en $(0, 0)$.

Exercice 243 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2023**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0, 0) = 0$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right|$$

On pose $u : x \mapsto f(x, x)$, $v : x \to f(x, -x)$ et $w_x : y \mapsto f(x, y)$.

1. Calculer les dérivées de u, v et w_x.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y_x \in \mathbb{R}$ tel que $|y_x| \leq |x|$ et $w_x(y_x) = 0$.
3. On pose $\varphi : x \mapsto y_x$. On suppose que φ est dérivable. Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f en $(x, \varphi(x))$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 244 ★★

Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) : $\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + y$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en effectuant le changement de variable $\begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{u^2}{2} + v \end{cases}$.
Déterminer la solution vérifiant $f(0, y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.