Semaine du 05/01

1 Cours

Topologie

On rappelle que toutes les définitions et les résultats du cours restent inchangés si une norme est remplacée par une norme **équivalente**.

Topologie d'un espace vectoriel normé Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Ouverts, fermés, voisinages. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert. Une réunion **finie** de fermés est un fermé. Caractérisation séquentielle des fermés. Intérieur, adhérence, frontière. Caractérisation séquentielle de l'adhérence. Densité. Caractérisation séquentielle de la densité. Topologie relative : ouvert, fermé, voisinage relatifs à une partie.

Limite d'une application Définition. Caractérisation séquentielle de la limite. Opérations algébriques. Composition. Limite d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés.

Continuité Définition. Caractérisation séquentielle de la continuité. Opérations algébriques. Composition. Continuité d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés. Continuité uniforme. Applications lipschitziennes. La «lipschitzianité» implique la continuité uniforme qui implique la continuité.

Continuité des applications linéaires, multilinéaires, polynomiales Notation $\mathcal{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$: ensemble des applications linéaires continues de E dans F (sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$). Caractérisation de la continuité pour les applications linéaires : $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est continue si et seulement si $\exists \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathrm{E},\ \|f(x)\|_\mathrm{F} \leq \mathrm{C}\|x\|_\mathrm{E}$. Si E est de dimension **finie**, $\mathcal{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue ou d'une matrice. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Toute application multilinéaire sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions **finies** est continue. Toute application polynomiale est continue.

Continuité et topologie Caractérisation de la continuité par les images réciproques des ouverts et des fermés. Deux applications **continues** coïncidant sur une partie **dense** sont égales.

Suites et séries de fonctions On considère des applications d'une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Convergence simple, uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme implique la convergence simple. Théorème de la double limite. Transfert de continuité. Convergence simple, uniforme, normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme qui implique la convergence simple. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle. Interversion série/limite. Transfert de continuité. Les applications $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \exp(\mathrm{M})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto \exp(u)$ (E de dimension finie) sont continues.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une partie est fermée, on peut :
  - la décrire comme une intersection de fermés ;
  - la décrire comme une réunion finie de fermés ;
  - la décrire comme une image réciproque de fermé par une application continue ;
  - utiliser la caractérisation séquentielle.
- Pour montrer qu'une partie est ouverte, on peut :
  - utiliser la définition (raisonner en termes de boules) ;
  - la décrire comme une réunion d'ouverts ;
  - la décrire comme une intersection finie d'ouverts ;
  - la décrire comme une image réciproque d'ouvert par une application continue ;
  - montrer que son complémentaire est fermé (cf. point précédent).
- Pour montrer qu'une application est continue, on peut :
  - utiliser les résultats sur les opérations algébriques et la composition de fonctions continues ;
  - si l'application est linéaire, utiliser la caractérisation de la continuité pour de telles applications ;
  - si l'application est linéaire et que son espace de départ est de dimension finie, il n'y a rien à faire ;
  - identifier une application multilinéaire ou polynomiale.
- Pour calculer la norme subordonnée d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, on peut :
  - déterminer une constante K telle que $\forall x \in \mathrm{E},\ \|f(x)\|_\mathrm{F} \leq \mathrm{C}\|x\|_\mathrm{E}$ (ce qui prouve en passant la continuité de f) ;

  - déterminer un vecteur x non nul tel que $\|f(x)\|_{\mathrm{F}} = \mathrm{C}\|x\|_{\mathrm{E}}$ (c'est notamment possible si $\dim \mathrm{E} < \infty$) ou exhiber une suite (x_n) de vecteurs non nuls de E tels que $\dfrac{\|f(x_n)\|_{\mathrm{F}}}{\|x_n\|_{\mathrm{E}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{C}$.
  - on peut alors conclure que $|||f||| = \mathrm{C}$.

- Utiliser la densité pour montrer que deux applications continues sont égales (notamment la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

- Montrer qu'une partie est dense : utiliser la définition ou la caractérisation séquentielle.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 35, 36, 37, 38, 40, 54

Joyeux Noël et bonne année