DEVOIR SURVEILLÉ N°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – EPITA 2025 - Mathématiques - Option

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, n est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice identité d'ordre n est notée I_n, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire lorsqu'elle est de la forme $\lambda\mathrm{I}_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

La topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie à l'aide de l'une quelconque de ses normes équivalentes. Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle classe de similitude de M l'ensemble $\mathcal{S}(\mathrm{M})$ constitué de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables à M :

$$\mathcal{S}(\mathrm{M}) = \{\mathrm{PMP}^{-1}, \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés topologiques des classes de similitude des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I Le cas des matrices d'ordre 2

1 Déterminer la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2 Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on pose

$$\mathrm{E}_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

2.a Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices E_k et F_k sont inversibles et déterminer leurs inverses.

2.b Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices $\mathrm{E}_k\mathrm{A}\mathrm{E}_k^{-1}$ et $\mathrm{F}_k\mathrm{A}\mathrm{F}_k^{-1}$.

2.c Montrer que la classe de similitude de A est bornée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Dans la suite de cette partie, on fixe une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et on cherche à quelle condition sa classe de similitude est fermée.

3 On suppose dans cette question que A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{K}$.
Soit $(\mathrm{M}_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ qui converge vers une matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

3.a Soit $i \in \{1, 2\}$. En considérant la suite $(\det(\mathrm{M}_k - \lambda_i\mathrm{I}_2))_{k\geq 0}$, montrer que $\det(\mathrm{B} - \lambda_i\mathrm{I}_2) = 0$.

3.b En déduire que $\mathrm{B} \in \mathcal{S}(\mathrm{A})$ et conclure que $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ est fermée.

4 On suppose dans cette question que A a une seule valeur propre λ dans $\mathbb{K}$ et que A n'est pas une matrice scalaire.

4.a Montrer que A est trigonalisable, puis qu'elle est semblable à toute matrice de la forme

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{K}^*$$

4.b En déduire que la classe de similitude de A n'est pas fermée.

5 Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ soit fermée.

6 Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

6.a Montrer que le spectre réel de A est vide si, et seulement si, $4\det(\mathrm{A}) - (\mathrm{tr}(\mathrm{A}))^2 > 0$.
Dans la suite de la question **6**, on suppose cette condition réalisée.

6.b On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est A. Montrer que $(e_1, u(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det(\mathrm{A}) \\ 1 & \mathrm{tr}(\mathrm{A}) \end{pmatrix}$$

6.c Soit $(\mathrm{M}_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ qui converge vers une matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que B a à la fois la même trace et le même déterminant que A. En déduire que $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ est fermée.

7 Conclure sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la classe de similitude est fermée.

II Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

8 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$. Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, x et $u(x)$ sont liés, alors u est une homothétie. On pourra raisonner avec la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ et considérer $u(e_1 + e_i)$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$.

9 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui n'est pas une matrice scalaire et u l'endomorphisme de K^n canoniquement associé. Montrer qu'il existe un vecteur x de K^n tel que la famille $(x, u(x))$ est libre. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, il existe une base de K^n dans laquelle la matrice de u a pour première colonne

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

10 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la classe de similitude d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit bornée.

11 Existe-t-il une norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}), \quad \left\|\mathrm{PMP}^{-1}\right\| = \|\mathrm{M}\|$$

III Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est fermée

Dans cette question, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

12 On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Soit $(\mathrm{M}_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathrm{A})$ qui converge vers une matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

12.a Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) \end{array}\right.$ qui à tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe son polynôme caractéristique, est continue.

12.b Montrer que tout polynôme annulateur de A annule aussi B. En déduire que B est diagonalisable.

12.c Conclure que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

13 On suppose dans cette question que $\mathcal{S}(A)$ est fermée. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A, et on considère une base $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. On notera $T = (t_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ cette matrice.

13.a Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $B_k = \left(b_1, \frac{b_2}{k}, \dots, \frac{b_n}{k^{n-1}}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et écrire la matrice de u dans cette base en fonction des coefficients de T.

13.b En déduire que A est diagonalisable.

IV Une classe de similitude est toujours d'intérieur vide

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

14 On pose $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(A)\}$.
Quelle est la structure de $\mathcal{T}$? Montrer que $\mathcal{T}$ est d'intérieur vide.

15 En déduire que $\mathcal{S}(A)$ est d'intérieur vide.

Problème 2 – CCINP Maths 2 MP 2020

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $\| \cdot \|$.
Un endomorphisme u de E est une similitude de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de E, $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dira que u est la similitude de rapport k.
On notera Sim(E) l'ensemble des similitudes de E.
O(E) désigne l'ensemble des isométries vectorielles de E.
L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

I Exemples, propriétés

1 Démontrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.

2 Démontrer que tout élément de Sim(E) est bijectif et établir que Sim(E), muni de la loi de composition, est un groupe.

3 Soient u un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
Démontrer que u est une isométrie vectorielle de E, si et seulement si, $\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.
Caractériser par une relation matricielle une similitude de rapport k.

4 Démontrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport.
Donner la matrice de la similitude u^{-1}.

5 Soit $u \in \mathrm{Sim}(\mathrm{E})$. Vérifier que, pour tout élément f de O(E), $u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$.

6 On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$ l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$. Démontrer que si u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0, alors u est une similitude de E. On pourra remarquer que, pour tout vecteur y non nul, $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$.

II Assertions équivalentes

7 On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme $\alpha\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
Démontrer que $u \in \mathrm{Sim}(\mathrm{E})$ si et seulement si, u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de O(E).

8 Écrire la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle non nulle de $\mathbb{R}^2$ et de la matrice d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature.

9 Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

En déduire que u est une similitude de rapport k, si et seulement si, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, $(u(x), u(y)) = k^2(x, y)$.

10 Démontrer que, si u est une similitude de rapport k, alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E,

$$\langle x, y\rangle = 0 \implies \langle u(x), u(y)\rangle = 0$$

On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.

11 Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Démontrer que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \langle e_i + e_j, e_i - e_j\rangle = 0$$

puis que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$$

On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$. Démontrer que u est une similitude de rapport k.

12 Soit u une application de E dans E (non supposé linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = k^2\langle x, y\rangle$$

Démontrer que u est un endomorphisme de E, puis que u est une similitude de E.