

DEVOIR SURVEILLÉ N°14

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1

$$\chi_M = \det(XI_n - M) = \det((XI_n - M)^T) = \det(XI_n - M^T) = \chi_{M^T}$$

Comme le spectre d'une matrice est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique, $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(M^T)$.

2

Supposons que M est diagonalisable. Alors il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PDP^{-1}$. Ainsi

$$M^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^{-1} D P^T$$

Ainsi M^T est diagonalisable. Par involutivité de la transposition, la réciproque est également vraie. Par conséquent, M est diagonalisable si et seulement si M^T est diagonalisable.

3

On note L_0, \dots, L_{n-1} les lignes des déterminants suivants.

$$\begin{aligned} \chi_{C_Q} &= \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & Q(X) \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} & L_0 \leftarrow L_0 + \sum_{k=1}^{n-1} X^k L_k \\ &= (-1)^{n+1} Q(X) \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} & \text{en développant par rapport à la première ligne} \\ &= (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} Q(X) = Q(X) & \text{car le déterminant est triangulaire} \end{aligned}$$

4

Soit $X = (x_0, \dots, x_{n-1})^T \in \text{Ker}(C_Q^T - \lambda I_n)$. Les coordonnées de X vérifient $x_{k+1} = \lambda x_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. On en déduit que $x_k = \lambda^k x_0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. En posant $V_\lambda = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^T$, on a donc $X \in \text{vect}(V_\lambda)$. Ainsi $E_\lambda(C_Q^T) \subset \text{vect}(V_\lambda)$. Comme λ est valeur propre de C_Q^T , $\dim E_\lambda(C_Q^T) = 1$ et $E_\lambda(C_Q^T) = \text{vect}(V_\lambda)$. Ainsi V_λ est un vecteur directeur de $E_\lambda(C_Q^T)$.

5 Supposons que f est cyclique. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . Notamment, il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$. Dans la base $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$, la matrice de f est C_Q . Réciproquement, supposons que la matrice de f est de la forme C_Q dans une base (e_0, \dots, e_{n-1}) de E . On a donc $f(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. On en déduit que $e_k = f^k(e_0)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ainsi $(e_0, f(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E . On en déduit que f est cyclique.

6 Supposons que f est diagonalisable. A fortiori, f est trigonalisable donc χ_f est scindé. On sait que la matrice de f est de la forme C_Q dans une base adaptée. Il suffit donc de montrer que $\chi_f = \chi_{C_Q} = \chi_{C_Q^\top}$ est scindé à racines simples. Comme f est diagonalisable, C_Q l'est aussi et donc C_{Q^\top} l'est également d'après la question 2. Soit donc λ une racine de C_{Q^\top} i.e. $\lambda \in \text{Sp}(Q^\top)$. D'après la question 4, $\dim E_\lambda(C_Q^\top) = 1$. Mais comme C_Q^\top est diagonalisable, $m_\lambda(C_Q^\top) = \dim E_\lambda(C_Q^\top) = 1$. Ainsi $\chi_{C_Q^\top} = \chi_f$ est scindé à racines simples. Réciproquement, si χ_f est scindé à racines simples, f est diagonalisable.

7 Supposons f cyclique. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f^k = 0$. En évaluant en x_0 et en utilisant la liberté de $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, on obtient $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ainsi $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre. Notons $d = \deg \pi_f$. On sait déjà que $d \leq n$ car π_f divise χ_f . De plus, π_f annule f donc la famille $(\text{Id}_E, f, \dots, f^d)$ est liée. On ne peut avoir $d < n$ sinon cette famille serait une sous-famille de la famille libre $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ et serait donc libre. Ainsi $\deg \pi_f = d = n$.

8 Première méthode. Considérons l'ensemble

$$A = \{k \in \mathbb{N}^*, (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$$

L'ensemble A est non vide puisque $1 \in A$ ($x \neq 0_E$). De plus, A est majorée par $n+1$ parce que $\dim E = n$. Ainsi A possède un maximum que l'on note p . On en déduit que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre mais que $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ est liée. Il existe donc $(\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{K}^p$ non nul tel que $\sum_{k=0}^p \beta_k f^k(x) = 0$. On ne peut avoir $\beta_p = 0$ puisqu'alors $\sum_{k=0}^{p-1} \beta_k f^k(x) = 0$ avec $(\beta_0, \dots, \beta_{p-1})$ non nul, ce qui contredirait la liberté de $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$. Ainsi $\beta_p \neq 0$ et $f^p(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0_E$ avec $\alpha_k = \frac{\beta_k}{\beta_p}$ pour $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.

Deuxième méthode. On vérifie que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x) = 0_E\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. De plus, cet idéal est non nul puisqu'il contient π_f . Comme tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux, cet idéal est engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$. Notons $p = \deg \pi_{f,x}$.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x) = 0$. On a donc $P = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k \in I_x$ et donc $\pi_{f,x}$ divise P . Puisque $\deg P < d = \deg \pi_{f,x}$, $P = 0$ i.e. $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Ainsi la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

De plus, en posant $\pi_{f,x} = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$, on a bien $f^p(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0_E$.

9 Posons $F = \text{vect}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$. Il est clair que $f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) \in F$ pour tout $k \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ et d'après la question précédente, on a également $f(f^{p-1}(x)) = f^p(x) = -\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) \in F$. Ainsi, par linéarité de f ,

$$f(F) = f(\text{vect}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))) = \text{vect}(f(x), f^2(x), \dots, f^p(x)) \subset F$$

10 Notons f_F l'endomorphisme de F induit par f . La matrice de f_F dans la base $\text{vect}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est $C_{\pi_{f,x}}$. On en déduit que $\chi_{f_F} = \pi_{f,x}$ d'après la question 3. Or on sait que χ_{f_F} divise χ_f . Donc $\pi_{f,x} = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$ divise χ_f .

11 D'après la question précédente, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_f = Q\pi_{f,x}$. Ainsi $\chi_f(f)(x) = Q(f) \circ \pi_{f,x}(f)(x) = Q(f)(0_E) = 0_E$. Ceci est valable pour tout vecteur x non nul de E et aussi pour $x = 0_E$ donc $\chi_f(f) = 0$.

12 Remarquons déjà que $\pi_f = X^r$. Supposons que f est cyclique. D'après la question 7, $r = \deg \pi_f = n$.

Supposons que $r = n$. Par définition de l'indice de nilpotence, il existe $x \in E$ non nul tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$. Montrons que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E . Comme $\dim E = n$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_E$. Supposons que les λ_k ne soient pas tous nuls et notons $j = \min\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_k \neq 0\}$. Alors $\sum_{k=j}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_E$ et en appliquant f^{n-1-j} , on trouve $\lambda_j f^{n-1}(x) = 0_E$ et donc $\lambda_j = 0$, ce qui est contradictoire. Les λ_k sont donc tous nuls. La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est donc une base de E et f est cyclique. La matrice de f dans cette base est alors C_{X^n} .

13 $(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k} \in \mathbb{C}[f]$. Or $\mathbb{C}[f]$ est une algèbre commutative donc f et $(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$ commutent. En particulier, $F_k = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$ est stable par f . De plus, les λ_k sont distincts deux à deux donc les polynômes $P_k = (X - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$ sont premiers entre eux deux à deux. D'après le lemme des noyaux,

$$\text{Ker} \chi_f(f) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$$

Or $\chi_f(f) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc

$$E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$$

14 Comme $F_k = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$, $\varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}(x) = 0$ pour tout $x \in F_k$. Ainsi $\varphi_k^{m_k} = 0$ et φ_k est nilpotent.

15 D'après le cours, l'indice de nilpotence de φ_k est inférieur ou égal à la dimension de F_k i.e. $v_k \leq \dim(F_k)$.

16 Puisque $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre, $\deg \pi_f = n$. Posons $P = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{v_k}$ ainsi que $Q_k = \prod_{j \neq k} (X - \lambda_j)^{v_j}$ pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

$$\forall x \in F_k, P(f)(x) = Q_k(f) \circ (f - \lambda_k \text{Id}_E)^{v_k}(x) = Q_k(f) \circ \varphi_k^{v_k}(x) = Q_k(f)(0_E) = 0_E$$

Comme $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$, $P(f) = 0$. Par conséquent, π_f divise P et donc $\deg \pi_f \leq \deg P$ i.e. $\sum_{k=1}^p v_k \geq n$. De plus, $\sum_{k=1}^p m_k = \deg \chi_f = n$ donc $\sum_{k=1}^p m_k - v_k \leq 0$. Enfin, $\varphi_k^{m_k} = 0$ donc, par définition de l'indice de nilpotence $v_k \leq m_k$. Ainsi $\sum_{k=1}^p m_k - v_k = 0$ et les termes sont nuls puisqu'ils sont positifs. Ainsi $v_k = m_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

17 On a également $\sum_{k=1}^p \dim F_k = n$ puisque $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$. A nouveau, $\sum_{k=1}^p \dim(F_k) - v_k = 0$ et les termes de cette somme sont positifs. Ainsi $\dim(F_k) = v_k = m_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. D'après la question 12, les φ_k sont cycliques et il existe une

base \mathcal{B}_k de F_k dans laquelle la matrice de φ_k est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme f_k de F_k induit par f est $\lambda_k \text{Id}_E + \varphi_k$

et sa matrice dans la base \mathcal{B}_k est donc $\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$. La matrice de f dans la base \mathcal{B} obtenue par concaténation

des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ est bien de la forme voulue.

18 Posons $e_k = u_{1+\sum_{i=1}^{k-1} m_i}$ de sorte que $x_0 = \sum_{k=1}^p e_k$. On vérifie que $e_k \in F_k$ par définition de la base \mathcal{B} . Faisons alors quelques remarques préliminaires.

- Pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q(f)(e_k) \in F_k$ car F_k est stable par f .
- Par définition de \mathcal{B} , $(e_k, \varphi_k(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k))$ est une base de F_k .

$$\begin{aligned}
& Q(f)(x_0) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{k=1}^p Q(f_k)(e_k) = 0_E \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(f)(e_k) = 0_E \quad \text{car les } F_k \text{ sont en somme directe} \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, m_k - 1 \rrbracket, Q(f_k)(\varphi_k^j(e_k)) = 0_E \quad \text{car } Q(f_k) \text{ et } \varphi_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{F_k} \text{ commutent} \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(f_k) = 0 \quad \text{car } (e_k, \varphi_k(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k)) \text{ est une base de } F_k \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(\varphi_k + \lambda_k \text{Id}_{F_k}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \pi_{\varphi_k} \mid Q(X + \lambda_k) \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, X^{m_k} \mid Q(X + \lambda_k) \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (X - \lambda_k)^{m_k} \mid Q \\
& \Leftrightarrow \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} \mid Q \quad \text{car les } \lambda_k \text{ sont deux à deux distincts} \\
& \Leftrightarrow \chi_f \mid Q
\end{aligned}$$

19 Il suffit pour cela de montrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E et donc que cette famille est libre.

Soit donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0$. En posant $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$, on a donc $Q(f)(x_0) = 0$. D'après la question précédente, χ_f divise Q . Or $\deg \chi_f = n$ et $\deg Q < n$ donc $Q = 0$ puis $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, \dots, 0)$. Ainsi $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est bien libre et c'est une base de E . f est bien cyclique.

20 $C(f)$ est le noyau de l'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g - g \circ f$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. $C(f)$ contient évidemment Id_E et on montre aisément qu'il est stable par \circ . C'est donc une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

21 Question triviale : il suffit de dire que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

22 Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$. La question précédente montre que $g(x_0) = P(f)(x_0)$. Comme g commute avec f , on montre par récurrence que g commute avec f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Notamment, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0)) = f^k \circ P(f)(x_0) = P(f) \circ f^k(x_0) = P(f)(f^k(x_0))$$

Les endomorphismes g et $P(f)$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ de E donc ils sont égaux. Ainsi $g = P(f) \in \mathbb{K}[f]$.

23 Soit $g \in C(f)$. En reprenant la question précédente, il existe bien $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$. Réciproquement, s'il existe $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$, f commute avec g car l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ est commutative.

24 Si $r = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc $r \geq 2$ et supposons que $F = \bigcup_{m=1}^r F_m$ soit un sous-espace vectoriel de E . On raisonne par l'absurde. Supposons qu'aucun des F_i ne contienne tous les autres. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe $x_i \in F_i$ tel que $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} F_j$. Soit alors $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. La droite affine $D = \{\lambda x_i + (1 - \lambda)x_j, \lambda \in \mathbb{K}\}$

contient une infinité d'éléments et est à valeurs dans $F = \bigcup_{m=1}^r F_m$ car F est un sous-espace vectoriel de E . Comme les F_m sont en nombre fini, il existe $m \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que F_m contienne deux éléments de D (et même une infinité). Comme F_m est un sous-espace vectoriel de E et contient deux éléments de la droite D , F_m contient D en entier et notamment x_i et x_j , ce qui est contradictoire.

25 On vérifie que pour tout $x \in E$, I_x est bien un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Il est donc engendré par un unique polynôme unitaire $\pi_{f,x}$. De plus, en notant $I = \pi_f \mathbb{K}[X]$ l'idéal annulateur de f , on a clairement $I \subset I_x$ et donc $\pi_{f,x}$ divise π_f . Remarquons que l'ensemble des diviseurs unitaires de π_f est fini. Il existe donc x_1, \dots, x_r dans E tel que $\{\pi_{f,x}, x \in E\} = \{\pi_{f,x_1}, \dots, \pi_{f,x_r}\}$. De manière évidente, pour tout $x \in E$, $x \in \text{Ker } \pi_{f,x}(f)$. Alors

$$E = \bigcup_{x \in E} \text{Ker } \pi_{f,x}(f) = \bigcup_{i=1}^r \text{Ker } \pi_{f,x_i}(f)$$

D'après la question précédente, E est égal à l'un des noyaux. Sans perte de généralité, on peut supposer que $E = \text{Ker } \pi_{f, x_1}(f)$. Ainsi π_{f, x_1} est un polynôme annulateur de f de sorte que π_f divise π_{f, x_1} . Mais on a déjà vu que π_{f, x_1} divisait π_f donc $\pi_f = \pi_{f, x_1}$. Notamment $\deg \pi_{f, x_1} = d$. Soit alors $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ tel que $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k f^k(x_1) = 0_E$. Alors $P = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k X^k \in I_{x_1}$ donc π_{f, x_1} divise P . Mais $\deg \pi_{f, x_1} = d$ et $\deg P < d$ donc $P = 0$ puis $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) = (0, \dots, 0)$. La famille $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$ est bien libre.

26 Pour tout $k \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$, $f(e_k) = e_{k+1} \in E_1$. De plus, comme $\deg \pi_f = d$, $f^d \in \text{vect}(\text{Id}_E, f, \dots, f^{d-1})$ et donc $f(e_d) = f^d(x_1) \in \text{vect}(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = E_1$. On en déduit que E_1 est stable par f . Comme $\deg \pi_f = d$, $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{d-1}[f]$. Ainsi

$$\begin{aligned} \{P(f)(x_1), P \in \mathbb{K}[X]\} &= \{u(x_1), u \in \mathbb{K}[f]\} \\ &= \{u(x_1), u \in \mathbb{K}_{d-1}[f]\} \\ &= \{P(f)(x_1), P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\} \\ &= \text{vect}(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = E_1 \end{aligned}$$

27 Une base de E_1 est $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = (x_1, \psi_1(x_1), \dots, \psi_1^{d-1}(x_1))$ donc ψ_1 est cyclique.

28 Soit $x \in F$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\Phi(f^i(f(x))) = \Phi(f^{i+1}(x)) = 0$ donc $f(x) \in F$. Ainsi F est stable par f .

Soit $x \in E_1 \cap F$. Comme $x \in E_1$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{K}^d$ tel que $x = \sum_{k=1}^d \lambda_k e_k$. Comme $x \in F$, $\lambda_d = 0$. Puis en appliquant successivement f, f^2, \dots, f^{d-1} à l'égalité précédente, on obtient $\lambda_{d-1} = 0, \lambda_{d-2} = 0, \dots, \lambda_1 = 0$ (rédiger une récurrence). Ainsi $x = 0_E$ puis $E_1 \cap F = \{0_E\}$.

29 On va montrer que $\text{Ker } \Psi = F$. L'inclusion $F \subset \text{Ker } \Psi$ est évidente. Comme $\deg \pi_f = d$, $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{d-1}[f]$. On en déduit que $\text{Ker } \Psi \subset F$. Ainsi E_1 est un supplémentaire de $\text{Ker } \Psi$ dans E . On en déduit que Ψ induit un isomorphisme de E_1 sur $\text{Im } \Psi$. Mais comme $\dim E_1 = \dim \mathbb{K}^d = d$, $\text{Im } \Psi = \mathbb{K}^d$. Finalement, Ψ induit un isomorphisme de E_1 sur \mathbb{K}^d .

30 D'après le théorème du rang, $\dim F = \dim \text{Ker } \Psi = \dim E - \text{rg } \Psi = n - d$. Ainsi $\dim F + \dim E_1 = n$. Comme $E_1 \cap F = \{0_E\}$, $E = E_1 \oplus F$.

31 On peut raisonner par récurrence forte sur la dimension de E .

Initialisation Si $\dim E = 1$, il suffit de prendre $r = 1$ et $E_1 = E$.

Hérédité Supposons le résultat acquis pour tout espace vectoriel E de dimension comprise entre 1 et n ($n \in \mathbb{N}^*$) et tout endomorphisme de E . D'après ce qui précède, $E = E_1 \oplus F$ où la restriction de f à E_1 est cyclique et F est stable par f .

On applique alors l'hypothèse de récurrence à F et l'endomorphisme f_F de F induit par f . On peut alors écrire $F = E_2 \oplus \dots \oplus E_r$ où les endomorphismes des E_i induits par f_F sont cycliques et, pour tout $i \in \llbracket 2, r-1 \rrbracket$, le polynôme minimal de l'endomorphisme de E_{i+1} induit par f_F divise celui de l'endomorphisme de E_i induit par f_F . Mais, de manière générale, l'endomorphisme de E_i induit par f_F est également l'endomorphisme de E_i induit par f . Ainsi, avec les notations de l'énoncé, ψ_i est cyclique pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et P_{i+1} divise P_i pour tout $i \in \llbracket 2, r-1 \rrbracket$.

Il reste seulement à prouver que P_1 divise P_2 . D'après ce qui précède, $P_1 = \pi_{f, x_1} = \pi_f$. Mais comme P_2 est le polynôme minimal d'un endomorphisme induit par f , P_2 divise $\pi_f = P_1$.

Conclusion Le résultat est vrai quelle que soit la dimension de E et l'endomorphisme f de E .

32 Notons f_1, \dots, f_r les endomorphismes de E_1, \dots, E_r induits par f . L'application qui à $(g_1, \dots, g_r) \in \prod_{i=1}^r C(f_i)$ associe l'unique $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g|_{E_i} = g_i$ est bien définie, linéaire, injective et à valeurs dans $C(f)$.

Ainsi $\dim C(f) \geq \sum_{i=1}^r \dim C(f_i)$. Mais comme les f_i sont cycliques, $\dim C(f_i) = \dim E_i$. Finalement, $\dim C(f) \geq \sum_{i=1}^r \dim E_i = \dim E = n$.

33 Si on note $d = \deg \pi_f$. Alors $d = \dim \mathbb{K}[f] = \dim C(f) \geq n$. Mais $d \leq n$ donc $d = n$. Notamment, $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre. On en déduit d'après la partie II.B que f est cyclique.

34 Posons $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème de réduction des isométries vectorielles, il existe une base orthonormale \mathcal{B} de E dans laquelle la

matrice de f est diagonale par blocs, avec pour blocs diagonaux I_p , $-I_q$ et r blocs diagonaux $R(\theta_i)$ ($\theta_i \in]0, \pi[$). On a alors $\chi_f = (X - 1)^p (X + 1)^q \prod_{i=1}^r (X - 2X \cos \theta_i + 1)$.

De la même manière, il existe une base \mathcal{B}' de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, avec pour blocs diagonaux $I_{p'}$, $-I_{q'}$ et r' blocs diagonaux $R(\theta'_i)$ ($\theta'_i \in]0, \pi[$). On a alors $\chi_f = (X - 1)^{p'} (X + 1)^{q'} \prod_{i=1}^{r'} (X - 2X \cos \theta'_i + 1)$.

Comme $\chi_f = \chi_{f'}$, l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ nous apprend que $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$ et, quitte à réordonner les θ'_i (i.e. réordonner les vecteurs de la base \mathcal{B}'), $\cos \theta_i = \cos \theta'_i$ i.e. $\theta_i = \theta'_i$ (puisque $\theta_i, \theta'_i \in]0, \pi[$). Ainsi f et f' ont la même matrice dans les bases respectives \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

35 Supposons que f est orthocyclique. Il existe donc une base orthonormale \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q . Mais comme $f \in \mathcal{O}(E)$ et \mathcal{B} est orthonormale, C_Q est orthogonale. Posons $Q = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. La dernière colonne de C_Q est orthogonale aux précédentes, ce qui donne $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$. La dernière colonne de C_Q est unitaire, ce qui donne $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 = 1$ i.e. $a_0^2 = 1$ i.e. $a_0 = \pm 1$. On en déduit que $\chi_f = Q = X^n + a_0 = X^n \pm 1$.

Réciproquement supposons que $\chi_f = X^n \pm 1$. Soit \mathcal{B}_0 une base orthonormale de E . Soit $f' \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans cette base est C_Q avec $Q = X^n \pm 1$. On vérifie que C_Q est bien orthogonale : la famille des colonnes de C_Q est bien orthonormale. Comme \mathcal{B}_0 est une base orthonormale, $f' \in \mathcal{O}(E)$. Par ailleurs, $\chi_{f'} = X^n \pm 1 = \chi_f$. D'après la question précédente, il existe des bases orthonormales \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E dans lesquelles f et f' ont même matrice. Notons $A = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f') = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Comme \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthormées, la formule de changement de base donne l'existence de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T C_Q P$. Par conséquent, $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^T C_Q P$. Notons \mathcal{B}_1 la famille de vecteurs de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est P^T . Comme P^T est orthogonale, \mathcal{B}_1 est une base orthonormale et, par formule de changement de base, $\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = C_Q$. Ceci prouve que f est orthocyclique.

36 Comme f est nilpotent, il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E dans laquelle f est triangulaire supérieure stricte. En notant $F_i = \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$, on a donc $f(F_i) \subset F_{i-1}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (on peut convenir que $F_0 = \{0\}$). On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à cette base (e_1, \dots, e_n) et on obtient une base orthonormale (u_1, \dots, u_n) de E telle que $\text{vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{vect}(e_1, \dots, e_i) = F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi $f(u_i) \in f(F_i) \subset F_{i-1} = \text{vect}(u_1, \dots, u_{i-1})$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La matrice de f dans la base (u_n, \dots, u_1) est alors triangulaire inférieure stricte.

37 Supposons que f est orthocyclique. Il existe donc une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q . Comme f est nilpotent, $\chi_f = X^n = Q$. La dernière colonne de C_Q est donc nulle de sorte que $\text{rg } f = \text{rg } C_Q = n-1$. Par ailleurs, $\text{Ker } f = \text{vect}(e_n)$ et comme (e_1, \dots, e_n) est orthonormale, $(\text{Ker } f)^\perp = \text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. Ainsi (e_1, \dots, e_{n-1}) est une base orthormée de $(\text{Ker } f)^\perp$. Soit $(x, y) \in ((\text{Ker } f)^\perp)^2$. Alors

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle e_i \quad y = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y, e_i \rangle e_i$$

puis

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle e_{i+1} \quad f(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y, e_i \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y, e_i \rangle e_{i+1}$$

Comme (e_1, \dots, e_{n-1}) et (e_2, \dots, e_n) sont toutes deux orthormées

$$(x | y) = \sum_{i=1}^{n-1} (x | e_i)(y | e_i) = (f(x) | f(y))$$

Inversement, supposons que f est de rang $n-1$ et que $\forall (x, y) \in ((\text{Ker } f)^\perp)^2$, $(x | y) = (f(x) | f(y))$. D'après la question précédente, il existe une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure stricte. On a notamment $f(e_n) = 0_E$ et comme $\text{rg}(f) = n-1$, $\text{Ker } f = \text{vect}(e_n)$ en vertu du théorème du rang. Comme (e_1, \dots, e_n) est orthonormale, $(\text{Ker } f)^\perp = \text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.