Devoir à la maison n°14

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Mines PC Maths2 2019 – Etude d'une série de fonctions

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $\mathrm{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\mathrm{R}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

Notations

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}$$

I Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1 Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Dans la suite du problème, on **admet** que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

3 Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$.

II Etude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}$$

Pour tout $h > 0$, on pose :

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$$

4 Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\phi_h : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \end{cases}$$

5 Montrer que $S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\, dt$.

6 Montrer que, pour tous $h \in]0, 1]$ et $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}$$

7 En déduire que

$$S(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$$

8 En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La fonction R est-elle dérivable en 0 ?

III Formule sommatoire de Poisson

On note désormais $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.
Si u est un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$, on pose, pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ipt}\, dt$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si u et v sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{1+x^2}$$

où la fonction $\widehat{f}$ a été définie à la question **3**. On pose également, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

9 Montrer que la fonction F est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

10 Montrer que la fonction G est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

11 Montrer que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi)$$

12 Montrer que, pour tout réel strictement positif a, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right)$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson*.

IV Etude de la dérivabilité de R en π

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it^2} - 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ i & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

13 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser un développement en série entière.

14 Etablir que $f'(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + \mathcal{O}(t^{-2})$ quand $t \to \pm\infty$.

15 Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} \, dx$ est convergente.

16 Montrer que $\widehat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \to \pm\infty$.

On pose à présent, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2 x}}{n^2}$$

17 En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que $F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2})$ quand $x \to 0$ par valeurs strictement positives.
Préciser la valeur de b, et exprimer a en fonction de I (l'intégrale I a été définie à la question **15**).

18 Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x+\pi)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.

19 Déduire de ce qui précède que la fonction R est dérivable en π, et préciser la valeur de $R'(\pi)$.