

## 1 Cours

### Endomorphismes d'un espace euclidien

**Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien** Théorème de Riesz : représentation des formes linéaires d'un espace euclidien.

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Propriétés de l'adjonction : linéarité, adjoint d'une composée, involutivité.

Si  $u$  est un endomorphisme d'un espace euclidien de base **orthonormée**  $\mathcal{B}$ , alors  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)^T$ . Si  $F$  est un sous-espace stable par un endomorphisme  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

**Matrices orthogonales** Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite orthogonale si  $M^T M = I_n$ . Une matrice est orthogonale si et seulement si la famille de ses lignes ou de ses colonnes est orthonormée pour le produit canonique. Groupe orthogonal  $O_n(\mathbb{R})$ . Matrices orthogonales positives et négatives. Groupe spécial orthogonal  $SO_n(\mathbb{R})$ .

**Isométries vectorielles** Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations des isométries parmi les endomorphismes d'un espace euclidien : conservation du produit scalaire, l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée, l'adjoint est égal à l'inverse. Groupe orthogonal  $O(E)$ . Isométries vectorielles directes et indirectes. Groupe spécial orthogonal  $SO(E)$ .

**Réduction des isométries** Orientation d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Les matrices de  $SO_2(\mathbb{R})$  sont les matrices de la

forme  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Les matrices de  $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$  sont les matrices de la forme  $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ .

L'application  $\theta \mapsto R(\theta)$  est un morphisme surjectif de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$  de noyau  $2\pi\mathbb{Z}$ . Rotation d'un plan euclidien. Les isométries directes d'un plan euclidien sont les rotations. Les isométries indirectes d'un plan euclidien sont les réflexions. Si un sous-espace vectoriel est stable par une isométrie, son orthogonal l'est également. Réduction d'une isométrie d'un espace euclidien : si  $u \in O(E)$ , il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs de la forme  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ou  $R(\theta)$ . Rotation d'un espace euclidien de dimension 3. Les isométries directes d'un espace euclidien de dimension 3 sont les rotations.

**Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques** Définition d'un endomorphisme auto-adjoint. Espace vectoriel  $\mathcal{S}(E)$  des endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien  $E$ . Si  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien  $E$  stable par  $u \in \mathcal{S}(E)$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ . Un endomorphisme est auto-adjoint si et seulement si sa matrice dans une base **orthonormée** est symétrique. Les projecteurs auto-adjoints sont les projecteurs orthogonaux. Théorème spectral pour les endomorphismes auto-adjoints et interprétation matricielle. Endomorphismes auto-adjoints (définis) positifs. Caractérisation spectrale :  $u \in \mathcal{S}(E)$  est positif (resp. défini positif) si et seulement si  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$  (resp.  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ ). Matrices symétriques (définies) positives. Caractérisation spectrale :  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est positive (resp. définie positive) si et seulement si  $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$  (resp.  $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$ ).

## 2 Méthodes à maîtriser

- Connaître les différentes caractérisations des isométries vectorielles : adjoint, conservation du produit scalaire, conservation de la norme.
- Utiliser le lien entre adjonction et transposition.
- Utiliser de préférence des bases orthonormées par défaut.
- Calculer la matrice d'un projecteur orthogonal ou d'une symétrie orthogonale.
- Déterminer si un endomorphisme est une isométrie directe/indirecte via sa matrice dans une base orthonormée ; préciser le cas échéant ses éléments caractéristiques.
- Diagonaliser un endomorphisme auto-adjoint dans une base orthonormée de vecteurs propres.
- Utiliser le fait qu'une matrice symétrique est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

### 3 Questions de cours

**Banque CCP** Exercices 63, 66, 68, 92