

# ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Dans tout ce chapitre  $E$  désigne un espace euclidien. On notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire dont il est muni et  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

## 1 Adjoint d'un endomorphisme

### Rappel

On rappelle que  $E^*$  désigne l'espace dual d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $E$ . Autrement dit,  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

### Théorème 1.1 Représentation des formes linéaires

L'application

$$\begin{cases} E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & (x \in E \mapsto \langle a, x \rangle) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

**REMARQUE.** Ceci signifie en particulier que pour toute forme linéaire  $\varphi \in E^*$ , il existe un unique vecteur  $a \in E$  tel que  $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$ .

### Définition 1.1 Adjoint

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il existe un unique  $u^* \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Cet endomorphisme  $u^*$  s'appelle l'**adjoint** de  $u$ .

### Méthode Déterminer un adjoint

Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ . Alors  $v = u^*$  si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

### Exemple 1.1

$\text{Id}_E^* = \text{Id}_E$ . En effet, pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\langle \text{Id}_E(x), y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, \text{Id}_E(y) \rangle$$

### Exercice 1.1

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $u = 0 \iff u^* \circ u = 0$ .

**Proposition 1.1 Propriétés de l'adjonction**

**Linéarité** L'application  $\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u^* \end{cases}$  est linéaire.

**Involutivité** Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $(u^*)^* = u$ .

**Adjoint d'une composée** Pour tout  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ ,  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ .

**Adjoint d'un inverse** Si  $u \in \text{GL}(E)$ , alors  $u^* \in \text{GL}(E)$  et  $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$ .

**REMARQUE.** La linéarité et l'involutivité montrent que l'application  $\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u^* \end{cases}$  est donc une symétrie vectorielle.

**Exercice 1.2**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$  et que  $\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$ .
2. En déduire que  $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^*)$ .

**Proposition 1.2 Matrice de l'adjoint dans une base orthornormée**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base **orthonormée** de  $E$ . Alors  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top$ .

**REMARQUE.** On en déduit notamment que

$$\text{rg}(u^*) = \text{rg}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u^*)) = \text{rg}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top) = \text{rg}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \text{rg}(u)$$

De même,

$$\det(u^*) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u^*)) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \det(u)$$

**Exercice 1.3**

Soit  $E$  un espace euclidien. Montrer que  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2 \mapsto \text{tr}(f^* \circ g)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{L}(E)$ .

**Proposition 1.3 Adjoint et stabilité**

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

## 2 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

**Définition 2.1 Projecteur orthogonal**

On appelle **projecteur orthogonal** de  $E$  tout projecteur sur un sous-espace vectoriel  $F$  et parallèlement à  $F^\perp$ .

**Exemple 2.1**

Soit  $D$  une droite de  $E$  de vecteur directeur  $a$  et  $p$  le projecteur orthogonal sur  $D$ . Alors

$$\forall x \in E, p(x) = \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$$

**Définition 2.2 Symétrie orthogonale**

On appelle **symétrie orthogonale** de  $E$  toute symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel  $F$  et parallèlement à  $F^\perp$ .

**Définition 2.3 Réflexion**

On appelle **réflexion** de  $E$  toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de  $E$ .

**Exemple 2.2**

Soient  $H$  est un hyperplan de  $E$  de vecteur normal  $a$  et  $s$  la réflexion par rapport à  $H$ . Alors

$$\forall x \in E, s(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$$

### 3 Matrices orthogonales et isométries vectorielles

#### 3.1 Matrices orthogonales

**Définition 3.1 Matrice orthogonale**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  est orthogonale si  $AA^\top = A^\top A = I_n$ .

**REMARQUE.** En pratique, il suffit de vérifier  $AA^\top = I_n$  ou  $A^\top A = I_n$ .

**REMARQUE.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  orthogonale. Alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = A^\top$ . De plus,  $\det(A) = \pm 1$ .

**REMARQUE.** Soient  $A$  une matrice orthogonale,  $\lambda$  une éventuelle valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre associé. Alors  $AX = \lambda X$  puis  $(AX)^\top (AX) = \lambda^2 X^\top X$  ou encore  $X^\top A^\top A X = \lambda^2 X^\top X$ . Puisque  $A$  est orthogonale, on en déduit que  $X^\top X = \lambda^2 X^\top X$ . Comme  $X$  est un vecteur propre, il est non nul et  $X^\top X > 0$ . Finalement  $\lambda^2 = 1$  i.e.  $\lambda = \pm 1$ . Ceci signifie que  $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$ .

**Proposition 3.1**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A$  est une matrice orthogonale si et seulement si la famille de ses colonnes (resp. de ses lignes) forment une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ ).

**Exercice 3.1**

Montrer que les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent tous à  $[-1, 1]$ .

**Définition 3.2 Groupe orthogonal**

L'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  appelé **groupe orthogonal** d'ordre  $n$  et noté  $O(n)$  ou  $O_n(\mathbb{R})$ .

**Exemple 3.1 Matrices de permutation**

On note  $S_n$  l'ensemble des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Pour  $\sigma \in S_n$ , on note  $P_\sigma$  la matrice dont le coefficient en position  $(i, j)$  est  $\delta_{i, \sigma(j)}$ . Montrer que  $\{P_\sigma, \sigma \in S_n\}$  est un sous-groupe de  $O_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 3.2 Caractérisation matricielle des bases orthonormées**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors  $\mathcal{F}$  est une base orthonormée de  $E$  si et seulement si  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  est une matrice orthogonale.

**Corollaire 3.1 Matrice de passage entre bases orthonormées**

Une matrice de passage entre deux bases orthonormées d'un même espace euclidien est orthogonale.

**Définition 3.3 Matrices orthogonalement semblables**

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ . On dit que  $B$  est **orthogonalement semblable** à  $A$ , s'il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  tel que  $B = P^{-1}AP = P^TAP$ .

**Exercice 3.2**

Montrer que la relation binaire «être orthogonalement semblable» est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ .

**Décomposition QR**

L'interprétation matricielle de la méthode de Gram-Schmidt est que toute matrice  $A$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  peut s'écrire  $A = QR$  où  $Q$  est une matrice orthogonale et  $R$  une matrice triangulaire supérieure. En effet, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$  où  $\mathcal{B}_0$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Le procédé de Gram-Schmidt permet l'obtention d'une base orthonormale (pour le produit scalaire usuel)  $\mathcal{B}'$  à partir de  $\mathcal{B}$ . En posant  $Q = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}')$  et  $R = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ , on a donc  $A = QR$ . Comme  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}'$  sont orthonormales,  $Q$  est orthogonale. Enfin, si on note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ , le procédé de Gram-Schmidt assure que pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{vect}(f_1, \dots, f_p)$ . En particulier, pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_p \in \text{vect}(f_1, \dots, f_p)$  ce qui assure que  $R$  est triangulaire supérieure.

**Exercice 3.3**

Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  est compact.

**Définition 3.4 Matrices orthogonales positives et négatives**

Soit  $A \in O(n)$ . Si  $\det(A) > 0$ , on dit que  $A$  est **orthogonale positive** ou **orthogonale directe**; si  $\det(A) < 0$ , on dit que  $A$  est **orthogonale négative** ou **orthogonale indirecte**.

**REMARQUE.** Si  $A$  est orthogonale positive,  $\det(A) = 1$ .  
Si  $A$  est orthogonale négative,  $\det(A) = -1$ .

### Définition 3.5 Groupe spécial orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $O(n)$  appelé **groupe spécial orthogonal** d'ordre  $n$  et noté  $SO(n)$  ou  $SO_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 3.4

Montrer que  $SO_n(\mathbb{R})$  est compact.

## 3.2 Isométries vectorielles

### Définition 3.6 Isométrie vectorielle

On appelle **isométrie vectorielle** de  $E$  tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  conservant la norme i.e tel que  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .

**REMARQUE.** Si  $u$  est une isométrie vectorielle, alors  $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ .

### Proposition 3.3

Une isométrie vectorielle de  $E$  est un automorphisme de  $E$ .

**REMARQUE.** Une isométrie vectorielle est également appelée un **automorphisme orthogonal**.

### Définition 3.7 Groupe orthogonal

L'ensemble des isométries vectorielles de  $E$  est un sous-groupe de  $GL(E)$  appelé **groupe orthogonal** de  $E$  et noté  $O(E)$ .

### Proposition 3.4 Caractérisations des isométries vectorielles

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u$  est une isométrie vectorielle ;
- (ii)  $u$  conserve le produit scalaire :  $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  ;
- (iii) l'image d'une base orthonormée de  $E$  par  $u$  est une base orthonormée ;
- (iv) la matrice de  $u$  dans une base orthonormée est orthogonale ;
- (v)  $u$  est inversible et  $u^* = u^{-1}$ .

### Exercice 3.5

Montrer qu'une symétrie est une isométrie vectorielle si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

**Exercice 3.6**

Soit  $E$  un espace euclidien. Montrer que  $O(E)$  est engendré par les réflexions.

**Proposition 3.5 Déterminant d'une isométrie**

Le déterminant d'une isométrie vectoriel vaut  $-1$  ou  $1$ .

**Définition 3.8 Isométries directes et indirecte**

Soit  $u \in O(E)$ . Si  $\det u = 1$ , alors on dit que  $u$  est une **isométrie vectorielle directe**; si  $\det u = -1$ , on dit que  $u$  est une **isométrie vectorielle indirecte**.

**Exemple 3.2**

Une réflexion est une isométrie vectorielle indirecte.

**Définition 3.9 Groupe spécial orthogonal**

L'ensemble des isométries vectorielles directes de  $E$  est un sous-groupe de  $O(E)$  appelé **groupe spécial orthogonal** de  $E$  et noté  $SO(E)$ .

## 4 Réduction des isométries

### 4.1 Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie

**Définition 4.1 Orientation d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$ . On dit que  $\mathcal{B}_2$  a la même orientation que  $\mathcal{B}_1$  si  $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$ .

La relation binaire «avoir la même orientation que» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de  $E$  pour laquelle il existe deux classes d'équivalence.

De manière arbitraire, on convient que l'une des classes d'équivalence sera formée des bases dites **directes** tandis que l'autre sera formée des bases dites **indirectes**.

**Orienter un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel**

Pour orienter concrètement un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on choisit une base de référence  $\mathcal{B}_0$ . Toutes les bases de même orientation que  $\mathcal{B}_0$  seront dites directes tandis que les autres seront dites indirectes.

Il n'existe que deux orientations possibles d'un même espace vectoriel.



**ATTENTION !** L'orientation n'a de sens que pour les espaces vectoriels **réels** puisqu'il y est question de **signe** d'un déterminant.

**Exercice 4.1**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Montrer que  $\mathcal{F}$  est une base orthonormée directe de  $E$  si et seulement si  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  est une matrice orthogonale positive.

**Proposition 4.1**

Soient  $E$  un espace euclidien orienté et  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux **bases orthonormées directes** de  $E$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$ .

**Produit mixte**

On considère  $n$  vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  d'un espace euclidien orienté  $E$  de dimension  $n$ . Le déterminant de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  dans une base orthonormée directe **quelconque** de  $E$  s'appelle le **produit mixte** de  $x_1, \dots, x_n$  et se note  $[x_1, \dots, x_n]$ .

**Exercice 4.2**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien orienté  $E$ . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u$  est une isométrie vectorielle directe ;
- (ii) l'image d'une base orthonormée directe de  $E$  par  $u$  est une base orthonormée directe ;
- (iii) la matrice de  $u$  dans une base orthonormée est orthogonale positive.

**4.2 Isométries vectorielles du plan vectoriel euclidien**

Dans ce paragraphe,  $E$  désigne un espace vectoriel euclidien **orienté de dimension 2**.

**Proposition 4.2**

$O(2)$  est l'ensemble des matrices de la forme  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  et  $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .  
 $SO(2)$  est l'ensemble des matrices  $R(\theta)$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 4.3**

Montrer que  $SO_2(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

**Lemme 4.1**

$\forall(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, R(\theta)R(\varphi) = R(\varphi)R(\theta) = R(\theta + \varphi)$ .

**Proposition 4.3**

L'application  $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \theta & \longmapsto R(\theta) \end{cases}$  est un morphisme de groupes de noyau  $2\pi\mathbb{Z}$  et d'image  $SO_2(\mathbb{R})$ .

**Corollaire 4.1**

$SO_2(\mathbb{R})$  est un groupe commutatif.

**Corollaire 4.2**

L'application  $\begin{cases} \mathbb{U} & \longrightarrow \text{SO}_2(\mathbb{R}) \\ z & \longmapsto \begin{pmatrix} \text{Re}(z) & -\text{Im}(z) \\ \text{Im}(z) & \text{Re}(z) \end{pmatrix} \end{cases}$  est bien définie et c'est un isomorphisme de groupes.

**Définition 4.2 Rotation**

Soit  $u \in \text{SO}(E)$ . Alors il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que la matrice de  $u$  dans toute base orthonormée directe de  $E$  soit  $R(\theta)$ . On appelle alors  $u$  la **rotation (vectorielle) d'angle  $\theta$** .

**REMARQUE.**  $\text{SO}(E)$  est donc le groupe (commutatif) des rotations de  $E$ .

**REMARQUE.** L'angle d'une rotation est défini modulo  $2\pi$ .

**REMARQUE.** Si l'on change l'orientation de  $E$ , la rotation d'angle  $\theta$  devient la rotation d'angle  $-\theta$ .

**Proposition 4.4 Classification des isométries vectorielles via le déterminant**

Soit  $u \in \text{O}(E)$ .

- Si  $\det(u) = +1$ , alors  $u$  est une rotation.
- Si  $\det(u) = -1$ , alors  $u$  est une réflexion i.e. une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

**REMARQUE.** Il n'existe donc que **deux** types d'isométries vectorielles du plan.

**Exercice 4.4**

On se place dans un plan euclidien. Montrer que la composée de deux réflexions est une rotation et que toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions.

**Proposition 4.5 Classification des isométries vectorielles via les vecteurs invariants**

Soit  $u \in \text{O}(E)$ . Notons  $F = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ .

- Si  $\dim F = 0$ , alors  $u$  est une rotation d'angle non nul (modulo  $2\pi$ ).
- Si  $\dim F = 1$ , alors  $u$  est une réflexion.
- Si  $\dim F = 2$ , alors  $u = \text{Id}_E$ .

**REMARQUE.** La matrice d'une réflexion dans une base orthonormée directe (ou indirecte) est de la forme  $S(\theta)$ ,  $\theta$  dépendant de la base choisie (contrairement aux rotations). De plus, il existe une base orthonormée (directe si on le souhaite) de  $E$  dans laquelle la matrice d'une réflexion est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 4.6**

Soient  $r$  une rotation d'angle  $\theta$  et  $u$  un vecteur unitaire. Alors  $\cos \theta = (u | r(u))$  et  $\sin \theta = [u, r(u)]$ .



**Méthode** Déterminer l'axe d'une réflexion connaissant sa matrice

Soit  $s$  une réflexion de matrice  $S$  dans une base orthonormée  $\mathcal{B}$ . L'axe de  $s$  est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants. Pour le déterminer, il suffit de résoudre  $SX = X$ .

**Exercice 4.5**

Soit  $s$  une réflexion de matrice  $S(\theta)$  dans une base orthonormée  $(e_1, e_2)$  d'un espace euclidien de dimension 2. Déterminer l'axe de  $s$ .

**Définition 4.3 Angle de vecteurs**

Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs non nuls de  $E$ . Posons  $u' = \frac{u}{\|u\|}$  et  $v' = \frac{v}{\|v\|}$ . Il existe une unique rotation  $r$  telle que  $r(u') = v'$ . On appelle angle de vecteurs  $(u, v)$  l'angle de cette rotation  $r$  (défini modulo  $2\pi$ ).

**REMARQUE.** Si l'on change l'orientation de  $E$ , les angles sont changés en leurs opposés.

**Proposition 4.7 Relation de Chasles**

Pour tous vecteurs  $u, v, w$  de  $E$  non nuls,  $(u, v) + (v, w) = (u, w)$ .

**Proposition 4.8 Lien avec le produit scalaire et le produit mixte**

Pour tous vecteurs  $u, v$  non nuls de  $E$  :

$$(u | v) = \|u\| \|v\| \cos(u, v)$$

$$[u, v] = \|u\| \|v\| \sin(u, v)$$

**Exercice 4.6**

Montrer que les rotations conservent les angles orientés et que les réflexions changent les angles orientés en leurs opposés.

**4.3 Cas général****Proposition 4.9 Stabilité de l'orthogonal**

Soit  $u$  une isométrie vectorielle de  $E$ . Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  **stable** par  $u$ , alors  $F^\perp$  est également **stable** par  $u$ .

**Lemme 4.2**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Alors il existe un plan ou une droite de  $E$  stable par  $u$ .

**Proposition 4.10 Réduction des isométries vectorielles**

Soit  $u$  une isométrie vectorielle d'un espace euclidien  $E$ . Alors il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme  $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  ( $\theta \in ]0, \pi[$ ).

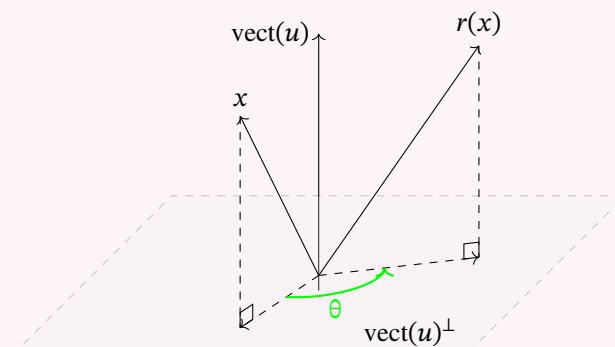
**Corollaire 4.3 Réduction des matrices orthogonales**

Soit  $A \in O_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe une matrice  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et une matrice  $D$  diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme  $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  ( $\theta \in ]0, \pi[$ ), telles que  $A = PDP^T$  i.e.  $A$  est orthogonalement semblable à  $D$ .

**4.4 Cas d'un espace euclidien de dimension 3****Orientation induite**

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 3. On peut orienter un plan  $P$  de  $E$  en se donnant un vecteur  $u$  non nul normal à  $P$  : on décide qu'une base  $(v, w)$  de  $P$  est directe (resp. indirecte) si  $(u, v, w)$  est directe (resp. indirecte). On vérifie sans peine qu'on a alors bien orienté  $P$  : on parle alors de l'orientation de  $P$  induite par  $u$ .

**REMARQUE.** Si on change  $u$  en  $-u$ , on change l'orientation induite de  $P$ .

**Définition 4.4 Rotation**

Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $u$  un vecteur non nul de  $E$ . On appelle **rotation** (vectorielle) d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$  l'endomorphisme laissant les vecteurs de  $\text{vect}(u)$  invariants et induisant une rotation d'angle  $\theta$  dans le plan  $\text{vect}(u)^\perp$  dont l'orientation est induite par celle de  $\text{vect}(u)$  par  $u$ .

**REMARQUE.** Si  $u$  et  $u'$  sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de même sens, les rotations d'axes orientés par  $u$  et  $u'$  et de même angle  $\theta$  sont identiques.

Si  $u$  et  $u'$  sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de sens contraire, la rotation d'axe orienté par  $u$  et d'angle  $\theta$  et la rotation d'axe orienté par  $u'$  et d'angle  $-\theta$  sont identiques.

**REMARQUE.** Si on change l'orientation de  $E$ , les angles de rotation sont changés en leurs opposés.

**Proposition 4.11 Matrice d'une rotation**

La matrice de la rotation d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$  dans une base orthonormée directe de premier vecteur colinéaire

et de même sens que  $u$  est  $R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

**Proposition 4.12**

Les isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3 sont les rotations.

**Méthode Déterminer l'image d'un vecteur par une rotation d'axe et d'angle donnés**

Soit  $r$  une rotation d'angle  $\theta$  d'axe orienté par  $u$ . On suppose  $u$  unitaire. Soit  $x$  un vecteur de  $E$ . On veut déterminer  $r(x)$ .

- On calcule la projection orthogonale  $y$  de  $x$  sur  $\text{vect}(u)$  :  $y = \langle x, u \rangle u$ . On a alors  $z = x - y \in \text{vect}(u)^\perp$ .
- On calcule l'image de  $z$  :  $r(z) = (\cos \theta)z + (\sin \theta)u \wedge z$ .
- On a alors  $r(x) = y + r(z)$ .

**Méthode Déterminer la matrice d'une rotation d'axe et d'angle donnés**

Soit  $r$  une rotation d'angle  $\theta$  orienté par  $u$ . On suppose  $u$  unitaire. On veut déterminer la matrice  $M$  de  $r$  dans la base canonique.

**Méthode n°1** On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . La méthode précédente nous permet de calculer  $r(e_1)$ ,  $r(e_2)$  et  $r(e_3)$ . On peut aussi remarquer que  $r(e_3) = r(e_1) \wedge r(e_2)$ . Les colonnes de  $M$  sont les vecteurs colonnes représentant  $r(e_1)$ ,  $r(e_2)$  et  $r(e_3)$  dans la base canonique.

**Méthode n°2** On détermine  $v, w$  tels que  $(u, v, w)$  soient une base orthonormée directe : il suffit de choisir  $v$  orthogonal à  $u$  et de poser  $w = u \wedge v$ . La matrice de  $r$  dans la base  $(u, v, w)$  est  $R(\theta)$ . Si on note  $P$  la matrice de la base  $(u, v, w)$  dans la base canonique, alors la matrice recherchée est  $PR(\theta)P^{-1} = PR(\theta)P^\top$ .

**Exercice 4.7 Matrice d'une rotation**

Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et d'axe dirigé par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Méthode Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à une matrice de  $SO(3)$** 

Soit  $r$  une rotation de matrice  $R$  dans une base orthonormée directe  $\mathcal{B}$ .

**Méthode n°1**

- On cherche d'abord un vecteur directeur  $u$  de l'axe en résolvant  $RX = X$ .
- On détermine un vecteur  $v$  non nul et orthogonal à  $u$ .
- On détermine le vecteur  $r(v)$  grâce à  $R$ .
- On a alors  $\cos \theta = \frac{\langle v, r(v) \rangle}{\|v\|^2}$ .
- On détermine  $\theta$  grâce au signe de  $\sin \theta$  : on remarque que  $[u, v, r(v)] = \|u\|\|v\|^2 \sin \theta$  ou que  $v \wedge r(v) = \|v\|^2 (\sin \theta) \frac{u}{\|u\|}$ .

**Méthode n°2**

- On cherche d'abord un vecteur directeur  $u$  de l'axe en résolvant  $RX = X$ .
- $R$  et  $R(\theta)$  sont la matrice de  $r$  dans des bases différentes donc  $\text{tr}(R(\theta)) = \text{tr}(R)$  i.e.  $1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(R)$ . On en déduit  $\cos \theta$ .
- On détermine  $\theta$  grâce au signe de  $\sin \theta$ . Le signe de  $\sin \theta$  est le même que celui de  $[u, x, r(x)]$  où  $x$  est un vecteur quelconque de  $E$  : en pratique, on prend un vecteur de la base canonique.

**Exercice 4.8 Matrice de rotation**

Soit  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier que  $A \in SO(3)$ .
2. Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à  $A$ .

**Exercice 4.9**

Soit  $r$  une rotation d'un espace euclidien  $E$  de dimension 3. On suppose qu'il existe un vecteur  $x \in E$  non nul tel que  $u(x) = -x$ . Montrer que  $r$  est une rotation d'angle  $\pi$ .

**Exercice 4.10 Anti-rotations**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 3.

1. Montrer qu'une rotation de  $E$  commute avec une réflexion de  $E$  si et seulement si l'axe de la première est orthogonal au plan de la seconde.
2. On appelle anti-rotation de  $E$  toute composée commutative d'une rotation et d'une réflexion. Montrer que les isométries vectorielles indirectes de  $E$  sont les anti-rotations.

## 5 Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

### 5.1 Définition et généralités

#### Définition 5.1 Endomorphisme auto-adjoint

On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est **auto-adjoint** si  $u^* = u$ , c'est-à-dire si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

#### Notation 5.1

L'ensemble des automorphismes auto-adjoints de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  noté  $\mathcal{S}(E)$ .

**REMARQUE.** La notation  $\mathcal{S}(E)$  provient du fait qu'un endomorphisme auto-adjoint est aussi appelé un endomorphisme **symétrique**. Mais cette dernière appellation peut prêter à confusion car un endomorphisme auto-adjoint est rarement une symétrie.

**REMARQUE.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors

$$u \in \mathcal{S}(E) \iff \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

#### Proposition 5.1 Stabilité de l'orthogonal

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est également stable par  $u$ .

#### Proposition 5.2 Interprétation matricielle

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $u$  est **auto-adjoint** si et seulement si sa matrice dans une **base orthonormée** de  $E$  est **symétrique**.

#### Proposition 5.3 Projecteurs auto-adjoints

Les projecteurs auto-adjoints d'un espace euclidien sont les projecteurs orthogonaux.

#### Exercice 5.1

Montrer que les symétries auto-adjointes d'un espace euclidien sont les symétries orthogonales.

**REMARQUE.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension  $n$  et  $A$  sa matrice dans une **base orthonormée**. Alors

- $u$  est un **projecteur orthogonal** si et seulement si  $A^2 = A$  et  $A^\top = A$ ;
- $u$  est une **symétrie orthogonale** si et seulement si  $A^2 = I_n$  et  $A^\top = A$ .

## 5.2 Réduction d'un endomorphisme auto-adjoint

### Théorème 5.1 Théorème spectral

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $u$  est un endomorphisme **auto-adjoint** ;
- (ii)  $E$  est la **somme directe orthogonale des sous-espaces propres** de  $u$  ;
- (iii) il existe une **base orthonormale** de  $E$  formée de **vecteurs propres** de  $u$ .

**REMARQUE.** Notamment, tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

### Exercice 5.2

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $u$ . On note  $\lambda_i$  la valeur propre associée au vecteur propre  $e_i$ .

1. Soit  $x \in E$ . Montrer que  $\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i \rangle^2$ .

2. On note  $S$  la sphère unité de  $E$ . Montrer que

$$\min_{x \in S} \langle u(x), x \rangle = \min \text{Sp}(u) \quad \text{et} \quad \max_{x \in S} \langle u(x), x \rangle = \max \text{Sp}(u)$$

### Corollaire 5.1 Réduction des matrices symétriques

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On munit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de son produit scalaire usuel  $(X, Y) \mapsto X^T Y$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $A$  est une matrice **symétrique** ;
- (ii)  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est la **somme directe orthogonale des sous-espaces propres** de  $A$  ;
- (iii) il existe une **base orthonormale** de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de **vecteurs propres** de  $A$  ;
- (iv)  $A$  est orthogonalement semblable à une matrice diagonale i.e. il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $A = PDP^T$ .

**REMARQUE.** Notamment, toute matrice symétrique **réelle** est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.



**ATTENTION !** Une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple,  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable. En effet,  $A$  est nilpotente ( $A^2 = 0$ ) non nulle.

### Endomorphismes anti-auto-adjoints

Un endomorphisme  $u$  d'un espace euclidien  $E$  est dit **anti-auto-adjoint** si  $u^* = -u$ .

**Exercice 5.3 Endomorphismes anti-auto-adjoints et matrices antisymétriques**

Montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est anti-auto-adjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée l'est également.

**Exercice 5.4 Spectre d'un endomorphisme anti-auto-adjoint ou d'une matrice antisymétrique**

1. Soit  $u$  un endomorphisme anti-auto-adjoint d'un espace euclidien. Montrer que  $\text{Sp}(u) \subset i\mathbb{R}$ .
2. Soit  $A$  une matrice réelle antisymétrique. Montrer que  $\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$ .

**Exercice 5.5 Réduction des endomorphismes anti-auto-adjoints et des matrices antisymétriques**

1. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que  $u$  est anti-auto-adjoint si et seulement s'il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ .
2. Montrer qu'une matrice réelle carrée est antisymétrique si et seulement si elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ .

**5.3 Endomorphismes auto-adjoints positifs et définis positifs, matrices symétriques positives et définies positives****Définition 5.2 Endomorphisme auto-adjoint (défini positif)**

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ .

- On dit que  $u$  est **positif** si

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

- On dit que  $u$  est **défini positif** si

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle u(x), x \rangle > 0$$

ou, de manière équivalente, si

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0 \text{ ET } (\langle u(x), x \rangle = 0 \implies x = 0_E)$$

**Notation 5.2**

On note  $\mathcal{S}^+(E)$  l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs d'un espace euclidien  $E$  et  $\mathcal{S}^{++}(E)$  l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs d'un espace euclidien  $E$ .

**Exercice 5.6**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\Phi(x, y) \in E^2 \mapsto \langle f(x), y \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$  si et seulement si  $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ .

**Exercice 5.7 Somme d'endomorphismes auto-adjoints positifs**

Montrer qu'une somme d'endomorphismes auto-adjoints positifs est un endomorphisme auto-adjoint positif.

**Proposition 5.4 Caractérisation spectrale**

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . Alors

- (i)  $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$  ;
- (ii)  $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

**REMARQUE.** On en déduit que  $\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap \text{GL}(E)$ .

**Exercice 5.8**

Soit  $u \in \mathcal{S}^+(E)$ . Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $\langle u(x), x \rangle = 0 \iff u(x) = 0_E$ .

**Exercice 5.9**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que  $f^* \circ f \in \mathcal{S}^+(E)$ . A quelle condition  $f^* \circ f$  est-il défini positif ?

**Exercice 5.10 Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif**

Soit  $f \in \mathcal{S}^+(E)$ . Montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{S}(E)$  tel que  $f = g^2$ .

**REMARQUE.** Soient  $u \in \mathcal{S}(E)$  et  $A$  sa matrice dans une base **orthonormée**  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Soit  $(x, y) \in E^2$  ainsi que  $X$  et  $Y$  les matrices respectives de  $x$  et  $y$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors  $\langle x, f(y) \rangle = X^T A Y$ .

**Définition 5.3 Matrice symétrique (définie positive)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- On dit que  $M$  est **positive** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$$

- On dit que  $u$  est **définie positive** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T A X > 0$$

ou, de manière équivalente, si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0 \text{ ET } (X^T A X = 0 \implies X = 0)$$

**Notation 5.3**

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .



**Exercice 5.11 Somme de matrices symétriques positives**

Montrer qu'une somme de matrices symétriques positives est une matrice symétrique positive.

**Exercice 5.12**

Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique positive (resp. définie positive) sont positifs (resp. strictement positifs).

**Proposition 5.5 Caractérisation spectrale**

Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors

- (i)  $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$  ;
- (ii)  $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

**REMARQUE.** On en déduit que  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**REMARQUE.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A$  sa matrice dans une base **orthonormée** de  $E$ . Alors  $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 5.13**

Soit  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $X^\top A X = 0 \iff A X = 0$ .

**Exercice 5.14**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A^\top A \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ . A quelle condition  $A^\top A$  est-elle définie positive ?

**Exercice 5.15 Racine carrée d'une matrice symétrique positive**

Soit  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  tel que  $A = B^2$ .

**Exercice 5.16**

Soit  $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\det(A) > 0$  et  $\text{tr}(A) > 0$ .

**Exercice 5.17 Décomposition polaire**

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une unique matrice  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $A^\top A = S^2$ .
2. Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe un unique couple  $(Q, S) \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  tel que  $A = QS$ .