

# DEVOIR À LA MAISON N°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – D'après CCP MP 2008 – Autour de la fonction zeta alternée de Riemann

On note  $F$  la fonction zeta alternée de Riemann définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

et  $\zeta$  la fonction zeta de Riemann définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de  $F$  et  $\zeta$ .

Mise à part la partie III qui utilise des résultats de la partie I, les parties sont dans une très large mesure indépendantes.

### I Généralités

- 1 Déterminer le domaine de définition de  $\zeta$ .
- 2 Déterminer le domaine de définition de  $F$ .
- 3 Calcul de  $F(1)$ .

3.a Etablir le développement asymptotique suivant :

$$\ln(n) - \ln(n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3.b En déduire l'existence d'un réel  $\gamma$  tel que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

où  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  (somme partielle de la série harmonique)

3.c En déduire que  $F(1) = \ln(2)$ .

- 4 On pose  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge normalement sur  $[2, +\infty[$ .  
En déduire la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

- 5 Dérivabilité de  $F$ .

**5.a** Soit  $x > 0$ . Etudier les variations sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$  et en déduire que la suite  $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de  $x$ ) que l'on précisera.

**5.b** Soit  $a > 0$ . Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f'_n$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ .  
En déduire que  $F$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**6** *Lien entre  $\zeta$  et  $F$ .*

Calculer, pour  $x > 1$ ,  $F(x) - \zeta(x)$  en fonction de  $x$  et de  $\zeta(x)$ . En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$$

puis en déduire la limite de  $\zeta$  en  $+\infty$ .

## II Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries  $\sum_{n \geq 1} a_n$  et  $\sum_{n \geq 1} b_n$  est la série  $\sum_{n \geq 2} c_n$  où  $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ .

Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de  $x$ , de la série  $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ , produit de Cauchy de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x} \text{ par elle-même.}$$

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et  $x$  un réel strictement positif.

**7** *Etude de la convergence.*

**7.a** On suppose  $x > 1$ . Indiquer, sans aucun calcul, la nature et la somme de la série produit  $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$  en fonction de  $F$ .

**7.b** Démontrer que pour  $x > 0$ ,  $|c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$ .

En déduire, pour  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ , la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ .

**8** *Cas où  $x = 1$ .*

On suppose dans cette question que  $x = 1$ .

**8.a** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{X(n-X)}$ .

En déduire une expression de  $c_n(1)$  en fonction de  $\frac{H_{n-1}}{n}$ .

**8.b** Déterminer la monotonie de la suite  $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$ .

**8.c** En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} c_n(1)$ .

### III Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1

#### 9 Développement asymptotique en 1.

**9.a** Ecrire en fonction de  $\ln(2)$  et  $F'(1)$ , le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction  $F$  puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction  $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$ .

**9.b** En déduire deux réels  $a$  et  $b$  qui s'écrivent à l'aide de  $\ln(2)$  et  $F'(1)$  tels que l'on ait :

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{a}{x-1} + b + o(1)$$

#### 10 Développement asymptotique en 1 (bis). On considère la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ où $v_n$ est définie sur $[1, 2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$$

**10.a** Justifier que pour  $n \geq 1$  et  $x \in [1, 2]$ , on a :

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

**10.b** Justifier que pour  $x \in [1, 2]$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n(x)$  converge et que le réel  $\gamma$  défini à la question **3.b** vérifie

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1).$$

**10.c** Exprimer, pour  $x \in ]1, 2]$ , la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$  à l'aide de  $\zeta(x)$  et  $1 - x$ .

**10.d** Démontrer que la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  converge uniformément sur  $[1, 2[$  (on pourra utiliser le reste de la série).

**10.e** En déduire que

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$

#### 11 Application.

Déduire des résultats précédents une expression à l'aide de  $\ln(2)$  et  $\gamma$  de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln(n)}{n}$$