

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Produits scalaires

Solution 1

Supposons que $\|\cdot\|$ soit une norme euclidienne associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Supposons que $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme. Posons alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

Alors, pour tout $x \in E$,

$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{2} (\|x + x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2) = \|x\|^2$$

Vérifions maintenant que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

Soit $x \in E$. Alors $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \geq 0$ et, si $\langle x, x \rangle = 0$, alors $x = 0_E$ par séparation. Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

De plus, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

Soit $(x, y, z) \in E^3$. Alors

$$\langle x + y, z \rangle - \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y + z\|^2 - \|x + y\|^2 - \|z\|^2 - \|x + z\|^2 + \|x\|^2 + \|z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2)$$

Bases orthonormales

Solution 2

1. Soit u l'endomorphisme de E tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. u transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe donc u est une isométrie vectorielle directe donc $\det(u) = 1$. Or $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

2. On a $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}}$. Donc $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}$.

REMARQUE. On en déduit que le déterminant dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base. Le déterminant de n vecteurs u_1, \dots, u_n dans une base orthonormée quelconque s'appelle le *produit mixte* de ces vecteurs et est noté $[x_1, \dots, x_n]$.

3. Cette application est linéaire car le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses variables et notamment par rapport à la dernière. De plus, elle est à valeurs dans \mathbb{R} . C'est donc une forme linéaire.

4. C'est tout simplement le théorème de Riesz.

5. Démontrons simplement la linéarité par rapport à la première variable. Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$, $x'_1 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$,

$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1 + \mu x'_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu \det_{\mathcal{B}}(x'_1, x_2, \dots, x_n)$$

Notons $u = (\lambda x_1 + \mu x'_1) \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$, $v = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ et $w = x'_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$. Ainsi pour tout $x \in E$, $\langle u, x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \mu \langle w, x \rangle$ i.e. $\langle u - (\lambda v + \mu w), x \rangle = 0$. Donc $u - (\lambda v + \mu w) \in E^\perp = \{0\}$. On a donc $u = \lambda v + \mu w$, ce qui prouve bien la linéarité par rapport à la première variable. La linéarité par rapport aux autres variables se traite de la même manière.

Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$ tels que deux vecteurs parmi ceux-ci soient égaux. On a donc $\det(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = 0$ pour tout $x \in E$ puisque le déterminant est une forme multilinéaire alternée. Ceci signifie que $\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}, x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Ainsi $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = 0$. L'application de l'énoncé est bien alternée.

Solution 3

1. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire puisque la dérivation et l'évaluation en a sont linéaires. Elle est évidemment positive. Soit enfin $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. On a donc $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(n)}(a) = 0$. Ainsi a est une racine d'ordre au moins $n + 1$ de P et $\deg P \leq n$ donc $P = 0$.
2. La famille $((X - a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est clairement orthonormée. Puisqu'elle contient $n + 1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, c'est une base.

Solution 4

1. En développant $\|x + y\|^2$, on prouve sans peine que

$$\langle x | y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

et l'on en déduit que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \langle y | e_i \rangle$$

2. Soit $x \in E$. Posons

$$z = x - \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i$$

On a

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \sum_{k=1}^n \langle z | e_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^n \left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i \middle| e_k \right\rangle^2 = \sum_{k=1}^n \left(\langle x | e_k \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \langle e_k | e_i \rangle \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (\langle x | e_k \rangle - \langle x | e_k \rangle)^2 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $z = 0$.

3. D'après la question précédente, la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est génératrice de E . Comme $n = \dim(E)$, cette famille est une base de E . Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$e_k = \sum_{i=1}^n \langle e_k | e_i \rangle e_i$$

Ainsi, par identification des coordonnées dans la base (e_1, \dots, e_n) ,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \langle e_k | e_i \rangle = \delta_{k,i}$$

Comme cela est valable pour tout $1 \leq k \leq n$, on en déduit que la famille (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E .

Solution 5

Notons p_n le projecteur orthogonal sur $\text{vect}(e_0, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$. On sait alors que $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$. D'après le théorème de Pythagore, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|^2 = \|p_n(x)\|^2 + \|x - p_n(x)\|^2$$

D'une part,

$$\|x - p_n(x)\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et d'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|p_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle^2$$

Par passage à la limite

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle e_k, x \rangle^2$$

Sous-espaces orthogonaux

Solution 6

s est clairement linéaire et $s^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc s est une symétrie. Soit $S \in \text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $A \in \text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$. Ainsi $S^T = S$ et $A^T = -A$. Par conséquent $\langle S, A \rangle = \text{tr}(S^T A) = \text{tr}(SA)$ et $\langle A, S \rangle = \text{tr}(A^T S) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA)$. Donc $\langle S, A \rangle = 0$. Ceci signifie que $\text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ sont orthogonaux l'un à l'autre : s est une symétrie orthogonale.

Solution 7

- Supposons $F \subset G$. Soit $x \in G^\perp$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de G et a fortiori de F donc $x \in F^\perp$. Ainsi $G^\perp \subset F^\perp$.
Supposons F et G de dimension finie et $G^\perp \subset F^\perp$. D'après ce qui précède, $(F^\perp)^\perp \subset (G^\perp)^\perp$. Mais F et G étant de dimension finie, $(F^\perp)^\perp = F$ et $(G^\perp)^\perp = G$.
- On sait que $F \subset F + G$ donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ d'après la question précédente. De même, $G \subset F + G$ donc $(F + G)^\perp \subset G^\perp$. Ainsi $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $y \in F + G$. Il existe donc $(u, v) \in F \times G$ tel que $y = u + v$. Alors $\langle x, y \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, v \rangle$. Or $x \in F^\perp$ et $u \in F$ donc $\langle x, u \rangle = 0$. De même, $x \in G^\perp$ et $v \in G$ donc $\langle x, v \rangle = 0$. Ainsi $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in F + G$, $x \in (F + G)^\perp$. D'où $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.
Par double inclusion, $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- $F \cap G \subset F$ donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ d'après la première question. De même, $F \cap G \subset G$ donc $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. On en déduit que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
Supposons E de dimension finie. Alors

$$\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$$

Or d'après la question précédente, $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$ donc

$$\begin{aligned} \dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F + G)^\perp \\ &= (\dim E - \dim F) + (\dim E - \dim G) - (\dim E - \dim(F + G)) \\ &= \dim E - (\dim F + \dim G - \dim(F + G)) \\ &= \dim E - \dim(F \cap G) = \dim(F \cap G)^\perp \end{aligned}$$

Puisqu'on a précédemment montré que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, on peut conclure que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Solution 8

- Remarquons que pour tout $y \in E$, la forme linéaire $\varphi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in E, |\varphi_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

de sorte que φ_y est continue d'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

- On peut remarquer que

$$F = \{x \in E, \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\} = \bigcap_{y \in F} \varphi_y^{-1}(\{0_E\})$$

Pour tout $y \in E$, $\varphi_y^{-1}(\{0_E\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé (le sous-espace nul) par une application continue. Par conséquent, F est fermé comme intersection de fermés.

On peut aussi utiliser la caractérisation séquentielle des fermés si l'on préfère. Soit (x_n) une suite d'éléments de F^\perp convergeant vers $x \in E$. Fixons $y \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_y(x_n) = \langle x_n, y \rangle = 0$. Par continuité de φ_y , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_y(x_n) = \varphi_y(x)$. Par unicité de la limite, $\langle x, y \rangle = \varphi_y(x) = 0$. Ceci étant valable pour tout $y \in F$, $x \in F^\perp$. Ainsi F^\perp est fermé par caractérisation séquentielle de la limite.

- On sait que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Or $(F^\perp)^\perp$ est fermé en appliquant la question précédente à F^\perp . On sait que \bar{F} est le plus grand fermé contenant F . Ainsi $\bar{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Projection orthogonale

Solution 9

Notons p la projection orthogonale sur $\text{vect}(u)$ et P sa matrice dans \mathcal{B} . Comme (u) est une base orthonormale de $\text{vect}(u)$, on a, pour $x \in E$, $p(x) = \langle x, u \rangle u$. Notons X le vecteur colonne associé à un vecteur x de E . On a $PX = (U^T X)U = U(U^T X) = UU^T X$. La matrice de P dans \mathcal{B} est donc UU^t .

Solution 10

- Notons p_u le projecteur orthogonal sur $\text{vect}(u)$. Remarquons que $p_u(e_i) = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, e_i \right\rangle \frac{u}{\|u\|}$. Ainsi $\|p_u(e_i)\| = \frac{|\langle u, e_i \rangle|}{\|u\|}$. Posons alors $u = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\|e_i\|^2}$. Comme (e_1, \dots, e_n) est orthogonale, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle u, e_k \rangle = 1$. Donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|p_u(e_k)\| = \frac{1}{\|u\|}$. Les projetés orthogonaux de e_1, \dots, e_n sur $\text{vect}(u)$ ont donc toute la même norme.

- Soit u un vecteur répondant aux conditions de l'énoncé. Notons N la norme commune des vecteurs $p_u(e_1), \dots, p_u(e_n)$. On a donc $N = \frac{|\langle e_i, u \rangle|}{\|u\|}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Comme la base $\left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right)_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormale, on a :

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle e_i, u \rangle^2}{\|e_i\|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{N^2 \|u\|^2}{\|e_i\|^2}$$

Comme u est non nul, on obtient :

$$N = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\|e_i\|^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ceci prouve que N est indépendante de u et nous donne bien une expression de N en fonction de $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$.

Solution 11

- Prouvons que **1.** \Rightarrow **2.**

Lorsque p est une projection orthogonale de E , on a $\text{Im}(id_E - p) = \text{Ker}(p) = \text{Im}(p)^\perp$ donc, pour tout x et y dans E , $p(x) \perp y - p(y)$ ie

$$\langle p(x) | y \rangle = \langle p(x) | p(y) \rangle.$$

Cette expression étant symétrique en (x, y) , on a

$$\begin{aligned} \langle p(x) | y \rangle &= \langle p(x) | p(y) \rangle = \langle p(y) | p(x) \rangle = \langle p(y) | x \rangle \\ &= \langle x | p(y) \rangle \end{aligned}$$

- Prouvons que **2.** \Rightarrow **3.**

Soit x dans E . Appliquons le **2.** à x et $y = p(x)$. On a

$$\|p(x)\|^2 = \langle p(x) | p(x) \rangle = \langle x | p(x) \rangle.$$

ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|p(x)\|^2 \leq \|x\| \cdot \|p(x)\|.$$

Si $p(x) = 0$, l'inégalité **3.** est banalement vérifiée. Si $p(x) \neq 0$, $\|p(x)\| > 0$ et en divisant membre à membre l'inégalité précédente, on aboutit à

$$\|p(x)\| \leq \|x\|.$$

- Prouvons que **3.** \Rightarrow **1.**

Soient $x \in \text{Im } p$, $y \in \text{Ker } p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $y = 0$, alors $x \perp y$.

Supposons maintenant $y \neq 0$. D'une part,

$$\|p(x + \lambda y)\|^2 = \|x\|^2$$

et d'autre part,

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda \langle x | y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2$$

D'après **2.**, $2\lambda \langle x | y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Le discriminant de ce trinôme du second degré en λ est donc négatif, ce qui impose $\langle x | y \rangle^2 \leq 0$ et donc $\langle x | y \rangle = 0$. On a donc $x \perp y$. On en déduit que $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$ et donc que p est une projection orthogonale.

Solution 12

1. Soient $x \in \text{Ker}(\text{Id}_E - u)$ et $y \in \text{Im}(\text{Id}_E - u)$. Alors $u(x) = x$ et il existe $a \in E$ tel que $y = a - u(a)$. Ainsi

$$\langle x, y \rangle = \langle x, a - u(a) \rangle = \langle x, a \rangle - \langle x, u(a) \rangle = \langle x, a \rangle - \langle u(x), u(a) \rangle = 0$$

car u conserve le produit scalaire. Ainsi $\text{Ker}(\text{Id}_E - u)$ et $\text{Im}(\text{Id}_E - u)$ sont orthogonaux. On conclut grâce au théorème du rang.

2. D'après la question précédente, il existe $y \in \text{Ker}(\text{Id}_E - u)$ et $a \in E$ tel que $x = y + a - u(a)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = y + u^k(a) - u^{k+1}(a)$. Par télescopage, $x_n = y + \frac{1}{n}(a - u^n(a))$. On a alors

$$\|x_n - y\| \leq \frac{\|a\| + \|u^n(a)\|}{n} = \frac{2\|a\|}{n}$$

car u^n conserve la norme. En passant à la limite, on obtient que (x_n) converge vers y qui est justement la projection de x sur $\text{Ker}(\text{Id}_E - u)$ parallèlement à $\text{Im}(\text{Id}_E - u)$.

Solution 13

1. Tout d'abord, pour $(P, Q) \in E^2$, $P(t)Q(t)e^{-t} = o(1/t^2)$ par croissances comparées donc $\langle P, Q \rangle$ est bien défini. La bilinéarité et la positivité sont évidentes. Soit enfin $P \in E$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Comme $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur \mathbb{R}_+ , cette fonction est nulle sur \mathbb{R}_+ . Ainsi P admet une infinité de racines puis $P = 0$.
2. Notons I_n l'intégrale à calculer. Par intégration par parties, $I_n = nI_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Or $I_0 = 1$ donc $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On orthonormalise la base $(1, X, X^2)$ de F via le procédé de Gram-Schmidt. On pose

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\|1\|} = 1 \\ P_1 &= \frac{X - \langle P_0, X \rangle P_0}{\sqrt{\|X\|^2 - \langle P_0, X \rangle^2}} = \frac{X - I_1 P_0}{\sqrt{I_2 - I_1^2}} = X - 1 \\ P_2 &= \frac{X^2 - \langle P_0, X^2 \rangle P_0 - \langle P_1, X^2 \rangle P_1}{\sqrt{\|X^2\|^2 - \langle P_0, X^2 \rangle^2 - \langle P_1, X^2 \rangle^2}} = \frac{X^2 - I_2 P_0 - (I_3 - I_2) P_1}{\sqrt{I_4 - I_2^2 - (I_3 - I_2)^2}} = \frac{1}{2} X^2 - 2X + 1 \end{aligned}$$

Alors (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormée de F .

4. Comme (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormée de F , le projeté orthogonal de X^3 sur F est

$$\langle P_0, X^3 \rangle P_0 + \langle P_1, X^3 \rangle P_1 + \langle P_2, X^3 \rangle P_2 = I_3 P_0 + (I_4 - I_3) P_1 + (I_5/2 - 2I_4 + I_3) P_2 = 9X^2 - 18X + 6$$

5. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \right| = |\langle P, 1 \rangle| \leq \|P\| \|1\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt}$$

Solution 14

1. L'image de M est clairement engendrée par les deux premières colonnes de M qui sont linéairement indépendantes. Ainsi $\text{rg}(M) = 2$.

2. D'après le théorème du rang $\dim \text{Ker } M = 2$. Ainsi 0 est valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé est $n - 2$. Il est engendré par les $E_2 - E_i$ pour $3 \leq i \leq n$ où (E_1, \dots, E_n) est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Le calcul (laborieux) du polynôme caractéristique donne $\chi_M = X^n - (n-1)X^{n-2}$. Ainsi M possède deux valeurs propres supplémentaires qui sont $\pm\sqrt{n-1}$. On aurait aussi pu remarquer que $M^3 = (n-1)M$. Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\sqrt{n-1}$

et $-\sqrt{n-1}$ sont respectivement engendrés par $U = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Notons u et v les vecteurs canoniquement associés à U et V . Puisque $\pm\sqrt{n-1}$ sont les seules valeurs propres non nulles de f , il est clair que $\text{Im } f$ est engendré par u et v . Remarquons que u et v sont orthogonaux (ce qui est normal puisque M est symétrique). En notant p le projecteur orthogonal sur $\text{Im } f$, on a donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, p(x) = \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v$$

Comme $\|u\|^2 = \|v\|^2 = 2(n-1)$, on obtient en notant P la matrice de p dans la base canonique,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), PX = \frac{1}{2n-2} ((U^T X)U + (V^T X)V) = \frac{1}{2n-2} (UU^T X + VV^T X)$$

car $U^T X$ et $V^T X$ sont des scalaires. On en déduit que

$$P = \frac{1}{2n-2} (UU^T + VV^T) = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 15

1. L'application $(\cdot | \cdot)$ est clairement symétrique. Elle est également bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Pour $f \in E$, $(f | f) = \int_{-1}^1 f(t)^2 dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale. De plus, si cette dernière intégrale est nulle, alors f^2 est nulle car elle est positive et continue sur $[-1, 1]$. Ainsi $(\cdot | \cdot)$ est définie positive. C'est donc un produit scalaire.

2. On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot | \cdot)$. Remarquons que $(u | v) = 0$ car uv est impaire. Ainsi $(u/\|u\|, v/\|v\|)$ est une base orthonormée de F . On calcule $\|u\|^2 = \int_{-1}^1 dt = 2$ et $\|v\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$.

3. Le projeté orthogonal de w sur F est donc

$$p = \frac{(w | u)}{\|u\|^2} u + \frac{(w | v)}{\|v\|^2} v$$

Or

$$(w | u) = \int_{-1}^1 e^t dt = e^1 - e^{-1}$$

$$(w | v) = \int_{-1}^1 t e^t dt = [t e^t]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^t dt = 2e^{-1}$$

Ainsi p est la fonction

$$t \mapsto \frac{e^1 - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}t$$

Le réel recherché est également

$$\inf_{f \in F} \|w - f\|^2 = d(w, F)^2$$

Or on sait d'après le cours que

$$d(w, F)^2 = \|w - p\|^2$$

Mais comme $p \perp w - p$, le théorème de Pythagore donne

$$d(w, F)^2 = \|w\|^2 - \|p\|^2$$

De plus,

$$p = \frac{(w | u)}{\|u\|^2}u + \frac{(w | v)}{\|v\|^2}v$$

et $u \perp v$ donc le théorème de Pythagore donne

$$\|p\|^2 = \frac{(w | u)^2}{\|u\|^2} + \frac{(w | v)^2}{\|v\|^2} = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})^2 + 6e^{-2} = \frac{1}{2}e^2 - 1 + \frac{13}{2}e^{-2}$$

Enfin

$$\|w\|^2 = \int_{-1}^1 e^{2t} dt = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2})$$

puis

$$d(w, F)^2 = 1 - 7e^{-2}$$

Solution 16

1. Supposons que f soit un projecteur orthogonal. Soit $x \in E$. Alors $f(x)$ et $x - f(x)$ sont orthogonaux donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|f(x) + (x - f(x))\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|x - f(x)\|^2 \geq \|f(x)\|^2$$

Ainsi $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

Réciproquement, supposons que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Soit alors $(x, y) \in \text{Ker } f \times \text{Im } f$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = y$ donc

$$\|y\|^2 = \|f(\lambda x + y)\|^2 \leq \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

puis

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y \rangle \geq 0$$

Si $x = 0_E$, alors $x \perp y$ et sinon, P est un trinôme du second degré de signe constant donc son discriminant est négatif. Ainsi $4\langle x, y \rangle^2 \leq 0$ puis $\langle x, y \rangle = 0$ et $x \perp y$ à nouveau. Ainsi $\text{Ker } f \perp \text{Im } f$ et f est un projecteur orthogonal.

2. Comme p et q sont des projecteurs orthogonaux,

$$\forall x \in E, \|p \circ q(x)\| \leq \|q(x)\| \leq \|x\|$$

Or $p \circ q$ est un projecteur donc c'est un projecteur orthogonal. On rappelle que tout projecteur orthogonal est auto-adjoint. Ainsi $(p \circ q)^* = p \circ q$ i.e. $q^* \circ p^* = p \circ q$ et enfin $q \circ p = p \circ q$.

Optimisation

Solution 17

Soit $E = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^\pi f(x)g(x) dx$. On pose pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{a,b} : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto ax^2 + bx \end{cases}$$

et

$$F = \{f_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(f_1, f_2)$$

avec $f_1 = f_{0,1}$ et $f_2 = f_{1,0}$. F est un sous-espace vectoriel de E et $\phi(a, b) = \|\sin - f_{a,b}\|^2$. Le minimum de ϕ est donc atteint quand $f_{a,b}$ est la projection orthogonale de \sin sur F et vaut alors $d(x, F)^2 = \|\sin - p_F(\sin)\|^2$ où p_F est la projection orthogonale sur F .

Première méthode

On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour orthonormaliser la famille (f_1, f_2) . On pose donc $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ et $e_2 = \frac{g}{\|g\|}$ avec $g = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$. Alors $p_F(\sin) = \langle \sin, e_1 \rangle e_1 + \langle \sin, e_2 \rangle e_2$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - \langle \sin, e_1 \rangle^2 - \langle \sin, e_2 \rangle^2 \\ &= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1 \rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\langle \sin, g \rangle^2}{\|g\|^2} \\ &= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1 \rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{(\langle \sin, f_2 \rangle - \langle f_2, e_1 \rangle \langle \sin, e_1 \rangle)^2}{\|f_2\|^2 - \langle f_2, e_1 \rangle^2} \\ &= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1 \rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\left(\langle \sin, f_2 \rangle - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle \langle \sin, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} \right)^2}{\|f_2\|^2 - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle^2}{\|f_1\|^2}} \\ &= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1 \rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{(\|f_1\|^2 \langle \sin, f_2 \rangle - \langle f_2, f_1 \rangle \langle \sin, f_1 \rangle)^2}{\|f_1\|^2 (\|f_1\|^2 \|f_2\|^2 - \langle f_2, f_1 \rangle^2)} \end{aligned}$$

A l'aide éventuellement d'intégrations par parties, on trouve

$$\|\sin\|^2 = \frac{\pi}{2} \quad \|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3} \quad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5} \quad \langle f_1, f_2 \rangle = \frac{\pi^4}{4} \quad \langle \sin, f_1 \rangle = \pi \quad \langle \sin, f_2 \rangle = \pi^2 - 4$$

On trouve finalement

$$\min_{\mathbb{R}^2} \phi = d(x, F)^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$$

Seconde méthode

On sait qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_F(\sin) = af_2 + bf_1$. De plus, $\sin - p_F(\sin) \in F^\perp = \text{vect}(f_1, f_2)^\perp$ donc

$$\begin{cases} \langle \sin - p_F(\sin), f_1 \rangle = 0 \\ \langle \sin - p_F(\sin), f_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} a\langle f_2, f_1 \rangle + b\|f_1\|^2 = \langle \sin, f_1 \rangle \\ a\|f_2\|^2 + b\langle f_1, f_2 \rangle = \langle \sin, f_2 \rangle \end{cases}$$

Or on a trouvé précédemment que

$$\|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3} \quad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5} \quad \langle f_1, f_2 \rangle = \frac{\pi^4}{4} \quad \langle \sin, f_1 \rangle = \pi \quad \langle \sin, f_2 \rangle = \pi^2 - 4$$

Ainsi

$$\begin{cases} \frac{\pi^4}{4}a + \frac{\pi^3}{3}b = \pi \\ \frac{\pi^5}{5}a + \frac{\pi^4}{4}b = \pi^2 - 4 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5} \qquad b = -\frac{12}{\pi^2} + \frac{240}{\pi^4}$$

A nouveau en vertu du théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} \|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - \|af_2 + bf_1\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - a^2\|f_2\|^2 - 2ab\langle f_1, f_2 \rangle - b^2\|f_1\|^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5} \end{aligned}$$

Solution 18

1. E est une partie non vide de \mathbb{R} minorée par 0. Elle admet une borne inférieure.
2. Si (\mathcal{S}) admet une solution, alors $K = 0$. Les pseudo-solutions de (\mathcal{S}) sont donc les éléments X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\|AX - B\|^2 = 0$ i.e. tels que $AX - B = 0$. Ce sont donc les solutions de (\mathcal{S}) .

3. Première méthode

Puisque $\{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} = \text{Im } A$, on peut affirmer que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de (\mathcal{S}) si et seulement si AX est la projection de B sur $\text{Im } A$. Or AX est la projection de B sur $\text{Im } A$ si et seulement si $AX - B$ est orthogonal à $\text{Im } A$. Or $AX - B$ est orthogonal à $\text{Im } A$ si et seulement si il est orthogonal à chaque colonne de A puisque les colonnes de A engendrent $\text{Im } A$. Ainsi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de (\mathcal{S}) si et seulement si $A^T(AX - B) = 0$ i.e. si et seulement si X est solution de (\mathcal{S}') .

Seconde méthode

Supposons que X soit solution de (\mathcal{S}') i.e. $A^T(AX - B) = 0$. Alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|AY - B\|^2 &= \|A(Y - X) + AX - B\|^2 \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2\langle A(Y - X), AX - B \rangle \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2(Y - X)^T A^T(AX - B) \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi X est pseudo-solution de (\mathcal{S}) .

Supposons que X soit pseudo-solution de (\mathcal{S}) . Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|A(X + \lambda Y) - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

ou encore

$$\|(AX - B) + \lambda AY\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

ce qui donne via une identité remarquable

$$2\lambda\langle AY, AX - B \rangle + \lambda^2\|AY\|^2 \geq 0$$

Si on fixe Y , la dernière inégalité étant vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $\langle AY, AX - B \rangle = 0$. Ainsi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AY, AX - B \rangle = 0$ ou encore $\langle Y, A^T(AX - B) \rangle = 0$, ce qui prouve que $A^T(AX - B) = 0$ et que X est solution de (\mathcal{S}') .

4. Soit $X \in \text{Ker } A$. On a donc $AX = 0$ puis $A^TAX = 0$ donc $X \in \text{Ker } A^TA$. Ainsi $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^TA$. Soit maintenant $X \in \text{Ker } A^TA$. On a donc $A^TAX = 0$ puis $X^TA^TAX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi $Y^TY = 0$ i.e. $\|Y\|^2 = 0$ donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$. D'où $X \in \text{Ker } A$. Ainsi $\text{Ker } A^TA \subset \text{Ker } A$. Finalement, $\text{Ker } A = \text{Ker } A^TA$ et $\text{rg } A = \text{rg } A^TA$ via le théorème du rang.
5. Si $\text{rg}(A) = n$, alors $\text{rg}(A^TA) = n$. La matrice A^TA est une matrice carrée de taille n et de rang n le système (\mathcal{S}') est donc de Cramer : il admet une unique solution i.e. (\mathcal{S}) admet une unique pseudo-solution.

Solution 19

Comme E est ouvert, un minimum de f est forcément un minimum local et donc un point critique. Pour $x \in E$, $\nabla f(x) = 2 \sum_{i=1}^p (x - x_i)$.

L'unique point critique de f sur E est donc $m = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$. Il suffit donc de vérifier que m est bien un minimum : il sera nécessairement unique.

Pour $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^p \|x - m + m - x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p (\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i \rangle + \|m - x_i\|^2) \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^p m - x_i \right\rangle \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m) \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^p m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m .

Solution 20

Pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^p \|x - m + m - x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p (\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i \rangle + \|m - x_i\|^2) \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^p m - x_i \right\rangle \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m) \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^p m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m .

Solution 21

1. Remarquons que l'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ est bien définie car $P(t)Q(t)e^{-t^2} = o(1/t^2)$.

(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique.

(ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale.

(iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive par positivité de l'intégrale.

(iv) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} dt = 0$. Comme $t \mapsto P(t)e^{-t^2}$ est continue, elle est nulle sur $]-\infty, +\infty[$.

Par conséquent, P admet une infinité de racines (tous les réels) puis $P = 0$.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Remarquons que $t \mapsto t^{2n+1}e^{-t^2}$ est impaire donc $A_{2n+1} = 0$.

Par intégration par parties

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{n+1} [t^{n+1} e^{-t^2}]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} e^{-t^2} dt \right)$$

L'intégration par parties est légitimée par le fait que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^{n+1}e^{-t^2} = 0$. On en déduit que

$$A_n = \frac{2}{n+1} A_{n+2}$$

ou encore

$$A_{n+2} = \frac{n+1}{2} A_n$$

Comme $A_0 = 1$, on en déduit que

$$A_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

3. On peut orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$ via le processus de Gram-Schmidt.

REMARQUE. Si (e_1, \dots, e_n) est une base d'un espace euclidien E , on peut l'orthonormaliser en une base orthonormée en posant

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_k = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i}{\|e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i\|} = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i}{\sqrt{\|e_k\|^2 - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle^2}}$$

(i) $\|1\|^2 = A_0 = 1$ donc on pose $P_0 = 1$.

(ii) $\langle 1, X \rangle = A_1 = 0$ et $\|X\|^2 = A_2 = \frac{1}{2}$ donc on pose $P_1 = X\sqrt{2}$.

(iii) $\langle 1, X^2 \rangle = A_2 = \frac{1}{2}$, $\langle X, X^2 \rangle = A_3 = 0$ et $\|X^2\|^2 = A_4 = \frac{3}{4}$ donc on pose $P_2 = \frac{2(2X^2 - 1)}{\sqrt{5}}$.

(P_0, P_1, P_2) est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Si p désigne le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned} d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 &= \|X^3 - p(X^3)\|^2 \\ &= \|X^3\|^2 - \|p(X^3)\|^2 \\ &= \|X^3\|^2 - \langle X^3, P_0 \rangle^2 - \langle X^3, P_1 \rangle^2 - \langle X^3, P_2 \rangle^2 \\ &= A_6 - A_3^2 - 2A_4 \quad \text{car } X^3 P_2 \text{ est impair} \\ &= \frac{15}{8} - \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\text{donc } d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Solution 22

1. On vérifie que $s \in : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T$ est une symétrie auto-adjointe. Ses sous-espaces propres, à savoir $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc supplémentaires et orthogonaux.

2. On remarque que $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R})^\perp$,

$$d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \|A\| = \sqrt{12}$$

3. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle (la trace) : c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i.e. un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

4. On remarque que I_n est un vecteur normal à H . Ainsi

$$d(M, H) = \frac{|\langle I_n, M \rangle|}{\|I_n\|} = \frac{|\text{tr}(M)|}{\sqrt{n}}$$

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Solution 23

- Si $H = K$ alors $s_H = s_K$ et s_H et s_K commutent évidemment.
- Si $H^\perp \subset K$, alors on a également $K^\perp \subset H$. Soient $a, b \in E$ tels que $H = \text{vect}(a)^\perp$ et $K = \text{vect}(b)^\perp$. On a donc $a \in K$ et $b \in H$. De plus, a et b sont orthogonaux. Enfin, $(H \cap K)^\perp = H^\perp + K^\perp = \text{vect}(a) \oplus \text{vect}(b)$. Soit $x \in E$. Il existe donc $u \in H \cap K$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $x = u + \lambda a + \mu b$. On a alors :

$$\begin{aligned} s_H \circ s_K(x) &= s_H(u + \lambda a - \mu b) = u - \lambda a - \mu b \\ s_K \circ s_H(x) &= s_K(u - \lambda a + \mu b) = u - \lambda a - \mu b \end{aligned}$$

On a bien prouvé que s_H et s_K commutent.

REMARQUE. On a même prouvé que $s_H \circ s_K = s_K \circ s_H = s_{H \cap K}$.

- Réciproquement, si s_H et s_K commutent, soit à nouveau a tel que $H = \text{vect}(a)^\perp$. On a donc $s_H(a) = -a$. Par conséquent, $s_H \circ s_K(a) = s_K \circ s_H(a) = -s_K(a)$. Ceci implique que $s_K(a) \in H^\perp = \text{vect}(a)$. Comme s_K est une isométrie, on a $s_K(a) = a$ ou $s_K(a) = -a$. Si $s_K(a) = a$ alors $a \in K$ et donc $H^\perp \subset K$. Si $s_K(a) = -a$ alors $a \in K^\perp$, c'est-à-dire que $K = \text{vect}(a)^\perp = H$.

Solution 24

1. Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de E et f vérifiant la condition de l'énoncé. Alors

$$f(i) = f(j) \wedge f(k) \qquad f(j) = f(k) \wedge f(i) \qquad f(k) = f(i) \wedge f(j)$$

La famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc orthogonale. Par conséquent

$$\begin{aligned} \|f(i)\| &= \|f(j)\| \|f(k)\| \\ \|f(j)\| &= \|f(k)\| \|f(i)\| \\ \|f(k)\| &= \|f(i)\| \|f(j)\| \end{aligned}$$

Si l'un des vecteurs $f(i), f(j), f(k)$ est nul alors ces 3 vecteurs sont nuls et donc $f = 0$. Si les 3 vecteurs sont non nuls, on tire des 3 dernières relations que :

$$\|f(i)\| = \|f(j)\| = \|f(k)\| = 1$$

Comme de plus $f(i) = f(j) \wedge f(k)$, la famille $(f(i), f(j), f(k))$ est une base orthonormée directe. On a donc $f \in \text{SO}(E)$. Réciproquement, si $f = 0$ ou $f \in \text{SO}(E)$, alors f vérifie bien la condition de l'énoncé puisque les applications $(u, v) \mapsto f(u \wedge v)$ et $(u, v) \mapsto f(u) \wedge f(v)$ sont bilinéaires et que ces deux applications coïncident sur une base orthonormée directe. L'ensemble des endomorphismes recherché est donc $\text{SO}(E) \cup \{0\}$.

2. Tout le raisonnement précédent reste valable à l'exception près que $f(i) = -f(j) \wedge f(k)$ et la famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc une base orthonormée indirecte. f est donc soit l'endomorphisme nul soit une isométrie indirecte. L'ensemble recherché est donc $(\text{O}(E) \setminus \text{SO}(E)) \cup \{0\}$.

Solution 25

Notons P le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. On a $P = \{(3z - 2y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$. Notons $u_1 = (-2, 1, 0)$ et $u_2 = (3, 0, 1)$. Notons s la symétrie de l'énoncé. On va déterminer les images des vecteurs de la base canonique par s . Un vecteur normal à P est $n = u_1 \wedge u_2 = (1, 2, -3)$. Le projeté orthogonal d'un vecteur u sur $P^\perp = \text{vect}(n)$ est donc $p(u) = \frac{\langle u, n \rangle}{\|n\|^2} n$. On a alors $s(u) = u - 2p(u) = u - 2 \frac{\langle u, n \rangle}{\|n\|^2} n$. Il suffit alors d'appliquer à $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On trouve

$$s(e_1) = \frac{1}{7}(6, -2, 3) \qquad s(e_2) = \frac{1}{7}(-2, 3, 6) \qquad s(e_3) = \frac{1}{7}(3, 6, -2)$$

La matrice de s dans la base canonique est donc $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution 26

Notons L_1, L_2, L_3 les lignes de A . La matrice A est une matrice de rotation si et seulement si la famille (L_1, L_2, L_3) est orthonormale et si $\det A = 1$.

La condition $\|L_1\| = 1$ équivaut à $a^2 = \frac{1}{6}$ i.e. $a = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$.

La condition $\|L_2\| = 1$ équivaut à $b^2 = \frac{2}{3}$ i.e. $b = \pm \frac{2}{\sqrt{6}}$.

La condition $\|L_3\| = 1$ équivaut à $c^2 = \frac{1}{6}$ i.e. $c = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$.

La condition $\langle L_1, L_2 \rangle = 0$ équivaut à $ab = -\frac{1}{3}$.

La condition $\langle L_1, L_3 \rangle = 0$ équivaut à $ac = \frac{1}{6}$.

La condition $\langle L_2, L_3 \rangle = 0$ équivaut à $bc = -\frac{1}{6}$.

La condition $\det A = 1$ équivaut à $-a + 2b - c = \sqrt{6}$.

Toutes ces conditions équivalent à $\begin{cases} a = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{6}} \\ b = -\varepsilon \frac{2}{\sqrt{6}} \\ c = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -a + 2b - c = \sqrt{6} \\ \varepsilon = \pm 1 \end{cases}$. On trouve $\varepsilon = -1$ puis $a = -\frac{1}{\sqrt{6}}, b = \frac{2}{\sqrt{6}}, c = -\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Solution 27

1. Soient s une réflexion de E , (u, v) une base de E , et $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ la matrice de s dans la base (u, v) . Recherchons l'axe de s .

Les vecteurs de l'axe sont les vecteurs de matrice colonne X dans la base (u, v) vérifiant $AX = X$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = x \\ x \sin \theta - y \cos \theta = y \end{cases} \iff \begin{cases} x(\cos \theta - 1) + y \sin \theta = 0 \\ x \sin \theta - y(\cos \theta + 1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2y \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0 \\ 2x \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 2y \cos^2 \frac{\theta}{2} = 0 \end{cases} \iff x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

La dernière équivalence est justifiée par le fait que $\sin \frac{\theta}{2}$ et $\cos \frac{\theta}{2}$ ne peuvent être simultanément nuls. Un vecteur directeur de l'axe est donc $\cos \frac{\theta}{2} u + \sin \frac{\theta}{2} v$. On en déduit que $\frac{\theta}{2}$ est l'angle orienté de droites entre l'axe des abscisses i.e. $\text{vect}(u)$ et l'axe de la réflexion s (modulo π puisqu'il s'agit d'un angle orienté de droites).

2. Soit s_1 et s_2 deux réflexions de E . On peut choisir une base orthonormée \mathcal{B} de E de telle sorte que la matrice de s_1 dans cette base soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de s_2 dans \mathcal{B} est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$. La matrice de $s_1 + s_2$ dans \mathcal{B} est donc $A = \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix}$.

$s_1 + s_2$ est une réflexion si et seulement si la matrice A est orthogonale de déterminant -1 . Ceci nous donne donc les conditions

$$\begin{cases} (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 1 \\ \sin^2 \theta + (-1 - \cos \theta)^2 = 1 \\ (1 + \cos \theta)(-1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta = -1 \end{cases}$$

Un rapide calcul montre que chacune des équations de ce système équivaut à $2 \cos \theta = -1$ i.e. $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. On a donc $\frac{\theta}{2} \equiv \pm \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$. Avec notre choix de base, l'axe de s_1 est l'axe des abscisses. A l'aide de la première question, on peut donc conclure que $s_1 + s_2$ est une réflexion si et seulement si l'angle non orienté de droites entre l'axe de s_1 et l'axe de s_2 vaut $\frac{\pi}{3}$.

Solution 28

Soient $y \in \text{Im } v$ et $z \in \text{Ker } v$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = v(x)$ i.e. $y = x - u(x)$. On a également $v(z) = 0_E$ i.e. $z = u(z)$.

$$(y|z) = (x - u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|u(z)) = 0$$

car u conserve le produit scalaire. On a donc prouvé que $\text{Im } v$ et $\text{Ker } v$ sont orthogonaux.

En particulier, ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker } v + \dim \text{Im } v = \dim E$, donc $\text{Im } v$ et $\text{Ker } v$ sont supplémentaires.

Solution 29

1. L'application Φ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est positive par positivité de l'intégrale.

Enfin, soit $f \in E$ telle que $\Phi(f, f) = 0$. On a donc $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$. Comme l'application f^2 est positive et continue sur $[0, 1]$, elle est nulle sur $[0, 1]$. Par conséquent, f est également nulle sur $[0, 1]$. De plus, f est une combinaison linéaire des fonctions 1-périodiques e_1, e_2, e_3 . Donc f est aussi 1-périodique. Elle est alors nulle sur \mathbb{R} . L'application Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

2. Les calculs sont élémentaires :

$$\begin{aligned} \|e_1\|^2 &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} dt = 1 \\ \|e_2\|^2 &= 2 \int_0^1 \cos^2(2\pi t) dt = \int_0^1 (1 + \cos(4\pi t)) dt = 1 \\ \|e_3\|^2 &= 2 \int_0^1 \sin^2(2\pi t) dt = \int_0^1 (1 - \cos(4\pi t)) dt = 1 \\ \langle e_1, e_2 \rangle &= \sqrt{2} \int_0^1 \cos(2\pi t) dt = 0 \\ \langle e_1, e_3 \rangle &= \sqrt{2} \int_0^1 \sin(2\pi t) dt = 0 \\ \langle e_2, e_3 \rangle &= 2 \int_0^1 \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) dt = \int_0^1 \sin(4\pi t) dt = 0 \end{aligned}$$

La base (e_1, e_2, e_3) est donc orthonormée.

3. a. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2 \in E$. $\tau_x(\lambda f_1 + \mu f_2)$ est l'application $t \mapsto (\lambda f_1 + \mu f_2)(x - t)$, c'est-à-dire l'application $t \mapsto \lambda f_1(x - t) + \mu f_2(x - t)$ i.e. l'application $\lambda \tau_x(f_1) + \mu \tau_x(f_2)$. Ainsi τ_x est linéaire. De plus, $\tau_x(e_1) = e_1$. De plus, pour $x, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi(x - t)) &= \cos(2\pi x) \cos(2\pi t) + \sin(2\pi x) \sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi(x - t)) &= \sin(2\pi x) \cos(2\pi t) - \cos(2\pi x) \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

Autrement dit, $\tau_x(e_2) = \cos(2\pi x)e_2 + \sin(2\pi x)e_3$ et $\tau_x(e_3) = \sin(2\pi x)e_2 - \cos(2\pi x)e_3$. Donc $\tau_x(e_1), \tau_x(e_2)$ et $\tau_x(e_3)$ appartiennent à $\text{vect}(e_1, e_2, e_3) = E$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de E , on en déduit que $\tau_x(f) \in E$ pour tout $f \in E$. Ainsi f est bien un endomorphisme de E .

- b. Les calculs précédents montrent que la matrice de τ_x dans la base (e_1, e_2, e_3) est $M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi x) & \sin(2\pi x) \\ 0 & \sin(2\pi x) & -\cos(2\pi x) \end{pmatrix}$.
- c. On vérifie sans peine que M_x est orthogonale. Comme M_x est la matrice de τ_x dans une base orthonormale, on en déduit que τ_x est une isométrie vectorielle.
- d. On a $\det M = -1$ donc τ_x est une isométrie vectorielle indirecte. Comme $\dim E = 3$, τ_x est une réflexion ou une anti-rotation.

Cherchons les vecteurs invariants par τ_x . On résout le système $MX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} MX = X &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 \cos(2\pi x) + x_3 \sin(2\pi x) = x_2 \\ x_2 \sin(2\pi x) - x_3 \cos(2\pi x) = x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2(\cos(2\pi x) - 1) + x_3 \sin(2\pi x) = 0 \\ x_2 \sin(2\pi x) - x_3(1 + \cos(2\pi x)) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2 \sin^2(\pi x) + 2x_3 \sin(\pi x) \cos(\pi x) = 0 \\ 2x_2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) - 2x_3 \cos^2(\pi x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_2 \sin(\pi x) - x_3 \cos(\pi x) = 0 \end{aligned}$$

Le sous-espace des vecteurs invariants par τ_x est donc le plan P_x d'équation $x_2 \sin(\pi x) - x_3 \cos(\pi x) = 0$ dans la base (e_1, e_2, e_3) . τ_x est donc une réflexion. On peut également définir P_x par $P_x = \text{vect}(e_1, \cos(\pi x)e_2 + \sin(\pi x)e_3)$.

Solution 30

Notons r la rotation de l'énoncé. La droite \mathcal{D} d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}(0, 0, 1)$. L'image de \mathcal{D} par r est une droite dirigée par $r(\vec{u})$. Notons $\vec{b} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$. Le vecteur \vec{b} a donc pour coordonnées $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Notons Δ l'axe de la rotation. Le projeté orthogonal de \vec{u} sur Δ est $\vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{b})\vec{b}$. Le vecteur \vec{v} a donc pour coordonnées $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$. On a alors $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{w} \in \Delta^\perp$. Le vecteur \vec{w} a pour coordonnées $\frac{1}{3}(-1, -1, 2)$. Mais alors $r(\vec{u}) = r(\vec{v}) + r(\vec{w}) = \vec{v} + r(\vec{w})$ car $\vec{v} \in \Delta$. Comme $\vec{w} \in \Delta^\perp$, $r(\vec{w}) = \cos \frac{\pi}{6} \vec{w} + \sin \frac{\pi}{6} \vec{b} \wedge \vec{w}$. Après calcul, le vecteur $r(\vec{w})$ admet pour coordonnées $\frac{1}{\sqrt{3}}(0, -1, 1)$. Ainsi $r(\vec{u})$ admet donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Solution 31

1. Les vecteurs $\vec{a}(1, 1, 1)$ et $\vec{b}(1, -1, 0)$ sont des vecteurs du plan d'équation $x + y - 2z = 0$. Le vecteur $\vec{c}(1, 1, -2)$ est normal à ce plan. On vérifie que \vec{a} et \vec{b} sont orthogonaux. Posons $\vec{u}_1 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, $\vec{u}_2 = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ et $\vec{u}_3 = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}$. La famille (u_1, u_2, u_3) est une base

orthonormale de E et dans cette base, la matrice de s_1 est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de (u_1, u_2, u_3) dans la base canonique est

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \text{ La matrice de } s_1 \text{ dans la base canonique est donc } M_1 = PMP^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Notons A la matrice de l'énoncé. A est clairement orthogonale et, en développant par rapport à la première ligne, $\det A = 1$. f est donc une rotation. On a clairement $f(\vec{a}) = \vec{a}$ donc l'axe de f est $\text{vect}(\vec{a})$. Notons θ l'angle de f si on dirige l'axe par \vec{a} . On a

$\text{tr}(A) = 1 + 2 \cos \theta = 0$ donc $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. De plus, on a vu que \vec{b} est orthogonal à \vec{a} et, si \mathcal{B} désigne la base canonique,

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{b}, f(\vec{b}), \vec{a}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0 \text{ donc } \sin \theta > 0. \text{ On en déduit } \theta \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

REMARQUE. On peut raisonner plus géométriquement. Si on note $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ la rotation affine d'axe $O + \text{vect}(\vec{a})$ associée à f effectue une permutation circulaire des trois points A, B, C . Comme le vecteur \vec{a} est normal au plan ABC , la restriction de la rotation à ce plan est une rotation plane d'angle θ . Il est alors évident que $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

3. Il suffit de poser $s_2 = s_1 \circ f$ et $s_3 = f \circ s_1$. Les matrices de s_2 et s_3 dans la base canonique sont donc respectivement $M_2 = M_1 A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M_3 = A M_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On trouve les plans plans de réflexions de s_2 et s_3 en résolvant $M_2 X = X$ et $M_3 X = X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve pour s_2 le plan d'équation $2x - y - z = 0$ et pour s_3 le plan d'équation $2y - x - z = 0$.

Solution 32

Supposons que f est une symétrie orthogonale. Alors f est une isométrie vectorielle et donc A est orthogonale i.e. $A^T A = I_n$. De plus, f est une symétrie donc $A^2 = I_n$. On en déduit que $A^T = A$ et donc A est symétrique. Réciproquement, supposons A orthogonale et symétrique. Alors f est une isométrie vectorielle. Or $A^T A = I_n$ et $A^T = A$ donc $A^2 = I_n$ et f est une symétrie. Il est alors classique de montrer que f est une symétrie orthogonale.

Solution 33

f et g sont deux rotations. Si l'une des deux est l'identité, alors on peut toujours considérer que f et g sont deux rotations de même axe. Supposons maintenant f et g distinctes de l'identité. Soit u un vecteur directeur de l'axe de f . Comme f et g commutent, $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$. Donc $g(u)$ appartient à l'axe de f , c'est-à-dire $\text{vect}(u)$. Mais comme g est une isométrie, $\|g(u)\| = \|u\|$ et donc $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$. Si $g(u) = u$, alors u est un vecteur de l'axe de g . f et g sont donc deux rotations de même axe. Si $g(u) = -u$, notons v un vecteur directeur de l'axe de g de sorte que $g(v) = v$. Puisque g est une isométrie $\langle g(u), g(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ et donc $\langle u, v \rangle = 0$. Les axes de f et g sont donc orthogonaux. Comme $g(u) = -u$, g est une rotation d'angle π autrement dit une symétrie orthogonale par rapport à son axe. On a également $g(f(v)) = f(v)$ donc $f(v)$ appartient à l'axe de g et on a à nouveau $f(v) = v$ ou $f(v) = -v$. On ne peut avoir $f(v) = v$ puisque v n'appartient pas à l'axe de f (il lui est orthogonal et non nul). Ainsi $f(v) = -v$, ce qui prouve que f est une rotation d'angle π donc une symétrie orthogonale par rapport à son axe.

Solution 34

1. Soit $(x, y) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \times \text{Im}(f - \text{Id}_E)$. Alors $f(x) = x$ et il existe $a \in E$ tel que $y = f(a) - a$. Alors

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(a) - a \rangle = \langle x, f(a) \rangle - \langle x, a \rangle = \langle f(x), f(a) \rangle - \langle x, a \rangle = 0$$

car $f \in O(E)$. Ainsi $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$.

De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \dim E - \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E) = \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$$

Par conséquent, $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$.

2. Supposons que $(f - \text{Id}_E)^2 = 0$. Alors $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. D'après la question précédente, on a donc $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$. Ainsi $F \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp = \{0_E\}$ puis $\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \{0_E\}$ i.e. $f = \text{Id}_E$.

REMARQUE. On peut également directement en terme d'adjoint sans utiliser la question précédente. Comme $f \in O(E)$, $f^* = f^{-1}$. Remarquons alors que

$$(f - \text{Id})^* \circ (f - \text{Id}_E) = f^* \circ f - f - f^* + \text{Id}_E = 2 \text{Id}_E - f - f^{-1} = -f^{-1} \circ (f - \text{Id}_E)^2 = 0$$

Alors pour tout $x \in E$,

$$\|f(x) - x\|^2 = \langle f(x) - x, f(x) - x \rangle = \langle x, (f - \text{Id}_E)^* \circ (f - \text{Id}_E)(x) \rangle = 0$$

puis $f = \text{Id}_E$.

Solution 35

Puisque $O(E)$ est un groupe, $r \circ s$ est une isométrie vectorielle de E . Comme $\det(r \circ s) = \det(r) \det(s) = 1 \times -1 = -1$, $r \circ s$ est une isométrie vectorielle indirecte. Or E est un plan euclidien donc $r \circ s$ est une réflexion. Ainsi

$$= r \circ s \circ r \circ s = (r \circ s)^2 = \text{Id}_E$$

d'où $s \circ r \circ s = r^{-1}$ et $r \circ s \circ r = s^{-1} = s$.

Solution 36

Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$ et $u^2 = -\text{Id}_2$. Comme $u \in \mathcal{O}(E)$, $u \in \text{GL}(E)$ et $u^* = u^{-1}$. De plus, $u^2 = -\text{Id}_E$ donc $u^{-1} = -u$. Ainsi, $u^* = -u$ et, pour tout $x \in E$,

$$\langle x, u(x) \rangle = \langle u^*(x), x \rangle = \langle -u(x), x \rangle = -\langle x, u(x) \rangle$$

de sorte que $\langle x, u(x) \rangle = 0$.

Supposons que $u^2 = -\text{Id}_E$ et $\forall x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle = 0$. Soit $x \in E$. Alors

$$0 = \langle x + u(x), u(x + u(x)) \rangle = \langle x + u(x), u(x) - x \rangle = \|u(x)\|^2 - \|x\|^2$$

donc $\|u(x)\| = \|x\|$ et u est une isométrie.

Supposons que u est une isométrie et $\forall x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \|u^2(x) + x\|^2 &= \langle (u^2(x) + u(x)) + (x - u(x)), (u^2(x) - u(x)) + (u(x) + x) \rangle \\ &= \langle u^2(x) + u(x), u^2(x) - u(x) \rangle + \langle u^2(x) + u(x), u(x) + x \rangle + \langle x - u(x), u^2(x) - u(x) \rangle + \langle x - u(x), u(x) + x \rangle \\ &= \|u^2(x)\|^2 - \|u(x)\|^2 + \langle u(u(x) + x), u(x) + x \rangle - \langle x - u(x), u(x - u(x)) \rangle + \|x\|^2 - \|u(x)\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|x\|^2 + 0 - 0 + \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $u^2(x) = -x$ puis $u^2 = -\text{Id}_E$.

Solution 37

Posons $f_1 = (1, 0, -1, 0)$ et $f_2 = (0, 1, 0, -1)$. Remarquons que (f_1, f_2) est une base orthogonale de P . Notons p le projecteur orthogonal sur P . Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$,

$$p(x) = \frac{\langle x, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 + \frac{\langle x, f_2 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2 = \frac{1}{2} \langle x, f_1 \rangle f_1 + \frac{1}{2} \langle x, f_2 \rangle f_2$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} p(e_1) &= \frac{1}{2} f_1 = \frac{1}{2} (1, 0, -1, 0) \\ p(e_2) &= \frac{1}{2} f_2 = \frac{1}{2} (0, 1, 0, -1) \\ p(e_3) &= -\frac{1}{2} f_1 = \frac{1}{2} (-1, 0, 1, 0) \\ p(e_4) &= -\frac{1}{2} f_2 = \frac{1}{2} (0, -1, 0, 1) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $s = 2p - \text{Id}_{\mathbb{R}_4}$,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(s) = 2 \text{mat}_{\mathcal{B}}(p) - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 38

Comme O est orthogonale, $O^T O = I_n$. On en déduit en particulier,

$$A^T A + C^T C = I_p$$

$$A^T B + C^T D = 0$$

$$B^T B + D^T D = I_q$$

$$B^T A + D^T C = 0$$

- Si $\det A = \det D = 0$, alors on a bien l'inégalité demandée.

- Si $\det D \neq 0$, posons $M = \left(\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline \mathbf{0} & D^T \end{array} \right)$ et $N = MO = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \mathbf{0} \\ \hline D^T C & D^T D \end{array} \right)$. Les matrices M et N étant triangulaires par blocs, on a $\det M = \det(A^T) \det(D^T) = \det A \det D$ et $\det N = \det I_p \det(D^T D) = (\det D)^2$. De plus, $\det N = \det(MO) = \det M \det O$. On en déduit que $(\det D)^2 = \det A \det D \det O$. Puisque $\det D \neq 0$, $\det D = \det A \det O$ et donc $(\det D)^2 = (\det A)^2 (\det O)^2$. Or O est orthogonale donc $\det O = \pm 1$ et $(\det O)^2 = 1$. On a bien l'égalité demandée.

- Si $\det A \neq 0$, posons $M = \left(\begin{array}{c|c} A^T & \mathbf{0} \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right)$ et $N = MO = \left(\begin{array}{c|c} A^T A & A^T B \\ \hline \mathbf{0} & I_q \end{array} \right)$. Les matrices M et N étant triangulaires par blocs, on a $\det M = \det(A^T) \det(D^T) = \det A \det D$ et $\det N = \det(A^T A) \det I_q = (\det A)^2$. De plus, $\det N = \det(MO) = \det M \det O$. On en déduit que $(\det A)^2 = \det A \det D \det O$. Puisque $\det A \neq 0$, $\det A = \det D \det O$ et donc $(\det A)^2 = (\det D)^2 (\det O)^2$. On conclut comme précédemment en remarquant que $(\det O)^2 = 1$.

Solution 39

Première méthode. On a $B = P^{-1}AP$ où P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales. P est donc une matrice orthogonale. On a donc $P^{-1} = P^T$ puis $B = P^T AP$. Ainsi

$$\text{tr}(B^T B) = \text{tr}(P^T A^T P P^T A P) = \text{tr}(P^T A^T A P) = \text{tr}((P^T A^T A)P) = \text{tr}(P(P^T A^T A)) = \text{tr}(A^T A)$$

Deuxième méthode. Notons u l'endomorphisme dont A et B sont les matrices dans deux bases orthonormales. Alors $\text{tr}(u^* \circ u) = \text{tr}(A^T A) = \text{tr}(B^T B)$.

Solution 40

1. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors $X^T X$ est une matrice carrée réelle de taille 1 i.e. un réel et $X^T X = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Ainsi $X^T X \geq 0$ puisque les x_k

sont des réels et $X^T X = 0$ implique $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0$ i.e. $X = 0$.

2. Soit $X \in \text{Ker}(I_n + M)$. On a donc $(I_n + M)X = 0$ i.e. $MX = -X$. Ainsi $X^T MX = -X^T X$. Mais en transposant l'égalité $MX = -X$, on obtient $X^T M^T = -X^T$ et donc $X^T M = X^T$ puisque $M^T = -M$. Ainsi $X^T MX = X^T X$. Par conséquent, $X^T X = -X^T X$ et donc $X^T X = 0$. D'après la question précédente, $X = 0$. D'où $\text{Ker}(I_n + M) = \{0\}$ et $I_n + M$ est inversible.

3. On a $A^T A = ((I_n + M)^{-1})^T (I_n - M)^T (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Or

$$((I_n + M)^{-1})^T = ((I_n + M)^T)^{-1} = (I_n - M)^{-1} \quad \text{et} \quad (I_n - M)^T = I_n + M$$

Ainsi $A^T A = (I_n - M)^{-1} (I_n + M)(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Or $I_n - M$ et $I_n + M$ commutent donc

$$A^T A = (I_n - M)^{-1} (I_n - M)(I_n + M)(I_n + M)^{-1} = I_n$$

Ainsi A est orthogonale.

Solution 41

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ laissant $(\mathbb{R}_+)^n$ invariant. On notera $(C_j)_{1 \leq j \leq n}$ la famille des vecteurs colonnes de A et $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des vecteurs lignes de A . Notons $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Comme $E_i \in (\mathbb{R}_+)^n$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_i = AE_i \in (\mathbb{R}_+)^n$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Autrement dit A est à coefficients positifs.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Supposons $A_{ij} \neq 0$, c'est-à-dire $A_{ij} > 0$ puisque A est à coefficients positifs. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$.

$$\langle L_i, L_k \rangle = \sum_{l=1}^n A_{il} A_{kl} \geq A_{ij} A_{kj}$$

car A est à coefficients positifs. Or la famille des vecteurs lignes de A est orthonormée donc $\langle L_i, L_k \rangle = 0$. On en déduit que $A_{kj} = 0$. En raisonnant sur les colonnes de A , on démontre de la même manière que pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}$, $A_{ik} = 0$.

Ceci signifie que chaque ligne et chaque colonne comporte au plus un coefficient non nul. Puisque les vecteurs lignes et colonnes de A sont normés, chaque ligne et chaque colonne possède exactement un coefficient non nul valant ± 1 , en fait 1 car A est à coefficients positifs. Ainsi A est une matrice de permutation.

Réciproquement, toute matrice de permutation est bien orthogonale et laisse stable $(\mathbb{R}_+)^n$.

Solution 42

Supposons $A = 0$. Alors il est clair que $A = \text{com}(A) = 0$.

Supposons $A \in \text{SO}(n)$. On sait que $\text{com}(A)A^T = \det(A)I_n$. Puisque $A \in \text{SO}(n)$, $\det(A) = 1$ et $A^T = A^{-1}$. Il s'ensuit que $\text{com}(A) = A$.

Supposons maintenant $A = \text{com}(A)$. Puisque $\text{com}(A)^T A = \det(A)I_n$, $A^T A = \det(A)I_n$.

- Si $\det(A) = 0$, $A^T A = 0$ et, a fortiori, $\text{tr}(A^T A) = 0$ et donc $A = 0$ puisque $(M, N) \mapsto \text{tr}(M^T N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $\det(A) \neq 0$, alors $\text{tr}(A^T A) = \text{tr}(\det(A)I_n) = n \det(A)$. En particulier, $\det(A) > 0$ à nouveau car $(M, N) \mapsto \text{tr}(M^T N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs, $\det(A^T A) = \det(\det(A)I_n)$ ou encore $\det(A)^2 = \det(A)^n$. Puisque $n \neq 2$ et $\det(A) > 0$, $\det(A) = 1$. Ainsi $A^T A = I_n$ et $A \in \text{SO}(n)$.

Solution 43

1. On remarque que $A = (A^2)^T = (A^T)^2 = A^4$. Ainsi A est annulé par $P = X^4 - X = X(X-1)(X-j)(X-\bar{j})$. Comme P est simplement scindé sur \mathbb{C} , A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. La question précédente montre que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, 1, j, \bar{j}\}$. Notons m_λ la multiplicité d'une valeur propre λ (on convient que $m_\lambda = 0$ si λ n'est pas valeur propre). Comme A est à coefficients réels, χ_A l'est également de sorte $m_j = m_{\bar{j}}$. Comme A est diagonalisable,

$$\text{tr}(A) = 0 \cdot m_0 + 1 \cdot m_1 + j \cdot m_j + \bar{j} \cdot m_{\bar{j}} = m_0 - m_j \in \mathbb{Z}$$

puisque $j + \bar{j} = -1$. De même,

$$\det(A) = 0^{m_0} 1^{m_1} j^{m_j} \bar{j}^{m_{\bar{j}}} = 0^{m_0} (j)^{-m_j} = 0^{m_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } m_0 = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car $j\bar{j} = 1$.

3. On a vu que $A^4 = A$. Mais comme A est inversible, $A^3 = I_2$. Ainsi $A^T A = A^3 = I_2$. La matrice A est donc orthogonale. De plus, $\det(A) = 1$ donc $A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$. Ainsi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. De plus, $A^3 = R(3\theta) = I_2$ donc

$$3\theta \equiv 0[2\pi] \text{ i.e. } \theta \equiv 0[2\pi/3]. \text{ Ainsi } A = R(0) = I_2 \text{ ou } A = R\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } A = R\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Inversement, on vérifie que ces trois matrices conviennent.

Adjoint

Solution 44

Si $f = 0$, alors $f^* = 0$ et $\|f\| = \|f^*\| = 0$.

Supposons maintenant $f \neq 0$. Soit x un vecteur unitaire de E . Alors

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \langle f(x), f(x) \rangle \\ &= \langle f^* \circ f(x), x \rangle && \text{par définition de l'adjoint} \\ &\leq \|f^* \circ f(x)\| \|x\| && \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|f^*\| \|f\| \|x\|^2 && \text{par définition de la norme subordonnée} \\ &\leq \|f^*\| \|f\| && \text{car } x \text{ est unitaire}\end{aligned}$$

Puisque $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$, on a par passage à la borne supérieure,

$$\|f\|^2 \leq \|f^*\| \|f\|$$

et donc $\|f\| \leq \|f^*\|$ puisque $\|f\| > 0$.

En appliquant ce qui précède à f^* qui est également non nul, on obtient $\|f^*\| \leq \|f^{**}\|$. Or $f^{**} = f$ donc, par double inégalité, $\|f^*\| = \|f\|$.

Solution 45

1. Il est clair que $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^* \circ u)$. Soit $x \in \text{Ker}(u^* \circ u)$. Alors $u^* \circ u(x) = 0$. En particulier, $\langle u^* \circ u(x), x \rangle = 0$ puis $\langle u(x), u(x) \rangle = 0$ par définition de l'adjoint. On en déduit que $u(x) = 0_E$ par axiome de séparation. Ainsi $x \in \text{Ker}(u)$ puis $\text{Ker}(u^* \circ u) \subset \text{Ker}(u)$. Par double inclusion, $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^* \circ u)$.
2. Puisque $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^* \circ u)$, on en déduit d'après le théorème du rang que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^* \circ u)$. En appliquant ce résultat à u^* et en utilisant l'involutivité de l'adjonction, on obtient $\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u \circ u^*)$. Enfin, en notant A la matrice de u dans une base orthonormée de E ,

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = \text{rg}(A^T) = \text{rg}(u^*)$$

Solution 46

Soit $x \in \text{Ker}(u + u^*)$. Alors $\|u(x) + u^*(x)\|^2 = 0$. En développant, on obtient

$$\|u(x)\|^2 + \|u^*(x)\|^2 + 2\langle u(x), u^*(x) \rangle = 0$$

Mais par définition de l'adjoint, $\langle u(x), u^*(x) \rangle = \langle u^2(x), x \rangle$. Or $\text{Im } u = \text{Ker } u$ donc $u^2 = 0$. Finalement

$$\|u(x)\|^2 + \|u^*(x)\|^2 = 0$$

et donc $u(x) = u^*(x) = 0$. Ainsi $x \in \text{Ker } u \cap \text{Ker } u^*$. On montre classiquement que $\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$. Or $\text{Im } u = \text{Ker } u$ donc $\text{Ker } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$. On en déduit que

$$x \in \text{Ker } u \cap (\text{Ker } u)^\perp = \{0\}$$

Ainsi $\text{Ker}(u + u^*) = \{0\}$ et u est injectif et donc bijectif puisque E est de dimension finie.

Solution 47

Il est clair que $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*) \subset \text{Ker}(f + f^*)$. Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(f + f^*)$, soit encore $f(x) = -f^*(x)$. Comme $(f^*)^* = f$, on a :

$$\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x), f^*(x) \rangle = \langle x, f \circ f^*(x) \rangle$$

Or,

$$(f \circ f^*)(x) = f(f^*(x)) = f(-f(x)) = -f^2(x) = 0$$

car $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Ainsi $\|f^*(x)\|^2 = 0$ puis $f^*(x) = 0$ et $f(x) = -f^*(x) = 0$. Ainsi $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*)$.

Par double inclusion, $\text{Ker}(f + f^*) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*)$.

Solution 48

Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Posons $P = g_A^*(M)$. Alors, par définition de l'adjoint

$$\langle P, N \rangle = \langle g_A^*(M), N \rangle = \langle M, g_A(N) \rangle = \langle M, AN \rangle$$

Par définition du produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle M, AN \rangle = \text{tr}(M^T AN) = \text{tr}((A^T M)^T N) = \langle A^T M, N \rangle$$

Ainsi $\langle P, N \rangle = \langle A^T M, N \rangle$ ou encore $\langle P - A^T M, N \rangle = 0$. Ceci étant valable pour tout $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P - A^T M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^\perp = \{0\}$. Ainsi $g_A^*(M) = P = A^T M$. Finalement, $g_A^* = g_{A^T}$.

Solution 49

1. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x &\in \text{Ker } u^* \\ \iff u^*(x) &= 0_E \\ \iff \forall y \in E, \langle u^*(x), y \rangle &= 0 \\ \iff \forall y \in E, \langle x, u(y) \rangle &= 0 \\ \iff \forall z \in \text{Im } u, \langle x, z \rangle &= 0 \\ \iff x &\in (\text{Im } u)^\perp \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$.

En appliquant cette égalité à u^* , on obtient $\text{Ker } u = (\text{Im } u^*)^\perp$ car $(u^*)^* = u$. Mais comme E est de dimension finie, $(\text{Ker } u)^\perp = \text{Im } u^*$.

2. D'après le théorème du rang et la question précédente

$$\text{rg}(u^*) = \dim E - \dim \text{Ker}(u^*) = \dim \text{Ker}(u^*)^\perp = \dim \text{Im}(u) = \text{rg}(u)$$

Solution 50

1. En passant à l'adjoint dans l'égalité de l'énoncé, on obtient également

$$u^* \circ u + \alpha u^* + \beta u = 0$$

En soustrayant cette égalité de celle de l'énoncé, on obtient

$$(\alpha - \beta)(u - u^*) = 0$$

donc $u = u^*$. Finalement, $u^2 + \alpha u + \beta u = 0$ ou encore $u^2 = -(\alpha + \beta)u$.

- Si $\alpha + \beta \neq 0$, posons $\lambda = -(\alpha + \beta)$ et $p = \frac{1}{\lambda}u$. On a donc bien $u = \lambda p$. De plus,

$$p^2 = \frac{1}{\lambda^2}u^2 = \frac{1}{\lambda}u = p$$

Et enfin, comme $u = u^*$, $p = p^*$ donc p est un projecteur orthogonal.

- Si $\alpha + \beta = 0$, alors $u^* \circ u = u^2 = 0$. Ainsi

$$\forall x \in E, \|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^* \circ u(x), x \rangle = 0$$

donc $u = 0$ et on peut choisir $\lambda = 0$ et $p = 0$.

2. • Supposons $\alpha = \beta \neq 0$. Soit $(x, y) \in \text{Ker } u \times \text{Im } u$. Il existe donc $z \in E$ tel que $y = u(z)$. Alors

$$\langle x, y \rangle = \langle x, u(z) \rangle = \langle u^*(x), z \rangle$$

Or $u^* \circ u(x) = \alpha u(x) + \alpha u^*(x)$ donc $\alpha u^*(x) = 0_E$ puisque $x \in \text{Ker } u$ puis $u^*(x) = 0_E$ car $\alpha \neq 0$. Finalement $\langle x, y \rangle = 0$ puis $\text{Ker } u \perp \text{Im } u$.

- Supposons $\alpha = \beta = 0$. Alors $u^* \circ u = 0$ puis $u = 0$ comme montré précédemment. On a donc $\text{Ker } u = E \perp \{0_E\} = \text{Im } u$.

Solution 51

On se donne \mathcal{B} une base orthonormée de E . Alors

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \text{tr}(f^* \circ g) = \text{tr}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^* \circ g)) = \text{tr}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^*) \circ \text{mat}_{\mathcal{B}}(g)) = \text{tr}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)^T \text{mat}_{\mathcal{B}}(g))$$

On conclut alors facilement car on sait que $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 52

Dans ce qui suit, on note A la matrice de f dans une base orthonormée de E . Ainsi A^T est la matrice de f^* dans cette même base. On note également $n = \dim E$.

1. La trace est invariante par transposition :

$$\text{tr}(f) = \text{tr}(A) = \text{tr}(A^T) = \text{tr}(f^*)$$

2. Le déterminant est invariant par transposition :

$$\det(f) = \det(A) = \det(A^T) = \det(f^*)$$

3. On sait que

$$\chi_f = \chi_A = \det(XI_n - A) = \det((XI_n - A)^T) = \det(XI_n - A^T) = \chi_{A^T} = \chi_{f^*}$$

4. Le spectre est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique : comme $\chi_f = \chi_{f^*}$, $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(f^*)$.

5. Le rang est invariant par transposition

$$\dim(E_\lambda(f)) = \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \dim \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \dim \text{Ker}((A - \lambda I_n)^T) = \dim \text{Ker}(A^T - \lambda I_n) = \dim \text{Ker}(f^* - \lambda \text{Id}_E) = \dim E_\lambda(f^*)$$

Solution 53

1. Notons $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base \mathcal{B} . Puisque \mathcal{B} est orthonormée, la matrice de u^* dans cette base est $M^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

La condition $u^* \circ u = u \circ u^*$ donne $M^T M = M M^T$ ou encore

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Notamment $b^2 = c^2$ donc $c = \pm b$. On ne peut avoir $b = c$ car sinon M serait symétrique et u serait alors diagonalisable car \mathcal{B} est orthonormée. Notamment, χ_u serait scindé, ce qui n'est pas. On en déduit que $b \neq 0$ et $c = -b$. Or $ac + bd = ab + cd$ ce qui donne $a = d$ car $c = -b$ et $b \neq 0$. La matrice de u dans la base \mathcal{B} est donc bien de la forme annoncée.

2. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$. Comme F est stable par u , la matrice M de u dans cette base \mathcal{B} est de la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

avec A et C des matrices carrées. Comme \mathcal{B} est orthonormée, la matrice de u dans la base \mathcal{B} est

$$M^T = \left(\begin{array}{c|c} A^T & 0 \\ \hline B^T & C^T \end{array} \right)$$

La condition $u^* \circ u = u \circ u^*$ donne $M^T M = M M^T$. En raisonnant par blocs, on obtient :

$$\left(\begin{array}{c|c} A^T A & A^T B \\ \hline B^T A & B^T B + C^T C \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A A^T + B B^T & B C^T \\ \hline C B^T & C C^T \end{array} \right)$$

Notamment, $B^T B + C^T C = C C^T$ puis $\text{tr}(B^T B) + \text{tr}(C^T C) = \text{tr}(C C^T)$. Mais $\text{tr}(C^T C) = \text{tr}(C C^T)$ donc $\|B\|^2 = \text{tr}(B^T B) = 0$ puis $B = 0$. Ceci prouve que F^\perp est stable par u .

On obtient alors également que $A^T A = A A^T$. Mais A est la matrice de u_F dans une base orthonormée de F donc $u_F^* \circ u_F = u_F \circ u_F^*$ ce qui prouve que u_F est un endomorphisme normal de F . De même, $C^T C = C C^T$ donc u_{F^\perp} est un endomorphisme normal de F^\perp .

3. On raisonne par récurrence sur la dimension n de E . Si $n = 1$, le résultat est trivialement vrai et si $n = 2$, il est encore vrai d'après la première question.

Supposons le résultat vrai pour toute dimension de E inférieure ou égale à $n - 1 \in \mathbb{N}^*$. Soit alors u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E de dimension n .

Si u possède une valeur propre λ , on choisit un vecteur propre x associé à cette valeur propre. Alors u induit un endomorphisme normal de $\text{vect}(x)^\perp$. On applique l'hypothèse de récurrence à cet endomorphisme induit, ce qui donne le résultat.

Si u ne possède pas de valeur propre, alors son polynôme minimal μ_u ne possède que des facteurs irréductibles de degré 2. Soit P un tel facteur que l'on suppose unitaire. Il existe donc un polynôme Q tel que $\mu_u = PQ$. Alors $P(u) \circ Q(u) = 0$ donc $P(u)$ n'est pas inverse sinon $Q(u) = 0$, ce qui contredit la minimalité de μ_u . Il existe donc $x \in E$ non nul tel que $P(u)(x) = 0$. La famille $(x, u(x))$ est libre car u ne possède pas de valeur propre. De plus, il existe $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = X^2 + cX + d$. Alors $u^2(x) = -cu(x) - dx$ de sorte que $F = \text{vect}(x, u(x))$ est stable par u . On sait que u_F est un endomorphisme normal de F . De plus, $\chi_{u_F} = P$ est irréductible donc, d'après

la première question, sa matrice dans une base orthonormée de F est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On applique alors

l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme normal u_{F^\perp} ce qui permet de conclure.

Solution 54

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) &\iff u(x) = \lambda x \\ &\iff \|u(x) - \lambda x\|^2 = 0 \\ &\iff \langle u(x) - \lambda x, u(x) - \lambda x \rangle = 0 \\ &\iff \langle (u - \lambda \text{Id}_E)^* \circ (u - \lambda \text{Id}_E)(x), x \rangle = 0 \\ &\iff \langle (u^* - \lambda \text{Id}_E) \circ (u - \lambda \text{Id}_E)(x), x \rangle = 0 \\ &\iff \langle (u - \lambda \text{Id}_E) \circ (u^* - \lambda \text{Id}_E)(x), x \rangle = 0 && \text{car } u^* \circ u = u \circ u^* \\ &\iff \langle (u - \lambda \text{Id}_E) \circ (u - \lambda \text{Id}_E)^*(x), x \rangle = 0 \\ &\iff \langle (u - \lambda \text{Id}_E)^*(x), (u - \lambda \text{Id}_E)^*(x) \rangle = 0 \\ &\iff \|u^*(x) - \lambda x\|^2 = 0 \\ &\iff u^*(x) = \lambda x \\ &\iff x \in \text{Ker}(u^* - \lambda \text{Id}_E) \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(u^*)$ et que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u) = \text{Sp}(u^*)$, $E_\lambda(u) = E_\lambda(u^*)$.

2. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u . Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Alors

$$\langle u(x), y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

Mais on a également,

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Or d'après la question précédente, $y \in E_\mu(u) = E_\mu(u^*)$ donc $u^*(y) = \mu y$. On en déduit que $\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$ puis $\langle x, y \rangle = 0$ car $\lambda \neq \mu$. Ainsi $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u^*)$.

Solution 55

1. Sachant que pour deux endomorphismes u et v de E , $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$, on prouve aisément par récurrence que $(u^k)^* = (u^*)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Par linéarité de l'adjonction,

$$P(u)^* = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (u^k)^* = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (u^*)^k = P(u^*)$$

2. **Première méthode.** Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(u) = 0 \iff P(u)^* = 0 \iff P(u^*) = 0$$

Ainsi u et u^* possèdent le même idéal annulateur. Comme le polynôme minimal est l'unique générateur unitaire de cet idéal, $\pi_u = \pi_{u^*}$.

Deuxième méthode. $\pi_u(u^*) = \pi_u(u)^* = 0^* = 0$ donc π_{u^*} divise π_u . En appliquant ceci à u^* , $\pi_{(u^*)^*} = \pi_u$ divise π_{u^*} . Comme π_u et π_{u^*} sont unitaires par définitions, $\pi_u = \pi_{u^*}$.

Solution 56

1. a. La linéarité de $u \otimes v$ découle essentiellement de la bilinéarité du produit scalaire.
 De plus, $\text{Im}(u \otimes v) \subset \text{vect}(u)$ donc $\text{rg}(u \otimes v) \leq 1$. Par ailleurs, $(u \otimes v)(v) = \|v\|^2 u \neq 0_E$ car u et v sont non nuls. Par conséquent, $\text{rg}(u \otimes v) = 1$.
 b. Soit λ une valeur propre de $u \otimes v$ et x un vecteur propre associé. Alors $\langle v|x \rangle u = \lambda x$. Si $\lambda \neq 0$, alors $x \in \text{vect}(u)$. On en déduit que $\langle v|u \rangle u = \lambda u$ puis $\lambda = \langle v|u \rangle$ car $u \neq 0_E$.
 Si $\langle v|u \rangle \neq 0$, alors $\text{Sp}(u \otimes v) \subset \{0, \langle v|u \rangle\}$. De plus, $\text{Ker}(u \otimes v) = \text{vect}(v)^\perp$ et, ce qui précède montre que $\text{Ker}(u \otimes v - \langle v|u \rangle \text{Id}_E) \subset \text{vect}(u)$. L'inclusion réciproque est triviale. En conclusion, $\text{Sp}(u \otimes v) = \{0, \langle v|u \rangle\}$, $E_0(u \otimes v) = \text{vect}(v)^\perp$ et $E_{\langle v|u \rangle}(u \otimes v) = \text{vect}(u)$.
 Si $\langle v|u \rangle = 0$, ce qui précède montre que $\text{Sp}(u \otimes v) = \{0\}$ et $E_0(u \otimes v) = \text{vect}(v)^\perp$.
 c. Si $\langle v|u \rangle \neq 0$, alors $u \otimes v$ est diagonalisable car $\dim E_0(u \otimes v) + \dim E_{\langle v|u \rangle}(u \otimes v) = \dim E - 1 + 1 = \dim E$.
 Si $\langle v|u \rangle = 0$, $u \otimes v$ n'est pas diagonalisable car 0 est son unique valeur propre et $\dim E_0(u \otimes v) = \dim E - 1 < \dim E$.

2. Soit $x \in E$. Alors

$$(u \otimes v)^2(x) = \langle v|x \rangle (u \otimes v)(u) = \langle v|x \rangle \langle v|u \rangle u = \langle v|u \rangle (u \otimes v)(x)$$

Ainsi $(u \otimes v)^2 = \langle v|u \rangle (u \otimes v)$. On en déduit que $P = X^2 - \langle v|u \rangle X$ annule $u \otimes v$. Si $\langle v|u \rangle \neq 0$, alors P est simplement scindé et $u \otimes v$ est diagonalisable. Si $\langle v|u \rangle = 0$, alors $(u \otimes v)^2 = 0$ et $u \otimes v$ est nilpotent. Il ne peut être diagonalisable car sinon il serait nul.

3. Supposons que g commute avec $u \otimes v$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$(u \otimes v) \circ g(x) = g \circ (u \otimes v)(x)$$

ou encore

$$\langle v|g(x) \rangle u = \langle v|x \rangle g(u)$$

Notamment, comme $v \neq 0_E$, $g(u) = \alpha u$ avec $\alpha = \frac{\langle v|g(u) \rangle}{\|v\|^2}$. La dernière égalité peut également s'écrire

$$\forall x \in E, \langle g^*(v)|x \rangle u = \alpha \langle v|x \rangle u$$

Comme $u \neq 0_E$, on a donc $\langle g^*(v) - \alpha v|x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$ et donc $g^*(v) = \alpha v$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} (u \otimes v) \circ g(x) &= \langle v|g(x) \rangle u = \langle g^*(v)|x \rangle u = \alpha \langle v|x \rangle u \\ g \circ (u \otimes v)(x) &= \langle v|x \rangle g(u) = \alpha \langle v|x \rangle u \end{aligned}$$

donc g et $u \otimes v$ commutent.

Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Solution 57

Remarquons que $\phi = p + q$ où p et q sont les projecteurs orthogonaux respectifs sur $\text{vect}(a)$ et $\text{vect}(b)$. Ainsi ϕ est un endomorphisme auto-adjoint comme somme d'endomorphismes auto-adjoints. En particulier, ϕ est diagonalisable. On va de toute façon s'en rendre compte en déterminant les éléments propres de ϕ .

Remarquons déjà que ϕ est nulle sur $(\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$. Ainsi $(\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp \subset \text{Ker } \phi$. Réciproquement si $x \in \text{Ker } \phi$, $\langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b = 0$ de sorte que $\langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle = 0$ car la famille (a, b) est libre. Ainsi $x \in \text{vect}(a)^\perp \cap \text{vect}(b)^\perp = (\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$. Finalement, $\text{Ker } \phi = (\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$.

La nature géométrique de ϕ incite fortement à penser que $a+b$ et $a-b$ sont vecteurs propres. En effet, ces deux vecteurs sont non nuls puisque a et b sont non colinéaires et un calcul simple montre que $\phi(a) = a + \langle a, b \rangle b$ et $\phi(b) = b + \langle a, b \rangle a$ donc $\phi(a+b) = (1 + \langle a, b \rangle)(a+b)$ et $\phi(a-b) = (1 - \langle a, b \rangle)(a-b)$. Donc $a+b$ et $a-b$ sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres $1 + \langle a, b \rangle$ et $1 - \langle a, b \rangle$. Si $\langle a, b \rangle \neq 0$, ces valeurs propres sont distinctes : les sous-espaces propres associées à ces valeurs propres sont donc de dimension 1 puisqu'on a déjà vu que le noyau i.e. le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 était de dimension $n - 2$. Ces sous-espaces propres sont donc respectivement $\text{vect}(a+b)$ et $\text{vect}(a-b)$. Si $\langle a, b \rangle = 0$, alors le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 contient $\text{vect}(a+b, a-b) = \text{vect}(a, b)$ et est en fait exactement égal à celui-ci puisque la dimension de $\text{vect}(a, b)$ est 2 et que $\text{Ker } \phi$ est déjà de dimension $n - 2$.

Récapitulons. Dans tous les cas, 0 est valeur propre de ϕ et le sous-espace propre associé est $(\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$. Si $\langle a, b \rangle \neq 0$, ϕ possède deux valeurs propres supplémentaires $1 + \langle a, b \rangle$ et $1 - \langle a, b \rangle$ et les sous-espaces propres respectivement associés sont $\text{vect}(a+b)$ et $\text{vect}(a-b)$. Si $\langle a, b \rangle = 0$, ϕ possède 1 comme seule valeur propre en sus de 0 et le sous-espace propre associé est $\text{vect}(a, b)$. Il est d'ailleurs géométriquement clair dans ce cas que ϕ induit l'identité sur $\text{vect}(a, b)$.

Solution 58

1. Pour tout $x \in E$,

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle^2 \geq 0$$

donc v est positif. Supposons maintenant que $\langle f(x), x \rangle = 0$. Tous les termes de la somme précédente étant positifs, ils sont tous nuls. Ainsi x est orthogonal à chacun des u_k et donc au sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, c'est-à-dire E . Ainsi $x = 0_E$.

2. Considérons une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E formée de vecteurs propres de E . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées à ces vecteurs propres. Ces valeurs propres sont toutes strictement positives. Comme (e_1, \dots, e_n) est une base de E , il existe un unique endomorphisme g de E tel que $g(e_i) = \frac{1}{\lambda_i} e_i$. On a clairement $g^2(e_i) = \frac{1}{\lambda_i} e_i = f^{-1}(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme (e_1, \dots, e_n) est

une base de E , $g^2 = f^{-1}$.

Soit $(x, y) \in E^2$. Alors

$$\langle g(x), y \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \langle x, g(y) \rangle$$

donc g est auto-adjoint. Les valeurs propres de g sont les réels strictement positifs $\frac{1}{\lambda_i}$ donc v est défini positif.

3. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$u_i = f(f^{-1}(u_i)) = \sum_{k=1}^n \langle f^{-1}(u_i), u_k \rangle u_k$$

Mais comme (u_1, \dots, u_n) est libre, $\langle f^{-1}(u_i), u_k \rangle = \delta_{i,k}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors, comme g est auto-adjoint,

$$\langle g(u_i), g(u_j) \rangle = \langle g^2(u_i), u_j \rangle = \langle f^{-1}(u_i), u_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Ainsi $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est bien une base orthonormée de E .

Solution 59

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E formée de vecteurs propres de f . Notons λ_i la valeur propre

associée à e_i . Comme $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on définit bien un endomorphisme g de E en posant $g(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors clairement $g^2(e_i) = \lambda_i e_i = f(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on a bien $g^2 = f$.

Enfin, la matrice de g dans la base orthonormale (e_1, \dots, e_n) est diagonale donc symétrique : g est donc un endomorphisme auto-adjoint.

Solution 60

Soit $x \in \text{Ker } f$ et $y \in \text{Im } f$. Il existe donc $z \in E$ tel que $y = f(z)$. Ainsi

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = \langle f(x), z \rangle = \langle 0_E, z \rangle = 0$$

Ainsi $\text{Ker } f \subset (\text{Im } f)^\perp$. De plus, $\dim(\text{Im } f)^\perp = n - \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f$ d'après le théorème du rang. Ainsi $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$.

Solution 61

Comme f est auto-adjoint, il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E qui diagonalise f .

(i) \implies (iii) La condition (i) implique que les valeurs propres de f sont positives. Notons e_1, \dots, e_n les éléments de \mathcal{B} et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. On définit h en posant $h(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On vérifie qu'on a bien $h = h^*$ et $f = h^2$.

(iii) \implies (ii) Il suffit de prendre $g = h$.

(ii) \implies (i) Pour tout $x \in E$,

$$\langle f(x), x \rangle = \langle g^* \circ g(x), x \rangle = \langle g(x), g(x) \rangle \geq 0$$

Solution 62

Supposons f défini positif. L'application $\varphi : (x, y) \in E^2 \mapsto \langle f(x), y \rangle$ est un produit scalaire :

- la bilinéarité provient de la linéarité de f et de la bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
- la symétrie provient de la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et du fait que f est autoadjoint ;
- pour $x \in E$, $\langle f(x), x \rangle \geq 0$ et on a égalité uniquement si $x = 0_E$.

La partie X est la boule unité fermée pour la norme associée au produit scalaire φ : elle est donc compacte pour cette norme puisque E est de dimension finie. Les normes étant toutes équivalentes en dimension finie, X est également compacte pour la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Supposons X bornée. Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et x un vecteur propre associé. Comme X est bornée et $x \neq 0_E$, on peut choisir $r \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment grand tel que $rx \notin X$. Alors $\langle f(rx), rx \rangle > 1$ i.e. $\lambda r^2 \|x\|^2 > 1$ puis $\lambda > \frac{1}{r^2 \|x\|^2} > 0$. Ainsi $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$ et f est défini positif.

Solution 63

1. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E formée de vecteurs propre de f . Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i . Comme $f \in \mathcal{S}^+(E)$, $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme (e_1, \dots, e_n) est une base de E , il existe un (unique) $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g^2(e_i) = \lambda_i e_i = f(e_i)$. Comme (e_1, \dots, e_n) est une base de E , $g^2 = f$. De plus, (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de g donc $g \in \mathcal{S}(E)$ d'après le théorème spectral.
2. L'endomorphisme g déterminé à la question précédente convient puisque $\text{Sp}(g) \subset \mathbb{R}_+$. Montrons son unicité. Supposons donc qu'il existe $(g, h) \in \mathcal{S}^+(E)^2$ tel que $f = g^2 = h^2$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $X - \sqrt{\lambda}$ et $X + \sqrt{\lambda}$ sont premiers entre eux donc, d'après le lemme des noyaux,

$$\text{Ker}(g^2 - \lambda^2 \text{Id}_E) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \lambda \text{Id}_E)$$

Mais comme $\text{Sp}(g) \subset \mathbb{R}_+$, $\text{Ker}(g + \lambda \text{Id}_E) = \{0\}$. Ainsi $\text{Ker}(g^2 - \lambda^2 \text{Id}_E) = \text{Ker}(g - \lambda \text{Id}_E)$. De la même manière, $\text{Ker}(h^2 - \lambda^2 \text{Id}_E) = \text{Ker}(h - \lambda \text{Id}_E)$. Or $g^2 = h^2$ donc $\text{Ker}(g - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(h - \lambda \text{Id}_E)$.

Par ailleurs, $\text{Ker } g \subset \text{Ker } g^2$. Mais si l'on se donne $X \in \text{Ker } g^2$, alors

$$\|g(x)\|^2 = \langle g(x), g(x) \rangle = \langle x, g^* \circ g(x) \rangle = \langle x, g^2(x) \rangle = 0$$

donc $g(x) = 0$ puis $x \in \text{Ker } g$. Ainsi $\text{Ker } g = \text{Ker } g^2$. De même, $\text{Ker } h = \text{Ker } h^2$. Or $g^2 = h^2$ donc $\text{Ker } g = \text{Ker } h$. Finalement

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \text{Ker}(g - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(h - \lambda \text{Id}_E)$$

Mais comme $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ et $\text{Sp}(T) \subset \mathbb{R}_+$, S et T ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres. Comme g et h sont diagonalisables, ils sont égaux.

Solution 64

1. L'application u est clairement linéaire. De plus, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$u(X^k) = \int_0^1 (X+t)^n t^k dt = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \int_0^1 t^{n-j+k} dt X^j = \sum_{j=0}^n \frac{1}{n-j+k+1} \binom{n}{j} X^j \in E$$

donc $u \in \mathcal{L}(E)$.

Pour $(k, l) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, on a donc

$$\begin{aligned} (u(X^k) | X^l) &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{n-j+k+1} \binom{n}{j} (X^j | X^l) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{n-j+k+1} \cdot \frac{1}{j+l+1} \binom{n}{j} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+k+1} \cdot \frac{1}{n-i+l+1} \binom{n}{n-i} \quad \text{par le changement de variable } i = n-j \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{n-i+l+1} \cdot \frac{1}{i+k+1} \binom{n}{i} = (X^k | u(X^l)) \end{aligned}$$

Par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire, on prouve alors aisément que $(u(P) | Q) = (P | u(Q))$ pour tout $(P, Q) \in E^2$. Ainsi u est bien auto-adjoint.

REMARQUE. En admettant le théorème de Fubini pour les intégrales doubles (hors programme), on pouvait aussi raisonner de la manière suivante.

$$\begin{aligned} (u(P) | Q) &= \int_0^1 u(P)(t) Q(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+s)^n P(s) ds \right) Q(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+s)^n P(s) Q(t) ds \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+s)^n P(s) Q(t) dt \right) ds \quad \text{d'après le théorème de Fubini} \\ &= \int_0^1 P(s) \left(\int_0^1 (t+s)^n Q(t) dt \right) ds \\ &= \int_0^1 P(s) u(Q)(s) ds = (P | u(Q)) \end{aligned}$$

2. C'est le théorème spectral.

3. Fixons $y \in \mathbb{R}$. Comme (P_0, \dots, P_n) est une base orthonormée de E ,

$$(X+y)^n = \sum_{k=0}^n ((X+y)^n | P_k) P_k = \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 (t+y)^n P_k(t) dt \right) P_k = \sum_{k=0}^n u(P_k)(y) P_k = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(y) P_k$$

En évaluant en $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$$

Notamment, en choisissant $y = x$,

$$2^n x^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x)^2$$

En intégrant sur $[0, 1]$,

$$2^n \int_0^1 x^n dx = \sum_{k=0}^n \lambda_k \int_0^1 P_k(x)^2 dx$$

ou encore

$$\frac{2^n}{n+1} = \sum_{k=0}^n \lambda_k \|P_k\|^2 = \sum_{k=0}^n \lambda_k = \text{tr}(u)$$

car les vecteurs P_k sont unitaires.

REMARQUE. On pouvait trouver la trace différemment. En effet, on a calculé

$$u(X^k) = \int_0^1 (X+t)^n t^k dt = \sum_{j=0}^n \frac{1}{n-j+k+1} \binom{n}{j} X^j$$

Si on note A la matrice de u dans la base canonique, alors

$$A_{j,k} = \frac{1}{n-j+k+1} \binom{n}{j}$$

On en déduit que

$$\text{tr}(u) = \text{tr}(A) = \sum_{k=0}^n A_{k,k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{2^n}{n+1}$$

Solution 65

Soit S_n l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^n de norme 1. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$, on pose $\varphi_A(X) = X^T A X$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe une base orthonormée (E_1, \dots, E_n) de \mathbb{R}^n dans laquelle A diagonalise. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons λ_i la valeur propre de A associée à E_i . Soit $X \in S_n$. Il existe donc $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$ et $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. On a alors $\varphi_A(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. On a

alors $\varphi(X) \leq \left(\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i \right) \sum_{i=1}^n x_i^2 = \Phi(A)$. De plus, notons j l'indice de la plus grande valeur propre de A , on a alors $\varphi_A(E_j) = \lambda_j = \Phi(A)$. Par conséquent, $\Phi(A) = \max_{X \in S_n} \varphi_A(X)$.

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\Phi(\lambda A + (1-\lambda)B) = \max_{X \in S_n} \varphi_{\lambda A + (1-\lambda)B}(X) = \max_{X \in S_n} (\lambda \varphi_A(X) + (1-\lambda) \varphi_B(X))$$

Puisque $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$, on a pour tout $X \in S_n$

$$\lambda \varphi_A(X) + (1-\lambda) \varphi_B(X) \leq \lambda \max_{X \in S_n} \varphi_A(X) + (1-\lambda) \max_{X \in S_n} \varphi_B(X) = \lambda \Phi(A) + (1-\lambda) \Phi(B)$$

Il suffit alors de passer au maximum pour $X \in S_n$ pour obtenir

$$\Phi(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda \Phi(A) + (1-\lambda) \Phi(B)$$

Autrement dit, Φ est convexe.

Solution 66

Comme A est symétrique, elle diagonalise dans une base orthonormale i.e. il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P = D$ avec D diagonale.

Posons $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix}$. On vérifie que $Q \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$. De plus, $Q^T B Q = \begin{pmatrix} D + I_n & 0 \\ 0 & D - I_n \end{pmatrix}$. Ceci prouve que B est diagonalisable et que ses valeurs propres sont les $\lambda \pm 1$ où $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

Solution 67

1. Puisque A est réelle symétrique positive, elle est diagonalisable. Notons (X_1, \dots, X_n) une base de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de A et λ_i la valeur propre associée au vecteur propre X_i pour chaque i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit X un vecteur propre de A^k associée à une valeur propre λ . Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$. Notons

I l'ensemble des indices $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $\alpha_i \neq 0$ de sorte que $X = \sum_{i \in I} \alpha_i X_i$. Ainsi d'une part

$$A^k X = \sum_{i \in I} \lambda_i^k \alpha_i X_i$$

et d'autre part

$$A^k X = \lambda X = \sum_{i \in I} \lambda \alpha_i X_i$$

Comme $(X_i)_{i \in I}$ est une famille libre, $\lambda_i^k \alpha_i = \lambda \alpha_i$ pour tout $i \in I$. Or $\alpha_i \neq 0$ pour $i \in I$ donc $\lambda_i^k = \lambda$. De plus, A est symétrique positive donc les λ_i sont positifs : pour tout $i \in I$, $\lambda_i = \sqrt[k]{\lambda}$. Finalement

$$AX = \sum_{i \in I} \lambda_i \alpha_i X_i = \sqrt[k]{\lambda} \sum_{i \in I} \alpha_i X_i = \sqrt[k]{\lambda} X$$

et donc X est un vecteur propre de A .

2. Puisque $(A^k)^\top = (A^\top)^k = A^k$, A^k est symétrique. Il existe donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}A^kP$ soit diagonale. Les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de A^k et donc de A d'après la question précédente. En clair, $P^{-1}AP$ est également diagonale. Puisque $A^k = B^k$, le même raisonnement montre que $P^{-1}BP$ est également diagonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$ et μ_1, \dots, μ_n ceux de $P^{-1}BP$. Puisque $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ et $(P^{-1}BP)^k = P^{-1}B^kP$, on a $\lambda_i^k = \mu_i^k$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Mais puisque, A et B sont symétriques positives, leurs valeurs propres i.e. les λ_i et les μ_i sont positives. L'application $x \mapsto x^k$ étant injective sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi $P^{-1}AP = P^{-1}BP$ puis $A = B$.

3. Le résultat ne tient plus. Prendre par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $k = 2$.

Néanmoins, le résultat reste valable si A et B sont symétriques (non nécessairement positives) et si k est impair car dans ce cas $x \mapsto x^k$ est injective sur \mathbb{R} .

Solution 68**Première méthode**

D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients positifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^\top$. Mais alors

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(PDP^\top B) = \text{tr}(DP^\top BP) = \text{tr}(DC)$$

en posant $C = P^\top BP$. La matrice C est évidemment symétrique et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$X^\top CX = X^\top P^\top BPX = (PX)^\top B(PX) \geq 0$$

car B est positive. Ainsi C est positive. En notant (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$C_{ii} = E_i^\top C E_i \geq 0$$

puisque C est positive. Finalement

$$\text{tr}(DC) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} C_{ji} = \sum_{i=1}^n D_{ii} C_{ii} \geq 0$$

Deuxième méthode

D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients positifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$A = PDP^T$. En notant Δ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de A , et en posant $R = P\Delta P^T$, on a $A = R^T R$. De la même manière, on peut trouver $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = S^T S$. Mais alors

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(R^T R S^T S) = \text{tr}(S R^T R S^T) = \|RS^T\|^2 \geq 0$$

où on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \text{tr}(X^T Y)$ (il est classique de montrer que c'est bien un produit scalaire).

Solution 69

1. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors $A^T A$ est une matrice symétrique donc elle est diagonalisable. Soit x un vecteur propre associée à une valeur propre λ de $A^T A$. Alors $x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 \in \mathbb{R}_+$ et $x^T A^T A x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2$. Comme $\|x\|^2 \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \geq 0$. Ainsi $\text{Sp}(A^T A) \subset \mathbb{R}_+$ donc $N(A)$ est bien définie. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$N(\mu A) = \sqrt{\max \text{Sp}(\mu^2 A^T A)} = \sqrt{\max \mu^2 \text{Sp}(A^T A)} = \sqrt{\mu^2 \max \text{Sp}(A^T A)} = |\mu| \sqrt{\max \text{Sp}(A^T A)} = |\mu| N(A)$$

donc N est bien homogène.

Supposons que $N(A) = 0$. Alors $\max \text{Sp}(A^T A) = 0$. Mais comme $\text{Sp}(A^T A) \subset \mathbb{R}_+$, $\text{Sp}(A^T A) = \{0\}$. Comme $A^T A$ est diagonalisable, $A^T A = 0$. A fortiori, $\|A\|^2 = \text{tr}(A^T A) = 0$ où $\|\cdot\|$ désigne ici la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Ainsi $A = 0$ et N vérifie l'axiome de séparation.

Soit enfin $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$. Notons λ la plus grande valeur propre de $(A+B)^T(A+B)$ et x un vecteur propre associé à cette valeur propre. Alors $\|(A+B)x\|^2 = \lambda \|x\|^2$. Donc $\|(A+B)x\| = N(A+B)\|x\|$. Par ailleurs, $\|\cdot\|$ est une norme donc $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $A^T A$ et (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de vecteurs propres de $A^T A$. Alors

$$x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \quad \text{et} \quad A^T A x = \sum_{i=1}^p x_i \lambda_i e_i$$

Comme (e_1, \dots, e_p) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$\|Ax\|^2 = x^T A^T A x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 \leq N(A)^2 \sum_{i=1}^p x_i^2 = N(A)^2 \|x\|^2$$

Par conséquent, $\|Ax\| \leq N(A)\|x\|$. De la même manière, $\|Bx\| \leq N(B)\|x\|$. Finalement,

$$N(A+B)\|x\| \leq N(A)\|x\| + N(B)\|x\|$$

et donc $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$ car $\|x\| > 0$.

N est bien une norme.

2. Soit x un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $(AB)^T(AB)$. On a alors $\|ABx\| = N(A)\|x\|$ (cf. précédemment). De plus, $\|ABx\| \leq N(A)\|Bx\| \leq N(A)N(B)\|x\|$ (cf. précédemment). Comme $\|x\| > 0$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$ donc N est bien une norme d'algèbre.

Solution 70

Remarquons qu'en remplaçant x par x/y , on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, |ax^2 + bxy + cy^2| \leq |Ax^2 + Bxy + Cy^2|$$

Par continuité des deux membres sur \mathbb{R}^2 , l'inégalité est également vraie sur l'adhérence de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire \mathbb{R}^2 . Ainsi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |ax^2 + bxy + cy^2| \leq |Ax^2 + Bxy + Cy^2|$$

Posons $m = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), |u^T m u| \leq |u^T M u|$$

En élevant au carré, on obtient

$$\forall u \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \|u\|^2 u^\top m^2 u \leq \|u\|^2 u^\top M^2 u$$

Notamment, en notant S la sphère unité de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$\forall u \in S, u^\top m^2 u \leq u^\top M^2 u$$

Les matrices m et M sont symétriques réelles donc diagonalisables. Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres (éventuellement confondues) de m ainsi que Λ_1 et Λ_2 celles de M . Quitte à les échanger, on peut supposer $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ et $|\Lambda_1| \leq |\Lambda_2|$. En considérant des bases orthonormées de vecteurs propres de m et M , on montre classiquement que

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \inf_{u \in S} u^\top m^2 u & \lambda_2^2 &= \sup_{u \in S} u^\top m^2 u \\ \Lambda_1^2 &= \inf_{u \in S} u^\top M^2 u & \Lambda_2^2 &= \sup_{u \in S} u^\top M^2 u \end{aligned}$$

L'inégalité précédente montre alors que $\lambda_1^2 \leq \Lambda_1^2$ et $\lambda_2^2 \leq \Lambda_2^2$. Puisque toutes ces quantités sont positives, $(\lambda_1 \lambda_2)^2 \leq (\Lambda_1 \Lambda_2)^2$. Or $\lambda_1 \lambda_2 = \det(m) = ac - b^2/4$ et $\Lambda_1 \Lambda_2 = AC - B^2/4$ de sorte que

$$(b^2 - 4ac)^2 \leq (B^2 - 4AC)^2$$

ou encore

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|$$

Solution 71

Comme $M^\top M$ et MM^\top sont symétriques réelles, leurs spectres sont inclus dans \mathbb{R} .

Soit $\lambda \in \text{Sp}(M^\top M) \setminus \{0\}$. Alors il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $M^\top M X = \lambda X$. On en déduit que

$$\|MX\|^2 = X^\top M^\top M X = \lambda X X^\top = \lambda \|X\|^2 \neq 0$$

car X et λ sont non nuls. Ainsi $MX \neq 0$. Mais comme $M^\top M X = \lambda X$, on a également $(MM^\top)MX = \lambda MX$ de sorte que $\lambda \in \text{Sp}(MM^\top)$. On en déduit que

$$\text{Sp}(M^\top M) \setminus \{0\} \subset \text{Sp}(MM^\top) \setminus \{0\}$$

En appliquant ce qui précède à M^\top , on obtient l'inclusion réciproque et donc l'égalité.

Solution 72

Supposons (i). Alors il existe une base (e_1, \dots, e_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Posons également $E_{i,j} = e_i e_j^\top + e_j e_i^\top$. On montre aisément que $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

L'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM + MA \end{cases}$$

est bien définie et c'est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$, $\Phi(E_{i,j}) = (\lambda_i + \lambda_j)E_{i,j}$. L'application Φ est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les $\lambda_i + \lambda_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$. Aucune de ces valeurs propres n'est nulle donc Φ est un automorphisme. On en déduit la proposition (ii).

REMARQUE. On peut raisonner différemment. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^\top$. Fixons $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'équation $AM + MA = B$ équivaut à $DN + ND = C$ en posant $N = P^\top M P$ et $C = P^\top B P$. Cette équation équivaut à

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (\lambda_i + \lambda_j)N_{i,j} = C_{i,j}$$

Comme $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, l'équation admet donc bien une unique solution N . Comme C est symétrique, N l'est également et donc M aussi. L'équation $AM + MA = B$ admet donc bien une unique solution symétrique.

Supposons (ii). Considérons l'application Ψ qui à $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associe l'unique matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM + MA = B$. On vérifie aisément que Ψ est un automorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $I_n = \Psi(\Psi^{-1}(I_n))$ est l'unique matrice telle que $AI_n + I_n A = \Psi^{-1}(I_n)$. Ainsi $A = \frac{1}{2}\Psi^{-1}(I_n) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On reprend alors le raisonnement de la première implication. L'endomorphisme Φ (qui n'est autre que Ψ^{-1}) est alors un automorphisme. Ses valeurs propres, à savoir les $\lambda_i + \lambda_j$ ne peuvent être nulles.

Solution 73

Soit (X, Y) un éventuel couple solution. Alors

$$X^T = X^T(Y^TXY) = (X^TY^TX)Y = (X^TYX)^TY = Y$$

Par conséquent, $X(XX^T) = I_n$. On en déduit que XX^T est inversible et que $X = (XX^T)^{-1}$. Or XX^T est symétrique donc X également. D'après le théorème spectral, il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $X = PDP^T$. En reportant dans l'égalité $X(XX^T) = I_n$ i.e. $X^3 = I_n$, on obtient $D^3 = I_n$. Comme D est diagonale à coefficients réels, $D = I_n$ puis $X = Y = I_n$. Réciproquement, le couple (I_n, I_n) convient. C'est donc l'unique solution du système.

Solution 74

Il est clair que si S est nulle, $S + D$ est semblable à D .

Supposons maintenant que $S + D$ est semblable à D . On rappelle que $X \mapsto \text{tr}(X^TX)$ est une norme euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $S + D$ est semblable à D , $(S + D)^2$ est également semblable à D^2 et ces deux matrices ont même trace. Ainsi

$$\text{tr}(D^2) = \text{tr}((S + D)^2) = \text{tr}(S^2) + \text{tr}(SD) + \text{tr}(DS) + \text{tr}(D^2)$$

On vérifie aisément que SD a une diagonale nulle donc $\text{tr}(SD) = \text{tr}(DS) = 0$. Ainsi $\text{tr}(S^2) = \text{tr}(S^TS) = 0$ puis $S = 0$ via la norme euclidienne citée plus haut.

Solution 75

1. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^T$. Comme $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de D sont positifs. On note alors $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ de sorte que $\Delta^2 = D$. Posons $B = P\Delta P^T$. On vérifie aisément que B est symétrique et que $B^2 = A$.
2. La matrice B déterminée à la question précédente convient puisque $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$. Montrons son unicité. Supposons donc qu'il existe $(S, T) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$ tel que $A = S^2 = T^2$.

Première méthode. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $X - \sqrt{\lambda}$ et $X + \sqrt{\lambda}$ sont premiers entre eux donc, d'après le lemme des noyaux,

$$\text{Ker}(S^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(S - \lambda I_n) \oplus \text{Ker}(S + \lambda I_n)$$

Mais comme $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$, $\text{Ker}(S + \lambda I_n) = \{0\}$. Ainsi $\text{Ker}(S^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(S - \lambda I_n)$. De la même manière, $\text{Ker}(T^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(T - \lambda I_n)$. Or $S^2 = T^2$ donc $\text{Ker}(S - \lambda I_n) = \text{Ker}(T - \lambda I_n)$.

Par ailleurs, $\text{Ker } S \subset \text{Ker } S^2$. Mais si l'on se donne $X \in \text{Ker } S^2$, alors $\|SX\|^2 = X^T S^2 X = 0$ donc $SX = 0$ puis $X \in \text{Ker } S$. Ainsi $\text{Ker } S = \text{Ker } S^2$. De même, $\text{Ker } T = \text{Ker } T^2$. Or $S^2 = T^2$ donc $\text{Ker } S = \text{Ker } T$. Finalement

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \text{Ker}(S - \lambda I_n) = \text{Ker}(T - \lambda I_n)$$

Mais comme $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ et $\text{Sp}(T) \subset \mathbb{R}_+$, S et T ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres. Comme S et T sont diagonalisables, elles sont égales.

Deuxième méthode. Comme S est diagonalisable à valeurs propres positives, les valeurs propres de S sont les racines carrées des valeurs propres de S^2 . Il en est de même pour T . Comme $S^2 = T^2$, S et T ont même spectre. Il existe donc $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(P, Q) \in O_n(\mathbb{R})^2$ tels que $S = PDP^T$ et $T = QDQ^T$. Comme $S^2 = T^2$, $PD^2P^T = QD^2Q^T$ ou encore $RD^2 = D^2R$ en posant $R = Q^TP$. Comme $D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$, $R_{i,j}\lambda_j^2 = \lambda_i^2 R_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Ceci peut encore s'écrire $R_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j + \lambda_i) = 0$. Remarquons que les λ_i sont positifs. Si $\lambda_i + \lambda_j > 0$, $R_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i)$ ce qui signifie $R_{i,j}\lambda_j = \lambda_i R_{i,j}$. Sinon $\lambda_i = \lambda_j = 0$ donc on a encore $R_{i,j}\lambda_j = \lambda_i R_{i,j}$. Finalement, $R_{i,j}\lambda_j = \lambda_i R_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On en déduit que $RD = DR$ ou encore $PDP^T = QDQ^T$ i.e. $S = T$.

Solution 76

1. M est symétrique réelle donc M est diagonalisable. De plus, M est nilpotente donc sa seule valeur propre est 0. On en déduit que $M = 0$.
2. Comme M et M^T commutent, $(M^T M)^n = M^n (M^T)^n M^n = 0$. Comme $M^T M$ est symétrique réelle, $M^T M = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\text{tr}(M^T M) = 0$. On en déduit que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 = 0$ puis $M_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ (somme nulle de termes positifs). Ainsi $M = 0$.

Solution 77

1. Tout d'abord, $A^T A$ est clairement symétrique réelle. De plus,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T (A^T A) X = \|AX\|^2 \geq 0$$

Donc $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Or $A^T A \in GL_n(\mathbb{R})$ (considérer le déterminant par exemple) donc $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A^T A = PD^T$ avec les λ_i strictement positifs. Si on pose $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $S = P\Delta P^T$, on a bien $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A^T A = S^2$.

2. Notons S la matrice de la question précédente et posons $Q = AS^{-1}$. Alors, comme $S^T = S$,

$$Q^T Q = (S^{-1})^T A^T A S^{-1} = (S^T)^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$

donc $Q \in O_n(\mathbb{R})$.

3. Supposons qu'il existe $((Q, S), (R, T)) \in (O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2$ tel que $A = QS = RT$. En transposant, on obtient $SQ^T = TR^T$. Ainsi

$$S^2 = SQ^T QS = TR^T RT = T^2$$

Première méthode. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le lemme des noyaux,

$$\text{Ker}(S^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(S - \lambda I_n) \oplus \text{Ker}(S + \lambda I_n)$$

Mais comme $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, $\text{Ker}(S + \lambda I_n) = \{0\}$. Ainsi $\text{Ker}(S^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(S - \lambda I_n)$. De la même manière, $\text{Ker}(T^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(T - \lambda I_n)$. Or $S^2 = T^2$ donc $\text{Ker}(S - \lambda I_n) = \text{Ker}(T - \lambda I_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Mais comme $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\text{Sp}(T) \subset \mathbb{R}_+^*$, S et T ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres. Comme S et T sont diagonalisables, elles sont égales.

Deuxième méthode. Comme S est diagonalisable à valeurs propres positives, les valeurs propres de S sont les racines carrées des valeurs propres de S^2 . Il en est de même pour T . Comme $S^2 = T^2$, S et T ont même spectre. Il existe donc $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(P_1, P_2) \in O_n(\mathbb{R})^2$ tels que $S = P_1 D P_1^T$ et $T = P_2 D P_2^T$. Comme $S^2 = T^2$, $P_1 D^2 P_1^T = P_2 D^2 P_2^T$ ou encore $P D^2 = D^2 P$ en posant $P = P_2^T P_1$. Comme $D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$, $P_{i,j} \lambda_j^2 = \lambda_i^2 P_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Ceci peut encore s'écrire $P_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j + \lambda_i) = 0$. Mais comme $\lambda_i + \lambda_j > 0$, $P_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$ ce qui signifie $P_{i,j} \lambda_j = \lambda_i P_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On en déduit que $P D = D P$ ou encore $P_1 D P_1^T = P_2 D P_2^T$ i.e. $S = T$.

4. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite (A_p) à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ convergeant vers A . D'après la question précédente, il existe une suite (Q_p) à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})$ et une suite (S_p) à valeurs dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A_p = Q_p S_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Or $O_n(\mathbb{R})$ est compact donc il existe une suite extraite $(Q_{\varphi(p)})$ convergeant vers $Q \in O_n(\mathbb{R})$. Alors la suite de terme général $S_{\varphi(p)} = Q_{\varphi(p)}^T A$ converge vers $S = Q^T A$. En effet, l'application $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto X^T A$ est continue car elle est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de dimension finie. Or $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est fermé pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{\varphi(p)} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On a alors bien $A = QS$ avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Le couple (Q, S) n'est pas nécessairement unique. En effet, si $A = 0$, on peut prendre $S = 0$ et Q quelconque dans $O_n(\mathbb{R})$.

Solution 78

Soit (S_n) une suite à valeurs dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ convergeant vers $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie donc il est fermé. Ainsi $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On peut également utiliser la continuité de la transposition (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie).

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X^T S_p X \geq 0$. Or l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto X^T M X$ est continue comme endomorphisme d'un espace de dimension finie. On en déduit que $\lim_{p \rightarrow +\infty} X^T S_p X = X^T S X$ et donc $X^T S X \geq 0$ par passage à la limite. On a donc bien $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Par caractérisation séquentielle, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.

Solution 79

1. $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ donc $A^T A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A^T A X = \|AX\|^2 \geq 0$ donc $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. D'après le théorème spectral, il existe une matrice $V \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $V^T A^T A V$ soit une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $A^T A$. Comme $r = \text{rg}(A^T A)$, r valeurs propres sont non nulles (et donc strictement positives) et $n - r$ sont nulles. Quitte à réordonner éventuellement les vecteurs propres, on a le résultat voulu.

3. Puisque $V^T A^T A V = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a notamment $V_2^T A^T A V_2 = 0$ et donc $\|A V_2\|^2 = 0$. On en déduit que $A V_2 = 0$.
4. On a $U_1^T U_1 = I_r$. Les r colonnes de U_1 forment donc une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ que l'on peut compléter en une base orthonormée de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Autrement dit, il existe $U_2 \in \mathcal{M}_{m,m-r}(\mathbb{R})$ telle que $U = (U_1, U_2) \in O_m(\mathbb{R})$.
5. Un calcul par blocs donne bien $A = U \Sigma V^T$.

Solution 80

1. Comme A est semblable à une matrice réelle triangulaire, son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} . Notamment, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$ et $\text{Sp}(A) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Alors $A X = \lambda X$ puis $X^T A X = \lambda X^T X$. En transposant, on obtient $X^T A^T X = \lambda X^T X$ i.e. $X^T A X = -\lambda X^T X$ car $A^T = -A$. Ainsi $\lambda X^T X = -\lambda X^T X$ puis $\lambda = 0$ car $X^T X = \|X\|^2 > 0$. Ainsi $\text{Sp}(A) = \{0\}$.
2. Comme 0 est l'unique valeur propre de A et χ_A est scindé sur \mathbb{R} , $\chi_A = X^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$.
3. Par conséquent, $(A^2)^n = A^{2n} = (A^n)^2 = 0$ donc A^2 est nilpotente. Sa seule valeur propre est donc 0. De plus, $(A^2)^T = (A^T)^2 = (-A)^2 = A^2$ donc A^2 est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable en vertu du théorème spectral. Comme 0 est son unique valeur propre, elle est semblable à la matrice nulle et est donc nulle.
4. Remarquons que $A^T A = -A^2 = 0$. Notamment, $\|A\|^2 = \text{tr}(A^T A) = 0$. On en déduit que $A = 0$.

Solution 81

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable.
2. On trouve sans difficulté $\text{Sp}(A) = \{0, 2\}$, $E_0(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_2(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. a. On a clairement $\text{rg}(A - I_n) = 2$ donc $\dim \text{Ker}(A - I_n) = n - 2 \geq 1$. Ainsi 1 est valeur propre de A et on peut ajouter que $\dim E_1(A) = n - 2$.

b. **Première méthode :** On pose $A - I_n = \begin{pmatrix} 0 & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs donne alors aisément $(A - I_3)^3 = (n - 1)(A - I_3)$. On en déduit que si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $(\lambda - 1)^3 = (n - 1)(\lambda - 1)$. De plus, si $\lambda \neq 1$, $(\lambda - 1)^2 = n - 1$.

Deuxième méthode Soit $\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{1\}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Alors $\sum_{i=1}^n x_i = \lambda x_1$ et pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$x_1 + x_j = \lambda x_j$. En sommant ces $n - 1$ dernières égalités, on obtient, $(n - 1)x_1 + \sum_{j=2}^n x_j = \lambda \sum_{j=2}^n x_j$. En tenant compte de la première égalité, on obtient $(n - 1)x_1 + \lambda x_1 - x_1 = \lambda(\lambda x_1 - x_1)$ ou encore $(\lambda - 1)^2 x_1 = (n - 1)x_1$. On ne peut avoir $x_1 = 0$ sinon pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $x_j = \lambda x_j$ puis $x_j = 0$ car $\lambda \neq 1$. Ceci entraîne $X = 0$, ce qui est absurde. On en conclut que $(\lambda - 1)^2 = n - 1$.

- c. On sait déjà que $\dim E_1(A) = n - 2$. D'après la question précédente, $\text{Sp}(A) \subset \{1, 1 + \sqrt{n - 1}, 1 - \sqrt{n - 1}\}$. Comme $\text{tr}(A) = n$, $\alpha = 1 + \sqrt{n - 1}$ et $\beta = 1 - \sqrt{n - 1}$ sont tous deux valeurs propres de A et $\dim E_\alpha(A) = \dim E_\beta(A) = 1$. On trouve sans peine $E_1(A) = \text{vect}(E_2 - E_3, E_2 - E_4, \dots, E_2 - E_n)$ en notant (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On

trouve également $E_\alpha(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{n - 1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_\beta(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -\sqrt{n - 1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Solution 82

1. On vérifie que la congruence est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $I_n^T A I_n = A$ et $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ donc la congruence est réflexive.
- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que B est congruente à A . Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T A P$. Comme P est inversible, P^T l'est également et $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$. On en déduit que $A = (P^{-1})^T B P^{-1}$ avec $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi A est congruente à B et la congruence est symétrique.
- Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que B est congruente à A et C est congruente à B . Il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{R})^2$ tel que $B = P^T A P$ et $C = Q^T B Q$. Alors $C = Q^T P^T A P Q = (PQ)^T A (PQ)$ et $PQ \in GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi C est congruente à A et la congruence est transitive.

2. a. Notons $J_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P D P^T$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A i.e. les coefficients diagonaux de D . On peut supposer $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ strictement positives et $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}$ strictement négatives. Si on pose Δ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}$ puis $\sqrt{-\lambda_{p+1}}, \dots, \sqrt{-\lambda_{p+q}}$ et enfin des 1, on a $\Delta J_{p,q} \Delta^T = D$ puis $A = (P \Delta) J_{p,q} (P \Delta)^T$ ou encore $A = Q^T J_{p,q} Q$ avec $Q = (P \Delta)^T \in GL_n(\mathbb{R})$ car P et Δ sont inversibles. Ainsi A et $J_{p,q}$ sont congruentes.

- b. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de même signature (p, q) , alors elles sont toutes deux congruentes à $J_{p,q}$. Comme la congruence est une relation d'équivalence, A et B sont elles-mêmes congruentes.

3. a. Il suffit de poser $E_+ = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(S) \cap \mathbb{R}_+^*} E_\lambda(S)$, $E_- = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(S) \cap \mathbb{R}_-^*} E_\lambda(S)$ et $E_0 = \text{Ker } S$.

- b. Soit $X \in E_+ \cap (G \oplus H)$. Comme $X \in E_+$, $X^T S X \geq 0$ et comme $X \in G \oplus H$, $X^T S X \leq 0$. Ainsi $X^T S X = 0$ et donc $X = 0$ car $X \in E_+$. Donc E_+ et $G \oplus H$ sont en somme directe. Or $E_+ \oplus G \oplus H \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim E_+ + \dim(G \oplus H) \leq n$ i.e. $p + n - \dim F \leq n$ i.e. $p \leq \dim F$.

Soit $X \in F \cap (E_- \oplus E_0)$. Comme $X \in F$, $X^T S X \geq 0$ et comme $X \in E_- \oplus E_0$, $X^T S X \leq 0$. Ainsi $X^T S X = 0$ et donc $X = 0$ car $X \in F$. Donc F et $E_- \oplus E_0$ sont en somme directe. Or $F \oplus E_- \oplus E_0 \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim F + \dim(E_- \oplus E_0) \leq n$ i.e. $\dim F + n - p \leq n$ i.e. $\dim F \leq p$. On en déduit que $p = \dim F$.

Soit $X \in E_- \cap (F \oplus H)$. Comme $X \in E_-$, $X^T S X \leq 0$ et comme $X \in F \oplus H$, $X^T S X \geq 0$. Ainsi $X^T S X = 0$ et donc $X = 0$ car $X \in E_-$. Donc E_- et $F \oplus H$ sont en somme directe. Or $E_- \oplus F \oplus H \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim E_- + \dim(F \oplus H) \leq n$ i.e. $q + n - \dim G \leq n$ i.e. $q \leq \dim G$.

Soit $X \in G \cap (E_+ \oplus E_0)$. Comme $X \in G$, $X^T S X \leq 0$ et comme $X \in E_+ \oplus E_0$, $X^T S X \geq 0$. Ainsi $X^T S X = 0$ et donc $X = 0$ car $X \in G$. Donc G et $E_+ \oplus E_0$ sont en somme directe. Or $G \oplus E_+ \oplus E_0 \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim G + \dim(E_+ \oplus E_0) \leq n$ i.e. $\dim G + n - q \leq n$ i.e. $\dim G \leq q$. On en déduit que $q = \dim G$.

4. Soient A et B deux matrices congruentes de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^T A P$. Notons (p, q) la signature de A et (r, s) la signature de B .

On note $E_+ = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{R}_+^*} E_\lambda(A)$, $E_- = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{R}_-^*} E_\lambda(A)$ et $E_0 = \text{Ker } A$. On a donc $\dim E_+ = p$ et $\dim E_- = q$.

Posons $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), PX \in E_+\}$, $G = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), PX \in E_-\}$ et $H = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), PX \in E_0\}$. On vérifie aisément que

- $\forall X \in F \setminus \{0\}, X^T B X = (PX)^T A (PX) > 0$;
- $\forall X \in G \setminus \{0\}, X^T B X = (PX)^T A (PX) < 0$;
- $\forall X \in H, X^T B X = (PX)^T A (PX) = 0$;
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G \oplus H$.

D'après la question précédente, $\dim F = r$ et $\dim G = s$. De plus, comme P est inversible, $\dim F = \dim E_+ = p$ et $\dim G = \dim E_- = q$. Ainsi $(r, s) = (p, q)$.

Solution 83

Remarquons déjà que φ est clairement bilinéaire.

Supposons que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$. Comme $\varphi(X, Y)$ est un scalaire,

$$\varphi(X, Y) = \varphi(X, Y)^T = Y^T A^T X = Y^T A X = \varphi(Y, X)$$

donc φ est symétrique. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X, X) = X^T A X \geq 0$ et on a égalité que si $X = 0$. Ainsi φ est bien un produit scalaire.

Réciproquement, supposons que φ est un produit scalaire. Notons (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\varphi(E_i, E_j) = \varphi(E_j, E_i)$ i.e. $E_i^T A E_j = E_j^T A E_i$ i.e. $A_{j,i} = A_{i,j}$ donc A est symétrique. Enfin, $X^T A X \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec égalité si et seulement si $X = 0$ donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Solution 84

Première méthode. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients strictement positifs telles que $Q^T A Q = \Delta$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de Δ et C la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_n}$. Alors, en notant $M = QC$, on a $M^T A M = I_n$.

La matrice $M^T B M$ est symétrique donc il existe $R \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $R^T M^T B M R = D$. Posons $P = MR$. On a bien $P^T B P = D$ et $P^T A P = R^T (M^T A M) R = R^T I_n R = I_n$ car $R \in O_n(\mathbb{R})$.

Deuxième méthode. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Il existe alors $(f, g) \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $g = \text{mat}_{\mathcal{B}}(g)$. Comme $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, f et g sont respectivement auto-adjoint défini positif et auto-adjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On prouve alors classiquement qu'en posant $(x | y) = \langle f(x), y \rangle$ pour $(x, y) \in E^2$, $(\cdot | \cdot)$ est aussi un produit scalaire sur E . Comme g est auto-adjoint pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $f^{-1} \circ g$ est auto-adjoint pour $(\cdot | \cdot)$. D'après le théorème spectral, il existe une base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E , orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, dans laquelle la matrice de g est une matrice diagonale D . Notons P la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{E} . Puisque \mathcal{E} est orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, $P^T A P = I_n$. Par ailleurs, la matrice de $f^{-1} \circ g$ dans la base \mathcal{E} est D donc $P^{-1} A^{-1} B P = D$ i.e. $P^T B P = D$.

Solution 85

1. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = P D P^T$. Par continuité de l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P M P^T$, $\exp(A) = P \exp(D) P^T$. Or $\exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. Ainsi $\exp(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ telles que $B = P \Delta P^T$. De plus, les μ_i sont strictement positifs. On peut donc poser $\lambda_i = \ln(\mu_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $A = P D P^T$. La première question montre alors que $\exp(A) = P \exp(D) P^T = P \Delta P^T = B$.
Soit $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = \exp(A) = \exp(C)$. Il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $E = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n)$ telles que $C = Q E Q^T$. De plus $Q \exp(E) Q^T = P \exp(D) P^T$. En posant $R = P^T Q$, on a donc $R \exp(E) = \exp(D) R$. Ainsi pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $R_{i,j} e^{\nu_j} = R_{i,j} e^{\lambda_i}$ i.e. $R_{i,j}(e^{\nu_j} - e^{\lambda_i}) = 0$ de sorte que $R_{i,j} = 0$ ou $e^{\lambda_i} = e^{\nu_j}$. Si $R_{i,j} = 0$, alors $R_{i,j} \nu_j = R_{i,j} \lambda_i$. Sinon, $e^{\lambda_i} = e^{\nu_j}$ puis $\lambda_i = \nu_j$ par injectivité de l'exponentielle. On a donc à nouveau $R_{i,j} \nu_j = R_{i,j} \lambda_i$. Ceci signifie que $RE = DR$ ou encore $Q E Q^T = P D P^T$ i.e. $C = A$.

Solution 86

1. Tout d'abord, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par symétrie du produit scalaire. Soit alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$X^T A X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \langle f_i, f_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^j x_i f_i, \sum_{j=1}^n x_j f_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right\|^2 \geq 0$$

Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. Supposons $\det(A) = 0$. Alors $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{R})$ puis $0 \in \text{Sp}(A)$. On en déduit que A est symétrique positive mais pas définie positive.
Autrement dit, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $X^T A X = 0$. Le calcul de la question précédente montre que $\left\| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right\|^2 = 0$ i.e.

$\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0_E$. Comme X n'est pas nul, la famille (f_1, \dots, f_n) est liée.

Inversement, supposons la famille (f_1, \dots, f_n) liée. Il existe alors $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0_E$ i.e. $\left\| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right\|^2 = 0$. En

posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a à nouveau $X^T A X = 0$ avec X non nul. On en déduit que A est symétrique positive mais pas définie positive.

Ainsi $0 \in \text{Sp}(A)$ puis $\det(A) = 0$.

Solution 87

Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Notons (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $X^T M X \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notamment, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$M_{i,i} = E_i^T M E_i \geq 0$$

Solution 88

1. L'application $s : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T$ est clairement une symétrie. De plus,

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle s(M), N \rangle = \text{tr}(MN) = \text{tr}((MN)^T) = \text{tr}(N^T M^T) = \text{tr}(M^T N^T) = \langle M, s(N) \rangle$$

donc s est une symétrie auto-adjointe et donc une symétrie orthogonale. On en déduit que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

2. La transposition est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie. Ainsi la transposition est continue. En posant pour

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \exp(A)$. Par propriétés de la transposition,

$$S_n^T = \sum_{k=0}^n \frac{(A^T)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(A^T)$$

mais par continuité de la transposition et caractérisation séquentielle de la continuité, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^T = \exp(A)^T$. Par unicité de la limite, $\exp(A)^T = \exp(A^T)$.

Puisque $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(xB)^T = \exp(xB^T) = \exp(-xB) = \exp(xB)^{-1}$$

donc $\exp(xB) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Posons $\varphi(x) = \text{tr}(A \exp(xB))$ pour $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, $\varphi(x) \leq \varphi(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi φ admet un maximum en 0. Par ailleurs, en notant $L : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(AM)$ et $\psi : x \mapsto \exp(xB)$, $\varphi = L \circ \psi$. D'après le cours, ψ est dérivable sur \mathbb{R} et L est linéaire donc φ est également dérivable sur \mathbb{R} . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = L \circ \psi'(x) = L(B \exp(xB)) = \text{tr}(AB \exp(xB))$$

Comme φ admet un maximum en 0, $\varphi'(0) = 0$ i.e. $\text{tr}(AB) = 0$. On en déduit que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = P D P^{-1}$. Ainsi, pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P^{-1} U P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de sorte que

$$\text{tr}(DU) = \text{tr}(P^{-1} P U) = \text{tr}(A P U P^{-1}) \leq \text{tr}(A) = \text{tr}(D)$$

En choisissant $U = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = 1$ si $\lambda_i \geq 0$ et $\varepsilon_i = -1$ sinon, on a bien $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de sorte que

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \text{tr}(DU) \leq \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| - \lambda_i \leq 0$$

Puisque les termes de cette somme sont positifs, ils sont tous nuls. Ainsi $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

4. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En reprenant les mêmes notations que précédemment,

$$\text{tr}(AU) = \text{tr}(PDP^{-1}U) = \text{tr}(DV)$$

en posant $V = P^{-1}UP$. On a alors $\text{tr}(DV) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i}$. Puisque les colonnes de V sont de norme 1, on a $v_{i,i} \leq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme les λ_i sont positifs, $\lambda_i v_{i,i} \leq \lambda_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puis $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$ i.e. $\text{tr}(DV) \leq \text{tr}(D)$ ou encore $\text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A)$.

Solution 89

Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$\|AX\|_2^2 = X^T A^T A X$$

Comme $A^T A$ est symétrique réelle, il existe une base orthonormée (U_1, \dots, U_p) de vecteurs propres de $A^T A$. Notons λ_i la valeur propre associée à U_i . Si $X = \sum_{i=1}^p \alpha_i U_i$,

$$\|AX\|_2^2 = \|Y\|_2^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 \lambda_i \leq \max \text{Sp}(A^T A) \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 = \max \text{Sp}(A^T A) \|X\|_2^2$$

Ainsi

$$\|A\| \leq \sqrt{\max \text{Sp}(A^T A)}$$

Soit X un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ de $A^T A$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est X . Alors

$$\|AX\|_2^2 = \|AX\|_2^2 = X^T A^T A X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|_2^2$$

Ainsi $\|A\| \leq \sqrt{\lambda}$. Par conséquent, $\|A\| = \sqrt{\max \text{Sp}(A^T A)}$.

Polynômes orthogonaux

Solution 90

1. La symétrie de φ est évidente. La bilinéarité de φ provient de la linéarité de l'intégrale. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt \geq 0$ donc φ

est positive. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt = 0$. Comme P^2 est continue positive sur $[-1, 1]$, on en déduit que P^2 est nulle sur $[-1, 1]$. Le polynôme P^2 admet donc une infinité de racines : il est donc nul. Par conséquent, P est également nul. Ceci prouve que φ est définie.

φ est donc un produit scalaire.

2. 1 et -1 sont des racines de multiplicité n de Q_n . On en déduit que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$ pour $k < n$.

3. Soit $k, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $k \neq l$. On peut supposer $k < l$.

Supposons $l \geq 1$ pour se donner une idée de la marche à suivre. On utilise une intégration par parties :

$$\langle P_k, P_l \rangle = \int_{-1}^1 Q_k^{(k)}(t) Q_l^{(l)}(t) dt = \left[Q_k^{(k)}(t) Q_l^{(l-1)}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q_k^{(k+1)}(t) Q_l^{(l-1)}(t) dt$$

Or $l-1 < l$ donc $Q_l^{(l-1)}(-1) = Q_l^{(l-1)}(1) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\langle Q_k^{(k)}, Q_l^{(l)} \rangle = -\langle Q_k^{(k+1)}, Q_l^{(l-1)} \rangle$.

On peut donc prouver à l'aide d'une récurrence finie que $\langle Q_k^{(k)}, Q_l^{(l)} \rangle = (-1)^l \langle Q_k^{(k+l)}, Q_l \rangle$. Or $k < l$ donc $k+l > 2k$. Puisque $\deg Q_k = 2k$, $Q_k^{(k+l)} = 0$. On a donc $\langle P_k, P_l \rangle = 0$.

Les P_k sont donc orthogonaux deux à deux. La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc orthogonale. De plus, $\deg Q_k = 2k$ donc $\deg P_k = \deg Q_k^{(k)} = k$. La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de polynômes à degrés étagés : elle est donc libre. Comme elle comporte $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Il est clair que L est linéaire. De plus, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\deg((X^2 - 1)P'') = \deg(X^2 - 1) + \deg(P'') \leq 2 + n - 2 = n$$

et

$$\deg(XP') = \deg(X) + \deg(P') \leq 1 + n - 1 = n$$

On en déduit que $\deg(L(P)) \leq n$ i.e. $L(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi L est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Alors

$$\begin{aligned} \langle L(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)P''(t) + 2tP'(t)) Q(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P''(t)Q(t) dt + 2 \int_{-1}^1 tP'(t)Q(t) dt \end{aligned}$$

En intégrant par parties,

$$\int_{-1}^1 (t^2 - 1)P''(t)Q(t) dt = [(t^2 - 1)P'(t)Q(t)] - \int_{-1}^1 P'(t)((t^2 - 1)Q'(t) + 2tQ(t)) dt = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt - 2 \int_{-1}^1 tP'(t)Q(t) dt$$

Ainsi

$$\langle L(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt$$

Cette dernière expression est invariante par échange de P et Q donc $\langle L(P), Q \rangle = \langle P, L(Q) \rangle$. Finalement, L est bien un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$. Il est clair que $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par L donc $L(P_k) \in \mathbb{R}_k[X]$. Or (P_0, \dots, P_k) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$ donc $L(P_k) = \sum_{j=0}^k \frac{\langle L(P_k), P_j \rangle}{\|P_j\|^2} P_j$. Mais comme L est auto-adjoint, $\langle L(P_k), P_j \rangle = \langle P_k, L(P_j) \rangle$. Or $L(P_j) \in \mathbb{R}_j[X] = \text{vect}(P_0, \dots, P_j)$ donc $\langle P_k, L(P_j) \rangle = 0$ pour $j < k$ car (P_0, \dots, P_n) est orthonormée. Ainsi $L(P_k) = \frac{\langle L(P_k), P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k$ donc P_k est un vecteur propre de L .

Solution 91

1. Remarquons déjà que l'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ est bien définie car $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} et $P(t)Q(t)e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$.
L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement bilinéaire, symétrique et positive. Enfin, soit $P \in E$ vérifiant $\langle P, P \rangle = 0$. Comme $t \mapsto P(t)^2 e^{-t^2}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur \mathbb{R} , elle y est constamment nulle. Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur \mathbb{R} , $t \mapsto P(t)^2$ est nulle sur \mathbb{R} . Le polynôme P admet donc une infinité de racines : il est nul.
On a bien vérifié que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. La matrice de L dans la base canonique est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $0, -2, \dots, -2n$. Ainsi L admet pour valeurs propres les $n + 1$ réels distincts $0, -2, \dots, -2n$. Comme $\dim E = n + 1$, on peut affirmer que L est diagonalisable.
3. Soient $(P, Q) \in E^2$. Alors

$$\langle L(P), Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2} dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t^2} dt$$

Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto P'(t)Q(t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} de dérivées respectives $t \mapsto -2te^{-t^2}$ et $t \mapsto P''(t)Q(t) + P'(t)Q'(t)$, on obtient par une intégration par parties :

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t^2} dt = -[P'(t)Q(t)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} (P'(t)Q'(t) + P''(t)Q(t))e^{-t^2} dt$$

On en déduit que

$$\langle L(P), Q \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t) Q'(t) e^{-t^2} dt$$

Comme cette expression est invariante par échange de P et Q ,

$$\langle L(P), Q \rangle = \langle P, L(Q) \rangle$$

L est bien un endomorphisme auto-adjoint.

4. Notons (P_0, \dots, P_n) l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique. On sait alors que (P_0, \dots, P_n) est une base orthonormée de E et que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{vect}(P_0, \dots, P_k) = \mathbb{R}_k[X]$.
Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$. Il est clair que $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par L donc $L(P_k) \in \mathbb{R}_k[X]$. Or (P_0, \dots, P_k) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$ donc $L(P_k) = \sum_{j=0}^k \langle L(P_k), P_j \rangle P_j$. Mais comme L est auto-adjoint, $\langle L(P_k), P_j \rangle = \langle P_k, L(P_j) \rangle$. Or $L(P_j) \in \mathbb{R}_j[X] = \text{vect}(P_0, \dots, P_j)$ donc $\langle P_k, L(P_j) \rangle = 0$ pour $j < k$ car (P_0, \dots, P_n) est orthonormée. Ainsi $L(P_k) = \langle L(P_k), P_k \rangle P_k$ donc P_k est un vecteur propre de L . Finalement, (P_0, \dots, P_n) est bien une base de E formée de vecteurs propres de L .

Divers

Solution 92

1. Soient $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle z, u(\lambda x + \mu y) \rangle &= -\langle u(z), \lambda x + \mu y \rangle && \text{par antisymétrie} \\ &= -\lambda \langle u(z), x \rangle - \mu \langle u(z), y \rangle && \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \lambda \langle z, u(x) \rangle + \mu \langle z, u(y) \rangle && \text{par antisymétrie} \end{aligned}$$

On a donc $\langle z, u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y) \rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Comme $E^\perp = \{0_E\}$, $u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y) = 0_E$. D'où la linéarité de u .

2. (i) \Rightarrow (ii) Soient $x, y \in E$. Alors $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$. Or, par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle$$

D'où l'antisymétrie de u .

- (ii) \Rightarrow (iii) On a vu dans la question précédente que u était linéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans cette base. Comme \mathcal{B} est orthonormée, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_j), e_i \rangle e_i$ pour $1 \leq j \leq n$. On en déduit que $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Or, par antisymétrie de u , $\langle u(e_j), e_i \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle$ i.e. $a_{ij} = -a_{ji}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. On en déduit que A est antisymétrique.

- (iii) \Rightarrow (i) u est bien linéaire par hypothèse. Soient \mathcal{B} une base orthonormale de E et A la matrice de u dans \mathcal{B} . Soit $x \in E$ et X la matrice colonne de x dans \mathcal{B} . Alors

$$\langle u(x), x \rangle = (MX)^T X = -X^T M X = -\langle x, u(x) \rangle$$

On en déduit que $\langle u(x), x \rangle = 0$.

3. Fixons une base orthonormée \mathcal{B} de E et considérons Φ l'isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à un endomorphisme de E associe sa matrice dans la base \mathcal{B} . D'après la question précédente, $\Phi(A(E)) = A_n(\mathbb{R})$ où $A_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques. On a donc également $A(E) = \Phi^{-1}(A_n(\mathbb{R}))$ donc $A(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ comme image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et $\dim A(E) = \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ car Φ est un isomorphisme.

4. Soient $x \in \text{Ker } u$ et $y \in \text{Im } u$. Il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$.

$$\langle x, y \rangle = \langle x, u(z) \rangle = -\langle z, u(x) \rangle = -\langle z, 0_E \rangle = 0$$

Ainsi $\text{Im } u \subset (\text{Ker } u)^\perp$. D'après le théorème du rang $\dim \text{Im } u = n - \dim \text{Ker } u = \dim(\text{Ker } u)^\perp$. Ainsi $\text{Im } u = (\text{Ker } u)^\perp$.

5. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u . Soient $x \in F^\perp$. Alors, pour tout $y \in F$, $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle = 0$ car $u(y) \in F$. Ainsi $u(x) \in F^\perp$, ce qui prouve que $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

Solution 93

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Si A est nulle, $\text{rg } A = 0$ et donc le rang de A est pair.

Sinon, notons u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associée à A . On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique et on se donne une base orthonormale \mathcal{B} de \mathbb{R}^n adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = S \oplus \text{Ker } u$ où S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$. La matrice de

u dans cette base \mathcal{B} est de la forme $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec B carrée de taille $p = \dim S$. Si on note P la matrice de passage de la base canonique

vers la base \mathcal{B} , P est orthogonale et $A' = P^{-1}BP = P^TAP$. On en déduit que A' est également antisymétrique et donc B est antisymétrique et

C est nulle. On a donc $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg } A' = \text{rg } B$ mais comme S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, $\text{rg } A' = \dim S = p$, ce qui prouve

que B est inversible. Or $\det(B^T) = \det(-B) = (-1)^p \det B$ donc p est pair sinon on aurait $\det B = 0$ et B non inversible.

Solution 94

1. Si A est symétrique $A^T = A$ et donc $A^2 = I_n$. On en déduit que a est une symétrie orthogonale.

2. **Première méthode.** Remarquons que

$$A = (A^T)^2 + A^T - I_n = (A^2 + A - I_n)^2 + (A^2 + A - I_n) - I_n$$

Après simplification, on obtient

$$A^4 + 2A^2 - 2A - I_n = 0$$

Ainsi $X^4 + 2X^2 - 2X - 1 = (X-1)(X+1)^3$ est un polynôme annulateur de A . Ainsi $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$. On en déduit que 0 est la seule valeur propre de $A^T - A = A^2 - I_n$. Autrement dit, $M = A^T - A$ est nilpotente. Comme $A^T = A^2 + A - I_n$, A^T commute avec A puis M^T commute avec M . On en déduit que $M^T M$ est également nilpotente. Comme $M^T M$ est symétrique réelle, elle est également diagonalisable donc nulle. Ainsi

$$\|M\|^2 = \text{tr}(M^T M) = 0$$

puis $M = 0$. Ceci signifie que $A^T = A$ et on est ramené à la question précédente : a est à nouveau une symétrie orthogonale.

Deuxième méthode. Posons $S = \frac{A + A^T}{2}$ et $T = \frac{A - A^T}{2}$. Alors $A = S + T$ et S et T sont respectivement symétrique et antisymétrique. Comme A et A^T commutent, S et T commutent également. L'égalité $A^T = A^2 + A - I_n$ peut alors s'écrire

$$S - T = S^2 + T^2 + 2ST + S + T - I_n$$

ou encore

$$S^2 + T^2 + 2ST + 2T = I_n$$

Remarquons que ST est antisymétrique. Comme toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique,

$$\begin{cases} S^2 + T^2 = I_n \\ ST + T = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} S^2 + T^2 = I_n \\ S^2 T^2 = T^2 \end{cases}$$

Comme S^2 et T^2 sont symétriques et diagonalisables, elles possèdent une base commune de vecteurs propres. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et μ_1, \dots, μ_n leurs valeurs propres respectives, on a alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \mu = \mu \end{cases}$$

On en déduit sans peine que $\lambda_i = 1$ et $\mu_i = 0$. Ainsi $T^2 = 0$ et $S^2 = I_n$. De plus,

$$\|T\|^2 = \text{tr}(T^T T) = \text{tr}(-T^2) = 0$$

donc $T = 0$. Ainsi $A = S = A^T$ et $A^2 = S^2 = I_n$. a est donc une symétrie orthogonale.

Solution 95

1. Soit $(x, y) \in E^2$. Alors $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$. En développant, on obtient

$$\langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle$$

puis $\langle u(y), x \rangle = -\langle u(x), y \rangle$ car $\langle u(x), x \rangle = \langle u(y), y \rangle = 0$.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E . On note A la matrice de u dans \mathcal{B} . On a alors $A_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. D'après ce qui précède,

$$A_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle = -A_{j,i}$$

Ainsi A est antisymétrique.

2. Soit $x \in (\text{Ker } u)^\perp$. Alors pour tout $y \in \text{Ker } u$,

$$\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle = -\langle x, 0_E \rangle = 0$$

donc $u(x) \in (\text{Ker } u)^\perp$ et $(\text{Ker } u)^\perp$ est stable par u .

3. On choisit une base orthonormale de $\text{Ker } u$ et une base orthonormale de $(\text{Ker } u)^\perp$. La concaténation de ces deux bases est une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ où $N \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ avec $r = \dim(\text{Ker } u)^\perp = n - \dim \text{Ker } u = \text{rg } u$. Or $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = \text{rg}(N)$ donc N est inversible.
4. Comme A est antisymétrique, N l'est également. Ainsi $\det(N) = \det(N^T) = \det(-N) = (-1)^r \det(N)$. Comme N est inversible, $\det(N) \neq 0$ donc $(-1)^r = 1$ et $r = \text{rg}(u)$ est pair.

Solution 96

1. $s^* = (u^2)^* = (u^*)^2 = (-u)^2 = u^2 = s$ donc s est auto-adjoint.
2. Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Alors $\langle s(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2$. Mais par définition de l'adjoint,

$$\langle s(x), x \rangle = \langle u^2(x), x \rangle = \langle u(x), u^*(x) \rangle = -\|u(x)\|^2 \geq 0$$

Comme $\|x\|^2 > 0$ (x est non nul), $\lambda = -\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0$. Mais comme λ n'est pas nulle, $\lambda < 0$.

3. $u^2(x) = s(x) = \lambda x \in F$ donc $u(F) = \text{vect}(u(x), u^2(x)) \subset F$.

4. Posons $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$. De plus, $u(x) \neq 0_E$ car sinon $s(x) = \lambda x \neq 0$, ce qui est impossible puisque $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_E$. On peut donc poser $e_2 = \frac{u(x)}{\|u(x)\|}$. Posons également $a = \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} > 0$. On a bien $u(e_1) = ae_2$ et

$$u(e_2) = \frac{u^2(x)}{\|u(x)\|} = \frac{s(x)}{\|u(x)\|} = \frac{\lambda \|x\|}{\|u(x)\|} e_1$$

Or on a vu précédemment que $\lambda = -\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2}$ donc $u(e_2) = -ae_1$. Enfin, les vecteurs e_1 et e_2 sont unitaires et

$$\langle x, u(x) \rangle = \langle u^*(x), x \rangle = -\langle u(x), x \rangle = -\langle x, u(x) \rangle$$

donc $\langle x, u(x) \rangle = 0$ de sorte que (e_1, e_2) est bien une base orthonormée de F .

5. Comme F est stable par u , F^\perp est stable par $u^* = -u$ et donc par u également. On peut alors montrer par récurrence qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme convenue.

6. Toute matrice antisymétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a > 0$.

Solution 97

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme X^TAX est un scalaire,

$$X^TAX = (X^TAX)^T = X^TA^TX = -X^TAX$$

donc $X^TAX = 0$.

2. a. Notons (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors $E_i^TAE_j = -E_j^TAE_i$ i.e. $A_{i,j} = -A_{j,i}$. Ainsi A est antisymétrique.
- b. Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^TAX = 0$. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$. Alors

$$(X + Y)^T A (X + Y) = 0$$

En développant

$$X^TAX + X^TAY + Y^TAX + Y^TAY = 0$$

et donc

$$X^TAY + Y^TAX = 0$$

D'après la question précédente, A est antisymétrique.

Solution 98

Soit λ une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre (complexe) associé. Alors $AX = \lambda X$ puis $\bar{X}^TAX = \lambda \bar{X}^TX$. Comme $\bar{A}^T = -A$, on obtient en transposant et en conjuguant la dernière égalité : $\bar{X}^TAX = -\bar{\lambda} \bar{X}^TX$. Comme $X^TX = \sum_{i=1}^n |X_i|^2 > 0$ (X est non nul), $\lambda = -\bar{\lambda}$ i.e. $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Solution 99

1. Comme n est impair,

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$$

donc $\det(A) = 0$.

2. Soit X un vecteur propre associé à λ . Alors $AX = \lambda X$ puis $X^TAX = \lambda X^TX$. En transposant, on obtient $X^TA^TX = \lambda X^TX$ ou encore $-X^TAX = \lambda X^TX$. On en déduit que $\lambda X^TX = 0$ puis $\lambda = 0$ car $X^TX = \|X\|^2 > 0$ (X est non nul).

3. **Première méthode.** Les valeurs propres complexes non réelles de A sont conjuguées deux à deux et de même multiplicité car χ_A est à coefficients réels. Comme A est trigonalisable dans \mathbb{C} , $\det(A)$ est le produit des valeurs propres complexes de A . Ainsi $\det(A)$ est le produit de modules au carré et d'éventuels zéros. Dans tous les cas, $\det(A) \geq 0$.

Deuxième méthode. Soit $P = (-1)^n \chi_A = \det(A - XI_n)$. Alors $\lim_{P \rightarrow -\infty} P = +\infty$. Supposons que $\det(A) = P(0) < 0$. Comme P est continu, P s'annulerait sur $] -\infty, 0[$, ce qui est impossible d'après la question précédente. Ainsi $\det(A) \geq 0$.

REMARQUE. D'après la première question, on aurait pu se restreindre au cas où n est pair.

Solution 100

Supposons que M est antisymétrique. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. Alors P^TMP est également antisymétrique. Elle est donc de diagonale nulle. Supposons que pour toute matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$, P^TMP est de diagonale nulle. Il existe $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = A + S$ (il suffit de choisir $S = (M + M^T)/2$ et $A = (M - M^T)/2$). D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^TSP = D$. Ainsi $P^TMP = P^TAP + D$. Par hypothèse, P^TMP est de diagonale nulle et la première implication montre que P^TAP est également de diagonale nulle. On en déduit que la matrice diagonale D est nulle. Ainsi $S = PDP^T = 0$ et $M = A$ est antisymétrique.

Solution 101

1. La bilinéarité vient de la linéarité de la trace. De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(M^T) = \text{tr}(M)$. Par conséquent, $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(B^T A)$, d'où la symétrie. De plus,

$$\text{tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij}$$

et en particulier

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 \geq 0$$

Cette dernière somme ne s'annulant que si tous les a_{ij} sont nuls i.e. $A = 0$. L'application est donc définie positive. On vérifie sans difficulté que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\text{tr}(A)| = |\text{tr}(I_n A)| \leq \|I_n\| \|A\|$$

On vérifie facilement que $\|I_n\| = \sqrt{n}$.

3. a. Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$(A|S) = \text{tr}(A^T S) = -\text{tr}(AS)$$

$$(S|A) = \text{tr}(S^T A) = \text{tr}(SA)$$

Or $\text{tr}(SA) = \text{tr}(AS)$ donc $(A|S) = 0$. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont donc orthogonaux. On sait également que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit donc que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- b. $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$ où p désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On trouve facilement que $p(A) = \frac{A^T + A}{2}$. Ainsi

$$\|A - p(A)\| = \frac{1}{2} \|A - A^T\| = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2}$$

en utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question.

4. Comme $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $U^T U = U U^T = I_n$.

$$\|UA\|^2 = \text{tr}((UA)^T UA) = \text{tr}(A^T U^T UA) = \text{tr}(A^T A) = \|A\|^2$$

$$\|AU\|^2 = \text{tr}((AU)^T AU) = \text{tr}(U^T A^T AU) = \text{tr}(A^T A U U^T) = \text{tr}(A^T A) = \|A\|^2$$

5. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &= \text{tr}(B^T A^T AB) = \text{tr}(A^T A B B^T) = \text{tr}((A^T A)^T B B^T) \\ &= (A^T A | B B^T) \leq \|A^T A\| \|B B^T\| = \|A^T A\| \|B^T B\| \end{aligned}$$

car $\|B B^T\|^2 = \text{tr}(B B^T B B^T) = \text{tr}(B^T B B^T B) = \|B^T B\|^2$. En utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question, on a :

$$\|A^T A\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \right)^2$$

Or pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a d'après Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n ,

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \leq \sqrt{S_i} \sqrt{S_j}$$

avec $S_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ pour $1 \leq i \leq n$. Ainsi

$$\|A^T A\|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} S_i S_j = \left(\sum_{i=1}^n S_i \right) \left(\sum_{j=1}^n S_j \right) = \left(\sum_{l=1}^n S_l \right)^2$$

Par conséquent,

$$\|A^T A\| \leq \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl}^2 = \|A\|^2$$

On a donc également $\|B^T B\| \leq \|B\|^2$, ce qui nous donne finalement l'inégalité demandée.

Solution 102

Pour simplifier, on peut supposer u_1, \dots, u_{n+1} unitaires de sorte que pour $i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ distincts, $(u_i | u_j) = \cos \alpha_n$.

Première méthode

Notons u'_1, \dots, u'_n les projections orthogonales de u_1, \dots, u_n sur $\text{vect}(u_{n+1})^\perp$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $u'_i = u_i - (\cos \alpha_n) u_{n+1}$ et par le théorème de Pythagore, $\|u'_i\|^2 = \|u_i\|^2 - (\cos^2 \alpha_n) \|u_{n+1}\|^2 = 1 - \cos^2 \alpha_n$. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts

$$(u'_i | u'_j) = (u_i | u_j) - \cos \alpha_n ((u_i | u_{n+1}) + (u_j | u_{n+1})) + \cos^2 \alpha_n \|u_{n+1}\|^2 = \cos \alpha_n - \cos^2 \alpha_n$$

Par conséquent,

$$\frac{(u'_i | u'_j)}{\|u'_i\| \|u'_j\|} = \frac{\cos \alpha_n - \cos^2 \alpha_n}{1 - \cos^2 \alpha_n} = \frac{\cos \alpha_n}{1 + \cos \alpha_n}$$

Les vecteurs u'_1, \dots, u'_n font donc un angle constant α_{n-1} deux à deux. De plus, $\cos \alpha_{n-1} = \frac{\cos \alpha_n}{1 + \cos \alpha_n}$ i.e. $\cos \alpha_n = \frac{\cos \alpha_{n-1}}{1 - \cos \alpha_{n-1}}$.

L'énoncé n'a de sens que pour $n \geq 2$. On trouve aisément $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$. Posons $z_n = \frac{1}{\cos \alpha_n}$. La suite (z_n) vérifie la relation de récurrence $z_n = z_{n-1} - 1$. Puisque $z_2 = -2$, on trouve $z_n = -n$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi $\alpha_n = \arccos\left(-\frac{1}{n}\right)$.

Deuxième méthode

Puisque $\dim E = n$, les $n+1$ vecteurs u_1, \dots, u_{n+1} forment une famille liée. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0_E$. Fixons $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (u_i | u_j) = (0_E | u_j) = 0$$

ou encore

$$\lambda_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i \cos \alpha_n = 0$$

Posons $\Lambda = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$. L'égalité précédente s'écrit encore

$$\lambda_j + (\Lambda - \lambda_j) \cos \alpha_n = 0$$

ce qui équivaut à

$$\lambda_j (1 - \cos \alpha_n) + \Lambda \cos \alpha_n = 0$$

En sommant ces égalités pour $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on obtient

$$\Lambda(1 - \cos \alpha_n) + (n+1)\Lambda \cos \alpha_n = 0$$

ou encore

$$\Lambda(1 + n \cos \alpha_n) = 0$$

Par ailleurs, il existe $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tel que $\lambda_j \neq 0$ et on rappelle que $\lambda_j (1 - \cos \alpha_n) + \Lambda \cos \alpha_n = 0$. Si on avait $\Lambda = 0$, on aurait donc $\cos \alpha_n = 1$, ce qui est exclu par l'énoncé. Ainsi $\Lambda \neq 0$, ce qui permet d'affirmer que $\cos \alpha_n = -\frac{1}{n}$. On cherche implicitement un angle α_n non orienté donc $\alpha_n = \arccos\left(-\frac{1}{n}\right)$.

Solution 103

Soit $X \in \text{Ker } A$. On a donc $AX = 0$ puis $A^T AX = 0$ donc $X \in \text{Ker } A^T A$. Ainsi $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^T A$.

Soit maintenant $X \in \text{Ker } A^T A$. On a donc $A^T AX = 0$ puis $X^T A^T AX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi $Y^T Y = 0$. Or $Y^T Y$ est la somme des carrés des composantes de Y donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$. D'où $X \in \text{Ker } A$. Ainsi $\text{Ker } A^T A \subset \text{Ker } A$.

Finalement, $\text{Ker } A = \text{Ker } A^T A$ et $\text{rg } A = \text{rg } A^T A$ via le théorème du rang. En changeant A en A^T , on a également $\text{rg } A^T = \text{rg } AA^T$. Or $\text{rg } A = \text{rg } A^T$. Ainsi $\text{rg } A^T A = \text{rg } AA^T = \text{rg } A$.

Solution 104

1. Évident.

2. On va montrer que F admet pour supplémentaire la droite vectorielle $\mathbb{R}_0[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_0[X] \cap F$. Alors il existe $(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ tel que $P = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(1 + X^n)$. On a donc

$$P = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n X^n$$

Mais comme $\deg P \leq 0$, $\lambda_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $P = 0$. Ainsi F et $\mathbb{R}_0[X]$ sont en somme directe.

3. Soit $P \in F^\perp$. Posons $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Puisque $\langle P, 1 + X^n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_0 + a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Mais comme la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, on en déduit que $a_0 = 0$ puis que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $P = 0$ puis $F^\perp = \{0\}$.

En particulier, $F \oplus F^\perp = F \neq \mathbb{R}[X]$ puisque F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.