

Convergence dominée

Exercice 1

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Exercice 2 ★★

On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t \, dt}{(1+t^2)^x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Calculer $f(2)$.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2}$$

En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Exercice 4

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n f(t) e^{-nt} dt$$

Exercice 5 ★★

CCP MP

On pose $f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur \mathbb{R} .
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$?
3. Soit g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) g(t) dt = g(0)$$

Exercice 6

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

1. Pour quelles valeurs de n l'intégrale est-elle définie ?
2. Calculer la limite de la suite (u_n) .
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
4. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge et calculer sa somme S sous la forme d'une intégrale.
5. Calculer S .

Exercice 7

Mines-Télécom MP 2018

Convergence et somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, où $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$. On pourra travailler sur les sommes partielles de la série.

Exercice 8 ★★

Soit f une application continue sur $[0, 1]$. On pose $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 9 ★★

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

Exercice 10

Mines Télécom MP 2022

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx$.

1. Montrer que I_n est bien définie.

2. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$.

Exercice 11

Soit f une application continue sur $[0, 1]$. Montrer que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y \int_0^1 x^y f(x) dx = f(1)$$

Intégration terme à terme

Exercice 12

Mines-Ponts MP

On définit une fonction f par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sh}(x\sqrt{t}) dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .

2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement en série entière.

3. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 13 ★

ENSEA/ENSIIE MP 2015

1. Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

Exercice 14 ★

CCINP (ou CCP) PSI 2019

Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente.

1. Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$.

3. Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 15 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

1. Montrer que $I = \int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx$ est bien définie.

2. Donner la décomposition en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ et préciser son rayon de convergence.

3. Écrire I comme somme d'une série.

4. Donner la valeur exacte de I sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 16 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$.

1. Montrer que I converge.
2. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 17 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2018

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Rappeler le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un segment.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < R$.

Exercice 18 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2019

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}$ sur $]0, 1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \in]0, 1] \mapsto x^{2n} (\ln x)^2$. Montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0, 1]$ et calculer $\int_0^1 u_n(x) dx$.
3. Déterminer une expression de $I = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx$ sous forme de somme.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

Exercice 19

Mines Télécom MP 2022

Etablir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 20

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2022

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Exercice 21 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2017

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$. On pose : $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(x+1)^n}$ et $J_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

1. Montrer que J_n est bien définie et étudier sa limite en $+\infty$.
2. Calculer $f'_n(x)$ et en déduire un équivalent de J_n .
3.
 - a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} J_n z^n$.
 - b. Calculer la somme de cette série entière sous forme intégrale.

Exercice 22

CCINP MP 2024

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(\sqrt{x}) dx$ converge.
2. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$.

Continuité

Exercice 23 ★★★

On pose

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que g est continue sur $] -\infty, 1[$.
3. Montrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{x} + o(1) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{=} \frac{1}{1-x} + o(1)$$

Exercice 24 ★

Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable sur \mathbb{R} . On pose

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$$

Justifier que \hat{f} est continue sur \mathbb{R} .

Dérivation

Exercice 25

Mines-Ponts MP 2018

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t) dt}{1+t^2} = \int_0^x \frac{\ln(t) dt}{t^2-1}$$

Exercice 26

Mines-Ponts MP 2017

A toute fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on associe la fonction $R(h)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, R(h)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x \sin t) dt$$

A toute fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on associe fonction $S(g)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(g)(x) = g(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x \sin t) dt$$

1. Montrer que R et S sont des applications linéaires à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. On pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2} .
3. Soit P un polynôme. Montrer que $S \circ R(P) = P$.
4. Montrer que pour $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $S \circ R(g) = g$.

Exercice 27 ★★

On pose

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t) dt$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et en déduire $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 28

CCP MP

On pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t+1} dt$.

1. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
2. Donner une équation différentielle vérifiée par g sur \mathbb{R}_+^* .
3. Donner un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 29 ★★

Mines Télécom MP 2016

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$.

1. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} et paire.
2. Montrer que $|\sin u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et déterminer F'' .
4. Déterminer la fonction F .

Exercice 30 ★★

Centrale MP 2011

Soit $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que $f^2 + g$ est constante. Quelle est sa valeur ?
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 31 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.
 - a. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
 - b. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
2.
 - a. Montrer que f est solution de (E) : $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.
 - b. Déterminer la fonction f .

Exercice 32

Mines-Ponts MP

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{tx}}{t} e^{-t} dt$. Déterminer le domaine de définition de F et expliciter $F(x)$.

Exercice 33 ★★★

Intégrale de Poisson

On pose pour $f(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$.

1. Justifier que f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
2. Montrer que pour tout $x \in D \setminus \{0\}$, $f(x) = f(1/x) + 2\pi \ln |x|$.
3. Justifier que f est dérivable sur $] -1, 1[$.
4. Montrer que f' est nulle sur $] -1, 1[$.
5. En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x \in D$.

Exercice 34

CCINP (ou CCP) MP 2022

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan(u)| \leq |u|$.
2. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.
 - a. Domaine de définition de F ?
 - b. Domaine de continuité de F ?
 - c. Domaine de dérivabilité de F ?
 - d. Déterminer F' .
 - e. En déduire F .

Exercice 35

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F .
2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
3. Déterminer une équation différentielle dont F est solution sur \mathbb{R}_+^* , puis résoudre cette équation différentielle.

Exercice 36 ★★★

Théorème de Fubini

Soit $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On souhaite démontrer le théorème de Fubini, à savoir que :

$$\int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b \varphi(x, y) \, dx \right) dy$$

Considérons pour cela les applications :

$$F : t \in [a, b] \mapsto \int_a^t \left(\int_c^d \varphi(x, y) \, dy \right) dx$$

$$G : t \in [a, b] \mapsto \int_c^t \left(\int_a^d \varphi(x, y) \, dx \right) dy$$

1. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et calculer sa dérivée.
3. Conclure.

Exercice 37

Mines-Ponts MP 2024

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^4)^n}$$

1. Montrer que h_n est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'_n(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x)$$

2. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h_n(x) = a_n x^{2-4n}$$

3. Déterminer $h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 38

Navale MP 2024

$$1. \text{ Exprimer } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, dt \text{ en fonction de } f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt.$$

$$2. \text{ En déduire la valeur de } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt.$$

Divers

Exercice 39 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2014

$$\text{On pose } f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer des équivalents simples de f aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 40 ★★

$$\text{On pose } f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+ .

Exercice 41 ★★★★★

Transformée de Laplace

Soit f continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* . On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto f(t)e^{-pt}$ soit intégrable sur \mathbb{R}_+^* et on pose

$$\alpha = \inf \{ p \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)e^{-pt} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Pour $p \in \mathbb{R}$, on pose $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ lorsque cela est possible.

1. Justifier que F est définie sur $]\alpha, +\infty[$.
2. *Théorème de la valeur initiale.* On suppose que $\lim_{0^+} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = \ell$.
3. *Théorème de la valeur finale.* On suppose $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\alpha \leq 0$ et $\lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p) = \ell$.