

# SÉRIES NUMÉRIQUES

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Comparaison à une série géométrique

### Proposition 1.1 Règle de d'Alembert

Soit  $(a_n)$  une suite de complexes non nuls (au moins à partir d'un certain rang). On suppose que  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

- Si  $\ell < 1$ , alors  $\sum a_n$  converge absolument.
- Si  $\ell > 1$ , alors  $\sum a_n$  diverge grossièrement.

### Exemple 1.1

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$  converge.

**REMARQUE.** On ne peut a priori pas conclure si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$  ou si la suite de terme général  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  n'admet pas de limite.

### Exemple 1.2

Posons  $a_n = 1$  et  $b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = 1$  mais  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  diverge tandis que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  converge.



**ATTENTION !** Il s'agit bien de **limites** dans l'énoncé de la règle de d'Alembert. Le fait d'avoir  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$  ou  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$  ne permet pas de conclure. En prenant  $a_n = \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  mais la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$  diverge.

### Exemple 1.3 Série exponentielle

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , la série exponentielle  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$  converge absolument.

## 2 Comparaison série-intégrale

**Méthode** Comparaison à une intégrale

On considère une série  $\sum_{n \geq 0} f(n)$  où  $f$  est une fonction continue et **monotone** sur  $\mathbb{R}_+$ . On peut comparer les sommes partielles  $S_n$  à une intégrale pour déterminer la nature de la série. Si, par exemple,  $f$  est croissante, on en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $t \in [k, k+1]$  :

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

Puis par intégration sur  $[k, k+1]$ ,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k+1)$$

Enfin, en sommant l'inégalité de gauche pour  $0 \leq k \leq n$  et celle de droite pour  $0 \leq k \leq n-1$ , on obtient via la relation de Chasles

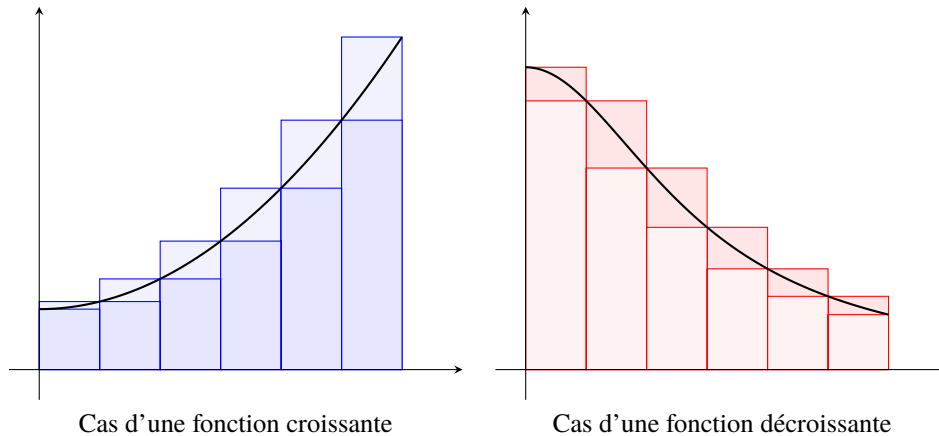
$$\int_0^n f(t) dt + f(0) \leq S_n \leq \int_0^{n+1} f(t) dt$$

On a des résultats analogues lorsque  $f$  est décroissante.

Les encadrements obtenus permettent éventuellement de déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles.

En modifiant légèrement la technique, on peut également obtenir un équivalent de la suite des restes (en cas de convergence).

Graphiquement, la méthode correspond à encadrer l'intégrale de  $f$  sur un intervalle par une somme d'aires de rectangles d'où le nom de méthode des rectangles.



**REMARQUE.** Il ne s'agit pas de retenir des formules par cœur mais de retenir la méthode permettant d'obtenir des encadrements des sommes partielles et des restes.

**Exemple 2.1 Équivalent de la série harmonique**

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in [k, k+1]$ ,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

En sommant convenablement, on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$$

ou encore

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

L'inégalité de gauche permet de conclure que la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

L'encadrement permet même d'affirmer que donner un équivalent des sommes partielles  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$ .

**Exemple 2.2 Équivalent du reste de la série  $\sum \frac{1}{n^2}$** 

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in [k, k+1]$ ,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Mais en sommant l'encadrement précédent, on a également pour  $N > n \geq 1$

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^2}$$

ou encore

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$$

Par passage à la limite

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

On obtient ainsi un équivalent de la suite des restes de la série  $\sum \frac{1}{n^2}$ .

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

**Exercice 2.1**

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  lorsque  $\alpha < 1$  et un équivalent de son reste lorsque  $\alpha > 1$ .

**Exercice 2.2 Constante  $\gamma$  d'Euler**

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application continue par morceaux et décroissante.

1. Montrer que la série  $\sum f(n)$  et l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.
2. Montrer que la série de terme général  $\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$  converge.
3. Application. Montrer qu'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .

**Exercice 2.3 Equivalent de la fonction  $\zeta$  en 1**

Soit  $\zeta : x \in ]1, +\infty[ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ . A l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que  $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$ .

**3 Sommation des relations de comparaison****Proposition 3.1**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  deux séries numériques. On suppose de plus que  $(v_n)$  est de **signe constant** à partir d'un certain rang.

**Domination** On suppose que  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .

- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ .
- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge, alors  $\sum_{k=0}^n u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ .

**Négligeabilité** On suppose que  $u_n = o(v_n)$ .

- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ .
- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge, alors  $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ .

**Equivalence** On suppose que  $u_n \sim v_n$ .

- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ .
- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge et  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$ .



**ATTENTION !** Il est essentiel que la suite de référence soit de signe constant à partir d'un certain rang.

**REMARQUE.** Dans les cas de convergence, les résultats restent vrais même si les sommes partielles débutent à un indice non nul.

### Lemme de Césaro

Soit  $(u_n)$  est une suite numérique convergente de limite  $\ell$ . Posons  $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (suite des moyennes).

- Si  $\ell \neq 0$ ,  $u_n \sim \ell$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell$  diverge. Ainsi  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n \ell = (n+1)\ell$  i.e.  $v_n \sim \ell$ . Donc  $(v_n)$  converge vers  $\ell$ .
- Si  $\ell = 0$ ,  $u_n = o(1)$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1$  diverge. Ainsi  $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n 1\right)$  i.e.  $v_n = o(1)$ . Donc  $(v_n)$  converge vers 0.

Dans les deux cas,  $(v_n)$  est de même limite que  $(u_n)$ .

### Exercice 3.1

Soit  $(u_n)$  une suite réelle divergeant vers  $+\infty$ . On pose  $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $(v_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

### Exemple 3.1

On veut déterminer un équivalent de la somme partielle de la série harmonique. On remarque que

$$\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Comme la série  $\sum \frac{1}{n}$  est une série à termes positifs divergente

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

### Exemple 3.2

On veut déterminer un équivalent du reste de la série  $\sum \frac{1}{n^2}$ . On remarque que

$$\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série à termes positifs convergente donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{n}$$

**Exercice 3.2**

On pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$$