

DEVOIR À LA MAISON N°19

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

1 **1.a** Puisque $x \in]-1, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - x^n = 1$. Ainsi $1 - x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

1.b Soit $x \in]-1, 1[$. D'après la question précédente, $\frac{a_n x^n}{1 - x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$. Par conséquent, $\left| \frac{a_n x^n}{1 - x^n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |a_n x^n|$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1 donc $\sum a_n x^n$ converge absolument i.e. la série à termes positifs $\sum |a_n x^n|$ converge. D'après l'équivalent précédent, $\sum \left| \frac{a_n x^n}{1 - x^n} \right|$ converge i.e. $\sum \frac{a_n x^n}{1 - x^n}$ converge absolument.

1.c On peut par exemple prendre $a_n = \frac{1}{n^2}$ et $x = 2$. Alors

$$\frac{a_n x^n}{1 - x^n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2^n}{1 - 2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum \frac{a_n x^n}{1 - x^n}$ converge également.

2 Soit $b \in [0, 1]$. Alors

$$\forall x \in [-b, b], |a_n x^n| = |a_n| |x|^n \leq |a_n| b^n$$

et

$$\forall x \in [-b, b], |1 - x^n| \geq 1 - |x|^n = 1 - |x|^n \geq 1 - b^n > 0$$

On en déduit que

$$\forall x \in [-b, b], \left| \frac{a_n x^n}{1 - x^n} \right| \leq \frac{|a_n| b^n}{1 - b^n}$$

ou encore, en posant $f_n : x \mapsto \frac{a_n x^n}{1 - x^n}$,

$$\|f_n\|_{\infty, [-b, b]} \leq \frac{|a_n| b^n}{1 - b^n}$$

Or $\frac{|a_n| b^n}{1 - b^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |a_n| b^n$ et la série $\sum a_n b^n$ converge absolument puisque $0 \leq b < 1$. Ainsi $\sum |a_n| b^n$ converge puis $\sum \frac{|a_n| b^n}{1 - b^n}$ converge et enfin, $\sum \|f_n\|_{\infty, [-b, b]}$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-b, b]$.

3 **3.a** Puisque les f_n sont continues et que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $] -1, 1[$, $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $] -1, 1[$.

3.b Les fonctions f_n sont bien de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$ et $\sum f_n$ converge uniformément et donc simplement vers f sur $] -1, 1[$. Il reste uniquement à montrer que $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de $] -1, 1[$. Pour conclure que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$. Comme précédemment, on va montrer la convergence normale sur tout segment $[-b, b]$ avec $0 \leq b < 1$. Fixons $b \in [0, 1]$. Remarquons que

$$\forall x \in] -1, 1[, f'_n(x) = \frac{n a_n x^{n-1}}{(1 - x^n)^2}$$

On montre alors que

$$\|f'_n\|_{\infty, [-b, b]} \leq \frac{n |a_n| b^{n-1}}{(1 - b^n)^2}$$

De plus, $\frac{n|a_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n|a_n|b^{n-1}$. Or la série entière $\sum a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence, à savoir 1. Par conséquent la série $\sum n a_n b^{n-1}$ converge absolument et on en déduit comme précédemment la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[-b, b]$.

On peut alors conclure que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$ et que

$$\forall x \in] -1, 1[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n a_n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

Notamment, $f'(0) = a_1$.

4 **4.a** Il s'agit du théorème de sommation par paquets. La famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ étant supposé sommable, il suffit de vérifier que les I_n forment une partition de A i.e. $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$. S'il existe $(k, p) \in I_n \cap I_m$, alors $n = m = kp$ et donc

$I_n = I_m$. Les I_n sont donc disjoints deux à deux. Par ailleurs, $(k, p) \in I_{kp}$ donc $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$.

4.b Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série géométrique $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} |a_n x^{np}| = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} |a_n| |x^n|^p$ converge et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n x^{np}| = \frac{|a_n| |x|^n}{1 - |x|^n}$$

Or on a vu que pour tout $t \in] -1, 1[$, la série $\sum \frac{a_n t^n}{1-t^n}$ convergeait absolument donc, en prenant $t = |x|$, la série $\sum \frac{|a_n| |x|^n}{1 - |x|^n}$ converge. On en déduit la sommabilité de la famille $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$.

4.c On applique la question **4.a**.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} a_k x^{kp} \right)$$

Comme précédemment, $\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ (série géométrique) et

$$\sum_{(k,p) \in I_n} a_k x^{kp} = \left(\sum_{(k,p) \in I_n} a_k \right) x^n = \left(\sum_{d|n} a_d \right) x^n = b_n x^n$$

On en déduit bien que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

5 Dans cette question,

$$b_n = \sum_{d|n} a_d = \sum_{d|n} 1 = d_n$$

donc

$$\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$$

6 **6.a** On rappelle que

$$\varphi(n) = \text{card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \wedge n = 1\}$$

donc $1 \leq \varphi(n) \leq n$. Notons R le rayon de convergence de la série $\sum \varphi(n) x^n$. Puisque $\varphi(n) \geq 1$ et que le rayon de convergence de $\sum z^n$ vaut 1, $R \leq 1$. Mais $\varphi(n) \leq n$ et le rayon de convergence de $\sum n z^n$ vaut également 1, donc $R \geq 1$. Finalement, $R = 1$.

6.b On propose les fonctions suivantes.

```
def pgcd(a,b):
    return a if b==0 else pgcd(b,a%b)

def indicatrice(n):
    return len([k for k in range(n) if pgcd(k,n)==1])

def somme(n):
    return sum(indicatrice(d) for d in range(1,n+1) if n%d==0)
```

On teste

```
>>> [somme(n) for n in range(1,13)]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]
```

6.c Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Ensuite

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \text{card}\{1\} = 1 \\ \varphi(2) &= \text{card}\{1\} = 1 \\ \varphi(3) &= \text{card}\{1, 2\} = 2 \\ \varphi(4) &= \text{card}\{1, 3\} = 2 \\ \varphi(6) &= \text{card}\{1, 5\} = 2 \\ \varphi(12) &= \text{card}\{1, 5, 7, 11\} = 4\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{d|12} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 12$$

6.d Dans cette question

$$b_n = \sum_{d|n} a_d = \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Ainsi

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

Or on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc, en dérivant, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Finalement,

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

7 On sait que

$$\forall x \in]-1, 1[, -\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

Par ailleurs, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées (la suite $(1/n)$ est décroissante de limite nulle) donc, d'après le théorème de convergence radiale d'Abel,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \rightarrow 1} -\ln(1+x) = -\ln 2$$

8 Tout d'abord, pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$,

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^{n-1}}{1-x^n}$$

Fixons $b \in [0, 1[$. On pose ici $f_n : x \mapsto \frac{a_n x^{n-1}}{1-x^n}$ et on montre comme à la question 2 que $\sum f_n$ converge normalement

et donc uniformément sur $[-b, b]$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$, on obtient par le théorème de la double limite,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a_1$. Par conséquent, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_1 x = -x$. Comme $f(0) = 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_1 = -1$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1 = -1$.

9 Tout d'abord, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n (1-x)}{(1-x^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

Posons cette fois-ci,

$$f_n : x \mapsto \frac{a_n x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{(-1)^n x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \frac{a_n}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$. Soit $b \in]0, 1[$. Il suffit donc de montrer la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, 1[$ pour conclure à l'aide du théorème de la double limite. Tout d'abord, $\sum f_n$ converge simplement sur $[b, 1[$ et comme pour $x \in [b, 1[$, la suite de terme général $\frac{x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$ est décroissante (numérateur décroissant et dénominateur croissant), on a d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in [b, 1[, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \frac{x^{n+1}}{\sum_{k=0}^n x^k} \leq \frac{1}{(n+1)b}$$

On en déduit que le reste de la série $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[b, 1[$ puis que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[b, 1[$. D'après le théorème de la double limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{\ln 2}{1-x}$$