Devoir à la maison n°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – E3A MP 2013

L'objet du problème est l'étude des deux suites récurrentes doubles définies par :

$$u_0 = a, u_1 = b, \forall n \geq 0, u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1} + u_n} \quad \text{et} \quad v_0 = a, v_1 = b, \forall n \geq 0, v_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{v_{n+1}v_n}}$$

où a et b sont deux réels strictement positifs.

Partie I – Etude de la suite (v_n)

Soit $v_0 > 0$ et $v_1 > 0$. On considère la suite définie pour $n \geq 0$ par : $v_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{v_{n+1}v_n}}$.

I.1 Quelles sont les limites possibles, finies ou infinies, de la suite (v_n) ? (On justifiera précisément la réponse.)

I.2 On pose : $w_n = \ln(v_n)$.

I.2.a Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n).
On note F l'espace vectoriel complexe des suites complexes vérifiant cette relation de récurrence.

I.2.b Déterminer une base de F.

I.2.c Si $(x_n) \in \mathrm{F}$, que peut-on dire de la convergence de (x_n) ?

I.3 Que peut-on en déduire concernant le comportement de la suite (v_n) ? sur le comportement de la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$? de la série $\sum\limits_{n\geq 0}(v_n - 1)$?

Partie II – Norme subordonnée

Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On appelle *norme subordonnée* à la norme $\| \ \|$ l'application $||| \ |||$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$|||\mathrm{A}||| = \sup_{\mathrm{X}\in\mathbb{C}^n, \|\mathrm{X}\|\leq 1} \|\mathrm{AX}\|$$

II.1 Vérifier que $||| \ |||$ définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

II.2 Montrer que $||| \ |||$ est une *norme d'algèbre*, c'est-à-dire que

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \ |||\mathrm{AB}||| \leq |||\mathrm{A}||| \ |||\mathrm{B}|||$$

Partie III – Etude de normes matricielles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $\| \ \|_\infty$ la norme usuelle sur $\mathbb{C}^n$ définie pour $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ par :

$$\|(z_1, z_2, \dots, z_n)\|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$

et on identifie le n-uplet $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ au vecteur colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $|||A|||_\infty$ la norme de A pour la norme subordonnée à la norme $\| \ \|_\infty$. Enfin, pour $Z \in \mathbb{C}^n$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $N_P(Z) = \|PZ\|_\infty$.

III.1 Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

On pose $m = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |m_{i,i}|$.

III.1.a Soit $Z \in \mathbb{C}^n$. Montrer que $\|DZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty$.

III.1.b Déterminer $|||D|||_\infty$.

III.2 **III.2.a** Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que N_P est une norme sur $\mathbb{C}^n$ ssi P est une matrice inversible.
Lorsque P *est inversible, on notera dorénavant* $\| \ \|_P$ *pour* N_P *et la norme subordonnée à la norme* $\| \ \|_P$ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *sera notée* $||| \ |||_P$.

III.2.b On se donne une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que :

$$|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty .$$

III.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note sp(M) l'ensemble des valeurs propres de M et on définit $\rho(M)$ par : $\rho(M) = \max\{|\mu|, \mu \in \text{sp}(M)\}$.

III.3.a Montrer que, pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$, on a : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1})$.

III.3.b Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leq |||A|||_P$.

III.3.c On suppose A diagonalisable.
Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = |||A|||_P$.

III.3.d Un exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\rho(A)$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = |||A|||_P$.

III.3.e Un exemple. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_{i,j} = j$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = |||A|||_P$.

III.4 Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Soit donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

III.4.a On pose $m = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$. Montrer que, pour tout $Z \in \mathbb{C}^2$, on a : $\|AZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty$. Déterminer $|||A|||_\infty$.

III.4.b On suppose la matrice non diagonalisable et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A.

III.4.b.i Démontrer que $\mathrm{sp}(A)$ ne contient qu'un seul élément. On le note α.

III.4.b.ii Démontrer l'existence d'une base e de $\mathbb{C}^2$ telle que : $\mathrm{M}at_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

III.4.b.iii Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'une base e' de $\mathbb{C}^2$ telle que : $\mathrm{M}at_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où $|\beta'| \leq \varepsilon$.

III.4.b.iv En déduire l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que : $|||A|||_P \leq \rho(A)+\varepsilon$.

III.4.c Déterminer $\inf\limits_{P\in GL_2(\mathbb{C})} |||A|||_P$.

III.4.d Un exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $|||A|||_\infty$ et montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P \leq 2$.

III.4.e On suppose que $\rho(A) < 1$. Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que : $|||A|||_P < 1$.
Que peut-on en déduire concernant la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie IV – Etude de la suite (u_n)

Soit $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$. On considère la suite définie pour $n \geq 0$ par : $u_{n+2} = \dfrac{2}{u_{n+1} + u_n}$. On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(y, \dfrac{2}{x+y}\right) \end{array}.$$

On a alors : $f(u_n, u_{n+1}) = (u_{n+1}, u_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV.1 Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Dans la suite, on note $df_{(x_0,y_0)}$ et $J_{(x_0,y_0)}$ la différentielle et la jacobienne de f au point $(x_0,y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

IV.2 Déterminer les points fixes de f dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

IV.3 Déterminer la matrice $J_{(1,1)}$.

IV.4 Démontrer l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||J_{(1,1)}|||_P = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

IV.5 On fixe un réel α vérifiant $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.

IV.5.a Justifier l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x_0,y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \|(1,1)-(x_0,y_0)\|_P \leq \eta \implies |||J_{(x_0,y_0)}|||_P \leq \alpha.$$

Dans la suite, on note D le disque fermé de centre $(1,1)$ et de rayon η pour la norme $|||\ |||_P$ et on suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$.

IV.5.b Soit $(x_0,y_0) \in D \cap (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit, pour $t \in [0,1]$:

$$\varphi(t) = f\left((1,1) + t[(x_0,y_0)-(1,1)]\right).$$

Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et obtenir une expression de $\varphi'(t)$ faisant intervenir la différentielle de f. En déduire :

$$\|(1,1) - f(x_0,y_0)\|_P \leq \alpha \|(1,1)-(x_0,y_0)\|_P.$$

IV.5.c Démontrer que, pour tout $n \geq n_0$, $(u_n, u_{n+1}) \in \mathrm{D}$.

IV.5.d Démontrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a l'inégalité :

$$\|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_{\mathrm{P}} \leq \alpha^{n-n_0} \|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_{\mathrm{P}}.$$

IV.5.e Obtenir que : $u_n = 1 + \mathrm{O}(\alpha^n)$.

IV.5.f Que peut-on en déduire concernant le comportement de la suite (u_n) ? sur le comportement de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$? de la série $\sum_{n\geq 0} (u_n - 1)$?

Partie V – Suite de l'étude

On considère une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On rappelle qu'une valeur d'adhérence de (x_n) est un réel λ pour lequel il existe une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) qui converge vers λ. On rappelle que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence et on admet que tout suite bornée admet une plus petite et une plus grande valeur d'adhérence.

V.1

V.1.a Soit (x_n) une suite bornée non convergente admettant λ pour valeur d'adhérence. Justifier l'existence d'un réel $r > 0$ tel que, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq \mathrm{N}$ vérifiant $|x_n - \lambda| > r$. En déduire que (x_n) admet une valeur d'adhérence $\lambda' \neq \lambda$.

V.1.b Montrer que toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.

V.1.c Soit (x_n) une suite bornée. On note ℓ_- sa plus petite valeur d'adhérence et ℓ_+ sa plus grande. Montrer l'équivalence : (x_n) est convergente si et seulement si $\ell_- = \ell_+$.

V.2 Dans cette question, (u_n) désigne la suite étudiée dans la partie 4.
On pose $\alpha = \min\left\{u_0, u_1, \dfrac{1}{u_0}, \dfrac{1}{u_1}\right\}$.

V.2.a Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq u_n \leq \dfrac{1}{\alpha}$. On note ℓ_- et ℓ_+ les plus petite et plus grande valeurs d'adhérences de (u_n).

V.2.b Justifier l'existence d'une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\varphi(n)+1})$ convergent et $u_{\varphi(n)+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \longrightarrow \ell_-$. En déduire l'inégalité $\ell_-\ell_+ \geq 1$.

V.2.c Montrer que l'on a : $\ell_-\ell_+ = 1$.

V.2.d En considérant une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $(u_{\varphi(n)})$, $(u_{\varphi(n)+1})$ et $(u_{\varphi(n)+2})$ convergent et $(u_{\varphi(n)+3}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_-$, obtenir l'égalité $\ell_- = \ell_+$ et conclure.

V.2.e Que peut-on dire de l'hypothèse d'existence d'un entier n_0 tel que $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in \mathrm{D}$ dans la question **IV.5.a** ?