Espaces vectoriels normés

Normes

Solution 1

Clairement, N est positive, homogène et vérifie l'inégalité triangulaire. Soit alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $N(P) = 0$. Alors $P(\alpha_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Puisque $\deg P \leq n$, $P = 0$. Ainsi N est bien une norme.
Supposons que N soit une norme euclidienne. Alors pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$,

$$N(P+Q)^2 + N(P-Q)^2 = 2N(P)^2 + 2N(Q)^2$$

Par interpolation de Lagrange, il existe deux polynômes P et Q tels que $P(\alpha_k) = \delta_{k,0}$ et $Q(\alpha_k) = \delta_{k,n}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Puisque $n \neq 0$, $N(P+Q) = N(P-Q) = 2$ tandis que $N(P) = N(Q) = 1$, ce qui contredit l'égalité précédente.

Solution 2

1. Soit $x \in E$. L'application $\varphi_x : y \in E \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $y \in E$, $|\varphi_x(y)| \leq \|x\|\|y\|$ donc φ_x est continue pour la norme $\|\cdot\|$ d'après le critère de continuité pour les applications linéaires. Par conséquent, $|\varphi_x|$ est également continue sur E pour la norme $\|\cdot\|$ par continuité de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$. E étant de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et $|\varphi_x|$ est donc également continue pour la norme N.
   La sphère unité S est évidemment fermée et bornée pour la norme N. Comme E est de dimension finie, elle est compacte pour cette norme. L'application $|\varphi_x|$ étant continue pour la norme N, elle atteint un maximum sur S. Ceci justifie la définition de $N^*(x)$ (et prouve même que la borne supérieure est en fait un maximum).

2. N^* est clairement positive.
   Donnons-nous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. Alors
   $$N^*(\lambda x) = \sup_{y \in S} |\langle \lambda x, y \rangle| = \sup_{y \in S} |\lambda||\langle x, y \rangle|$$
   Or $|\lambda|$ est un réel positif donc on peut montrer sans difficulté que
   $$\sup_{y \in S} |\lambda||\langle x, y \rangle| = \|\lambda| \sup_{y \in S} |\langle x, y \rangle|$$
   On en déduit que $N^*(\lambda x) = |\lambda| N^*(x)$.
   Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Alors pour tout $y \in S$,
   $$|\langle x_1 + x_2, y \rangle| = |\langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle| \leq |\langle x_1, y \rangle| + \langle x_2, y \rangle| \leq N^*(x_1) + N_*(x_2)$$
   L'inégalité étant valide pour tout $y \in S$, on en déduit que
   $$N^*(x_1 + x_2) = \sup_{y \in S} |\langle x_1 + x_2, y \rangle| \leq N^*(x_1) + N^*(x_2)$$
   On a donc bien prouvé que N^* était une norme.

3. Supposons d'abord que $N = \|\cdot\|_2$. Soit $x \in S$. Alors pour tout $y \in S$,
   $$|\langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \|y\|_2 = \|x\|_2$$
   puisque $y \in S$. Par conséquent $N^*(x) \leq \|x\|_2$. Par ailleurs, si x est non nul, $y = \dfrac{x}{\|x\|_2} \in S$ et $|\langle x, y \rangle| = \|x\|_2$ donc $N^*(x) \geq \|x\|_2$. Finalement, $N^*(x) = \|x\|_2$. Cette égalité est encore évidemment valide lorsque x est nul.
   Supposons maintenant que $N = \|\cdot\|_\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $y \in S$,
   $$|\langle x, y \rangle| = |\sum_{k=1}^n x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k y_k| = \sum_{k=1}^n |x_k||y_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|y\|_\infty = \|y\|_\infty \|x\|_1 = \|x\|_1$$

Cette inégalité étant valide pour tout $y \in S$, $N^*(x) \leq \|x\|_1$. On définit alors $y \in \mathbb{R}_n$ en posant $y_k = 1$ si $x_k \geq 0$ et $y_k = -1$ si $x_k < 0$. Il est évident que $y \in S$ et

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|x\|_1$$

On en déduit que $N^*(x) \geq \|x\|_1$. Finalement, $N^*(x) = \|x\|_1$.
Supposons enfin que $N = \|\cdot\|_1$. Alors pour tout $y \in S$,

$$|\langle x, y \rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| = \sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty |y_k| = \|x\|\infty\|\|y\|_1 = \|x\|\infty\|$$

Cette inégalité étant valide pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $N^*(x) \leq \|x\|_\infty$. Il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_j| = \|x\|_\infty$. On définit alors $y \in \mathbb{R}^n$ en posant $y_k = \delta_{k,j}$. On vérifie sans peine que $y \in S$ et

$$|\langle x, y \rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| = |x_j| = \|x\|_\infty$$

On en déduit que $N^*(x) \geq \|x\|_\infty$. Finalement, $N^*(x) = \|x\|_\infty$.

Solution 3

---

1. Pas de problème pour N_1 et N_2. Il suffit d'utiliser le fait que la valeur absolue est une norme. Pour simplifier, on peut même remarquer que $N_2(A) = N_1(A^\top)$.
N_3 est la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ i.e. $N_3(A)^2 = \operatorname{tr}(A^\top A)$.
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors $A^\top A$ est une matrice symétrique donc elle est diagonalisable. Soit x un vecteur propre associée à une valeur propre λ de $A^\top A$. Alors $x^\top A^\top A x = (Ax)^\top (AX) = \|Ax\|^2 \in \mathbb{R}_+$ et $x^\top A^\top A x = \lambda x^\top x = \lambda\|x\|^2$. Comme $\|x\|^2 \in \mathbb{R}_*^+$, $\lambda \geq 0$. Ainsi $\operatorname{Sp}(A^\top A) \subset \mathbb{R}_+$ donc $N_4(A)$ est bien définie.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$N_4(\mu A) = \sqrt{\max \operatorname{Sp}(\mu^2 A^\top A)} = \sqrt{\max \mu^2 \operatorname{Sp}(A^\top A)} = \sqrt{\mu^2 \max \operatorname{Sp}(A^\top A)} = |\mu|\sqrt{\max \operatorname{Sp}(A^\top A)} = |\mu| N_4(A)$$

donc N_4 est bien homogène.
Supposons que $N_4(A) = 0$. Alors $\max \operatorname{Sp}(A^\top A) = 0$. Mais comme $\operatorname{Sp}(A^\top A) \subset \mathbb{R}_+$, $\operatorname{Sp}(A^\top A) = \{0\}$. Comme $A^\top A$ est diagonalisable, $A^\top A = 0$. A fortiori, $N_3(A)^2 = \operatorname{tr}(A^\top A) = 0$ donc $A = 0$. Ainsi N_4 vérifie l'axiome de séparation.
Soit enfin $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$. Notons λ la plus grande valeur propre de $(A + B)^\top (A + B)$ et x un vecteur propre associé à cettte valeur propre. Alors $\|(A+B)x\|^2 = \lambda\|x\|^2$. Donc $\|(A+B)x\| = N_4(A+B)\|x\|$. Par ailleurs, $\|\cdot\|$ est une norme donc $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $A^\top A$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de $A^\top A$. Alors

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \qquad \text{et} \qquad A^\top A x = \sum_{i=1}^{p} x_i \lambda_i e_i$$

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$\|Ax\|^2 = x^\top A^\top A x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^2 \leq N_4(A)^2 \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = N_4(A)^2 \|x\|^2$$

Par conséquent, $\|Ax\| \leq N_4(A)\|x\|$. De la même manière, $\|Bx\| \leq N_4(B)\|x\|$ Finalement,

$$N_4(A + B)\|x\| \leq N_4(A)\|x\| + N_4(B)\|x\|$$

et donc $N_4(A + B) \leq N_4(A) + N_4(B)$ car $\|x\| > 0$.
N_4 est bien une norme.

2. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Pour simplifier, posons $\mathrm{S}_i(\mathrm{M}) = \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{M}_{i,j}|$ pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathrm{N}_1(\mathrm{M}) = \max_{1\leq i\leq n} \mathrm{S}_i(\mathrm{M})$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_i(\mathrm{AB}) &= \sum_{j=1}^{n} |(\mathrm{AB})_{i,j}| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{i,k}\mathrm{B}_{k,j}\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}||\mathrm{B}_{k,j}| && \text{par inégalité triangulaire} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}||\mathrm{B}_{k,j}| && \text{par permutation des sommes} \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{B}_{k,j}| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}|\mathrm{S}_k(\mathrm{B}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}\mathrm{N}_1(\mathrm{B}) \\
&= \mathrm{N}_1(\mathrm{B}) \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}| \\
&= \mathrm{N}_1(\mathrm{B})\mathrm{S}_i(\mathrm{A}) \leq \mathrm{N}_1(\mathrm{B})\mathrm{N}_1(\mathrm{A})
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\mathrm{N}_1(\mathrm{AB}) \leq \mathrm{N}_1(\mathrm{A})\mathrm{N}_1(\mathrm{B})$ donc N_1 est bien une norme d'algèbre.
On rappelle que $\mathrm{N}_2(\mathrm{M}) = \mathrm{N}_1(\mathrm{M}^\top)$. Ainsi

$$
\mathrm{N}_2(\mathrm{AB}) = \mathrm{N}_1((\mathrm{AB})^\top) = \mathrm{N}_1(\mathrm{B}^\top\mathrm{A}^\top) \leq \mathrm{N}_1(\mathrm{B}^\top)\mathrm{N}_1(\mathrm{A}^\top) = \mathrm{N}_2(\mathrm{A})\mathrm{N}_2(\mathrm{B})
$$

donc N_2 est également une norme d'algèbre.
Remarquons que

$$
\mathrm{N}_3(\mathrm{AB})^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{i,k}\mathrm{B}_{k,j}\right)^2
$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$
\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{i,k}\mathrm{B}_{k,j}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{k,j}^2\right)
$$

Pour clarifier, posons $\mathrm{S}_i = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{i,k}^2$ et $\mathrm{T}_j = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{k,j}^2$. Ainsi

$$
\mathrm{N}_3(\mathrm{AB})^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} \mathrm{S}_i\mathrm{T}_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{S}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{S}_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{k,j}^2\right) = \mathrm{N}_3(\mathrm{A})^2\mathrm{N}_3(\mathrm{B})^2
$$

Puis $\mathrm{N}_3(\mathrm{AB}) \leq \mathrm{N}_3(\mathrm{A})\mathrm{N}_3(\mathrm{B})$ donc N_3 est une norme d'algèbre.
Soit x un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $(\mathrm{AB})^\top(\mathrm{AB})$. On a alors $\|\mathrm{AB}x\| = \mathrm{N}_4(\mathrm{A})\|x\|$ (cf. précédemment). De plus, $\|\mathrm{AB}x\| \leq \mathrm{N}_4(\mathrm{A})\|\mathrm{B}x\| \leq \mathrm{N}_4(\mathrm{A})\mathrm{N}_4(\mathrm{B})\|x\|$ (cf. précédemment). Comme $\|x\| > 0$, $\mathrm{N}_4(\mathrm{AB}) \leq \mathrm{N}_4(\mathrm{A})\mathrm{N}_4(\mathrm{B})$ donc N_4 est également une norme d'algèbre.

Solution 4

1. Par inégalité triangulaire

$$
\begin{aligned}
2\|x\| &= \|(x+y)+(x-y)\| \leq \|x+y\| + \|x-y\| \\
2\|y\| &= \|(x+y)+(y-x)\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|
\end{aligned}
$$

En additionnant
$$\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\| \leq 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

2. Prenons $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme uniforme. Posons $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$. Alors
$$\|x\| = \|y\| = \|x+y\| = \|x-y\| = 1$$
L'inégalité de la question précédente est donc bien une égalité dans ce cas.

3. Remarquons que
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$
donc
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
Mais d'une part
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\max\left\{\|x+y\|^2, \|x-y\|^2\right\} = 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}^2$$
et d'autre part
$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 + (\|x\| - \|y\|)^2 \geq (\|x\| + \|y\|)^2$$
Par conséquent,
$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}^2$$
puis
$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$
La constante $\sqrt{2}$ ne peut être améliorée car si on prend x et y orthogonaux et de même norme n, alors
$$\|x\| + \|y\| = 2n$$
et, d'après le théorème de Pythagore,
$$\|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2n^2$$
donc
$$\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = n\sqrt{2}$$
de sorte que l'inégalité est bien une égalité dans ce cas.

Solution 5

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
Comme les $|x_i|$ sont positifs, il est clair que $N_\infty(x) \leq N_1(x)$. L'égalité est atteinte pour $x = (1, 0, \dots, 0)$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \leq N_\infty(x)$ donc $N_1(x) \leq nN_\infty(x)$. L'égalité est atteinte pour $x = (1, \dots, 1)$.
Comme les $|x_i|^2$ sont positis, il est clair que $N_\infty(x)^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ puis $N_\infty(x) \leq N_2(x)$. L'égalité est atteinte pour $x = (1, 0, \dots, 0)$.
A nouveau, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i|^2 \leq N_\infty(x)^2$ puis $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq nN_\infty(x)^2$ puis $N_2(x) \leq \sqrt{n}N_\infty(x)$.
Comme les $|x_i||x_j|$ sont positifs
$$N_1(x)^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i||x_j| \geq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = N_2(x)^2$$
donc $N_2(x) \leq N_1(x)$. L'égalité est atteinte pour $x = (1, 0, \dots, 0)$.
Par inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1}\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{n}N_2(x)$$
L'égalité est atteinte pour $x = (1, \dots, 1)$.

Solution 6

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ soit libre. L'inégalité triangulaire et l'homogénéité découle quasi directement que $\|\cdot\|$ est une norme. Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifie $\mathrm{N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ par séparation de la norme $\|\cdot\|$. Comme $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.
Réciproquement, supposons que N soit une norme. Si on se donne $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}}$, alors $\mathrm{N}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \|0_{\mathrm{E}}\| = 0$ et donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ par séparation de la norme N. Ceci prouve que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Solution 7

Il est clair que si $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2$, alosr $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2$.
Réciproquement supposons $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Si $x = 0_{\mathrm{E}}$, alors $\mathrm{N}_1(x) = \mathrm{N}_2(x) = 0$. Supposons donc $x \neq 0_{\mathrm{E}}$. Alors $x/\mathrm{N}_1(x) \in \mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2$ donc $\mathrm{N}_2(x/\mathrm{N}_1(x)) \leq 1$ puis $\mathrm{N}_2(x)/\mathrm{N}_1(x) \leq 1$ par homogénéité de la norme N_2 et enfin $\mathrm{N}_2(x) \leq \mathrm{N}_1(x)$. En échangeant les rôles de N_1 et N_2 ainsi que de B_1 et B_2, on obtient $\mathrm{N}_1(x) \leq \mathrm{N}_2(x)$. Ainsi $\mathrm{N}_1(x) = \mathrm{N}_2(x)$.

Solution 8

Comme f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$,

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}_+} |f_n| = \sup_{\mathbb{R}_+} f_n$$

On étudie f_n sur $\mathbb{R}_+$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = e^{-nx}(1 - nx)$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$	0

Ainsi $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{ne}$.

Solution 9

Remarquons que $|f_n|$ est π-périodique et paire. Ainsi

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \sup_{[0,\pi/2]} |f_n| = \sup_{[0,\pi/2]} f_n$$

car f_n est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
f_n est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f_n'(x) = \sin^{n-1}(x)(n\cos^2(x) - \sin^2(x)) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1)$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$	$\searrow$	0

Ainsi

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$$

On rappelle que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc

$$\|f_n\|_\infty = \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\left(\sqrt{n}\right)^n}{\left(\sqrt{n+1}\right)^{n+1}}$$

Solution 10

---

1. Soit $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Par concavité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\ln\left(\frac{u^p}{p}+\frac{u^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(u^q)$$

c'est-à-dire,

$$\ln\left(\frac{u^p}{p}+\frac{u^q}{q}\right) \geq \ln(uv)$$

Ainsi par croissance de la fonction exponentielle,

$$uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{u^q}{q}$$

2. Posons pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$$x_k' = \frac{x_k}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p}} \qquad \text{et} \qquad y_k' = \frac{y_k}{\left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{1/q}}$$

D'après l'inégalité de Young, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$x_k' y_k' \leq \frac{x_k'^p}{p} + \frac{y_k'^q}{q}$$

En additionnant ces n inégalités membre à membre, on obtient,

$$\sum_{k=1}^n x_k' y_k' \leq \mathrm{A} + \mathrm{B}$$

où

$$\mathrm{A} = \frac{1}{p}\frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{\sum_{k=1}^n x_k^p} = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{q}\frac{\sum_{k=1}^n y_k^q}{\sum_{k=1}^n y_k^q} = \frac{1}{q}$$

On a donc,

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{1/q}$$

3. On remarque que, pour tout entier naturel $k \in [\![1, n]\!]$,

$$(x_k + y_k)^p = x_k(x_k + y_k)^{p-1} + y_k(x_k + y_k)^{p-1}$$

Par application de l'inégalité de Hölder à $p > 1$ et $q = \dfrac{p}{p-1} > 0$ (on a bien $1/p + 1/q = 1$), on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

puis une seconde fois,

$$\sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

et donc, en sommant ces deux inégalités,

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

En divisant l'inégalité de ci-dessus par

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} > 0$$

on obtient donc,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Convexité

Solution 11

Notons $\mathcal{E}$ l'épigraphe de f. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $\mathcal{E}$ et $t \in [0, 1]$. Posons $(x, y) = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$. Comme f est convexe, $f(x) = f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Puisque (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dans $\mathcal{E}$, $f(x_1) \leq y_1$ et $f(x_2) \leq y_2$. On en déduit $f(x) \leq (1-t)y_1 + ty_2 = y$. Ainsi $(x, y) \in \mathcal{E}$. Ainsi $\mathcal{E}$ est convexe.

Solution 12

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in f(\mathrm{C})^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Il existe $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathrm{C}^2$ tel que $\mathrm{A} = f(\mathrm{M})$ et $\mathrm{B} = f(\mathrm{N})$. Alors

$$(1-\lambda)\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B} = (1-\lambda)f(\mathrm{M}) + \lambda f(\mathrm{N}) = f((1-\lambda)\mathrm{M} + \lambda\mathrm{N})$$

Or C est convexe donc $(1-\lambda)\mathrm{M} + \lambda\mathrm{N} \in \mathrm{C}$ puis $(1-\lambda)\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B} \in f(\mathrm{C})$. On en déduit que $f(\mathrm{C})$ est convexe.

Solution 13

Soit $(\mathrm{M}, \mathrm{N}, \lambda) \in \mathcal{S}^2 \times [0, 1]$. Posons $\mathrm{P} = (1-\lambda)\mathrm{M} + \lambda\mathrm{N}$. Comme $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$, $\mathrm{P}_{i,j} = (1-\lambda)\mathrm{M}_{i,j} + \lambda\mathrm{N}_{i,j} \geq 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{p} \mathrm{P}_{i,j} = (1-\lambda)\sum_{j=1}^{p} \mathrm{M}_{i,j} + \lambda\sum_{j=1}^{p} \mathrm{N}_{i,j} = (1-\lambda) + \lambda = 1$$

Ainsi $\mathrm{P} \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est convexe.

Distance

Solution 14

Remarquons que $0 \in \mathrm{F}$ et $\|u-0\|_\infty = \|u\|_\infty = 1$. Ainsi $d(u, \mathrm{F}) \leq 1$.
Soit $x \in \mathrm{F}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u-x\|_\infty \geq |u_{2n} - x_{2n} = |1 - x_{2n}| \qquad \text{et} \qquad \|u-x\|_\infty \geq |u_{2n+1} - x_{2n+1} = |1 + x_{2n+1}|$$

En passant à la limite et en notant ℓ la limite de x,

$$\|u-x\|_\infty \geq |1-\ell| \qquad \text{et} \qquad \|u-x\|_\infty \geq |1+\ell|$$

En additionnant ces deux inégalités,

$$2|u-x\|_\infty \geq |1-\ell| + |1+\ell| \geq |(1-\ell)+(1+\ell)| = 2$$

puis $\|u-x\|_\infty \geq 1$. Ainsi $d(u, \mathrm{F}) \geq 1$. Finalement, $d(u, \mathrm{F}) = 1$.

Solution 15

Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Rappelons que $d(x, \mathrm{A}) = \inf\limits_{a \in \mathrm{A}} \|x-a\|$ et $d(y, \mathrm{A}) = \inf\limits_{a \in \mathrm{A}} \|y-a\|$.
Soit $a \in \mathrm{A}$. Alors $d(x, \mathrm{A}) \leq \|x-a\|$. Or, par inégalité triangulaire

$$\|x-a\| = \|(x-y)+(y-a)\| \leq \|x-y\| + \|y-a\| = d(x,y) + \|y-a\|$$

On en déduit que

$$d(x, \mathrm{A}) - d(x,y) \leq \|y-a\|$$

Comme $d(y, \mathrm{A}) = \inf\limits_{a \in \mathrm{A}} \|x-a\|$, on en déduit que

$$d(x, \mathrm{A}) - d(x,y) \leq d(y, \mathrm{A})$$

ou encore

$$d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A}) \leq d(x,y)$$

En échangeant les rôles de x et y on a également

$$d(y, \mathrm{A}) - d(x, \mathrm{A}) \leq d(y,x)$$

d'où le résultat attendu.

Equivalence de normes

Solution 16

1. N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

   Séparation Soit $f \in \mathrm{E}$ telle que $\mathrm{N}(f) = 0$. Alors $\|f\|_\infty = \|f'\|_\infty = 0$. Comme $\|.\|_\infty$ est une norme, on a notamment $f = 0$.

   Homogénéité Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$,

   $$\mathrm{N}(\lambda f) = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty + |\lambda|\|f'\|_\infty = |\lambda|\mathrm{N}(f)$$

   car $\|.\|_\infty$ est une norme.

   Inégalité triangulaire Pour $f, g \in \mathrm{E}$,

   $$\mathrm{N}(f+g) = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \mathrm{N}(f) + \mathrm{N}(g)$$

   Ainsi N est bien une norme.
   Posons $e_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\| = 1$ tandis que $\mathrm{N}(e_n) = 1 + n$. Puisque $\mathrm{N}(e_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, N et $\|.\|_\infty$ ne peuvent être équivalentes.

2. N′ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Séparation Soit $f \in \mathrm{E}$ telle que $\mathrm{N}'(f) = 0$. Alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$. Ainsi f est constante (car $f' = 0$) et cette constante est nulle (car $f(0) = 0$).

Homogénéité Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$,

$$\mathrm{N}'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda||f(0)| + |\lambda|\|f'\|_\infty = |\lambda|\mathrm{N}'(f)$$

car $\|.\|_\infty$ est une norme.

Inégalité triangulaire Pour $f, g \in \mathrm{E}$,

$$\mathrm{N}'(f+g) = |f(0)+g(0)| + \|f'+g'\|_\infty \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \mathrm{N}'(f) + \mathrm{N}'(g)$$

Ainsi N′ est bien une norme.

Puisque $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\mathrm{N}' \leq \mathrm{N}$. Soit $f \in \mathrm{E}$. Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$. Par inégalité triangulaire

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Par inégalité de continuité

$$\left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq x\|f'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

puis $\|f\|_\infty \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Finalement

$$\mathrm{N}(f) \leq |f(0)| + 2\|f'\|_\infty \leq 2|f(0)| + 2\|f'\|_\infty = 2\mathrm{N}'(f)$$

On a donc $\mathrm{N}' \leq \mathrm{N} \leq 2\mathrm{N}'$, ce qui signifie que N est équivalente à N′.

Solution 17

L'espace normé en question doit nécessairement être de dimension infinie. Considérons par exemple $\mathrm{E} = c\mathcal{C}([0,1])$. Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$. On sait que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont des normes sur E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} n - n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$. On vérfie que $\|f_n\|_\infty = n$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ ne peuvent être équivalentes.

Solution 18

1. Pour tout $f \in \mathrm{E}$,

$$\|f\|_2^2 = \int_{[0,1]} f^2 \leq \int_{[0,1]} \|f\|_\infty^2 = \|f\|_\infty^2$$

Par conséquent, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

2. Les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ induisent des normes sur V. Comme V est de dimension finie, ces normes sont équivalentes et on en déduit l'inégalité demandée.

3. On peut munir V du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_{[0,1]} fg$. On se donne une famille libre de V à p éléments. On peut alors l'orthonormaliser en une famille $(f_1, \dots, f_p)$. Soit $x \in [0,1]$. Alors pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x)\right)^2 \leq \|\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i\|_\infty^2 \leq n^2 \|\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i\|_2^2$$

Or la famille $(f_1, \dots, f_p)$ étant orthonormale, $\|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2$. L'astuce consiste à prendre maintenant $\lambda_i = f_i(x)$ pour $1 \leq i \leq p$. On obtient alors

$$\left(\sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2\right)^2 \leq n^2 \sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2 \leq n^2$$

Il suffit alors d'intégrer entre 0 et 1 pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{p} \|f_i\|^2 \leq n^2$$

La famille $(f_1, \dots, f_p)$ étant normée, on aboutit à $p \leq n^2$, ce qui prouve que V est nécessairement de dimension finie et que $\dim \mathrm{V} \leq n^2$.

Solution 19

---

1. N_∞ est la norme de la convergence uniforme. On en déduit sans peine que N et N_1 sont également des normes.

2. Posons $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. On a clairement $\mathrm{N}_\infty(f_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant, $\mathrm{N}(f_n) = \mathrm{N}_1(f_n) = n^2 - n + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc N_∞ n'est équivalente ni à N ni à N_1.

3. Soit $x \in [0,1]$. Par intégration par parties

$$\int_0^x \sin(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(x-t)f'(t)]_0^x + \int_0^x \cos(x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $f \in \mathrm{E}$, $f'(0) = 0$ de sorte que le crochet est nul. Par une seconde intégration par parties,

$$\int_0^x \sin(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = [\cos(x-t)f(t)]_0^x - \int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Finalement

$$\int_0^x \sin(x-t)(f(t)+f''(t))\,\mathrm{d}t = [\cos(x-t)f(t)]_0^x = f(x) - f(0)\cos x = f(x)$$

car $f(0) = 0$ puisque $f \in \mathrm{E}$.

4. On a clairement $\mathrm{N} \leq \mathrm{N}_1$.
Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathrm{E}$

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)(f(t)+f''(t))\,\mathrm{d}t$$

puis

$$|f(x)| \leq \int_0^x |\sin(x-t)||f(t)+f''(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \mathrm{N}(f) = x\mathrm{N}(f) \leq \mathrm{N}(f)$$

Par conséquent $\mathrm{N}_\infty(f) \leq \mathrm{N}(f)$. Par ailleurs,

$$\mathrm{N}_\infty(f'') = \mathrm{N}_\infty(f''+f-f) \leq \mathrm{N}(f) + \mathrm{N}_\infty(f)$$

puis $\mathrm{N}_\infty(f'') - \mathrm{N}_\infty(f) \leq \mathrm{N}(f)$. Finalement

$$\mathrm{N}_1(f) = \mathrm{N}_\infty(f'') - \mathrm{N}_\infty(f) + 2\mathrm{N}_\infty(f) \leq 3\mathrm{N}(f)$$

Ainsi $\mathrm{N} \leq \mathrm{N}_1 \leq 3\mathrm{N}$ donc N et N_1 sont équivalentes.

Solution 20

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$.
Pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)| \leq \mathrm{N}_\infty(f)$. Par croissance de l'intégrale, $\mathrm{N}_1(f) \leq (b-a)\mathrm{N}_\infty(f)$. L'égalité est atteinte pour f constante égale à 1.
Pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)|^2 \leq \mathrm{N}_\infty(f)^2$ puis, par croissance de l'intégrale, $\mathrm{N}_2(f)^2 \leq (b-a)\mathrm{N}_\infty(f)^2$ puis $\mathrm{N}_2(f) \leq \sqrt{b-a}\mathrm{N}_\infty(f)$. L'égalité est atteinte pour f constante égale à 1. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\mathrm{N}_1(f) = \int_a^b 1 \cdot |f(t)| \,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_a^b \mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t} = \sqrt{b-a}\mathrm{N}_2(f)$$
L'égalité est atteinte pour f constante égale à 1.

2. Posons $f_n : t \mapsto (t-a)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$\mathrm{N}_1(f_n) = \frac{(b-a)^n}{n+1} \qquad \mathrm{N}_2(f_n) = \frac{\sqrt{b-a}(b-a)^n}{\sqrt{2n+1}} \qquad \mathrm{N}_\infty(f_n) = (b-a)^n$$
Alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{N}_1(f_n)}{\mathrm{N}_2(f_n)} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{N}_1(f_n)}{\mathrm{N}_\infty(f_n)} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{N}_2(f_n)}{\mathrm{N}_\infty(f_n)} = 0$$
Donc ces trois normes ne sont pas équivalentes.

Solution 21

Il faut déjà que A soit bornée pour que la borne supérieure définissant $\mathrm{N}_\mathrm{A}(\mathrm{P})$ soit définie pour tout polynôme P. Une autre condition nécessaire est également que A soit infini. Si ce n'est pas le cas, il suffit de considérer $\mathrm{P} = \prod_{a\in\mathrm{A}}(\mathrm{X}-a)$. Il est clair que $\mathrm{N}_\mathrm{A}(\mathrm{P}) = 0$ mais que P n'est pas nul. Si A est infinie et bornée, on vérifie aisément que N_A est une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Solution 22

1. Sachant que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On prouve sans difficulté que N_1 et N_2 sont des normes sur E. Détaillons seulement l'axiome de séparation pour la norme N_2. Soit donc $f \in \mathrm{E}$ telle que $\mathrm{N}_2(f) = 0$. Comme une somme de termes positifs ne peut être nulle que si chacun des termes est nul, on en déduit que $f(0) = \|f'\|_1 = 0$. Comme $\|\cdot\|_1$ est une norme, f' est nulle sur $[0,1]$ i.e. f est constante sur $[0,1]$. Comme $f(0) = 0$, f est nulle sur $[0,1]$.

2. Soit $f \in \mathrm{E}$. Remarquons que
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) \,\mathrm{d}t$$
Par inégalité triangulaire,
$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leq |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t) \,\mathrm{d}t\right| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| \,\mathrm{d}t \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \,\mathrm{d}t = \mathrm{N}_2(f)$$
Ainsi
$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \mathrm{N}_2(f) \,\mathrm{d}t = \mathrm{N}_2(f)$$
puis
$$\mathrm{N}_1(f) = \|f\|_1 + \|f'\|_1 \leq \mathrm{N}_2(f) + \|f'\|_1 \leq 2\mathrm{N}_2(f)$$
De même,
$$\forall x \in [0,1],\ f(0) = f(x) - \int_0^x f'(t) \,\mathrm{d}t$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in [0,1],\ |f(0)| \leq |f(x)| + \left|\int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq |f(x)| + \int_0^x |f'(t)|\ \mathrm{d}t \leq |f(x)| + \int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t = |f(x)| + \|f'\|_1$$

Par croissance de l'intégrale,

$$|f(0)| = \int_0^1 |f(0)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f(x)|\ \mathrm{d}x + \int_0^1 |f'|_1\ \mathrm{d}x = \|f\|_1 + \|f'\|_1$$

Enfin,

$$\mathrm{N}_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_1 \leq \|f\|_1 + 2\|f'\|_1 \leq 2\mathrm{N}_1(f)$$

Les normes N_1 et N_2 sont bien équivalentes.

Solution 23

---

1. Si PQ est nul, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et alors $\sum u_n$ converge.
Sinon, en notant d le degré de PQ, $\mathrm{PQ}(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n^d)$. Comme (a_n) est bornée, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n^d/2^n)$. Par croissances comparées, on peut par exemple affirmer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont évidentes (à faire néanmoins). Si l'on se donne $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle = 0$, alors $\mathrm{P}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car une somme de termes positifs ne peut être nulle que si chacun des termes est nul. Ainsi P possède une infinité de racines : il est nul.

3. Tout d'abord, la symétrie, la bilinéarité et la positivité restent conservées même si les a_n sont positifs ou nul.
On va montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit encore un produit scalaire si et seulement si il existe une infinité d'entiers n tels que $a_n > 0$.
Si c'est le cas, un polynôme P vérifiant $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle = 0$ s'annule encore en tous les entiers n tels que $a_n > 0$. Il possède donc encore une infinité de racines et il est nul.
Si ce n'est pas le cas, notons A l'ensemble fini des entiers n tels que $a_n > 0$. Posons alors $\mathrm{P} = \prod_{n\in\mathrm{A}} (\mathrm{X} - n)$. On vérifie alors que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle = 0$ mais P n'est pas nul.

4. Posons $\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\mathrm{N}_2(\mathrm{P}_k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{N}_1(\mathrm{P}_k)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{2k}}{2^n} \geq \frac{2^{2k}}{2^2}$$

car une somme de termes positifs est supérieure à chacun de ses termes (ici le terme d'indice $n = 2$). Ainsi $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}_k) \geq 2^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis $\frac{\mathrm{N}_1(\mathrm{P}_k)}{\mathrm{N}_2(\mathrm{P}_k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ de sorte que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Suites

Solution 24

---

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$. Alors $u(x) = x$ et il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $x = a - u(a)$. On a alors

$$nx = \sum_{k=0}^{n-1} x = \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k(a) - u^{k+1}(a) = a - u^n(a)$$

Ainsi $x = \frac{1}{n}(a - u^n(a))$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|x\| &\leq \frac{1}{n}\left(\|a\| + \|u^n(a)\|\right)\\ &\leq \frac{2\|a\|}{n}\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\|x\| = 0$ et donc $x = 0_E$.
On conclut grâce au théorème du rang.

2. D'après la question précédente, il existe $y \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)$ et $a \in E$ tel que $x = y + a - u(a)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = y + u^k(a) - u^{k+1}(a)$. Par télescopage, $x_n = y + \frac{1}{n}(a - u^n(a))$. En raisonnant comme à la question précédente, on montre que $\|x_n - y\| \leq \frac{2\|a\|}{n}$. Ceci montre que (x_n) converge vers y qui est justement la projection de x sur $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - u)$ parallélement à $\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u)$.

Solution 25

Notons L la limite de la suite (A^n). La suite (A^{2n}) étant une suite extraite de la suite (A^n), elle converge vers L. Mais par continuité de l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^2$, la suite (A^{2n}) converge vers L^2. Par unicité de la limité, $L = L^2$ et donc L est une matrice de projecteur.

Solution 26

---

1. **a.** Supposons que la suite (x_n) converge faiblement vers x et x'. Soit $y \in E$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x', y\rangle = 0$. Par différence, $\langle x' - x, y\rangle = 0$. Ainsi $x' - x \in E^\perp = \{0_E\}$ et $x = x'$.

b. Supposons que (x_n) converge fortement vers x. Soit $y \in E$. Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\|\|y\|$$

On en défuit immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$. Ainsi (x_n) converge faiblement vers x.

2. Supposons que (x_n) converge fortement vers x. Alors, d'après la question précédente, (x_n) converge faiblement vers x. De plus, par inégalité triangulaire,

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
Supposons maintenant que (x_n) converge faiblement vers x et $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Remarquons que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2$. De plus, (x_n) converge faiblement vers x $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, x\rangle = 0$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, x\rangle = \|x\|^2$. Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|^2 = 0$$

ce qui prouve que (x_n) converge fortement vers x.

3. Supposons que E soit de dimension finie.
Soit donc une suite (x_n) convergeant faiblement vers x. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Par convergence faible, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, e_i\rangle = 0$. De plus, la base $(e_1, \dots, e_n)$ étant orthonormée, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x_n - x, e_i\rangle^2$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|^2 = 0$$

ou encore $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$.

4. Considérons $E = \mathbb{R}[X]$, que l'on munit de sa norme usuelle (somme des produits des coefficients), c'est-à-dire

$$(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \cdot \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$$

On considère alors la suite (X^n). Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle X^n, P\rangle = 0$ dès lors que $n > \deg P$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \langle X^n, P\rangle = 0$, ce qui permet d'affirmer que (X^n) converge faiblement vers 0. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|X^n\| = 1$ donc la suite (X^n) ne peut converger fortement vers 0.

Solution 27

1. Soient a et b deux valeurs d'adhérence de (u_n) ($a < b$). Donnons-nous $c \in]a, b[$ et montrons que c est également une valeur d'adhérence de (u_n).
   Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$.

   - Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$, il existe un entier $N_0 \geq N$ tel que pour tout entier $n \geq N_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.
   - Comme a est valeur d'adhérence, il existe un entier $N_1 \geq N_0$ tel que $u_{N_1} < c$.
   - Comme b est valeur d'adhérence, il existe un entier $N_2 \geq N_1$ tel que $u_{N_2} > c$.

   L'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ N_1 \leq n \leq N_2, u_n < c\}$ est une partie non vide (il contient N_1) et majorée (par N_2) de $\mathbb{N}$. Il admet donc un plus grand élément M. Notamment, $u_M < c \leq u_{M+1}$ i.e. $0 < c - u_M \leq u_{M+1} - u_M$. Mais comme $M \geq N_1 \geq N_0$, $|u_{M+1} - u_M| \leq \varepsilon$. On en déduit que $0 < c - u_M \leq \varepsilon$ et a fortiori $|u_M - c| \leq \varepsilon$ avec $M \geq N$. Ceci prouve que c est également une valeur d'adhérence de (u_n).
   L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est donc bien un intervalle.

2. Il est évident que si (u_n) converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et montrons que (u_n) converge. Comme (u_n) est bornée, il suffit de montrer qu'elle admet une unique valeur d'adhérence.
   Remarquons déjà que toute valeur d'adhérence est un point fixe de f. En effet, si ℓ est une valeur d'adhérence, il existe une suite extaite $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers ℓ. Mais alors la suite de terme général $f(u_{\varphi(n)}) - u_{\varphi(n)} = u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)}$ converge vers $f(\ell) - \ell$ par continuité de f et vers 0 par hypothèse de l'énoncé. Ainsi $f(\ell) = \ell$.
   Supposons que (u_n) admette deux valeurs d'adhérence c et d ($c < d$). Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \in [c, d]$. Si ce n'était pas le cas la suite (u_n) serait à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus [c, d]$ et aucun réel de $]c, d[$ ne pourrait alors être valeur d'adhérence, ce qui contredirait le fait que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle. Comme $u_p \in [c, d]$ et que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle, u_p est lui-même une valeur d'adhérence et donc un point fixe. La suite (u_n) est donc stationnaire à partir du rang p et a fortiori convergente, ce qui contredit l'existence de deux valeurs d'adhérence.
   En conclusion, la suite (u_n) est bornée et admet une unique valeur d'adhérence : elle converge.

Solution 28

Notons L la limite de la suite (A^n). Alors la suite $((A^n)^\top)$ converge vers $L^\top$ (on peut arguer du fait que la transposition est continue en tant qu'endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (A^n)^\top = (A^\top)^n = (-A)^n = (-1)^n A^n$$

La suite $((A^{2n})^\top)$ converge donc vers L et la suite $((A^{2n+1})^\top)$ vers $-L$ car (A^{2n}) et (A^{2n+1}) sont des suites extraites de (A^n). Mais comme $((A^{2n})^\top)$ et $((A^{2n+1})^\top)$ sont elles-mêmes sdes suites extraites de $((A^n)^\top)$, on en déduit que $L^\top = L = -L$ et donc $L = 0$.

Solution 29

On note $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice de rotation d'angle θ. On rappelle que

$$\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2,\ R(\theta + \varphi) = R(\theta)R(\varphi)$$

Posons $d_n = \det(A_n) = 1 + \frac{a^2}{n^2}$. Alors $A_n/\sqrt{d_n} \in SO(2)$ donc il existe $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que $A_n = \sqrt{d_n}R(\theta_n)$. Par ailleurs, $\cos\theta_n = \frac{1}{\sqrt{d_n}} > 0$ donc $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or $\tan\theta_n = \frac{a}{n}$ donc $\theta_n = \arctan\frac{a}{n}$.
De plus,

$$A_n^n = d_n^{n/2} R(\theta_n)^n = d_n^{n/2} R(n\theta_n)$$

Comme $\arctan x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\theta_n = a$. L'application R est continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R(n\theta_n) = R(a)$. Enfin,

$$d_n^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)\right)$$

Mais comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right) = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} d_n^{n/2} = 1$. Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n^n = \mathrm{R}(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

Solution 30

1. M_{2n} est le milieu de $[\mathrm{BM}_{2n-1}]$ et M_{2n+1} est le milieu de $[\mathrm{AM}_{2n}]$.

2. D'après ce qui précède , pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{2n+2} = \frac{1}{2}(z_{2n+1} - i) \qquad \text{et} \qquad z_{2n+1} = \frac{1}{2}(z_{2n} + i)$$

Aini

$$z_{2n+2} = \frac{1}{4}z_{2n} - \frac{i}{4} \qquad \text{et} \qquad z_{2n+3} = \frac{1}{4}z_{2n+1} + \frac{i}{4}$$

Les suites $(z_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont arithméticogéométriques.

3. L'unique solution de

$$z = \frac{z}{4} - \frac{i}{4}$$

est $-\frac{i}{3}$. On vérifie que la suite $\left(z_{2n} + \frac{i}{3}\right)$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$. La suite $(z_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $-\frac{i}{3}$.
L'unique solution de

$$z = \frac{z}{4} + \frac{i}{4}$$

est $\frac{i}{3}$. On vérifie que la suite $\left(z_{2n+1} - \frac{i}{3}\right)$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$. La suite $(z_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\frac{i}{3}$.

Les suites de points correspondantes $(\mathrm{M}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{M}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc vers les images respectives de $-\frac{i}{3}$ et $\frac{i}{3}$. La suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas convergente.

4. La suite $(\mathrm{M}_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas car les suites $(\mathrm{M}_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{M}_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont extraites de $(\mathrm{M}_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ mais aussi (et respectivement !) de $(\mathrm{M}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{M}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, et convergent donc vers des limites différentes.

Solution 31

1. **a.** Comme $|z_n| \in \mathbb{R}$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$. On en déduit que (y_n) converge vers 0.

   b. Par inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|z_{n+1}| \leq \frac{|\operatorname{Re}(z_n)| + |z_n|}{2} \leq |z_n|$$

   puisque pour tout complexe z, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.

   c. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Re}(z_{n+1}) = \frac{\operatorname{Re}(z_n) + |z_n|}{2} \geq \operatorname{Re}(z_n)$$

   puisque pour tout complexe z, $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$. Ainsi (x_n) est croissante.

   d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}(z_n) \leq |z_n| \leq |z_0|$ par décroissance de $(|z_n|)$. Ainsi (x_n) est croissante et majorée ; elle converge.

   e. Comme (x_n) et (y_n) convergent, (z_n) converge. Puisque (y_n) converge vers 0, la limite de (z_n) est réelle.

   f. Si $z_0 \in \mathbb{R}_+$, on montre par récurrence que $z_n = z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (z_n) converge vers z_0.
   Si $z_0 \in \mathbb{R}_-$, alors $z_1 = 0$ et on montre par récurrence que $z_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Donc (z_n) converge vers 0.

2. **a.** En appliquant la méthode de l'arc-moitié, on a :

$$z_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2} e^{i\frac{\theta_n}{2}}$$

Puisque $\theta_n \in]-\pi, \pi]$, $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $r_n \cos\frac{\theta_n}{2} \geq 0$. On en déduit que $r_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2}$.
Comme $\frac{\theta_n}{2} \in]-\pi, \pi]$, $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

b. On en déduit immédiatement que (θ_n) converge vers 0.

c. Comme $\alpha \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $\frac{\alpha}{2^k} \not\equiv 0[\pi]$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On utilise alors l'indication de l'énoncé :

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^k}}$$

Par télescopage, on a $S_n = \dfrac{\sin\alpha}{2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}}$.
Comme $\frac{\alpha}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\sin\frac{\alpha}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{2^n}$. Par conséquent, $2^n \sin\frac{\alpha}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ puis $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

d. Par une récurrence facile, $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$. On montre aussi facilement que pour $n \geq 1$:

$$r_n = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos\frac{\theta_k}{2} = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos\frac{\theta_0}{2^{k+1}} = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta_0}{2^k}$$

Si $\theta_0 = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}_+$ et on a vu que (z_n) est constante égale à z_0. Ainsi (z_n) converge vers z_0.
Si $\theta_0 = \pi$, $z_0 \in \mathbb{R}_-$ et on a vu que (z_n) est nulle à partir du rang 1. Ainsi (z_n) converge vers 0.
Si $\theta_0 \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, la question précédente montre que (r_n) converge vers $r_0\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$. Comme (θ_n) converge vers 0, (z_n) converge également vers $r_0\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$.

Suites extraites

Solution 32

Posons $u_n = \{\sqrt{n}\}$. Alors $u_{n^2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $n - 1 \leq \sqrt{n^2 - 1} < n$ pour $n \geq 1$ donc $\{\sqrt{n^2-1}\} = n$. Enfin

$$\{\sqrt{n^2-1}\} = \sqrt{n^2-1} - (n-1) = 1 + \sqrt{n^2-1} - n = 1 - \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}}$$

Les suites $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2-1})_{n\geq1}$ sont des suites extraites de la suite (u_n) de limites respectives 0 et 1. La suite (u_n) n'admet donc pas de limite.

Solution 33

Première méthode
Supposons qu'une des suites ne soit pas majorée – la suite (a_n) pour fixer les idées. Alors on peut extraire une suite $(a_{\varphi(n)})$ qui diverge vers $+\infty$. Puisque $e^{a_{\varphi(n)}} + e^{b_{\varphi(n)}} + e^{c_{\varphi(n)}} \geq e^{a_{\varphi(n)}}$, $e^{a_{\varphi(n)}} + e^{b_{\varphi(n)}} + e^{c_{\varphi(n)}}$ tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n}$ tend vers 3.
Supposons maintenant qu'une des suites ne soit pas minorée – la suite (a_n) pour fixer les idées. Alors on peut extraire une suite $(a_{\varphi(n)})$ qui diverge vers $-\infty$. Les deux autres suites ne peuvent pas être majorées sinon $a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)} + c_{\varphi(n)}$ tendrait vers $-\infty$. Ainsi une des suites n'est pas majorée et on est ramené au cas précédent dont on a vu qu'il était impossible.
Par conséquent, les trois suites sont bornées.
La suite (a_n) est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe donc une suite extraite $(a_{\varphi_1(n)})$ convergente. La suite $(b_{\varphi_1(n)})$ est également bornée donc il existe une suite extraite $(b_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})$ convergente. Enfin, la suite $(c_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})$ est bornée donc il existe une suite extraite $(c_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3(n)})$ convergente. Pour simplifier les notations, posons $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3$. Ainsi les suites $(a_{\varphi(n)}), (b_{\varphi(n)}), (c_{\varphi(n)})$ convergent. Notons a, b, c leurs limites. On a donc $a + b + c = 0$ et $e^a + e^b + e^c = 3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq 1 + x$ avec inégalité stricte lorsque $x \neq 0$. Supposons que l'un des réels a, b, c soit non nul – a pour fixer les idées. Alors $e^a > 1 + a$, $e^b \geq 1 + b$ et $e^c \geq 1 + c$ donc

$e^a + e^b + e^c > 3 + a + b + c$ i.e. $3 > 3$ ce qui est absurde. Ainsi $a = b = c = 0$.
Ce qui précède montre que 0 est la seule valeur d'adhérence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$. Il est classique de montrer que 0 est la limite de ces trois suites.
Seconde méthode
Posons $f(x) = e^x - 1 - x$. On montre facilement que f est positive et ne s'annule qu'en 0. D'après l'énoncé $u_n = f(a_n) + f(b_n) + f(c_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. De plus, $0 \leq f(a_n) \leq u_n$ donc, par encadrement, $(f(a_n))$ converge vers 0. La représentation graphique de f montre bien que (a_n) doit converger vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $m = \min(f(\varepsilon), f(-\varepsilon))$. Il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq \mathrm{N}$, $|f(a_n)| < m$. Les variations de f montrent alors que pour $n \geq \mathrm{N}$, $|a_n| < \varepsilon$. Ainsi (a_n) converge vers 0. On raisonne de la même manière pour (b_n) et (c_n).

Solution 34

---

1. Il suffit par exemple de remarquer que $[0,7]^2$ est stable par l'application $f : (x, y) \mapsto (\sqrt{7-y}, \sqrt{7+y})$. Soit en effet $(x, y) \in [0,7]^2$. Alors

$$\sqrt{7-y} \leq \sqrt{7} \leq 7 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{7+x} \leq \sqrt{17} \leq 7$$

2. Supposons que (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Alors $\ell = \sqrt{7-\ell'}$ et $\ell' = \sqrt{7+\ell}$. En particulier,

$$\ell^2 = 7 - \ell' \qquad \text{et} \qquad \ell'^2 = 7 + \ell$$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$\ell'^2 - \ell^2 = \ell + \ell'$$

ou encore

$$(\ell' + \ell)(\ell' - \ell - 1) = 0$$

On ne peut avoir $\ell + \ell' = 0$. En effet, (x_n) et (y_n) sont clairement positives donc leurs limites ℓ et ℓ' également. Si on avait $\ell + \ell' = 0$, on aurait donc $\ell = \ell' = 0$, ce qui est impossible puisque $\ell^2 = 7 - \ell'$ par exemple.
On en déduit que $\ell' - \ell - 1 = 0$ i.e. $\ell' = \ell + 1$. Ainsi

$$\ell^2 = 7 - \ell' = 6 - \ell$$

Il en résulte que $\ell = 2$ ou $\ell = -3$. Puisque $\ell \geq 0$, $\ell = 2$ puis $\ell' = 3$.

3. Posons $u_n = x_n - 2$ et $v_n = y_n - 3$ pour $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{4 - v_n} - 2 = -\frac{v_n}{\sqrt{4 - v_n} + 2}$$
$$v_{n+1} = \sqrt{9 + u_n} - 3 = \frac{u_n}{\sqrt{9 + u_n} + 3}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}| = \frac{|v_n|}{\sqrt{4 - v_n} + 2} \leq \frac{|v_n|}{2}$$
$$|v_{n+1}| = \frac{|u_n|}{\sqrt{9 + u_n} + 3} \leq \frac{|u_n|}{3}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+2}| \leq \frac{|v_{n+1}|}{2} \leq \frac{|u_n|}{6}]$$

On en déduit sans peine que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{2n}| \leq \frac{1}{6^n}|u_0| \qquad \text{et} \qquad |u_{2n+1}| \leq \frac{1}{6^n}|u_1|$$

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent donc vers 0 : il en est donc de même de la suite (u_n). On en déduit alors que (v_n) converge également vers 0. Finalement, les suites (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers 2 et 3.

Solution 35

1. Supposons (u_n) non majorée, on peut en extraire une suite $(u_{\varphi(n)})$ divergeant vers $+\infty$. Mais comme $(u_{\varphi(n)} + v_{\varphi(n)})$ converge vers 0 en tant que suite extraite, $(v_{\varphi(n)})$ diverge vers $-\infty$. Alors, $(u^p_{\varphi(n)})$ diverge vers $+\infty$ et $(v^q_{\varphi(n)})$ diverge vers $-\infty$ car q est impair. On en déduit que $(u^p_{\varphi(n)} - v^q_{\varphi(n)})$ diverge vers $+\infty$, ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^p - v_n^q = 0$. On aboutit de la même manière à une contradiction si on suppose (u_n) non minorée. Ainsi (u_n) est bornée.
   On montre de la même manière que (v_n) est bornée ou on remarque que $(v_n) = (u_n + v_n) - (u_n)$ est bornée en tant que différence de deux suites bornées ($(u_n + v_n)$ est convergente donc bornée).

2. Soient ℓ une valeur d'adhérence de (u_n). Alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers ℓ. Alors $(v_{\varphi(n)})$ converge vers $-\ell$. Par conséquent, $(u^p_{\varphi(n)} - v^q_{\varphi(n)})$ converge vers $\ell^p + \ell^q$ car q est impair. Mais elle converge également vers 0 en tant que suite extraite. Ainsi $\ell^p + \ell^q = 0$. On en déduit sans peine que $\ell = 0$ (les deux termes de l'égalité précédente sont de même signe car p et q sont impairs). Ainsi 0 est la seule valeur d'adhérence de (u_n).
   On montre de la même manière que 0 est l'unique valeur d'adhérence de (v_n).

3. Il est classique de montrer qu'une suite bornée possédant une unique valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence. Ainsi (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Révision suites

Solution 36

1. Tout d'abord, une récurrence évidente montre que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$. Puisque $v_0 - u_0 > 0$, on en déduit par une récurrence évidente que $v_n - u_n > 0$ i.e. $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit également que la suite de terme général $v_n - u_n$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n v_n} - u_n\right) = \frac{\sqrt{u_n}}{2}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right) \geq 0$$
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n v_n} - v_n\right) = \frac{\sqrt{v_n}}{2}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right) \leq 0$$
   Ainsi (u_n) est croissante tandis que (v_n) est décroissante.
   Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes : elles convergent donc vers une limite commune l.

2. On rappelle l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \in]-1, +\infty[$.
   Il s'ensuit que
   $$\ln y - \ln x = \ln\frac{y}{x} = \ln\left(1 + \frac{y-x}{x}\right) \leq \frac{y-x}{x}$$
   $$\ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y} = \ln\left(1 + \frac{x-y}{y}\right) \leq \frac{x-y}{y}$$
   On en déduit alors facilement l'inégalité voulue en tenant compte du fait que $y - x > 0$ et $x - y < 0$.

3. On a vu à la question **1** que $0 < u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui justifie que (c_n) est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{\ln v_{n+1} - \ln u_{n+1}} \\ &= \frac{v_n - u_n}{\ln\left(v_n + \sqrt{u_n v_n}\right) - \ln\left(u_n + \sqrt{u_n v_n}\right)} \\ &= \frac{v_n - u_n}{\ln\left(\sqrt{v_n}\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}\right)\right) - \ln\left(\sqrt{uv_n}\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}\right)\right)} \\ &= \frac{v_n - u_n}{\ln v_n - \ln u_n} = c_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (c_n) est bien constante.

4. D'après la question **2** et le fait que $0 < u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{v_n} \leq \frac{\ln v_n - \ln u_n}{v_n - u_n} \leq \frac{1}{u_n}$ i.e. $u_n \leq c_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème des gendarmes assure que (c_n) converge vers l. Mais comme (c_n) est constante,

$$l = c_0 = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$$

Solution 37

1. Distinguons les trois cas.

- Si $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x |x-t|\,\mathrm{d}t + \int_x^1 |x-t|\,\mathrm{d}t = \int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (t-x)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=x} + \left[\frac{t^2}{2} xt\right]_{t=x}^{t=1} = x^2 - x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Si $x \leq 0$,

$$f(x) = \int_0^1 (t-x)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - xt\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2} - x$$

- Si $x \geq 1$,

$$f(x) = \int_0^1 (x-t)\,\mathrm{d}t = \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = x - \frac{1}{2}$$

2. Pour $x \in [0,1]$, $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$. f est donc décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. De plus, $g(0) = \frac{1}{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et $g(1) = \frac{1}{2}$. Ainsi $f([0,1]) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \subset]0,1[$. Comme $u_0 \in [0,1]$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Comme $u_0 \in [0,1]$ et que $f([0,1]) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $u_1 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. De plus, $f\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) \subset f([0,1]) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. On en déduit que $u_n \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ pour tout $n \geq 1$.

4. f est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(x) = 2x - 1$. Donc pour $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Ainsi $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.
On sait que si (u_n) converge, elle converge vers un réel de l'intervalle $[0,1]$ et nécessairement vers un point fixe de f car f est continue sur $[0,1]$. Les points fixes de f sur $[0,1]$ sont les solutions de $x^2 - x + \frac{1}{2} = x$. La seule solution de cette équation comprise entre 0 et 1 est $l = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Remarquons que $l \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. On applique alors classiquement l'inégalité des accroissements finis. Soit $n \geq 1$. Puisque u_n et l appartiennent à $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et que $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{2}$ sur cet intervalle, on a :

$$|f(u_n) - f(c)| \leq \frac{1}{2}|u_n - c| \text{ i.e. } |u_{n+1} - c| \leq \frac{1}{2}|u_n - c|$$

On prouve alors par récurrence que $|u_n - c| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|u_1 - c|$ pour tout $n \geq 1$, ce qui prouve que (u_n) converge vers c.

5. Supposons $u_0 > 1$. Montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que u_{n_0} appartient à $[0,1]$. Tant que $u_n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}$. On ne peut avoir $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, sinon on aurait $u_n = u_0 - \frac{n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) divergerait vers $-\infty$ ce qui contredirait le fait que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons donc $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid u_{n_0} \leq 1\}$. On a donc $u_{n_0-1} > 1$. Ainsi $u_{n_0} = u_{n_0-1} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. Donc $u_{n_0} \in [0,1]$ et on est ramené au cas précédent. On prouve de la même façon que (u_n) converge vers c.
Supposons maintenant $u_0 < 0$. Alors $u_1 = \frac{1}{2} - u_0 > 0$. On a donc $u_1 \in [0,1]$ ou $u_1 > 1$ et on est ramené à un des deux cas traités précédemment. On en déduit à nouveau que (u_n) converge vers c.

Remarque. Il est encore plus facile de se convaincre de ces résultats à l'aide d'un petit dessin faisant figurer le graphe de f et la première bissectrice.

Solution 38

1. Posons $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. φ est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et une étude rapide montre que φ est strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. De plus, pour tout entier $n \geq 3$,

$$-\infty = \lim_{0^+} \varphi < \frac{1}{n} < \frac{1}{e} = \varphi(e) \qquad \text{et} \qquad \varphi(e) > \frac{1}{n} > 0 = \lim_{+\infty} \varphi$$

donc le théorème des valeurs intermédiaires montre que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, l'une sur $]0,e[$ et l'autre sur $]e,+\infty[$.
Autrement dit, pour $n \geq 3$, il existe bien deux solutions u_n et v_n à l'équation (E_n) et $0 < u_n < e < v_n$.

2. Pour tout $n \geq 3$, $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$. On en déduit que $0 \leq \ln(u_n) \leq \frac{e}{n}$ puis $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$ par encadrement. Par continuité de l'exponentielle en 0, $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^0 = 1$.

3. Comme (u_n) converge vers 1 i.e. $(u_n - 1)$ converge vers 0

$$\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + (u_n - 1))}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1$$

Solution 39

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f_n : x \mapsto \cos x - nx$. f_n est dérivable et $f_n'(x) = -\sin x - n < 0$ pour tout $x \in [0,1]$. f_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = cos(1) - n < 0$. On en déduit que f_n s'annule une unique fois sur $[0,1]$. D'où l'existence et l'unicité de x_n.

2. On a $\cos x_n = nx_n$ et donc $x_n = \frac{\cos x_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $|x_n| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis que (x_n) converge vers 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $f_n \geq f_{n+1}$ sur $[0,1]$. Donc $f_n(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$. La stricte décroissance de f_n implique que $x_{n+1} \leq x_n$. Par conséquent la suite (x_n) est décroissante.

4. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que cos est continue en 0, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos 0 = 1$. Donc $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

5. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. On en déduit que $x_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}$.

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

Solution 40

On prouve aisément par récurrence que $\|u_{n+1}-u_n\| \leq k^n\|u_1-u_0\|$ et donc que $u_{n+1}-u_n = \mathcal{O}(k^n)$. Puisque $k \in [0,1[$, la série télescopique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+1}-u_n$ converge abolument donc converge i.e. la suite u converge.

Solution 41

1. Comme les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ sont absolument convergentes, leur produit de Cauchy à savoir $\sum v_n$ est convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

2. Soit $(e_1,\dots,e_d)$ une base de cet espace vectoriel E. Comme $\sum u_n$ converge absolument, on en déduit que les séries $\sum e_k^*(u_n)$ convergent également absolument ($k \in [\![1,d]\!]$). En effet, puisque toutes les normes sont équivalentes, on peut par exemple munir E de la norme définie par $\|x\| = \sum_{k=1}^{d} |e_k^*(x)|$ de sorte que $|e_k^*(x)| \leq \|x\|$ pour $k \in [\![1,d]\!]$. En appliquant ce qui précéde aux séries absolument convergentes $\sum e_k^*(u_n)$, on en déduit que les séries $\sum e_k^*(v_n)$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} e_k^*(v_n) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} e_k^*(u_n)$. On en déduit alors que la série $\sum v_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Solution 42

Il est clair que D^k est nul pour $k > n$ donc

$$\exp(\mathrm{D}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{D}^{(k)}}{k!}$$

Soit $p \in [\![0,n]\!]$. Alors

$$\mathrm{D}^{(k)}(\mathrm{X}^p) = (\mathrm{X}^p)^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > p \\ \dfrac{p!}{(p-k)!}\mathrm{X}^{p-k} & \text{si } k \leq p \end{cases}$$

Ainsi, d'après la formule du binôme

$$\exp(\mathrm{D})(\mathrm{X}^p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{k}{p}\mathrm{X}^{p-k} = (\mathrm{X}+1)^p = \mathrm{T}(\mathrm{X}^p)$$

Les endomorphismes exp(D) et T coïncident sur la base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$: ils sont donc égaux.