Devoir surveillé n°11

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Y suit une loi géométrique de paramètre q. Ainsi $\mathbb{P}(Y = n) = p^{n-1}q$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2 C'est du cours :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{q} \qquad \mathbb{V}(Y) = \frac{p}{q^2}$$

3 Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$,

$$\frac{1}{t-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{t^n}{a^{n+1}}$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} -\frac{t^n}{a^{n+1}}$ vaut $|a|$ (série géométrique).

4 D'après la question précédente, les applications $t \mapsto \frac{1}{t-a}$ et $t \mapsto \frac{1}{t-b}$ sont développables en séries entières de rayons de convergence respectifs $|a|$ et $|b|$. Par produit de Cauchy, $t \mapsto \frac{1}{(t-a)(t-b)}$ est développable en série entière de rayon de convergence $R \geq \min(|a|, |b|) = |a|$. Supposons que $R > |a|$. Alors cette série entière convergerait uniformément sur le disque centré en l'origine et de rayon $|a|$. D'après le théorème d'interversion série/limite, $t \mapsto \frac{1}{(t-a)(t-b)}$ admettrait une limite finie en a, ce qui n'est pas le cas.

5 On procède comme à la question précédente. Par produit de Cauchy, $t \mapsto \frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)}$ est développable en série entière de rayon de convergence $R \geq \min(|a|, |b|, |c|) = |a|$. Mais on a forcément $R = |a|$ sinon $t \mapsto \frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)}$ admettrait une limite finie en a.

6 Par indépendance,

$$\begin{aligned}
p_1 &= 0 \\
p_2 &= \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2) = q^2 \\
p_3 &= \mathbb{P}(P_1 \cap C_2 \cap C_3) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}(C_3) = pq^2
\end{aligned}$$

7 On note $\sqcup$ l'union *disjointe* d'événements.

$$\Omega = P_1 \sqcup C_1 = P_2 \sqcup C_2$$

donc

$$\Omega = P_1 \sqcup (C_1 \cap (P_2 \sqcup C_2)) = P_1 \sqcup (C_1 \cap P_2) \sqcup (C_1 \cap C_2)$$

Ainsi $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'événements.

8 Soit un entier $n \geq 3$. On utilise la formule des probabilités totales :

$$p_n = \mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z = n \mid P_1)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(Z = n \mid C_1 \cap P_2)\mathbb{P}(C_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(Z = n \mid C_1 \cap C_2)\mathbb{P}(C_1 \cap C_2)$$

- Si l'événement P_1 est réalisé, l'automate se retrouve au niveau 0 à l'issue de cette première étape. On en déduit que $\mathbb{P}(Z = n \mid P_1) = p_{n-1}$.
- Si l'événement $C_1 \cap P_2$ est réalisé, l'automate se retrouve au niveau 0 à l'issue de ces deux premières étapes. On en déduit que $\mathbb{P}(Z = n \mid C_1 \cap P_2) = p_{n-2}$.
- On a clairement $C_1 \cap C_2 = \{Z = 2\}$ donc $\mathbb{P}(Z = n \mid C_1 \cap C_2) = 0$ car $n \geq 3$.

D'autre part, par indépendance, $\mathbb{P}(C_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(P_2) = qp$ donc

$$p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}$$

9 Soit $t \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned}
G_Z(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n \\
&= p_1 t + p_2 t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (pp_{n-1} + pqp_{n-2}) t^n \\
&= q^2t^2 + pt \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1} t^{n-1} + pqt^2 \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-2} t^{n-2} \\
&= q^2t^2 + pt \sum_{n=2}^{+\infty} p_n t^n + pqt^2 \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n \\
&= q^2t^2 + pt(G_Z(t) - p_1 t) + pqt^2 G_Z(t) \\
&= q^2t^2 + ptG_Z(t) + pqt^2 G_Z(t)
\end{aligned}$$

On en déduit bien que

$$(1 - pt - pqt^2)G_Z(t) = q^2t^2$$

10 Comme $q = 1 - p$, $Q(-1) = 1 + p - pq = 1 + p^2 > 0$ et $Q(1) = 1 - p - pq = q^2 > 0$. De plus, $\lim_{t \to \pm\infty} = -\infty$ et $t \mapsto Q(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, Q admet une racine $a \in]1, +\infty[$ et une racine $b \in]-\infty, -1[$. Comme $\deg Q = 2$, a et b sont les deux racines de Q. Comme $a > 1$, $|a| > 1$. De plus, vu les signes de a et b et d'après les liens coefficients racines,

$$|b| - |a| = -b - a = \frac{p}{pq} = \frac{1}{q} \geq 0$$

Finalement, $|b| \geq |a| > 1$.

11 Le polynôme Q ne s'annule pas sur $]b, a[$ donc il ne s'annule pas sur $]-|a|, |a|[$ puisque $]-|a|, |a|[=]-a, a[\subset]b, a[$. Ainsi

$$\forall t \in]-|a, |a|[,\ \frac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2} = \frac{q^2t^2}{-pq(t-a)(t-b)} = -\frac{qt^2}{p(t-a)(t-b)}$$

D'après la question **4**, $t \mapsto -\dfrac{qt^2}{p(t-a)(t-b)}$ est développable en série entière sur $]-|a|, |a|[$: il existe donc une suite (a_n) telle que

$$\forall t \in]-|a|, |a|[,\ \frac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Comme Q ne s'annule pas sur $]b, a[\supset]-1, 1[$, la question **9** permet d'affirme que

$$\forall t \in]-1, 1[,\ G_Z(t) = \frac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$$

Par conséquent, comme $|a| > 1$,

$$\forall t \in]-1, 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Par unicité du développement en série entière, $p_n = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notamment, $R_Z = |a|$ et

$$\forall t \in]-|a|, |a|[,\ \frac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = G_Z(t)$$

Remarque. De manière générale, si deux fonctions développables en séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 coïncident sur un voisinage de 0, alors $R_1 = R_2$ et les deux fonctions coïncident sur $]-R_1, R_1[=]-R_2, R_2[$.

12 La question précédente montre que G_Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-|a|, |a|[$. Notamment elle est deux fois dérivable en $1 \in]-|a|, |a|[$. Ainsi Z admet une espérance et une variance. De plus,

$$\forall t \in]-|a|, |a|, \ G_Z'(t) = \frac{2q^2t(1-pt-pqt^2)+q^2t^2(p-2pqt)}{(1-pt-pqt^2)^2}$$

et

$$d\mathrm{E}(Z) = G_Z'(1) = \frac{2q^2(1-p-pq)+q^2(p-2pq)}{(1-p-pq)^2}$$

Sachant que $p = 1-q$, on obtient bien après simplification, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}$.

13 Remarquons que

$$\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(Y) - 1 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q} - 1 = \frac{1-q^2}{q^2} \geq 0$$

car $q < 1$. Ainsi $\mathbb{E}(Z) \geq \mathbb{E}(Y) + 1$.
Ceci était prévisible : en effet, la première fois qu'on obtient la séquence CC, on a obtenu pour la première fois C au moins à l'instant précédent i.e. $Z \geq Y + 1$. Par croissance et linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) \geq \mathbb{E}(Y) + 1$.

14 La dernière colonne de A est nulle : ainsi 0 est valeur propre de A est un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15 Soit $t \in \mathbb{R}$. En développant par rapport à la dernière colonne puis en appliquant la règle de Sarrus :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-p & 0 & -p & 0 \\ -q & t-q & 0 & 0 \\ 0 & -p & t & 0 \\ 0 & 0 & -q & t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t-p & 0 & -p \\ -q & t-q & 0 \\ 0 & -p & t \end{vmatrix}$$
$$= t\left[t(t-p)(t-q) - p^2q\right] = t^4 - (p+q)t^3 + pqt^2 - p^2qt = t^4 - t^3 + pqt^2 - p^2qt$$

16 Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$

$$\psi_A(t) = \det(I_4 - tA) = \det\left(t\left(\frac{1}{t}I_4 - A\right)\right) = t^4\chi_A(1/t) = 1 - t + pqt^2 - p^2qt^3$$

Ceci est encore valide pour $t = 0$ puisque $\psi_A(0) = \det(I_4) = 1$.

17 L'équation (E_t) équivaut à $(I_4 - tA)S = L$. Or $\psi_A(0) = 1 \neq 0$ et ψ_A est continue donc il existe un voisinage V de 0 sur lequel ψ_A ne s'annule pas. Ainsi pour $t \in V$, $I_4 - tA$ est inversible et (E_t) admet donc une unique solution.

18 Pour $t \in V$, $\psi_A(t) = \det(I_4 - tA) \neq 0$ donc, d'après la formule de la comatrice :

$$S = \frac{1}{\psi_A(t)} \operatorname{com}(I_4 - A)^{\mathsf{T}} L$$

Or $\operatorname{com}(I_4 - A)^{\mathsf{T}} L$ est la première colonne de $\operatorname{com}(I_4 - A)^{\mathsf{T}}$ i.e. la première ligne de $\operatorname{com}(I_4 - tA)$. Comme on ne s'intéresse qu'à S_3, seul le dernier coefficient de cette ligne nous intéresse. Ainsi

$$S_3 = -\frac{1}{\psi_A(t)} \begin{vmatrix} -qt & 1-qt & 0 \\ 0 & -pt & 0 \\ 0 & 0 & -qt \end{vmatrix} = \frac{pq^2t^3}{1 - t + pqt^2 - p^2qt^3}$$

19 Par invariance du déterminant par transposition,

$$\chi_{A^\mathsf{T}}(\lambda) = \det(\lambda I_4 - A^\mathsf{T}) = \det((\lambda I_4 - A)^\mathsf{T}) = \det(\lambda I_4 - A) = \chi_A(\lambda)$$

Or $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ donc $\chi_A(\lambda) = 0$. Par conséquent, $\chi_{A^\mathsf{T}}(\lambda) = 0$ et $\lambda \in \operatorname{Sp}(A^\mathsf{T})$.

20 Si on note $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ est vecteur propre de $A^\top$, alors

$$\begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 + qx_4 = \lambda x_3 \\ 0 = \lambda x_4 \end{cases}$$

Comme $\lambda \neq 0$, la dernière ligne donne $x_4 = 0$ de sorte que

$$\begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \end{cases}$$

Ainsi (x_1, x_2, x_3) est solution de $(\mathcal{H})$. Mais $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ n'est pas nul en tant que vecteur propre et $x_4 = 0$ donc $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$.

21 Remarquons que $M > 0$ car x_1, x_2 et x_3 ne sont pas tous nuls.

(i) Supposons $M = |x_3|$. Puisque $M > 0$, $x_3 \neq 0$. Alors la dernière ligne de $(\mathcal{H})$ fournit $\lambda = \dfrac{px_1}{x_3}$ donc $|\lambda| = \dfrac{|x_1|}{|x_3|} p \leq p < 1$.

(ii) Supposons $M = |x_2|$ et $M > |x_3|$. Anouveau $x_2 \neq 0$. La deuxième ligne de $(\mathcal{H})$ fournit $\lambda = q + \dfrac{x_3}{x_2} p$. Par inégalité triangulaire, $|\lambda| \leq q + \dfrac{|x_3|}{|x_2|} p$. Or $p > 0$ et $\dfrac{|x_3|}{|x_2|} < 1$ donc $\dfrac{|x_3|}{|x_2|} p < p$ donc $|\lambda| < q + p = 1$.

(iii) Supposons $M = |x_1|$, $M > |x_2|$ et $M > |x_3|$. A nouveau, $x_1 \neq 0$ et la première ligne de $(\mathcal{H})$ fournit $\lambda = p + \dfrac{x_2}{x_1} q$. Le même raisonnement que précédemment donne $|\lambda| < p + q = 1$.

Dans tous les cas de figure, $|\lambda| < 1$.

22 χ_A est unitaire de degré 4 et 0 est racine de χ_A donc il existe des complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\chi_A = X(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$. Remarquons que 0 est racine simple de χ_A : en effet, $\chi_A'(0) = -qp^2 \neq 0$. Ainsi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ne sont pas nuls. D'après les questions précédentes, quitte à réordonner les λ_i,

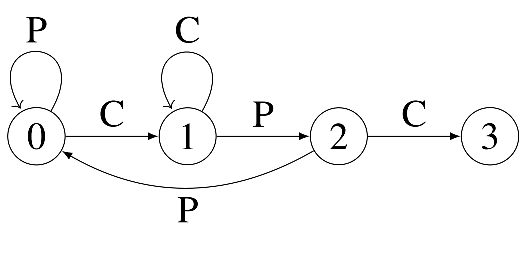
$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| < 1$$

23 Pour $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} \psi_A(t) = t^4 \chi_A(1/t) &= t^4 \cdot \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} - \lambda_1\right)\left(\frac{1}{t} - \lambda_2\right)\left(\frac{1}{t} - \lambda_3\right) \\ &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \left(t - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(t - \frac{1}{\lambda_2}\right)\left(t - \frac{1}{\lambda_3}\right) \end{aligned}$$

Le résultat est encore valide pour $t = 0$ puisque $\psi_A(0) = 1$. Il suffit alors de poser $\mu = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ (les λ_i ne sont pas nuls), $a = \dfrac{1}{\lambda_3}$, $b = \dfrac{1}{\lambda_2}$ et $c = \dfrac{1}{\lambda_1}$.

24



25 L'automate se trouve initialement au niveau 0 donc

$$p_{0,0} = 1 \qquad p_{0,1} = 0 \qquad p_{0,2} = 0 \qquad p_{0,3} = 0$$

Autrement dit $S_0(0) = L$.

26 Il s'agit d'utiliser la formule des probabilités totales :

$$\forall i \in [\![0,3]\!],\ p_{n,i} = \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,i}) = \sum_{j=0}^{3} \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,i} \mid \mathrm{E}_{n-1,i})\mathbb{P}(\mathrm{E}_{n-1,i})$$

Il suffit alors d'observer le graphe déterminé à la question **24** pour obtenir les différentes probabilités conditionnellles :

$$\begin{array}{llll}
\mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,0} \mid \mathrm{E}_{n-1,0}) = p & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,0} \mid \mathrm{E}_{n-1,1}) = 0 & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,0} \mid \mathrm{E}_{n-1,2}) = p & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,0} \mid \mathrm{E}_{n-1,3}) = 0 \\
\mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,1} \mid \mathrm{E}_{n-1,0}) = q & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,1} \mid \mathrm{E}_{n-1,1}) = q & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,1} \mid \mathrm{E}_{n-1,2}) = 0 & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,1} \mid \mathrm{E}_{n-1,3}) = 0 \\
\mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,2} \mid \mathrm{E}_{n-1,0}) = 0 & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,2} \mid \mathrm{E}_{n-1,1}) = p & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,2} \mid \mathrm{E}_{n-1,2}) = 0 & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,2} \mid \mathrm{E}_{n-1,3}) = 0 \\
\mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,3} \mid \mathrm{E}_{n-1,0}) = 0 & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,3} \mid \mathrm{E}_{n-1,1}) = 0 & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,3} \mid \mathrm{E}_{n-1,2}) = q & \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n,3} \mid \mathrm{E}_{n-1,3}) = 0
\end{array}$$

On en déduit les quatre formules demandées.

27 Soit $t \in]-1,1[$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_0(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,0}t^n = p_{0,0} + p\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,0}t^n + p\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,2}t^n \\
&= 1 + pt\mathrm{S}_1(t) + pt\mathrm{S}_2(t) \\
\mathrm{S}_1(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1}t^n = p_{0,1} + q\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,0}t^n + q\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,1}t^n \\
&= qt\mathrm{S}_0(t) + qt\mathrm{S}_1(t) \\
\mathrm{S}_2(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,2}t^n = p_{0,2} + p\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,1}t^n \\
&= pt\mathrm{S}_1(t) \\
\mathrm{S}_3(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,3}t^n = p_{0,3} + q\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1,2}t^n \\
&= qt\mathrm{S}_2(t)
\end{aligned}$$

Autrement dit, $\mathrm{S}(t) = t\mathrm{A}\mathrm{S}(t) + \mathrm{L}$. La matrice colonne $\mathrm{S}(t)$ est donc bien solution de (E_t).

28 D'après la question **18**, pour t au voisinage de 0,

$$\mathrm{G}_\mathrm{T}(t) = \mathrm{S}_3(t) = \frac{pq^2t^3}{1 - t + pqt^2 - p^2qt^3}$$

D'après la question **23**,

$$\mathrm{S}_3(t) = \frac{pq^2t^3}{\mu(t-a)(t-b)(t-c)}$$

avec $1 < |a| \leq |b| \leq |c|$. D'après la question **5**, $t \mapsto \dfrac{pq^2t^3}{\mu(t-a)(t-b)(t-c)}$ est développable en série entière de rayon de convergence $|a|$.
Le même raisonnement que celui effectué à la question **11**, montre que l'égalité

$$\mathrm{G}_\mathrm{T}(t) = \frac{pq^2t^3}{1 - t + pqt^2 - p^2qt^3}$$

est en fait valable pour $t \in]-|a|,|a|[$ et $\mathrm{R}_\mathrm{T} = |a| > 1$.

29 A nouveau, G_T est deux fois dérivable en 1 puisque $1 \in]-\mathrm{R}_\mathrm{T}, \mathrm{R}_\mathrm{T}[$ donc T admet une espérance et une variance.

30 Un calcul laborieux donne

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}) = \mathrm{G}_\mathrm{T}'(1) = \frac{1+q-q^2}{q^2(1-q)}$$

31 Numérotons 0, 1, 2, 3, 4, 5 les six niveaux. On veut obtenir CCPPC.

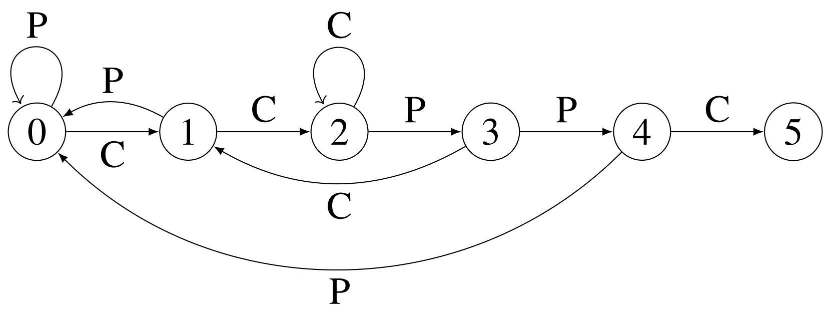
Niveau 0 Si on obtient le premier C de CCPPC au passe au niveau 1 ; si on obtient un P, on reste au niveau 0.

Niveau 1 On a déjà le premier C de CCPPC. Si on obtient le deuxième C de CCPPC, on passe au niveau 2 ; si on obtient un P on revient au niveau 0.

Niveau 2 On a déjà le motif CC. Si on obtient le premier P de CCPPC, on passe au niveau 3. Si on obtient un C, on reste au niveau 2, puisqu'on a encore en cours le motif CC.

Niveau 3 On a déjà le motif CCP. Si on obtient le deuxième P de CCPPC, on passe au niveau 4. Si on obtient un C, on retourne au niveau 1, puisqu'on a finalement le premier C de CCPPC.

Niveau 4 On a déjà le motif CCPP. Si on obtient le C final, on passe au niveau 5. Si on obtient un P, on retourne au niveau 0, puisqu'on n'a même plus le premier C de CCPPC.



On obtient alors la matrice A suivante.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} p & p & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le dernier coefficient de $(\mathrm{I}_6 - t\mathrm{A})^{-1}\mathrm{L}$ où $\mathrm{L} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^{\top}$, ce qui nous donne $\mathrm{G_T}(t)$. Le temps d'attente moyen de la séquence CCPPC est alors $\mathrm{G}'_{\mathrm{T}}(1)$.