Devoir à la maison n°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après EM Lyon 2000

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

I Calcul d'une somme et d'une intégrale

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, \pi]$, on note

$$\mathrm{C}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

Montrer que pour tout $x \in]0, \pi]$

$$\frac{1}{2} + \mathrm{C}_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de l'intégrale $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.

3 Soit φ l'application définie sur $]0, \pi]$ par $\varphi(x) = \dfrac{\cos(ax) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. Justifier que φ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

4 On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^\pi \varphi(x)\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\,\mathrm{d}x$. Justifier que la suite (I_n) converge vers 0.

II Calcul de la somme d'une série

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos(ax)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

5 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n$$

6 En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et calculer sa somme.

7 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de a et n.

8 Etablir que

$$2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}a}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}$$

III Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

9 Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

On note alors

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} \qquad G(\alpha) = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} \qquad H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$

10 **10.a** Justifier que pour tout réel $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}$$

10.b Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} = 0$$

10.c En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et que $G(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$.

11 **11.a** A l'aide du changement de variable $u = t^{1-\alpha}$, montrer que

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

et en déduire que

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}$$

11.b Etablir que

$$F(\alpha) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}$$

12 Conclure que

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$