

DEVOIR SURVEILLÉ N°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 **1.a** On calcule le polynôme caractéristique de A : $\chi_A = (X+2)(X-1)^2$. Par conséquent le spectre de A est $\{-2; 1\}$.

1.b On vérifie aisément que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en calculant son déterminant dans la base canonique. De plus, $Au_1 = u_1$, $Au_2 = u_2$ et $Au_3 = -2u_3$ donc u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de A .

1.c On vient de trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A donc A est diagonalisable.

1.d $Bu_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à u_1 et de même pour u_2 et u_3 donc aucun élément de \mathcal{F} n'est vecteur propre de B

donc a fortiori commun à A et B .

2 **2.a** $\chi_B = (X-2)^3$ (on développe par rapport à la deuxième ligne) donc le spectre de B est $\{2\}$.

2.b $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Les trois colonnes de cette matrice sont colinéaires à u_4 donc $\text{Im}_2(B) \subset \text{vect}(u_4)$ et u_4 est

la première colonne donc $\text{vect}(u_4) \subset \text{Im}_2(B)$. Par conséquent $\text{Im}_2(B) = \text{vect}(u_4)$.

Le théorème du rang nous dit alors que $\dim E_2(B) = 2$.

2.c La somme des dimensions des sous espaces propres de B est égale à $2 < 3$ donc B n'est pas diagonalisable.

3 **3.a** $Bu_5 = 2u_5$ et $Au_5 = u_5$ donc $\text{vect}(u_5) \subset E_1(A) \cap E_2(B)$.

$E_1(A)$ et $E_2(B)$ sont de dimension 2 donc cette intersection est de dimension 1 ou 2 (on a déjà un vecteur non nul dans l'intersection). Si elle est de dimension 2, alors $E_1(A) = E_2(B)$ ce qui est absurde car u_1 est dans $E_1(A)$ mais pas dans $E_2(B)$. Par conséquent l'intersection est de dimension 1 et $E_1(A) \cap E_2(B) = \text{vect}(u_5)$.

3.b Comme u_3 n'est pas vecteur propre de B et qu'il engendre $E_{-2}(A)$, il n'y a pas de vecteur propre commun à A et B dans $E_{-2}(A)$. De plus, 2 est la seule valeur propre de B donc les vecteurs propres communs à A et B sont dans $E_1(A) \cap E_2(B)$. D'après la question précédente, les vecteurs propres communs à A et B sont les vecteurs de la forme λu_5 , $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

4 **4.a** $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ donc $[A, B] = C$.

4.b On calcule le polynôme caractéristique de C . Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+5 & -3 & 1 \\ 2 & \lambda-6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$. On remplace L_1 par

$L_1 - L_3$:

$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 2 & \lambda-6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$. On utilise la linéarité par rapport à la première ligne puis on remplace C_1 par $C_1 + C_3$:

$\chi_C(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & -2 \\ \lambda+6 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$. Enfin, on développe par rapport à la première ligne : $\chi_C(\lambda) = \lambda(\lambda-6)(6+\lambda)$.

χ_C est scindé à racines simples donc C est diagonalisable. De plus les valeurs propres de C sont $-6, 0$ et 6 donc C est semblable à D .

Le rangs de C et de D sont alors égaux et $\text{rg}(C) = 2$.

5 **5.a** Soient λ et μ tels que $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$. Alors $ABe = \mu Ae = \lambda \mu e$ et de même pour BAe donc $e \in \text{Ker}([A, B])$.

5.b Le vecteur e n'est pas nul (car vecteur propre) donc $\dim \text{Ker}[A, B] > 0$ d'après la question précédente. D'après le théorème du rang, $\text{rg}([A, B]) < n$.

6 On suppose $[A, B] = 0$. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A a au moins une valeur propre : soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. $[A, B] = 0$ donc $\text{Ker}([A, B]) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B])$: A et B vérifient la propriété \mathcal{H} .

7 **7.a** Soit $X \in E_\lambda(A)$. Par hypothèse $(AB - BA)X = 0$ soit $ABX = BAX$. Or $AX = \lambda X$ donc $A(BX) = \lambda BX$ ce qui signifie que $BX \in E_\lambda(A)$: $\psi : X \mapsto BX$ est une application de $E_\lambda(A)$ dans lui-même. De plus, par propriété du produit matriciel, ψ est linéaire donc ψ est un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

7.b λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ est de dimension non nulle et comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ψ a au moins une valeur propre : il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $X \in E_\lambda(A)$ non nul tels que $\psi(X) = \mu X$. On a donc $BX = \mu X$, $AX = \lambda X$ et X non nul : X est un vecteur propre commun à A et B .

8 En dimension 1, tous les vecteurs non nuls sont des vecteurs propres donc \mathcal{R}_1 est vérifiée.

9 **9.a** A et B ne vérifient pas \mathcal{H} donc $E_\lambda(A)$ n'est pas inclus dans $\text{Ker}(C)$: il existe $u \in E_\lambda(A)$ tel que $u \notin \text{Ker}(C)$: u est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifie $Au = \lambda u$ et $Cu \neq 0$.

9.b Par hypothèse $\text{Im } C$ est de dimension 1 et $v = Cu$ est un vecteur non nul de cette image donc $\text{Im } C = \text{vect}(v)$.

9.c $v = Cu$ donc $v = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu$ soit $v = (A - \lambda I)(Bu)$: $v \in \text{Im}_\lambda(A)$. La question précédente permet alors de dire que $\text{Im } C \subset \text{Im}_\lambda(A)$.

9.d $\text{Im } C$ est de dimension 1 donc $1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A))$.

λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ a une dimension non nulle et, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$.
Finalement

$$1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$$

.

9.e A et $A - \lambda I_n$ commutent donc $[A, A - \lambda I_n] = 0$.

Par définition $[B, A - \lambda I_n] = B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B = BA - AB = -[A, B]$ d'où $[B, A - \lambda I_n] = -C$.

φ et ψ sont des applications linéaires par propriétés du produit matriciel.

Soit $X \in \text{Im}_\lambda(A)$: $X = (A - \lambda I_n)Y$ où $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Comme $[A, A - \lambda I_n] = 0$, $AX = (A - \lambda I_n)(AY)$ donc $AX \in \text{Im}_\lambda(A)$. Par conséquent φ est un endomorphisme de $\text{Im}_\lambda(A)$. De même $BX = (A - \lambda I_n)(BY) - CY$. $CY \in \text{Im } C$ et $\text{Im } C \subset \text{Im}_\lambda(A)$ donc $CY \in \text{Im}_\lambda(A)$; on a aussi $(A - \lambda I_n)(BY) \in \text{Im}_\lambda(A)$ donc $BX \in \text{Im}_\lambda(A)$. On en conclut que ψ est un endomorphisme de $\text{Im}_\lambda(A)$.

9.f $\text{Im}([\varphi, \psi]) \subset \text{Im}(C)$ donc $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à φ et ψ , endomorphismes de $\text{Im}_\lambda(A)$ qui est de dimension non nulle et strictement inférieure à n : φ et ψ ont un vecteur propre commun. A fortiori A et B ont un vecteur propre commun.

10 \mathcal{R}_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que \mathcal{R}_k est vérifiée pour tout entier $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

Soit E de dimension n .

Soit φ et ψ deux d'endomorphismes de E tels que $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$.

On considère A et B les matrices associées respectivement à φ et ψ dans une base de E , $C = AB - BA$.

Si $\text{rg}(C) = 1$ et si A et B ne vérifient pas \mathcal{H} , alors, d'après la question 9, A et B ont un vecteur propre commun : φ et ψ ont un vecteur propre commun ($K = \mathbb{C}$) donc A a au moins une valeur propre.

Si $\text{rg}(C) = 1$ et A, B vérifient \mathcal{H} , alors d'après 7, φ et ψ ont un vecteur propre commun.

Si $\text{rg}(C) = 0$, alors $[A, B] = 0$ et, d'après les questions 6 et 7, φ et ψ ont un vecteur propre commun.

On en déduit que \mathcal{R}_n est vérifiée.

Par récurrence, on peut conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{R}_n est vraie.

11 $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k}$. On pose $l = 2n - k$ pour obtenir $g(P) = \sum_{l=0}^{2n} a_{2n-l} X^l$.

12 Pour tout polynôme P , $\deg P' \leq \deg P$ et la dérivation des polynômes est linéaire donc f est un endomorphisme de E .

La question précédente prouve que g est une application de E dans E .

Si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} g(P + \lambda Q) &= X^{2n}(P + \lambda Q) \left(\frac{1}{X} \right) \\ &= X^{2n}P \left(\frac{1}{X} \right) + X^{2n}Q \left(\frac{1}{X} \right) \\ &= g(P) + \lambda g(Q) \end{aligned}$$

donc g est linéaire. g est donc un endomorphisme de E .

13 **13.a** Soit P un vecteur propre de g et λ la valeur propre associée. $g(P) = \lambda P$.

La question **11** prouve que g est injective donc λ ne peut pas être nul. Par conséquent P et $g(P)$ ont le même degré que l'on appelle d . (P n'est pas nul car vecteur propre).

On reprend les notations de la question **11**. $a_d \neq 0$ donc si $k = 2n - d$, $a_{2n-k} \neq 0$ et donc $\deg(g(P)) \geq 2n - d$. Par conséquent $d \geq 2n - d$ et donc $\deg(P) \geq n$.

13.b $g(X^n) = X^n$ et X^n n'est pas le polynôme nul donc X^n est un vecteur propre de g .

14 **14.a** Soit $f \in E$. Il existe $(a_0, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{K}^{2n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Alors

$$f^i(P) = P^{(i)} = \sum_{k=i}^{2n} a_k \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$$

Ainsi $P \in \text{Ker } f^{(i)}$ si et seulement si $a_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket i, 2n \rrbracket$ ou encore si et seulement si $P \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$. On a donc bien $\text{Ker } f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

14.b Si P est non nul de degré $i-1$, alors $f^i(P) = 0P$ donc $0 \in \text{Sp}(f^i)$.

Remarquons que $f^{2n+1} = 0$ donc f est nilpotent. A fortiori, f^i est nilpotent puisque $(f^i)^{2n+1} = (f^{2n+1})^i = 0$. D'après le cours, $\text{Sp}(f^i) = \{0\}$.

15 Si $i \geq n+1$, $f^i(X^n) = 0X^n$ donc X^n est vecteur propre de f^i . Avec la question **13.b**, on peut en déduire que X^n est un vecteur propre commun à f et g .

On suppose réciproquement que i est tel que f et g ont un vecteur propre commun.

Soit P un vecteur propre commun. D'après la question **13.a**, $\deg(P) \geq n$ et d'après la question **14.b**, $P \in \text{Ker } f^i$ donc d'après la question **14.a**, $\deg(P) \leq i-1$. Ainsi, $n \leq i-1$ soit $i \geq n+1$.

Finalement f et g ont un vecteur propre commun si et seulement si $i \geq n+1$.

16 Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $f(X^k) = kX^{k-1}$ et $g(X^k) = X^{2n-k}$. On en déduit que

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17 **17.a** En prenant $n = 1$ dans la question précédente, on obtient bien $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par produit matriciel, $(A_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A_1)^3$ est la matrice nulle.

17.b On trouve $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2.

$[(A_1)^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est aussi de rang 2.

17.c Quand $i = 2, i \geq 1 + 1$ donc $(A_1)^2$ et B_1 ont un vecteur propre commun alors que la condition de la question **10** n'est pas vérifiée ; celle-ci n'est donc pas nécessaire.
 Quand $i = 1, \text{rg}([A_1, B_1]) < 3$ mais A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun donc la condition de la question **5.b** n'est pas suffisante.

18 $\dim E_\lambda(A) \geq 2$ donc on peut considérer deux vecteurs propres X et X' formant une famille libre associés à la valeur propre $\lambda : X = (x_1, \dots, x_n)$ et $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$.

Si $x_1 = 0$ alors $X \in \mathcal{N}$.

Si $x_1 \neq 0$, on pose $X'' = x'_1 X - x_1 X'$. Alors $X'' \in \mathcal{N}$ (la première composante de X'' est nulle), X'' n'est pas nul (car (X, X') est libre) et est dans $E_\lambda(A)$ donc X'' est un vecteur propre de A .

Dans tous les cas, A admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre λ .

19 **19.a** Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tel que $A_{1,2} = 1, A_{2,1} = -1$, tous les autres coefficients nuls (ceci est possible car $n \geq 2$). A n'est pas la matrice nulle et est antisymétrique donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0\}$.

19.b Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour tous i et j , $M_{i,j} = -M_{j,i}$ donc en particulier les coefficients diagonaux $M_{i,i}$ sont nuls ; comme il y en a un par colonne, on en déduit que les colonnes de M sont des éléments de \mathcal{N} .

19.c Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. La transposition est linéaire et $(AB)^T = B^T A^T$ donc

$$\varphi(M)^T = (AM)^T + (MA^T)^T = M^T A^T + (A^T)^T M^T = -MA^T + AM^T = -\varphi(M)$$

donc $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

De même

$$\psi(M)^T = (AMA^T)^T = AM^T A^T = -\psi(M)$$

φ et ψ sont donc des applications de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même. De plus, elles sont linéaires par propriétés du produit matriciel donc φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

19.d Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

$$\varphi \circ \psi(M) = \varphi(AMA^T) = A(AMA^T) + (AMA^T)A^T = A^2 MA^T + AM(A^T)^2$$

et par ailleurs

$$\psi \circ \varphi(M) = \psi(AM + MA^T) = A(AM + MA^T)A^T = A^2 MA^T + AM(A^T)^2$$

Par conséquent, pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $\varphi \circ \psi(M) = \psi \circ \varphi(M)$ donc $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

20 **20.a** • $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $X_2^T \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ donc $X_1 X_2^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De même $X_2 X_1^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus

$$\begin{aligned} B^T &= (X_1 X_2^T)^T - (X_2 X_1^T)^T \\ &= X_2 X_1^T - X_1 X_2^T \end{aligned}$$

donc $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

• On suppose $B = 0$ de sorte que $X_1 X_2^T = X_2 X_1^T$. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. On a alors $\alpha_j \beta_i = \alpha_i \beta_j$ pour tout

$(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Comme X_1 est non nul en tant que vecteur propre, il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$. Mais alors

$\beta_j = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ i.e. $X_2 = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}} X_1$. Mais la famille (X_1, X_2) est libre puisque X_1 et X_2 sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes. On aboutit à une contradiction de sorte que $B \neq 0$.

• Pour $i \in \{1, 2\}$, $AX_i = \lambda_i X_i$ donc $X_i^T A^T = \lambda_i X_i^T$.

$$\begin{aligned} AB + BA^T &= AX_1 X_2^T - AX_2 X_1^T + X_1 X_2^T A^T - X_2 X_1^T A^T \\ &= \lambda_1 X_1 X_2^T - \lambda_2 X_2 X_1^T + \lambda_2 X_1 X_2^T - \lambda_1 X_2 X_1^T \\ &= \lambda_1 B + \lambda_2 B \end{aligned}$$

d'où $AB + BA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)B$.

• De même

$$\begin{aligned} ABA^T &= (AX_1)(X_2^T A^T) - (AX_2)(X_1^T A^T) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 X_1 X_2^T - \lambda_2 \lambda_1 X_2 X_1^T \end{aligned}$$

d'où $ABA^T = (\lambda_1 \lambda_2)B$.

20.b A et I_n commutent donc $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = A^2 B - (\lambda_1 + \lambda_2)AB + \lambda_1 \lambda_2 B$. On multiplie la relation $AB + BA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)B$ par A à gauche : $A^2 B + ABA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)AB$ donc $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = -ABA^T + \lambda_1 \lambda_2 B$. Comme $ABA^T = (\lambda_1 \lambda_2)B$, on conclut $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0$.

20.c $B \neq 0$ donc l'une au moins des colonnes de B est non nulle ; soit C une colonne de B non nulle. $(A - \lambda_2 I_n)B = 0$ donc $(A - \lambda_2 I_n)C = 0_{n,1}$ soit $AC = \lambda_2 C$. C n'est pas nulle donc C est un vecteur propre de A .

De plus $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ donc $C \in \mathcal{N}$. C , une des colonnes de B , est donc un vecteur propre de A sous forme normale.

20.d $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0$ donc il existe X une colonne de $(A - \lambda_2 I_n)B$ non nulle. Il existe alors U une des colonnes de B telle que $X = (A - \lambda_2 I_n)U$. Comme $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0$, on a également $(A - \lambda_1 I_n)X = 0$ donc X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 . A nouveau, comme B est antisymétrique, $U \in \mathcal{N}$. Or $X = (A - \lambda_2 I_n)U$ et $\lambda_2 \in \text{Sp}(A)$ donc X est un vecteur propre de A sous forme normale.

21 **21.a** φ et ψ sont deux endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ tels que $\text{rg}([\varphi, \psi]) = 0 \leq 1$ donc, d'après la partie II, φ et ψ ont un vecteur propre commun : il existe $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ non nulle vecteur propre de φ et de ψ ; il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi(B) = \alpha B$ soit $AB + BA^T = \alpha B$ et il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $ABA^T = \beta B$.

21.b On multiplie la relation $AB + BA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)B$ par A à gauche : $A^2 B + ABA^T = \alpha AB$ mais $ABA^T = \beta B$ donc $A^2 B + \beta B = \alpha AB$. En factorisant par B , on obtient $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0$.

21.c Le polynôme $X^2 - \alpha X + \beta$ à coefficients complexes a deux racines (éventuellement confondues) donc il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $X^2 - \alpha X + \beta = (X - \gamma)(X - \delta)$. Alors $A^2 - \alpha A + \beta I_n = (A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)$ et la relation de la question précédente devient : $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0$.

21.d On suppose $(A - \delta I_n)B = 0$ donc, si $A - \delta I_n$ est inversible, alors $B = 0$ ce qui est exclu donc $A - \delta I_n$ n'est pas inversible et $\delta \in \text{Sp}(A)$. Une colonne non nulle de B est alors un vecteur propre de A sous forme normale (car B est antisymétrique).

21.e Puisque $(A - \delta I_n)B \neq 0$, $(A - \delta I_n)B$ possède une colonne non nulle. Autrement dit, il existe une colonne U de B telle que $X = (A - \delta I_n)U \neq 0$. Comme B est antisymétrique, $U \in \mathcal{N}$. De plus, $(A - \gamma I_n)X = 0$ (d'après la question **21.c**) donc X est un vecteur propre de A (associé à la valeur propre γ) sous forme normale.

21.f A n'a qu'une valeur propre λ et $\delta \neq \lambda$ donc δ n'est pas valeur propre de A et $(A - \delta I_n)$ est inversible.

$A - \gamma I_n$ et $A - \delta I_n$ commutent donc si on multiplie à gauche la relation de la question **21.c** par $(A - \delta I_n)^{-1}$, on obtient $(A - \gamma I_n)B = 0$.

21.g On est alors revenu à la situation de la question **21.d** et donc A possède un vecteur propre sous forme normale.

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque.

A a au moins une valeur propre.

Si A a une seule valeur propre, d'après les questions précédentes, A possède un vecteur propre sous forme normale.

Si A a au moins deux valeurs propres distinctes, alors d'après **20**, A possède un vecteur propre sous forme normale.

On en conclut que, dans tous les cas, une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède un vecteur propre sous forme normale.