Devoir à la maison n°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Mines-Ponts MP 2009 – Théorème de Müntz

On désigne par $\mathcal{C}([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de $\mathcal{C}([0,1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts. On note W le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1])$ engendré la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par :

$$\mathrm{N}_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

La question préliminaire et les parties I, II, III et VI sont indépendantes les unes des autres.

Question préliminaire

1 Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $\mathcal{C}([0,1])$.

I Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$\mathrm{D}_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}$$

On définit la fraction rationnelle :

$$\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(\mathrm{X}-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}+b_k)}$$

2 Montrer que si R(X) est de la forme $\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{A}_k}{\mathrm{X}+b_k}$, alors

$$\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n = \mathrm{R}(a_n)\mathrm{D}_{n-1}$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{R}(a_1) \\ \mathrm{R}(a_2) \\ \vdots \\ \mathrm{R}(a_n) \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ En déduire que

$$\mathrm{D}_n = \frac{\prod_{1\leq i<j<\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}(a_i + b_j)}$$

II Distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in \mathrm{E}$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, \mathrm{A})$ défini par :

$$d(x, \mathrm{A}) = \inf_{y\in\mathrm{A}} \|x - y\|$$

$\boxed{4}$ Montrer que $d(x, \mathrm{A}) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.

$\boxed{5}$ Montrer que si $(\mathrm{A}_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $\mathrm{A} = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{A}_n$ alors $d(x, \mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty} d(x, \mathrm{A}_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V *de dimension finie* de E, et on note $\mathrm{B} = \{y \in \mathrm{E};\ \|y - x\| \leq \|x\|\}$.

$\boxed{6}$ Montrer que $\mathrm{B} \cap \mathrm{V}$ est compacte et que $d(x, \mathrm{V}) = d(x, \mathrm{B} \cap \mathrm{V})$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

$\boxed{7}$ En déduire que pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe un élément $y \in \mathrm{V}$ tel que $d(x, \mathrm{V}) = \|x - y\|$.

III Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

$\boxed{8}$ Montrer que si V est un sous-espace vectoriel *de dimension finie* de E, alors pour tout $x \in \mathrm{E}$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in \mathrm{V}$ vérifiant $d(x, \mathrm{V}) = \|x - y\|$.

Pour tout suite finie $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{E}^n$, on désigne par $\mathrm{G}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$\mathrm{M}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \cdots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{pmatrix}$$

$\boxed{9}$ Montrer que $\mathrm{G}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée.

$\boxed{10}$ On suppose que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$d(x, \mathrm{V})^2 = \frac{\mathrm{G}(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{\mathrm{G}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

IV Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $\mathcal{C}([0,1])$, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2 respectivement. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

11 Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $\mathcal{C}([0,1])$, on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in \mathcal{C}([0,1]);\ f(0) = 0\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

12 Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

13 En déduire que V_0 est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2, mais n'est *pas* dense pour la norme N_∞.

14 Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

15 Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{C}([0,1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.

16 En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{C}([0,1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.

V Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$.

17 Montrer que l'espace W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$.

18 Montrer que pour tout $\mu \geq 0$,

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$$

19 Montrer que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0, \mu] \mapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.)

20 En déduire que l'espace W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

VI Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21 Montrer que si W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_∞, alors la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22 Soit $\psi = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n. Montrer que si $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors pour tout $\mu \geq 1$, on a :

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2\Big(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k - 1}\Big)$$

23 On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\lambda_0 = 0$;

(ii) $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \geq 1$;

Montrer que sous ces conditions, si la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente, alors W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_∞.

24 Montrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii') : \qquad \inf_{k\geq 1} \lambda_k > 0$$