

DEVOIR SURVEILLÉ N°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. En effectuant le changement de variable $t = au$, on obtient $I(a) = J = \frac{\pi}{2}$. Il est aussi clair que $I(0) = 0$. Enfin, l'application $a \mapsto I(a)$ est clairement impaire donc $I(a) = -\frac{\pi}{2}$ pour tout $a \in \mathbb{R}_-^*$.
2. a. Tout d'abord, $f : u \mapsto \frac{\sin^2 u}{u^2}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* . De plus, $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ donc $f(u) \underset{u \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1$ et f est intégrable en 0^+ . Enfin, comme \sin est bornée, $f(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right)$ et f est intégrable en $+\infty$. Finalement, f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . A fortiori, J converge.
- b. Les applications $u \mapsto \sin^2 u$ et $u \mapsto -\frac{1}{u}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , de dérivées respectives $u \mapsto 2 \sin u \cos u$ et $u \mapsto \frac{1}{u^2}$. Ainsi, par intégration par parties,

$$J = - \left[\frac{\sin^2 u}{u} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin u \cos u}{u} du$$

Cette intégration par parties est légitime car $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 u}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 u}{u} = 0$ (on utilise à nouveau le même équivalent de \sin en 0 et le fait que \sin est bornée). Par conséquent,

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin u \cos u}{u} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u)}{u^2} du = I(2) = \frac{\pi}{2}$$

3. a. Remarquons déjà que

$$K(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos((a-b)u) - \cos((a+b)u)}{2u^2} du$$

REMARQUE. Il ne faut surtout pas séparer l'intégrale en deux à ce stade puisque les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\cos((a-b)u)}{u^2} du$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos((a+b)u)}{u^2} du$ divergent.

On intègre à nouveau par parties :

$$K(a, b) = - \left[\frac{\cos((a-b)u) - \cos((a+b)u)}{2u} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{(a-b) \sin((a-b)u) - (a+b) \sin((a+b)u)}{2u} du$$

Justifions a posteriori cette intégration par parties. Comme $\cos(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \mathcal{O}(u^2)$,

$$\frac{\cos((a-b)u) - \cos((a+b)u)}{2u} \underset{u \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(u)$$

A fortiori,

$$\frac{\cos((a-b)u) - \cos((a+b)u)}{2u} \underset{u \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

Comme \cos est bornée,

$$\frac{\cos((a-b)u) - \cos((a+b)u)}{2u} \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0$$

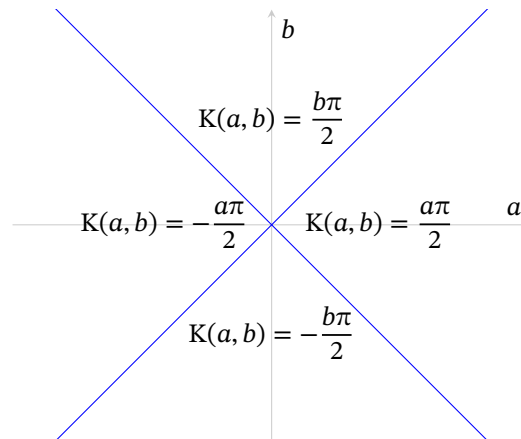
Par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} \frac{(a-b)\sin((a-b)u) - (a+b)\sin((a+b)u)}{2u} du$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{(a-b)\sin((a-b)u) - (a+b)\sin((a+b)u)}{2u} du = \frac{1}{2}(a-b)I(a-b) - \frac{1}{2}(a+b)I(a+b)$$

Par conséquent, $K(a, b)$ converge et

$$K(a, b) = \frac{1}{2}(a+b)I(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)I(a-b)$$

b.



c. On peut vérifier que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, K(a, b) = \frac{\pi}{4} (|a+b| - |a-b|)$$

Solution 2

1. Il suffit d'utiliser le fait que $(a - b)^2 \geq 0$.
2. Soit $(f, g) \in E^2$. D'après la question précédente,

$$\forall t \in I, 0 \leq |f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(t)^2)$$

Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur I , $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ l'est aussi puis fg également.

3. On a déjà $E \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $0 \in E$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$. Alors

$$(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + \mu^2 g^2 + 2\lambda\mu fg$$

Comme f et g sont dans E , f^2 et g^2 sont intégrables sur I et fg l'est également d'après la question précédente. Ainsi $(\lambda f + \mu g)^2$ est intégrable comme combinaison linéaire de fonctions intégrables. Par conséquent, $\lambda f + \mu g \in E$ et E est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. A fortiori, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

- 4.
5. On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \int_0^{n+1} h(t) dt - \int_0^n h(t) dt$$

Comme $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n h(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n+1} h(t) dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

6. Comme h est continue sur I , elle possède une primitive H sur I . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = H(n+1) - H(n)$. Or H est \mathcal{C}^1 sur I donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in]n, n+1[$ tel que $H'(a_n) = H(n+1) - H(n)$ en vertu du théorème des accroissements finis. On a donc $h(a_n) = J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(a_n) = 0$ d'après la question précédente. Enfin, $a_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ par minoration.
7. D'après l'énoncé, $t \mapsto t^2 f^2(t)$ est intégrable sur I car positive. Or $f(t) = o(t^2 f^2(t))$ donc $t \mapsto f(t)^2$ est intégrable sur I . A fortiori, $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ converge.
Toujours d'après l'énoncé, $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto f'(t)$ appartiennent à E . Or le produit de deux éléments de E est intégrable sur I d'après la question 2. Ainsi $t \mapsto tf(t)f'(t)$ est intégrable sur I . A fortiori, $\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t) dt$ converge.
8. Les applications $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{1}{2}f(t)^2$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} de dérivées respectives $t \mapsto 1$ et $t \mapsto f(t)f'(t)$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Par intégration par parties,

$$\int_0^A tf(t)f'(t) dt = \frac{1}{2} [tf(t)^2]_0^A - \frac{1}{2} \int_0^A f(t)^2 dt = \frac{1}{2} Af(A)^2 - \frac{1}{2} \int_0^A f(t)^2 dt$$

Comme $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt$ converge, on peut appliquer la question 6 à $h : t \mapsto t^2 f(t)^2$: il existe donc une suite (a_n) d'éléments de I telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 f(a_n)^2 = 0$.

On écrit alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{a_n} tf(t)f'(t) dt = \frac{1}{2} a_n f(a_n)^2 - \frac{1}{2} \int_0^{a_n} f(t)^2 dt$$

Comme $\int_0^{+\infty} t f(t) f'(t) dt$ converge et (a_n) diverge vers $+\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{a_n} t f(t) f'(t) dt = \int_0^{+\infty} t f(t) f'(t) dt$$

De la même manière,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{a_n} f(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$$

Enfin, (a_n) diverge vers $+\infty$ donc ne s'annule pas à partir d'un certain rang et

$$a_n f(a_n)^2 = \frac{a_n^2 f(a_n)^2}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par opérations. Par passage à la limite, on obtient donc bien :

$$\int_0^{+\infty} t f(t) f'(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$$

9. Posons $g : t \mapsto t f(t)$. Comme g et f' appartiennent à E, on obtient par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle g | f' \rangle^2 \leq \|g\|^2 \|f'\|^2$$

ou encore

$$\left(\int_0^{+\infty} t f(t) f'(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt \right)$$

En utilisant la question précédente, on a donc bien

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \right)^2 \leq 4 \left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt \right)$$

10. On sait qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz précédente si et seulement si g et f' sont colinéaires. Remarquons que si g est nulle, alors f est nulle sur \mathbb{R}_+^* puis sur \mathbb{R}_+ par continuité de sorte que f' est également nulle sur \mathbb{R}_+ . Ainsi f' et g sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f' = \lambda g$. Ainsi $f \in F$ vérifie l'égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que f est solution de l'équation différentielle $y' = \lambda t y$. Les fonctions recherchées sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto C e^{\lambda t^2/2}$ qui appartiennent à F, ce qui impose $C = 0$ ou $\lambda < 0$. Pour conclure les fonctions recherchées sont les fonctions

$$t \mapsto C e^{-K t^2} \text{ où } (C, K) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

Solution 3

1. Supposons $\lambda < 0$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leq 0$ à partir d'un certain rang. Ainsi (u_n) est croissante à partir d'un certain rang N . Alors $u_n \geq u_N > 0$ pour tout $n \geq N$. Ainsi (u_n) ne peut converger vers 0 : $\sum u_n$ diverge grossièrement.

2. Remarquons que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par conséquent,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta - \lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. a. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\beta - \lambda}{n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 0$ à partir d'un certain rang N .

b. Soit $n \geq N$. Alors

$$\prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=N}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k}$$

donc $\frac{u_n}{u_N} \leq \frac{v_n}{v_N}$ puis $u_n \leq K v_n$ avec $K = \frac{u_N}{v_N}$. Puisque $\beta > 1$, $\sum v_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge également.

4. On choisit cette fois-ci $\beta \in]\lambda, 1[$. On prouve comme précédemment que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang N .

On en déduit que $0 \leq u_n \leq K v_n$ pour $n \geq N$ avec $K = \frac{u_N}{v_N} > 0$. Comme $\sum v_n$ diverge, $\sum K v_n$ diverge également ($K \neq 0$). Ainsi $\sum u_n$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

5. La série $\sum x_n$ diverge d'après le cours et $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t}$,

$$\forall n \geq 2, 0 \leq \frac{1}{n \ln^2 n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t \ln^2 t} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

La suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ converge donc la série télescopique $\sum \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$ converge également. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum y_n$ converge. Par ailleurs,

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}}$$

D'une part

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'autre part

$$\frac{1}{1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$$

et, a fortiori,

$$\frac{1}{1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Finalement,

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Le cas $\lambda = 1$ est bien douteux puisqu'on peut aussi bien avoir convergence que divergence.

6. Il est clair que

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^{1/2} \left(\frac{1}{n^{1/2}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right)$$

Ainsi

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Avec les notations précédentes, $\lambda = \frac{1}{6} < 1$ donc $\sum w_n$ diverge.

7. a. L'application $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^4)^n}$ est continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{4n}}$ et $4n \geq 4 > 1$ donc f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+ . A fortiori, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ converge.

b. Par intégration par parties

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} 1 \times (t^4 + 1)^{-n} dt \\ &= [t(t^4 + 1)^{-n}]_0^{+\infty} + 4n \int_0^{+\infty} t^4 (t^4 + 1)^{-n-1} dt \end{aligned}$$

Cette intégration par parties est légitime car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t(t^4 + 1)^{-n} = 0$. En effet, $t(t^4 + 1)^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} t^{1-4n}$ et $1 - 4n \leq -3 < 0$. Ainsi

$$I_n = 4n \int_0^{+\infty} t^4 (t^4 + 1)^{-n-1} dt = 4n \int_0^{+\infty} (t^4 + 1 - 1)(t^4 + 1)^{-n-1} dt = 4n \left(\int_0^{+\infty} (t^4 + 1)^{-n} dt - \int_0^{+\infty} (t^4 + 1)^{-n-1} dt \right) = 42(I_n - I_{n+1})$$

c. D'après la question précédente,

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{4n-1}{4n} = 1 - \frac{1}{4n}$$

On est donc dans le cas $\lambda = \frac{1}{4} < 1$ donc $\sum I_n$ diverge.