Interrogation écrite n°03

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$.

   Tout d'abord $f : t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$. De plus, par croissances comparées, $\frac{\ln t}{\sqrt{t}} \underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/4}}\right)$. Comme $3/4 < 1$, $t \mapsto \frac{1}{t^{3/4}}$ est intégrable en 0^+. Il en est donc de même de f. A fortiori, l'intégrale I converge. ∎

2. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\, \mathrm{d}t$.

   Tout d'abord $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ est continue par morceaux sur $[e, +\infty[$. De plus, par croissances comparées, $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\right)$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$, f non plus. Comme f est positive sur $[e, +\infty[$, l'intégrale I diverge. ∎

3. Déterminer un équivalent *simple* de $f : x \mapsto \int_x^1 \frac{\operatorname{sh} t}{t^2+t^3}\, \mathrm{d}t$ en 0^+.

   Remarquons que $\frac{\operatorname{sh} t}{t^2+t^3} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$. *Or* $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ *diverge et* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *est positive au voisinage de* 0^+. *Ainsi,* $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x$. ∎

4. Montrer que l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{\operatorname{ch} t}\, \mathrm{d}t$ converge et déterminer un équivalent *simple* de $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\arctan t}{\operatorname{ch} t}\, \mathrm{d}t$ en $+\infty$.

   Tout d'abord, $\mathrm{g} : t \mapsto \frac{\arctan t}{\operatorname{ch} t}$ *est continue par morceaux sur* $[0, +\infty[$. *De plus,* $\mathrm{g}(t) \underset{\to+\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{e^t/2} = \pi e^{-t}$. *Comme* $t \mapsto \pi e^{-t}$ *est intégrable en* $+\infty$, g *l'est aussi. A fortiori,* I *converge. Comme* $t \mapsto \pi e^{-t}$ *est positive au voisinage de* $+\infty$, *on peut de plus affirmer que* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \pi e^{-t}\, \mathrm{d}t = \pi e^{-x}$. ∎

5. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On pose $N(f) = |f(0)| + \|f + f'\|_\infty$ pour $f \in E$. Montrer que f est une norme sur E.

L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont trivialement vérifiées (à faire néanmoins). Seule la séparation peut éventuellement poser problème. Soit donc $f \in E$ telle que $N(f) = 0$. Comme $N(f)$ est la somme de deux termes positifs, ces deux termes son nuls i.e. $|f(0)| = \|f + f'\|_\infty = 0$. Comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, on a donc $f(0) = 0$ et $f + f' = 0$. Ainsi f est solution sur $[0,1]$ du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$. La fonction nulle est clairement solution de ce problème de Cauchy donc, par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, f est nulle.

> ***Remarque.*** *On aurait pu également résoudre explicitement ce problème de Cauchy.*

∎

6. Pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on pose $N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ et $N_\infty(P) = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. On admet que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$. Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes.

On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a clairement $N_1(P_n) = n + 1$ et $N_\infty(P_n) = 1$. Ainsi $\frac{N_1(P_n)}{N_2(P_n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. On en déduit que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. ∎