Intégrales impropres

Révisions d'intégration

Solution 1

1. Notons $\mathrm{F}(x) = \int x \arctan^2(x)\,\mathrm{d}x$ et intégrons par parties,

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) - \int \frac{x^2}{x^2+1}\arctan(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(x) + \int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \arctan(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) + \frac{1}{2}\arctan^2(x) - \int \arctan(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)
\end{aligned}$$

D'où

$$\int x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+1}{2}\arctan^2(x) - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

2. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$,

$$\int e^x \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{e^x\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x$$

Puisque $e^x\cos(2x) = \mathrm{Re}(e^{(1+2i)x})$, on calcule

$$\int e^{(1+2i)x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^x e^{2ix}}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}e^x e^{2ix}$$

dont la partie réelle vaut

$$\int e^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{5}(\cos(2x) + 2\sin(2x))$$

On a donc

$$\int e^x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10}(\cos(2x) + 2\sin(2x))$$

3. En posant $u = \ln x$,

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int e^u \cos u\,\mathrm{d}u$$

Via un passage en complexes ou une intégration par parties

$$\int e^u\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}e^u(\cos u + \sin u)$$

On en déduit

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

4. En posant $u = \sqrt{1+x}$,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}} = 2\int (u^2-1)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^3 - 2u = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - 2\sqrt{1+x} = \frac{2}{3}\sqrt{1+x}(x-2)$$

5. En posant $u = e^x$, on a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan u = \arctan(e^x)$$

Solution 2

---

1. Il faut montrer que $t \mapsto \sin t + \cos t$ ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t > 0$ et $\cos t \geq 0$ donc $\sin t + \cos t > 0$. De plus, $\sin 0 + \cos 0 = 1 > 0$.
Ainsi $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\sin t + \cos t}$ et $t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sin t + \cos t}$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et S et C sont bien définies.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$.

3. On a clairement $\mathrm{S} + \mathrm{C} = \frac{\pi}{2}$. On en déduit $\mathrm{S} = \mathrm{C} = \frac{\pi}{4}$.

4. On effectue le changement de variable $t = \sin u$. On en déduit

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + |\cos u|}\,\mathrm{d}u$$

Mais pour $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos u \geq 0$ donc

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + \cos u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{C} = \frac{\pi}{4}$$

Solution 3

---

1. Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2} \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\left([\ln(2+u)]_{-1}^{1} - [\ln(2-u)]_{-1}^{1}\right) = \frac{1}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

2. Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$\mathrm{J} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{1-\cos^2 t}$$

Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} &= -\int_0^{\cos x} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\cos x}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left([\ln(1-u)]_0^{\cos x} - [\ln(u+1)]_0^{\cos x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

car pour $x \in]0, \pi[$, $\tan \frac{x}{2} > 0$.

3. Notons K l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$\mathrm{K} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \, \mathrm{d}t}{(1 - \sin^2 t)^2}$$

Le changement de variable $u = \sin t$ fournit donc

$$\mathrm{K} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(1 - u^2)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1} \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4} \left(\left[\frac{1}{u-1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{1}{u+1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\
&= \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

4. Notons L l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ allié à la paramétrisation rationnelle du cercle donne

$$\mathrm{L} = 2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1 - u^2 + 2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{u + \sqrt{2} - 1} - \frac{1}{u - 1 - \sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\left[\ln(u + \sqrt{2} - 1) \right]_0^1 - \left[\ln(1 + \sqrt{2} - u \right]_0^1 \right) \\
&= \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

Solution 4

---

1. Le calcul ne pose aucune difficulté, on trouve

$$\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_1 = 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, intégrons I_{n+2} par parties en posant $\forall t \in [0, \pi/2]$,

$$u(t) = -\cos(t) \ \text{ et } \ v(t) = \sin^{n+1}(t).$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et,

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad u'(t) = \sin(t)$$

et

$$v'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t).$$

La formule d'intégration par parties s'écrit donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+2} &= [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} \\
&\qquad + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin^n(t)-\sin^{n+2}(t))dt \\
&= (n+1)\mathrm{I}_n - (n+1)\mathrm{I}_{n+2}
\end{aligned}$$

D'où la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n.$$

3. D'après la relation de récurrence établie précédemment :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{2n} &= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}\mathrm{I}_0 \\
&= \frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\cdots\times 4\times 3\times 2\times 1}{[(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2}\mathrm{I}_0 \\
&= \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2}\mathrm{I}_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{2n+1} &= \frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 5\times 3}\mathrm{I}_1 \\
&= \frac{[(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2}{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times 5\times 4\times 3\times 2}\mathrm{I}_1 \\
&= \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!}\mathrm{I}_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

4. Puisque $\forall t \in [0,\pi/2], \quad 0 \le \sin(t) \le 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^{n+1}(t) \le \sin^n(t),$$

ainsi après intégration sur le segment $[0,\pi/2]$,

$$\mathrm{I}_{n+1} \le \mathrm{I}_n.$$

La suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. On a donc en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{n+2} \le \mathrm{I}_{n+1} \le \mathrm{I}_n$$

soit encore, d'après la relation de récurrence obtenue ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n \le \mathrm{I}_{n+1} \le \mathrm{I}_n.$$

5. Par une récurrence sans difficulté , on prouve à l'aide de l'inégalité précédente que pour tout n positif $\mathrm{I}_n > 0$. D'après le résultat de la question **3.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} \le \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} \le 1,$$

de plus

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

d'où , en appliquant le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} = 1$$

et donc

$$\mathrm{I}_{n+1} \sim \mathrm{I}_n.$$

6. Posons $v_n = (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n$. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = (n+2)\mathrm{I}_{n+2}\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1} = v_n$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à $\pi/2$ car $\mathrm{I}_1 = 1$.

7. On a $(n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n \sim n\mathrm{I}_n^2$ d'après ce qui précède. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} n\mathrm{I}_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

et puisque la fonction racine carrée est continue en $\pi/2$ et que I_n est positive,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathrm{I}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ainsi

$$\mathrm{I}_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Solution 5

1. On remarque que l'intégrande tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Nous ne disposons pas en première année de théorème d'interversion limite/intégrale mais il y a cependant des chances que (u_n) converge vers 1. En effet,

$$1 - u_n = \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{1+x^n}$$

Ainsi

$$0 \leq 1 - u_n \leq \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que (u_n) converge vers 1.

2. On a vu que $1 - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{1+x^n}$. Soit $n \geq 1$: on écrit $\dfrac{x^n}{1+x^n}$ sous la forme $\dfrac{x}{n}\dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n}$ et on effectue une intégration par parties :

$$1 - u_n = \left[\frac{x}{n}\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n) \, \mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n) \, \mathrm{d}x$$

En utilisant l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n) \, \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent,

$$1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{i.e.} \quad u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Solution 6

1. Pour $t \geq 0$, $\dfrac{1}{1+t} \leq 1$ donc $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \displaystyle\int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que (I_n) converge vers 0.

2. $\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

3. En utilisant la question précédente, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(\mathrm{I}_k + \mathrm{I}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\mathrm{I}_k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\mathrm{I}_{k-1}$. On reconnaît là une somme télescopique donc $\mathrm{S}_n = (-1)^{n+1}\mathrm{I}_n - (-1)^1\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_0 + (-1)^{n+1}\mathrm{I}_n$. Le calcul de I_0 donne $\mathrm{I}_0 = \ln 2$.

4. Comme (I_n) converge vers 0, Q_n converge vers $\ln 2$.

Solution 7

Il s'agit d'intégrer par parties à chaque fois.

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \,\mathrm{d}x\\ &= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{J} &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{K} &= \left[-\frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x)\right]_0^\pi + \frac{2}{3}\int_0^\pi e^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{e^{2\pi}+1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{K}'\end{aligned}$$

en posant $\mathrm{K}' = \int_0^\pi e^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x$. A nouveau, par intégration par parties

$$\mathrm{K}' = \left[\frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x)\right]_0^\pi - \frac{2}{3}\int_0^\pi e^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\mathrm{K}$$

Ainsi

$$\mathrm{K} = \frac{e^{2\pi}+1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{K}' = \frac{e^{2\pi}+1}{3} - \frac{4}{9}\mathrm{K}$$

de sorte que

$$\mathrm{K} = \frac{3}{13}\left(e^{2\pi}+1\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{L} &= [x\arccos x]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{\pi}{6} - \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\end{aligned}$$

Solution 8

1. On procède à deux intégrations par parties.

$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x}\end{aligned}$$

2. On fait apparaître un facteur 1 et on intègre par parties.

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x &= x\arctan(x) - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{aligned}$$

3. On peut procéder à une double intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x &= -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= -e^{2x}\cos x + 2\left(e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x)$$

On peut également passer en complexes.

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x &= \int e^{2x}\,\mathrm{Im}(e^{ix})\,\mathrm{d}x\\ &= \int \mathrm{Im}(e^{2x}e^{ix})\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{Im}\left(\int e^{2x}e^{ix}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\int e^{(2+i)x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(2+i)x}}{2+i}\right)\\ &= e^{2x}\,\mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{2+i}\right)\\ &= \frac{1}{5}e^{2x}\,\mathrm{Im}\left((2-i)e^{ix}\right)\\ &= \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x)\end{aligned}$$

4. Puisque arcsin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, on peut intégrer par parties «sur cet intervalle» :

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

A priori, l'intégration par parties précédentes permet seulement d'affirmer que la fonction $\varphi\colon x \mapsto x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$ est une primitive de arcsin sur l'intervalle $]-1,1[$.
Mais

- φ est continue sur $[-1,1]$;
- φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$;
- $\varphi' = \arcsin$ sur l'intervalle $]-1,1[$
- φ admet donc des limites finies en -1 et 1 car arcsin est continue en ces points.

D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, φ est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et que $\varphi' = \arcsin$ sur l'intervalle $[-1,1]$. Ainsi φ est bien une primitive de arcsin sur l'intervalle $[-1,1]$.

Convergences

Solution 9

---

1. On effectue le changement de variable $t = x - n\pi$ et on remarque que

$$\sin^2(t+n\pi) = \left((-1)^n \sin t\right)^2 = \sin^2 t$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leq x \leq \pi$

$$(n\pi)^4 \leq (x+n\pi)^4 \leq ((n+1)\pi)^4$$

puis comme $\sin^2 x \geq 0$

$$(n\pi)^4 \sin^2 x \leq (x+n\pi)^4 \sin^2 x \leq ((n+1)\pi)^4 \sin^2 x$$

et enfin

$$\frac{1}{((n+1)\pi)^4 \sin^2 x} \leq \frac{1}{(x+n\pi)^4 \sin^2 x} \leq \frac{1}{(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

On intégre les dernières inégalités entre 0 et π de sorte que $v_{n+1} \leq u_n \leq v_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$ étant π-périodique, on a

$$v_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

Les règles de Bioche nous conseillent d'effectuer le changement de variable $t = \tan x$. On trouve en effet

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+(n\pi)^4)\,t^2+1} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1+(n\pi)^4}} \arctan\left(\sqrt{1+(n\pi)^4}\, t\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^4}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^4}} \leq u_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^4}}$$

puis que $u_n \sim \dfrac{1}{n^2\pi}$.

4. Puisque l'intégrande est positif, $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ est croissante et admet donc une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$. De plus, $\mathrm{F}(\mathrm{N}\pi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n$ pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge d'après la question précédente. Ainsi $\mathrm{F}(\mathrm{N}\pi)$ tend vers une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$. Cette limite est également celle de F en $+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ converge.

Solution 10

1. Soit A un réel tel que P′ ne s'annule pas sur $[A, +\infty[$. L'intégrale I est de même nature que l'intégrale $\int_A^{+\infty} \cos(P(x))\, dx$. On réécrit cette intégrale sous la forme $\int_A^{+\infty} \frac{1}{P'(x)} P'(x) \cos(P(x))\, dx$. Puisque $x \mapsto \frac{\sin(P(x))}{P'(x)}$ admet une limite nulle en $+\infty$ ($\deg P' \geq 1$), l'intégration par parties montre que l'intégrale $\int_A^{+\infty} \cos(P(x))\, dx$ est de même nature que l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x))\, dx$. Puisque $\deg P \geq 2$, $\frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x)) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x))\, dx$ est donc convergente de même que I.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|\cos(P(x))| \geq \cos^2(P(x)) = \frac{1+\cos(2P(x))}{2}$. D'après la première question, $\int_0^{+\infty} \cos(2(P(x))\, dx$ converge et $\int_0^{+\infty} dx$ diverge vers $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} |\cos(P(x))|\, dx$ diverge vers $+\infty$.

3. Par le changement de variable $t = x^2$, $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\, dt$ puis, par intégration par parties, $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt$. En posant $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt$, on a $I = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On vérifie que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées. On en déduit que I est du signe de u_0, c'est-à-dire positif.

Solution 11

1. ln est continue sur $]0,1]$ et $\ln(x) \underset{x\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0^+ ($\frac{1}{2} < 1$), ln est intégrable sur $]0,1]$. Finalement, $\int_0^1 \ln t\, dt$ converge.

2. $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (puisque $e^{-u} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u}\right)$). Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ($2 > 1$), $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Finalement, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ converge.

3. Tout d'abord, $x \mapsto x\sin(x)e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Comme sin est bornée, $x\sin(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(xe^{-x})$. De plus, $xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}$ par croissances comparées. Ainsi $x\sin(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}$. Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty[$ donc $x \mapsto x\sin(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Finalement, $\int_0^{+\infty} x\sin(x)e^{-x}\, dx$ converge.

4. Tout d'abord, $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $\ln(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln(t)$ et on a vu que ln était intégrable au voisinage de 0^+ donc $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de 0^+. Par croissances comparées, $\ln(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement, $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\, dt$ converge.

5. $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ n'est pas intégable au voisinage de 1^-. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ diverge.

6. Tout d'abord, $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, $\dfrac{\ln t}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln(t)$ et on a vu que ln était intégrable au voisinage de 0^+ donc $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de 0^+. Par croissances comparées, $\dfrac{\ln t}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2+1}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement, $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2+1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ converge.

7. $\ln x \underset{x\to1^+}{\sim} x-1$ donc $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x\to1^+}{\sim} \dfrac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$. Ainsi $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 1^+ par comparaison à une intégrale de Riemann.
Par croissances comparées, $\sqrt{\ln x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$ donc $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)$ donc $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison à une intégrale de Riemann.
Finalement, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge.

Solution 12

1. Supposons $\alpha > 1$. Donnons-nous $\gamma \in]1,\alpha[$ (par exemple $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$). Comme $\gamma < \alpha$, $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \underset{t\to+\infty}{=} \dfrac{1}{t^\gamma}$ par croissances comparées. Or $\gamma > 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^\gamma}$ est intégrable sur $[e,+\infty[$. On en déduit que $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge.
Supposons $\alpha < 1$. Alors $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\right)$ par croissances comparées. Or $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ diverge également.
Supposons enfin $\alpha = 1$. Si $\beta \neq 1$,

$$\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\left[\ln(t)^{1-\beta}\right]_e^x = \frac{1}{1-\beta}\left(\ln(x)^{1-\beta}-1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \dfrac{1}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Enfin, si $\beta = 1$,

$$\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_e^x = \ln(\ln x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Pour récapitutler, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

2. Via le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}$. D'après la question précédente, cette intégrale converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Solution 13

1. Posons $f : x \mapsto e^{-x}\ln x$. f est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln x$ et $\ln x \underset{x\to0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Ainsi $f(x) \underset{x\to0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est intégrable au voisinage de 0^+. Enfin $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées de sorte que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.
L'intégrale I converge bien.

2. Par relation de Chasles,

$$\mathrm{I} = \int_0^1 e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$$

En effectuant le changement de variable $x \mapsto 1/x$ dans la première intégrale,

$$\mathrm{I} = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \ln x \, \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \left(1 - \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}\right) e^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} (1 - e^{\varphi}(x))\, e^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x$$

en posant

$$\varphi : x \mapsto x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$$

Ainsi φ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $\varphi(1) = 1$, φ est positive sur $[1, +\infty[$. On en déduit que

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ (1 - e^{\varphi}(x))\, e^{-x} \ln x \leq 0$$

Par conséquent, $\mathrm{I} \leq 0$. Bien entendu, $x \mapsto (1 - e^{\varphi}(x))\, e^{-x} \ln x$ est continue et non constamment nulle sur $[1, +\infty[$ donc $\mathrm{I} < 0$.

Solution 14

---

1. On procède par intégration par parties : comme $x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ admet une limite finie (nulle) en $+\infty$, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}$ sont de même nature. Puisque $\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$, la seconde intégrale converge $(3/2 > 1)$ et donc la première également.

2. Remarquons que, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$,

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

On a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ converge et $3/2 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \mathrm{d}x$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \mathrm{d}x$. Or

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}$$

On montre à nouveau à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} \mathrm{d}x$ converge mais $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x}$ diverge donc $int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \mathrm{d}x$ diverge. Finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \mathrm{d}x$ diverge.

> **Attention !** On pourrait naïvement penser que, puisque $\frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, cette intégrale converge également. Mais $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas de signe constant !

Solution 15

Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ quelle soit la valeur de α.

Etude en 0. $\frac{\sin t}{t^\alpha} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ donc $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ i.e. $\alpha < 2$.

Etude en $+\infty$. Supposons d'abord $\alpha > 0$. Comme $\lim_{t\to+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} = 0$, les intégrales $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ et $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}$ sont de même nature par intégration par parties. Or $\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$ donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$ converge. Il en est donc de même de $\int_p i^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$.

Supposons $\alpha \leq 0$. Posons $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$. Comme sin est positive sur $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \geq (2n\pi)^{-\alpha} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t\,dt = 2(2n\pi)^{-\alpha}$$

Ainsi $F((2n+1)\pi) - F(2n\pi)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc F n'admet pas de limite en $+\infty$ i.e. l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ diverge.

En conclusion, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

Solution 16

Soit $x \in [1, +\infty[$. Par intégration par parties

$$\int_1^x g(t)\,dt = \int_1^x \frac{f(t)^2}{t^2}\,dt = -\left[\frac{f(t)^2}{t^2}\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,dt = f(1)^2 - \frac{f(x)^2}{x^2} + 2\int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,dt \leq 2\int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,dt$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_1^x g(t)\,dt \leq f(1)^2 + 2\sqrt{\int_1^x f(t)^2\,dt}\sqrt{\int_1^x f'(t)^2\,dt} \leq f(1)^2 + 2\sqrt{\int_1^x f(t)^2\,dt}\sqrt{\int_1^{+\infty} f'(t)^2\,dt}$$

Posons $A = f(1)^2$, $B = \sqrt{\int_1^{+\infty} f'(t)^2\,dt}$ et $h(x) = \sqrt{\int_1^x f(t)^2\,dt}$. Alors

$$h(x)^2 \leq A + 2Bh(x)$$

ou encore

$$(h(x) - B)^2 \leq A + B^2$$

puis

$$0 \leq h(x) \leq B + \sqrt{A + B^2}$$

et enfin

$$\int_1^x g(t)\,dt = h(x)^2 \leq (B + \sqrt{A + B^2})^2$$

L'application $x \mapsto \int_1^x g(t)\,dt$ est donc croissante (intégrande positive) et majorée : elle admet donc une limite en $+\infty$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge donc i.e. g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Solution 17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\,dt$$

Or via le changement de variable $u = t - (k-1)\pi$,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\,dt = \int_0^\pi |\sin(u + (k-1)\pi)|\,du = \int_0^\pi |(-1)^{k-1}|\sin u|\,du = \int_0^\pi \sin u\,du = 2$$

Finalement,

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, \mathrm{d}t \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, \mathrm{d}t = +\infty$$

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution 18

---

1. Supposons qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{I}(\lambda)$ et $\mathrm{I}(\mu)$ convergent. Par différence, $\int_a^{+\infty}\left(\frac{\lambda - f(t)}{t} - \frac{\lambda - f(t)}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty}\frac{\lambda-\mu}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Comme $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, ceci n'est possible que si $\lambda - \mu = 0$ i.e. $\lambda = \mu$.

2. Supposons H_λ bornée sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, H_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto \lambda - f(t)$. Par ailleurs, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$. Par intégration par parties, on obtient sous réserve de convergence :

$$\mathrm{I}(\lambda) = \left[\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t}\right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Comme H_λ est bornée,

$$\left[\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t}\right]_a^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t} - \frac{\mathrm{H}_\lambda(a)}{a} = 0$$

De plus, $\mathrm{H}_\lambda(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$ donc H_λ est intégrable sur $[a, +\infty[$. A fortiori, $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
On en déduit que $\mathrm{I}(\lambda)$ converge et que

$$\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

3. **a.** Posons $\mathrm{G}_\lambda(x) = \mathrm{H}_\lambda(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a déjà montré que H_λ était de classe $\mathcal{C}^1$ donc G_λ également et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{G}_\lambda'(x) = \mathrm{H}_\lambda'(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda'(x) = (\lambda - f(x+\mathrm{T})) - (\lambda - f(x)) = f(x) - f(x+\mathrm{T}) = 0$$

Ainsi G_λ est constante sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}_\lambda(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(x) &= \mathrm{G}_\lambda(0) = \mathrm{H}_\lambda(\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(0)\\ &= \int_a^{\mathrm{T}}(\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t - \int_a^{0}(\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\mathrm{T}}(\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'après la relation de Chasles}\\ &= \lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

b. Par télescopage

$$\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}) = \mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(a) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{H}_\lambda(a+(k+1)\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(a+k\mathrm{T}) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = n\left(\lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Ainsi la suite $(\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}))$ est bornée si et seulement si $\lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$ i.e. si et seulement si $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

c. Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}_{\lambda_0}(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_{\lambda_0}(x) = 0$$

Ainsi H_{λ_0} est T-périodique. Comme H_{λ_0} est continue, elle est bornée sur le segment $[0, \mathrm{T}]$. Par T-périodicité, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

d. Comme H_{λ_0} est bornée sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{I}(\lambda_0)$ converge d'après la question **2**. D'après la question **1**, λ_0 est l'unique valeur de λ pour laquelle $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

e. Soit $x \in [a, +\infty[$. Alors

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\ \mathrm{d}t = -\int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\ \mathrm{d}t + \int_a^x \frac{\lambda_0}{t}\ \mathrm{d}t = -\int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\ \mathrm{d}t + \lambda_0(\ln x - \ln a)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \mathrm{I}(\lambda_0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda_0 \ln x = \pm\infty$ car $\lambda_0 \neq 0$. On en déduit que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\ \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_0 \ln x$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et comme $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$, $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} = n$. Ainsi $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ se prolonge en une application continue sur le *segment* $[0, \pi/2]$. L'intégrale A_n est donc bien définie.
Le même argument montre également que B_n est bien définie.

5. On utilise le fait que $\sin(t) \underset{t\to 0}{=} t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$:

$$\varphi(t) = \frac{\sin(t) - t}{t\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t^3/6}{t^2} = -\frac{t}{6}$$

6. D'après la question précédente, φ est prolongeable par continuité sur le segment $[0, \pi/2]$. Elle y est donc intégrable. Par inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)||\varphi(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(t)|\ \mathrm{d}t$$

La suite $(\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n)$ est donc bornée.

7. Via le changement de variable linéaire $u = nt$,

$$\mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\ \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\ \mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\ \mathrm{d}u = \mathrm{B}_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\ \mathrm{d}u$$

Remarquons que $|\sin|$ est π-périodique donc, avec les notations de la question **3** et $a = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(t)|\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \neq 0$$

On en déduit que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{|\sin(u)|}{u}\ \mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x) = \frac{2}{\pi}\ln(x)$$

et donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\ \mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{n\pi}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln(n)}{\pi} = +\infty$,

$$\mathrm{B}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$$

Puisque $(\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n)$ est bornée et que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{B}_n = +\infty$ d'après l'équivalent précédente,

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n + (\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{B}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$$

Solution 19

---

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

On raisonne par récurrence sur n. La propriété est vraie pour $n = 0$, car si f est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. A fortiori, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ donc on peut écrire

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

En intégrant par parties,

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui permet de conclure.

2. On peut déjà effectuer le changement de variable $t = u^2$ pour «simplifier» l'intégrale. L'intégrale de l'énoncé est alors de même nature que l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$. L'intégrale converge en 0 puisque $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ est prolongeable par continuité en 0. De plus, sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = -\left[\frac{\cos u}{u}\right]_\pi^{+\infty} - \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Le crochet converge puisque, cos étant bornée, $\lim_{u\to+\infty} \frac{\cos u}{u} = 0$. La deuxième intégrale converge également puisque $\frac{\cos u}{u^2} \underset{u\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right)$. On peut alors en conclure que l'intégrale de Dirichlet converge et donc l'intégrale de l'énoncé également.

> **Remarque.** Le changement de variable initiale n'était pas nécessaire. On aurait pu directement remarque que $\frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, d'où l'intégrabilité en 0 et procéder à une intégration par parties en écrivant $\frac{\sin(\sqrt{t})}{t} = \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} c \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$.

3. Posons $f : t \mapsto \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1} (f(t) - f(n))\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $t \in [n, n+1]$

$$|f(t) - f(n)| \leq |t-n| \max_{[n,t]} |f'| \leq \max_{[n,n+1]} |f'|$$

Or $f'(t) = \dfrac{\cos(\sqrt{t})}{2t^{3/2}} - \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t^2}$ donc, pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2} \leq \frac{3}{2t^{3/2}} \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

Ainsi, pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$|f(t) - f(n)| \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)\right| \leq \int_n^{n+1} |f(t) - f(n)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge (absolument) par comparaison à une série de Riemann. Comme $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, la série $\sum_{n\geq 1} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et donc la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ également.

Solution 20

---

1. Soit $\varphi : x \mapsto x^\alpha - \sin x$. Pour $x > 1$, $x^\alpha > 1 \geq \sin x$ donc φ ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$. Etudions alors φ sur $[0, 1]$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et deux fois dérivable sur $]0, 1]$. De plus, pour tout $x \in]0, 1]$, $\varphi''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + \sin x > 0$. Ainsi φ' est strictement croissante sur $[0, 1]$. Comme $\varphi'(0) = -1$ et $\varphi'(1) = \alpha - \cos(1) > 1 - \cos(1) > 0$, φ' s'annule une unique fois en un réel $b \in]0, 1[$. De plus, φ' est strictement négative sur $]0, b[$ et strictement positive sur $]b, 1]$. Ainsi, φ est strictement décroissante sur $[0, b]$ et strictement décroissante sur $[b, 1]$. Comme $\varphi(0) = 0$, φ est strictement négative sur $]0, b]$. Enfin, $\varphi(b) < 0$ et $\varphi(1) = 1 - \sin(1) > 0$ donc φ s'annule une unique fois sur $]b, 1[$. Finalement, φ s'annule bien une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Puisque φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire
$$\varphi(x) \underset{x\to a}{=} \varphi(a) + \varphi'(a)(x - a) + o(x - a)$$
D'après la question précédente, $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a) > 0$ donc $\varphi(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi'(a)(x - a)$. Ainsi
$$\frac{\cos x}{\sqrt{\varphi(x)}} \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(x-a)^{1/2}}\right)$$
Comme $1/2 < 1$, $\dfrac{\cos}{\sqrt{\varphi}}$ est intégrable en a.
Soit alors $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < \mathrm{A} < \mathrm{B}$. Par intégration par parties
$$\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\sin \mathrm{B}}{\sqrt{\varphi(\mathrm{B})}} - \frac{\sin \mathrm{A}}{\sqrt{\varphi(\mathrm{A})}} + \frac{1}{2}\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \frac{\varphi'(x)\sin x\,\mathrm{d}x}{\varphi(x)^{3/2}}$$
D'une part, $\dfrac{\sin \mathrm{B}}{\sqrt{\varphi(\mathrm{B})}} \underset{\mathrm{B}\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'autre part, $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^{3/2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^{1+\alpha/2}}$. On en déduit que $\dfrac{\varphi'(x)\sin x}{\varphi(x)^{3/2}} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^{1+\alpha/2}}\right)$ puis que $\dfrac{\varphi' \sin}{\varphi^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ car $1 + \alpha/2 > 1$. A fortiori, $\displaystyle\int_\mathrm{A}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)\sin x\,\mathrm{d}x}{\varphi(x)^{3/2}}$ converge. Il s'ensuit que $\displaystyle\int_\mathrm{A}^{+\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\varphi(x)}}$ converge également.
Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^\alpha - \sin x}}$ converge.

Théorie

Solution 21

---

1. Supposons $\ell \neq 0$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $\ell > 0$. Puisque f admet ℓ pour limite en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \geq \frac{\ell}{2}$ pour $x \geq A$. Mais alors, pour $x \geq A$:

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^A f(t)\, dt + \int_A^x f(t)\, dt \geq \int_0^A f(t)\, dt + \ell(x - A)$$

Par minoration $\int_0^x f(t)\, dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui contredit l'énoncé.

2. Supposons que f n'admette pas 0 pour limite en $+\infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \geq A$ tel que $|f(x)| \geq \varepsilon$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, on peut choisir $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y \geq A$:

$$\left|\int_x^y f(t)\, dt\right| \leq \frac{\alpha\varepsilon}{3}$$

Soit alors $x \geq A$ tel que $|f(x)| \geq \varepsilon$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(x) \geq \varepsilon$. Pour tout $t \in [x, x + \alpha]$, $|f(t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et en particulier $f(t) \geq f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit :

$$\int_x^{x+\alpha} f(t)\, dt \geq \frac{\alpha\varepsilon}{2}$$

On aboutit donc à une contradiction.

Solution 22

Supposons que f soit M-lipschitzienne avec $M \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geq A$ et pour tout $y > x$, $\left|\int_x^y f(t)\, dt\right| \leq \frac{\varepsilon^2}{2M}$. Soit donc (x, y) tel que $A \leq x < y$. Puisque f est M-lipschitzienne,

$$\forall t \in [x, y],\ -M(t - x) \leq f(t) - f(x) \leq M(t - x)$$

En intégrant sur $[x, y]$, on obtient

$$-M\frac{(y - x)^2}{2} \leq \int_x^y f(t)\, dt - (y - x)f(x) \leq M\frac{(y - x)^2}{2}$$

On en déduit que pour tout $y > x$,

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon^2}{2M(y - x)} + M\frac{y - x}{2}$$

Une étude rapide de la fonction $g : t \mapsto \frac{\varepsilon^2}{2Mt} + \frac{Mt}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ montre que g admet un minimum en $\frac{\varepsilon}{M}$ valant ε. En posant $y = x + \frac{\varepsilon}{M}$ dans l'inégalité précédente, on obtient donc $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq A$.
Ceci prouve alors que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Solution 23

1. Puisque $(ff')' = f'^2 + ff''$, le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x f'^2(t)\, dt + \int_0^x f(t)f''(t)\, dt$$

Par ailleurs, ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|ff''| \leq \frac{1}{2}\left(f^2 + f''^2\right)$. En particulier, $x \mapsto \int_0^x f(t)f''(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$. Par ailleurs, puisque f'^2 étant positive $x \mapsto \int_0^x f'(t)^2\,dt$ admet une limite finie ou égale à $+\infty$ en $+\infty$. Supposons que cette limite soit $+\infty$. Alors la relation précédente montre que $\lim_{+\infty} ff' = +\infty$. Mais comme $(f^2)' = 2ff'$, on peut affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)^2 = f(0)^2 + 2\int_0^x f(t)f'(t)\,dt$$

Ainsi on peut classiquement montrer que $\lim_{+\infty} f^2 = +\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f^2 sur $\mathbb{R}$. Finalement, $x \mapsto \int_0^x f'(t)^2\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$, ce qui signifie que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On montre de manière similaire que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_-$ de telle sorte que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. On exploite à nouveau le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x f'^2(t)\,dt + \int_0^x f(t)f''(t)\,dt$$

Puisque f'^2 et ff' sont intégrables, on peut affirmer que ff' admet une limite finie en $+\infty$. Mais on rappelle alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f(x)^2 = f(0)^2 + 2\int_0^x f(t)f'(t)\,dt$$

Ainsi ff' ne peut avoir une limite non nulle en $+\infty$ car alors $\lim_{+\infty} f^2 = +\infty$, ce qui contredirait l'intégrabilité de f^2. Finalement, ff' admet une limite nulle en $+\infty$. On montre de la même manière que ff' admet une limite nulle en $-\infty$.
Par intégration par parties

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)^2 = [ff']_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t)\,dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)^2\,dt\right)$$

ce qui permet d'obtenir l'inégalité voulue.

Solution 24

1. Il est clair que si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors la suite $n \mapsto \int_0^n f(t)\,dt$ converge.

Réciproquement, supposons que $n \mapsto \int_0^n f(t)\,dt$ converge. Notons ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N},\ \left|\int_0^n f(t)\,dt - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\lim_{+\infty} f = 0$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \geq \mathrm{A},\ |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $\mathrm{B} = \max(\mathrm{A}+1, \mathrm{N}+1)$. Soit $x \geq \mathrm{B}$. Posons $\mathrm{M} = \lfloor x \rfloor$. Alors

$$\left|\int_0^x f(t)\,dt - \ell\right| = \left|\int_0^{\mathrm{M}} f(t)\,dt - \ell + \int_{\mathrm{M}}^x f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_0^{\mathrm{M}} f(t)\,dt - \ell\right| + \left|\int_{\mathrm{M}}^x f(t)\,dt\right|$$

Comme $\mathrm{M} \geq x-1 \geq \mathrm{N}$,

$$\left|\int_0^{\mathrm{M}} f(t)\, \mathrm{d}t - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par inégalité triangulaire et comme $\mathrm{A} \leq \mathrm{M} \leq x \leq \mathrm{M}+1$,

$$\left|\int_{\mathrm{M}}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leq \int_{\mathrm{M}}^{x} |f(t)|\, \mathrm{d}t \leq \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}+1} \frac{\varepsilon}{2}\, \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}$$

On en déduit que

$$\forall x \geq \mathrm{B},\ \left|\int_0^{x} f(t)\, \mathrm{d}t - \ell\right| \leq \varepsilon$$

Par conséquent $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = \ell = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} f(t)\, \mathrm{d}t$$

2. Une des implications reste évidemment vraie : si $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge, alors la suite $n \mapsto \int_0^{n} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

La réciproque est fausse en genéral. On peut par exemple considérer $f : t \mapsto \cos(\pi t)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{n} f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\sin(\pi t)\right]_0^n = 0$$

Mais

$$\int_0^{2n+1/2} f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\sin(\pi t)\right]_0^{2n+1/2} = \frac{1}{\pi}$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ diverge.

Solution 25

---

1. Comme f est décroissante, elle admet une limite ℓ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.
Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{+\infty}{\sim} \ell$ et la constante ℓ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc f non plus, ce qui contredit l'énoncé.
Si $\ell = -\infty$, alors $1 \underset{+\infty}{=} o(f)$. De plus, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc la constante 1 le serait également, ce qui n'est pas.
Finalement $\ell = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(t) \leq f(x)$ pour tout $t \in [x, 2x]$. Alors

$$\int_x^{2x} f(t)\, \mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} f(x)\, \mathrm{d}t = xf(x)$$

De même, $f(t) \geq f(x)$ pour tout $t \in [x/2, x]$ de sorte que

$$\int_{x/2}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t \geq \int_{x/2}^{x} f(x)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}xf(x)$$

Finalement

$$\int_x^{2x} f(t)\, \mathrm{d}t \leq xf(x) \leq 2\int_{x/2}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Or f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge. Notamment

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_{2x}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_{x/2}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

On en déduit que

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{2x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et que

$$\int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x/2}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ i.e. $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Solution 26

1. Remarquons que g est une primitive de $-f$. Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = [tg(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge par hypothèse et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq xg(x) = x\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $xg(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc le crochet dans l'intégration par parties converge (et vaut 0). On conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)$ converge et que cette intégrale vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

2. L'application $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue. De plus, $\mathrm{F}(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{F} = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{F}(m) = \dfrac{1}{2}$.

Supposons qu'il existe $m' \in \mathbb{R}_+$ tel que $m' \neq m$ et $\mathrm{F}(m') = \dfrac{1}{2}$. Alors $\displaystyle\int_m^{m'} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or f est continue et positive donc f est nulle sur $[m, m']$. Comme f est décroissante et positive, f est nulle sur $[m, +\infty]$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^m f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, ce qui contredit l'énoncé.

3. Remarquons que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $g' = -f$ est croissante. On en déduit que g est convexe sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g(t) \geq g(m) + g'(m)(t-m) = \frac{1}{2} + \alpha(t-m)$$

En posant $\alpha = g'(m)$. Par positivité de g,

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{2m} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{2m} \left(\frac{1}{2} + \alpha(t-m)\right)\mathrm{d}t = m$$

Calculs

Solution 27

Première méthode :
L'intégrale converge puisque $t \mapsto e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}$ est prolongeable par continuité en 0 et que $e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-a^2t^2}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Posons $u = at - \frac{b}{t}$. Ceci définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On a alors $t = \frac{u+\sqrt{u^2+4ab}}{2a}$ (on retient uniquement la solution positive de l'équation $u = at - \frac{b}{t}$). Remarquons que $u^2 = a^2t^2 + \frac{b^2}{t^2} - 2ab$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-2ab}\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+4ab}}\right)\frac{\mathrm{d}u}{2a} \\
&= \frac{e^{-2ab}}{2a}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2+4ab}}\, \mathrm{d}u\right)
\end{aligned}$$

Le passage a dernière ligne est valide puisque les deux dernières intégrales sont convergentes. De plus, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2+4ab}}\, \mathrm{d}u = 0$ car la fonction $u \mapsto \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2+4ab}}$ est impaire. Par conséquent :

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\, \mathrm{d}t = \frac{e^{-2ab}\sqrt{2\pi}}{2a}$$

Deuxième méthode :
Posons $f(b,t) = e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}$ et $\mathrm{I}(b) = \int_0^{+\infty} f(b,t)\, \mathrm{d}t$. La fonction $b \mapsto f(b,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial b}(b,t) = -\frac{2b}{t^2}f(b,t)$$

De plus $b \mapsto \frac{\partial f}{\partial b}(b,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. Enfin, pour $b \in [b_1, b_2]$ avec $0 < b_1 < b_2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial b}(b,t)\right| \leq \frac{2b_2}{t^2}e^{-a^2t^2-\frac{b_1^2}{t^2}}$$

cette dernière expression étant intégrable sur $]0,+\infty[$. Le théorème de dérivation sous l'intégrale nous donne donc $\mathrm{I}'(b) = -\int_0^{+\infty} \frac{2b}{t^2}f(b,t)\, \mathrm{d}t$ pour tout $b > 0$. Posons alors $u = \frac{b}{at}$. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2b}{t^2}f(b,t)\, \mathrm{d}t = 2a\int_0^{+\infty} e^{-\frac{b^2}{u^2}-a^2u^2}\, \mathrm{d}u = 2a\mathrm{I}(b)$$

La fonction $b \mapsto \mathrm{I}(b)$ est donc solution de l'équation différentielle $y' = -2ay$ sur $]0;+\infty[$. Il existe donc $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{I}(b) = \mathrm{C}e^{-2ab}$ pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$. Enfin $b \mapsto f(b,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$ et $|f(b,t)| \leq e^{-a^2t^2}$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. Le théorème de continuité sous l'intégrale nous dit donc que $b \mapsto \mathrm{I}(b)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et notamment en 0. Par continuité, $\mathrm{I}(b) = \mathrm{C}e^{-2ab}$ pour tout $b \geq 0$. En particulier $\mathrm{C} = \mathrm{I}(0)$. Or $\mathrm{I}(0) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2}t^2\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}$ en effectuant le changement de variable $u = at$. On obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\, \mathrm{d}t = \frac{e^{-2ab}\sqrt{2\pi}}{2a}$$

Solution 28

1. Posons $f_{n,\alpha}(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$. $f_{n,\alpha}$ est continue sur $[0,1[$ car le dénominateur ne s'y annule pas. De plus, $f_{n,\alpha}(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Or $x \mapsto (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1. On en déduit que $f_{n,\alpha}$ est intégrable sur $[0,1[$.

2. Tout d'abord

$$\mathrm{I}_0(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = -2\left[\sqrt{1-x}\right]_0^1 = 2$$

Ensuite,

$$t^2 = \frac{1+\alpha x}{1-x} = \frac{\alpha+1}{1-x} - \alpha$$

On en déduit que

$$2t\ \mathrm{d}t = \frac{\alpha+1}{(1-x)^2}\ \mathrm{d}x$$

Or

$$t(1-x) = \sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}} = \frac{2(1-x)}{\alpha+1}\ \mathrm{d}t = \frac{2\ \mathrm{d}t}{t^2+\alpha}$$

Ainsi

$$\mathrm{I}_0(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{2\ \mathrm{d}t}{t^2+\alpha}$$

- Si $\alpha = 0$, on a déjà vu que $\mathrm{I}_0(0) = 0$.
- Si $\alpha > 0$, alors

$$\mathrm{I}_0(\alpha) = \left[\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \sqrt{\alpha}$$

- Si $\alpha < 0$, alors on effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ et

$$\mathrm{I}_0(\alpha) = \int_0^1 \frac{2\ \mathrm{d}u}{1+\alpha u^2} = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \operatorname{argth} \sqrt{-\alpha}$$

On voit facilement qu'avec les expressions obtenues, les limites à droite et à gauche de I_0 en 0 sont égales à 2. Or $\mathrm{I}_0(0) = 2$ donc I_0 est continue en 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u(x) = \sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$ et $g(x) = x^n u(x)$. On a

$$\begin{aligned} g'(x) &= nx^{n-1}u(x) + \frac{1}{2}x^n \frac{\alpha-1-2\alpha x}{u(x)} \\ &= n\frac{x^{n-1}(1-x)(1+\alpha x)}{u(x)} + \frac{\alpha-1}{2}\frac{x^n}{u(x)} - \alpha\frac{x^{n+1}}{u(x)} \\ &= n\frac{x^{n-1}}{u(x)} + \left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-1)\frac{x^n}{u(x)} - (n+1)\alpha\frac{x^{n+1}}{u(x)} \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière égalité sur $[0,1]$, on obtient :

$$n\mathrm{I}_{n-1}(\alpha) + \left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-1)\mathrm{I}_n(\alpha) - (n+1)\alpha\mathrm{I}_{n+1}(\alpha) = g(1) - g(0) = 0$$

- Pour $\alpha = 0$, la relation devient :
$$n\mathrm{I}_{n-1}(0) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\mathrm{I}_n(0) = 0$$
Par récurrence, on a donc
$$\mathrm{I}_n(0) = \frac{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2}\mathrm{I}_0$$
On a $\mathrm{I}_0(0) = 2$ et on multiplie au numérateur et au dénominateur par $(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2$ de sorte que :
$$\mathrm{I}_n(0) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n-1}(n!)^2} = \frac{2n+1}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}$$
- Pour $\alpha = 1$, la relation devient :
$$n\mathrm{I}_{n-1}(1) - (n+1)\mathrm{I}_{n+1}(1) = 0$$
Par récurrence, on obtient :
$$\mathrm{I}_{2p}(1) = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2}\mathrm{I}_0(1) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\mathrm{I}_0(1) = \frac{\pi}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p}$$
car $\mathrm{I}_0(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. On obtient également par récurrence :
$$\mathrm{I}_{2p+1}(1) = \frac{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \cdots \times 5 \times 3}\mathrm{I}_1(1) = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p}}{(2p+1)\binom{2p}{p}}$$
car $\mathrm{I}_1(1) = 1$.

Solution 29

Notons f la fonction intégrée. Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$. De plus,
$$f(t) \underset{t \to 0+}{\sim} -2\ln(t)$$
donc
$$f(t) \underset{t \to 0^+}{=} o(1/\sqrt{t})$$
Ainsi f est intégrable sur $]0, 1]$. De plus,
$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$
donc f est également intégrable sur $[1, +\infty[$. L'intégrale définissant I converge donc.

On écrit alors
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$$
et on intègre par parties. D'après les équivalents précédents,
$$tf(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} -2t\ln(t)$$
et
$$tf(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$
donc
$$\lim_{t \to 0^+} tf(t) = \lim_{t \to +\infty} tf(t) = 0$$
On en déduit que
$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t)\, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{+\infty} t \cdot \frac{-2/t^3}{1 + 1/t^2}\, \mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} \\
&= 2\left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} = \pi
\end{aligned}$$

Solution 30

Posons
$$\mathrm{J}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$
pour $x>0$. En effectuant le changement de variable $u=\frac{t}{x}$, on trouve
$$\mathrm{J}(x)=\frac{\ln x}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$
D'une part
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\lim_{+\infty}\arctan-\arctan(0)=\frac{\pi}{2}$$
D'autre part en effectuant le changement de variable $v=\frac{1}{u}$ dans $\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, on obtient $\mathrm{I}=-\mathrm{I}$ d'où $\mathrm{I}=0$. Ainsi pour tout $x>0$,
$$\mathrm{J}(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln x}{x}$$
On a
$$\mathrm{J}'(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$
d'où $\mathrm{J}'(x)>0$ pour $x<e$ et $\mathrm{J}'(x)<0$ pour $x>e$. Ainsi J admet un maximum en e et celui-ci vaut $\mathrm{J}(e)=\frac{\pi}{2e}$.

Solution 31

1. Posons $f_a(t)=\frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ pour $t\in\mathbb{R}_+^*$. Tout d'abord, f_a est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Lorsque $a>0$, $f_a(t)\underset{t\to 0}{\sim}1$ et $f_a(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{t^{a+2}}$ donc f_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ $(a+2>1)$.
   Lorsque $a=0$, $f_a(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{2}$ et $f_a(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{2t^2}$ donc f_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Lorsque $a<0$, $f_a(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{t^a}$ et $f_a(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{t^2}$ donc f_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ $(a<1)$.
   Finalement, I est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Par la relation de Chasles,
$$\mathrm{J}(a)=\int_0^1 f_a(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}f_a(t)\,\mathrm{d}t$$
   Par le changement de variable $t\mapsto\frac{1}{t}$,
$$\int_1^{+\infty}f_a(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f_{-a}(t)\,\mathrm{d}t$$
   On en déduit la formule demandée.

3.
$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(a)&=\mathrm{J}(a)+\mathrm{J}(-a)\\
&=\int_0^1(f_a(t)+f_{-a}(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\frac{(1+t^{-a})+(1+t^a)}{(1+t^2)(1+t^a)(1+t^{-a})}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\frac{2+t^a+t^{-a}}{(1+t^2)(2+t^a+t^{-a})}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Solution 32

1. Posons $f(x,t) = \dfrac{\ln t}{x^2+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Si $x \neq 0$, $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$ et $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ par croissance comparées donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Enfin, $\dfrac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{\ln t}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto f(0,t)$ n'est pas intégrable au voisinage de 0^+.
   Le domaine de définition de F est donc $\mathbb{R}^*$.

2. Effectuons le changement de variable $u = 1/t$:
$$\mathrm{F}(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = -\mathrm{F}(1)$$
   Ainsi $\mathrm{F}(1) = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Effectuons le changement de variable $t = ux$.
$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2+(ux)^2}\cdot x\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)+\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x}\left(\ln(x)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} + \int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{\pi\ln x}{2} + \mathrm{F}(1)\right) \\
&= \frac{\pi \ln x}{2x}
\end{aligned}$$
   Comme F est clairement paire, $\mathrm{F}(x) = \dfrac{\pi\ln|x|}{2|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Solution 33

1. Tout d'abord, $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,\pi]$ puisque $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   Ensuite, une primitive de sin sur $[\pi,+\infty[$ est $-\cos$ et la dérivée de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$. De plus, le crochet $\left[-\dfrac{\cos t}{t}\right]_{\pi}^{+\infty}$ converge car cos est bornée. Par intégrations par parties, $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Comme $\dfrac{\cos t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge également.
   Finalement, $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   > **Remarque.** On peut régler les «problèmes» en 0 et en $+\infty$ par une seule intégration par parties en choisissant $t \mapsto 1-\cos t$ comme primitive de sin. Le crochet $\left[\dfrac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty}$ converge car $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{=} o(t)$.

2. Puisque
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin((2n+1)t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin((2n+1)t)}{t} = 2n+1$$
   les fonctions $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{t}$ sont prolongeables en des fonctions continues sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. u_n et v_n sont donc bien définies.

3. Remarquons que

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t))}{\sin(t)} \, dt$$

Or $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ donc

$$u_{n+1} - u_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+2)t) \, dt = \frac{1}{n+1} \left[\sin((2n+2)t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

La suite (u_n) est donc constante égale à $u_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Il s'agit du lemme de Riemann-Lebesgue (hors programme). Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b \varphi(t)\sin(\lambda t) \, dt = -\frac{1}{\lambda}\left[\varphi(t)\cos(\lambda t)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \varphi'(t)\cos(\lambda t) \, dt = \frac{\varphi(a)\cos(\lambda a)}{\lambda} - \frac{\varphi(b)\cos(\lambda b)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \varphi'(t)\cos(\lambda t) \, dt$$

Comme cos est bornée,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\varphi(a)\cos(\lambda a)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\varphi(b)\cos(\lambda b)}{\lambda} = 0$$

Enfin, par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b \varphi'(t)\cos(\lambda t) \, dt\right| \leq \int_a^b |\varphi'(t)||\cos(\lambda t)| \, dt \leq \int_a^b |\varphi'(t)| \, dt$$

donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_a^b \varphi'(t)\cos(\lambda t) \, dt = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b h(t)\sin(\lambda t) \, dt = 0$$

5. h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus,

$$h(t) = \frac{\sin t - t}{t \sin t}$$

et $t\sin(t) \underset{t\to0}{\sim} t^2$ et $\sin t - t \underset{t\to0}{=} o(t^2)$ donc $h(t) \underset{t\to0}{=} o(1)$ i.e. $\lim_{t\to0} h(t) = 0$.
Enfin,

$$h'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{t^2\cos t - \sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)}$$

Or $t^2\sin^2(t) \underset{t\to0}{\sim} t^4$,

$$\sin^2(t) \underset{t\to0}{=} t^2\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)^2 = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)$$

et

$$t^2\cos^2(t) \underset{t\to0}{=} t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4)$$

donc $t^2\cos t - \sin^2(t) \underset{t\to0}{\sim} -\frac{1}{6}t^4$. Par conséquent, $\lim_{t\to0} h'(t) = -\frac{1}{6}$.
D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que l'on notera encore h dans la suite.

6. Remarquons que

$$u_n - v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\sin((2n+1)t) \, dt$$

Comme h est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ d'après le lemme de Riemman-Lebesgue.
Or (u_n) est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$.

7. Par le changement de variable $u = (2n+1)t$,

$$v_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

Comme l'intégrale I converge

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t}\, dt = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$$

Solution 34

---

1. Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^x \frac{f(at)-f(t)}{t}\, dt = \int_1^x \frac{f(at)}{t}\, dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt$$

En effectuant le changement de variable $u = at$ dans la première intégrale

$$\int_1^x \frac{f(at)-f(t)}{t}\, dt = \int_a^{ax} \frac{f(t)}{t}\, dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt$$

Enfin, d'après la relation de Chasles,

$$\int_1^x \frac{f(at)-f(t)}{t}\, dt = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\, dt - \int_1^a \frac{f(t)}{t}\, dt$$

2. Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme f est continue, elle admet un minimum m_x et un maximum M_x sur le segment $[x, ax]$. Alors

$$m_x \int_x^{ax} \frac{dt}{t} \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\, dt \leq \mathrm{M}_x \int_x^{ax} \frac{dt}{t}$$

ou encore

$$m_x \ln(a) \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\, dt \leq \mathrm{M}_x \ln(a)$$

Si $a > 1$,

$$m_x \leq \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\, dt \leq \mathrm{M}_x$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c_x \in [x, a_x]$ tel que

$$f(c_x) = \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\, dt$$

ou encore

$$\int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\, dt = f(c_x)\ln(a)$$

Ceci est encore valable si $a = 1$ (prendre $c_x = x$ par exemple). Comme $c_x \geq x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(c_x) = \ell$ de sorte que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\, dt = \ell \ln(a)$$

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\, dt$ converge et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\, dt = \ell\ln(a) - \int_1^a \frac{f(t)}{t}\, dt$$

Solution 35

1. Tout d'abord, $t \mapsto \ln(\sin t)$ est bien continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs,

$$\sin t \underset{t\to 0^+}{=} t + o(t)$$

donc

$$\ln(\sin t) \underset{t\to 0^+}{=} \ln(t) + \ln(1+o(1)) \underset{t\to+\infty}{=} \ln(t) + o(1)$$

A fortiori, comme $\lim\limits_{t\to 0^+} \ln(t) = -\infty$

$$\ln(\sin t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(t)$$

Par croissances comparées, on a donc

$$\ln(\sin t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/\sqrt{t})$$

Par conséquent, $t \mapsto \ln(\sin t)$ est intégrable sur $]0,1]$. L'intégrale définissant I converge.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = \pi/2 - t$.

3. Via le changement de variable $u = \pi - t$,

$$\mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\ \mathrm{d}u$$

Via la relation de Chasles

$$2\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\ \mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)\ \mathrm{d}t$$

4.

$$\begin{aligned}
2\mathrm{I} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)\cos(t))\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)/2)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\ \mathrm{d}t - \frac{\pi\ln 2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\ \mathrm{d}u - \frac{\pi\ln 2}{2} \qquad \text{via le changement de variable } u = 2t \\
&= \mathrm{I} - \frac{\pi\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, $\mathrm{I} = -\frac{\pi\ln 2}{2}$.

Solution 36

Tout d'abord, l'intégrande est continu sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissances comparées,

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$$

et par DL usuel

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \underset{t\to 0}{=} b - a + o(1)$$

On en déduit que $t \mapsto \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ensuite, pour $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Les deux intégrales convergent encore par croissances comparées. Via les changements de variables $u = at$ et $u = bt$,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Comme $\dfrac{e^{-u}}{u} \underset{u\to 0^+}{=} \dfrac{1}{u} + \varphi(u)$ avec $\varphi(u) \underset{u\to 0^+}{=} \mathcal{O}(1)$,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

Finalement,

$$\mathrm{I} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Solution 37

- Notons, pour tout x positif

  $$f(x) = \frac{1}{1+x^3}$$

  La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

  $$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

  On déduit donc du théorème de comparaison aux intégrales de Riemann que I converge.

- Après une décomposition en éléments simples élémentaires, on aboutit à :

  $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)$$

  d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$

  $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right) \end{aligned}$$

  ainsi, pour tout u positif

  $$\mathrm{I}(u) = \frac{1}{3}\left(\ln(u+1) - \ln\left(\sqrt{u^2-u+1}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan(2(u-1/2)/\sqrt{3}) + \arctan(1/\sqrt{3})\right)$$

  puis

  $$\mathrm{I} = \lim_{u\to+\infty} \mathrm{I}(u) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Solution 38

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(t)e^{-at}| \leq e^{-at} \qquad \text{et} \qquad |\sin(t)e^{-at}| \leq e^{-at}$$

et $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par exemple, $e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$). Ainsi $t \mapsto \cos(t)e^{-at}$ et $t \mapsto \sin(t)e^{-at}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
Remarquons que

$$\mathrm{I} + i\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} e^{it}e^{-at}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(i-a)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(i-a)t}}{i-a}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-i} = \frac{a+i}{a^2+1}$$

En effet,

$$\left|\frac{e^{(i-a)t}}{i-a}\right| = \frac{e^{-at}}{|i-a|}$$

donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{(i-a)t}}{i-a} = 0$.
Comme I et J sont réelles,

$$\mathrm{I} = \mathrm{Re}\left(\frac{a+i}{a^2+1}\right) = \frac{a}{a^2+1}$$
$$\mathrm{J} = \mathrm{Im}\left(\frac{a+i}{a^2+1}\right) = \frac{1}{a^2+1}$$

Solution 39

1. $$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\left[\arctan(t/2)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

2. Par décomposition en éléments simples :
$$\frac{1}{4-t^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t}\right)$$
Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{4-t^2}$ est donc $t \mapsto \dfrac{1}{4}(-\ln(2-t) + \ln(2+t))$. Puisque $\displaystyle\lim_{t\to2^-} \frac{1}{4}(-\ln(2-t)+\ln(2+t)) = +\infty$, l'intégrale J diverge.

3. Une primitive de sin est $-\cos$, qui n'admet pas de limite en $+\infty$ donc l'intégrale K diverge.

4. $$\mathrm{L} = [t\ln t - t]_0^1 = -1$$

5. $$\mathrm{M} = -\frac{1}{a}\left[e^{-at}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$$

6. $$\mathrm{N} = \frac{1}{3}\left[\arcsin(3t)\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

7. Par une décomposition en éléments simples :
$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}$$
Ainsi
$$\mathrm{O} = \left[\ln\left(\frac{t-2}{t-1}\right)\right]_3^{+\infty} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

8. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ sur $[2, +\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln t)$, qui admet une limite infinie en $+\infty$. L'intégrale P diverge.

Solution 40

1. L'application $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, elle est prolongeable par continuité en 0 puisque $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. On peut d'ores et déjà affirmer que $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est intégrable sur $]0, \pi]$. A fotiori, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$ converge.

Par ailleurs, sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_{x=\pi}^{x\to+\infty} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$ et $\dfrac{\cos x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ de sorte que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ converge. Par conséquent $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ converge également.

On en conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ converge.

2. **a.** On sait que $1 - \cos u \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$ donc $\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} = \dfrac{\alpha^2}{2}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ est donc prolongeable par continuité en 0.

b. Remarquons que cos est borneé de même que $t \mapsto e^{-itx}$ puisqu'elle est à valeurs dans $\mathbb{U}$. Ainsi $\dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que $t \mapsto \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ est intégrale sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Tout d'abord,

$$\bar{\mathrm{I}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{itx}\, dt$$

En effectuant le changement de variable linéaire $t \mapsto -t$, on obtient alors

$$\bar{\mathrm{I}} = -\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1-\cos(-\alpha t)}{(-t)^2} e^{-itx}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}\, dt = \mathrm{I}$$

Ainsi $\mathrm{I} \in \mathbb{R}$.

b. Par intégration par parties,

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\, dx = -\left[\frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x}\right]_{x=\mathrm{A}}^{x\to+\infty} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\sin(\mathrm{B}x)}{x}\, dx$$

Cette intégration par partie est légitime car la première intégrale converge d'après le résultat admis dans l'énoncé et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(\mathrm{B}x)}{x} = 0$. Ainsi

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\, dx = \frac{\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\sin(\mathrm{B}x)}{x}\, dx$$

On effectue alors le changement de variable linéaire $t = \mathrm{B}x$ dans la seconde intégrale pour obtenir

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\, dx = \frac{\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

c. D'après la question précédente,

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\, dx = \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} - \frac{\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} + \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{1-\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} + \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

En utilisant à nouveau l'équivalent $1 - \cos u \underset{u\to}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge, on ontient en faisant tendre A vers 0 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\, dx = \mathrm{B}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\mathrm{B}\pi}{2}$$

De plus, si $\mathrm{B} = 0$, il est clair que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\, dx = 0$ et si $\mathrm{B} < 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\, dx = -\frac{\mathrm{B}\pi}{2}$ par parité de cos. On peut simplifier en affirmant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\, dx = \frac{|\mathrm{B}|\pi}{2}$ de manière générale.

d. Par relation de Chasles :

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} \, \mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} \, \mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de variable $t \mapsto -t$ dans la première intégrale, on obtient :

$$\mathrm{I} = \int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{itx} \, \mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} \, \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} \cos(tx) \, \mathrm{d}t$$

Avec des relations de trigonométrie élémentaire

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_{0}^{+\infty} \frac{2\cos(tx) - \cos((x+\alpha)t) - \cos((x-\alpha)t)}{t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos((x+\alpha)t)}{t^2} \, \mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos((x-\alpha)t)}{t^2} \, \mathrm{d}t - 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\mathrm{I} = \frac{|x+\alpha|\pi}{2} + \frac{|x-\alpha|\pi}{2} - \pi|x| = \pi \cdot \frac{|x+\alpha| + |x-\alpha| - 2|x|}{2}$$

Comportements asymptotiques

Solution 41

Notons F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ s'annulant en 0. On a donc $\mathrm{F}' + \mathrm{F} = \varphi$. Par variation de la constante, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \mathrm{F}(x) = e^{-x} \int_0^x e^t \varphi(t) \, \mathrm{d}t + \lambda e^{-x}$$

Notons ℓ la limite de φ en $+\infty$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \int_0^x \varphi(t) e^t \, \mathrm{d}t = \int_0^x \ell e^t \, \mathrm{d}t + \int_0^x (\varphi(t) - \ell) e^t \, \mathrm{d}t = \ell(e^x - 1) + \int_0^x (\varphi(t) - \ell) e^t \, \mathrm{d}t$$

Puisque $(\varphi(t) - \ell)e^t \underset{t\to+\infty}{=} o(e^t)$, que $t \mapsto e^t$ est positive et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^t \, \mathrm{d}t$ diverge, on a par intégration des relations de comparaison

$$\int_0^x (\varphi(t) - \ell) e^t \, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t \, \mathrm{d}t\right)$$

ou encore

$$\int_0^x (\varphi(t) - \ell) e^t \, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$$

Ainsi

$$\int_0^x \varphi(t) e^t \, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \ell e^x + o(e^x)$$

puis

$$\mathrm{F}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ell + o(1)$$

Ainsi F admet également pour limite ℓ en $+\infty$. Puisque $f = \varphi - \mathrm{F}$, f admet pour limite 0 en $+\infty$.

Solution 42

1. Posons $g = f' + af$ de sorte que f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$. Par variation de la constante, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = e^{-ax}\displaystyle\int_0^x e^{at}g(t)\,dt + \lambda e^{-ax}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $g \underset{+\infty}{=} o(1)$,

$$\int_0^x e^{at}g(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x |e^{at}|\,dt\right)$$

Or pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x |e^{at}|\,dt = \int_0^x e^{\operatorname{Re}(a)t}\,dt = \frac{1}{\operatorname{Re}(a)}\left(e^{\operatorname{Re}(a)x} - 1\right)$$

On en déduit que

$$\int_0^x e^{at}g(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\operatorname{Re}(a)x})$$

puis finalement que

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-ax}\int_0^x e^{at}g(t)\,dt = 0$$

Par ailleurs, il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-ax} = 0$ puisque $\operatorname{Re}(a) < 0$. Finalement, on a bien $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

> **Remarque.** On peut aussi introduire la fonction $\varphi : x \mapsto e^{ax}f(x)$. On a alors $\varphi'(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{ax})$. Ainsi
>
> $$\varphi(x) - \varphi(0) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x |e^{at}|\,dt\right)$$
>
> On en déduit sans peine que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} e^{\operatorname{Re}(a)x}$ i.e. $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} e^{ax}$ puis $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

2. Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $g = f' - jf$. Alors $g' - \bar{j}g = f'' + f' + f$ admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $\operatorname{Re}(\bar{j}) < 0$, la première question montre que g admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $g = f' - jf$ et $\operatorname{Re}(j) < 0$, la première question montre à nouveau que f admet une limite nulle en $+\infty$.

3. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ dont les racines sont toutes de parties réelles strictement négatives et D l'opérateur de dérivation. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n = \deg P$) telle que $\lim\limits_{+\infty} P(D)(f) = 0$, alors $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Il suffit de raisonner par récurrence sur le degré n de P.
Si $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$ dont les racines sont de parties réelles strictement négatives et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{+\infty} P(D)(f) = 0$. Soit a une racine de P. On peut donc écrire $P = (X - a)Q$ avec $\deg Q = n$. Posons $g = Q(a)(f)$. Alors $g' - ag = P(D)(f)$ admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $\operatorname{Re}(a) < 0$, la première question montre que $\lim\limits_{+\infty} g = 0$. Or $g = Q(D)(f)$ et $\deg Q = n$ donc, par hypothèse de récurrence, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 43

1. D'après la théorème fondamental de l'analyse, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = g(x)$$

donc $\lim\limits_{x\to0} g(x) = F'(0) = f(0)$.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |F(x)| = \left|\int_0^x 1\cdot f(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x f(t)^2\,dt} \le \sqrt{x}\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt}$$

En posant $C = \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 \, dt}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ |g(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{x}}$$

donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties,

$$\int_0^x g(t)^2 \, dt = \int_0^x \frac{1}{t^2} F(t)^2 \, dt = -\left[\frac{F(t)^2}{t}\right]_0^x + 2\int_0^x \frac{F(t)F'(t)}{t} \, dt$$

L'intégration par parties est légitime car, par continuité de F en 0,

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)^2}{t} = \lim_{t \to 0} g(t)F(t) = g(0)F(0) = 0$$

Ainsi

$$\int_0^x g(t)^2 \, dt = -\frac{F(x)^2}{x} + 2\int_0^x g(t)f(t) \, dt \leq 2\int_0^x g(t)f(t) \, dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^x g(t)^2 \, dt \leq 2\sqrt{\int_0^x g(t)^2 \, dt}\sqrt{\int_0^x f(t)^2 \, dt} \leq 2C\sqrt{\int_0^x g(t)^2 \, dt}$$

puis

$$\int_0^x g(t)^2 \, dt \leq 4C^2$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x g(t)^2 \, dt$ est croissante (intégrande positive) et majorée donc admet une limite en $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)^2 \, dt$ converge donc i.e. g est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Solution 44

En remarquant que $e^{t^2} \geq 1$, il est clair que $\lim_{+\infty} F = +\infty$. Par commodité, on posera dans la suite $G = F - F(1)$. Par intégration par parties,

$$G(x) = \int_1^x e^{t^2} \, dt = \int_1^x \frac{2te^{t^2}}{2t} \, dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} \, dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} \, dt$$

Il est clair que $\frac{e}{2} \underset{x \to +\infty}{=} o(G(x))$. De plus, $\frac{e^{t^2}}{2t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{t^2})$. Or $t \mapsto e^{t^2}$ est positive et $\int_1^{+\infty} e^{t^2} \, dt$ diverge donc

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} \, dt \underset{x \to +\infty}{=} o(G(x))$$

Ainsi

$$G(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{e^{x^2}}{2x} + o(G(x))$$

ou encore

$$G(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$$

Comme $\lim_{+\infty} F = +\infty$, $G = F - F(1) \underset{+\infty}{\sim} F$. Ainsi $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Solution 45

1. Il suffit par exemple de remarquer que $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties

$$g(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{-2te^{-t^2}}{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

L'intégration par parties est légitimée car $t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2t}$ admet une limite (nulle) en $+\infty$. De plus, $\frac{e^{-t^2}}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t^2}\right)$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$$

On en déduit donc que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

Solution 46

Remarquons que f est solution de l'équation différentielle $y'+y=g$ avec $g=f+f'$. Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On applique alors la méthode de variation de la constante. La fonction $x \mapsto \varphi(x)e^{-x}$ où φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de $y'+y=g$ si et seulement si $\varphi'(x)e^{-x} = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $\varphi(x) = \int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de $y'+y=g$ est donc la fonction $x \mapsto e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t$. Les solutions de $y'+y=g$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque f est solution de cette équation différentielle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$, $e^t g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^t)$. Or $t \mapsto e^t$ est positive et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^t\,\mathrm{d}t$ diverge donc

$$\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t\,\mathrm{d}t\right)$$

ou encore

$$\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$$

Ainsi

$$e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$$

On en déduit donc que $\lim_{+\infty} f = 0$.

> **Remarque.** On peut aussi raisonner de la manière suivante. Posons $\varphi(x) = e^x f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x) = e^x(f(x)+f'(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\varphi'(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$. Or $x \mapsto e^x$ est positive et $\int_0^{+\infty} e^t\,\mathrm{d}t$ diverge donc
>
> $$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t\,\mathrm{d}t\right)$$
>
> On en déduit sans peine que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$ i.e. $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$.

Solution 47

1. Soit $x \in \mathrm{I}$. $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. L'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge donc et f est définie sur I.

2. On peut remarquer que
$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$
donc f est dérivable sur I d'après le théorème fondamental de l'analyse et
$$\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

3. On sait que $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc
$$f(x) - f(1) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x)$$
Comme $\lim\limits_{x\to0^+} -\ln(x) = +\infty$,
$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$$
Par intégration par parties
$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Comme $\frac{e^{-t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge,
$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$
Ainsi
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$$

4. Tout d'abord, f est continue sur I. De plus, $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc $f(x) \underset{x\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Enfin, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées. Ainsi f est intégrable sur I et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Par intégration par parties,
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t)\,\mathrm{d}t$$
Cette intégration par parties est légitime car
$$tf(t) \underset{t\to0^+}{\sim} -t\ln t \qquad \text{et} \qquad tf(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$$
de sorte que
$$\lim_{t\to0^+} tf(t) = \lim_{t\to+\infty} tf(t) = 0$$
Ainsi
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tf'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Solution 48

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge puisque $\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Alors, en posant

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

on a donc $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$. Par conséquent,

$$F(x) = G(x) - G(7x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarquons que

$$\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t\to0^+}{=} \frac{1}{t} + \mathcal{O}(1)$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ converge. Notons C sa valeur. Alors en posant pour $x > 0$

$$H(x) = \int_x^1 \left(\frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

on a $\lim_{x\to0^+} H(x) = C$. Par conséquent,

$$F(x) = H(7x) - H(x) + \int_x^{7x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = H(7x) - H(x) + \ln(7) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} C - C + \ln(7) = \ln(7)$$

Solution 49

1. Remarquons que $\frac{\arctan t}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives
$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\pi\,\mathrm{d}t}{2t} = \frac{\pi \ln x}{2}$$

2. Remarquons que $\frac{\operatorname{th} t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives
$$\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{x}$$

3. Remarquons que $\frac{e^t}{t^3} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^3}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ diverge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives
$$\int_x^1 \frac{e^t}{t^3}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{2x^2}$$

4. Remarquons que $\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{2}}}$ converge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives
$$\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\sim} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{x}$$

Solution 50

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}_+^*$ donc $t \mapsto \frac{\operatorname{ch} t}{t}$ est continue sur $[x, 2x]$. Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $[2x, x] \subset \mathbb{R}_-^*$ donc $t \mapsto \frac{\operatorname{ch} t}{t}$ est continue sur $[2x, x]$. Dans tous les cas, $f(x)$ est bien défini.

2. Tout d'abord, φ est évidemment continue sur $\mathbb{R}^*$. On sait par ailleurs que $\operatorname{ch}(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + o(t)$ donc $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} o(1)$. Notamment, $\lim_0 \varphi = 0$ donc φ est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, on notera encore φ ce prolongement.

3. Plus précisément, $\operatorname{ch}(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$. Par conséquent, $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2}t + o(t)$. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet une unique primitive Φ s'annulant en 0. De plus, $\Phi(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{2x} \varphi(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \ln(2) + \Phi(2x) - \Phi(x) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln 2 + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par une intégration par parties,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{e^t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

On sait que

- $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est positive sur $[1, +\infty[$;
- $\frac{e^t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^t}{t}\right)$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t$ diverge (par exemple $e^t/t \geq 1/t \geq 0$).

On en déduit par intégration d'une relation de comparaison que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2}\ \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t\right)$$

puis que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x} - e \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}$$

5. Remarquons que

$$f(x) = \int_1^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t}\ \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\operatorname{ch} t}{t}\ \mathrm{d}t$$

On sait que

- $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est positive sur $[1, +\infty[$;
- $\frac{\operatorname{ch} t}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^t}{2t}$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t$ diverge (par exemple $e^t/t \geq 1/t \geq 0$).

On en déduit que

$$\int_1^x \frac{\operatorname{ch} t}{t}\ \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2x}$$

Par conséquent, on a également

$$\int_1^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} \, \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{4x}$$

Mais $\dfrac{e^x}{2x} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{e^{2x}}{4x}\right)$ donc

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{4x}$$

Solution 51

1. La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{t} \, \mathrm{d}t$ est strictement décroissante sur $]0, 1]$ (elle est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto -\dfrac{e^x}{x}$). Comme $\dfrac{e^t}{t} \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t}$ diverge. Puisque $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est positive, $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$. Par ailleurs, $f(1) = 0$. Enfin, f est continue sur $]0, 1]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0, 1]$ tel que $f(u_n) = n$.

2. D'après la question précédente, f induit une bijection strictement décroissante de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est donc également strictement décroissante. Comme $u_n = f^{-1}(n)$, (u_n) est strictement décroissante. de plus, $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = 0$. Par conséquent, (u_n) converge vers 0.

3. Remarquons que

$$v_n = \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} \, \mathrm{d}t - \int_{u_n}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{u_n}^1 \frac{e^t - 1}{t} \, \mathrm{d}t$$

Comme $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} \, \mathrm{d}t$ converge. Comme (u_n) converge vers 0,

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} \, \mathrm{d}t$$

4. Posons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} \, \mathrm{d}t$. Ainsi $\ln(u_n) \underset{n \to +\infty}{=} -n + \mathrm{I} + o(1)$ puis $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{\mathrm{I}} e^{-n}$. Comme $0 < e^{-1} < 1$, $\sum u_n$ diverge.

Suites d'intégrales

Solution 52

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto f(t)e^{-t/n}$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc u_n est défini. Cette application est également continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(t)e^{-t/n} \underset{t \to +\infty}{=} o(1/t^2)$ de sorte que v_n est défini.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque l'intégrale définissant v_n converge, on peut écrire que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)e^{-t/n} \, \mathrm{d}t$$

Mais en effectuant un changement de variable dans chaque intégrale, on obtient

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} f(t + k\pi)e^{-(t+k\pi)/n} \, \mathrm{d}t$$

Par π-périodicité de f, on en déduit que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} \int_0^{\pi} f(t)e^{-t/n} \, \mathrm{d}t = u_n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = u_n a_n$$

avec

$$a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = \frac{1}{1-e^{-\pi/n}}$$

3. Il s'agit jute d'un équivalent classique, à savoir $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$. On en déduit immédiatement que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$.

4. Remarquons tout d'abord que comme $\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,

$$u_n = \int_0^\pi f(t)(e^{-t/n}-1)\,\mathrm{d}t$$

On remarque que $e^{-t/n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$, ce qui permet de conjecturer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$ (ce qui précède n'est en aucun cas une preuve). On en déduirait alors la limite de (v_n). On propose alors deux méthodes.

Avec le théorème de convergence dominée. Posons $f_n : t \mapsto (e^{-t/n}-1)f(t)$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq |f|$ sur $[0,\pi]$ et $|f|$ est évidemment intégrable sur $[0,\pi]$. D'après le théorème de convergence dominée, (u_n) converge vers 0.

On remarque ensuite que la suite de fonctions (nf_n) converge simplement vers la fonction $t \mapsto -f(t)$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,\pi],\ |nf_n(t)| = n(1-e^{-t/n})|f(t)| \leq t|f(t)|$$

en utilisant la convexité de exp. La fonction $t \mapsto t|f(t)|$ est à nouveau intégrable sur le segment $[0,\pi]$ donc, par convergence dominée, (nu_n) converge vers $-\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$. Puisque $v_n = a_n u_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Sans le théorème de convergence dominée. Remarquons que f est continue donc bornée sur le segment $[0,\pi]$ (elle est même bornée sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est π-périodique). En notant M un majorant de $|f|$ sur $[0,\pi]$,

$$|u_n| \leq \mathrm{K}\int_0^\pi (1-e^{-t/n})\,\mathrm{d}t = \mathrm{K}\left(\pi + n(e^{-\pi/n}-1)\right)$$

Or via le même équivalent usuel que précédemment,

$$\lim_{n\to+\infty} n(e^{-\pi/n}-1) = -\pi$$

de sorte que (u_n) converge bien vers 0.

On constate que

$$u_n + \frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\left(e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$\left|e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n}\right| \leq \frac{t^2}{2n^2}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient donc

$$\left|u_n + \frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\mathrm{K}}{2n^2}\int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{K}\pi^3}{6n^2}$$

En particulier,

$$u_n + \frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

A fortiori

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Via l'équivalent de (a_n) précédemment trouvé, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Solution 53

1. Tout d'abord, $\cos(2nt) \underset{t\to0}{\sim} 1$. De plus,

$$\begin{aligned}
\ln(\sin t) &\underset{t\to0}{=} \ln(t+o(t))\\
&\underset{t\to0}{=} \ln(t(1+o(1)))\\
&\underset{t\to0}{=} \ln t + \ln(1+o(1))\\
&\underset{t\to0}{=} \ln t + o(1)\\
&\underset{t\to0}{=} \ln t + o(\ln t)\\
&\underset{t\to0}{\sim} \ln t
\end{aligned}$$

Finalement, $f_n(t) \underset{t\to0}{\sim} \ln t$. Par croissances comparées, $f_n(t) \underset{t\to0}{=} o\left(1/\sqrt{t}\right)$. Puisque f_n est également continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle est intégrable sur cet intervalle par comparaison à une fonction de Riemann intégrable.

2. On intègre par parties. La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée est $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t}$. De même, la fonction $t \mapsto \sin(2nt)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée est $t \mapsto 2n\cos(2nt)$. Enfin, $\sin(2nt)\ln(\sin t) \underset{t\to0}{\sim} 2nt\ln t$ donc $\lim\limits_{t\to0} \sin(2nt)\ln(\sin t) = 0$ par croissances comparées. Cela légitime l'intégration par parties.

$$\mathrm{J}_n = 2n\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n\cos(2nt)\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = [\sin(2nt)\ln(\sin t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin(2nt)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin(2nt)\,\mathrm{d}t$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot(\sin((2n+2)t) - \sin(2nt))\,\mathrm{d}t\\
&= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\\
&= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos((2n+2)t) + \cos(2nt))\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

Ainsi la suite (J_n) est constante. De plus,

$$\mathrm{J}_1 = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin(2t)\,\mathrm{d}t = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t)+1)\,\mathrm{d}t = -\pi$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{J}_n = -\pi$ et $\mathrm{I}_n = -\frac{\pi}{2n}$.

Solution 54

De manière plus générale, posons $\mathrm{J}_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln(t)^p\,\mathrm{d}t$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. $\mathrm{J}_{n,0}$ est clairement définie et, pour $p > 0$, $t^n\ln(t)^p \underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc $t \mapsto t^n\ln(t)^p$ est intégrable sur $]0,1]$. $\mathrm{J}_{n,p}$ est donc également définie pour $p > 0$.
Par intégration par parties, lorsque $p > 0$,

$$\int_0^1 t^n\ln(t)^p\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)^p\right]_0^1 - \frac{p}{n+1}\int_0^1 t^n\ln(t)^{p-1}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime car la seconde intégrale, à savoir $J_{n,p-1}$ converge. De plus, le crochet est nul par croissances comparées. Ainsi

$$J_{n,p} = -\frac{p}{n+1} J_{n,p-1}$$

Par une récurrence facile

$$J_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} J_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

En particulier,

$$I_n = J_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Solution 55

1. Par croissances comparées, $\ln^n(x) \underset{x\to 0^+}{=} o(1/\sqrt{})$ donc I_n converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit

$$I_n = \int_0^1 1 \cdot \ln^n(x)\, \mathrm{d}x$$

et on intégre par parties. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^n(x) = 0$ donc

$$I_n = \left[x\ln^n(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} \cdot n \cdot \ln^{n-1}(x)\, \mathrm{d}x = -nI_{n-1}$$

3. Comme $I_0 = 1$. Une récurrence évidente montre que $I_n = (-1)^n n!$.

Fonctions définies par des intégrales

Solution 56

1.
   - Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - De plus, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
   - Enfin, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{=} o(1/t^2)$ et la fonction positive $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

   Ainsi $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$. Le domaine de définition de Γ est donc $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto t^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto xt^{x-1}$. La fonction $t \mapsto -e^{-t}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto e^{-t}$. Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, \mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

   L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. De plus, comme $x > 0$

$$\lim_{t\to 0^+} t^x e^{-t} = 0$$

   et, par croissances comparées,

$$\lim_{t\to +\infty} t^x e^{-t} = 0$$

   On en déduit que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, \mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

3. On a donc $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\Gamma(1) = 1$, une récurrence évidente montre que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On peut vérifier avec Python.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from math import factorial
>>> from numpy import exp,inf
>>> def gamma(x):
...     return quad(lambda t:t**(x-1)*exp(-t),0,inf)[0]
...
>>> for n in range(1,10):
...     gamma(n),factorial(n-1)
```

Solution 57

1.
- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$.
- De plus, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
- Enfin, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$ et la fonction positive $t \mapsto (1-t)^{y-1}$ est intégrable au voisinage de $1-$ si et seulement si $y > 0$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = 1-t$.

3. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto (1-t)^y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ de dérivées respectives $t \mapsto xt^{x-1}$ et $t \mapsto -y(1-t)^{y-1}$. Par intégrations par parties,

$$\int_0^1 yt^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = -\left[t^x(1-t)^y\right]_0^1 + \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. Puisque $x > 0$ et $y > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} t^x(1-t)^y = \lim_{t\to 1^-} t^x(1-t)^y = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
y\mathrm{B}(x+1,y) &= \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t \\
&= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\,\mathrm{d}t \\
&= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t - x\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car ces deux intégrales convergent} \\
&= x\mathrm{B}(x,y) - x\mathrm{B}(x+1,y)
\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)$$

4. D'après la question précédente

$$\mathrm{B}(n+1,p+1) = \frac{n}{n+p+1}\mathrm{B}(n,p+1)$$

Par une récurrence facile

$$\mathrm{B}(n+1,p+1) = \frac{n!(p+1)!}{(n+p+1)!}\mathrm{B}(1,p+1) = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from math import factorial
>>> def beta(x,y):
...     return quad(lambda t:t**(x-1)*(1-t)**(y-1),0,1)[0]
...
>>> for n in range(1,10):
...     for p in range(1,10):
...             beta(n+1,p+1),factorial(n)*factorial(p)/factorial(n+p+1)
```