Séries numériques

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Comparaison à une série géométrique

Proposition 1.1 Règle de d'Alembert

Soit (a_n) une suite de complexes non nuls (au moins à partir d'un certain rang). On suppose que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors $\sum a_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, alors $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Exemple 1.1

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$ converge.

Remarque. On ne peut a priori pas conclure si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ ou si la suite de terme général $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ n'admet pas de limite.

Exemple 1.2

Posons $a_n = 1$ et $b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = 1$ mais $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge tandis que $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge.

Attention ! Il s'agit bien de **limites** dans l'énoncé de la règle de d'Alembert. Le fait d'avoir $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ ou $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ ne permet pas de conclure. En prenant $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ diverge.

Exemple 1.3 Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.

2 Comparaison série-intégrale

Méthode **Comparaison série-intégrale : nature d'une série**

On considère une série $\sum_{n\geq0} f(n)$ où f est une fonction continue par morceaux, **positive** et **décroissante** sur $\mathbb{R}_+$. On peut déterminer la nature de la série $\sum f(n)$ en comparant son terme général à une intégrale.
Donnons-nous $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, $f(t) \leq f(n)$ puis en intégrant sur $[n, n+1]$,

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n)$$

i.e.

$$0 \leq \mathrm{F}(n+1) - \mathrm{F}(n) \leq f(n)$$

où F est une primitive de f. Si la suite $(\mathrm{F}(n))$ diverge, la série télescopique $\sum \mathrm{F}(n+1) - \mathrm{F}(n)$ diverge également et enfin, la série $\sum f(n)$ diverge par comparaison.
De la même manière, si on se donne $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [n-1, n]$, $f(n) \leq f(t)$ puis

$$0 \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(n) - \mathrm{F}(n-1)$$

Si la suite $(\mathrm{F}(n))$ converge, la série télescopique $\sum \mathrm{F}(n) - \mathrm{F}(n-1)$ converge aussi et enfin, la série $\sum f(n)$ converge par comparaison.

Exemple 2.1

On souhaite déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$. On constate que $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$. Ainsi pour $n \geq 3$,

$$0 \leq \frac{1}{n\ln^2 n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} = -\left[\frac{1}{\ln t}\right]_{n-1}^{n} = \frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln n}$$

Comme la suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ converge, la série télescopique $\sum \frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln n}$ converge aussi et enfin, la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ converge par comparaison.

Exemple 2.2

On souhaite déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$. On constate que $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$. Ainsi pour $n \geq 2$,

$$0 \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \frac{1}{n\ln n}$$

ou encore

$$0 \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leq \frac{1}{n\ln n}$$

Comme la suite $(\ln(\ln n))$ diverge, la série télescopique $\sum \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)$ diverge aussi et enfin, la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge par comparaison.

Méthode **Comparaison série-intégrale : encadrement de sommes partielles ou de restes**

On considère une série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ où f est une fonction continue par morceaux et **monotone** sur $\mathbb{R}_+$. On peut encadrer les sommes partielles S_n entre deux intégrales. Si, par exemple, f est croissante, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$:

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

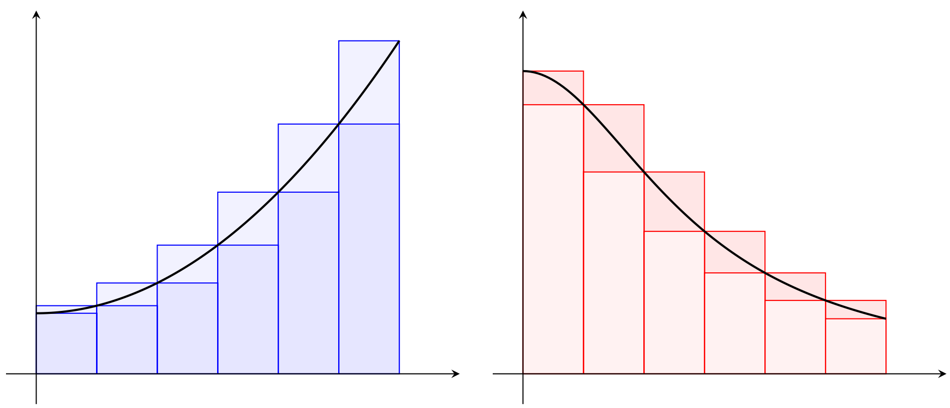
Puis par intégration sur $[k, k+1]$,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, \mathrm{d}t \leq f(k+1)$$

Enfin, en sommant l'inégalité de gauche pour $0 \leq k \leq n$ et celle de droite pour $0 \leq k \leq n-1$, on obtient via la relation de Chasles

$$\int_0^n f(t)\, \mathrm{d}t + f(0) \leq S_n \leq \int_0^{n+1} f(t)\, \mathrm{d}t$$

On a des résultats analogues lorsque f est décroissante.
Les encadrements obtenus permettent éventuellement de déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles.
Graphiquement, la méthode correspond à encadrer l'intégrale de f sur un intervalle par une somme d'aires de rectangles d'où le nom de méthode des rectangles.



Cas d'une fonction croissante — Cas d'une fonction décroissante

En modifiant légèrement la technique, on peut également obtenir un encadrement de la suite des restes (en cas de convergence) et potentiellement un équivalent.

Remarque. Il ne s'agit pas de retenir des formules par cœur mais de retenir la méthode permettant d'obtenir des encadrements des sommes partielles et des restes.

Remarque. On peut imaginer des variantes pour l'obtention des encadrements. Dans le cas d'une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, on se donne $k \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de f sur $[k-1, k]$ et $[k, k+1]$,

$$\int_{k-1}^k f(t)\, \mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, \mathrm{d}t$$

puis en sommant

$$\int_0^n f(t)\, \mathrm{d}t \leq S_n - f(0) \leq \int_1^{n+1} f(t)\, \mathrm{d}t$$

ou encore

$$f(0) + \int_0^n f(t)\, \mathrm{d}t \leq S_n \leq f(0) + \int_1^{n+1} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Exemple 2.3 Équivalent de la série harmonique

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$$

En sommant convenablement, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

ou encore

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

L'inégalité de gauche permet de conclure que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

L'encadrement permet même d'affirmer que donner un équivalent des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Exemple 2.4 Équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Mais en sommant l'encadrement précédent, on a également pour $\mathrm{N} > n \geq 1$

$$\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

ou encore

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{\mathrm{N}+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{\mathrm{N}}$$

Par passage à la limite

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

On obtient ainsi un équivalent de la suite des restes de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Exercice 2.1

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha < 1$ et un équivalent de son reste lorsque $\alpha > 1$.

Exercice 2.2 Constante γ d'Euler

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application continue par morceaux et décroissante.

1. Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ sont de même nature.
2. Montrer que la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\, \mathrm{d}t - f(n)$ converge.
3. Application. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 2.3 Equivalent de la fonction ζ en 1

Soit $\zeta : x \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. A l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

3 Sommation des relations de comparaison

Proposition 3.1

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques. On suppose de plus que (v_n) est de **signe constant** à partir d'un certain rang.

Domination On suppose que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Négligeabilité On suppose que $u_n = o(v_n)$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Equivalence On suppose que $u_n \sim v_n$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Attention ! Il est essentiel que la suite de référence soit de signe constant à partir d'un certain rang.

Remarque. Dans les cas de convergence, les résultats restent vrais même si les sommes partielles débutent à un indice non nul.

Lemme de Césaro

Soit (u_n) est une suite numérique convergente de limite ℓ. Posons $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (suite des moyennes).

- Si $\ell \neq 0$, $u_n \sim \ell$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell$ diverge. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} \ell = (n+1)\ell$ i.e. $v_n \sim \ell$. Donc (v_n) converge vers ℓ.
- Si $\ell = 0$, $u_n = o(1)$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ diverge. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)$ i.e. $v_n = o(1)$. Donc (v_n) converge vers 0.

Dans les deux cas, (v_n) est de même limite que (u_n).

Exercice 3.1

Soit (u_n) une suite réelle divergeant vers $+\infty$. On pose $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) diverge vers $+\infty$.

Exemple 3.1

On veut déterminer un équivalent de la somme partielle de la série harmonique. On remarque que

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Exemple 3.2

On veut déterminer un équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{n^2}$. On remarque que

$$\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est un série à termes positifs convergente donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{n}$$

Exercice 3.2

On pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$$