Devoir à la maison n°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après CCP MP Maths2 2014

On note $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ associée.
On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes auto-adjoints de E, $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs de E, et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs de E.
De la même manière, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I Préliminaires

1 **1.a** Montrer que ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.b En déduire que si $a_1, \dots, a_n$ sont des réels positifs,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$$

2 **2.a** Enoncer sans démonstration le théorème de réduction des endomorphismes auto-adjoints de l'espace euclidien E, ainsi que sa version relative aux matrices symétriques réelles.

2.b Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

3 Soit $s \in S(E)$ de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.
Soit $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], s(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.
Pour tout $x \in E$, on pose $R_s(x) = \langle s(x) \mid x \rangle$.

3.a Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.

3.b En déduire l'inclusion $R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de E.

4 Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant. Exprimer $s_{i,j}$ comme un produit scalaire et montrer que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n$$

II Un maximum sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5 Démontrer que l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M} - \mathrm{I}_n$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6 Justifier que si $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |a_{i,j}| \leq 1$$

7 En déduire que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8 Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si A est une matrice orthogonale, on note $\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AS})$.

8.a Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que $\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}\Delta)$.

8.b Démontrer que l'application T admet un maximum sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, que l'on notera t.

8.c Démontrer que, pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{T}(\mathrm{A}) \leq \mathrm{tr}(\mathrm{S})$, puis déterminer le réel t.

III Inégalité d'Hadamard

Soit $\mathrm{S} = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant.

9 Démontrer l'inégalité

$$\det(\mathrm{S}) \leq \left(\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(\mathrm{S})\right)^n \tag{$\star$}$$

10 Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\mathrm{S}_\alpha = \mathrm{D}^\top\mathrm{S}\mathrm{D}$. Démontrer que $\mathrm{S}_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{tr}(\mathrm{S}_\alpha)$.

11 Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité ($\star$), démontrer que

$$\det(\mathrm{S}) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

12 Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $\mathrm{S}_\varepsilon = \mathrm{S} + \varepsilon\mathrm{I}_n$. Démontrer que $\det(\mathrm{S}_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i} \qquad \text{(inégalité d'Hadamard)}$$

IV Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées par ordre croissant et $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{S} = \Omega\Delta\Omega^\top$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

13 Démontrer que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{U}$, la matrice $\mathrm{B} = \Omega^\top\mathrm{A}\Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant

$$\mathrm{tr}(\mathrm{AS}) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}\Delta)$$

14 Démontrer que $\{\mathrm{tr}(\mathrm{AS}),\ \mathrm{A} \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{tr}(\mathrm{B}\Delta),\ \mathrm{B} \in \mathcal{U}\}$, puis que ces deux ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.

15 Démontrer que si $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\mathrm{tr}(\mathrm{B}\Delta) \geq n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}$$

16 En déduire que pour $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\mathrm{tr}(\mathrm{B}\Delta) \geq n(\det(\mathrm{S}))^{1/n}$.

17 Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}(\det(\mathrm{S}))^{1/n}$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Déterminer le réel m.