Interrogation écrite n°09

NOM : Prénom : Note :

1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Déterminer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal p sur le plan d'équation $x+y+z=0$.

   Remarquons qu'un vecteur normal au plan P *d'équation* $x+y+z=0$ *est* $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Notons* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

   Alors

   $$p(e_1) = e_1 - \frac{\langle e_1, a\rangle}{\|a\|^2}a = \frac{1}{3}(2,-1,-1)$$
   $$p(e_2) = e_2 - \frac{\langle e_2, a\rangle}{\|a\|^2}a = \frac{1}{3}(-1,2,-1)$$
   $$p(e_3) = e_3 - \frac{\langle e_3, a\rangle}{\|a\|^2}a = \frac{1}{3}(-1,-1,2)$$

   La matrice recherchée est donc

   $$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   ∎

2. Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \\ z & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est bien définie et que φ est un isomorphisme de groupes.

   Soit $z \in \mathbb{U}$. *Il existe donc* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $z = e^{i\theta}$. *Ainsi*

   $$\varphi(z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathrm{R}(\theta) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

   de sorte que φ *est bien définie. Soit* $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$. *Il existe alors* $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $z_1 = e^{i\theta_1}$ *et* $z_2 = e^{i\theta_2}$. *Comme* $z_1z_2 = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, $\varphi(z_1z_2) = \mathrm{R}(\theta_1+\theta_2) = \mathrm{R}(\theta_1)\mathrm{R}(\theta_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2)$, *de sorte que* φ *est un morphisme de groupes. Si* $\varphi(z) = \mathrm{I}_2$, *alors* $\mathrm{Re}(z) = 1$ *et* $\mathrm{Im}(z) = 0$, *donc* $z = 1$. *Ainsi,* φ *est injective. On sait que*

   $$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{\mathrm{R}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\} = \{\varphi(e^{i\theta}),\ \theta \in \mathbb{R}\} = \varphi(\mathbb{U})$$

   donc φ *est surjective. Par conséquent,* φ *est un isomorphisme de groupes.* ∎

3. Soient E un espace euclidien, $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ et $v = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u$. Montrer que $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.

   Soit $x \in \operatorname{Ker} v$ *et* $y \in \operatorname{Im} v$. *Alors* $u(x) = x$ *et il existe* $z \in \mathrm{E}$ *tel que* $y = z - u(z)$. *On a donc*

$$\langle x, y\rangle = \langle x, z - u(z)\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, u(z)\rangle = \langle x, z\rangle - \langle u(x), u(x)\rangle = 0$$

   car u *conserve le produit scalaire en tant qu'isométrie vectorielle. Ainsi,* $\operatorname{Ker} v$ *et* $\operatorname{Im} v$ *sont orthogonaux. Notamment* $\operatorname{Ker} v$ *et* $\operatorname{Im} v$ *sont en somme directe. D'après le théorème du rang,* $\dim(\operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} v) = \dim(\mathrm{E})$. *On en déduit que* $\operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} v = \mathrm{E}$. ∎

4. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On considère la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. *On a* $\mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$, *donc* $\|\mathrm{M}\|^2 = \operatorname{tr}(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}) = \operatorname{tr}(\mathrm{I}_n) = n$. *Ainsi,* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *est inclus dans la boule fermée centrée en* 0 *de rayon* $\sqrt{n}$, *donc* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *est borné. De plus, l'application* $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\top\mathrm{M} \end{cases}$ *est continue car les coefficients de* $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ *sont des polynômes en les coefficients de* M. *Par conséquent,* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$ *est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. Comme* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est un espace de dimension finie,* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *est un compact en tant que fermé borné de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ∎

5. Montrer que $\mathbb{U}$ est connexe par arcs.

   Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it}$. *Alors* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{U} = f(\mathbb{R})$. *Comme* $\mathbb{R}$ *est connexe par arcs, son image par une application continue l'est également. Ainsi,* $\mathbb{U}$ *est connexe par arcs.* ∎

6. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^* \circ u)$.

   Il est clair que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(u^* \circ u)$. *Réciproquement, soit* $x \in \operatorname{Ker}(u^* \circ u)$. *Alors* $\langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u^*(u(x))\rangle = 0$, *donc* $u(x) = 0$ *et* $x \in \operatorname{Ker} u$. *Ainsi,* $\operatorname{Ker}(u^* \circ u) \subset \operatorname{Ker} u$. *Par double inclusion, on a bien* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^* \circ u)$. ∎