

# DEVOIR SURVEILLÉ N°14

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

**1**

$$\chi_M = \det(XI_n - M) = \det((XI_n - M)^T) = \det(XI_n - M^T) = \chi_{M^T}$$

Comme le spectre d'une matrice est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique,  $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(M^T)$ .

**2**

Supposons que  $M$  est diagonalisable. Alors il existe une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $M = PDP^{-1}$ . Ainsi

$$M^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^{-1} D P^T$$

Ainsi  $M^T$  est diagonalisable. Par involutivité de la transposition, la réciproque est également vraie. Par conséquent,  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $M^T$  est diagonalisable.

**3**

On note  $L_0, \dots, L_{n-1}$  les lignes des déterminants suivants.

$$\begin{aligned} \chi_{C_Q} &= \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & Q(X) \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} & L_0 \leftarrow L_0 + \sum_{k=1}^{n-1} X^k L_k \\ &= (-1)^{n+1} Q(X) \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} & \text{en développant par rapport à la première ligne} \\ &= (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} Q(X) = Q(X) & \text{car le déterminant est triangulaire} \end{aligned}$$

**4**

Soit  $X = (x_0, \dots, x_{n-1})^T \in \text{Ker}(C_Q^T - \lambda I_n)$ . Les coordonnées de  $X$  vérifient  $x_{k+1} = \lambda x_k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ . On en déduit que  $x_k = \lambda^k x_0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . En posant  $V_\lambda = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^T$ , on a donc  $X \in \text{vect}(V_\lambda)$ . Ainsi  $E_\lambda(C_Q^T) \subset \text{vect}(V_\lambda)$ . Comme  $\lambda$  est valeur propre de  $C_Q^T$ ,  $\dim E_\lambda(C_Q^T) = 1$  et  $E_\lambda(C_Q^T) = \text{vect}(V_\lambda)$ . Ainsi  $V_\lambda$  est un vecteur directeur de  $E_\lambda(C_Q^T)$ .

**5** Supposons que  $f$  est cyclique. Il existe donc  $x_0 \in E$  tel que  $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ . Notamment, il existe  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $f^n(x_0) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$ . Dans la base  $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ , la matrice de  $f$  est  $C_Q$ .

Réciproquement, supposons que la matrice de  $f$  est de la forme  $C_Q$  dans une base  $(e_0, \dots, e_{n-1})$  de  $E$ . On a donc  $f(e_k) = e_{k+1}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ . On en déduit que  $e_k = f^k(e_0)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Ainsi  $(e_0, f(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$  est une base de  $E$ . On en déduit que  $f$  est cyclique.

**6** Supposons que  $f$  est diagonalisable. On sait que sa matrice est de la forme  $C_Q$  dans une base adaptée. Il suffit donc de montrer que  $\chi_f = \chi_{C_Q} = \chi_{C_Q^T}$  est scindé à racines simples. Comme  $f$  est diagonalisable,  $C_Q$  l'est aussi et donc  $C_{Q^T}$  l'est également d'après la question 2. Soit donc  $\lambda$  une racine de  $C_{Q^T}$  i.e.  $\lambda \in \text{Sp}(Q^T)$ . D'après la question 4,  $\dim E_\lambda(C_Q^T) = 1$ . Mais comme  $C_Q^T$  est diagonalisable,  $m_\lambda(C_Q^T) = \dim E_\lambda(C_Q^T) = 1$ . Ainsi  $\chi_{C_Q^T} = \chi_f$  est scindé à racines simples.

Réciproquement, si  $\chi_f$  est scindé à racines simples,  $f$  est diagonalisable.

**7** Supposons  $f$  cyclique. Il existe donc  $x_0 \in E$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ . Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\sum_{k=0}^n \lambda_k f^k = 0$ . En évaluant en  $x_0$  et en utilisant la liberté de  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ , on obtient  $\lambda_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Ainsi  $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$  est libre.

Notons  $d = \deg \pi_f$ . On sait déjà que  $d \leq n$  car  $\pi_f$  divise  $\chi_f$ . De plus,  $\pi_f$  annule  $f$  donc la famille  $(\text{Id}_E, f, \dots, f^d)$  est liée. On ne peut avoir  $d < n$  sinon cette famille serait une sous-famille de la famille libre  $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$  et serait donc libre. Ainsi  $\deg \pi_f = d = n$ .

**8** On vérifie que  $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x) = 0_E\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ . De plus, cet idéal est non nul puisqu'il contient  $\pi_f$ . Comme tous les idéaux de  $\mathbb{K}[X]$  sont principaux, cet idéal est engendré par un polynôme unitaire  $\pi_{f,x}$ . Notons  $p = \deg \pi_{f,x}$ .

Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$  tel que  $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x) = 0$ . On a donc  $P = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k \in I_x$  et donc  $\pi_{f,x}$  divise  $P$ . Puisque  $\deg P < d = \deg \pi_{f,x}$ ,  $P = 0$  i.e.  $\lambda_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ . Ainsi la famille  $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est libre.

De plus, en posant  $\pi_{f,x} = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$ , on a bien  $f^p(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0_E$ .

**9** Posons  $F = \text{vect}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ . Il est clair que  $f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) \in F$  pour tout  $k \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$  et d'après la question précédente, on a également  $f(f^{p-1}(x)) = f^p(x) = -\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) \in F$ . Ainsi, par linéarité de  $f$ ,

$$f(F) = f(\text{vect}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))) = \text{vect}(f(x), f^2(x), \dots, f^p(x)) \subset F$$

**10** Notons  $f_F$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $f$ . La matrice de  $f_F$  dans la base  $\text{vect}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est  $C_{\pi_{f,x}}$ . On en déduit que  $\chi_{f_F} = \pi_{f,x}$  d'après la question 3. Or on sait que  $\chi_{f_F}$  divise  $\chi_f$ . Donc  $\pi_{f,x} = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$  divise  $\chi_f$ .

**11** D'après la question précédente, il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $\chi_f = Q\pi_{f,x}$ . Ainsi  $\chi_f(f)(x) = Q(f) \circ \pi_{f,x}(f)(x) = Q(f)(0_E) = 0_E$ . Ceci est valable pour tout vecteur  $x$  non nul de  $E$  et aussi pour  $x = 0_E$  donc  $\chi_f(f) = 0$ .

**12** Remarquons déjà que  $\pi_f = X^r$ .

Supposons que  $f$  est cyclique. D'après la question 7,  $r = \deg \pi_f = n$ .

Supposons que  $r = n$ . Par définition de l'indice de nilpotence, il existe  $x \in E$  non nul tel que  $f^{n-1}(x) \neq 0_E$ . Montrons que la famille  $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ . Comme  $\dim E = n$ , il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit donc  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_E$ . Supposons que les  $\lambda_k$  ne soient pas tous nuls et notons  $j = \min\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_k \neq 0\}$ . Alors  $\sum_{k=j}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_E$  et en appliquant  $f^{n-1-j}$ , on trouve  $\lambda_j f^{n-1}(x) = 0_E$  et donc  $\lambda_j = 0$ , ce qui est contradictoire. Les  $\lambda_k$  sont donc tous nuls. La famille  $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est donc une base de  $E$  et  $f$  est cyclique. La matrice de  $f$  dans cette base est alors  $C_{X^n}$ .

**13**  $(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k} \in \mathbb{C}[f]$ . Or  $\mathbb{C}[f]$  est une algèbre commutative donc  $f$  et  $(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$  commutent. En particulier,  $F_k = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$  est stable par  $f$ .

De plus, les  $\lambda_k$  sont distincts deux à deux donc les polynômes  $P_k = (X - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$  sont premiers entre eux deux à deux. D'après le lemme des noyaux,

$$\text{Ker } \chi_f(f) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$$

Or  $\chi_f(f) = 0$  d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc

$$E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$$

**14** Comme  $F_k = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$ ,  $\varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}(x) = 0$  pour tout  $x \in F_k$ . Ainsi  $\varphi_k^{m_k} = 0$  et  $\varphi_k$  est nilpotent.

**15** D'après le cours, l'indice de nilpotence de  $\varphi_k$  est inférieur ou égal à la dimension de  $F_k$  i.e.  $\nu_k \leq \dim(F_k)$ .

**16** Puisque  $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$  est libre,  $\deg \pi_f = n$ . Posons  $P = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\nu_k}$  ainsi que  $Q_k = \prod_{j \neq k} (X - \lambda_j)^{\nu_j}$  pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Soit  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

$$\forall x \in F_k, P(f)(x) = Q_k(f) \circ (f - \lambda_k \text{Id}_E)^{\nu_k}(x) = Q_k(f) \circ \varphi_k^{\nu_k}(x) = Q_k(f)(0_E) = 0_E$$

Comme  $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$ ,  $P(f) = 0$ . Par conséquent,  $\pi_f$  divise  $P$  et donc  $\deg \pi_f \leq \deg P$  i.e.  $\sum_{k=1}^p \nu_k \geq n$ . De plus,  $\sum_{k=1}^p m_k = \deg \chi_f = n$  donc  $\sum_{k=1}^p m_k - \nu_k \leq 0$ . Enfin,  $\varphi_k^{m_k} = 0$  donc, par définition de l'indice de nilpotence  $\nu_k \leq m_k$ . Ainsi  $\sum_{k=1}^p m_k - \nu_k = 0$  et les termes sont nuls puisqu'ils sont positifs. Ainsi  $\nu_k = m_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

**17** On a également  $\sum_{k=1}^p \dim F_k = n$  puisque  $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$ . A nouveau,  $\sum_{k=1}^p \dim(F_k) - \nu_k = 0$  et les termes de cette somme sont positifs. Ainsi  $\dim(F_k) = \nu_k = m_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . D'après la question **12**, les  $\varphi_k$  sont cycliques et il existe une

base  $\mathcal{B}_k$  de  $F_k$  dans laquelle la matrice de  $\varphi_k$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . L'endomorphisme  $f_k$  de  $F_k$  induit par  $f$  est  $\lambda_k \text{Id}_E + \varphi_k$

et sa matrice dans la base  $\mathcal{B}_k$  est donc  $\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$ . La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  obtenue par concaténation

des bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  est bien de la forme voulue.

**18** Posons  $e_k = u_{1+\sum_{i=1}^{k-1} m_i}$  de sorte que  $x_0 = \sum_{k=1}^p e_k$ . On vérifie que  $e_k \in F_k$  par définition de la base  $\mathcal{B}$ . Faisons alors quelques remarques préliminaires.

- Pour tout  $Q \in \mathbb{C}[X]$ ,  $Q(f)(e_k) \in F_k$  car  $F_k$  est stable par  $f$ .
- Par définition de  $\mathcal{B}$ ,  $(e_k, \varphi_k(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k))$  est une base de  $F_k$ .

$$\begin{aligned}
& Q(f)(x_0) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{k=1}^p Q(f_k)(e_k) = 0_E \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(f)(e_k) = 0_E \quad \text{car les } F_k \text{ sont en somme directe} \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, m_k - 1 \rrbracket, Q(f_k)(\varphi_k^j(e_k)) = 0_E \quad \text{car } Q(f_k) \text{ et } \varphi_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{F_k} \text{ commutent} \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(f_k) = 0 \quad \text{car } (e_k, \varphi(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k)) \text{ est une base de } F_k \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(\varphi_k + \lambda_k \text{Id}_{F_k}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \pi_{\varphi_k} \mid Q(X + \lambda_k) \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, X^{m_k} \mid Q(X + \lambda_k) \\
& \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (X - \lambda_k)^{m_k} \mid Q \\
& \Leftrightarrow \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} \mid Q \quad \text{car les } \lambda_k \text{ sont deux à deux distincts} \\
& \Leftrightarrow \chi_f \mid Q
\end{aligned}$$

**19** Il suffit pour cela de montrer que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$  et donc que cette famille est libre.

Soit donc  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0$ . En posant  $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ , on a donc  $Q(f)(x_0) = 0$ . D'après la question précédente,  $\chi_f$  divise  $Q$ . Or  $\deg \chi_f = n$  et  $\deg Q < n$  donc  $Q = 0$  puis  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ . Ainsi  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est bien libre et c'est une base de  $E$ .  $f$  est bien cyclique.

**20**  $C(f)$  est le noyau de l'endomorphisme  $g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g - g \circ f$  donc c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .  $C(f)$  contient évidemment  $\text{Id}_E$  et on montre aisément qu'il est stable par  $\circ$ . C'est donc une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ .

**21** Question triviale : il suffit de dire que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ .

**22** Posons  $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ . La question précédente montre que  $g(x_0) = P(f)(x_0)$ . Comme  $g$  commute avec  $f$ , on montre par récurrence que  $g$  commute avec  $f^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Notamment, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0)) = f^k \circ P(f)(x_0) = P(f) \circ f^k(x_0) = P(f)(f^k(x_0))$$

Les endomorphismes  $g$  et  $P(f)$  coïncident sur la base  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  de  $E$  donc ils sont égaux. Ainsi  $g = P(f) \in \mathbb{K}[f]$ .

**23** Soit  $g \in C(f)$ . En reprenant la question précédente, il existe bien  $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que  $g = R(f)$ . Réciproquement, s'il existe  $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que  $g = R(f)$ ,  $f$  commute avec  $g$  car l'algèbre  $\mathbb{K}[f]$  est commutative.

**24** Si  $r = 1$ , il n'y a rien à montrer. Supposons donc  $r \geq 2$  et supposons que  $F = \bigcup_{m=1}^r F_m$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$ . On raisonne par l'absurde. Supposons qu'aucun des  $F_i$  ne contienne tous les autres. Alors pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , il existe  $x_i \in F_i$  tel que  $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} F_j$ . Soit alors  $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ . La droite affine  $D = \{\lambda x_i + (1 - \lambda)x_j, \lambda \in \mathbb{K}\}$

contient une infinité d'éléments et est à valeurs dans  $F = \bigcup_{m=1}^r F_m$  car  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Comme les  $F_m$  sont en nombre fini, il existe  $m \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que  $F_m$  contienne deux éléments de  $D$  (et même une infinité). Comme  $F_m$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et contient deux éléments de la droite  $D$ ,  $F_m$  contient  $D$  en entier et notamment  $x_i$  et  $x_j$ , ce qui est contradictoire.

**25** On vérifie que pour tout  $x \in E$ ,  $I_x$  est bien un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ . Il est donc engendré par un unique polynôme unitaire  $\pi_{f,x}$ . De plus, en notant  $I = \pi_f \mathbb{K}[X]$  l'idéal annulateur de  $f$ , on a clairement  $I \subset I_x$  et donc  $\pi_{f,x}$  divise  $\pi_f$ . Remarquons que l'ensemble des diviseurs unitaires de  $\pi_f$  est fini. Il existe donc  $x_1, \dots, x_r$  dans  $E$  tel que  $\{\pi_{f,x}, x \in E\} = \{\pi_{f,x_1}, \dots, \pi_{f,x_r}\}$ . De manière évidente, pour tout  $x \in E$ ,  $x \in \text{Ker } \pi_{f,x}(f)$ . Alors

$$E = \bigcup_{x \in E} \text{Ker } \pi_{f,x}(f) = \bigcup_{i=1}^r \text{Ker } \pi_{f,x_i}(f)$$

D'après la question précédente,  $E$  est égal à l'un des noyaux. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $E = \text{Ker } \pi_{f,x_1}(f)$ . Ainsi  $\pi_{f,x_1}$  est un polynôme annulateur de  $f$  de sorte que  $\pi_f$  divise  $\pi_{f,x_1}$ . Mais on a déjà vu que  $\pi_{f,x_1}$  divisait  $\pi_f$  donc

$\pi_f = \pi_{f,x_1}$ . Notamment  $\deg \pi_{f,x_1} = d$ . Soit alors  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$  tel que  $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k f^k(x_1) = 0_E$ . Alors  $P = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k X^k \in I_{x_1}$  donc  $\pi_{f,x_1}$  divise  $P$ . Mais  $\deg \pi_{f,x_1} = d$  et  $\deg P < d$  donc  $P = 0$  puis  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) = (0, \dots, 0)$ . La famille  $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$  est bien libre.

**26** Pour tout  $k \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$ ,  $f(e_k) = e_{k+1} \in E_1$ . De plus, comme  $\deg \pi_f = d$ ,  $f^d \in \text{vect}(\text{Id}_E, f, \dots, f^{d-1})$  et donc  $f(e_d) = f^d(x_1) \in \text{vect}(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = E_1$ . On en déduit que  $E_1$  est stable par  $f$ . Comme  $\deg \pi_f = d$ ,  $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{d-1}[f]$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \{P(f)(x_1), P \in \mathbb{K}[X]\} &= \{u(x_1), u \in \mathbb{K}[f]\} \\ &= \{u(x_1), u \in \mathbb{K}_{d-1}[f]\} \\ &= \{P(f)(x_1), P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\} \\ &= \text{vect}(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = E_1 \end{aligned}$$

**27** Une base de  $E_1$  est  $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = (x_1, \psi_1(x_1), \dots, \psi_1^{d-1}(x_1))$  donc  $\psi_1$  est cyclique.

**28** Soit  $x \in F$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi(f^i(f(x))) = \Phi(f^{i+1}(x)) = 0$  donc  $f(x) \in F$ . Ainsi  $F$  est stable par  $f$ .

Soit  $x \in E_1 \cap F$ . Comme  $x \in E_1$ , il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{K}^d$  tel que  $x = \sum_{k=1}^d \lambda_k e_k$ . Comme  $x \in F$ ,  $\lambda_d = 0$ . Puis en appliquant successivement  $f, f^2, \dots, f^{d-1}$  à l'égalité précédente, on obtient  $\lambda_{d-1} = 0, \lambda_{d-2} = 0, \dots, \lambda_1 = 0$  (rédiger une récurrence). Ainsi  $x = 0_E$  puis  $E_1 \cap F = \{0_E\}$ .

**29** On va montrer que  $\text{Ker } \Psi = F$ . L'inclusion  $F \subset \text{Ker } \Psi$  est évidente. Comme  $\deg \pi_f = d$ ,  $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{d-1}[f]$ . On en déduit que  $\text{Ker } \Psi \subset F$ . Ainsi  $E_1$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } \Psi$  dans  $E$ . On en déduit que  $\Psi$  induit un isomorphisme de  $E_1$  sur  $\text{Im } \Psi$ . Mais comme  $\dim E_1 = \dim \mathbb{K}^d = d$ ,  $\text{Im } \Psi = \mathbb{K}^d$ . Finalement,  $\Psi$  induit un isomorphisme de  $E_1$  sur  $\mathbb{K}^d$ .

**30** D'après le théorème du rang,  $\dim F = \dim \text{Ker } \Psi = \dim E - \text{rg } \Psi = n - d$ . Ainsi  $\dim F + \dim E_1 = n$ . Comme  $E_1 \cap F = \{0_E\}$ ,  $E = E_1 \oplus F$ .

**31** On peut raisonner par récurrence forte sur la dimension de  $E$ .

**Initialisation** Si  $\dim E = 1$ , il suffit de prendre  $r = 1$  et  $E_1 = E$ .

**Hérédité** Supposons le résultat acquis pour tout espace vectoriel  $E$  de dimension comprise entre 1 et  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et tout endomorphisme de  $E$ . D'après ce qui précède,  $E = E_1 \oplus F$  où la restriction de  $f$  à  $E_1$  est cyclique et  $F$  est stable par  $f$ .

On applique alors l'hypothèse de récurrence à  $F$  et l'endomorphisme  $f_F$  de  $F$  induit par  $f$ . On peut alors écrire  $F = E_2 \oplus \dots \oplus E_r$  où les endomorphismes des  $E_i$  induits par  $f_F$  sont cycliques et, pour tout  $i \in \llbracket 2, r-1 \rrbracket$ , le polynôme minimal de l'endomorphisme de  $E_{i+1}$  induit par  $f_F$  divise celui de l'endomorphisme de  $E_i$  induit par  $f_F$ . Mais, de manière générale, l'endomorphisme de  $E_i$  induit par  $f_F$  est également l'endomorphisme de  $E_i$  induit par  $f$ . Ainsi, avec les notations de l'énoncé,  $\psi_i$  est cyclique pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $P_{i+1}$  divise  $P_i$  pour tout  $i \in \llbracket 2, r-1 \rrbracket$ .

Il reste seulement à prouver que  $P_1$  divise  $P_2$ . D'après ce qui précède,  $P_1 = \pi_{f,x_1} = \pi_f$ . Mais comme  $P_2$  est le polynôme minimal d'un endomorphisme induit par  $f$ ,  $P_2$  divise  $\pi_f = P_1$ .

**Conclusion** Le résultat est vrai quelle que soit la dimension de  $E$  et l'endomorphisme  $f$  de  $E$ .

**32** Notons  $f_1, \dots, f_r$  les endomorphismes de  $E_1, \dots, E_r$  induits par  $f$ . L'application qui à  $(g_1, \dots, g_r) \in \prod_{i=1}^r C(f_i)$  associe l'unique  $g \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $g|_{E_i} = g_i$  est bien définie, linéaire, injective et à valeurs dans  $C(f)$ .

Ainsi  $\dim C(f) \geq \sum_{i=1}^r \dim C(f_i)$ . Mais comme les  $f_i$  sont cycliques,  $\dim C(f_i) = \dim E_i$ . Finalement,  $\dim C(f) \geq \sum_{i=1}^r \dim E_i = \dim E = n$ .

**33** Si on note  $d = \deg \pi_f$ . Alors  $d = \dim \mathbb{K}[f] = \dim C(f) \geq n$ . Mais  $d \leq n$  donc  $d = n$ . Notamment,  $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$  est libre. On en déduit d'après la partie II.B que  $f$  est cyclique.

**34** Posons  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ .

D'après le théorème de réduction des isométries vectorielles, il existe une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale par blocs, avec pour blocs diagonaux  $I_p, -I_q$  et  $r$  blocs diagonaux  $R(\theta_i)$  ( $\theta_i \in ]0, \pi[$ ). On a alors

$$\chi_f = (X-1)^p(X+1)^q \prod_{i=1}^r (X-2X \cos \theta_i + 1).$$

De la même manière, il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale par blocs, avec pour blocs diagonaux  $I_{p'}$ ,  $-I_{q'}$  et  $r'$  blocs diagonaux  $R(\theta'_i)$  ( $\theta'_i \in ]0, \pi[$ ). On a alors  $\chi_f = (X-1)^{p'}(X+1)^{q'} \prod_{i=1}^{r'} (X-2X \cos \theta'_i + 1)$ . Comme  $\chi_f = \chi_{f'}$ , l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  nous apprend que  $p = p'$ ,  $q = q'$ ,  $r = r'$  et, quitte à réordonner les  $\theta'_i$  (i.e. réordonner les vecteurs de la base  $\mathcal{B}'$ ),  $\cos \theta_i = \cos \theta'_i$  i.e.  $\theta_i = \theta'_i$  (puisque  $\theta_i, \theta'_i \in ]0, \pi[$ ). Ainsi  $f$  et  $f'$  ont la même matrice dans les bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

**35** Supposons que  $f$  est orthocyclique. Il existe donc une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $C_Q$ . Mais comme  $f \in \mathcal{O}(E)$  et  $\mathcal{B}$  est orthonormale,  $C_Q$  est orthogonale. Posons  $Q = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ . La dernière colonne de  $C_Q$  est orthogonale aux précédentes, ce qui donne  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ . La dernière colonne de  $C_Q$  est unitaire, ce qui donne  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 = 1$  i.e.  $a_0^2 = 1$  i.e.  $a_0 = \pm 1$ . On en déduit que  $\chi_f = Q = X^n + a_0 = X^n \pm 1$ .

Réciproquement supposons que  $\chi_f = X^n \pm 1$ . Soit  $\mathcal{B}_0$  une base orthonormale de  $E$ . Soit  $f' \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice dans cette base est  $C_Q$  avec  $Q = X^n \pm 1$ . On vérifie que  $C_Q$  est bien orthogonale : la famille des colonnes de  $C_Q$  est bien orthonormale. Comme  $\mathcal{B}_0$  est une base orthonormale,  $f' \in \mathcal{O}(E)$ . Par ailleurs,  $\chi_{f'} = X^n \pm 1 = \chi_f$ . D'après la question précédente, il existe des bases orthonormales  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $E$  dans lesquelles  $f$  et  $f'$  ont même matrice. Notons  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f') = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ . Comme  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases orthormées, la formule de changement de base donne l'existence de  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = P^T C_Q P$ . Par conséquent,  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^T C_Q P$ . Notons  $\mathcal{B}_1$  la famille de vecteurs de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $P^T$ . Comme  $P^T$  est orthogonale,  $\mathcal{B}_1$  est une base orthonormale et, par formule de changement de base,  $\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = C_Q$ . Ceci prouve que  $f$  est orthocyclique.

**36** Comme  $f$  est nilpotent, il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  dans laquelle  $f$  est triangulaire supérieure stricte. En notant  $F_i = \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$ , on a donc  $f(F_i) \subset F_{i-1}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  (on peut convenir que  $F_0 = \{0\}$ ). On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à cette base  $(e_1, \dots, e_n)$  et on obtient une base orthonormale  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $E$  telle que  $\text{vect}(u_1, \dots, u_i) = \text{vect}(e_1, \dots, e_i) = F_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Ainsi  $f(u_i) \in f(F_i) \subset F_{i-1} = \text{vect}(u_1, \dots, u_{i-1})$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La matrice de  $f$  dans la base  $(u_n, \dots, u_1)$  est alors triangulaire inférieure stricte.

**37** Supposons que  $f$  est orthocyclique. Il existe donc une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $C_Q$ . Comme  $f$  est nilpotent,  $\chi_f = X^n = Q$ . La dernière colonne de  $C_Q$  est donc nulle de sorte que  $\text{rg } f = \text{rg } C_Q = n-1$ . Par ailleurs,  $\text{Ker } f = \text{vect}(e_n)$  et comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormale,  $(\text{Ker } f)^\perp = \text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ . Ainsi  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  est une base orthormée de  $(\text{Ker } f)^\perp$ . Soit  $(x, y) \in ((\text{Ker } f)^\perp)^2$ . Alors

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle e_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y, e_i \rangle e_i$$

puis

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle e_{i+1} \qquad f(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y, e_i \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y, e_i \rangle e_{i+1}$$

Comme  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  et  $(e_2, \dots, e_n)$  sont toutes deux orthormées

$$(x | y) = \sum_{i=1}^{n-1} (x | e_i)(y | e_i) = (f(x) | f(y))$$

Inversement, supposons que  $f$  est de rang  $n-1$  et que  $\forall (x, y) \in ((\text{Ker } f)^\perp)^2$ ,  $(x | y) = (f(x) | f(y))$ . D'après la question précédente, il existe une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire inférieure stricte. On a notamment  $f(e_n) = 0_E$  et comme  $\text{rg}(f) = n-1$ ,  $\text{Ker } f = \text{vect}(e_n)$  en vertu du théorème du rang. Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormale,  $(\text{Ker } f)^\perp = \text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ .