

# RÉVISIONS ORAUX

## Suites

### Solution 1

1. Posons  $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ .  $\varphi$  est clairement continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et une étude rapide montre que  $\varphi$  est strictement croissante sur  $]0, e]$  et strictement décroissante sur  $[e, +\infty[$ . De plus, pour tout entier  $n \geq 3$ ,

$$-\infty = \lim_{0^+} \varphi < \frac{1}{n} < \frac{1}{e} = \varphi(e) \quad \text{et} \quad \varphi(e) > \frac{1}{n} > 0 = \lim_{+\infty} \varphi$$

donc le théorème des valeurs intermédiaires montre que l'équation  $(E_n)$  admet exactement deux solutions, l'une sur  $]0, e[$  et l'autre sur  $]e, +\infty[$ .

Autrement dit, pour  $n \geq 3$ , il existe bien deux solutions  $u_n$  et  $v_n$  à l'équation  $(E_n)$  et  $0 < u_n < e < v_n$ .

2. Pour tout  $n \geq 3$ ,  $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$ . On en déduit que  $0 \leq \ln(u_n) \leq \frac{e}{n}$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0$  par encadrement. Par continuité de l'exponentielle en 0,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^0 = 1$ .

3. Comme  $(u_n)$  converge vers 1 i.e.  $(u_n - 1)$  converge vers 0

$$\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + (u_n - 1))}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - 1$$

### Solution 2

1. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ . La fonction  $f_n$  est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus,  $f_n(0) = 0$  et  $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$ .

L'équation  $f_n(x) = 0$  admet donc une unique solution sur  $\mathbb{R}_+$  en vertu du théorème des valeurs intermédiaires.

Remarquons pour la suite que  $f_n(x_n) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Remarquons que

$$f_n(x_{n+1}) = f_{n+1}(x_{n+1}) - \frac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} \leq 1 = f_n(x_n)$$

Par stricte croissance de  $f_n$ , on a donc  $x_{n+1} \leq x_n$ .

La suite  $(x_n)$  est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge.

3. On peut calculer  $x_2 = \sqrt{3} - 1 < 1$ . La suite  $(x_n)$  est donc à valeurs dans  $[0, 1[$  à partir du rang 2.

Soit  $f : x \mapsto -\ln(1-x)$ . L'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\infty, 1[$ . D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\left| f(x_n) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x_n^k \right| \leq \max_{[0, x_n]} |f^{(n+1)}| \cdot \frac{x_n^{n+1}}{(n+1)!}$$

Puisque  $f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$|f(x_n) - 1| = |f(x_n) - f_n(x_n)| \leq \frac{x_n^{n+1}}{(n+1)(1-x_n)^{n+1}} \leq \frac{x_2^{n+1}}{(n+1)(1-x_2)^{n+1}}$$

Puisque  $x_2 \in ]0, 1[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_2^{n+1}}{(n+1)(1-x_2)^{n+1}} = 0$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1$ . On en déduit alors sans peine que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 - \frac{1}{e}$ .

### Solution 3

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $f_n : x \mapsto \cos x - nx$ .  $f_n$  est dérivable et  $f'_n(x) = -\sin x - n < 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .  $f_n$  est continue et strictement décroissante sur  $[0, 1]$ . De plus,  $f_n(0) = 1 > 0$  et  $f_n(1) = \cos(1) - n < 0$ . On en déduit que  $f_n$  s'annule une unique fois sur  $[0, 1]$ . D'où l'existence et l'unicité de  $x_n$ .
2. On a  $\cos x_n = nx_n$  et donc  $x_n = \frac{\cos x_n}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit que  $|x_n| \leq \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  puis que  $(x_n)$  converge vers 0.
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Remarquons que  $f_n \geq f_{n+1}$  sur  $[0, 1]$ . Donc  $f_n(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$ . La stricte décroissance de  $f_n$  implique que  $x_{n+1} \leq x_n$ . Par conséquent la suite  $(x_n)$  est décroissante.
4. Comme  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et que  $\cos$  est continue en 0,  $\cos x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos 0 = 1$ . Donc  $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .
5. Comme  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\cos x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)$ . Or  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  donc  $\cos x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Ainsi  $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ . On en déduit que  $x_n - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}$ .

#### Solution 4

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x) - x| \leq \max_{\mathbb{R}} |\sin^{(3)}| \cdot \frac{|x|^3}{6}$$

On en déduit que

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{k}{n^2} - \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{6n^6} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n^3}{6n^6} = \frac{1}{6n^2}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \right) = 0$$

Comme

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

## Polynômes

#### Solution 5

S'il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $\theta = \frac{m\pi}{n}$ , alors  $P = X^{2n} - 2(-1)^m X^n + 1$ .

- Si  $m$  est pair,

$$P = (X^n - 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ . Il faut alors distinguer suivant la parité de  $n$ .

Si  $n$  est pair, alors

$$P = (X-1)^2(X+1)^2 \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left( X^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} X + 1 \right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Si  $n$  est impair, alors

$$P = (X-1)^2 \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left( X^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} X + 1 \right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

- Si  $m$  est impair,

$$P = (X^n + 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}} \right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ . Il faut alors distinguer suivant la parité de  $n$ .

Si  $n$  est pair, alors

$$P = \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left( X^2 - 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} X + 1 \right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Si  $n$  est impair, alors

$$P = (X + 1)^2 \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \left( X^2 - 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} X + 1 \right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Dans toutes les expressions précédentes, on convient qu'un produit indexé sur le vide vaut 1 et les facteurs sont bien irréductibles car les cosinus ne valent ni 1 ni  $-1$ .

On suppose maintenant qu'il n'existe pas d'entier  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $\theta = \frac{m\pi}{n}$ . Remarquons que

$$P = (X^n - e^{ni\theta})(X^n - e^{-ni\theta})$$

On a

$$X^n - e^{ni\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right)$$

et par conjugaison

$$X^n - e^{-ni\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{-i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right)$$

La décomposition de  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  est donc

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right) \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{-i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right)$$

On en déduit que la décomposition de  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  est

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X^2 - 2X \cos \left( \theta + \frac{2k\pi}{n} \right) + 1 \right)$$

Les facteurs sont bien irréductibles car la condition  $\theta \notin \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$  assure qu'aucun des cosinus ne vaut 1 ou  $-1$ .

### Solution 6

Supposons que  $P$  soit réductible sur  $\mathbb{Q}$ . Alors il existe des polynômes  $Q$  et  $R$  non constants de  $\mathbb{Q}[X]$  tels que  $P = QR$ . Puisque  $\deg Q + \deg R = \deg P = 3$ , l'un de ces deux polynômes est donc de degré 1. Ceci implique alors que  $P$  admet une racine rationnelle; notons la  $p/q$  avec  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  et  $p \wedge q = 1$ . On a alors

$$(p/q)^3 + 3(p/q)^2 + 2 = 0$$

ou encore

$$p^3 + 3p^2q + 2q^3 = 0$$

Comme  $q$  divise  $3p^2q + 2q^3$ ,  $q$  divise également  $p^3$ . Comme  $p \wedge q = 1$ , ceci impose  $q = 1$ . On a alors  $p^3 + 3p^2 + 2 = 0$ . A nouveau,  $p$  divise  $p^3 + 3p^2$  donc  $p$  divise 2. Ainsi  $p/q \in \{-1, 1, -2, 2\}$  mais on vérifie qu'aucun de ces quatre entiers n'est racine de  $P$ .

On a montré par l'absurde que  $P$  était irréductible sur  $\mathbb{Q}$ .

### Solution 7

1. Soit  $P$  un tel polynôme. Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = \overline{P(x)} = \overline{P}(x)$ . Les polynômes  $P$  et  $\overline{P}$  coïncident sur  $\mathbb{R}$  qui est infini donc ils sont égaux. Ainsi  $P = \overline{P}$  i.e.  $P \in \mathbb{R}[X]$ .  
Réciproquement tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifie  $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ .

2. Soit  $P$  un tel polynôme.  $P$  est forcément non nul : notons  $n = \deg P$ . Alors pour tout  $z \in \mathbb{U}$ ,  $P(z)\overline{P(z)} = 1$  ou encore  $P(z)\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ . On en déduit que pour tout  $z \in \mathbb{U}$ ,  $P(z)z^n\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) = z^n$ . Posons  $Q = X^n\overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)$ .  $Q$  est bien un polynôme et pour tout  $z \in \mathbb{U}$ ,  $P(z)Q(z) = z^n$ . Comme  $\mathbb{U}$  est infini,  $PQ = X^n$ . Ainsi  $P$  divise  $X^n$  et  $\deg P = n$  donc il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que  $P = \lambda X^n$ . Mais la condition  $P(\mathbb{U}) \subset (\mathbb{U})$  impose alors  $\lambda \in \mathbb{U}$ .  
Réciproquement, tout polynôme de la forme  $\lambda X^n$  avec  $\lambda \in \mathbb{U}$  et  $n \in \mathbb{N}$  convient.

3. Soit  $P$  un tel polynôme et posons  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_0, \dots, a_n$  dans  $\mathbb{C}$  a priori. Soient  $x_0, \dots, x_n$  des rationnels distincts deux à deux.

Posons  $y_k = P(x_k)$  pour  $0 \leq k \leq n$ . Notons  $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  et  $M = (x_i^j)_{0 \leq i, j \leq n}$ . Ainsi  $MA = Y$ .  $M$  est une matrice de

Vandermonde inversible puisque les  $x_k$  sont distincts deux à deux. Comme  $M$  est à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ ,  $M^{-1}$  l'est également. Enfin,  $Y$  est aussi à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  par hypothèse et finalement  $A = M^{-1}Y$  est à coefficients rationnels. Ainsi  $P \in \mathbb{Q}[X]$ .

Réciproquement tout polynôme  $P \in \mathbb{Q}[X]$  convient évidemment.

**REMARQUE.** La preuve qui précède est valable pour tout sous-corps de  $\mathbb{C}$  (et pas seulement pour  $\mathbb{Q}$ ). En effet, tout sous-corps de  $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{Q}$  et est donc infini : on peut toujours trouver  $n + 1$  scalaires  $x_0, \dots, x_n$  distincts deux à deux dans ce sous-corps quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ .

## Solution 8

En multipliant la seconde équation par  $xyz$ , on obtient  $xy + yz + zx = 0$ . Notons  $a = xyz$ . En utilisant les relations coefficients/racines d'un polynôme, on peut affirmer que  $x, y, z$  sont les racines du polynôme  $X^3 - a$ . Ce sont donc les racines cubiques de  $a$  qui ont toutes le même module.

## Solution 9

1. Simple calcul.

2. On peut clairement choisir  $P_0 = 2$  et  $P_1 = X$ . Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et deux polynômes  $P_n$  et  $P_{n-1}$  adéquats. En vertu de la question précédente, le polynôme  $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$  convient. Par récurrence double, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ ,  $f(z^n) = P_n(f(z))$ .

On vérifie alors aisément par récurrence double que la suite de polynômes  $(P_n)$  définie par  $P_0 = 2$ ,  $P_1 = X$  et  $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$  vérifie  $\deg P_n = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que le coefficient dominant de  $P_n$  vaut 1 pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3. Soit  $Q$  un polynôme vérifiant  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ ,  $f(z^n) = Q(f(z))$ . Alors  $Q(f(z)) = P_n(f(z))$  pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ . Ainsi  $Q - P_n$  admet tous les complexes de  $f(\mathbb{C}^*)$  pour racines. Or  $f(\mathbb{C}^*)$  est infini (par exemple, la suite  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante). Donc  $Q - P_n = 0$  i.e.  $Q = P_n$ .

4. On trouve sans difficulté  $f(z_k^n) = 0$ . On en déduit que  $P_n(f(z_k)) = 0$  i.e.  $P_n\left(2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = 0$ . Comme  $\cos$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ , les réels  $2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  sont  $n$  racines distinctes de  $P_n$ . Or  $P_n$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant 1 donc

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$$

5. a. On sait que  $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$  donc  $P_{n+1}(0) = -P_{n-1}(0)$ .

b. Or  $P_0(0) = 2$  donc  $P_{2n}(0) = 2(-1)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus,  $P_1(0) = 0$  donc  $P_{2n+1}(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

6. Notons  $A_n$  le produit de l'énoncé. Alors  $(-2)^n A_n = P_n(0)$ . Donc  $A_{2n+1} = 0$  et  $A_{2n} = \frac{2(-1)^n}{(-2)^{2n}} = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}$ .

7. Notons  $B_n$  la somme de l'énoncé. Par le changement d'indice  $k \mapsto n-1-k$ ,  $B_n = -B_n$  donc  $B_n = 0$ .

### Solution 10

Soit  $P$  un tel polynôme. En substituant 0 à  $X$  dans la condition de l'énoncé, on trouve  $P(0) = 0$ . Puis en substituant  $-1$  à  $X$ , on trouve  $P(-1) = 0$ . En substituant  $-2$  à  $X$ , on trouve  $P(-2) = 0$ . Enfin, en substituant  $-3$  à  $X$ , on trouve  $P(-3) = 0$ . On ne peut pas aller plus loin. Ainsi  $P$  est divisible par  $X(X+1)(X+2)(X+3)$ . Il existe donc un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$ . La condition de l'énoncé donne  $X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X+1)$  et donc  $Q(X) = Q(X+1)$  par intégrité de  $\mathbb{R}[X]$ . On montre par récurrence que tout entier naturel est racine de  $Q - Q(0)$  donc  $Q$  est constant. Ainsi  $P$  est de la forme  $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement tout polynôme de la forme  $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  vérifie bien la condition de l'énoncé.

### Solution 11

1. Il est clair que  $\mathbb{R}_0[X] \subset \text{Ker } u$ . Réciproquement, soit  $P \in \text{Ker } u$ . Alors  $P(X+1) - P(X) = 0$ . Ainsi  $P(n+1) = P(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis  $P(n) = P(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $P - P(0)$  admet une infinité de racines (tous les entiers naturels) : il est nul et  $P \in \mathbb{R}_0[X]$ . Ainsi  $\text{Ker } u = \mathbb{R}_0[X]$ .
2. Il suffit de remarquer que  $\deg N_k = k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Ainsi  $(N_0, \dots, N_n)$  est une famille de  $n+1$  polynômes à degrés étagés et  $\dim E = n+1$  donc c'est une base de  $E$ .
3. On trouve  $u(N_0) = 0$  et  $u(N_k) = N_{k-1}$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
4. D'après la question précédente,  $u^{n+1}(N_k) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Comme  $(N_0, \dots, N_n)$  est une base de  $E$ ,  $u^{n+1} = 0$ . Or  $u^n(N_n) = N_0 = 1 \neq 0$  donc  $u$  est nilpotent d'indice  $n+1$ .
5. On a clairement  $\text{Im } u \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Mais  $\dim \text{Ker } u = 1$  d'après la première question donc  $\dim \text{Im } u = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$  d'après le théorème du rang. Ainsi  $\text{Im } u = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .  
Remarquons que  $H = \{P \in E, P(0) = 0\}$  est un hyperplan de  $E$  en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle. Comme  $\text{Ker } u$  est une droite non incluse dans  $H$ ,  $H$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$ . D'après le cours,  $u$  induit un isomorphisme de  $H$  sur  $\text{Im } u$ . Pour tout  $P \in \text{Im } u$ , il existe donc un unique  $Q \in H$  tel que  $u(Q) = P$  i.e. pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , il existe un unique  $Q \in E$  tel que  $u(Q) = P$  et  $Q(0) = 0$ .

## Algèbre générale

### Solution 12

1. Cf. cours.
2. On a clairement  $I \subset A$ . Supposons que  $1_A \in I$ . Par définition d'un idéal, pour tout  $a \in A$ ,  $1_A \times a \in I$  i.e.  $A \subset I$ . Ainsi  $I = A$ .
3.
  - $0_A = a0_A \in I_a$ .
  - Soit  $(x, y) \in A^2$ . Alors  $ax + ay = a(x+y) \in I_a$ .
  - Soit  $x \in A$ . Alors pour tout  $y \in A$ ,  $(ax)y = a(xy) \in I_a$ .
 On en déduit que  $I_a$  est bien un idéal de  $A$ .
4. Supposons que  $A$  est un corps. Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Alors il existe  $a \in I$  tel que  $a \neq 0_A$ . Mais comme  $A$  est un corps,  $a$  est inversible. Par conséquent,  $1_A = aa^{-1} \in I$  car  $I$  est un idéal de  $A$ . D'après une question précédente,  $I = A$ .  
Réciproquement supposons que les seuls idéaux de  $A$  soient  $\{0_A\}$  et  $A$ . Soit  $a$  un élément non nul de  $A$ . On sait que  $I_a$  est un idéal de  $A$ . On ne peut avoir  $I_a = \{0_A\}$  sinon on aurait  $a = 0_A$ . Ainsi  $I_a = A$ . Notamment  $1_A \in I_a$ . Il existe donc  $x \in A$  tel que  $ax = 1_A$ . Ainsin  $a$  est inversible et  $A$  est un corps.

### Solution 13

Soit  $(x, y) \in A^2$  tel que  $xy = 0$ . Comme  $\{0\}$  est un idéal premier par hypothèse,  $x = 0$  ou  $y = 0$ , ce qui prouve que  $A$  est intègre. Pour  $x \in A$ , on notera  $\langle x \rangle$  l'idéal engendré par  $x$ . Soit  $x \in A$ . L'idéal  $\langle x^2 \rangle$  est premier et  $x^2 \in \langle x^2 \rangle$  donc  $x \in \langle x^2 \rangle$ . Il existe donc  $y \in A$  tel que  $x = x^2y$  ou encore  $x(1 - xy) = 0$ . Notamment, si  $x \neq 0$ , on a  $xy = 1$  par intégrité de  $A$  et donc  $x$  est inversible.

**Solution 14**

1.  $\mathbb{Z}$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{Z}$ .

Le sous-groupe engendré par  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  autrement dit l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  est un sous-groupe discret de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ .

2. Puisque  $\Gamma$  est discret, il existe un élément  $z_0$  de  $\Gamma^*$  de module minimal. Mais par hypothèse  $\lambda z_0 \in \Gamma^*$  donc  $|\lambda| \geq 1$ . Mais on a également  $\frac{1}{\lambda} \Gamma = \Gamma$  donc  $\left| \frac{1}{\lambda} \right| \geq 1$ . On en déduit que  $|\lambda| = 1$ . Il existe donc  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\lambda = e^{i\theta}$ .

De plus,  $z_1 = \lambda z_0 + \frac{1}{\lambda} z_0 \in \Gamma$  et  $z_1 = 2 \cos \theta z_0$ . Supposons que  $2 \cos \theta \notin \mathbb{Z}$  et posons  $z_2 = z_1 - [2 \cos \theta] z_0$ . Alors  $z_2 \in \Gamma$  puisque  $\Gamma$  est un groupe. De plus,  $z_2 \neq 0$  et  $|z_2| < |z_0|$ , ce qui contredit la définition de  $z_0$ . Finalement  $2 \cos \theta \in \mathbb{Z}$ . On a donc  $\cos \theta \in \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$  et ainsi  $\lambda^4 = 1$  ou  $\lambda^6 = 1$ .

3. Posons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la matrice

$$B^n A B^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{2n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appartient à  $\Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est discret, la matrice  $I_2$  est isolée et donc  $|\lambda| = 1$  i.e.  $\lambda = \pm 1$ .

Réciproquement si  $\lambda = 1$ , on montre que  $\Gamma$  est l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  donc  $\Gamma$  est discret. Si  $\lambda = -1$ ,

$\Gamma$  est l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  donc  $\Gamma$  est à nouveau discret.

**Solution 15**

On a  $2^p \equiv 1[k]$  donc  $\bar{2}^p = \bar{1}$  dans  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ . Notons  $r$  l'ordre de 2 dans le groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ . La remarque précédente montre que  $r$  divise  $p$ . Or  $p$  est premier et on ne peut évidemment pas avoir  $r = 1$  donc  $r = p$ . Puisque  $k$  est premier,  $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$  et l'ordre de 2 divise le cardinal de  $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$  i.e.  $p$  divise  $k - 1$ . Enfin,  $2^p - 1$  est impair donc  $k$  également i.e. 2 divise  $k - 1$ . Puisque  $p$  est impair,  $2 \wedge p = 1$  donc  $2p$  divise  $k - 1$  i.e.  $k \equiv 1[2p]$ .

**Solution 16**

Remarquons déjà que  $G$  est commutatif. En effet, si  $(x, y) \in G^2$ , alors  $(xy)^2 = e$  où  $e$  est le neutre. Ainsi  $xyxy = e$  puis en multipliant par  $yx$  à droite,  $xy = yx$ .

Comme  $G$  est fini, il admet une partie génératrice minimale  $\{g_1, \dots, g_r\}$ . On montre alors que l'application  $\begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r & \longrightarrow G \\ (\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_r) & \longmapsto g_1^{\varepsilon_1} \dots g_r^{\varepsilon_r} \end{cases}$  est un isomorphisme de groupes. On en déduit que  $|G| = |(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r| = 2^r$ .

**Solution 17**

1. Comme  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\det(A(h)) = a^h \neq 0$  pour tout  $h \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $E \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ . On vérifie de plus que

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, A(h+k) = A(h)A(k)$$

donc  $A$  est un morphisme de groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ . Notamment,  $E = \mathrm{Im} A$  est un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ . Enfin,  $\mathrm{Ker} A = \{0\}$  donc  $A$  est injectif et  $E = \mathrm{Im} A$  est isomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$ .

2. On a  $A'(h) = \begin{pmatrix} a^h \ln(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  donc  $V = A'(0) = \begin{pmatrix} \ln(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Tout d'abord,  $\exp(t \ln a) = a^t$ . Puis, en posant  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$N^2 = 0$  donc  $\exp(tN) = I_2 + tN$ . En raisonnant par blocs,

$$\exp(tV) = \begin{pmatrix} a^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(t)$$

## Solution 18

1. 1 n'est pas d'ordre fini dans  $\mathbb{Z}$  donc  $\mathbb{Z}$  est de caractéristique 0.

L'ordre de  $\bar{1}$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est  $n$  donc  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est de caractéristique  $n$ .

2. Supposons que  $A$  est de caractéristique  $n$ . Remarquons que  $n \cdot 1_A = 0_A$  même si  $n = 0$ . Soit  $x \in A$ . Alors

$$nx = n(1_A \times x) = (n \cdot 1_A)x = 0_A \times x = 0_A$$

3. Supposons que  $A$  est de caractéristique non nulle  $n$ . Soit  $d$  un diviseur positif de  $n$ . Il existe donc  $k \in \mathbb{N}^*$  tel  $n = dk$ . Alors

$$(d \cdot 1_A) \times (k \cdot 1_A) = (kd)1_A = n \cdot 1_A = 0_A$$

Comme  $A$  est intègre  $d \cdot 1_A = 0_A$  ou  $k \cdot 1_A = 0_A$ . Dans le premier cas,  $d$  divise l'ordre de  $1_A$ , à savoir  $n$  donc  $d = n$ . Dans le second cas,  $k = n$  i.e.  $d = 1$ .

De plus, comme  $A$  n'est pas nul,  $A$  ne peut être de caractéristique 1 de sorte que  $n \geq 2$ . Ainsi  $n$  est premier.

4. Puisque  $A$  est commutatif, il est clair que  $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$  pour tout  $(x, y) \in A^2$ . De plus,  $f(1_A) = 1_A$ . Soit  $(x, y) \in A^2$ . Comme  $x$  et  $y$  commutent, on a par la formule du binôme de Newton

$$f(x + y) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k y^{p-k}$$

Pour  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$ . Puisque  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $p$  ne peut diviser  $k$  de sorte que  $p \wedge k = 1$  d'après le lemme de Gauss. Ainsi  $p$  divise  $\binom{p}{k}$  puis  $\binom{p}{k} x^k y^{p-k} = 0_A$  d'après la deuxième question. On en déduit que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .  $f$  est donc bien un endomorphisme d'anneau.

Si  $f$  est intègre, il est clair que  $\text{Ker } f = \{0_A\}$  donc  $f$  est injectif. Si  $A$  est de plus fini,  $f$  est bijectif : c'est donc un automorphisme de l'anneau  $A$ .

5. Comme  $\mathbb{K}$  est fini,  $1_{\mathbb{K}}$  est d'ordre fini. Ainsi la caractéristique de  $\mathbb{K}$  n'est pas nulle. Comme un corps est intègre, sa caractéristique est un nombre premier  $p$ .

On vérifie que si  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$  vérifie  $k \equiv l[p]$ , alors  $kx = lx$  pour tout  $x \in \mathbb{K}$ . Ceci permet de définir une loi externe  $\cdot$  sur  $\mathbb{K}$  en posant  $\bar{k} \cdot x = kx$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{K}$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier que  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  est bien un  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel. Comme  $\mathbb{K}$  est fini, il possède a fortiori une base  $(e_1, \dots, e_n)$ . L'application

$$\begin{cases} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (k_1, \dots, k_n) & \longmapsto \sum_{i=1}^n k_i e_i \end{cases} \text{ est alors bijective (c'est un isomorphisme).}$$

On en déduit que  $\text{card } \mathbb{K} = p^n$ .

## Algèbre linéaire

### Solution 19

1. Si  $P_1$  et  $P_2$  sont deux polynômes de  $\mathbb{R}_p[X]$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \alpha u_n + P_1(n) = \alpha u_n + P_2(n)$$

alors  $P_1(n) - P_2(n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Le polynôme  $P_1 - P_2$  admet une infinité de racines : il est nul. Donc  $P_1 = P_2$ .

2. Notons  $F$  l'ensemble des suites de la forme  $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $P \in \mathbb{R}_p[X]$ . Comme  $\mathbb{R}_p[X]$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $F$  en est également un. Notons  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1} - \alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$ .  $f$  est un endomorphisme et  $S_p = f^{-1}(F)$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
3. Soient  $u, v \in S_p$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On a alors  $\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \alpha(\lambda u_n + \mu v_n) + (\lambda P_u + \mu P_v)(n)$ . Par l'unicité montrée à la première question, on a  $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$ . Soit  $u \in S_p$ . Dire que  $u \in \text{Ker } \phi$  équivaut à dire que  $P_u = 0$  i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \alpha u_n$ .  $\text{Ker } \phi$  est donc l'ensemble des suites géométriques de raison  $\alpha$ . Ainsi la suite  $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$  engendre  $\text{Ker } \Phi$ . Puisque  $\alpha \neq 0$ , cette suite est non nulle, c'est donc une base de  $\text{Ker } \phi$ .
4. Par définition de  $S_p$ ,  $\text{Im } \phi = \mathbb{R}_p[X]$ . Notons  $u_k$  la suite de terme général  $n^k$ . On a  $\phi(u_k) = R_k$ . Comme  $\alpha \neq 1$ ,  $\deg R_k = k$ . On en déduit que  $(R_0, \dots, R_p)$  est une base de  $\mathbb{R}_p[X]$ . La famille  $(u_0, \dots, u_p)$  est donc libre et  $\text{vect}(u_0, \dots, u_p)$  est en somme directe avec  $\text{Ker } \phi$ . Notons  $u$  la suite de terme général  $\alpha^n$ . La famille  $(u, u_0, \dots, u_p)$  est donc libre. Par le théorème du rang  $\dim S_p = \dim \text{Ker } \phi + \text{rg } \phi = p + 2$ . On en déduit que  $(u, u_0, \dots, u_p)$  est une base de  $S_p$ .
5. Dans ce cas,  $p = 1$  et  $\alpha = 2$ . La question précédente montre que  $(u_n)$  est de la forme  $u_n = a \cdot 2^n + bn + c$ . On va déterminer  $a, b, c$  à partir des 3 premiers termes de la suite. On calcule  $u_1 = 3, u_2 = 11$ . On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} a + c = -2 \\ 2a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 11 \end{cases}$$

On trouve  $a = 3, b = 2$  et  $c = -5$ . Ainsi  $u_n = 3 \cdot 2^n + 2n - 5$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Solution 20

1. Posons  $L : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g$  et  $R : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto g \circ f$ . Alors  $\Phi = L - R$ . De plus,  $L$  et  $R$  sont des endomorphismes de  $E$  qui commutent. En effet, pour tout  $g \in E$ ,  $L \circ R(g) = R \circ L(g) = f \circ g \circ f$ . D'après la formule du binôme de Newton,

$$\Phi^p = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} L^{p-k} \circ R^k$$

On en déduit que pour tout  $g \in \mathcal{L}(E)$ ,

$$\Phi^p(g) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$$

Dans la formule écrite au rang  $p = 2n - 1$ , pour  $0 \leq k \leq p$ , on a soit  $k \geq n$ , soit  $p - k \geq n$  donc tous les termes de la somme précédente sont nuls.  $\Phi$  est donc nilpotent d'indice inférieur ou égal à  $2n - 1$ .

2. Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $S$  un supplémentaire de  $\text{Ker } a$ .  $a$  induit un isomorphisme  $\tilde{a}$  de  $S$  sur  $\text{Im } a$ . Soit  $T$  un supplémentaire de  $\text{Im } a$ . On pose  $b(x) = \tilde{a}^{-1}(x)$  pour  $x \in \text{Im } a$  et  $b(y) = 0$  pour  $y \in T$ . Ainsi on a bien  $a \circ b \circ a = a$ .

**REMARQUE.** On peut aussi raisonner matriciellement. Notons  $A$  la matrice de  $a$  dans une base de  $E$ . On sait qu'il existe  $(P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})^2$  tel que  $A = P J_r Q$  où  $n = \dim E$ ,  $r = \text{rg}(A)$  et  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Comme  $J_r^2 = J_r$ , on obtient  $ABA = A$  en posant  $B = Q^{-1} J_r P^{-1}$ . Il suffit de prendre pour  $b$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice est  $B$  dans la base précédente.

Montrons que  $\Phi$  est d'ordre  $2n - 1$  exactement. Pour  $p = 2n - 2$  et  $0 \leq k \leq p$ , on a soit  $k \leq n$ , soit  $p - k \leq n$  sauf pour  $k = n - 1$ . Ainsi

$$\Phi^{2n-2}(g) = (-1)^{n-1} \binom{2n-2}{n-1} f^{n-1} \circ g \circ f^{n-1}$$

D'après ce qui précède, il existe  $g_0 \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$f^{n-1} \circ g_0 \circ f^{n-1} = f^{n-1}.$$

Par conséquent,  $\Phi^{2n-2}(g_0) = f^{n-1} \neq 0$ .



**Solution 21**

1. Comme  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = H_1 + H_2$ , tout élément de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  – en particulier  $\text{Id}$  – peut s'écrire comme la somme d'un élément de  $H_1$  et d'un élément de  $H_2$ .
2. On compose l'identité  $p_1 + p_2 = \text{Id}$  par  $p_1$  une fois à gauche et une fois à droite pour obtenir :

$$p_1^2 + p_1 \circ p_2 = p_1$$

$$p_1^2 + p_2 \circ p_1 = p_1$$

On additionne ces deux égalités de sorte que

$$2p_1^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 2p_1$$

Mais comme  $p_1 \in H_1$  et  $p_2 \in H_2$ ,  $p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0$ . Ainsi  $2p_1^2 = 2p_1$  et finalement  $p_1^2 = p_1$ . Donc  $p_1$  est un projecteur. Quitte à échanger  $p_1$  et  $p_2$ , on démontre de même que  $p_2$  est un projecteur.

3. Soit  $f \in H_1$ . On a donc  $f \circ p_2 + p_2 \circ f = 0$ . Comme  $p_2$  est un projecteur, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle la matrice de  $p_2$  est  $P_2 = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_r \end{array} \right)$  où  $r = \text{rg } p_2$ . Notons  $F = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$  la matrice de  $f$  dans cette même base  $\mathcal{B}$  avec  $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ . On a donc  $FP_2 + P_2F = 0$ , ce qui entraîne  $A = B = C = 0$ . Par conséquent,  $F = \left( \begin{array}{c|c} 0_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & D \end{array} \right)$ . Notons  $\Phi$  l'isomorphisme qui associe à un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . On a donc

$\Phi(H_1) \subset G$  où  $G$  est le sous-espace vectoriel des matrices de la forme  $\left( \begin{array}{c|c} 0_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & D \end{array} \right)$  où  $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ . Par conséquent  $\dim H_1 \leq$

$\dim G$ . Or  $\dim G = (n-r)^2$ . Ainsi  $\dim H_1 \leq (n-r)^2 = (n - \text{rg } p_2)^2$ .

On prouve de la même manière que  $\dim H_2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2$ .

4. Comme  $H_1 \oplus H_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\dim H_1 + \dim H_2 = n^2$ . On déduit de la question précédente que

$$n^2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2 + (n - \text{rg } p_2)^2$$

Comme  $n - \text{rg } p_1 \geq 0$  et  $n - \text{rg } p_2 \geq 0$ ,

$$(n - \text{rg } p_1)^2 + (n - \text{rg } p_2)^2 \leq [(n - \text{rg } p_1) + (n - \text{rg } p_2)]^2 = [2n - (\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2)]^2$$

On sait que  $p_1 + p_2 = \text{Id}$ . Donc  $\text{rg}(p_1 + p_2) = n$ . Or c'est un exercice classique que de montrer que  $\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2 \geq \text{rg}(p_1 + p_2)$ . On en déduit que  $\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2 \geq n$ . De plus  $\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2 \leq 2n$  donc

$$[2n - (\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2)]^2 \leq n^2$$

Finalement,

$$n^2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2 + (n - \text{rg } p_2)^2 \leq [2n - (\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2)]^2 \leq n^2$$

On en déduit que  $[2n - (\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2)]^2 = n^2$  i.e.  $\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2 = n$  et que  $n^2 = (n - \text{rg } p_1)^2 + (n - \text{rg } p_2)^2$ . Notons  $r = \text{rg } p_1$ . On a alors  $n^2 = (n-r)^2 + r^2$  i.e.  $r(n-r) = 0$ . Deux cas se présentent.

- Si  $r = 0$ , alors  $p_1 = 0$  et donc  $p_2 = \text{Id}$ . On a alors  $\dim H_1 \leq (n - \text{rg } p_2)^2 = 0$ . Donc  $H_1 = \{0\}$ . Par conséquent  $H_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .
- Si  $r = n$ , alors  $p_1 = \text{Id}$ . On a alors  $\dim H_2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2 = 0$ . Donc  $H_2 = \{0\}$ . Par conséquent  $H_1 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

Réciproquement, on vérifie que ces deux couples  $(H_1, H_2)$  vérifient bien les hypothèses de l'énoncé.

**Solution 22**

On applique le théorème du rang à  $u|_{\text{Ker}(u+v)}$ . Alors

$$\dim \text{Ker}(u+v) = \dim \text{Ker}(u|_{\text{Ker}(u+v)}) + \dim \text{Im}(u|_{\text{Ker}(u+v)})$$

D'une part,

$$\text{Ker}(u|_{\text{Ker}(u+v)}) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(u+v) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker } v$$

D'autre part, soit  $y \in \text{Im}(u|_{\text{Ker}(u+v)})$ . Il existe donc  $a \in \text{Ker}(u+v)$  tel que  $y = u(a)$ . Or  $u(a) + v(a) = 0_F$  donc  $y = -v(a) \in \text{Im}(v)$  donc  $y \in \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$  donc  $\text{Im}(u|_{\text{Ker}(u+v)}) \subset \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$  puis  $\dim \text{Im}(u|_{\text{Ker}(u+v)}) \leq \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v))$ .

On en déduit le résultat voulu.

**Solution 23**

On supposera que  $a, b, c$  et  $m$  sont des paramètres réels.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a^2x + a^3y + az = m \\ a^2x + y + az = m \\ x + ay + a^2z = m \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (a^3 - 1)y = 0 \\ a^2x + y + az = m \\ x + ay + a^2z = m \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (a^3 - 1)y = 0 \\ (1 - a^3)y + a(1 - a^3)z = (1 - a^2)m \\ x + ay + a^2z = m \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - a^2L_1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (a^3 - 1)y = 0 \\ a(1 - a^3)z = (1 - a^2)m \\ x + ay + a^2z = m \end{cases} \end{aligned}$$

On distingue alors des cas.

Si  $a = 1$ ,

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow x + y + z = m$$

L'ensemble des solutions est le plan affine  $(m, 0, 0) + \text{vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ .

Si  $a = 0$

$$\cos \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mx = m \end{cases}$$

Le système n'admet de solutions que si  $m = 0$  et dans ce cas, l'ensemble des solutions est la droite vectorielle  $\text{vect}(0, 1, 0)$ .

Si  $a \notin \{0, 1\}$ ,

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} (a^2 + a + 1)y = 0 \\ a(1 + a + a^2)z = (1 + a)m \\ x + ay + a^2z = m \end{cases}$$

On a supposé  $a$  réel de sorte que  $a^2 + a + 1 > 0$ . L'unique solution du système est alors  $\left( \frac{(1 + a - a^3)m}{1 + a + a^2}, 0, \frac{(1 + a)m}{1 + a + a^2} \right)$ .

**Solution 24**

1.  $f$  est linéaire par linéarité de l'intégrale.

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a

$$f(X^k) = \frac{1}{k+1}((X+1)^{k+1} - X^{k+1}) = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} X^l$$

Ainsi  $\deg f(X^k) = k \leq n$  et  $f(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ . Par linéarité,  $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

$f$  induit bien un endomorphisme  $f_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. L'expression de  $f(X^k)$  trouvée à la question précédente montre que la matrice de  $f_n$  dans la base canonique est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux valent  $\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{k} = 1$  pour  $k$  variant de 0 à  $n$ . Le déterminant de  $f_n$  vaut donc 1.

**Solution 25**

Pour une matrice  $A$ , on notera  $A_{ij}$  le coefficient en position  $(i, j)$  et  $\tilde{A}_{ij}$  la matrice  $A$  privée de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

1. Notons  $U_n$  l'ensemble des matrices de taille  $n \in \mathbb{N}^*$  à coefficients dans  $\{-1, 1\}$ . Faisons l'hypothèse de récurrence suivante :

$\text{HR}(n)$  : étant donné une matrice de  $U_n$ , on peut rendre cette matrice inversible en changeant  $n - 1$  coefficients ou moins.

HR(1) est évidemment vraie puisqu'une matrice de  $U_1$  est évidemment inversible.

Supposons HR( $n$ ) vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A \in U_{n+1}$ . Quitte à changer  $n-1$  coefficients de la matrice  $\tilde{A}_{11}$ , on peut la rendre inversible. Notons  $A'$  la matrice ainsi obtenue. Si  $A'$  est inversible, alors HR( $n+1$ ) est vraie. Sinon, puisque  $\det A' = \sum_{i=1}^{n+1} A'_{i1} \det \tilde{A}'_{i1} =$

0. Notons  $A''$  la matrice  $A'$  où on a changé  $A'_{11}$  en son opposé. Alors

$$\begin{aligned} \det(A'') &= \sum_{i=1}^{n+1} A''_{i1} \det \tilde{A}'_{i1} \\ &= -A'_{11} \det \tilde{A}'_{11} + \sum_{i=2}^{n+1} A'_{i1} \det \tilde{A}'_{i1} \\ &= -2A'_{11} \det \tilde{A}'_{11} + \sum_{i=1}^{n+1} A'_{i1} \det \tilde{A}'_{i1} \\ &= -2A'_{11} \det \tilde{A}'_{11} + \det A' = -2A'_{11} \det \tilde{A}'_{11} \end{aligned}$$

Puisque  $A'_{11} = \pm 1$  et  $\tilde{A}'_{11}$  est inversible,  $\det(A'') \neq 0$  et donc  $A''$  est inversible, ce qui prouve que HR( $n+1$ ) est vraie.

Par récurrence, HR( $n$ ) est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Montrons maintenant qu'il existe des matrices de  $U_n$  pour lesquelles il faut changer exactement  $n-1$  coefficients afin de les rendre inversibles. Il suffit de considérer une matrice de  $U_n$  dont toutes les colonnes sont égales au signe près. Considérons par exemple la matrice  $A$  de  $U_n$  dont tous les coefficients valent 1. Il faut au moins changer 1 coefficient dans  $n-1$  colonnes sinon deux colonnes sont égales et la matrice n'est pas inversible.

2. On a évidemment  $\text{card } U_n = 2^{n^2}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{A \in U_n} (\det A)^2 &= \sum_{A \in U_n} \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} \right)^2 \\ &= \sum_{A \in U_n} \left[ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left( \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} \right)^2 + \sum_{\substack{(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_n^2 \\ \sigma \neq \tau}} \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} A_{i\tau(i)} \right] \\ &= \sum_{A \in U_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left( \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} \right)^2 + \sum_{\substack{(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_n^2 \\ \sigma \neq \tau}} \sum_{A \in U_n} \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} A_{i\tau(i)} \end{aligned}$$

Comme la signature est à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  de même que les coefficients d'une matrice  $A$  de  $U_n$ , on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left( \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} \right)^2 = \text{card } \mathfrak{S}_n = n!$$

Soient maintenant  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$  telles que  $\sigma \neq \tau$ . Il existe donc  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\sigma(j) \neq \tau(j)$ . L'application de  $U_n$  dans lui-même changeant le coefficient  $A_{j\sigma(j)}$  en son opposé est une involution et laisse le coefficient  $A_{i,\tau(i)}$  inchangé de sorte que la somme  $\sum_{A \in U_n} \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} A_{i\tau(i)}$  est égale à son opposé et est donc nulle.

Finalement la moyenne recherchée, à savoir  $\frac{1}{\text{card } U_n} \sum_{A \in U_n} (\det A)^2$  vaut  $n!$ .

## Solution 26

1. Soient  $x$  et  $y$  deux réels distincts. Le déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$  est  $x-y \neq 0$  donc cette matrice est inversible. On en déduit que

la matrice  $\begin{pmatrix} f(1) & f(1) \\ f(x) & f(y) \end{pmatrix}$  est également inversible. Son déterminant  $f(1)(f(x) - f(y))$  est donc non nul. En particulier,  $f(x) \neq f(y)$ .

Ceci prouve l'injectivité de  $f$ .

2. On montrer d'abord que  $f(0) = 0$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $0 = f(x)$ . La matrice  $\begin{pmatrix} x \end{pmatrix}$  n'est alors pas inversible donc  $x = 0$ .

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $z \neq x + y$ . Alors la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$  a pour déterminant  $z - x - y \neq 0$  et est donc inversible. La matrice

$$\begin{pmatrix} f(1) & f(0) & f(1) \\ f(0) & f(1) & f(1) \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) & 0 & f(1) \\ 0 & f(1) & f(1) \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{pmatrix}$$
 est donc également inversible et a pour déterminant  $f(1)^2(f(z) - f(x) - f(y))$ . Ainsi  $f(z) \neq f(x) + f(y)$ .

Par surjectivité de  $f$ ,  $f(x) + f(y)$  admet un antécédent  $u$  par  $f$ . Si on avait  $u \neq x + y$ , alors on aurait  $f(u) \neq f(x) + f(y)$ , ce qui contredit ce qui précède. Ainsi  $u = x + y$  et  $f(x) + f(y) = f(u) = f(x + y)$ .

3. On va montrer que  $f$  n'est ni majorée ni minorée. Comme elle est continue, elle sera surjective en vertu du théorème des valeurs intermédiaires.

Comme  $f$  est continue et injective,  $f$  est strictement monotone. Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer  $f$  strictement croissante. Comme  $f(0) = 0$ ,  $f$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus, pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , la matrice  $\begin{pmatrix} x + 1/x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$  est inversible. On en déduit que  $\begin{pmatrix} f(x + 1/x) & f(1) \\ f(1) & f(x) \end{pmatrix}$  est également inversible. En particulier, l'application continue  $\varphi : x \mapsto f(x)f(x + 1/x) - f(1)^2$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ . Puisque  $f$  est strictement croissante,  $\varphi(1) = f(1)(f(2) - f(1)) > 0$ . Ainsi  $\varphi$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On en déduit que  $f(x + 1/x) > f(1)^2/f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Or  $f$  est continue en 0 et positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^+$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x + 1/x) = +\infty$ .

De la même manière, la matrice  $\begin{pmatrix} x + 1/x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$  est inversible. On en déduit comme précédemment que l'application  $\psi : x \mapsto f(x)f(x + 1/x) - f(-1)^2$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $\mathbb{R}_-^*$ . Par ailleurs,  $\psi(-2) = f(-1)(f(-2) - f(-1)) > 0$  par stricte croissance de  $f$ , donc  $\psi$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_-^*$ . On en déduit que  $f(x + 1/x) < f(-1)^2/f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_-^*$  (attention au signe de  $f(x)$ ). Ceci permet aussi de conclure que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x + 1/x) = -\infty$ .

Finalement,  $f$  n'est ni bornée ni majorée et elle est donc surjective en vertu du théorème des valeurs intermédiaires.

La question précédente montre alors que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x + y) = f(x)f(y)$  et on prouve classiquement que  $f$  est une fonction linéaire. De plus,  $f$  est non nulle car injective.

Réciproquement, supposons que  $f$  soit linéaire non nulle. Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $f(x) = \lambda x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $A$  une matrice d'ordre  $n$  inversible. Alors la matrice  $A'$  telle que définie dans l'énoncé est également inversible puisque  $\det(A') = \lambda^n \det(A)$ .

## Solution 27

Il est clair que si  $x = y$ , alors  $D = 0$ . Réciproquement, supposons  $D = 0$ . Notons  $M$  la matrice dont  $D$  est le déterminant. Alors  $M^T$  n'est pas inversible. Il existe alors un élément  $X = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)^T$  non nul du noyau de  $M$ . On posant  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$ , l'égalité  $M^T X = 0$  donne  $P(x) = P'(x) = P(y) = P'(y) = P''(y) = 0$ . Si  $x \neq y$ , alors  $P$  compte au cinq racines avec multiplicité ce qui est absurde puisque  $\deg P \leq 4$  et  $P \neq 0$ . Ainsi  $x = y$ .

## Solution 28

Remarquons tout d'abord que si deux des  $a_i$  sont égaux, le déterminant définissant  $D(x)$  admet deux colonnes identiques, il est donc nul. On supposera donc par la suite les  $a_i$  distincts deux à deux.

Remarquons que  $\frac{P(x)}{x - a_i} = \prod_{j \neq i} (x - a_j)$  est polynomiale en  $x$  de degré  $n - 1$ . En développant le déterminant par rapport à la première ligne,

on voit que  $D$  est polynomiale en  $x$  de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  (on peut notamment la prolonger par continuité en les  $a_i$ ).

Pour  $1 \leq i \leq n$ , notons  $\Delta_i$  le déterminant de Vandermonde des complexes  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ . On a donc  $\Delta_i = \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_k - a_j)$ .

On va calculer  $D(a_i)$  pour  $1 \leq i \leq n$ . La première ligne du déterminant définissant  $D(a_i)$  a tous ses coefficients nuls hormis le  $i^{\text{ème}}$  qui vaut

$\prod_{j \neq i} (a_j - a_i)$ . En développant par rapport à cette ligne, on a donc :

$$\begin{aligned} D(a_i) &= \left( (-1)^{i-1} \prod_{j \neq i} (a_j - a_i) \right) \Delta_i = \left( (-1)^{i-1} \prod_{j < i} (a_j - a_i) \right) \left( \prod_{j > i} (a_j - a_i) \right) \left( \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_k - a_j) \right) \\ &= \left( \prod_{j < i} (a_i - a_j) \right) \left( \prod_{j > i} (a_j - a_i) \right) \left( \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_k - a_j) \right) \\ &= \left( \prod_{j < i} (a_i - a_j) \right) \left( \prod_{i < k} (a_k - a_i) \right) \left( \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_k - a_j) \right) \end{aligned}$$

On peut partitionner l'ensemble  $\{(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid j < k\}$  en 3 parties suivant que  $j \neq i$  et  $k \neq i$  ou bien  $j = i$  et  $k > i$  ou bien  $k = i$  et  $j < i$ . On a donc

$$D(a_i) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)$$

Autrement dit  $D(a_i) = \delta$  pour  $1 \leq i \leq n$  où  $\delta$  représente le déterminant de Vandermonde de  $a_1, \dots, a_n$ . Le polynôme  $D - \delta$  est donc de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  et admet  $n$  racines distinctes (les  $a_i$  sont supposés distincts deux à deux) : il est donc nul. On a donc  $D(x) = \delta$  pour tout  $x \in \mathbb{C}$ .

## Arithmétique

### Solution 29

L'ensemble de l'énoncé est formé des entiers de la forme  $u_n = \sum_{k=0}^n 10^k$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On a facilement  $u_n = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)$ . Remarquons que si  $p = 3$ , alors  $p$  divise 111 par exemple. Soit  $p$  un entier premier différent de 2, 3 et 5. Alors  $10 = 2 \times 5$  est premier avec  $p$ . D'après le petit théorème de Fermat,  $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  donc  $p$  divise  $10^{p-1} - 1$ . Comme  $p \neq 3$ ,  $p$  est premier avec 9. On sait que 9 divise  $10^{p-1} - 1$  puisque  $\frac{1}{9}(10^{p-1} - 1) = u_{p-2} \in \mathbb{N}$ . Donc  $9p$  divise  $10^{p-1} - 1$  i.e.  $p$  divise  $u_{p-2}$ .

### Solution 30

Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  un éventuel couple vérifiant  $n(n+1)(n+2) = m^2$ .

Si  $n$  est pair, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2p$ . On en déduit que

$$4p(2p+1)(p+1) = m^2$$

Ainsi 2 divise  $m^2$  et donc  $m$  puisque 2 est premier. Il existe donc  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $m = 2q$ . On en déduit que

$$p(2p+1)(p+1) = q^2$$

Or  $p$ ,  $2p+1$  et  $p+1$  sont premiers entre eux deux à deux (il existe des relations de Bézout évidentes entre ces entiers) et on prouve alors classiquement que  $p$ ,  $2p+1$  et  $p+1$  sont des carrés d'entiers en considérant les puissances de leurs facteurs premiers dans leurs décompositions en facteurs premiers. En particulier, il existe des entiers naturels  $c$  et  $d$  tels que  $p = c^2$  et  $p+1 = d^2$ . Ainsi  $d^2 - c^2 = 1$  i.e.  $(d+c)(d-c) = 1$ . On en déduit  $d - c = d + c = 1$  et donc  $c = 0$  et  $d = 1$ . Il s'ensuit que  $n = 0$  puis  $m = 0$ .

Si  $n$  est impair, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2p + 1$ . On en déduit que

$$2(2p + 1)(p + 1)(2p + 3) = m^2$$

Ainsi 2 divise  $m^2$  et donc  $m$  puisque 2 est premier. Il existe donc  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $m = 2q$ . On en déduit que

$$(2p + 1)(p + 1)(2p + 3) = 2q^2$$

Donc 2 divise  $(2p + 1)(p + 1)(2p + 3)$ . Comme  $2p + 1$  et  $2p + 3$  sont impairs, 2 divise  $p + 1$  et donc  $p$  est impair. Il existe donc  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $p = 2r + 1$ . Il s'ensuit que

$$(4r + 3)(r + 1)(4r + 5) = q^2$$

$r + 1$  est premier avec  $4r + 3$  et  $4r + 5$  en vertu de relations de Bézout évidentes. De plus  $(4r + 5) - (4r + 3) = 2$  donc le pgcd de  $4r + 3$  et  $4r + 5$  vaut 1 ou 2. Puisque  $4r + 3$  et  $4r + 5$  sont impairs, leur pgcd vaut 1 i.e. ces entiers sont premiers entre eux. Finalement,  $r + 1$ ,  $4r + 3$  et  $4r + 5$  sont premiers entre eux deux à deux et sont donc des carrés d'entiers comme précédemment. En particulier, il existe des entiers naturels  $c$  et  $d$  tels que  $4r + 3 = c^2$  et  $4r + 5 = d^2$ . Ainsi  $d^2 - c^2 = 2$  i.e.  $(d + c)(d - c) = 2$ . On en déduit que  $d - c = 1$  et  $d + c = 2$  i.e.  $c = \frac{1}{2}$  et  $d = \frac{3}{2}$  ce qui contredit le fait que  $c$  et  $d$  sont des entiers.

On en déduit finalement que la seule solution de l'équation  $n(n + 1)(n + 2) = m^2$  est le couple  $(0, 0)$ .

### Solution 31

1. Supposons que les  $c_i$  admettent un facteur premier commun  $p$ . Puisque  $p$  divise  $c_1$ , il divise l'un des entiers  $a_2, \dots, a_r$  en vertu du lemme d'Euclide. Quitte à réordonner les  $a_i$ , on peut supposer qu'il s'agit de  $a_2$ . Mais  $p$  divise également  $c_2$  donc il divise l'un des entiers  $a_1, a_3, \dots, a_r$ . En notant  $a_j$  cet entier ( $j \neq 2$ ),  $p$  serait un diviseur commun de  $a_2$  et  $a_j$ , ce qui contredit le fait que ces entiers sont premiers entre eux par hypothèse. Ainsi  $a_1, \dots, a_r$  n'admettent pas de diviseur premier commun : ils sont premiers entre eux dans leur ensemble.

2. D'après la première question et le théorème de Bezout, il existe  $(u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{Z}^r$  tel que  $\sum_{k=1}^r u_k c_k = 1$ . Ainsi

$$\sum_{k=1}^r \frac{bu_k}{a_k} = \frac{b}{a_1 \dots a_r}$$

Notons respectivement  $q_k$  et  $x_k$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $bu_k$  par  $a_k$ . Alors on a bien  $0 \leq x_k < a_k$  et

$$\sum_{k=1}^r q_k + \frac{x_k}{a_k} = \frac{b}{a_1 \dots a_r}$$

ou encore

$$b = y + \sum_{k=1}^r \frac{x_k}{a_k}$$

en posant  $y = \sum_{k=1}^r q_k$ .

Reste à montrer l'unicité. Soit donc  $(y', x'_1, \dots, x'_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$  tel que

$$[\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, 0 \leq x'_k < a_k] \quad \text{et} \quad \frac{b}{a_1 \dots a_r} = y' + \sum_{k=1}^r \frac{x'_k}{a_k}$$

Ainsi

$$y - y' = \sum_{k=1}^r \frac{x'_k - x_k}{a_k}$$

ou encore

$$(y' - y)a_1 \dots a_r = \sum_{k=1}^r c_k(x'_k - x_k)$$

Fixons  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Puisque  $a_j$  divise chacun des  $c_i$  avec  $i \neq j$ , l'égalité précédente montre que  $a_j$  divise  $c_j(x'_j - x_j)$ . Comme  $a_j$  est premier avec chacun des  $a_i$  avec  $i \neq j$ , il est également premier avec leur produit  $c_j$ . En vertu du lemme de Gauss,  $a_j$  divise donc  $x'_j - x_j$ . Or  $-a_j < x'_j - x_j < a_j$  donc  $x'_j - x_j = 0$  i.e.  $x'_j = x_j$ . Ceci étant valable pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on en déduit alors immédiatement que  $y' = y$ .

## Solution 32

1. Supposons que l'ensemble  $\mathcal{Q}$  des nombres premiers  $p$  tels que  $p \equiv 3[4]$  soit fini. Posons alors  $N = \prod_{p \in \mathcal{Q}} p$  (on convient que  $N = 1$  si  $\mathcal{Q} = \emptyset$ ) et  $n = 4N - 1$ . Comme  $n$  est impair, les diviseurs premiers de  $n$  sont impairs et donc congrus à 1 ou 3 modulo 4. Comme  $n \equiv 3[4]$ , les diviseurs premiers de  $n$  ne peuvent pas tous être congrus à 1 modulo 4. Il existe donc un diviseur premier  $q$  de  $n$  tel que  $q \equiv 3[4]$ . Si  $q$  appartenait à  $\mathcal{Q}$ ,  $q$  diviserait  $N$  et donc également  $4N - n = 1$ , ce qui est impossible. Ainsi  $q \notin \mathcal{Q}$ , ce qui est absurde. L'ensemble  $\mathcal{Q}$  est donc infini.

2. On sait que pour tout  $u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ ,  $u^{p-1} = 1$  (petit théorème de Fermat). Posons  $U = u^{\frac{p-1}{2}}$  ( $U$  est bien défini car  $p-1$  est pair). On a donc  $U^2 = 1$  i.e.  $(U+1)(U-1) = 0$ . Comme  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps, il est intègre et donc  $U = \pm 1$ .

3. Le polynôme  $X^{p-1} - 1$  considéré comme un polynôme de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$  possède  $p-1$  racines en vertu du petit théorème de Fermat (à savoir tous les éléments de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ ). Or  $X^{p-1} - 1 = \left(X^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(X^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$  donc chaque racine de  $X^{p-1} - 1$  est racine de  $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$  ou de  $X^{\frac{p-1}{2}} + 1$ . Ces deux derniers polynômes sont de degré  $\frac{p-1}{2}$  donc possèdent au plus  $\frac{p-1}{2}$  racines. C'est donc qu'ils possèdent exactement  $\frac{p-1}{2}$  racines.

Le nombre de  $u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  tels que  $u^{\frac{p-1}{2}} = -1$  vaut donc  $\frac{p-1}{2}$ .

4. D'après la question précédente, il existe  $u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  tel que  $u^{\frac{p-1}{2}} = -1$ .

Si  $p \equiv 1[4]$ , on peut définir  $U = u^{\frac{p-1}{4}}$  et on a alors  $U^2 = -1$ .  $-1$  est donc bien un carré.

Si  $p \equiv 3[4]$ ,  $-1 = u^{\frac{p-1}{2}} = uU^2$  avec  $U = u^{\frac{p-3}{4}}$ . Supposons que  $-1$  soit un carré. Alors  $u = (-1)(U^{-1})^2$  est également un carré i.e. il existe  $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  tel que  $u = x^2$ . Mais alors  $u^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} = 1 \neq -1$ . On aboutit à une contradiction donc  $-1$  n'est pas un carré.

5. On vérifie que  $K$  est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  de dimension 2 engendrée par  $I_2$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  mais ce n'est pas vraiment ce qui est suggéré par la question.

Montrons que  $K$  est également un corps. On raisonne par analyse/synthèse. Soit  $M = \begin{pmatrix} x & yu \\ y & x \end{pmatrix} \in K^*$  i.e.  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Supposons que  $M$  admette un inverse  $M' = \begin{pmatrix} x' & y'u \\ y' & x' \end{pmatrix}$ . Alors  $\begin{cases} xx' + uyy' = 1 \\ xy' + x'y = 0 \end{cases}$ . On en déduit que  $\begin{cases} x'(x^2 - uy^2) = x \\ y'(uy^2 - x^2) = y \end{cases}$ . Une condition nécessaire à l'existence d'un inverse est donc  $x^2 - uy^2 \neq 0$ .

Si  $x = 0$ , alors  $y \neq 0$  et donc  $x^2 - uy^2 = -uy^2 \neq 0$  (on a évidemment  $u \neq 0$ ). Si  $x \neq 0$ , alors  $x^2 = uy^2$  impliquerait que  $u$  est un carré et on a vu que c'était impossible. On a donc bien  $x^2 - uy^2 \neq 0$ .

Puisque  $x^2 - uy^2 \neq 0$ , il existe  $(x', y')$  tel que  $\begin{cases} x'(x^2 - uy^2) = x \\ y'(uy^2 - x^2) = y \end{cases}$ . Posons alors  $M' = \begin{pmatrix} x' & y'u \\ y' & x' \end{pmatrix}$ . On a  $MM' = \begin{pmatrix} xx' + uyy' & u(xx' + yy') \\ xx' + yy' & xx' + uyy' \end{pmatrix}$ .

Or

$$\begin{aligned} (x^2 - uy^2)(xx' + uyy') &= xx'(x^2 - uy^2) + uyy'(x^2 - uy^2) = x^2 - uy^2 \\ (x^2 - uy^2)(xy' + x'y) &= xy'(x^2 - uy^2) + yx'(x^2 - uy^2) = -xy + xy = 0 \end{aligned}$$

Comme  $x^2 - uy^2 \neq 0$ ,  $xx' + uyy' = 1$  et  $xy' + x'y = 0$ . On a alors bien  $MM' = I_2$ .

**REMARQUE.**  $K$  est un donc un corps à  $p^2$  éléments. On peut prouver que tous les corps à  $p^2$  éléments lui sont isomorphes. De manière plus générale, si  $p$  est un nombre premier et  $n \in \mathbb{N}$ , on montre qu'il existe un unique corps à  $p^n$  éléments à isomorphisme près.

## Solution 33

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers consécutifs avec  $p < q$ .

Si  $p = 2$ , alors  $q = 3$  et  $p + q = 5$  ne peut être le produit de deux nombres premiers.

Si  $p > 2$ , alors  $p$  et  $q$  sont impairs donc  $p + q$  est pair. Supposons qu'il existe deux nombres premiers  $a$  et  $b$  tels que  $p + q = ab$ . Comme  $p + q$  est pair, un des deux nombres premiers  $a$  et  $b$  est égal à 2 par unicité de la décomposition en facteurs premiers. Supposons sans perte de généralité que  $a = 2$ . Alors  $b = \frac{p+q}{2}$  est un nombre premier strictement compris entre  $p$  et  $q$ , ce qui contredit le fait que  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers consécutifs.

### Solution 34

1.  $N(1) = N(1 \cdot 1) = N(1)^2$  donc  $N(1) \in \{0, 1\}$ . Mais  $N(x) = 0 \implies x = 0$  donc  $N(1) = 1$ . De la même manière,  $N(-1)^2 = N(1) = 1$  donc  $N(-1) \in \{-1, 1\}$ . Or  $N$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  donc  $N(-1) = 1$ .
2. Supposons que  $q = \frac{c}{d}$  avec  $(c, d) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ . On a donc  $ad = bc$  donc  $v_p(ad) = v_p(bc)$  i.e  $v_p(a) + v_p(d) = v_p(b) + v_p(c)$  ou enfin  $v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$ .
3. Les deux premiers axiomes sont automatiquement vérifiés. Remarquons que l'ultramétrie implique directement le troisième axiome. Soit  $(m, n) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ . Si  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux,  $m$  et  $n$  n'ont pas de facteur premier commun donc  $v_p(m) = 0$  ou  $v_p(n) = 0$ . Par conséquent,  $v_p(m+n) \geq 0 = \min(v_p(m), v_p(n))$ . Dans le cas général, posons  $d = m \wedge n$  et  $m'$  et  $n'$  tels que  $m = dm'$  et  $n = dn'$ . Alors  $m' \wedge n' = 1$ . Par conséquent,

$$v_p(m+n) = v_p(d(m'+n')) = v_p(d) + v_p(m'+n') \geq v_p(d) + \min(v_p(m'), v_p(n')) = \min(v_p(d) + v_p(m'), v_p(d) + v_p(n')) = \min(v_p(dm'), v_p(dn'))$$

Enfin soit  $(q, r) \in \mathbb{Q}^2$ . Si  $p = 0$  ou  $q = 0$ , l'inégalité  $v_p(q+r) \geq \min(v_p(q), v_p(r))$  est trivialement vérifiée. Sinon, il existe  $(a, b, c, d) \in (\mathbb{Z}^*)^4$  tel que  $q = \frac{a}{b}$  et  $r = \frac{c}{d}$ . Alors  $v_p(q+r) = v_p(ad+bc) - v_p(bd)$ . D'après ce qui précède,  $v_p(ad+bc) \geq \min(v_p(ad), v_p(bc))$  donc

$$v_p(q+r) \geq \min(v_p(ad), v_p(bc)) - v_p(bd) = \min(v_p(ad) - v_p(bd), v_p(bc) - v_p(bd)) = \min(v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)) = \min(v_p(q), v_p(r))$$

Puisque  $p \geq 1$ , on en déduit automatiquement que  $|q+r|_p \leq \max(|q|_p, |r|_p)$ .

4. On montre par récurrence que  $N(n) \leq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ensuite,  $N(-n) = N(-1)N(n) = N(n)$  donc  $N(n) \leq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Notons  $\mathbb{P}$  l'ensemble des nombres premiers. Si  $N(p) = 1$  pour tout  $p \in \mathbb{P}$ , la décomposition en facteurs premiers montre alors que  $N(n) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$ . Mais alors pour  $q = \frac{a}{b}$  avec  $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ ,  $N(q) = N(bq) = N(a) = 1$  donc  $N$  est triviale. Il existe donc  $p \in \mathbb{P}$  tel que  $N(p) < 1$ . Soit  $a \in \mathbb{Z}$  premier avec  $p$ . Alors il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $au + pv = 1$ . Par ultramétrie,  $\max(N(au), N(pv)) \geq N(1) = 1$ . Mais puisque  $au$  et  $bv$  sont entiers,  $N(au) \leq 1$  et  $N(bv) \leq 1$ . Ainsi  $\max(N(au), N(pv)) = 1$ . Mais  $N(pv) = N(p)N(v) < 1$  car  $N(p) < 1$  et  $N(v) \leq 1$  donc  $N(a)N(u) = N(au) = 1$ . A nouveau,  $N(a) \leq 1$  et  $N(u) \leq 1$  donc  $N(a) = N(u) = 1$ . On a donc montré que  $N(a) = 1$  pour tout entier  $a$  premier avec  $p$ .

La décomposition en facteurs irréductibles nous apprend alors que  $N(n) = N(p)^{v_p(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $q = \frac{a}{b}$  avec  $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ ,

$$\text{alors } N(b)N(q) = N(bq) = N(a) \text{ donc } N(q) = \frac{N(a)}{N(b)} = \frac{N(p)^{v_p(a)}}{N(p)^{v_p(b)}} = N(p)^{v_p(a)-v_p(b)} = N(p)^{v_p(q)}. \text{ Posons alors } \alpha = -\frac{\ln(N(p))}{\ln(p)}.$$

On a bien  $\alpha > 0$  car  $N(p) < 1$  et  $p > 1$ . De plus,  $N(p) = \frac{1}{p^\alpha}$ . D'après ce qui précède,

$$\forall q \in \mathbb{Q}, N(q) = N(p)^{v_p(q)} = p^{-\alpha v_p(q)} = |q|_p^\alpha$$

### Solution 35

**Première méthode :** On fixe un entier  $a$  impair et on fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\text{HR}(n) : a^{2^{n-1}} \equiv 1 [2^n]$$

**Initialisation :** Puisque  $a$  est impair,  $a \equiv 1 [2]$  et  $\text{HR}(1)$  est vraie. **Hérédité :** Supposons  $\text{HR}(n)$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $a^{2^{n-1}} - 1$  est divisible par  $2^n$ . De plus  $a^{2^{n-1}} + 1$  est pair car  $a$  est impair. Ainsi  $a^{2^n} - 1 = (a^{2^{n-1}} - 1)(a^{2^{n-1}} + 1)$  est divisible par  $2^n \times 2 = 2^{n+1}$  i.e.  $a^{2^n} \equiv 1 [2^{n+1}]$  de sorte que  $\text{HR}(n+1)$  est vraie.

**Conclusion :** Par récurrence,  $\text{HR}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . **Deuxième méthode :** On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $a$  est impair,  $a \wedge 2^n = 1$ . D'après le petit théorème de Fermat,  $a^{\varphi(2^n)} \equiv 1 [2^n]$ . Or  $\varphi(2^n) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$  donc  $a^{2^{n-1}} \equiv 1 [2^n]$ .



## Solution 36

1. Comme  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps

$$x^2 = x \iff x(x-1) = 0 \iff (x=0 \text{ ou } x=1)$$

2. Comme  $34 = 2 \times 17$  et  $2 \wedge 17 = 1$ , on peut considérer l'isomorphisme d'anneaux naturel  $\varphi$  de  $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ . Alors

$$x^2 = x \iff \varphi(x^2) = \varphi(x) \iff \varphi(x)^2 = \varphi(x)$$

En posant  $\varphi(x) = (y, z)$ , ceci équivaut à  $y^2 = y$  et  $z^2 = z$ . D'après la question précédente, on a donc

$$x^2 = x \iff (y, z) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

Il s'agit donc maintenant de trouver les antécédents de  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$  par  $\varphi$ . Les solutions de  $x^2 = x$  sont par conséquent 0, 18, 17 et 1.

**REMARQUE.** On confond ici les entiers avec leurs classes modulo 34, ce qui est très mal.

**REMARQUE.** Si on n'est pas à l'aise avec les anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , on peut raisonner en termes de congruence. Il s'agit en fait de résoudre  $k^2 \equiv k[34]$  dans  $\mathbb{Z}$ . Cette équation équivaut à  $34 \mid k^2 - k$  ou encore  $2 \times 17 \mid k(k-1)$ . Comme  $2 \wedge 17 = 1$ , ceci équivaut au système  $\begin{cases} 2 \mid k(k-1) \\ 17 \mid k(k-1) \end{cases}$ . Mais comme 2 et 17 sont premiers, ceci équivaut à

$$\begin{cases} 2 \mid k \text{ ou } 2 \mid k-1 \\ 17 \mid k \text{ ou } 17 \mid k-1 \end{cases}$$

ou encore à

$$\begin{cases} 2 \mid k \\ 17 \mid k \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2 \mid k-1 \\ 17 \mid k \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2 \mid k \\ 17 \mid k-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2 \mid k-1 \\ 17 \mid k-1 \end{cases}$$

et finalement à

$$\begin{cases} k \equiv 0[2] \\ k \equiv 0[17] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} k \equiv 1[2] \\ k \equiv 0[17] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} k \equiv 0[2] \\ k \equiv 1[17] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} k \equiv 1[2] \\ k \equiv 1[17] \end{cases}$$

Des solutions particulières de chacun de ces systèmes sont respectivement 0, 17, 18 et 1 donc, comme  $2 \wedge 17 = 1$ , on prouve classiquement que l'ensemble des solutions recherchées est  $\{0, 1, 17, 18\} + 34\mathbb{Z}$ .

## Solution 37

- On sait que  $(\mathbb{F}_p, +, \times)$  est un corps et que  $(\mathbb{F}_p^*, \times)$  est un groupe. Ainsi  $(\mathcal{C}, \times)$  est également un groupe puisque c'est l'image de  $\mathbb{F}_p^*$  par l'endomorphisme de groupe  $x \mapsto x^2$ .
- On trouve  $\mathcal{C} = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{9}, \bar{5}, \bar{3}\}$ .
- D'après un résultat sur les polynômes interpolateurs de Lagrange :

$$P = \sum_{i=1}^d P(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Il existe donc des entiers  $m_1, \dots, m_d$  tels que

$$\left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i \right) P = \sum_{i=1}^n m_i P(a_i) \prod_{j \neq i} (X - a_j)$$

Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Alors

$$\left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i \right) P(n) = \sum_{i=1}^n m_i P(a_i) \prod_{j \neq i} (n - a_j)$$

Puisque  $p$  divise les  $P(a_i)$ ,  $p$  divise le membre de droite. Les  $a_i$  étant distincts modulo  $p$ , aucun des facteurs  $a_j - a_i$  n'est divisible par  $p$ . Comme  $p$  est premier, le lemme d'Euclide permet d'affirmer que  $p$  divise  $P(n)$ .

4. Soit  $y \in \mathcal{C}$ . Il existe donc  $x \in \mathbb{F}_p^*$  tel que  $y = x^2$ . Alors  $y^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} = \bar{1}$  car  $\mathbb{F}_p^*$  est un groupe multiplicatif d'ordre  $p-1$ .  
 Montrons ensuite que  $\text{card } \mathcal{C} = \frac{p-1}{2}$ . Soit  $(x, y) \in (\mathbb{F}_p^*)^2$ . Alors  $x^2 = y^2 \iff (x-y)(x+y) = 0 \iff x = \pm y$ . De plus,  $y$  et  $-y$  sont distincts car  $p \neq 2$ . Ainsi tout élément de  $\mathcal{C}$  admet exactement deux antécédents par l'application  $x \in \mathbb{F}_p^* \mapsto x^2$ . Comme cette application est d'image  $\mathcal{C}$  par définition, le lemme des bergers permet de conclure que  $\text{card } \mathbb{F}_p^* = 2 \text{ card } \mathcal{C}$  i.e.  $\text{card } \mathcal{C} = \frac{p-1}{2}$ .  
 Soit  $P = X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ . Supposons qu'il existe  $a \in \mathbb{F}_p \setminus \mathcal{C}$  tel que  $a^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$ . Comme  $\deg P = \text{card } \mathcal{C} = \frac{p-1}{2}$ , la question précédente montrerait que  $P(n)$  est divisible par  $p$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , ce qui est évidemment absurde (prendre  $n = 0$  par exemple).

**REMARQUE.** L'énoncé essaie de rester dans le cadre du programme et évite de parler de l'anneau des polynômes  $\mathbb{F}_p[X]$ . Si l'on s'autorise ce petit écart du programme, les choses sont plus simples. On peut encore affirmer qu'un polynôme non nul de  $\mathbb{F}_p[X]$  possède au plus autant de racines que son degré. Le polynôme  $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$  possède donc au plus  $\frac{p-1}{2}$  racines dans  $\mathbb{F}_p$ . Tous les éléments de  $\mathcal{C}$  sont des racines de  $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$  et  $\text{card } \mathcal{C} = \frac{p-1}{2}$  donc  $\mathcal{C}$  est exactement l'ensemble des racines de  $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ .

### Solution 38

Le polynôme  $P - 7$  admet les  $\lambda_i$  pour racines donc il est divisible par les  $X - \lambda_i$ . Comme les  $\lambda_i$  sont distincts, les  $X - \lambda_i$  sont premiers entre eux deux à deux. On en déduit que  $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)(X - \lambda_4)$  divise  $P - 7$ . On montre classiquement que le quotient d'un polynôme à coefficients entiers par un polynôme unitaire à coefficients entiers est un polynôme à coefficients entiers. Il existe donc un polynôme  $Q$  à coefficients entiers tel que

$$P = 7 + (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)(X - \lambda_4)Q$$

Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $P(n) = 14$  alors

$$7 = (n - \lambda_1)(n - \lambda_2)(n - \lambda_3)(n - \lambda_4)Q(n)$$

Comme  $Q(n)$  et les  $n - \lambda_i$  sont entiers, les  $n - \lambda_i$  seraient quatre diviseurs de 7 distincts deux à deux dont le produit divise 7. Or 7 possède pour diviseurs  $-1, 1, -7$  et  $7$  mais le produit de ces quatre entiers ne divise évidemment pas 7. Ainsi l'équation  $P(n) = 14$  ne possède pas de solution entière.

## Intégrales impropres

### Solution 39

1. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$  à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On raisonne par récurrence sur  $n$ . La propriété est vraie pour  $n = 0$ , car si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$$

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^{n+2}$ . A fortiori,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  donc on peut écrire

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

En intégrant par parties,

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = - \left[ \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

ce qui permet de conclure.

2. On peut déjà effectuer le changement de variable  $t = u^2$  pour «simplifier» l'intégrale. L'intégrale de l'énoncé est alors de même nature que l'intégrale de Dirichlet  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ . L'intégrale converge en 0 puisque  $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$  est prolongeable par continuité en 0. De plus, sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = -\left[\frac{\cos u}{u}\right]_{\pi}^{+\infty} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$$

Le crochet converge puisque,  $\cos$  étant bornée,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\cos u}{u} = 0$ . La deuxième intégrale converge également puisque  $\frac{\cos u}{u^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right)$ . On peut alors en conclure que l'intégrale de Dirichlet converge et donc l'intégrale de l'énoncé également.

**REMARQUE.** Le changement de variable initiale n'était pas nécessaire. On aurait pu directement remarquer que  $\frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ , d'où l'intégrabilité en 0 et procéder à une intégration par parties en écrivant  $\frac{\sin(\sqrt{t})}{t} = \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$ .

3. Posons  $f : t \mapsto \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} dt$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Remarquons que

$$\int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) = \int_n^{n+1} (f(t) - f(n)) dt$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout  $t \in [n, n+1]$

$$|f(t) - f(n)| \leq |t - n| \max_{[n, t]} |f'| \leq \max_{[n, n+1]} |f'|$$

Or  $f'(t) = \frac{\cos(\sqrt{t})}{2t^{3/2}} - \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2}$  donc, pour tout  $t \in [n, n+1]$ ,

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2} \leq \frac{3}{2t^{3/2}} \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

Ainsi, pour tout  $t \in [n, n+1]$ ,

$$|f(t) - f(n)| \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} |f(t) - f(n)| dt \leq \frac{3}{2n^{3/2}}$$

On en déduit que la série  $\sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$  converge (absolument) par comparaison à une série de Riemann. Comme  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge, la série  $\sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} f(t) dt$  converge et donc la série  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  également.

#### Solution 40

Notons  $F$  l'unique primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  s'annulant en 0. On a donc  $F' + F = \varphi$ . Par variation de la constante, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = e^{-x} \int_0^x e^t \varphi(t) dt + \lambda e^{-x}$$

Notons  $\ell$  la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$ . On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x \varphi(t) e^t dt = \int_0^x \ell e^t dt + \int_0^x (\varphi(t) - \ell) e^t dt = \ell(e^x - 1) + \int_0^x (\varphi(t) - \ell) e^t dt$$

Puisque  $(\varphi(t) - \ell)e^t = o(e^t)$ , que  $t \mapsto e^t$  est positive et que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^t dt$  diverge, on a par intégration des relations de comparaison

$$\int_0^x (\varphi(t) - \ell)e^t dt = o\left(\int_0^x e^t dt\right)$$

ou encore

$$\int_0^x (\varphi(t) - \ell)e^t dt = o(e^x)$$

Ainsi

$$\int_0^x \varphi(t)e^t dt = \ell e^x + o(e^x)$$

puis

$$F(x) = \ell + o(1)$$

Ainsi  $F$  admet également pour limite  $\ell$  en  $+\infty$ . Puisque  $f = \varphi - F$ ,  $f$  admet pour limite 0 en  $+\infty$ .

#### Solution 41

1. Posons  $g = f' + af$  de sorte que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' + ay = g$ . Par variation de la constante, il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $f(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{at} g(t) dt + \lambda e^{-ax}$  pour  $x \in \mathbb{R}_+$ . Puisque  $g = o(1)$ ,

$$\int_0^x e^{at} g(t) dt = o\left(\int_0^x |e^{at}| dt\right)$$

Or pour  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\int_0^x |e^{at}| dt = \int_0^x e^{\operatorname{Re}(a)t} dt = \frac{1}{\operatorname{Re}(a)} (e^{\operatorname{Re}(a)x} - 1)$$

On en déduit que

$$\int_0^x e^{at} g(t) dt = o(e^{\operatorname{Re}(a)x})$$

puis finalement que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} \int_0^x e^{at} g(t) dt = 0$$

Par ailleurs, il est clair que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} = 0$  puisque  $\operatorname{Re}(a) < 0$ . Finalement, on a bien  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ .

**REMARQUE.** On peut aussi introduire la fonction  $\varphi : x \mapsto e^{ax} f(x)$ . On a alors  $\varphi'(x) = o(e^{ax})$ . Ainsi

$$\varphi(x) - \varphi(0) = o\left(\int_0^x |e^{at}| dt\right)$$

On en déduit sans peine que  $\varphi(x) = e^{\operatorname{Re}(a)x}$  i.e.  $\varphi(x) = e^{ax}$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ .

2. Posons  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et  $g = f' - jf$ . Alors  $g' - \bar{j}g = f'' + f' + f$  admet une limite nulle en  $+\infty$ . Puisque  $\operatorname{Re}(\bar{j}) < 0$ , la première question montre que  $g$  admet une limite nulle en  $+\infty$ . Puisque  $g = f' - jf$  et  $\operatorname{Re}(j) < 0$ , la première question montre à nouveau que  $f$  admet une limite nulle en  $+\infty$ .
3. Soient  $P \in \mathbb{C}[X]$  dont les racines sont toutes de parties réelles strictement négatives et  $D$  l'opérateur de dérivation. Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  (avec  $n = \deg P$ ) telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(D)(f) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ . Il suffit de raisonner par récurrence sur le degré  $n$  de  $P$ . Si  $n = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Soit alors  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n+1$  dont les racines sont de parties réelles strictement négatives et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(D)(f) = 0$ . Soit  $a$  une racine de

P. On peut donc écrire  $P = (X - a)Q$  avec  $\deg Q = n$ . Posons  $g = Q(a)(f)$ . Alors  $g' - ag = P(D)(f)$  admet une limite nulle en  $+\infty$ . Puisque  $\operatorname{Re}(a) < 0$ , la première question montre que  $\lim_{+\infty} g = 0$ . Or  $g = Q(D)(f)$  et  $\deg Q = n$  donc, par hypothèse de récurrence,  $\lim_{+\infty} f = 0$ . Par récurrence, le résultat est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Solution 42

1. D'après la théorème fondamental de l'analyse,  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = g(x)$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = F'(0) = f(0)$ .

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |F(x)| = \left| \int_0^x 1 \cdot f(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^x 1^2 dt} \sqrt{\int_0^x f(t)^2 dt} \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$$

En posant  $C = \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |g(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{x}}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Par intégration par parties,

$$\int_0^x g(t)^2 dt = \int_0^x \frac{1}{t^2} F(t)^2 dt = - \left[ \frac{F(t)^2}{t} \right]_0^x + 2 \int_0^x \frac{F(t)F'(t)}{t} dt$$

L'intégration par parties est légitime car, par continuité de  $F$  en 0,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} g(t)F(t) = g(0)F(0) = 0$$

Ainsi

$$\int_0^x g(t)^2 dt = - \frac{F(x)^2}{x} + 2 \int_0^x g(t)f(t) dt \leq 2 \int_0^x g(t)f(t) dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^x g(t)^2 dt \leq 2 \sqrt{\int_0^x g(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^x f(t)^2 dt} \leq 2C \sqrt{\int_0^x g(t)^2 dt}$$

puis

$$\int_0^x g(t)^2 dt \leq 4C^2$$

La fonction  $x \mapsto \int_0^x g(t)^2 dt$  est croissante (intégrande positive) et majorée donc admet une limite en  $+\infty$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$  converge donc i.e.  $g$  est de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

## Solution 43

1. Soit  $x \in I$ .  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$  est continue sur  $[x, +\infty[$  et  $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  par croissances comparées. L'intégrale  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  converge donc et  $f$  est définie sur  $I$ .

2. On peut remarquer que

$$\forall x \in I, f(x) = f(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

donc  $f$  est dérivable sur  $I$  d'après le théorème fondamental de l'analyse et

$$\forall x \in I, f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

3. On sait que  $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$  et l'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{t}$  diverge donc

$$f(x) - f(1) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x)$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty$ ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$$

Par intégration par parties

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\left[\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

Comme  $\frac{e^{-t}}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)$  et que  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  diverge,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right)$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$$

4. Tout d'abord,  $f$  est continue sur  $I$ . De plus,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  par croissances comparées. Enfin,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  par croissances comparées. Ainsi  $f$  est intégrable sur  $I$  et  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t) dt$$

Cette intégration par parties est légitime car

$$tf(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -t \ln t \quad \text{et} \quad tf(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$$

de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} tf(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} tf(t) = 0$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} tf'(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

**Solution 44**

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2} dt$  converge puisque  $\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ . Alors, en posant

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2} dt$$

on a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ . Par conséquent,

$$F(x) = G(x) - G(7x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Remarquons que

$$\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{t} + \mathcal{O}(1)$$

On en déduit que l'intégrale  $\int_0^1 \left( \frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt$  converge. Notons C sa valeur. Alors en posant pour  $x > 0$

$$H(x) = \int_x^1 \left( \frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt$$

on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = C$ . Par conséquent,

$$F(x) = H(7x) - H(x) + \int_x^{7x} \frac{dt}{t} = H(7x) - H(x) + \ln(7) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} C - C + \ln(7) = \ln(7)$$

**Solution 45**

1. Posons  $f(x, t) = \frac{\ln t}{x^2 + t^2}$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ . Si  $x \neq 0$ ,  $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$  et  $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$  par croissance comparées donc

$t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Enfin,  $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{\ln t}{t^2}\right)$  donc  $t \mapsto f(0, t)$  n'est pas intégrable au voisinage de  $0^+$ .

Le domaine de définition de F est donc  $\mathbb{R}^*$ .

2. Effectuons le changement de variable  $u = 1/t$  :

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = - \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2} \cdot \frac{du}{u^2} = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1} du = -F(1)$$

Ainsi  $F(1) = 0$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Effectuons le changement de variable  $t = ux$ .

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2 + (ux)^2} \cdot x du \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) + \ln(u)}{1+u^2} du \\ &= \frac{1}{x} \left( \ln(x) \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( \frac{\pi \ln x}{2} + F(1) \right) \\ &= \frac{\pi \ln x}{2x} \end{aligned}$$

Comme F est clairement paire,  $F(x) = \frac{\pi \ln |x|}{2|x|}$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Solution 46**

1. Soit  $x \in [1, +\infty[$ .

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{f(at)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$$

En effectuant le changement de variable  $u = at$  dans la première intégrale

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_a^{ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$$

Enfin, d'après la relation de Chasles,

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$$

2. Soit  $x \in [1, +\infty[$ . Comme  $f$  est continue, elle admet un minimum  $m_x$  et un maximum  $M_x$  sur le segment  $[x, ax]$ . Alors

$$m_x \int_x^{ax} \frac{dt}{t} \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt \leq M_x \int_x^{ax} \frac{dt}{t}$$

ou encore

$$m_x \ln(a) \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt \leq M_x \ln(a)$$

Si  $a > 1$ ,

$$m_x \leq \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt \leq M_x$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc  $c_x \in [x, ax]$  tel que

$$f(c_x) = \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt$$

ou encore

$$\int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt = f(c_x) \ln(a)$$

Ceci est encore valable si  $a = 1$  (prendre  $c_x = x$  par exemple). Comme  $c_x \geq x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(c_x) = \ell$  de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt = \ell \ln(a)$$

On en déduit que  $\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt$  converge et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \ell \ln(a) - \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$$

**Solution 47**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'application  $t \mapsto f(t)e^{-t/n}$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$  donc  $u_n$  est défini. Cette application est également continue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f(t)e^{-t/n} = o(1/t^2)$  de sorte que  $v_n$  est défini.



2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque l'intégrale définissant  $v_n$  converge, on peut écrire que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) e^{-t/n} dt$$

Mais en effectuant un changement de variable dans chaque intégrale, on obtient

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} f(t + k\pi) e^{-(t+k\pi)/n} dt$$

Par  $\pi$ -périodicité de  $f$ , on en déduit que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} \int_0^{\pi} f(t) e^{-t/n} dt = u_n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = u_n a_n$$

avec

$$a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = \frac{1}{1 - e^{-\pi/n}}$$

3. Il s'agit jute d'un équivalent classique, à savoir  $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ . On en déduit immédiatement que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$ .

4. Remarquons tout d'abord que comme  $\int_0^{\pi} f(t) dt = 0$ ,

$$u_n = \int_0^{\pi} f(t)(e^{-t/n} - 1) dt$$

On remarque que  $e^{-t/n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$ , ce qui permet de conjecturer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \int_0^{\pi} t f(t) dt$  (ce qui précède n'est en aucun cas une preuve). On en déduirait alors la limite de  $(v_n)$ . On propose alors deux méthodes.

**Avec le théorème de convergence dominée.** Posons  $f_n : t \mapsto (e^{-t/n} - 1)f(t)$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|f_n| \leq |f|$  sur  $[0, \pi]$  et  $|f|$  est évidemment intégrable sur  $[0, \pi]$ . D'après le théorème de convergence dominée,  $(u_n)$  converge vers 0.

On remarque ensuite que la suite de fonctions  $(nf_n)$  converge simplement vers la fonction  $t \mapsto -f(t)$ . De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \pi], |nf_n(t)| = n(1 - e^{-t/n})|f(t)| \leq t|f(t)|$$

en utilisant la convexité de  $\exp$ . La fonction  $t \mapsto t|f(t)|$  est à nouveau intégrable sur le segment  $[0, \pi]$  donc, par convergence dominée,

$(nu_n)$  converge vers  $-\int_0^{\pi} t f(t) dt$ . Puisque  $v_n = a_n u_n$  et  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t f(t) dt$ .

**Sans le théorème de convergence dominée.** Remarquons que  $f$  est continue donc bornée sur le segment  $[0, \pi]$  (elle est même bornée sur  $\mathbb{R}_+$  puisqu'elle est  $\pi$ -périodique). En notant  $M$  un majorant de  $|f|$  sur  $[0, \pi]$ ,

$$|u_n| \leq M \int_0^{\pi} (1 - e^{-t/n}) dt = M(\pi + n(e^{-\pi/n} - 1))$$

Or via le même équivalent usuel que précédemment,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{-\pi/n} - 1) = -\pi$$

de sorte que  $(u_n)$  converge bien vers 0.

On constate que

$$u_n + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} t f(t) dt = \int_0^{\pi} f(t) \left( e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n} \right) dt$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne pour  $t \in \mathbb{R}_+$

$$\left| e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n} \right| \leq \frac{t^2}{2n^2}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient donc

$$\left| u_n + \frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt \right| \leq \frac{K}{2n^2} \int_0^\pi t^2 dt = \frac{K\pi^3}{6n^2}$$

En particulier,

$$u_n + \frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

A fortiori

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \int_0^\pi t f(t) dt$$

Via l'équivalent de  $(a_n)$  précédemment trouvé, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t f(t) dt$$

### Solution 48

De manière plus générale, posons  $J_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln(t)^p dt$  pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ .  $J_{n,0}$  est clairement définie et, pour  $p > 0$ ,  $t^n \ln(t)^p \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

par croissances comparées donc  $t \mapsto t^n \ln(t)^p$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .  $J_{n,p}$  est donc également définie pour  $p > 0$ .

Par intégration par parties, lorsque  $p > 0$ ,

$$\int_0^1 t^n \ln(t)^p dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t)^p \right]_0^1 - \frac{p}{n+1} \int_0^1 t^n \ln(t)^{p-1} dt$$

Cette intégration par parties est légitime car la seconde intégrale, à savoir  $J_{n,p-1}$  converge. De plus, le crochet est nul par croissances comparées. Ainsi

$$J_{n,p} = -\frac{p}{n+1} J_{n,p-1}$$

Par une récurrence facile

$$J_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} J_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

En particulier,

$$I_n = J_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

### Solution 49

Supposons  $f$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Par décroissance de  $f$ ,

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = x f(x)$$

et

$$\int_{x/2}^x f(t) dt \geq \int_{x/2}^x f(x) dx = \frac{x f(x)}{2}$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq x f(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t) dt$$

Mais  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{2x} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$  de sorte que  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} f(t) dt = 0$ . Pour les mêmes raisons,  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{x/2}^x f(t) dt = 0$ . Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$  par encadrement.

La réciproque est fautive. On peut par exemple considérer  $f(x) = \frac{1}{(x+2) \ln(x+2)}$ .  $f$  est bien décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$  mais  $f$  n'est pas intégrable en  $+\infty$  puisque  $f$  admet pour primitive  $x \mapsto \ln(\ln(x+2))$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln(x+2)) = +\infty$ .

## Convexité

### Solution 50

1. Posons  $z = (\varphi_1 - \varphi_2)^2$ . On a successivement

$$z' = 2(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2)'$$

puis

$$z'' = 2[(\varphi_1 - \varphi_2)']^2 + 2(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2)'' = 2[(\varphi_1 - \varphi_2)']^2 + f(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \geq 0$$

2. On en déduit que  $z$  est convexe. Puisque  $\varphi_1(a) = \varphi_2(b) = 0$ ,  $\varphi \leq 0$  sur  $[a, b]$ . De plus,  $z = (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \geq 0$  sur  $[a, b]$ . On en déduit que  $z = 0$  sur  $[a, b]$  i.e.  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

### Solution 51

Par une première intégration par parties

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt = [f(t) \sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t) \sin t dt = - \int_0^{2\pi} f'(t) \sin t dt$$

Par une seconde intégration par parties

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt = [f'(t) \cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(t) \cos t dt = f'(2\pi) - f'(0) - \int_0^{2\pi} f''(t) \cos t dt$$

Enfin,

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt = \int_0^{2\pi} f''(t) dt - \int_0^{2\pi} f''(t) \cos t dt = \int_0^{2\pi} f''(t)(1 - \cos t) dt$$

Puisque  $f$  est convexe sur  $[0, 2\pi]$ ,  $f''(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ . De plus,  $1 - \cos t \geq 0$  pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ . Finalement

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt \geq 0$$

### Solution 52

La courbe de  $f$  étant située au-dessus de ses cordes, on obtient en comparant l'aire d'un trapèze à une intégrale

$$\forall x \in [0, 1], x \frac{f(x) + f(0)}{2} \leq \int_0^x f(t) dt$$

**REMARQUE.** Si l'examineur n'est pas convaincu par cet argument géométrique, on peut affirmer qu'un paramétrage de la corde passant par les points de la courbe d'abscisses 0 et  $x$  est

$$t \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} t + f(0)$$

Ainsi

$$\forall t \in [0, x], \frac{f(x) - f(0)}{x} t + f(0) \leq f(t)$$

et donc

$$\int_0^x \left( \frac{f(x) - f(0)}{x} t + f(0) \right) dt \leq \int_0^x f(t) dt$$

ce qui donne le résultat escompté.

Puisque  $f(0) = 1$ , on a donc

$$\forall x \in [0, 1], x \frac{f(x) + 1}{2} \leq \int_0^x f(t) dt$$

On pose alors  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . En intégrant sur  $[0, 1]$ ,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x f(x) dx + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 F(x) dx$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 F(x) dx = F(1) - \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 x f(x) dx$$

En reprenant le résultat précédent, on a donc

$$\frac{3}{2} \int_0^1 x f(x) dx + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 f(t) dt$$

ou encore

$$3 \int_0^1 x f(x) dx \leq 2 \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2}$$

Par ailleurs,

$$\left( \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$$

donc

$$\left( \int_0^1 f(t) dt \right)^2 \geq \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{4}$$

En reprenant la dernière inégalité, on obtient bien

$$3 \int_0^1 x f(x) dx \leq 2 \left( \int_0^1 f(t) dt \right)^2$$

ou encore

$$\int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{2}{3} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

### Solution 53

1. L'inégalité  $H(p) \geq 0$  est claire car pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $p_i \geq 0$  et  $\ln(p_i) \geq 0$  car tous les  $p_i$  sont inférieurs à 1. Remarquons que la fonction  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$  car elle y est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $\ln'' : x \mapsto \frac{1}{x^2}$  y est positive.

Comme  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln\left(\frac{1}{p_i}\right) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \cdot p_i\right)$$

ou encore

$$H(p) \leq \ln(n)$$

2. Toujours par concavité de  $\ln$ ,

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^n p_i \cdot \frac{q_i}{p_i}\right) = \ln(1) = 0$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

**Solution 54**

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  donc  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp''(x) = \exp(x) > 0$  donc  $\exp$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
2. L'inégalité est clairement vraie lorsque l'un des  $x_i$  est nul. Supposons donc tous les  $x_i$  strictement positifs. Par concavité de  $\ln$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

Puis par croissance de l'exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

ou encore

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

3. Comme  $S$  est symétrique réelle, elle est orthodagonalisable dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Supposons que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $X^T S X \geq 0$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre (nécessairement réelle) de  $S$  et  $X$  un vecteur propre associé. Alors  $X^T S X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2 \geq 0$ . Comme  $X$  n'est pas nul,  $\|X\|^2 > 0$  donc  $\lambda \geq 0$ . Ainsi  $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ .  
Réciproquement, supposons  $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ . On sait qu'il existe  $P$  orthogonale telle que  $S = P D P^T$  où  $D$  est une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Alors

$$X^T S X = (P^T X)^T D (P^T X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i^2 \geq 0$$

en notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux de  $D$  et  $Y = P^T X$ .

4. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $S$ . D'après la deuxième question,

$$\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

ce qui signifie  $(\det(S))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(S)$ .

5. Remarquons que  $M^T M$  est une matrice symétrique. De plus, pour tout  $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $X^T (M^T M) X = \|MX\|^2 \geq 0$  donc  $\text{Sp}(M^T M) \subset \mathbb{R}_+$  d'après la troisième question. D'après la question précédente,

$$\det(M^T M)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(M^T M)$$

On conclut en remarquant que  $\det(M^T M) = \det(M^T) \det(M) = \det(M)^2$ .

**Solution 55**

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $\{f(x_1) + f(x_2), x_1 + x_2 = x\}$  est non vide et minorée par 0. On peut donc poser  $h(x) = \inf\{f(x_1) + f(x_2), x_1 + x_2 = x\}$ .  
Soit  $(x, y) \in E_h$ . On a donc  $y > h(x)$ . Mais par définition de  $h$ , il existe  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x_1 + x_2 = x$  et  $y > f(x_1) + f(x_2) \geq h(x)$ .  
Soit  $\varepsilon = y - f(x_1) - f(x_2)$  et posons alors  $y_1 = f(x_1) + \frac{\varepsilon}{2}$  et  $y_2 = f(x_2) + \frac{\varepsilon}{2}$ . On a bien  $(x_1, y_1) \in E_f$  et  $(x_2, y_2) \in E_g$ . Ainsi  $(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in E_f + E_g$ .  
Soit  $(x, y) \in E_f + E_g$ . Il existe donc  $(x_1, y_1) \in E_f$  et  $(x_2, y_2) \in E_g$  tel que  $(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ . On a alors  $y = y_1 + y_2 > f(x_1) + f(x_2) \geq h(x)$  puisque  $x = x_1 + x_2$ . Ainsi  $(x, y) \in E_h$ .  
Par double inclusion,  $E_h = E_f + E_g$ .  
L'unicité vient du fait que  $h$  est uniquement définie par  $E_h$ . En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \inf\{y, (x, y) \in E_f\}$ .

2. On prouve classiquement que  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est convexe si et seulement si  $E_\varphi$  est convexe. On prouve de même que si A et B sont deux parties convexes de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $A + B$  est convexe.  
Ainsi, si  $f$  et  $g$  sont convexes,  $E_f$  et  $E_g$  le sont et, par conséquent,  $E_h = E_f + E_g$  est également convexe. Finalement,  $h$  est convexe.
3. Prenons  $f = g = 1 + \sin$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} h(x) &= \inf\{2 + \sin(x_1) + \sin(x_2), x_1 + x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= 2 + \inf_{y \in \mathbb{R}} \left( \sin\left(\frac{x}{2} + y\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - y\right) \right) \\ &= 2 + 2 \inf_{y \in \mathbb{R}} \left( \sin \frac{x}{2} \cos y \right) \\ &= 2 - 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \end{aligned}$$

$f$  et  $g$  sont bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tandis que  $h$  ne l'est pas.

## Suites et séries de fonctions

### Solution 56

1. Soit  $x \in \pi\mathbb{Z}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = 0$ .  
Soit maintenant  $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . Alors  $|\cos x| < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cos^n x = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .  
Finalement la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle.
2. Posons  $x_n = \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .  
D'une part,  $n \sin(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . D'autre part,  $\cos^n(x_n) = e^{n \ln(\cos(1/n))}$  et

$$\ln(\cos(1/n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(1 + o(1/n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1/n)$$

de sorte que  $\cos^n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

Finalement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = 1 \neq 0$  donc la suite  $(f_n)$  ne converge pas uniformément.

Soit maintenant  $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Alors pour tout  $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$|f_n(x)| \leq n \cos^n(a) \sin(a)$$

donc

$$|f_n|_\infty \leq n \cos^n(a) \sin(a)$$

(c'est même une égalité) donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n| = 0$  puisque  $0 \leq \cos a < 1$ . Ainsi  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ .

### 3. Méthode n°1

Remarquons tout d'abord que  $f_n$  est positive et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt = -\frac{n}{n+1} [\cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1}$$

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Comme  $g$  est continue en 0, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $|g(x) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $x \in [0, \alpha]$ . Ensuite,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)| dt \\
 &\leq \int_0^\alpha f_n(t)|g(t) - g(0)| dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)| dt \\
 &\leq \int_0^\alpha f_n(t)\varepsilon dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty dt \\
 &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\varepsilon dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty dt \\
 &\leq \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} + \|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt
 \end{aligned}$$

Comme  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment  $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt = 0$ . Il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq N$ ,  $\|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt \leq \varepsilon$ . On en déduit que pour  $n \geq N$ ,

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt = 0$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt = \frac{ng(0)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(0)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt = g(0)$$

### Méthode n°2

L'application  $t \mapsto \cos^{n+1} t$  est bijective de  $[0, \pi/2]$  sur  $[0, 1]$ , strictement décroissante et de classe  $\mathcal{C}^1$  donc, par changement de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt = \frac{n}{n+1} \int_0^1 f(\arccos(\sqrt[n+1]{u})) du$$

La fonction  $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$  converge simplement sur  $]0, 1]$  vers la fonction constante égale à  $f(0)$  car  $f$  est continue en 0. De plus,  $g$  est bornée  $[0, 1]$  (continue sur un segment) donc  $u \mapsto g(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$  est dominée par une constante (clairement intégrable sur le segment  $[0, 1]$ ). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(\sqrt[n+1]{u}) du = \int_0^1 g(0) du = g(0)$$

On en conclut immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt = g(0)$$

**Solution 57**

1. On remarque tout d'abord que les  $f_n$  sont définies sur  $] -1, +\infty[$ . On calcule un développement limité de  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$  :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \frac{1}{n+1+x} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{n+1+x} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \left(-\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right) \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Comme la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  converge, on en déduit que  $\sum_{n \geq 1} f_{n+1} - f_n$  converge simplement sur  $] -1, +\infty[$ .

2. La convergence simple de la série  $\sum_{n \geq 1} f_{n+1} - f_n$  équivaut à la convergence simple de la suite  $(f_n)$  vers une fonction  $f$ . Notons  $f$  sa limite et posons  $g_n = f_{n+1} - f_n$ .  $g_n$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et pour  $x \in ] -1, +\infty[$  :

$$g'_n(x) = -\frac{1}{2(n+1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

De plus, pour  $x \in ] -1, +\infty[$

$$|g'_n(x)| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

ce qui prouve que  $\sum_{n \geq 1} g'_n$  converge normalement. Comme  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge simplement vers une fonction  $g$ , on en déduit que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[$ . De plus, en utilisant un télescopage,  $g = f - f_1$ . Comme  $f_1$  est elle-même de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[$ , on en déduit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

3. Comme  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge normalement, cette série converge uniformément. Par conséquent, la suite  $(f_n)$  converge uniformément. Par conséquent :

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$$

Or, par une intégration facile :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(t) dt &= \left(2 \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) - 2\sqrt{n} \\ &= 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - 2 \end{aligned}$$

On en déduit que  $\int_0^1 f(t) dt = -2$ .

**Solution 58**

1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors  $\frac{1}{\text{sh}(nx)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-nx}$  et  $\sum e^{-nx}$  est une série à termes positifs convergente (série géométrique de raison  $e^{-x} \in [0, 1[$ ). Ainsi la série  $\sum \frac{1}{\text{sh}(nx)}$  converge.  $f$  est donc définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Mais  $f$  est manifestement impaire donc  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

On utilise ensuite une comparaison à une intégrale. Fixons  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{\text{sh}(xt)}$  est décroissante de sorte que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(xt)} \leq f(x) \leq \frac{1}{\text{sh } x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(xt)}$$



Une primitive de  $\frac{1}{\text{sh}}$  étant  $t \mapsto \ln(\text{th}(x/2))$ , on trouve

$$-\frac{1}{x} \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq f(x) \leq \frac{1}{\text{sh } x} - \frac{1}{x} \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

On montre aisément que  $\ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x$  et on sait que  $\frac{1}{\text{sh } x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ . Comme  $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ , on en déduit que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$$

Comme  $f$  est impaire, on peut affirmer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln |x|}{x}$$

**REMARQUE.** On peut également remarquer que pour  $x \in ]0, 1]$ , par le changement de variable  $u = xt$ ,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(xt)} = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{du}{\text{sh } u} = \frac{1}{x} \int_x^1 \frac{du}{\text{sh } u} + \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{du}{\text{sh } u}$$

Mais  $\frac{1}{\text{sh } u} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u}$ ,  $u \mapsto \frac{1}{u}$  est positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\int_0^1 \frac{du}{u}$  diverge, donc

$$\int_x^1 \frac{du}{\text{sh } u} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{du}{u} = -\ln x$$

On en déduit donc que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(xt)} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et on peut alors à nouveau conclure que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors  $\frac{1}{\text{sh}^2(nx)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4e^{-2nx}$  et  $\sum e^{-2nx}$  est une série à termes positifs convergente (série géométrique de raison  $e^{-2x} \in [0, 1[$ ). Ainsi la série  $\sum \frac{1}{\text{sh}^2(nx)}$  converge.  $g$  est donc définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Mais  $g$  est manifestement impaire donc  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

Posons ensuite  $u_n(x) = \frac{x^2}{\text{sh}^2(nx)}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_0 u_n = \frac{1}{n^2}$ . De plus,  $\text{sh}$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $\text{sh } x \geq x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  et

donc  $\frac{x^2}{\text{sh}^2(nx)} \leq \frac{1}{n^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et même pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  (parité). On en déduit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}^*$ . On peut alors utiliser le théorème d'interversion limite/série

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ou encore  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) = \pi^2/6$ . Par conséquent,

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$$

## Solution 59

1. On raisonne par récurrence. Tout d'abord,  $g_0$  est bornée. Si on suppose  $g_n$  bornée pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , alors

$$\forall x \in [0, 1], |g_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |g_n(1-t)| dt \leq \int_0^x \|g_n\|_\infty dt = x \|g_n\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty$$

Notamment,  $g_{n+1}$  est bornée. On a donc montré par récurrence que  $g_n$  est bornée pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

En fait, on a montré plus précisément que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|g_{n+1}(x)| \leq x \|g_n\|_\infty$ . Ainsi pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|g_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |g_n(1-t)| dt \leq \int_0^x (1-t) \|g_{n-1}\|_\infty dt \leq \int_0^1 (1-t) \|g_{n-1}\|_\infty dt = \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty$$

Par conséquent,  $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty$ .

2. D'après la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty$ . On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|g_{2n}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \|g_0\|_\infty$  et  $\|g_{2n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \|g_1\|_\infty$ . On vérifie alors qu'en prenant  $K = \max(\|g_0\|_\infty, \sqrt{2} \|g_1\|_\infty)$ , on a  $\|g_n\|_\infty \leq \frac{K}{\sqrt{2}^n}$ .

**REMARQUE.** On calcule aisément  $\|g_0\|_\infty = \|g_1\|_\infty = 1$  de sorte que  $K = \sqrt{2}$ .

Comme la série  $\sum \frac{1}{\sqrt{2}^n}$  est une série géométrique convergente, il en est de même de la série  $\sum \|g_n\|_\infty$ . Par conséquent, la série  $\sum g_n$  converge normalement sur  $[0, 1]$  et donc simplement. La fonction  $G$  est bien définie sur  $[0, 1]$ .

Tout d'abord,  $g_0$  est dérivable de dérivée nulle. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n$  est également dérivable d'après le théorème fondamental de l'analyse et  $g'_n(x) = g_{n-1}(1-x)$ . La série  $\sum g'_n$  converge donc normalement et donc uniformément. On en déduit que  $G$  est dérivable et que

$$\forall x \in [0, 1], G'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_{n-1}(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(1-x) = G(1-x)$$

Cette égalité montre à nouveau que  $G'$  est dérivable et que

$$\forall x \in [0, 1], G''(x) = -G'(1-x) = -G(x)$$

3. Il existe donc  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $G = \alpha \cos + \beta \sin$ . Mais pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g_n(0) = 0$  donc  $G(0) = g_0(0) = 1$ . De plus,  $G'(1) = G(0) = 1$ . On en déduit que  $\alpha = 1$  et  $-\alpha \sin(1) + \beta \cos(1) = 1$  puis que  $\beta = \frac{1 + \sin(1)}{\cos(1)}$ .

## Solution 60

1. Supposons qu'il existe une telle suite. Notamment

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 2$$

On en déduit notamment que  $a_n^2 \leq 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par ailleurs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^4 = 4$$

de sorte que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n^2 - a_n^4 = 0$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2(2 - a_n^2) = 0$$

Notre remarque initiale montre qu'il s'agit d'une somme de termes positifs. Par conséquent,  $a_n = 0$  ou  $a_n^2 = 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Mais puisque  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 2$ , il existe un unique  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $a_p^2 = 2$  et  $a_n = 0$  pour tout entier naturel  $n \neq p$ . Mais alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^6 = a_p^6 = 2^3 = 8 \neq 6$$

On a donc montré par l'absurde qu'il n'existe pas de suite vérifiant la condition de l'énoncé.

2. Supposons qu'il existe une telle suite  $(a_n)$ . Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 1$$

Puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = \frac{1}{4}$$

on a  $a_n^2 \leq \frac{1}{4}$  i.e.  $|a_n| \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Posons  $\varphi_n(k) = k^2 a_n^k$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k \geq 2$

$$|\varphi_n(k)| = k^2 |a_n|^{k-2} |a_n|^2 \leq \frac{k^2}{2^{k-2}} a_n^2$$

La suite  $(k^2/2^{k-2})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 donc est bornée. On en déduit qu'il existe  $M$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k \geq 2$

$$|\varphi_n(k)| \leq M a_n^2$$

Comme la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2$  converge, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$  converge normalement sur  $\mathbb{N}$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_n(k) = 0$  par la majoration précédente. Par le théorème de la double limite,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 0$$

ce qui contredit le fait que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 1$$

## Solution 61

1. Posons  $f_n : t \mapsto \ln(1 + e^{nt})$ . Si  $t \in \mathbb{R}_+$ , alors la suite  $(f_n(t))$  ne converge pas vers 0 donc la série  $\sum f_n(t)$  diverge. Si  $t \in \mathbb{R}_-^*$ , alors  $f_n(t) \sim e^{-nt}$  et la série  $\sum e^{-nt}$  est une série géométrique à termes positifs convergente (de raison  $e^{-t} \in ]0, 1[$ ). Par conséquent, la série  $\sum_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$  converge.

Finalement, le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. On sait que  $0 \leq \ln(1 + u) \leq u$  pour tout  $u \in \mathbb{R}_+$ . Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{nt}$$

Fixons  $a \in \mathbb{R}_-^*$ . Alors pour tout  $t \in ]-\infty, a]$ ,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{nt} \leq e^{na}$$

et donc  $\|f_n\|_\infty \leq e^{na}$  où  $\|\cdot\|_\infty$  désigne la norme uniforme sur  $] -\infty, a]$ . A nouveau, la série géométrique  $\sum e^{na}$  converge donc la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $] -\infty, a]$ . A fortiori, elle converge uniformément sur  $] -\infty, a]$ . Par ailleurs,  $f_n$  admet pour limite 0 en  $-\infty$  si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\ln 2$  si  $n = 0$ . Le théorème d'interversion limite/série permet alors d'affirmer que

$$\lim_{-\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{-\infty} f_n = \ln 2$$

3. En étudiant la fonction  $u \mapsto \ln(1 + u) - u + \frac{u^2}{2}$ , on prouve que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \ln(1 + u) \geq u - \frac{u^2}{2}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*, f_n(t) \geq e^{nt} - \frac{1}{2} e^{2nt}$$

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{nt} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2nt} = \frac{1}{1-e^t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{2t}} = \frac{1+2e^t}{2(1-e^{2t})}$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1+2e^t}{2(1-e^{2t})} = +\infty$ ,  $\lim_{0^-} f = +\infty$ .

## Solution 62

1. Soit  $t \in ]0, 1[$ . Puisque  $-t^b \in ]-1, 0[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-t^b)^n = \frac{1}{1+t^b}$ . On en déduit que

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

avec  $u_n(t) = (-1)^n t^{a-1+nb}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $a-1+nb > -1$ ,  $|u_n|$  est intégrable sur  $]0, 1[$  et

$$\int_0^1 |u_n|(t) dt = \int_0^1 t^{a-1+nb} dt = \frac{1}{a+nb}$$

La série  $\sum \frac{1}{a+nb}$  diverge. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

3. Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_N(t) dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-1)^n t^{a-1+nb} dt \\ &= \int_0^1 t^{a-1} \cdot \frac{1 - (-1)^{N+1} t^{(N+1)b}}{1+t^b} dt \quad (\text{somme des termes d'une suite géométrique}) \\ &= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt - (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(N+1)b}}{1+t^b} dt \end{aligned}$$

Or

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{a-1+(N+1)b}}{1+t^b} dt \leq \int_0^1 t^{a-1+(N+1)b} dt = \frac{1}{a+(N+1)b}$$

Ainsi, par théorème des gendarmes

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(N+1)b}}{1+t^b} dt = 0$$

de sorte que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

4. On déduit de la question précédente que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

5. D'après la question précédente, en prenant  $a = 1$  et  $b = 3$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$$

On décompose  $\frac{1}{1+X^3}$  en éléments simples. Il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$F = \frac{1}{1+X^3} = \frac{1}{X+1}X^2 - X + 1 = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$

On trouve  $a = ((X+1)F)(-1) = \frac{1}{3}$ . De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0 = a + b$  donc  $b = -\frac{1}{3}$ . Enfin,  $F(0) = 1 = a + c$  donc  $c = \frac{2}{3}$ . On peut réécrire sous la forme

$$F(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{X-2}{X^2-X+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{X^2-X+1}$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{t+1} &= [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) \\ \int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt &= [\ln(t^2-t+1)]_0^1 = 0 \\ \int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1} &= \int_0^1 \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

### Solution 63

1. Remarquons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{n+1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f'_{n+1} = f_n$ . On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  est que  $f_n^{(k)} = f_{n-k}$ . Remarquons également que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{n+1}(a) = 0$  i.e. pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(a) = 0$ . Fixons  $x \in [a, b]$  et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à  $f_n$  entre  $a$  et  $x$ .

$$\left| f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \max_{[a,x]} |f_n^{(n)}| \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Or pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$f_n^{(k)}(a) = f_{n-k}(a) = 0$$

et  $f_n^{(n)} = f$  donc

$$|f_n(x)| \leq \max_{[a,x]} |f| \frac{(x-a)^n}{n!} \leq \|f\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!}$$

Par conséquent

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!}$$

Comme la série exponentielle  $\sum \frac{(b-a)^n}{n!}$  converge, la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

2. La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge simplement vers  $F - f$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f'_n$ , c'est-à-dire la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_{n-1}$  converge normalement sur  $[a, b]$ . On en déduit que  $F - f_0$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  et que

$$(F - f)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = F$$

La fonction  $\varphi : x \mapsto e^{-x}(F(x) - f(x))$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  et

$$\varphi'(x) = -e^{-x}(F(x) - f(x)) + e^{-x}(F - f)'(x) = -e^{-x}(F(x) - f(x)) + e^{-x}F(x) = e^{-x}f(x)$$

Ainsi  $\varphi$  est une primitive de  $x \mapsto e^{-x}f(x)$  sur  $[a, b]$ . Par ailleurs

$$\varphi(a) = e^{-a}(F(a) - f(a)) = 0$$

car  $f_n(a) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi

$$\forall x \in [a, b], \varphi(x) = \int_a^x e^{-t}f(t) dt$$

ou encore

$$\forall x \in [a, b], F(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t}f(t) dt$$

## Solution 64

1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Via des développements limités usuels :

$$\begin{aligned} x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) &= \frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

donc  $u_n(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum u_n(x)$  converge. La série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u'_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}$$

On montre classiquement que

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

donc

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \leq u'_n(x) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

ou encore

$$\frac{x-1}{(n+1)(n+x)} \leq u'_n(x) \leq \frac{x}{n(n+x)}$$

Ainsi

$$|u'_n(x)| \leq \frac{x+1}{n^2}$$

Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ .

$$\forall x \in [0, a], |u'_n(x)| \leq \frac{a+1}{n^2}$$

La série  $\sum u'_n$  converge donc normalement sur  $[0, a]$ . Ainsi  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, a]$  et, par suite, sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. On a clairement  $u_n(1) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit immédiatement que  $f(1) = 0$ .

Les  $u'_n$  sont clairement croissantes sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $g'$  l'est également. Par ailleurs,  $f'(x) = g'(x) - \frac{1}{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  donc  $f'$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme somme de deux fonctions croissantes. On en déduit que  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$g'(x+1) - g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x+1) - u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+x} = 0$ ,  $g'(x+1) - g'(x) = \frac{1}{x+1}$  par télescopage. Posons  $\psi(x) = f(x+1) - f(x) - \ln(x) = g(x+1) - g(x) - \ln(x+1)$ . Alors  $\psi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\psi'(x) = g'(x+1) - g'(x) - \frac{1}{x+1} = 0$$

Ainsi  $\psi$  est constante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Mais comme  $\psi(x) = g(x+1) - g(x) - \ln(x+1)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\psi$  est en fait prolongeable par continuité (et même prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ ) sur  $\mathbb{R}_+$  puisqu'on a vu que  $g$  était de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . En notant encore  $\psi$  ce prolongement,  $\psi(0) = g(1) - g(0) - \ln(0+1) = 0$ . Par conséquent,  $\psi$  est constamment nulle sur  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit que  $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

4. Posons  $f_n(x) = x \ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$ .

Soit  $x \in ]0, 1]$ . Par convexité de la fonction de  $f$ ,

$$\frac{f(n+x) - f(n)}{x} \leq \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \ln(n)$$

ou encore

$$f(n+x) \leq x \ln(n) + f(n)$$

Par ailleurs, par télescopage

$$f(n) = f(n) - f(1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) - f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \ln(k) = -\ln(n) + \ln(n!)$$

et

$$f(n+x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1+x) - f(k+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(x+k) = -\ln(x+n) + \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$$

On en déduit que

$$f(x) - \ln(x+n) + \sum_{k=0}^n \ln(x+k) \leq x \ln(n) - \ln(n) + \ln(n!)$$

ou encore

$$f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \leq f_n(x)$$

Toujours par convexité de  $f$ ,

$$\ln(n-1) = \frac{f(n) - f(n-1)}{n - (n-1)} \leq \frac{f(n+x) - f(n)}{x}$$

ou encore

$$x \ln(n-1) + f(n) \leq f(n+x)$$

ce qui équivaut à

$$x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + x \ln(n) + f(n) \leq f(n+x)$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient

$$f_n(x) \leq f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) - x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Finalement

$$f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \leq f_n(x) \leq f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) - x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

On procède par récurrence, et on note  $\mathcal{P}_p$  l'assertion

$$\forall x \in ]p, p+1], \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

On vient de montrer que  $\mathcal{P}_0$  est vraie. Supposons qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_p$  est vraie. Donnons-nous alors  $x \in ]p, p+1]$  et remarquons que

$$f_n(x+1) - f_n(x) = \ln(x) - \ln\left(\frac{x+n+1}{n}\right)$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x+1) = f(x) + \ln(x) = f(x+1)$$

Ceci prouve que  $\mathcal{P}_{p+1}$  est vraie. Par récurrence,  $\mathcal{P}_p$  est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}$  ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

## Solution 65

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $|u_n(x)| \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$ . La série  $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$  converge en tant que série exponentielle. La série  $\sum |u_n(x)|$  converge donc par majoration. La série  $\sum u_n(x)$  converge donc (absolument). On en déduit que  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .
2. D'après la question précédente,  $\|u_n\|_\infty \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$ . A nouveau, la série  $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$  donc la série  $\sum \|u_n\|_\infty$  converge par majoration. La série  $\sum u_n$  converge donc normalement sur  $\mathbb{R}$  et donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ .
3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $v_n(x) = \frac{\alpha^n e^{inx}}{n!} = \frac{(\alpha e^{ix})^n}{n!}$ . La série  $\sum v_n(x)$  est une série exponentielle. Elle converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = e^{\alpha e^{ix}} = e^{\alpha \cos x} e^{i\alpha \sin x}$$

Ainsi

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(v_n(x)) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \right) = e^{\alpha \cos x} \cos(\alpha \sin x)$$

4. a. Fixons  $n \in \mathbb{N}$ .

Remarquons que les fonctions  $u_n$  sont paires et donc  $C$  également. Par conséquent,  $x \mapsto \sin(nx) \cos(nx)$  est impaire et  $J_n = 0$ .

Posons ensuite  $w_k(x) = \cos(nx)u_k(x)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Il est clair que  $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k(x) = \cos(nx)C(x)$ . De plus,  $\|w_k\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$  donc  $\sum w_k$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  et donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $\sum w_k$  converge uniformément sur le segment  $[-\pi, \pi]$ . Enfin, les  $w_k$  sont bien continues sur  $[-\pi, \pi]$ . On peut donc affirmer que

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} w_k(x) \, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) \, dx$$

D'après l'indication de l'énoncé

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) \, dx = \frac{\alpha^k}{2k!} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)) \, dx$$

On en déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n = 0 \\ \frac{\pi \alpha^n}{n!} & \text{si } k = n \neq 0 \end{cases}$$

Par conséquent,  $I_0 = 2\pi$  et  $I_n = \frac{\pi \alpha^n}{n!}$  si  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- b. On en déduit immédiatement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

5. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Remarquons que  $\cos^2(nx) = \frac{1 + \cos(2nx)}{2}$  de sorte que

$$\frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{1}{2} \cdot u_n(2x)$$

Or les séries  $\sum \frac{\alpha^n}{n!}$  et  $\sum u_n(2x)$  convergent donc  $\sum \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$  converge également. Ainsi  $S$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(2x) = \frac{e^\alpha}{2} + \frac{1}{2} C(2x) = \frac{e^\alpha}{2} + \frac{1}{2} e^{\alpha \cos 2x} \cos(\alpha \sin(2x))$$

## Solution 66



1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées.
2. Posons  $f_n : \mapsto (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ . Alors  $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \frac{1}{n+1}$  donc la série  $\sum f_n$  ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}_+$ . Néanmoins, en vertu du critère spécial des séries alternées et en notant  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \|f_{n+1}\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \frac{1}{n+2}$$

donc  $(R_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle. Par conséquent,  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. Les fonctions  $f_n$  étant continues sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\sum f_n$  convergeant uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

Par ailleurs,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \delta_{n,0}$  donc d'après le théorème de la double limite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 1$ .

4. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions  $x \mapsto \lambda e^x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche une solution particulière de la forme  $x \mapsto \lambda(x)e^x$  avec  $\lambda$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  ce qui donne  $\lambda'(x)e^x = -\frac{e^x}{e^x + 1}$  ou encore  $\lambda'(x) = -\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ . On peut donc choisir,  $\lambda(x) = \ln(1 + e^{-x})$ . Les solutions sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + \ln(1 + e^{-x})e^x$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

5. Remarquons que les  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que  $f'_n(x) = -(-1)^n \frac{ne^{-nx}}{n+1}$ . Soit  $a > 0$ . Alors  $\|f'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = \frac{ne^{-na}}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum f'_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $[a, +\infty[$ . Ainsi  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{ne^{-nx}}{n+1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nx} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} = -\frac{1}{1 + e^{-x}} + S(x) = -\frac{e^x}{e^x + 1} + S(x)$$

Ainsi  $S$  est solution de l'équation différentielle de la question précédente sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x) = \lambda e^x + \ln(1 + e^{-x})e^x$$

Or  $\ln(1 + e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x})e^x = 1$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S = 1$ , on a alors  $\lambda = 0$ . Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x) = \ln(1 + e^{-x})e^x$$

Par continuité de  $S$  et  $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})e^x$  sur  $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(x) = \ln(1 + e^{-x})e^x$$

## Solution 67

1. Si  $x > 0$ ,  $v_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1/n^2)$  par croissances comparées donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n(x)$  converge.
- Si  $x < 0$ , alors  $v_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$  donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n(x)$  diverge grossièrement.
- Enfin,  $v_n(0) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n(0)$  diverge grossièrement.
- Finalement, le domaine de définition de  $S$  est  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $v_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $v'_n(x) = (\ln(n) - n)v_n(x) \leq 0$  donc  $v_n$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
 Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [a, +\infty[$ ,  $0 \leq v_n(x) \leq v_n(a)$  donc  $\|v_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq v_n(a)$ . D'après la première question,  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n(a)$  converge donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  converge normalement et a fortiori uniformément sur  $[a, +\infty[$ .  
 Par conséquent,  $S$  est continue sur  $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} [a, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$ .
3. Fixons  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $v_n(x) = e^{(\ln(n)-n)x}$  et  $\ln(n) - n < 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ . Par théorème de la double limite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = 0$ .
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{0^+} v_n = 1$ . Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  convergerait uniformément sur  $]0, +\infty[$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1$  convergerait, ce qui est évidemment faux. Ainsi  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  ne converge pas uniformément sur  $]0, +\infty[$ .
5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, v'_n(x) = (\ln(n) - n)v_n(x)$$

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on obtient par décroissance de  $v_n$ ,

$$|v'_n(x)| = (n - \ln(n))v_n(x) \leq nv_n(x) \leq nv_n(a) = n^{a+1}e^{-na}$$

A nouveau,  $n^{a+1}e^{-na} = o(1/n^2)$  par croissances comparées, ce qui permet de conclure que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v'_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $[a, +\infty[$ . On en déduit que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} [a, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$ .

## Solution 68

1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La suite  $((-1)^n u_n(x))$  est décroissante de limite nulle. La série  $\sum u_n(x)$  converge donc en vertu du critère spécial des séries alternées. Ainsi  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
 Montrons que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Posons  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . En vertu du critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que  $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} \leq \frac{1}{n+1}$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = 0$ . Ceci signifie que  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par théorème de transfert,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Remarquons que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x+1) = \frac{1}{x} - f(x+1)$$

Comme  $f$  est continue en 1, on peut écrire  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{x} - f(1) + o(1)$ . A fortiori,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ .  
 Remarquons maintenant que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}(x)$$

donc

$$2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) + u_{n+1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)(x+n+1)}$$

Posons  $v_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{(x+n)(x+n+1)}$ . On peut montrer comme précédemment que  $\sum v_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$  grâce au critère spécial des séries alternées. Mais encore plus simplement,  $\|v_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$  donc  $\sum v_n$  converge normalement et a fortiori uniformément sur  $[1, +\infty[$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = 0$  par théorème d'interversion série/limite. On en déduit que  $2f(x) = \frac{1}{x} + o(1)$ . A fortiori,  $f(x) \sim \frac{1}{2x}$ .

3. Remarquons que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{n+x-1} dt$$

On ne peut malheureusement pas appliquer le théorème d'interversion terme à terme. Posons donc

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k+x-1} dt$$

de sorte que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$$

Alors

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k+x-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} \cdot \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \end{aligned}$$

Or

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+x} dt = \frac{1}{n+x+1}$$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt = 0$ . On en déduit que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

### Solution 69

- La série  $\sum f_n$  converge uniformément donc simplement sur  $X$  et la suite  $(R_n)$  de ses restes converge uniformément sur  $X$  vers la fonction nulle i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty} = 0$ . Puisque  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ ,  $f_n = R_{n-1} - R_n$  puis, par inégalité triangulaire,  $\|f_n\|_{\infty} \leq \|R_{n-1}\|_{\infty} + \|R_n\|_{\infty}$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} = 0$  i.e.  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$  vers la fonction nulle.
- Supposons que la série  $\sum f_{n+1} - f_n$  converge uniformément sur  $X$ . Notons  $S$  sa somme. Alors la suite  $(S_n)$  des sommes partielles converge uniformément vers  $S$  sur  $X$ . Par télescopage,  $S_n = f_{n+1} - f_0$  donc  $\|f_n - (S + f_0)\|_{\infty} = \|S_{n-1} - S\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$  vers  $S + f_0$ .  
Réciproquement, supposons que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$ . Notons  $f$  sa limite. Dans ce cas,  $\|S_n - (f - f_0)\|_{\infty} = \|f_{n+1} - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi  $(S_n)$  converge uniformément sur  $X$  vers  $f - f_0$ . Par définition,  $\sum f_{n+1} - f_n$  converge uniformément sur  $X$ .

### Solution 70

1. Fixons  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La suite  $(e^{-\lambda_n x})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante puisque  $x > 0$ . D'après le critère spécial des séries alternées, la série  $\sum f_n(x)$  converge i.e. la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Supposons que la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Alors la suite  $(f_n)$  convergerait uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{\lambda_n} \in \mathbb{R}_+^*$  et la suite de terme général  $f_n(1/\lambda_n) = (-1)^n e^{-1}$  ne converge pas vers 0. La série  $\sum f_n$  ne converge donc pas uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. D'après le critère spécial des séries alternées

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, |S(t)| \leq e^{-\lambda_0 t}$$

Or  $t \mapsto e^{-\lambda_0 t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $S$  également.

Toujours d'après le critère des séries alternées,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \left| S(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) \right| \leq e^{-\lambda_{n+1} t}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^{+\infty} S(t) dt - \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} f_k(t) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} \left( S(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) \right) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| S(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_{n+1} t} dt$$

ou encore

$$\left| \int_0^{+\infty} S(t) dt - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\lambda_k} \right| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}}$$

On obtient alors en passant à la limite

$$\int_0^+ S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

## Solution 71

1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La suite  $\left( \frac{1}{x+n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante de limite nulle de sorte que la série  $\sum u_n(x)$  vérifie le critère spécial des séries alternées. La série  $\sum u_n(x)$  converge donc et

$$\forall x \in [a, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n}$$

La suite des restes  $\left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$  i.e. la série  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Les  $u_n$  étant continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

via le changement d'indice  $k \mapsto k-1$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . D'une part,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$$

D'autre part,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

En additionnant ces deux inégalités,

$$2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{x+k} - \frac{(-1)^k}{x+k+1} \right] = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$

4. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . A nouveau, la série  $\sum \frac{(-1)^n x}{(x+n+1)(x+n)}$  vérifie le critère spécial des séries alternées. Notamment,

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)} \right| \leq \frac{1}{(x+1)x}$$

On en déduit d'après la question précédente que

$$2f(x) - \frac{1}{x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

A fortiori

$$2f(x) - \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

5. D'après la question 2,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1)$$

Comme  $f$  est continue en 1,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{x} - f(1) + o(1)$$

A fortiori

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

6. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Tout d'abord, l'intégrale  $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$  converge puisque  $\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$  et  $x-1 > -1$ .

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Remarquons que

$$\forall t \in [0, 1], \frac{1}{1+t} = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} = \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k \right] + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt &= \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k+x-1} dt \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \\ &= \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x+k} \right] + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\forall t \in [0, 1], 0 \leq \frac{t^{n+x}}{1+t} \leq t^{n+x}$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+x} dt = \frac{1}{n+x+1}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+x} dt = 0$$

de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x+k} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

i.e.

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

## Solution 72

1. Fixons  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La suite de terme général  $\frac{1}{n+x}$  décroît vers 0 donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+x}$  converge. Ainsi  $S$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Posons  $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ . La série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, les  $u_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de dérivées  $u'_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$  vérifie à nouveau le critère des séries alternées. Cette série converge donc et on peut majorer la valeur absolue du reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u'_k(x) \right| \leq \frac{1}{(n+1+x)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Le reste converge donc uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$  i.e. la série  $\sum u'_n$  converge uniformément. Par conséquent,  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

2. Toujours d'après le critère spécial des séries alternées,  $S'(x)$  est du signe du premier terme de la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ , c'est-à-dire du signe de  $-\frac{1}{x^2}$ . Par conséquent,  $S'$  est négative sur  $\mathbb{R}_+^*$  de sorte que  $S$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Par changement d'indice

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x} = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} = \frac{1}{x} - S(x+1)$$

Comme  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , elle est a fortiori continue en 1. Ainsi  $x \mapsto S(x+1)$  admet une limite finie en 0. Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ,

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Par décroissance de  $S$ , pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,

$$S(x+1) \leq S(x) \leq S(x-1)$$

puis

$$S(x+1) + S(x) \leq 2S(x) \leq S(x-1) + S(x)$$

ou encore

$$\frac{1}{x} \leq 2S(x) \leq \frac{1}{x-1}$$

On en déduit sans peine à l'aide du théorème des gendarmes que  $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ .

## Solution 73

1. Soit  $x \in J$ . Puisque  $x > 0$ , la suite de terme général  $\frac{1}{\sqrt{1+nx}}$  est décroissante et de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées,  $\sum f_n(x)$  converge. Ainsi  $\sum f_n$  converge simplement sur  $J$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|f_n\|_{\infty, J} = \sup_{x \in J} \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la série  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  est une série à termes positifs divergente donc  $\sum \|f_n\|_{\infty, J}$  diverge également. Autrement dit,  $\sum f_n$  ne converge pas normalement.

3. Comme la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $J$ , il suffit de montrer que la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur  $J$ . Posons  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ . D'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in J, |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Ainsi

$$\|R_n\|_{\infty, J} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, J} = 0$  i.e.  $(R_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $J$ . Par conséquent,  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $J$ .

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0 = 1$ . Comme  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $J = [1, +\infty[$ , on peut utiliser le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n = 1$$

5. a. Il s'agit à nouveau du critère spécial des séries alternées.  
b. Remarquons que

$$\forall x \in J, \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right)$$

De plus,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| = \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{\sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{(\sqrt{1+nx} + \sqrt{nx})\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in J, \left| \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{K}{x^{3/2}}$$

en posant  $K = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ . On en déduit bien que

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

## Intégrales à paramètres

### Solution 74

1. Soit  $x \in \pi\mathbb{Z}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = 0$ .  
Soit maintenant  $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . Alors  $|\cos x| < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cos^n x = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .  
Finalement la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle.
2. Posons  $x_n = \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .  
D'une part,  $n \sin(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . D'autre part,  $\cos^n(x_n) = e^{n \ln(\cos(1/n))}$  et

$$\ln(\cos(1/n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(1 + o(1/n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1/n)$$

de sorte que  $\cos^n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

Finalement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = 1 \neq 0$  donc la suite  $(f_n)$  ne converge pas uniformément.

Soit maintenant  $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Alors pour tout  $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$|f_n(x)| \leq n \cos^n(a) \sin(a)$$

donc

$$|f_n|_\infty \leq n \cos^n(a) \sin(a)$$

(c'est même une égalité) donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n| = 0$  puisque  $0 \leq \cos a < 1$ . Ainsi  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ .

### 3. Méthode n°1

Remarquons tout d'abord que  $f_n$  est positive et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt = -\frac{n}{n+1} [\cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1}$$

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Comme  $g$  est continue en 0, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $|g(x) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $x \in [0, \alpha]$ . Ensuite,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)| dt \\ &\leq \int_0^\alpha f_n(t)|g(t) - g(0)| dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)| dt \\ &\leq \int_0^\alpha f_n(t)\varepsilon dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\varepsilon dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty dt \\ &\leq \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} + \|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt \end{aligned}$$

Comme  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment  $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt = 0$ . Il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel

que pour tout entier  $n \geq N$ ,  $\|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt \leq \varepsilon$ . On en déduit que pour  $n \geq N$ ,

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt = 0$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0) dt = \frac{ng(0)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(0)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt = g(0)$$



**Méthode n°2**

L'application  $t \mapsto \cos^{n+1} t$  est bijective de  $[0, \pi/2]$  sur  $[0, 1]$ , strictement décroissante et de classe  $\mathcal{C}^1$  donc, par changement de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt = \frac{n}{n+1} \int_0^1 f(\arccos(\sqrt[n+1]{u})) du$$

La fonction  $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$  converge simplement sur  $]0, 1]$  vers la fonction constante égale à  $f(0)$  car  $f$  est continue en 0. De plus,  $f$  est bornée  $[0, 1]$  donc  $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$  est dominée par une constante (clairement intégrable sur le segment  $[0, 1]$ ). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(\sqrt[n+1]{u}) du = \int_0^1 f(0) du = f(0)$$

On en conclut immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt = g(0)$$

**Solution 75**

On pose  $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$  dans la suite.

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{3n}}$  donc  $f_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $u_n$  est bien définie.

La fonction  $f_0$  est constante égale à 1. Elle n'est évidemment pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $u_0$  n'est pas définie.

2. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n| = f_n \leq f_1$  et  $f_1$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $(u_n)$  converge vers 0 d'après le théorème de convergence dominée.

3. La suite  $(f_n)$  est décroissante donc la suite  $(u_n)$  l'est aussi. De plus  $(u_n)$  converge vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge.

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$-\frac{1}{2+t^3} = \frac{-\frac{1}{1+t^3}}{1 + \frac{1}{1+t^3}} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(1+t^3)^k} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+t^3)^{n+1}} \frac{1}{1 + \frac{1}{1+t^3}}$$

Ainsi

$$\left| \int_0^{+\infty} -\frac{dt}{2+t^3} - \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| -\frac{1}{2+t^3} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(1+t^3)^k} \right| dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{1+t^3}} \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}} dt \leq u_{n+1}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$ , on en déduit que

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k = - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^3}$$

4. On effectue d'abord le changement de variable  $u = t/\sqrt[3]{2}$ . Alors

$$S = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$$

On décompose en éléments simples : il existe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$F(X) = \frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2-X+1}$$

Alors  $\alpha = ((X+1)F(X))(-1) = \frac{1}{3}$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0 = \alpha + \beta$  donc  $\beta = -\frac{1}{3}$ . Enfin,  $F(0) = \alpha + \gamma = 1$  donc  $\gamma = \frac{2}{3}$ . Ainsi

$$F(X) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{X+1} - \frac{X-2}{X^2-X+1} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{X+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2X-1}{X^2-X+1} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(X-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} = \frac{1}{3} \left[ \ln \left( \frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}} \right) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \arctan \left( \frac{2u-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty}$$

Or  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}} = 1$  (utiliser un équivalent) donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Finalement,  $S = \frac{\pi^3 \sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ .

### Solution 76

Remarquons que l'intégrale définissant  $a_n$  est bien définie puisque  $f(t) \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{=} \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$  et  $f(t) \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-nt})$  car  $f$  est bornée.

Par le changement de variable  $u = nt$ ,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} f(u/n) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

La suite de fonctionz de terme général  $g_n : u \mapsto f(u/n) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$  converge simplement vers  $u \mapsto f(0) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $f$  est continue en 0. De plus, comme  $f$  est bornée, il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in \mathbb{R}_+^*, |g_n(u)| \leq M \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$$

Or  $\varphi : u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$  est bien intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  ( $\varphi(u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} 1/\sqrt{u}$  et  $\varphi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-u})$ ) donc, par théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} g_n(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(0) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

On en déduit que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

**REMARQUE.** On peut préciser que par le changement de variable  $t = \sqrt{u}$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

### Solution 77

Posons  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t) dt}{1+t^2}$  et  $G(x) = \int_0^x \frac{\ln(t) dt}{t^2-1}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

Remarquons déjà que l'intégrale définissant  $F(x)$  est bien définie. Tout d'abord,  $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(t)$  donc  $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$  est intégrable au voisinage de  $0^+$ . On va maintenant justifier que  $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$  est prolongeable par continuité en 1, pour justifier l'existence de  $G(x)$  pour  $x > 1$ . En effet,

$$\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{t-1}{t^2-1} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{t+1} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2}$$

Finalement  $G$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et le théorème fondamental de l'analyse montre alors que  $G'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  et que  $G'(1) = \frac{1}{2}$ .

Ensuite, nous allons montrer que  $G$  est continue en 0. En effet, puisque  $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln(t)$  et que l'intégrale définissant  $G(x)$  converge,  $G(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\int_0^x \ln(t) dt$ . Or  $\int_0^x \ln(t) dt = x \ln x - x \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$  de sorte que  $\lim_0 G = 0 = G(0)$ .

On va ensuite montrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Posons  $u(x, t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$  pour  $(x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors

- pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \mapsto u(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$  et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $u(x, t) = o(1/t^2)$  et  $u(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ ;
- pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto u(x, t)$  est continue sur  $[a, +\infty[$ ;
- pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \mapsto u(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ ;
- pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ ,

$$|u(x, t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2}$$

- la fonction  $t \mapsto \frac{\pi/2}{1+t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  (continue sur  $\mathbb{R}_+$  et équivalente à  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  en  $+\infty$ ).

On peut donc affirmer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

On va maintenant montrer que  $F$  est également dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer sa dérivée.

- pour tout  $x \in [a, +\infty[$ ,  $t \mapsto u(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$  et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $u(x, t) = o(1/t^2)$  et  $u(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ ;
- $u$  admet une dérivée par rapport à sa première variable sur  $[a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(t^2 + x^2)(1 + t^2)}$$

- pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto u(x, t)$  est continue sur  $[a, +\infty[$ ;
- pour tout  $x \in [a, +\infty[$ ,  $t \mapsto u(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ ;
- pour tout  $(x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(t^2 + a^2)(1 + t^2)}$$

- la fonction  $t \mapsto \frac{t}{(t^2 + a^2)(1 + t^2)}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  (continue sur  $\mathbb{R}_+$  et équivalente à  $t \mapsto \frac{1}{t^3}$  en  $+\infty$ ).

On peut donc affirmer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(t^2 + x^2)(1 + t^2)}$$

A l'aide d'une décomposition en éléments simples, pour  $x \neq 1$

$$\frac{t}{(t^2 + x^2)(1 + t^2)} = \frac{1}{1 - x^2} \left( \frac{t}{t^2 + x^2} - \frac{t}{t^2 + 1} \right)$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad F'(x) = \frac{1}{2(1 - x^2)} \left[ \ln \left( \frac{t^2 + x^2}{1 + t^2} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

Ainsi  $F'$  et  $G'$  coïncident sur  $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  et comme elles sont continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ , elles coïncident sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent,  $F$  et  $G$  sont égales à une constante près sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Enfin,  $\lim_0 F = F(0) = 0$  puisqu'on a montré que  $F$  était continue sur  $\mathbb{R}_+$  et donc en 0 et  $\lim_0 G = 0$ . La constante en question est donc nulle :  $F$  et  $G$  coïncident donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Solution 78

1. La linéarité de  $R$  provient de la linéarité de l'intégration. La linéarité de  $S$  provient de la linéarité de l'intégration et de la dérivation. Soit  $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . Fixons  $a \in \mathbb{R}_+$ . L'application  $x \mapsto h(x \sin t)$  est clairement continue sur  $[0, a]$  pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et l'application  $t \mapsto h(x \sin t)$  est clairement continue par morceaux (et même continue) sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  pour tout  $x \in [0, a]$ . De plus  $h$  étant continue sur le segment  $[0, a]$ , elle est bornée sur  $[0, a]$ . Il existe donc  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall (x, t) \in [0, a] \times [0, \frac{\pi}{2}], |h(x \sin t)| \leq M$$

La fonction constante égale à  $M$  étant clairement intégrable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $R(h)$  est continue sur  $[0, a]$  et, par suite sur  $\mathbb{R}_+$ .

Soit  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . Remarquons que  $S(g)(x) = g(0) + xR(g')(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ . Comme  $g'$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , ce qui précède montre que  $R(g')$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et donc  $S(g)$  également.

2. On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) \sin(t) \, dt \\ &= \left[ -\sin^{n+1}(t) \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos^2(t) \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) (1 - \sin^2(t)) \, dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ .

3. La relation précédente montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$ . La suite de terme général  $(n+1)W_{n+1}W_n$  est donc constante égale à son premier terme  $W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$ .

Posons  $f_n : x \mapsto x^n$ . Un calcul évident montre que  $R(f_0) = f_0$  et que  $S(f_0) = f_0$ , ainsi  $S \circ R(f_0) = f_0$ . Soit maintenant  $n \in \mathbb{N}^*$ . Un calcul non moins évident montre que  $R(f_n) = \frac{2}{\pi} W_n f_n$  et  $S(f_n) = n W_{n-1} f_n$ . Ainsi  $S \circ R(f_n) = n W_n W_{n-1} \frac{2}{\pi} f_n = f_n$  puisque  $n W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ . Comme toute fonction polynomiale est combinaison linéaire des  $f_n$ , on obtient par linéarité de  $S \circ R$ ,  $S \circ R(P) = P$  pour tout polynôme  $P$ .

4. Soit  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . Montrons que  $R(g)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . Pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $x \mapsto g(x \sin t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, a]$  de dérivée  $x \mapsto \sin(t)g'(x \sin t)$ . Pour tout  $x \in [0, a]$ ,  $t \mapsto g(x \sin t)$  et  $t \mapsto \sin(t)g'(x \sin t)$  sont continues par morceaux (et même continues) sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Enfin,  $g'$  est continue sur le segment  $[0, a]$ , elle y est bornée. Il existe donc  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall (x, t) \in [0, a] \times [0, \frac{\pi}{2}], |\sin(t)g'(x \sin t)| \leq M \sin(t)$$

Comme  $t \mapsto \sin(t)$  est clairement intégrable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , on peut conclure que  $R(g)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, a]$  et par suite sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, R(g)'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)g'(x \sin t) \, dt$$

Fixons  $x \in \mathbb{R}_+$ . On notera  $\|\cdot\|_{[0,x]}$  la norme uniforme sur  $[0, x]$ . Par inégalité triangulaire

$$|S \circ R(g)(x)| \leq |R(g)(0)| + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} |R(g)'(x \sin t)| \, dt \leq |R(g)(0)| + x \frac{\pi}{2} \|R(g)'\|_{[0,x]}$$

Mais pour tout  $y \in [0, x]$

$$|R(g)'(y)| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)g'(y \sin t) \, dt \right| \leq \frac{2}{\pi} \|g'\|_{[0,x]} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \frac{2}{\pi} \|g'\|_{[0,x]}$$

Ainsi

$$\|R(g)'\|_{[0,x]} \leq \frac{2}{\pi} \|g'\|_{[0,x]}$$

puis

$$|S \circ R(g)(x)| \leq |g(0)| + x \|g'\|_{[0,x]}$$

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(Q_n)$  de polynômes convergeant uniformément vers  $g'$  sur  $[0, x]$ . On pose alors  $P_n(x) = g(0) + \int_0^x Q_n(t) dt$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ . La suite  $(P_n)$  est également une suite de polynômes. On peut appliquer l'inégalité précédente à  $g - P_n$ , ce qui donne

$$|S \circ R(g - P_n)(x)| \leq |(g - P_n)(0)| + x \|(g - P_n)'\|_{[0,x]}$$

ou encore, par linéarité de  $S \circ R$ , de l'évaluation en 0 et de la dérivation

$$|S \circ R(g) - S \circ R(P_n)(x)| \leq |g(0) - P_n(0)| + x \|g' - P_n'\|_{[0,x]}$$

et finalement

$$|S \circ R(g) - P_n(x)| \leq x \|g' - Q_n\|_{[0,x]}$$

car  $S \circ R(P_n) = P_n$  d'après la question précédente et car  $P_n' = Q_n$  et  $P_n(0) = g(0)$  par construction des  $P_n$ . Puisque  $(Q_n)$  converge uniformément vers  $g'$  sur  $[0, x]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g' - Q_n\|_{[0,x]} = 0$ . Ceci montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = S \circ R(g)(x)$$

Enfin comme  $Q_n$  converge uniformément vers  $g'$  sur  $[0, x]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = g(0) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x Q_n(t) dt = g(0) + \int_0^x g'(t) dt = g(x)$$

Par unicité de la limite,  $S \circ R(g)(x) = g(x)$ . Ceci étant valable pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $S \circ R(g) = g$ .

### Solution 79

1. Posons  $f(x, t) = \frac{e^{-tx}}{t+1}$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x, t) = o(1/t^2)$  donc  $x \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-tx}}{t+1}$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Donnons-nous  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-ta}$$

et  $t \mapsto e^{-ta}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Ainsi  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$  donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{t+1} dt$$

Notamment

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -g'(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

3. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Effectuons le changement de variable  $u = xt$  :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u+x} du = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 + \frac{u}{x}} du$$

De plus,

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{1 + \frac{u}{x}} = e^{-u}$$

et

$$\forall (u, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \left| \frac{e^{-u}}{1 + \frac{u}{x}} \right| \leq e^{-u}$$

Comme  $u \mapsto e^{-u}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , on peut appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 + \frac{u}{x}} du = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$$

On en déduit que  $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ .

**REMARQUE.** On peut aussi intégrer par parties pour  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} xg(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-tx}}{1+t} dt \\ &= - \left[ \frac{e^{-tx}}{1+t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2} dt \\ &= 1 - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2} dt \end{aligned}$$

Or pour tout  $x > 0$ ,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2} dt = 0$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) = 1$$

ou encore

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

## Solution 80

1. Tout d'abord,  $F$  est clairement paire puisque  $\cos$  l'est.

Posons  $f : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x, t) = \frac{x^2}{2}$  car  $\cos u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ . Ainsi  $t \mapsto f(x, t)$  est prolongeable par continuité en 0. Par ailleurs, comme  $\cos$  est bornée,  $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{e^{-t}}{t^2}\right)$ . A fortiori,  $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  donc  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ . Ainsi  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $F(x)$  est bien défini. La fonction  $F$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. Puisque  $|\sin'| = |\cos| \leq 1$ ,  $\sin$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  en vertu du théorème des accroissements finis. Notamment, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin(u) - \sin(0)| \leq |u - 0|$  i.e.  $|\sin u| \leq |u|$ .

3. Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \cos(xt)e^{-t}$ . De plus,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = |\cos(xt)e^{-t}| \leq e^{-t}$$

et  $t \mapsto e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent,  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$$

On peut remarquer que  $F''(x)$  est la partie réelle de

$$\int_0^{+\infty} e^{ixt} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$$

Ainsi  $F''(x) = \frac{1}{1+x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**REMARQUE.** On aurait aussi pu procéder à une double intégration par parties.

Remarquons que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

En particulier,  $F'(0) = 0$ .

**REMARQUE.** On aurait aussi pu remarquer que  $F$  étant paire,  $F'$  est impaire et donc  $F'(0) = 0$ .

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \arctan x + F'(0) = \arctan(x)$$

Enfin, on a clairement  $F(0) = 0$  et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, F(x) &= F(0) + \int_0^x \arctan(t) dt \\ &= [t \arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t dt}{1+t^2} \quad \text{par intégration par parties} \\ &= x \arctan x - \left[ \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^x \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

## Solution 81

1.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  d'après le théorème fondamental de l'analyse. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x^2}$$

Posons  $\varphi : (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $x \mapsto \varphi(x, t)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ .

$$\forall (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2$$

et  $t \mapsto 2$  est évidemment intégrable sur  $[0, 1]$ . Ainsi  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$$

On en déduit que  $f^2 + g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in [0, 1], (f^2 + g)'(x) = 2f'(x)f(x) + g'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$$

En effectuant le changement de variable  $u = tx$ ,

$$x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = \int_0^x e^{-x^2} e^{-u^2} du = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Par conséquent,  $(f^2 + g)'$  est nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  de sorte que  $f^2 + g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ . Enfin,

$$(f^2 + g)(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

donc  $f^2 + g$  est constante égale à  $\frac{\pi}{4}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Il est clair que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1], 0 \leq \varphi(x, t) \leq e^{-x^2}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$$

On en déduit que  $\lim_{+\infty} g = 0$ . On en déduit que  $\lim_{+\infty} f^2 = \frac{\pi}{4}$ . Comme  $f$  est clairement à valeurs positives sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\lim_{+\infty} f = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Autrement dit,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

## Solution 82

Dans la suite, on pose  $\varphi(x, t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ .

1. a.
  - Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
  - Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .
  - Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $|\varphi(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$  et  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  (c'est la dérivée de  $\arctan$  qui admet une limite finie en  $+\infty$ ).

Ainsi  $f$  est continue (et a fortiori définie) sur  $\mathbb{R}_+$ .

b. Fixons  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

- Pour tout  $x \in [a, +\infty[$ ,  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  d'après la domination précédente.
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto \varphi(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$ .
- Pour tout  $(x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| = \left| -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \right| = \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq e^{-xt^2} \leq e^{-at^2}$$

et  $t \mapsto e^{-at^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  ( $e^{-at^2} = o(1/t^2)$ ).

Par conséquent,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a > 0$  et donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. a. On peut de plus affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2} e^{-xt^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = f(x) - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$$

Via le changement de variable  $u = t\sqrt{x}$ ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

d'après le résultat admis. Ainsi  $f$  est bien solution de l'équation différentielle  $y' - y = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ .



- b. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions  $x \mapsto \lambda e^x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche une solution particulière de (E) de la forme  $x \mapsto \varphi(x)e^x$  avec  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  (variation de la constante). On aboutit à  $\varphi'(x)e^x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$  ou encore  $\varphi'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ . Comme  $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$  est intégrable au voisinage de  $0^+$  et on peut donc choisir  $\varphi(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ . Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \lambda e^x - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Comme  $f$  est continue en 0 et comme  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{\pi}{2} e^x - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

On peut éventuellement rajouter que par le changement de variable  $u = \sqrt{t}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} e^x - \sqrt{\pi} e^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du$$

Et comme  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\pi} e^x \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

**REMARQUE.** Cette expression finale n'est pas forcément «meilleure» que l'expression initiale...

### Solution 83

- Posons  $f(x, t) = \ln(t)e^{-xt}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue (par morceaux) sur  $]0, +\infty[$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1/\sqrt{t})$  donc  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable en  $0^+$ . Si  $x > 0$ , alors  $\ln(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/t^2)$  par croissances comparées donc  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable en  $+\infty$ . Si  $x \leq 0$ , alors  $1 \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(f(x, t))$ . Or  $t \mapsto 1$  n'est pas intégrable en  $+\infty$  donc  $t \mapsto f(x, t)$  non plus. Comme  $t \mapsto f(x, t)$  est positive au voisinage de  $+\infty$ , l'intégrale définissant  $F(x)$  diverge en  $+\infty$ . En conclusion le domaine de définition de  $F$  est  $\mathbb{R}_+^*$ .

- On vérifie le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t \ln(t)e^{-xt}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $(x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq t |\ln t| e^{-at} = \varphi(t)$$

Or  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$  et, par croissances comparées,  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/t^2)$  donc  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On en déduit que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} [a, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$ .

3. De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} t \ln(t) e^{-xt} dt$$

On procède à une intégration par parties.

$$F'(x) = \frac{1}{x} [t \ln(t) e^{-xt}]_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} (\ln(t) + 1) e^{-xt} dt = -\frac{1}{x} F(x) - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = -\frac{1}{x} F(x) - \frac{1}{x^2}$$

Ainsi  $F$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle  $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$ . L'ensemble des solutions de l'équation homogène est  $\text{vect}(x \mapsto 1/x)$ . Par variation de la constante, une solution particulière de l'équation avec second membre est  $x \mapsto -\frac{\ln(x)}{x}$ . L'ensemble des solutions de l'équations avec second membre est donc  $(x \mapsto -\frac{\ln(x)}{x}) + \text{vect}(x \mapsto 1/x)$ .

**REMARQUE.** En effectuant le changement de variable  $u = xt$ , on obtient bien

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{F(1)}{x}$$

On peut montrer que  $F(1) = -\gamma$  où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler.

## Solution 84

Posons  $\varphi(x, t) = e^{-t} \text{sh}(x\sqrt{t})$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

1. Remarquons tout d'abord que  $f$  est impaire. Soit alors  $x \in \mathbb{R}_+$ . On prouve aisément que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/2} \text{sh}(x\sqrt{t}) = 0$  donc  $\varphi(x, t) = o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$ . A fortiori  $\varphi(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . Par conséquent,  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  et finalement sur  $\mathbb{R}$  par imparité.

2. Rappelons que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \text{sh } u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On en déduit que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1} e^{-t} t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}$$

Il s'agit maintenant d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!} dt$$

Par intégration par parties,

$$I_n = \frac{1}{4n} I_{n-1}$$

Il s'ensuit que

$$I_n = \frac{1}{4^n n!} I_0$$

et à l'aide d'une dernière intégration par parties

$$I_0 = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On en déduit que

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!}$$

Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum \int_0^{+\infty} \left| \frac{x^{2n+1} e^{-t} t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!} \right| dt$  i.e. la série  $\sum I_n x^{2n+1}$  converge en tant que série exponentielle. On en déduit donc via le théorème d'intégration terme à terme que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^{2n+1}$$

3. On peut enfin rajouter que

$$I_n = \frac{x\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!} = \frac{x\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{x^2}{4}}$$

### Solution 85

1. Soit  $x \in [-1, 1]$ . Pour tout  $t \in [0, 1[$

$$\frac{1-t}{1-xt^3} = (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} (xt^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-t)x^n t^{3n}$$

Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^1 |(1-t)x^n t^{3n}| dt = \int_0^1 (1-t)x^n t^{3n} dt = x^n \left( \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

et  $\frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc la série  $\sum \int_0^1 |(1-t)x^n t^{3n}| dt$  converge. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (1-t)x^n t^{3n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

2. En prenant  $x = 1$ , on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^3} dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

### Solution 86

1. Par intégration par parties,  $I_n = nI_{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $I_0 = 1$ , on obtient aisément  $I_n = n!$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $\sum a_n$  converge (absolument), la suite  $(a_n)$  converge vers 0. A fortiori, elle est bornée. On en déduit que  $\frac{a_n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n!}\right)$ . Comme la série entière  $\sum \frac{x^n}{n!}$  est de rayon de convergence infini, il en est de même de la série  $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{a_n x^n e^{-x}}{n!} \right| dx = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = |a_n|$$

Comme la série  $\sum |a_n|$  converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n e^{-x}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n x^n e^{-x}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

### Solution 87

1. Puisque  $\ln(x) \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x \ln x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \ln(1-x) = 0$ . En posant  $u = 1-x$ ,  $\ln(x) \ln(1-x) = \ln(1-u) \ln(u)$ . Comme  $\lim_{u \rightarrow 0} \ln(1-u) \ln(u) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) \ln(1-x) = 0$ . Ainsi  $x \mapsto \ln(x) \ln(1-x)$  est prolongeable en une fonction continue sur  $[0, 1]$  donc elle est intégrable sur le segment  $[0, 1]$  : I est bien définie.

2. C'est du cours

$$\forall x \in ]-1, 1[, \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Le rayon de convergence est 1.

3. Pour  $x \in ]0, 1[$ ,

$$\ln(x) \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \ln(x)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \mapsto \frac{1}{n} x^n \ln(x)$  est continue sur  $]0, 1[$  et prolongeable en une fonction continue sur  $[0, 1]$ , elle est donc intégrable sur  $[0, 1]$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \mapsto -\frac{x^n}{n} \ln(x)$  est positive sur  $]0, 1[$ . On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme positif :

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n$$

où  $I_n = -\int_0^1 x^n \ln(x) dx$ . Par intégration par parties

$$I_n = -\frac{1}{n+1} [x^{n+1} \ln(x)]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{(n+1)^2}$$

L'intégration par parties est légitimée par le fait que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{n+1} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^{n+1} \ln(x) = 0$ .

Ainsi

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

4. On procède à une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Comme la série télescopique  $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  et la série de Riemann converge,

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

## Solution 88

1. Posons  $\varphi(t) = \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$ .  $\varphi$  est continue sur  $]0, 1[$ .

De plus,  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(t)$  donc  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ .

Par ailleurs,  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (t-1) \ln(1-t)$  donc  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi(t) = 0$ .

Tout ceci montre que  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, 1[$  donc l'intégrale I converge.

2. Pour  $t \in ]0, 1[$ ,

$$\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{t^n}{n}$$

donc

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$$

avec

$$u_n(t) = -\frac{\ln(t)t^{n-1}}{n}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $u_n(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ ,  $u_n$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . De plus,  $u_n$  est positive sur  $]0, 1]$  donc on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme positif

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 u_n(t) dt = -\frac{1}{n} \int_0^1 \ln(t)t^{n-1} dt = -\frac{1}{n^2} [\ln(t)t^n]_0^1 + \frac{1}{n^2} \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n^3}$$

Ainsi

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

On peut confirmer avec Python.

```
>>> from numpy import log
>>> from scipy.integrate import quad
>>> quad(lambda t: log(t)*log(1-t)/t, 0, 1)[0]
1.2020569031596005
>>> sum([1/n**3 for n in range(1, 1001)])
1.2020564036593442
```

### Solution 89

1. Remarquons que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq 1$  donc  $0 \leq a_n \leq 1$ . On en déduit que  $R \geq 1$ .
2. Si les  $u_n$  sont continues par morceaux sur le segment  $[a, b]$  et si la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$ , alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt$$

3. Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Posons  $u_n : t \in [0, 1] \mapsto \frac{(xt)^n}{1+t}$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$|u_n(t)| = \frac{|x|^n t^n}{1+t} \leq |x|^n$$

et la série  $\sum |x|^n$  converge donc  $\sum u_n$  converge normalement sur  $[0, 1]$ . Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt)^n}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(1-xt)} dt$$

Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{(1+t)(1-xt)} = \frac{1}{1+x} \left( \frac{1}{1+t} + \frac{x}{1-xt} \right)$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x} \left( [\ln(1+t)]_0^1 - [\ln(1-xt)]_0^1 \right) = \frac{\ln(2) - \ln(1-x)}{1+x}$$

**REMARQUE.** On peut en fait faire différemment de ce qui est suggéré par l'énoncé. En effet, on remarque que

$$a_n + a_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t} dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi pour  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Donc, en notant  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et en remarquant que  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$  est la primitive nulle en 0 de  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ , on obtient

$$xf(x) + f(x) - a_0 = -\ln(1-x)$$

et donc

$$f(x) = \frac{\ln(2) - \ln(1-x)}{1+x}$$

puisque  $a_0 = \ln(2)$ .

### Solution 90

1.  $f$  est clairement continue sur  $]0, 1]$ . De plus,  $f \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} (\ln x)^2$ . Par croissances comparées,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Comme  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ , il en est de même de  $f$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  est clairement continue sur  $]0, 1]$ . Comme  $u_0(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} (\ln x)^2$ , on conclut comme à la question précédente que  $u_0$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{0^+} u_n = 0$  donc  $u_n$  est prolongeable en une fonction continue sur le segment  $[0, 1]$  : elle est donc intégrable sur  $]0, 1]$ . Posons  $I_n = \int_0^1 u_n(x) dx$ . Comme  $x \mapsto x^{2n+1} \ln(x)^2$  admet une limite nulle en  $0^+$ , on peut intégrer par parties :

$$I_n = \frac{1}{2n+1} [x^{2n+1} (\ln x)^2]_0^1 - \frac{2}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} \ln(x) dx = -\frac{2}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} \ln(x) dx$$

A nouveau,  $x \mapsto x^{2n+1} \ln(x)$  admet une limite nulle en  $0^+$  donc on peut à nouveau intégrer par parties :

$$I_n = -\frac{2}{2n+1} \left( \frac{1}{2n+1} [x^{2n+1} \ln(x)]_0^1 - \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dx \right) = \frac{2}{(2n+1)^2} \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{2}{(2n+1)^3}$$

3. Remarquons que pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$$

Remarquons que  $u_n$  est positive sur  $[0, 1]$  de sorte que  $|(-1)^n u_n| = u_n$ . On a vu que  $u_n$  était intégrable sur  $]0, 1]$  et que  $I_n = \int_0^1 u_n(x) dx = \frac{2}{(2n+1)^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ . Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\sum I_n$  converge également. D'après le théorème d'intégration terme à terme,  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et  $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^3}$ .

4. Notons  $S_n$  et  $R_n$  la somme partielle et le reste de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ . Cette série vérifie de manière évidente le critère spécial des séries alternées donc

$$|I - S_n| = |R_n| \leq \frac{2}{(2(n+1)+1)^3} = \frac{2}{(2n+3)^3}$$

Pour que  $S_n$  soit une valeur approchée de  $I$  à  $\varepsilon$  près, il suffit donc de choisir  $n$  tel que  $\frac{2}{(2n+3)^3} \leq \varepsilon$  i.e.  $2n+3 \geq \sqrt[3]{2/\varepsilon}$  ou encore  $n \geq \frac{1}{2} (\sqrt[3]{2/\varepsilon} - 3)$ .

```

>>> from scipy.integrate import quad
>>> from numpy import log, ceil, abs
>>> I=quad(lambda x:log(x)**2/(1+x**2),0,1)[0]
>>> def valeur(eps):
...     n=int(ceil(((2/eps)**(1/3)-3)/2))
...     return sum([2*(-1)**k/(2*k+1)**3 for k in range(n+1)])
...
>>> for eps in (.1,.01,.001,.0001,.00001):
...     abs(I-valeur(eps))
...
np.float64(0.06210770748126082)
np.float64(0.004033633407186654)
np.float64(0.0005564157597381936)
np.float64(4.5210712852350454e-05)
np.float64(5.1161537582000705e-06)

```

### Solution 91

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Tout d'abord,  $f_n$  est continue (par morceaux) sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$  et  $x \mapsto e^{-x}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  d'après le cours. On en déduit que  $f_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et donc que  $J_n$  converge.

On peut ensuite appliquer le théorème de convergence dominée : la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction

$f: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $|f_n(x)| \leq e^{-x}$  et  $x \mapsto e^{-x}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit que

$(J_n)$  converge vers  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$ .

**REMARQUE.** On peut procéder plus simplement en remarquant que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$0 \leq J_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^n} = \frac{1}{n-1}$$

2. On remarque que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$f'_n(x) = -f_n(x) - n f_{n+1}(x)$$

En intégrant sur  $\mathbb{R}_+$ , on obtient

$$J_n + n J_{n+1} = f_n(0) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n J_{n+1} = 0$ . Ainsi  $J_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$ .

3. a. D'après la question précédente,

$$\frac{|J_{n+1}|}{|J_n|} = \frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{1}{n J_n} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de  $\sum J_n z^n$  vaut 1.

- b. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z^n f_n$  est continue par morceaux et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  puisque  $f_n$  l'est.
- $\sum z^n f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  (série géométrique) vers la fonction

$$\varphi: x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 - \frac{z}{x+1}} = \frac{(x+1)e^{-x}}{x+1-z}$$

- La fonction  $\varphi$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$I_n = \int_0^{+\infty} |z^n f_n(x)| dx = |z|^n J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(|z|^n)$$

Or  $\sum |z|^n$  converge puisque  $|z| < 1$  donc  $\sum I_n$  converge.

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n z^n = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-x}}{x+1-z} dx$$

**REMARQUE.** A nouveau, on peut raisonner de manière plus rudimentaire à l'aide de sommes partielles.

$$\sum_{k=0}^n z^k J_k = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \left(\frac{z}{x+1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z}{x+1}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-x}}{x+1-z} dx - \int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{x+1}\right)^{n+1} e^{-x} \cdot \frac{dx}{1 - \frac{z}{x+1}}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{x+1}\right)^{n+1} e^{-x} \cdot \frac{dx}{1 - \frac{z}{x+1}} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{1 - |z|} J_{n+1}$$

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^{n+1}}{1 - |z|} J_{n+1} = 0$ , ce qui permet de conclure.

## Solution 92

Posons  $\varphi(x, t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$ .

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^x}$  et  $\varphi(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$  donc l'intégrale définissant  $f$  est définie si et seulement si  $x < 1$  et  $x+1 > 1$  i.e.  $0 < x < 1$ .
2. On va d'abord modifier l'expression de  $f$  pour simplifier le raisonnement. Soit  $x \in ]0, 1[$ . D'après la relation de Chasles

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$$

En effectuant le changement de variable  $t \mapsto \frac{1}{t}$  dans la seconde intégrale :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} + \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}(1+t)}$$

Posons

$$g: x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)}$$

Alors  $g$  est définie sur  $[0, 1[$  et

$$\forall x \in ]0, 1[, f(x) = g(x) + g(1-x)$$

On va donc étudier les limites de  $g$  en  $0^+$  et  $1^-$ .

$$g(x) = \int_0^1 \frac{(1+t) - t}{t^x(1+t)} dt = \int_0^1 t^{-x} dt - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t} dt = \frac{1}{1-x} - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t} dt$$

Par ailleurs, puisque  $1-x > 0$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t} dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$$

donc

$$g(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$$



Enfin, on vérifie aisément que  $g$  est croissante et positive donc bornée au voisinage de 0. On en déduit que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$$

et, comme  $f(x) = f(1-x)$ ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

## Réduction

### Solution 93

Déterminons dans un premier temps le noyau de  $\phi$ . Comme  $(a, b)$  est libre

$$\begin{aligned} x &\in \text{Ker } \phi \\ \Leftrightarrow \langle a | x \rangle &= \langle b | x \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow x &\in \text{vect}(a, b)^\perp \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Ker } \phi = \text{vect}(a, b)^\perp$ .

Par ailleurs, comme  $a$  et  $b$  sont unitaires,

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= (1 + \langle a | b \rangle)(a+b) \\ \phi(a-b) &= (1 - \langle a | b \rangle)(a+b) \end{aligned}$$

Ainsi si  $\langle a | b \rangle = 0$ ,

$$\text{Ker}(\phi - \text{Id}_E) = \text{vect}(a+b, a-b) = \text{vect}(a, b)$$

et sinon

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\phi - (1 + \langle a | b \rangle) \text{Id}_E) &= \text{vect}(a+b) \\ \text{Ker}(\phi - (1 - \langle a | b \rangle) \text{Id}_E) &= \text{vect}(a-b) \end{aligned}$$

Pour récapituler, 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est  $\text{vect}(a, b)^\perp$ .

Si  $\langle a | b \rangle = 0$ , 1 est valeur propre et le sous-espace propre associé est  $\text{vect}(a, b)$ .

Si  $\langle a | b \rangle \neq 0$ ,  $1 + \langle a | b \rangle$  et  $1 - \langle a | b \rangle$  sont valeurs propres et leurs sous-espaces propres associés respectifs sont  $\text{vect}(a+b)$  et  $\text{vect}(a-b)$ .

Dans tous les cas, la somme des dimensions de ces sous-espaces propres est égale à la dimension de  $E$  donc on a bien trouvé toutes les valeurs propres de  $\phi$ . On peut également en conclure que  $\phi$  est diagonalisable. On aurait aussi pu constater que  $\phi$  est un endomorphisme symétrique pour justifier qu'il était diagonalisable. En effet, pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\langle \phi(x) | y \rangle = \langle x | \phi(y) \rangle = \langle a | x \rangle \langle a | y \rangle + \langle b | x \rangle \langle b | y \rangle$$

### Solution 94

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  et  $M$  un vecteur propre associé. Alors  $M + \text{tr}(M)I_n = \lambda M$  puis en considérant la trace des deux membres,  $(n+1)\text{tr}(M) = \lambda \text{tr}(M)$ . Si  $\lambda = n+1$  ou  $\text{tr}(M) = 0$ . Si  $\text{tr}(M) = 0$  alors  $M = \lambda M$  et donc  $\lambda = 1$ . Ainsi  $\text{Sp}(u) \subset \{1, n+1\}$ .

Déterminons les sous-espaces propres associés à ces potentielles valeurs propres. Clairement, le sous-espace associé à la valeur propre 1 est l'hyperplan des matrices de traces nulles. De plus,  $I_n$  est clairement un vecteur propre associé à la valeur propre  $n+1$  donc le sous-espace propre associé à la valeur propre  $n+1$  est  $\text{vect}(I_n)$  puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**REMARQUE.** On constate que  $u$  est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**REMARQUE.** Si  $n = 1$ , 1 n'est en fait pas valeur propre puisqu'alors le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle est le sous-espace nul.

**Solution 95**

Remarquons tout d'abord que pour  $S \in GL_n(\mathbb{C})$ ,  $\overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$ .

Commençons par le sens le plus simple : supposons qu'il existe  $S \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = S\overline{S}^{-1}$ . Dans ce cas,

$$A\overline{A} = S\overline{S}^{-1}\overline{S\overline{S}^{-1}} = S\overline{S}^{-1}\overline{S}^{-1} = I_n$$

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur  $n$ .

Si  $n = 1$ , alors  $A = (\lambda)$  avec  $|\lambda| = 1$ . On a donc  $\lambda = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . Il suffit alors de prendre  $S = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}$ .

On suppose maintenant la propriété vraie à un rang  $n - 1 \geq 1$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A\overline{A} = I_n$ .

Montrons d'abord que toutes les valeurs propres de  $A$  sont de module 1. Soient  $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A = P + iQ$ . Ainsi  $(P + iQ)(P - iQ) = I_n$ . En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient  $P^2 + Q^2 = I_n$  et  $QP - PQ = 0$ . Ainsi  $P$  et  $Q$  commutent et trigonalisent dans une base commune i.e. il existe  $R \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $U, V \in \mathcal{J}_n^+(\mathbb{C})$  telles que  $P = RUR^{-1}$  et  $Q = RVR^{-1}$ . Posons  $T = U + iV$ . On a donc  $A = RTR^{-1}$  et  $\overline{A} = R\overline{T}R^{-1}$ . La diagonale de  $T$  contient les valeurs propres de  $A$ . Comme  $A\overline{A} = I_n$ , on en déduit que toutes les valeurs propres de  $A$  sont de module 1.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  (il en existe toujours une complexe). On a donc  $|\lambda| = 1$ . On a à nouveau  $\lambda = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . Posons  $\mu = e^{\frac{i\theta}{2}}$ , de sorte que  $\frac{\mu}{\overline{\mu}} = 1$ . Soit  $X$  un vecteur propre de  $A$  associée à la valeur propre  $\lambda$ . Dans ce cas,  $\overline{X}$  est également un vecteur propre de  $X$  associé

à la valeur propre  $\lambda$ . En effet,  $AX = \lambda X$  donc  $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$  puis  $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$ . Puisque  $A\overline{A} = I_n$ , on obtient  $\overline{X} = \overline{\lambda A\overline{X}}$  puis  $A\overline{X} = \lambda \overline{X}$  puisque  $\frac{1}{\lambda} = \overline{\lambda}$ . On peut supposer  $X$  réel. En effet, les vecteurs  $X + \overline{X}$  et  $i(X - \overline{X})$  sont réels et l'un des deux est non nul. L'un de ces deux vecteurs est donc un vecteur propre réel associé à la valeur propre  $\lambda$ . On peut compléter  $X$  en une base de  $\mathbb{C}^n$  à l'aide de vecteurs réels (ceux de la base canonique, par exemple). Notons  $P$  la matrice de cette base dans la base canonique. Posons  $B = P^{-1}AP$ . Cette matrice est de la forme

$$\left( \begin{array}{c|c} \lambda & Y^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array} \right) \text{ avec } Y \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ et } C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}). \text{ On a } B\overline{B} = P^{-1}AP\overline{P^{-1}AP} = I_n \text{ car } \overline{P} = P \text{ et } \overline{P^{-1}} = P^{-1} \text{ (P est à coefficients réels). On en}$$

déduit que  $C\overline{C} = I_{n-1}$ . D'après notre hypothèse de récurrence, il existe  $T \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$  telle que  $C = T\overline{T}^{-1}$ .

Montrons qu'il existe  $Z \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $Z - \lambda\overline{Z} = Y^T\overline{T}$ . Puisque  $B\overline{B} = 0$ , on a en particulier  $\lambda\overline{Y}^T T + Y^T\overline{T} = 0$ . Notons  $\varphi(z) = z + \lambda\overline{z}$  et  $\psi(z) = z - \lambda\overline{z}$  pour  $z \in \mathbb{C}$ .  $\varphi$  et  $\psi$  sont des endomorphismes du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ . On vérifie que  $\varphi \circ \psi = 0$  en utilisant  $|\lambda| = 1$ . On a donc  $\text{Im } \psi \subset \text{Ker } \varphi$ .  $\varphi$  et  $\psi$  ne sont pas nuls donc  $\dim \text{Im } \psi \geq 1 \geq \dim \text{Ker } \varphi$ . Ainsi  $\text{Im } \psi = \text{Ker } \varphi$ . Les composantes de  $Y^T\overline{T}$  sont dans  $\text{Ker } \varphi$  donc dans  $\text{Im } \psi$ , ce qui justifie l'existence de  $Z$ .

$$\text{Posons alors } U = \left( \begin{array}{c|c} \mu & Z^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array} \right). \text{ On a alors } \overline{U}^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{1}{\overline{\mu}} & -\frac{1}{\overline{\mu}}\overline{Z}^T\overline{T}^{-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array} \right). \text{ On vérifie alors que } U\overline{U}^{-1} = B. \text{ Il suffit alors de poser } S = PUP^{-1}$$

pour avoir  $A = S\overline{S}^{-1}$ .

**Solution 96**

- Première méthode.** Il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $C = P^{-1}BP$  soit trigonale. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux de  $C$  i.e. les valeurs propres de  $B$ . La matrice  $\chi_A(C)$  est également triangulaire et a pour coefficients diagonaux  $\chi_A(\lambda_1), \dots, \chi_A(\lambda_n)$ . Les spectres de  $A$  et  $B$  étant disjoints, ces coefficients sont non nuls, ce qui prouve que  $\chi_A(C)$  est inversible. Or les matrices  $\chi_A(B)$  et  $\chi_A(C)$  sont semblables puisque  $\chi_A(C) = \chi_A(P^{-1}BP) = P^{-1}\chi_A(B)P$ . Donc  $\chi_A(B)$  est également inversible.

**Deuxième méthode.** Avec les mêmes notations,  $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ . Ainsi  $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (B - \lambda_i I_n)$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i \notin \text{Sp}(B)$  donc  $B - \lambda_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ . Comme  $GL_n(\mathbb{C})$  est un groupe,  $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$ .

- On montre par récurrence que  $A^n X = X B^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On montre ensuite le résultat voulu par bilinéarité du produit matriciel. On a notamment  $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$ . Or  $\chi_A(A) = A$  d'après Cayley-Hamilton donc  $X\chi_A(B) = 0$ . Comme  $\chi_A(B)$  est inversible,  $X = 0$ .

3. Considérons l'application  $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto AX - XB \end{cases}$ .  $\Phi$  est clairement un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et la question précédente montre que  $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$  i.e. que  $\Phi$  est injectif. Puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie,  $\Phi$  est également surjectif, ce qui prouve le résultat voulu.

### Solution 97

Supposons que les polynômes caractéristiques  $\chi_A$  et  $\chi_B$  de A et B soient premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe  $(U, V) \in \mathbb{C}[X]^2$  tel que  $U\chi_A + V\chi_B = 1$ . En évaluant cette égalité en B, on obtient  $U(B)\chi_A(B) = I_n$  car  $\chi_B(B) = 0$  d'après le théorème de Cayley-Hamilton. La matrice  $\chi_A(B)$  est donc inversible. Soit alors  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AX = XB$ . On montre alors aisément par récurrence que  $A^k X = XB^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et on en déduit alors que  $P(A)X = XP(B)$  pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Notamment,  $X\chi_A(B) = \chi_A(A)X = 0$  à nouveau par le théorème de Cayley-Hamilton. Mais on a vu que  $\chi_A(B)$  était inversible donc  $X = 0$ .

Supposons que  $\chi_A$  et  $\chi_B$  ne soient pas premiers entre eux. Il ont donc une racine commune  $\lambda$ , qui est également une valeur propre commune de A et B. C'est également une valeur propre de  $B^T$  puisque

$$\det(B^T - \lambda I_n) = \det((B - \lambda I_n)^T) = \det(B - \lambda I_n) = 0$$

Il existe donc des matrices colonnes U et V non nulles de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  telles que  $AU = \lambda U$  et  $B^T V = \lambda V$ . La deuxième égalité peut s'écrire  $V^T B = \lambda V^T$  en transposant. On en déduit que  $AUV^T = UV^T B = \lambda UV^T$ . On a donc  $AX = XB$  en posant  $X = UV^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Il est alors aisé de voir que la matrice X est non nulle car U et V ne le sont pas.

### Solution 98

Notons A, B, et C les matrices de  $f, g$  et  $h$  dans une base de E. On a alors  $CB = AC$ . Comme C est de rang  $r$ , il existe deux matrices inversibles P et Q telles que  $C = PJ_r Q^{-1}$ , où  $J_r$  désigne traditionnellement la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis les  $r$  premiers coefficients diagonaux qui valent 1. On a donc  $PJ_r Q^{-1}B = APJ_r Q^{-1}$  ou encore  $J_r(Q^{-1}BQ) = (P^{-1}AP)J_r$ . Comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, on peut supposer pour simplifier que  $J_r B = A J_r$ . En effectuant un calcul par blocs, on trouve que A et B sont

respectivement de la forme  $\begin{pmatrix} M & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} M & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$  où M est un bloc carré de taille  $r$ . On en déduit que  $\chi_M$ , qui est bien un polynôme de degré  $r$ , divise  $\chi_A$  et  $\chi_B$  et donc également  $\chi_f$  et  $\chi_g$ .

La réciproque est fausse dès que  $n \geq 2$ . En effet, on peut encore raisonner matriciellement en considérant A la matrice nulle et B une matrice non nulle nilpotente. Alors  $\chi_A = \chi_B = X^n$  de sorte que  $\chi_A$  et  $\chi_B$  ont un facteur commun de degré  $n$  (à savoir  $X^n$ ). Mais il n'existe évidemment pas de matrice C de rang  $n$  (i.e. inversible) telle que  $CB = AC$  car AC est nulle tandis que CB ne l'est pas (C est inversible et B est non nulle).

### Solution 99

1. La matrice A de  $u$  dans la base  $(e_1, \dots, e_{2n+1})$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\chi_u(X) = (X-1)^{2n+1} - 1$$

2.  $\chi_u(0) = -2 \neq 0$  donc 0 n'est pas valeur propre de  $u$  et  $u$  est inversible.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\chi_u(u) = 0$  i.e.  $(u - \text{Id}_E)^{2n+1} = \text{Id}_E$ . Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} u^k = \text{Id}_E$$

ou encore

$$u \circ \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} (-1)^{2n-k} u^k = 2 \text{Id}_E$$

Ainsi en posant  $P = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} (-1)^{2n-k} X^k$ , on a bien  $u^{-1} = P(u)$ .

3. Les valeurs propres de  $u$  sont les racines de  $\chi_u$ . Autrement dit,

$$\text{Sp}(u) = 1 + \mathbb{U}_{2n+1} = \left\{ 1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}, k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \right\} = \left\{ 2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right), k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \right\}$$

4. Comme  $\text{card } \mathbb{U}_{2n+1} = 2n+1$  et  $\deg \chi_u = 2n+1$ , toutes les valeurs propres de  $u$  sont simples (on en déduit également que  $u$  est diagonalisable, ce qui n'est pas demandé). D'après les liens entre les coefficients et les racines d'un polynôme

$$\prod_{k=0}^{2n} 2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^{2n+1} \chi_u(0) = 2$$

En notant  $P_n$  le produit à calculer,

$$2^{2n+1} P_n \prod_{k=0}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = 2$$

Comme  $\sum_{k=0}^{2n} k = n(2n+1)$ ,

$$\prod_{k=0}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = e^{in\pi} = (-1)^n$$

Finalement,

$$P_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$$

### Solution 100

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel qu'il existe  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$  et  $\text{tr}(M) = 0$ . Le polynôme  $P = X^3 - X^2 - X - 2 = (X-2)(X-j)(X-\bar{j})$  est un polynôme annulateur de  $M$ . On en déduit que  $\text{Sp}(M) \subset \{2, j, \bar{j}\}$ . De plus,  $P$  est simplement scindé donc  $M$  est diagonalisable.

Notons  $p, q, r$  les dimensions respectives de  $\text{Ker}(M - 2I_n)$ ,  $\text{Ker}(M - jI_n)$  et  $\text{Ker}(M - \bar{j}I_n)$ . On a donc  $\text{tr}(M) = 2p + qj + r\bar{j} = 0$ . En passant aux parties réelle et imaginaire, on en déduit  $2p - \frac{q}{2} - \frac{r}{2} = 0$  et  $q - r = 0$  puis  $2p = q = r$ . Ainsi  $n = p + q + r = 5p$  est un multiple de 5.

On peut alors affirmer que  $M$  est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent  $D = \text{diag}(2, j, \bar{j}, \bar{j})$ .

Réciproquement soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un multiple de 5 et considérons une matrice  $M$  semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent  $D = \text{diag}(2, j, \bar{j}, \bar{j})$ . Alors  $\text{tr}(M) = \frac{n}{5} \text{tr}(D) = 0$ . De plus,  $P(M)$  est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent  $P(D) = \text{diag}(P(2), P(j), P(\bar{j}), P(\bar{j})) = \text{diag}(0, 0, 0, 0)$ . On a donc bien  $P(M) = 0$ .

**REMARQUE.** Si  $n$  n'est pas un multiple de 5, il n'existe pas de matrice vérifiant les conditions de l'énoncé.

### Solution 101

On remarque que  $C^3 - C^2 - 3C = 0$ . Ainsi  $X^3 - X^2 - 3X = X(X^2 - X - 3)$  est un polynôme scindé à racines simples (le polynôme de degré 2 n'admet évidemment pas 0 pour racine et est de discriminant strictement positif). Par conséquent  $C$  est diagonalisable et donc semblable à une matrice diagonale  $D$ . On voit alors aisément que  $A = 3C - C^2$  est semblable à la matrice diagonale  $3D - D^2$  et que  $B = C^2 - 2C$  est semblable à la matrice diagonale  $D^2 - 2D$ .  $A$  et  $B$  sont donc diagonalisables.

## Solution 102

**Simplification du problème :** Comme  $M$  est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe donc  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle

$P^T M P = D$  où  $D$  est diagonale de la forme  $\left( \begin{array}{c|c|c} D_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & D_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$  où  $D_1$  et  $D_2$  sont des matrices diagonales à coefficients respectivement

strictement positifs et strictement négatifs. On peut alors trouver une matrice diagonale inversible  $\Delta$  telle que  $\Delta D \Delta = 2I$  avec  $I =$

$\left( \begin{array}{c|c|c} I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I_q & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$ . En posant  $Q = P\Delta$ , on a donc  $Q^T M Q = 2I$ . Alors  $A + A^T = M$  si et seulement si  $Q^T A Q + (Q^T A Q)^T = I$ . Comme

$Q$  est inversible,  $\text{rg } Q^T A Q = \text{rg } A$ . On peut donc supposer par la suite que  $M = 2I$ .

Remarquons que  $A + A^T = 2I$  si et seulement si  $A$  est de la forme  $I + N$  où  $N$  est une matrice antisymétrique. Le problème revient alors à trouver les rangs maximal et minimal de  $A = I + N$  quand  $N$  décrit l'ensemble des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Cas  $p = q = 0$  :** Dans ce cas  $I = 0$ . Si on prend  $N = 0$ , alors  $A = 0$  et  $\text{rg } A = 0$ . Le rang minimal recherché est donc 0.

Notons  $T_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formée d'une sous-diagonale de 1, d'une sur-diagonale de  $-1$  et de 0 ailleurs.  $T_n$  est bien antisymétrique. Si  $n$  est pair  $\text{Ker } T_n = \{0\}$  et donc  $\text{rg } T_n = n$ . Le rang maximal recherché est donc  $n$ . Si  $n$  est impair,  $\text{Ker } T_n = \text{vect}((1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1)^T)$ . Donc  $\text{rg } T_n = n - 1$ . De plus, pour toute matrice antisymétrique  $N$ ,  $\det N = \det(N^T) = (-1)^n \det N = -\det N$  donc  $\det N = 0$ . Ainsi  $\det N \leq n - 1$ . Le rang maximal recherché est donc  $n - 1$ .

**Cas  $p \neq 0$  ou  $q \neq 0$  :** Les matrices  $A$  sont de la forme  $\left( \begin{array}{c|c|c} I_p + A_1 & -B^T & -C^T \\ \hline B & -I_q + A_2 & -D^T \\ \hline C & D & A_3 \end{array} \right)$  où  $A_1, A_2$  et  $A_3$  sont antisymétriques de taille res-

pectives  $p, q$  et  $n - p - q$ . C'est un exercice classique que de montrer que toute matrice somme de la matrice identité et d'une matrice antisymétrique est inversible. Ainsi  $I_p + A_1$  et  $-I_q + A_2$  sont inversibles. Si  $n - p - q$  est pair, prenons  $B, C$  et  $D$  nulles et  $A_3 = T_{n-p-q}$ . D'après ce qui précède,  $A_3$  est inversible et donc  $\text{rg } A = n$ . Si  $n - p - q$  est impair, on garde la même matrice à une exception près : l'un des blocs  $C$  et  $D$  est de taille non nulle ( $p$  et  $q$  ne sont pas tous deux nuls), on le remplace par un bloc dont un coefficient vaut 1 et on garde les autres coefficients nuls. Une étude du noyau de la matrice  $A$  ainsi formée montre que  $\text{Ker } A = \{0\}$  et donc  $A$  est inversible. On a à nouveau  $\text{rg } A = n$ . Dans tous les cas, le rang maximal recherché est donc  $n$ .

Revenons au cas général : on a vu que  $I_p + A_1$  et  $-I_q + A_2$  étaient inversibles. Donc  $\text{rg } A \geq \max(p, q)$ . Prenons maintenant  $A_1, A_2, A_3, C$  et  $D$  nulles. Prenons pour  $B$  la matrice formée d'une diagonale de 1 et de zéros ailleurs (attention  $B$  n'est pas nécessairement une matrice carrée, la diagonale en question est celle débutant en haut à gauche de la matrice). Si  $p \leq q$ , alors les  $p$  premières colonnes de  $A$  sont les opposées des  $p$  suivantes. De plus les  $q$  colonnes suivant les  $p$  premières sont linéairement indépendantes donc  $\text{rg } A = q$ . Si  $p \geq q$ , on se retrouve dans la situation inverse et  $\text{rg } A = p$ . On a donc  $\text{rg } A = \max(p, q)$ . Le rang minimal recherché est donc  $\max(p, q)$ .

**REMARQUE.** Le couple d'entiers  $(p, q)$  est uniquement associé à la matrice  $M$ . On l'appelle la signature de la forme quadratique canoniquement associée à la matrice symétrique  $M$ .

## Solution 103

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ .  $A$  est également une matrice à coefficients complexes et on montre classiquement que le rang de  $A$  en tant que matrice complexe est le même que le rang de  $A$  en tant que matrice réelle. En effet, si  $r = \text{rg } A$ , il existe  $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A = P J_{r,n} Q$  avec  $J_{r,n}$  la matrice carrée de taille  $n$  comportant des 1 sur les  $r$  premiers coefficients diagonaux et des 0 partout ailleurs. Or  $P, Q$  appartiennent également à  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  donc le rang de  $A$  est également  $r$  en tant que matrice complexe.

Le polynôme  $X(X^2 + 1)$  est un polynôme annulateur de  $A$  scindé à racines simples (sur  $\mathbb{C}$ ).  $A$  est donc diagonalisable et  $\text{Sp}(A) \subset \{0, -i, +i\}$ . Notons  $p$  et  $q$  les dimensions respectives de  $\text{Ker}(A - iI_n)$  et  $\text{Ker}(A + iI_n)$ . On a donc  $\text{tr}(A) = (p - q)i$ . Or  $A$  est à coefficients réels donc  $\text{tr}(A) \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $p = q$ . De plus,  $\text{rg}(A) = p + q = 2p$ . Donc  $\text{rg}(u) = \text{rg}(A)$  est pair.

## Solution 104

1. On montre par exemple aisément que c'est un sous-groupe de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ .

2. Soit  $M \in G$ . Puisque le morphisme de groupe  $\begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ M & \longmapsto & M^n \end{cases}$  ne peut être injectif puisque  $\mathbb{Z}$  est infini et que  $G$  est fini. Son noyau contient donc un entier non nul  $n$  tel que  $M^n = I_2$ . On peut même supposer  $n$  positif quitte à le changer en son opposé. Puisque le polynôme  $X^n - 1$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$  et annule  $M$ ,  $M$  est diagonalisable. On peut également ajouter que ses valeurs propres sont des racines de l'unité et en particulier des complexes de module 1.

Si  $M$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ , ses valeurs propres ne peuvent être que 1 ou  $-1$ . Dans ce cas,  $M$  est semblable à  $I_2$ ,  $-I_2$  ou  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Dans tous les cas,  $M^6 = I_2$ .

Si  $M$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ , elle l'est quand même dans  $\mathbb{C}$  et ses valeurs propres sont des complexes de module 1 conjugués puisque  $M$  est à coefficients réels.  $M$  est donc semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$  où  $\theta \in \mathbb{R}$ . Puisque la trace est un invariant de similitude,  $2 \cos \theta = \text{tr}(M) \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $\cos$  est à valeurs dans  $[-1, 1]$ ,  $\cos \theta \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$ .

- Si  $\cos \theta = \pm 1$ ,  $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \pm 1$  et on est ramené au cas précédent (en fait,  $M$  serait diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  et on a supposé que ce n'était pas le cas).
- Si  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ , alors  $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$ . Il est alors clair que  $M^{12} = I_2$ .
- Si  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ , alors  $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ . Il est alors clair que  $M^{12} = I_2$ .
- Si  $\cos \theta = 0$ , alors  $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Il est alors clair que  $M^{12} = I_2$ .

### Solution 105

1. Puisque  $X^2 - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$  scindé à racines simples,  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité. Ainsi pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_k = \pm 1$  et, a fortiori,  $\lambda_k \equiv 1 [2]$ . Puisque  $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ ,  $\text{tr}(A) \equiv n [2]$ .
2. Les valeurs propres de  $A$  ne peuvent pas toutes être égales à 1 ou  $-1$  sinon,  $A$  serait semblable à  $I_n$  ou  $-I_n$  et donc égale à  $I_n$  ou  $-I_n$ . En notant  $a$  le nombre de valeurs propres égales à 1 et  $b$  le nombre de valeurs propres égales à  $-1$ . On a donc  $a + b = n$ ,  $1 \leq a \leq n - 1$  et  $1 \leq b \leq n - 1$ . Ainsi  $\text{tr}(A) = a - b$  est compris entre  $-n + 2$  et  $n - 2$  i.e.  $|\text{tr}(A)| \leq n - 2$ .

### Solution 106

1. Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\chi_A = (X - 2)(X - 3) - 2 = X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4)$$

Ainsi  $A$  est diagonalisable et le spectre de  $A$  est  $\text{Sp}(A) = \{1, 4\}$ . On vérifie que

$$Ax_1 = x_1 \quad \text{avec} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et que

$$Ax_2 = 4x_2 \quad \text{avec} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme  $A$  est de taille 2, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 4 ont donc de dimension 1. Ce sont respectivement  $\text{vect}(x_1)$  et  $\text{vect}(x_2)$ .

De plus,  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

2. Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = A$ . Alors  $AM = M^3 = MA$ . Alors  $AMx_1 = MAx_1 = Mx_1$  donc  $Mx_1$  est un vecteur propre de  $A$ . Comme le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est  $\text{vect}(x_1)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $Mx_1 = \lambda x_1$ . Donc  $\lambda^2 x_1 = M^2 x_1 = Ax_1 = x_1$  puis  $\lambda^2 = 1$  i.e.  $\lambda = \pm 1$  et  $Mx_1 = \pm x_1$ . De même,  $Ax_2 = \pm 2x_2$ . On peut alors affirmer que

$$M = P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Réciproquement ces quatre matrices conviennent.

**REMARQUE.** Les quatre matrices en question sont

$$\pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Solution 107

On calcule  $\chi_A = (X-2)(X-1)^2$ ,  $E_2(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $E_1(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . Ainsi  $A$  est diagonalisable. De même,  $\chi_B =$

$(X-2)(X-1)^2$ ,  $E_2(B) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  mais  $E_1(B) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . Donc  $B$  n'est pas diagonalisable. Donc  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables

même si elles ont mêmes valeurs propres et même polynôme caractéristique.

### Solution 108

1. On trouve  $\chi_A = X^2 + 7X - 8 = (X+8)(X-1)$ . De plus,  $E_{-8}(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et  $E_1(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ . Ainsi  $A = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Alors en posant  $Y = P^{-1}XP$ , l'équation  $X^3 = A$  équivaut à  $Y^3 = D$ . Supposons que  $X^3 = A$  i.e.  $Y^3 = D$ . Alors  $Y$  commute avec  $Y^3 = D$ . En notant,  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $YD = DY$  donne  $b = c = 0$ . Par conséquent,  $Y$  est diagonale. L'équation  $Y^3 = D$  équivaut  $a^3 = -8$

et  $d^3 = 1$  i.e.  $a = -2$  et  $d = 1$  ou encore  $Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . L'unique solution de l'équation  $X^3 = A$  est alors

$$P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

### Solution 109

1. On trouve  $A = aI_3 + bJ + cJ^2$ .  
2. On trouve  $\chi_J = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ . Comme  $\chi_J$  est scindé à racines simples,  $J$  est diagonalisable.

3. Les sous-espaces propres associés à 1,  $j$  et  $j^2$  sont respectivement engendrés par  $\omega_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$  et  $\omega_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ . Remarquons que  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$  car  $J$  est diagonalisable.

Enfin,  $A\omega_0 = (a + b + c)\omega_0$ ,  $A\omega_1 = (a + bj + cj^2)\omega_1$ ,  $A\omega_2 = (a + bj^2 + cj^4)\omega_2$  donc  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$  est également une base de vecteurs propres de  $A$ . Ainsi  $A$  est diagonalisable. En posant  $P = a + bX + cX^2$ ,  $D = \begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 \\ 0 & P(j) & 0 \\ 0 & 0 & P(j^2) \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ ,  $A = QDQ^{-1}$ .

### Solution 110

1. Notons  $u_1, \dots, u_p$  les endomorphismes canoniquement associés à  $A_1, \dots, A_p$ .

a. Les sous-espaces propres de  $u_1$  sont stables par  $u_2$  car  $u_1$  et  $u_2$  commutent. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u_1)$ . Comme  $u_2$  est diagonalisable, il induit un endomorphisme diagonalisable de  $E_\lambda(u_1)$ . Notons  $\mathcal{B}_\lambda$  une base de diagonalisation de cet endomorphisme. Comme  $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u_1)} E_\lambda(u_1)$ , la concaténation des bases  $\mathcal{B}_\lambda$  est une base de  $\mathcal{B}_\lambda$ . On vérifie sans peine que c'est une base de diagonalisation commune de  $u_1$  et  $u_2$ . On en déduit alors que  $A_1$  et  $A_2$  sont simultanément diagonalisables.

b. On note  $\text{HR}(p)$  l'assertion :

si  $u_1, \dots, u_p$  sont des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux, alors ils sont simultanément diagonalisables.

$\text{HR}(1)$  est évidemment vraie. Supposons  $\text{HR}(p)$  vraie pour un certain  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soient alors  $u_1, \dots, u_{p+1}$  des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u_{p+1})$ . Alors  $E_\lambda(u_{p+1})$  est stable par  $u_1, \dots, u_p$ . Les endomorphismes de  $E_\lambda(u_{p+1})$  induits par  $u_1, \dots, u_p$  sont encore diagonalisables et commutent deux à deux. On peut ainsi trouver une base commune  $\mathcal{B}_\lambda$  de diagonalisation de ces endomorphismes induits. A nouveau, la concaténation des bases  $\mathcal{B}_\lambda$  pour  $\lambda \in \text{Sp}(u_{p+1})$  est une base commune de diagonalisation de  $u_1, \dots, u_{p+1}$  de sorte que  $\text{HR}(p+1)$  est vraie. Ainsi  $\text{HR}(p)$  est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

2. Montrons que  $G$  est commutatif. Remarquons que  $A^{-1} = A$  pour tout  $A \in G$ . Soit  $(A, B) \in G^2$ . Alors  $AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$ . Comme le polynôme simplement scindé  $X^2 - 1$  annule tous les éléments de  $G$ , ceux-ci sont tous diagonalisables. On peut de plus préciser que le spectre de chaque élément de  $G$  est inclus dans  $\{-1, 1\}$ .

Si l'on considère une partie finie  $F$  de  $G$  de cardinal  $p$ , la question précédente montre qu'il existe une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  diagonalisant tous les éléments de  $F$ . L'application  $M \in A \mapsto P^{-1}MP$  est une injection de  $A$  dans le groupe  $D_n$  des matrices diagonales à coefficients diagonaux égaux à  $\pm 1$ . Ainsi  $p \leq 2^n$ .

Ainsi  $G$  est fini de cardinal inférieur à  $2^n$ .

**REMARQUE.** On peut préciser la réponse même si ce n'est pas utile pour la question suivante. Il existe une matrice  $P$  diagonalisant tous les éléments de  $G$ . Le morphisme  $M \in G \mapsto P^{-1}MP$  est une injection de  $G$  dans  $D$  donc  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $D$ . Son cardinal divise donc  $2^n$ . Il existe ainsi  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  tel que  $\text{card } G = 2^k$ .

3. Notons  $S_n$  l'ensemble des matrices  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telles que  $M^2 = I_n$ . On définit de la même manière  $S_m$ . Supposons qu'il existe un isomorphisme  $\varphi$  de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  sur  $\text{GL}_m(\mathbb{C})$ . On vérifie sans peine que  $\varphi$  induit une bijection de  $S_n$  sur  $S_m$ . Les sous-groupes de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  inclus dans  $S_n$  sont donc isomorphes aux sous-groupes de  $\text{GL}_m(\mathbb{C})$  inclus dans  $S_m$ . Notamment, le sous-groupe  $D_n$  défini dans la question précédente est isomorphe à un sous-groupe de  $\text{GL}_m(\mathbb{C})$  inclus dans  $S_m$ . Ainsi  $S_m$  contient un sous-groupe d'ordre  $2^n$ . D'après la question précédente, on a donc  $2^n \leq 2^m$ . Mais de manière symétrique  $2^m \leq 2^n$  donc  $n = m$ .

### Solution 111

Supposons  $u$  diagonalisable et donnons-nous un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  stable par  $u$ . Puisque  $u$  est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples annihilant  $u$ . A fortiori, ce polynôme annule la restriction  $u|_F$  de  $u$  à  $F$ , qui est donc lui-même diagonalisable.

De plus, on a clairement  $\text{Sp}(u|_F) \subset \text{Sp}(u)$  et  $E_\lambda(u|_F) \subset E_\lambda(u)$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u|_F)$ . Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u|_F)$ , notons alors  $G_\lambda$  un supplémentaire de  $E_\lambda(u|_F)$  dans  $E_\lambda(u)$ . Remarquons que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u|_F)$ ,  $G_\lambda$  est stable par  $u$  puisque c'est un sous-espace vectoriel du sous-espace propre  $E_\lambda(u)$ .

Posons finalement

$$G = \left( \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u|_F)} G_\lambda \right) \oplus \left( \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u) \setminus \text{Sp}(u|_F)} E_\lambda(u) \right)$$

D'après notre dernière remarque,  $G$  est stable par  $u$ . Puisque  $u$  et  $u|_F$  sont diagonalisables,  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$  et  $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u|_F)} E_\lambda(u|_F)$ . On en déduit que  $E = F \oplus G$ .



Supposons que tout sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$  admette un supplémentaire dans  $E$  stable par  $u$ . Posons alors  $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ .  $F$  étant stable par  $u$ , il admet un supplémentaire  $G$  stable par  $u$ . Supposons que  $G \neq \{0_E\}$ . Alors  $\chi_{u|_G}$  étant scindé dans  $\mathbb{C}$ ,  $u|_G$  possède une valeur propre et donc un vecteur propre  $x$  associé. Alors  $x \in F \cap G$  est non nul, ce qui contredit le fait que  $F$  et  $G$  soient en somme directe. Ainsi  $G = \{0_E\}$  puis  $E = F$ , ce qui prouve que  $u$  est diagonalisable.

Le résultat ne persiste pas si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Par exemple, si  $u$  est une rotation de  $\mathbb{R}^2$  d'angle non congru à 0 modulo  $\pi$ , les seuls sous-espaces stables par  $u$  sont  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}^2$  qui admettent donc bien des supplémentaires stables par  $u$ . Néanmoins,  $u$  n'est pas diagonalisable.

### Solution 112

1. a. Comme  $f$  est bijectif,  $A$  est inversible. Alors

$$\begin{aligned}\chi_{AB} &= \det(XI_n - AB) = \det(A(XA^{-1} - B)) = \det(A) \det(XA^{-1} - B) \\ &= \det(XA^{-1} - B) \det(A) = \det((XA^{-1} - B)A) = \det(XI_n - BA) = \chi_{BA}\end{aligned}$$

On peut également remarquer que  $AB = A(BA)A^{-1}$  donc  $AB$  et  $BA$  sont semblables et ont même polynôme caractéristique.

- b. Supposons que  $f \circ g$  est diagonalisable. Alors  $AB$  est diagonalisable et il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $AB = PDP^{-1}$ . Alors  $BA = A^{-1}PDP^{-1}A = A^{-1}PD(A^{-1}P)^{-1}$ . Donc  $BA$  est diagonalisable et  $g \circ f$  également. De même, si on remarque que  $AB$  et  $BA$  sont semblables, alors  $AB$  est diagonalisable si et seulement si  $BA$  l'est i.e.  $f \circ g$  est diagonalisable si et seulement si  $g \circ f$  l'est.
2. a. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(f \circ g)$ . Si  $\lambda \neq 0$ , considérons un vecteur propre  $x$  associé à  $\lambda$ . Alors  $f \circ g(x) = \lambda x$ . Remarquons que  $g(x) \neq 0_E$  car  $\lambda x \neq 0_E$ . De plus,  $g \circ f(g(x)) = \lambda g(x)$  donc  $\lambda$  est un vecteur propre de  $g \circ f$ . Si  $\lambda = 0$ , alors  $f \circ g$  n'est pas inversible. Ainsi  $\det(f \circ g) = 0$ . Par conséquent  $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f) = \det(f) \det(g) = \det(f \circ g) = 0$ . Donc  $g \circ f$  n'est pas inversible et  $0 \in \text{Sp}(g \circ f)$ . On a donc montré que  $\text{Sp}(g \circ f) \subset \text{Sp}(f \circ g)$ . En inversant les rôles de  $f$  et  $g$ , on a l'inclusion réciproque de sorte que  $\text{Sp}(f \circ g) = \text{Sp}(g \circ f)$ .

- b. Posons  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  $AB$  est diagonale donc diagonalisable mais  $BA$  ne l'est pas. En effet, la seule valeur propre de  $BA$  est 0, donc, si  $BA$  était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc elle serait nulle, ce qu'elle n'est pas.

### Solution 113

1. D'une part,  $f = f \circ g - g = (f - \text{Id}_E) \circ g$  donc  $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$ . D'autre part,  $g = f \circ g - f = f \circ (g - \text{Id}_E)$  donc  $\text{Im } g \subset \text{Im } f$ . On en déduit que  $\dim \text{Ker } g \leq \dim \text{Ker } f$  et que  $\dim \text{Im } g \leq \dim \text{Im } f$ . Mais, d'après le théorème du rang, on a également

$$\dim \text{Im } g = \dim E - \dim \text{Ker } g \geq \dim E - \dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f$$

donc  $\dim \text{Im } f = \dim \text{Im } g$ . Or  $\text{Im } g \subset \text{Im } f$  donc  $\text{Im } g = \text{Im } f$ . D'après le théorème du rang,  $\dim \text{Ker } g = \dim \text{Ker } f$ . Or  $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$  donc  $\text{Ker } g = \text{Ker } f$ .

2. Comme  $g$  est diagonalisable, il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $E$ . Notons  $\lambda_i$  la valeur propre associée au vecteur propre  $e_i$ . Alors  $f \circ g(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$  i.e.  $(\lambda_i - 1)f(e_i) = \lambda_i e_i$ . On ne peut avoir  $\lambda_i = 1$  sinon on devrait avoir  $\lambda_i = 0$  car  $e_i \neq 0_E$ . Ainsi  $f(e_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} e_i$ . Les  $e_i$  sont donc également des vecteurs propres de  $f$  et comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ ,  $f$  est diagonalisable.

Ensuite,  $f \circ g(e_i) = \lambda_i f(e_i) = \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i - 1} e_i$  donc  $f \circ g$  est aussi diagonalisable pour les mêmes raisons. On peut également affirmer que

$\text{Sp}(f \circ g) \subset \text{Im } \varphi$  avec  $\varphi : t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \frac{t^2}{t-1}$ .  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $\varphi'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$ . On en déduit le tableau de variations suivant.

$t$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$	
$\varphi'(t)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
Variations de $\varphi$	$-\infty$	$0$	$-\infty$	$+\infty$	$4$	$+\infty$

Ainsi  $\text{Sp}(f \circ g) \subset \text{Im } \varphi = \mathbb{R} \setminus ]0, 4[$ .

### Solution 114

- La linéarité de  $\Phi$  est évidente. Pour montrer que  $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ , il suffit de montrer que  $\Phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  car  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors, en convenant qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle

$$\Phi(X^k) = (X+1)X^k - X(X+1)^k = (1-k)X^k - \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} X^j \in \mathbb{R}_n[X]$$

$\Phi$  est donc bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

- D'après la question précédente, la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les  $1-k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On peut donc affirmer que les valeurs propres de  $\Phi$  sont ces mêmes coefficients diagonaux.  $\Phi$  possède donc  $n+1$  valeurs propres distinctes et  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$  donc  $\Phi$  est diagonalisable. De plus, on peut préciser que tous les sous-espaces propres de  $\Phi$  sont de dimension 1.

Recherchons maintenant les éléments propres de  $\Phi$ . Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Posons  $\Gamma_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$  (en particulier  $\Gamma_0 = 1$ ). On vérifie aisément que  $\Phi(\Gamma_k) = (1-k)\Gamma_k$ . Comme les sous-espaces propres de  $\Phi$  sont de dimension 1, le sous-espace propre associé à la valeur propre  $1-k$  est la droite vectorielle  $\text{vect}(\Gamma_k)$ .

### Solution 115

Puisque  $\text{rg}(A) = 1$ , 0 est valeur propre de  $A$  et  $\dim E_0 = \dim \text{Ker } A = n-1$ . Ainsi  $X^{n-1}$  divise  $\chi_A$ . On a alors  $\chi_A = X^{n-1}(X-\lambda)$ . Comme la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité,  $\lambda = \text{tr}(A)$ .

Si  $\lambda = 0$ , alors  $A$  n'est pas diagonalisable puisque la multiplicité de 0 dans  $\chi_A$  n'est pas égale à la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ . Comme  $E_0$  et  $E_\lambda$  sont en somme directe,  $\dim E_0 + \dim E_\lambda \leq n$  i.e.  $\dim E_\lambda \leq 1$ . De plus,  $\dim E_\lambda \geq 1$  donc  $\dim E_\lambda = 1$ . La somme des dimensions des sous-espaces propres est alors égale à  $n$  et  $A$  est diagonalisable.

### Solution 116

- Supposons  $x \neq 0$  et soit  $M \in E_x$ . Alors

$$-\frac{1}{x}M(M+I_n) = -\frac{1}{x}(M+I_n)M = I_n$$

donc  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $M^{-1} = -\frac{1}{x}(M+I_n)$ .

Soit  $M \in E_0$ . Alors  $M^2 + M = 0$ . Si  $M$  est inversible, alors, en multipliant par  $M^{-1}$ ,  $M = -I_n$  et  $-I_n$  est bien inversible. La seule matrice inversible de  $E_0$  est  $-I_n$ .

- Remarquons que  $P_x = X^2 + X + x$  est un polynôme annulateur de toutes les matrices de  $E_x$ .

Si le discriminant de  $P_x$  est strictement négatif i.e.  $x > \frac{1}{4}$ , alors les matrices de  $E_x$  ne possèdent pas de valeur propre réelle et ne sont donc pas diagonalisables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Si le discriminant de  $P_x$  est strictement positif i.e.  $x < \frac{1}{4}$ , alors  $P_x$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples donc toutes les matrices de  $E_x$  sont diagonalisables.

Si  $x = \frac{1}{4}$ ,  $P_{\frac{1}{4}} = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2$ . On vérifie que  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  appartient à  $E_{\frac{1}{4}}$  mais n'est pas diagonalisable.

Ainsi  $E_x$  ne contient que des matrices diagonalisables si et seulement si  $x < \frac{1}{4}$ .

3. Remarquons que  $P_{-2} = (X - 1)(X + 2)$ . Les spectres des matrices de  $E_{-2}$  sont inclus dans  $\{1, -2\}$ . Soit  $M \in E_{-2}$ . Notons  $m_1$  et  $m_{-2}$  les multiplicités (éventuellement nulles) des valeurs propres 1 et  $-2$ .

Comme les matrices de  $E_{-2}$  sont diagonalisables,  $m_1 + m_{-2} = n$  et  $m_1 - 2m_{-2} = \text{tr}(M)$ . Ainsi  $\text{tr}(M) = n - 3m_{-2}$  puis

$$T \subset \{n - 3k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

Réciproquement, pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $M = \begin{pmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & -2I_k \end{pmatrix} \in E_{-2}$  et  $\text{tr}(M) = n - 3k \in T$ . Ainsi

$$T = \{n - 3k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

### Solution 117

1. On a  $f = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + 2g$  avec  $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T$ . Comme  $\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$  et  $g$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $f$  en est un également.
2. Notons  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), f(M) = 3M$$

$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), f(M) = -M$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}(f - 3 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

Comme  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on peut affirmer (détailler si cela ne semble pas clair) que

$$\text{Ker}(f - 3 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f - 3 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

On en déduit que  $f$  est diagonalisable, que ses valeurs propres sont 3 et  $-1$  et que les sous-espaces propres associés respectifs sont  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

3. Déjà répondu à la question précédente.
4. Comme la trace et le déterminant d'un endomorphisme trigonalisable sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité et comme  $f$  est diagonalisable,

$$\text{tr}(f) = 3 \cdot \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + (-1) \cdot \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = 3 \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n(n+2)$$

$$\det(f) = 3^{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \cdot (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

### Solution 118

Posons  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . On calcule  $\chi_M = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X + 2)$ . Comme  $\chi_M$  est scindé à racines simples,  $M$  est diagonalisable.

De plus,  $\text{Sp}(M) = \{1, 2\}$ ,  $E_1(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  et  $E_2(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . On en déduit notamment que  $D = P^{-1}MP$  avec  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . On calcule aussi aisément  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . On propose ensuite plusieurs manières de procéder.

**Méthode n°1.**  $A$  est diagonalisable donc il existe une base  $(U_1, \dots, U_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  formée de vecteurs propres de  $A$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres respectivement associées. En s'inspirant de la réduction de  $M$ , on vérifie qu'en posant  $X_i = \begin{pmatrix} 2U_i \\ U_i \end{pmatrix}$  et  $Y_i = X_i = \begin{pmatrix} U_i \\ U_i \end{pmatrix}$ ,  $BX_i = \lambda_i X_i$  et  $BY_i = 2\lambda_i Y_i$ . Ainsi les  $X_i$  et les  $Y_i$  sont des vecteurs propres de  $B$ . On vérifie maintenant que  $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$  est une base de  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$ . Puisque cette famille compte  $2n$  éléments, il suffit de montrer sa liberté. Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^{2n}$  tel que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^n \beta_i Y_i = 0$$

En raisonnant par blocs, on a donc

$$2 \sum_{i=1}^n \alpha_i U_i + \sum_{i=1}^n \beta_i U_i = 0 \quad (L_1)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i U_i + \sum_{i=1}^n \beta_i U_i = 0 \quad (L_2)$$

En considérant  $(L_1) - (L_2)$ , on obtient  $\sum_{i=1}^n \alpha_i U_i = 0$  et en considérant  $2(L_2) - (L_1)$ , on obtient  $\sum_{i=1}^n \beta_i U_i = 0$ . Comme  $(U_1, \dots, U_n)$  est libre, les  $\alpha_i$  et les  $\beta_i$  sont nuls. Ainsi  $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$  est une base de  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$  formée de vecteurs propres de  $B$  :  $B$  est diagonalisable.

**Méthode n°2.** Comme  $A$  est diagonalisable, il existe  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $\Delta = P^{-1}QP$  soit diagonale. En s'inspirant de la réduction de  $A$ , on pose  $R = \begin{pmatrix} 2Q & Q \\ Q & Q \end{pmatrix}$ . On vérifie alors que  $R$  est inversible d'inverse  $R^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1} \end{pmatrix}$ . On vérifie ensuite que

$$R^{-1}BR = \begin{pmatrix} Q^{-1}AQ & 0 \\ 0 & 2Q^{-1}AQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}$$

$R^{-1}BR$  est donc bien une matrice diagonale :  $B$  est donc diagonalisable.

### Solution 119

1. On calcule le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} \chi_{A_m}(X) &= \begin{vmatrix} X+m+1 & -m & -2 \\ m & X-1 & -m \\ 2 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X+m-1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ X+m-1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ &= (X+m-1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} & \text{en factorisant la première colonne} \\ &= (X+m-1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 0 & 0 & X+m-1 \end{vmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= (X+m-1)^2(X-1) \end{aligned}$$

On en déduit que  $\text{Sp}(A_m) = \{1, 1 - m\}$ .

Comme la multiplicité de 1 dans  $A_m$  vaut 1, on en déduit que  $\dim E_1(A_m) = 1$  puis

$$E_1(A_m) = \text{Ker}(A_m - I_n) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -m-2 & m & 2 \\ -m & 0 & m \\ -2 & m & 2-m \end{pmatrix} = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Si  $m = 0$ ,  $\text{Sp}(A_0) = \{1\}$  et on vient alors de déterminer l'unique sous-espace propre de  $A_0$ .

Supposons donc  $m \neq 0$  et déterminons  $E_{1-m}(A_m)$ .

$$\begin{aligned} E_{1-m}(A_m) &= \text{Ker}(A_m + (m-1)I_n) \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ -m & m & m \\ -2 & m & 2 \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ -m & m & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ -m & m & m \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ 2-m & 0 & m-2 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{aligned}$$

On en déduit que si  $m \neq 2$ ,

$$E_{1-m}(A_m) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & m & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ car } m \neq 0$$

Et si  $m = 2$ ,

$$E_{1-m}(A_m) = E_{-1}(A_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On récapitule.

$$\text{Cas } m = 0 \quad \text{Sp}(A_0) = \{1\} \text{ et } E_1(A_0) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Cas } m = 2 \quad \text{Sp}(A_2) = \{-1, 1\}, E_1(A_2) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_{-1}(A_2) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Cas } m \notin \{0, 2\} \quad \text{Sp}(A_m) = \{1, 1 - m\}, E_1(A_m) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_{1-m}(A_m) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

2. On peut par exemple utiliser le fait que  $A_m$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 3. On en déduit que  $A_m$  est diagonalisable si et seulement si  $m = 2$ .

De plus,  $A_m$  est inversible si et seulement si  $0 \notin \text{Sp}(A_m)$  i.e.  $m \neq 1$ .

3. Dans le cas où  $A_m$  est diagonalisable i.e.  $m = 2$ , une base de vecteurs propres est  $\text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . On peut donc choisir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Solution 120

1. On calcule  $\chi_A = X^3 - X - 1$ . On étudie sur  $\mathbb{R}$  la fonction polynomiale  $x \mapsto \chi_A(x)$ .

$x$	$-\infty$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1$	$+\infty$
$\chi'_A(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$\chi_A(x)$	$-\infty$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}-1$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}-1$	$-1$	$+\infty$

Comme  $\chi_A(-1/\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$  et  $\chi_A(1) = -1 < 0$ , les variations de  $\chi_A$  et le théorème des valeurs intermédiaires montrent que  $\chi_A$  ne s'annule qu'une fois sur  $\mathbb{R}$  en un réel  $a > 1$ .

Comme  $\chi_A$  est un polynôme à coefficients réels de degré 3,  $\chi_A$  possède encore deux racines complexes non réelles conjuguées (et donc distinctes). On en déduit que  $\chi_A$  est simplement scindé sur  $\mathbb{C}$  de sorte que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

2. Comme  $A$  est diagonalisable,  $A$  est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $A$ . On montre sans peine que  $A^n$  est alors semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les puissances  $n^{\text{èmes}}$  des valeurs propres de  $A$ . La trace étant un invariant de similitude,  $\text{tr}(A^n) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^n$ . Comme  $A$  est à coefficients entiers,  $A^n$  l'est également et sa trace est notamment un entier.

**REMARQUE.** La trigonalisabilité suffit pour aboutir au même résultat.

3. Notons  $\mu = re^{i\theta}$  et  $\bar{\mu} = re^{-i\theta}$  les deux autres valeurs propres conjuguées de  $A$  ( $r > 0$ ). D'après la question précédente et un peu de trigonométrie,

$$|\sin(\pi a^n)| = |\sin(\pi(\mu^n + \bar{\mu}^n))| = |\sin(2\pi r^n \cos(n\theta))| \leq 2\pi r^n |\cos(n\theta)| \leq 2\pi r^n$$

Or  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\bar{\mu}$  sont les racines de  $\chi_A = X^3 - X - 1$  donc, d'après les liens coefficients/racines,  $\lambda\mu\bar{\mu} = 1$  i.e.  $ar^2 = 1$ . Comme  $a > 1$ ,  $0 < r < 1$ . On en déduit que  $\sum r^n$  converge. La majoration précédente montre que la série  $\sum \sin(\pi a^n)$  converge (absolument).

### Solution 121

Posons  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Alors  $\chi_M = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ . On prouve alors que  $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

On va maintenant s'inspirer de la diagonalisation de  $M$  pour effectuer celle de  $B$ . Comme  $A$  est diagonalisable, il existe une matrice inversible  $Q$  et une matrice inversible  $D$  telles que  $A = QDQ^{-1}$ . Posons alors  $R = \begin{pmatrix} 2Q & Q \\ Q & Q \end{pmatrix}$ . On vérifie alors que  $R$  est inversible et que  $R^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1} \end{pmatrix} \text{ puis que}$$

$$B = R \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix} R^{-1}$$

Ainsi  $B$  est bien diagonalisable.

### Solution 122

1. Récurrence.

2. Soit  $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto MB - BM$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi(A^k) = kA^k$ . Or  $\Phi$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie donc il possède un nombre fini de valeurs propres. Il existe donc  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0$ . Ainsi  $A$  est nilpotente.

### Solution 123

Notons  $\mathcal{N}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  engendré par les matrices nilpotentes et  $\mathcal{T}$  celui des matrices de trace nulle. Comme une matrice nilpotente admet 0 comme seule valeur propre, sa trace est nulle. Ainsi  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ . Notons  $(E^{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Comme  $\mathcal{T}$  est un hyperplan, on montre aisément qu'il possède pour base la concaténation des familles

$$(E^{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n} \quad \text{et} \quad (E^{i,i} + E^{i,i+1} - E^{i+1,i} - E^{i+1,i+1})_{1 \leq i \leq n-1}$$

Les matrices  $E^{i,j}$  pour  $i \neq j$  sont clairement nilpotentes (triangulaires strictes). Les matrices  $E^{i,i} + E^{i,i+1} - E^{i+1,i} - E^{i+1,i+1}$  le sont également puisque la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  est nilpotente (carré nul). On en déduit que  $\mathcal{T} \subset \mathcal{N}$ .

### Solution 124

1. La condition n'est pas suffisante. Il existe des endomorphismes de rang 1 qui ne sont pas des projecteurs. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , on peut par exemple définir  $f$  en posant  $f(e_1) = 2e_1$  et  $f(e_i) = 0_E$  pour  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Alors  $f$  est clairement de rang 1 et  $f \circ f(e_1) = 4e_1 \neq f(e_1)$  donc  $f$  n'est pas un projecteur.

La condition n'est pas non plus nécessaire. Il existe des projecteurs de rang différent de 1. On peut par exemple considérer l'endomorphisme nul.

2. On a alors  $\dim \text{Ker } f = n - 1$ . 0 est donc valeur propre de  $f$  et sa multiplicité dans  $\chi_f$  est au moins égale à  $n - 1$ . Il existe donc  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $\chi_f = X^{n-1}(X - \alpha)$ . Or

$$\text{tr}(f) = 0 \times (n - 1) + 1 \times \alpha = \alpha$$

donc  $\alpha = 1$ . Ainsi 1 est valeur propre de  $f$ . De plus,  $\dim \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = 1$  et  $\dim \text{Ker } f = n - 1$  donc  $f$  est diagonalisable et  $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker } f$ . Si on note  $(e_1, \dots, e_n)$  une base adaptée à cette décomposition en somme directe, il est clair que  $f^2(e_1) = e_1 = f(e_1)$  et  $f^2(e_i) = 0_E = f(e_i)$  pour  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  donc  $f$  est un projecteur.

3. Notons  $(E^{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Les matrices  $E^{i,i}$  pour  $1 \leq i \leq n$  sont bien de rang 1 et de trace 1 de même que les matrices  $E^{i,i} + E^{i,j}$  pour  $1 \leq i \neq j \leq n$ . On vérifie que ces  $n^2$  matrices forment bien une famille libre et donc une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Les endomorphismes de  $E$  dont les matrices dans une base donnée de  $E$  sont ces matrices forment alors également une base de  $\mathcal{L}(E)$  et ce sont des projecteurs d'après la question précédente.

### Solution 125

Remarquons que  $X^n - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$  donc le polynôme minimal  $\pi_A$  divise  $X^n - 1$ . De plus, il n'existe pas de polynôme annulateur de  $A$  de degré strictement inférieur à  $n$  sinon la famille  $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$  serait libre. On en déduit que  $\pi_A = X^n - 1$ . Or  $\pi_A$  divise  $\chi_A$  et  $\deg \chi_A = n$  donc  $\chi_A = \pi_A = X^n - 1$ . Les valeurs propres de  $A$  sont donc les racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité et sont toutes de multiplicités 1. Ainsi

$$\text{tr}(A) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \frac{e^{2in\pi} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = 0$$

**Solution 126**

On notera classiquement  $\pi_M$  le polynôme minimal d'une matrice  $M$ .

1. Posons  $n = \deg \pi_A$  et  $P = X^n \pi_A \left( \frac{1}{X} \right)$ . Comme  $A$  est inversible, le coefficient constant de  $\pi_A$  est non nul et  $\deg P = n$ .  $P$  est un polynôme annulateur de  $A^{-1}$  donc  $\pi_{A^{-1}}$  divise  $P$ . En particulier,  $\deg \pi_{A^{-1}} \leq n$ . De même, en posant  $p = \deg \pi_{A^{-1}}$  et  $Q = X^p \pi_{A^{-1}} \left( \frac{1}{X} \right)$ ,  $\deg Q = p$  et on trouve que  $\pi_A$  divise  $Q$ . En particulier,  $\deg \pi_A \leq p$ .

Finalement,  $\deg \pi_{A^{-1}} = \deg P$ . En notant  $a$  le coefficient constant (non nul) de  $\pi_A$ , on a  $\pi_{A^{-1}} = \frac{1}{a} P$  car  $\pi_{A^{-1}}$  est unitaire par convention.

2. Puisque pour tout polynôme  $P$  et toute matrice  $M$  à coefficients réels

$$P(M) = 0 \iff P(M)^T = 0 \iff P(M^T) = 0$$

$A$  et  $A^T = A^{-1}$  ont le même polynôme minimal. Si ce polynôme minimal était de degré impair, il admettrait une racine réelle  $\lambda$ . Ainsi  $A$  admettrait  $\lambda$  pour valeur propre. Soit  $X$  un vecteur propre associé à cette valeur propre. On a donc  $AX = \lambda X$  et donc  $\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ . Mais comme  $A$  est orthogonale,  $\|AX\| = \|X\|$  d'où  $\lambda = \pm 1$  ( $\|X\| \neq 0$  car un vecteur propre est non nul). Ceci contredit l'énoncé. C'est donc que le polynôme minimal de  $A$  est de degré pair.

**Solution 127**

1. Les deux premières colonnes de  $A$  ne sont pas colinéaires et les autres colonnes sont toutes colinéaires à la seconde. Ainsi  $\text{rg}(A) = 2$  puis  $\dim \text{Ker}(A) = n - 2$ .
2. La matrice  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable.
3. Comme  $A$  est diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre 0 est la dimension du sous-espace propre associé, c'est-à-dire  $n - 2$ .

$$4. \text{ Remarquons que } \chi_A(1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Via l'opération } C_1 \leftarrow 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n, \chi_A(1) = \begin{vmatrix} \alpha & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha$$

où  $\alpha = -\sum_{k=2}^n k^2 < 0$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_A(x) = +\infty$ ,  $\chi_A$  admet une racine  $\lambda > 1$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que  $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - \mu)$ . Mais  $\text{tr}(A) = 1 = \lambda + \mu$  donc  $\mu = 1 - \lambda$ . On en déduit que  $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$  avec  $\lambda > 1$ .

5. Comme  $A$  est diagonalisable,  $\pi_A$  est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de  $A$ . Ainsi  $\pi_A = X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda) = X^3 - X^2 + \lambda(1 - \lambda)X$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Or  $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - 1 + \lambda)$  donc, comme vu à la question précédente,

$$\lambda(1 - \lambda) = \chi_A(1) = -\sum_{k=2}^n k^2$$

Finalement, un polynôme annulateur de  $A$  est  $X^3 - X^2 - \left( \sum_{k=2}^n k^2 \right) X$ .

**Solution 128**

1. On sait que le rang de  $B$  est le rang de la famille de ses colonnes. Comme les  $n$  dernières colonnes de  $B$  sont également les  $n$  dernières, le rang de  $B$  est celui de  $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ . Mais le rang de  $B$  est également le rang de la famille de ses lignes donc  $\text{rg } B = \text{rg } A$ .



2. Une récurrence simple montre que  $B^p = \begin{pmatrix} A^p & A^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ . De plus,  $B^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ .

Soit  $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p \in \mathbb{R}[X]$ . Alors

$$\begin{aligned} P(B) &= a_0 I_{2n} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p B^p \\ &= a_0 \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \begin{pmatrix} A^p & A^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) - a_0 I_n \\ 0 & a_0 I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car  $a_0 = P(0)$ .

3. Comme  $A$  est diagonalisable, le polynôme minimal  $\pi_A$  de  $A$  est scindé à racines simples.

Supposons que  $A$  n'est pas inversible. Alors  $0 \in \text{Sp}(A)$  donc  $0$  est racine de  $\pi_A$  i.e.  $\pi_A(0) = 0$ . D'après la question précédente,  $\pi_A(B) = 0$  et donc  $B$  est diagonalisable puisque  $\pi_A$  est scindé à racines simples.

Supposons que  $A$  est inversible. Alors  $0$  n'est pas racine de  $\pi_A$ . Le polynôme  $P = X\pi_A$  est donc encore scindé à racines simples et annule  $B$  d'après la question précédente.  $B$  est encore diagonalisable.

## Solution 129

1. On calcule le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} \chi_{A_m}(X) &= \begin{vmatrix} X+m+1 & -m & -2 \\ m & X-1 & -m \\ 2 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X+m-1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ X+m-1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ &= (X+m-1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} & \text{en factorisant la première colonne} \\ &= (X+m-1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 0 & 0 & X+m-1 \end{vmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= (X+m-1)^2 (X-1) \end{aligned}$$

On traite d'abord le cas  $m = 0$ . Alors  $\chi_{A_0} = (X-1)^3$ . Comme  $\pi_{A_0}$  divise  $\chi_{A_0}$  et est unitaire,  $\pi_{A_0}$  vaut  $(X-1)$ ,  $(X-1)^2$  ou  $(X-1)^3$ . On  $M \neq I_3$ ,  $\pi_{A_0} \neq X-1$ . Un calcul montre que  $(A_0 - I_3)^2 = 0$  donc  $\pi_{A_0} = (X-1)^2$ .

On suppose ensuite  $m \neq 0$ . Puisque  $\text{Sp}(A_m) = \{1, 1-m\}$  et  $\pi_{A_m}$  divise  $\chi_{A_m}$ ,  $\pi_{A_m}$  vaut  $(X-1)(X+m-1)$  ou  $(X-1)(X+m-1)^2$ . Un calcul donne

$$(A - I_3)(A + (m-1)I_3) = \begin{pmatrix} m(2-m) & 0 & m(m-2) \\ 0 & 0 & 0 \\ m(2-m) & 0 & m(m-2) \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est nulle que si  $m = 2$ . On en déduit que  $\pi_{A_2} = (X + 1)(X - 1)$  et si  $m \neq 2$ ,  $\pi_{A_m} = (X - 1)(X + m - 1)^2$ .  
On récapitule :

- $\pi_{A_0} = (X - 1)^2$ ;
- $\pi_{A_2} = (X - 1)(X + 1)$ ;
- $\pi_{A_m} = (X - 1)(X + m - 1)^2$  si  $m \notin \{0, 2\}$ .

### Solution 130

$X^n - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Comme  $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$  est libre, il n'existe pas de polynôme annulateur de  $A$  de degré strictement inférieur à  $n$ . Ainsi  $\pi_A = X^n - 1$ . De plus  $\pi_A \mid \chi_A$  et  $\deg \chi_A = n$  donc  $\chi_A = \pi_A = X^n - 1$ . Le coefficient de  $X^{n-1}$  dans  $\chi_A$  est  $-\text{tr}(A)$ . Comme  $n \geq 2$ ,  $\text{tr}(A) = 0$ .

### Solution 131

1. On a clairement  $\chi_M = \chi_A^2$  (déterminant triangulaire par blocs). Les polynômes  $\chi_M$  et  $\chi_A$  ont donc les mêmes racines. Ainsi  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(M)$ .
2. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ nA^n & A^n \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ AP'(A) & P(A) \end{pmatrix}$$

3. Supposons que  $M$  soit diagonalisable. Son polynôme minimal  $\pi_M$  est donc scindé à racines simples. D'après la question précédente,  $\pi_M$  et  $X\pi'_M$  annulent  $A$ . Ainsi  $\pi_A$  divise  $\pi_M$  et  $X\pi'_M$ . Comme  $\pi_M$  est scindé à racines simples,  $\pi_M \wedge \pi'_M = 1$ . Or  $\pi_A$  divise  $\pi_M$  donc  $\pi_A \wedge \pi'_M = 1$  également. D'après le lemme de Gauss,  $\pi_A$  divise  $X$  i.e.  $\pi_A = X$  puis  $A = 0$ .  
Réciproquement, si  $A = 0$ ,  $M = 0$  est diagonalisable.

### Solution 132

1. On vérifie que pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $G_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ . Ainsi  $u \mapsto G_u$  est bien à valeurs dans l'algèbre  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ .  
Il est clair que  $u \mapsto G_u$  est linéaire. De plus,  $G_{\text{Id}_E} = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$  et pour tout  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ ,  $G_{u \circ v} = G_u \circ G_v$ . Ainsi  $u \mapsto G_u$  est bien un morphisme d'algèbres.  
Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $G_u = 0$ . Alors  $u = G_u(\text{Id}_E) = 0$  donc  $u \mapsto G_u$  est injectif.  
On montre de la même manière que  $u \mapsto D_u$  est un morphisme d'algèbres injectif.
2. Démonstration laissée au lecteur. C'est en fait vrai pour tout morphisme d'algèbres  $\Phi : E \rightarrow F$  : pour tout  $x \in E$  et tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\Phi(P(x)) = P(\Phi(x))$ .
3. D'après une question précédente,  $P(G_u) = 0 \iff G_{P(u)} = 0$ . Mais, par injectivité de  $u \mapsto G_u$ ,  $G_{P(u)} = 0 \iff P(u) = 0$ . Ainsi  $u$  et  $G_u$  ont le même idéal annulateur et également le même polynôme minimal i.e.  $\pi_{G_u} = \pi_u$ .  
On montre de la même manière que  $\pi_{D_u} = \pi_u$ .
4. Il suffit d'utiliser la question précédente et le fait qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.
5. Si  $u$  est diagonalisable,  $G_u$  et  $D_u$  le sont également. Comme  $G_u$  et  $D_u$  commutent, on montre classiquement qu'ils sont simultanément diagonalisables i.e. il existe une base de  $\mathcal{L}(E)$  constituée de vecteurs propres communs à  $G_u$  et  $D_u$ . C'est aussi une base de vecteurs propres de  $G_u - D_u$  qui est donc aussi diagonalisable.

6. On s'inspire des questions précédentes. Si  $u$  est nilpotent alors  $\pi_u = \Pi_{G_u} = \Pi_{D_u} = X^p$  pour un certain  $p \in \mathbb{N}^*$ , donc  $G_u$  et  $D_u$  sont nilpotents. Comme ils commutent,

$$(G_u - D_u)^{2p-1} = \sum_{k=0}^{2p-1} \binom{2p-1}{k} G_u^k D_u^{2p-1-k}$$

Tous les termes de cette somme sont nuls puisque si  $k \geq p$ ,  $G_u^k = 0$  et si  $k < p$ ,  $2p-1-k \geq p$  et  $D_u^{2p-1-k} = 0$ . Donc  $G_u - D_u$  est nilpotent.

## Séries et familles sommables

### Solution 133

Remarquons que l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1-x} dx$  converge. En effet,  $\sin(\pi x) = \sin(\pi(1-x)) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \pi(1-x)$  donc  $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$  est prolongeable en une fonction  $\varphi$  continue sur le segment  $[0, 1]$ .

Posons  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Alors

$$\begin{aligned} I - S_n &= \int_0^1 \left( \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^n x^k \right) \sin(\pi x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1-x} \sin(\pi x) dx \\ &= \int_0^1 x^{n+1} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Comme  $\varphi$  est continue et positive sur le segment  $[0, 1]$ , il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $0 \leq \varphi(x) \leq M$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . On en déduit que

$$0 \leq I - S_n \leq M \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{M}{n+2}$$

Donc  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} I$  via le théorème des gendarmes.

### Solution 134

On sait, du moins j'espère, que

$$u_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Par une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{u_n} = 6 \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right)$$

On pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . On montre classiquement qu'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} &= 6 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{4}{2k+1} \right) \\
 &= 6 \left( H_n + H_{n+1} - 1 - 4 \left( \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) \right) \\
 &= 6 \left( H_n + H_{n+1} - 1 - 4 \left( H_{2n+1} - 1 - \frac{1}{2} H_n \right) \right) \\
 &= 6 (3H_n + H_{n+1} - 4H_{2n+1} + 3) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 6 (3 \ln(n) + 3\gamma + \ln(n+1) + \gamma - 4 \ln(2n+1) - 4\gamma + 3 + o(1)) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 6 \left( \ln \left( \frac{n^3(n+1)}{(n+1/2)^4} \right) + 3 - 4 \ln(2) + o(1) \right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 6 (3 - 4 \ln(2)) + o(1)
 \end{aligned}$$

car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3(n+1)}{(n+1/2)^4} = 1$ . On en déduit que  $\sum \frac{1}{u_n}$  converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = 6 (3 - 4 \ln(2))$$

On peut vérifier avec Python.

```

>>> from math import log
>>> def somme(n):
...     s=0
...     S=0
...     for k in range(1,n+1):
...         s += k**2
...         S += 1/s
...     return S
...
>>> somme(1000), 6*(3-4*log(2))
(1.364466169557005, 1.3644676665613131)

```

### Solution 135

1. C'est du cours.

2. a. Supposons  $\lambda \neq 0$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$  et  $\sum u_n$  diverge. Si  $\lambda \in \{-\infty, +\infty\}$ ,  $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$  et  $(u_n)$  est de signe constant à partir d'un certain rang donc  $\sum u_n$  diverge.  
Par l'absurde,  $\lambda = 0$ .

b. Remarquons que  $(u_n)$  est positive puisqu'elle est décroissante de limite nulle.

Notons  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Par décroissance de  $(u_n)$ ,

$$0 \leq 2nu_{2n} = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = 2(S_{2n} - S_n)$$

Comme  $\sum u_n$  converge,  $(S_{2n} - S_n)$  converge vers 0 puis  $(2nu_{2n})$  également via le théorème des gendarmes. Par ailleurs,

$$0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = 2nu_{2n} + u_{2n}$$

A nouveau,  $((2n+1)u_{2n+1})$  converge vers 0 par le théorème des gendarmes. On peut alors conclure que  $(nu_n)$  converge vers 0 puisque c'est le cas pour ses suites extraites  $(2nu_{2n})$  et  $((2n+1)u_{2n+1})$ .

c. Remarquons que

$$n(u_n - u_{n+1}) = (nu_n - (n+1)u_{n+1}) + u_{n+1}$$

Puisque la suite  $(nu_n)$  converge, la série télescopique  $\sum nu_n - (n+1)u_{n+1}$  converge. De plus,  $\sum u_{n+1}$  converge par hypothèse. Ainsi,  $\sum n(u_n - u_{n+1})$  converge comme somme de deux séries convergentes. On peut rajouter que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (nu_n - (n+1)u_{n+1}) + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

### Solution 136

Pour simplifier l'exercice, on remarquera que, via le changement de variable  $u = \tan x$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du$$

1. Pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \frac{u^n}{1+u^2} \leq u^n$  donc

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes,  $(I_n)$  converge vers 0.

2. Il est clair que

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}$$

3. Remarquons que

$$(-1)^n I_{2n} + (-1)^{n+1} I_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

donc en posant  $v_n = (-1)^n I_{2n}$ ,

$$v_n - v_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

La série télescopique  $\sum v_n - v_{n+1}$  converge puisque  $(v_n)$  converge vers 0. On en déduit que  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$  converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n - v_{n+1} = v_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

**REMARQUE.** On aurait aussi pu utiliser le critère spécial des séries alternées pour montrer que  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$  converge.

4. Pour tout  $u \in [0, 1]$ ,

$$\frac{u^n}{1+u^2} \leq \frac{u^{n+1}}{1+u^2}$$

donc  $I_{n+1} \leq I_n$ . La suite  $(I_n)$  converge vers 0 en décroissant donc la série  $\sum (-1)^n I_n$  converge d'après le critère spécial des séries alternées.

Posons  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k$ . Alors

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k u^k}{1+u^2} du && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} du && \text{somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{(1+u)(1+u^2)} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} du \end{aligned}$$

On prouve comme précédemment que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} du \leq \int_0^1 u^{n+1} du = \frac{1}{n+2}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)} du = 0$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{du}{(1+u)(1+u^2)}$$

Par une décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-u}{1+u^2} + \frac{1}{1+u} \right)$$

donc

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2} \left[ \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \ln(1+u) \right]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$$

On vérifie avec Python.

```
>>> from numpy import pi, log
>>> from scipy.integrate import quad
>>> I=lambda n:quad(lambda u:u**n/(1+u**2),0,1)[0]
>>> S=sum([(-1)**n*I(n) for n in range(1000)])
>>> S, pi/8+log(2)/4
(0.5657357520891468, np.float64(0.5659858768387105))
```

### Solution 137

Pour tout entier  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}} &= \frac{n}{n-1} \left( 2 - e^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \left( 2 - e^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left( 1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi  $v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Par conséquent  $\sum v_n$  converge.

Mais comme  $v_n = \ln(nu_n) - \ln((n-1)u_{n-1})$ , on peut affirmer grâce au lien entre suite et série télescopique que la suite  $(\ln(nu_n))$  converge.

Notons  $\ell$  sa limite. Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = e^\ell$  i.e.  $u_n \sim \frac{e^\ell}{n}$ . Comme la série à termes positifs  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, il en est de même de la série  $\sum u_n$ .

### Solution 138

1. La fonction  $f : x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$  est strictement décroissante sur  $]0, 1]$  (elle est dérivable et sa dérivée est  $x \mapsto -\frac{e^x}{x}$ ). Comme  $\frac{e^t}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ ,  $\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$  diverge. Puisque  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est positive,  $\lim_{0^+} f = +\infty$ . Par ailleurs,  $f(1) = 0$ . Enfin,  $f$  est continue sur  $]0, 1]$  donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $u_n \in ]0, 1]$  tel que  $f(u_n) = n$ .
2. D'après la question précédente,  $f$  induit une bijection strictement décroissante de  $]0, 1]$  sur  $[0, +\infty[$ . Sa bijection réciproque est donc également strictement décroissante. Comme  $u_n = f^{-1}(n)$ ,  $(u_n)$  est strictement décroissante. de plus,  $\lim_{0^+} f = +\infty$  donc  $\lim_{+\infty} f^{-1} = 0$ . Par conséquent,  $(u_n)$  converge vers 0.
3. Remarquons que

$$v_n = \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt - \int_{u_n}^1 \frac{dt}{t} = \int_{u_n}^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ , l'intégrale  $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$  converge. Comme  $(u_n)$  converge vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$$

4. Posons  $I = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ . Ainsi  $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -n + I + o(1)$  puis  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^I}{n}$ . On en déduit que  $\sum u_n$  diverge.

### Solution 139

On va raisonner par récurrence. Notons  $\mathcal{P}_p$  l'assertion

Pour tout  $n \in \llbracket 2^p, 2^{p+1} - 1 \rrbracket$ ,  $a_n$  est défini et  $a_n = 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} = 2^p$

$\mathcal{P}_0$  est évidemment vraie. Supposons  $\mathcal{P}_p$  vraie pour un certain  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soit alors  $n \in \llbracket 2^{p+1}, 2^{p+2} - 1 \rrbracket$ . Alors  $\lfloor n/2 \rfloor \in \llbracket 2^p, 2^{p+1} - 1 \rrbracket$  donc  $a_n$  est bien défini et

$$a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2 \cdot 2^p = 2^{p+1} = 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}$$

de sorte que  $\mathcal{P}_{p+1}$  est vraie.

Ainsi  $\mathcal{P}_p$  est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Comme la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$  est à termes positifs, elle converge ou diverge vers  $+\infty$ . Il suffit donc de considérer une suite extraite de la suite  $(S_n)$  de ses sommes partielles pour déterminer sa nature et sa somme éventuelle.

$$\forall p \in \mathbb{N}, S_{2^{p+1}-1} = \sum_{k=0}^p \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{a_j^2} = \sum_{k=0}^p \sum_{k=0}^p \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{(2^k)^2} = \sum_{k=0}^p \frac{2^k}{(2^k)^2} = \sum_{k=0}^p \frac{1}{2^k}$$

Ainsi  $S_{2^{p+1}-1}$  est la somme partielle de rang  $p$  de la série géométrique  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k}$ . On en déduit que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2^{p+1}-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$ . On en déduit

que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$  converge et que sa somme est 3.

**REMARQUE.** On aurait aussi pu utiliser le théorème de sommation par paquets à la famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et à la partition  $\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{p \in \mathbb{N}} \llbracket 2^p, 2^{p+1} - 1 \rrbracket$ .

### Solution 140

1. Avec les notations de l'énoncé,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2$  est à termes positifs donc la suite  $(S_n)$  converge ou diverge vers  $+\infty$ .  
 Supposons qu'elle converge. Alors elle converge vers une limite  $\ell$  strictement positive ( $S_n \geq S_1 = a_1^2 > 0$ ). Alors  $(a_n)$  converge vers  $1/\ell$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2$  divergerait alors grossièrement, ce qui contredirait la convergence de la suite  $(S_n)$ .  
 Par conséquent, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2$  diverge et la suite  $(S_n)$  converge vers  $+\infty$ . Puisque  $a_n = \frac{a_n S_n}{S_n}$ ,  $(a_n)$  converge vers 0.
2. La suite  $(S_n)$  est clairement croissante. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [S_{n-1}, S_n]$ . Alors, par croissance de  $t \mapsto t^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$(S_n - S_{n-1})S_{n-1}^2 \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt \leq (S_n - S_{n-1})S_n^2$$

ou encore, en posant  $u_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt$ ,

$$a_n^2 S_{n-1}^2 \leq u_n \leq a_n^2 S_n^2$$

On rappelle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 S_n^2 = 1$ . De plus,

$$a_n^2 S_{n-1}^2 = a_n^2 (S_n - a_n)^2 = a_n^2 S_n^2 - 2S_n a_n^3 + a_n^4$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 S_{n-1}^2 = 1$ . D'après le théorème des gendarmes,  $(u_n)$  converge vers 1.

3. Remarquons que

$$\sum_{k=1}^n u_k = \int_0^{S_n} t^2 dt = \frac{S_n^3}{3}$$

Par sommation de relation de comparaison pour les séries divergentes à termes positifs,  $\sum_{k=1}^n u_k \sim n$ . On en déduit que  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$

et, comme  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$ ,  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ .

## Solution 141

1. Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ . Puisque  $u_n = \ell + o(1)$  et que la série  $\sum 1$  est une série à termes positifs divergente,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \ell + o\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right)$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\ell + o(n)$$

et enfin

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1)$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell$$

2. a.  $f(x) - x \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\lambda x^\alpha$  donc  $x \mapsto f(x) - x$  est de même signe que  $x \mapsto -\lambda x^\alpha$  au voisinage de  $0^+$ . Ainsi il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $x \mapsto f(x) - x$  est négative sur  $[0, \varepsilon]$  et ne s'annule qu'en 0.
- b. Par hypothèse,  $f$  est positive sur  $[0, \varepsilon]$ . Comme 0 est le seul point fixe de  $f$  sur  $[0, \varepsilon]$ ,  $x \mapsto f(x) - x$  est de signe constant sur cet intervalle puisqu'elle y est continue. Or  $f(x) - x \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\lambda x^\alpha$  donc  $x \mapsto f(x) - x$  est négative sur  $[0, \varepsilon]$ . On en déduit que

$$\forall x \in [0, \varepsilon], 0 \leq f(x) \leq x \leq \varepsilon$$

On en déduit alors aisément que  $(u_n)$  est à valeurs dans  $[0, \varepsilon]$  et décroissante. Elle converge donc d'après le théorème de convergence monotone et continuité de  $f$ ,  $(u_n)$  converge vers l'unique point fixe de  $f$  sur  $[0, \varepsilon]$ , à savoir 0.



c. Tout d'abord,  $\alpha > 1$  donc  $x^{\alpha-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . On peut alors utiliser le développement limité usuel de  $(1+u)^\beta$  lorsque  $u$  tend vers 0 :

$$f(x)^{1-\alpha} = x^{1-\alpha} (1 - \lambda x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}))^{1-\alpha} = x^{1-\alpha} (1 + (\alpha-1)\lambda x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^{1-\alpha} + (\alpha-1)\lambda + o(1)$$

d. Comme  $(u_n)$  converge vers 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} = (\alpha-1)\lambda$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} = (\alpha-1)\lambda$$

D'après la première question

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{1-\alpha} - u_k^\alpha = (\alpha-1)\lambda$$

ou encore

$$u_n^{1-\alpha} - u_0^{1-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\alpha-1)\lambda n$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha-1)\lambda n = +\infty$  de sorte que

$$u_n^{1-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\alpha-1)\lambda n$$

et enfin

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} ((\alpha-1)\lambda n)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

e. Dans le cas de la fonction  $x \mapsto \sin x$ , on a  $\lambda = \frac{1}{6}$ ,  $\alpha = 3$  donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Dans le cas de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$ , on a  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = 2$  donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

## Solution 142

1. Puisque  $\cos$  est bornée,  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ . En particulier,  $(v_n)$  converge vers 0. Par conséquent,  $(\cos(v_{n-1}))$  converge vers 1 puis  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ . Puisque la série harmonique est une série à termes positifs divergente, la série  $\sum v_n$  diverge également.

2. Il suffit de constater que cette série vérifie le critère des séries alternées.

3. Il nous faut un développement asymptotique de  $(v_n)$ . On remarque que  $v_n - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{v_{n-1}^2}{n}\right)$ . Or  $v_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  donc  $v_n - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ . Par conséquent,  $(-1)^n v_n = \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ . Puisque la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge et que la série  $\sum \frac{1}{n^3}$  est une série à termes positifs convergente, la série  $\sum (-1)^n v_n$  converge également.

## Solution 143

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left(-n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(-\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or la série  $\sum \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n}$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\sum u_n$  converge en tant que somme de deux séries convergentes.

**Solution 144**

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + u_n\end{aligned}$$

avec  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ . La série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées, la série  $\sum u_n$  converge par comparaison à une série de Riemann mais la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge. Par conséquent, la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  diverge.

**REMARQUE.** Pourtant,  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . La condition de positivité est donc nécessaire pour le critère de convergence par équivalence.

**Solution 145**

1. Puisque  $(a_n)$  converge vers 0,

$$\ln(1 + a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a_n - \frac{a_n^2}{2} + \mathcal{O}(a_n)^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  vérifie le critère spécial des séries alternées donc converge. La série  $\sum \frac{1}{n^3}$  converge. Enfin la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge vers  $+\infty$ . On en déduit que la série  $\sum \ln(1 + a_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

2. Par propriété du logarithme

$$\ln\left(\prod_{k=2}^n (1 + a_k)\right) = \sum_{k=2}^n \ln(1 + a_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

Par passage à l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \prod_{k=2}^n (1 + a_k) \right) = 0$$

**Solution 146**

1. Pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\ln(n) - \ln(n-1) = -\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Or  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x^2)$  donc

$$\ln(n) - \ln(n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2. Posons  $u_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$  pour  $n \geq 2$ . D'après la question précédente,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum u_n$  converge. Notamment la suite des sommes partielles admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  i.e.

$$\sum_{k=2}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1)$$

Or

$$\sum_{k=2}^n u_k = \ln(n) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

avec  $\gamma = 1 - \ell$ .

### Solution 147

Remarquons que

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k+1}^2 = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{k^3}$$

Comme la série  $\sum \frac{1}{n^3}$  est une série à termes positifs convergente,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k+1}^2 = \frac{1}{2(n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

### Solution 148

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'une part,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+1}{3n+3}$$

D'autre part,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Par concavité de  $\ln$ ,

$$\frac{1}{3} \ln(3n+3) + \frac{2}{3} \ln(3n) \leq \ln\left(\frac{1}{3}(3n+3) + \frac{2}{3} \cdot 3n\right) = \ln(3n+1)$$

Ainsi

$$\ln(3n+1) - \ln(3n+3) \geq \frac{2}{3} \ln(3n) - \frac{2}{3} \ln(3n+3) = \frac{2}{3} \ln(n) - \frac{2}{3} \ln(n+1)$$

On conclut en par croissance de l'exponentielle.

2. D'après la question précédente, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est croissante. Notamment, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{u_n}{v_n} \geq \frac{u_1}{v_1} = \frac{1}{3}$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \frac{1}{3}v_n$ . Or  $\sum \frac{1}{3}v_n$  est une série à termes positifs divergente donc  $\sum u_n$  diverge.

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$w_n = -\frac{2}{3} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{3(n+1)}\right)$$

Puisque  $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u + \mathcal{O}(u^2)$ , on en déduit que  $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ . Comme  $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$  est une série à termes positifs convergente,  $\sum w_n$  converge (absolument).

4. Il existe donc  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que

$$\sum_{k=1}^{n-1} w_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Par télescopage, ceci signifie que

$$\frac{2}{3} \ln(n) + \ln(u_n) - \ln(u_1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Par passage à l'exponentielle

$$n^{\frac{2}{3}} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_1 e^\ell = \frac{1}{3} e^\ell$$

En posant  $C = \frac{1}{3} e^\ell$  et  $a = \frac{2}{3}$ , on a bien le résultat voulu.

### Solution 149

1. Notons  $J_n$  l'intégrale à calculer. Tout d'abord,  $J_0 = 2\pi^2$  et, si  $n \neq 0$ , on intègre par parties

$$\int_0^{2\pi} t e^{-int} dt = -\frac{1}{in} [t e^{-int}]_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt = \frac{2i\pi}{n}$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} a_n b_m \int_0^{2\pi} t e^{-i(n+m)t} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} t \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} a_n b_m e^{-int} e^{-imt} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} t \left( \sum_{n \in \mathbb{I}} a_n e^{-int} \right) \left( \sum_{m \in \mathbb{I}} b_m e^{-imt} \right) dt \end{aligned}$$

Posons  $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{I}} a_n e^{-int}$  et  $g(t) = \sum_{m \in \mathbb{I}} b_m e^{-imt}$ . Par inégalité triangulaire,

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} = \left| \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sqrt{t} |f(t)|) (\sqrt{t} |g(t)|) dt$$

puis, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_0^{2\pi} t |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} t |g(t)|^2 dt}$$

Calculons ensuite

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t |f(t)|^2 dt &= \int_0^{2\pi} t f(t) \overline{f(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} t \left( \sum_{n \in \mathbb{I}} a_n e^{-int} \right) \left( \sum_{m \in \mathbb{I}} a_m e^{imt} \right) dt \\ &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} a_n a_m \int_0^{2\pi} t e^{-i(n-m)t} dt \\ &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}^2} a_n a_m J_{n-m} \end{aligned}$$

Or pour  $n \neq m$ ,  $J_{n-m}$  est imaginaire pur et l'intégrale qu'on calcule est réelle de sorte que

$$\int_0^{2\pi} t |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in I} a_n^2 J_0 = 2\pi^2 \sum_{n \in I} a_n^2$$

De la même manière,

$$\int_0^{2\pi} t |g(t)|^2 dt = 2\pi^2 \sum_{n \in I} b_n^2$$

On en déduit le résultat demandé.

3. Soit  $K$  une partie finie de  $(\mathbb{N}^*)^2$ . Il existe une partie finie  $I$  de  $\mathbb{N}^*$  telle que  $K \subset I^2$ . Alors

$$\sum_{(n,m) \in K} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \sum_{(n,m) \in I^2} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in I} a_n^2 \sum_{n \in I} b_n^2} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n^2}$$

Ceci étant valide pour toute partie finie  $K$  de  $(\mathbb{N}^*)^2$ ,

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n^2} < +\infty$$

La famille  $\left(\frac{a_n b_m}{n+m}\right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est donc sommable et

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{|a_n b_m|}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n^2}$$

## Séries entières

### Solution 150

- On sait que  $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ . Le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n x^n$  vaut donc 1 d'après la règle de d'Alembert.
- Puisque  $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$  et que la série à termes positifs  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge,  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  diverge. Il n'y a donc pas convergence en 1.  
Comme  $\sin$  est croissante sur  $[0, 1]$ , la suite  $(u_n)$  est décroissante. De plus, elle converge vers 0. Le critère spécial des séries alternées permet d'affirmer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$  converge. Il y a donc convergence en  $-1$ .
- Première méthode.** La fonction  $\sin$  est concave sur  $[0, 1]$ . On en déduit que  $\sin(x) \geq \sin(1)x$  pour  $x \in [0, 1]$ . Par conséquent, pour  $x \in [0, 1[$ ,

$$f(x) \geq \sin(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \geq \sin(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\sin(1) \ln(1-x)$$

On en déduit par minoration que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**Deuxième méthode.** Les fonctions  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$  sont croissantes sur  $[0, 1[$ . Ainsi  $f$  est-elle également croissante sur  $[0, 1[$ .

Notamment elle admet une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  en  $1^-$ . Fixons  $N \in \mathbb{N}^*$ . Comme les  $f_n$  sont positives sur  $[0, 1[$ ,

$$\forall x \in [0, 1[, f(x) \geq \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

Les deux membres admettant une limite lorsque  $x$  tend vers  $1^-$  (le deuxième membre est une somme *finie*), on obtient par passage à la limite :

$$\ell \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}}$$

La série à termes positifs  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge vers  $+\infty$  donc, en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on obtient  $\ell \geq +\infty$  i.e.  $\ell = +\infty$ .

4. Pour  $x \in [0, 1[$ ,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{n+1} = u_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (u_n - u_{n-1}) x^n$$

**Première méthode.** Pour  $x \in [0, 1]$ ,

$$|(u_n - u_{n-1})x^n| \leq u_{n-1} - u_n$$

Comme la série télescopique  $\sum u_{n-1} - u_n$  converge, la série de fonctions de terme général  $x \mapsto (u_n - u_{n-1})x^n$  converge normalement et donc uniformément sur  $[0, 1]$ . On peut alors appliquer le théorème d'interversion limite série

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=2}^{+\infty} (u_n - u_{n-1})x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} (u_n - u_{n-1})x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = -u_1$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$ . **Deuxième méthode.** La série entière  $\sum (u_n - u_{n-1})x^n$  admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 puisque  $(u_n - u_{n-1})$  est convergente (vers 0) donc bornée (on peut même montrer que le rayon de convergence vaut exactement 1). De plus, la série télescopique  $\sum u_n - u_{n-1}$  converge puisque la suite  $(u_n)$  converge. On peut alors appliquer le théorème de convergence radial d'Abel pour affirmer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=2}^{+\infty} (u_n - u_{n-1})x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = -u_1$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$ .

## Solution 151

1. Remarquons que  $r_n$  est la somme partielle d'une série de Riemann.

- Si  $\beta > 1$ ,  $(r_n)$  converge vers un réel strictement positif donc  $(b_n)$  également. On en déduit que  $R = 1$ .
- Si  $\beta = 1$ , on montre par comparaison série/intégrale que  $r_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n)$  i.e.  $b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ . Le critère de d'Alembert montre que  $R = 1$ .
- Si  $\beta < 1$ , on montre à nouveau par comparaison série/intégrale que  $r_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}$  i.e.  $b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} (1-\beta)n^{\beta-1}$ . Le critère de d'Alembert montre à nouveau que  $R = 1$ .

2. Etudions maintenant la convergence en 1.

- Si  $\beta > 1$ ,  $(b_n)$  ne converge pas vers 0 donc  $\sum b_n$  diverge grossièrement.
- Si  $\beta = 1$ ,  $b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)}$  donc, a fortiori,  $\frac{1}{n} = o(b_n)$  de sorte que  $\sum b_n$  diverge.
- Si  $\beta < 1$ ,  $b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-\beta}{n^{1-\beta}}$  donc  $\sum b_n$  converge si et seulement si  $1-\beta > 1$  i.e.  $\beta < 0$ .

Pour récapituler,  $\sum b_n$  converge si et seulement si  $\beta < 0$ .

Etudions maintenant la convergence en  $-1$ .

- Supposons  $\beta > 1$ . La suite  $(b_n)$  converge alors vers un réel strictement positif. La suite  $((-1)^n b_n)$  ne tend donc pas vers 0 et la série  $\sum (-1)^n b_n$  diverge grossièrement.
- Supposons  $\beta \leq 1$ . La suite  $(r_n)$  croît vers  $+\infty$  donc la suite  $(b_n)$  décroît vers 0. Le critère des séries alternées assure la convergence de la série  $\sum (-1)^n b_n$ .

## Solution 152

1. Pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\frac{|(-1)^{n+1} \ln(n+1)|}{|(-1)^n \ln(n)|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln(n) x^n$  vaut 1.

2. Soit  $x \in ]-1, 1[$ .

$$\begin{aligned}
 (1+x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^{n+1} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln(n+1) x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln(n) x^{n+1} \quad \text{par changement d'indice et car } \ln(1) = 0 \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall x \in ]-1, 1[, S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

3. **Première méthode.** Soit  $x \in [0, 1]$ . La suite de terme général  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$  décroît vers 0 donc la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$  vérifie le critère spécial des séries alternées. Elle converge et on peut majorer son reste en valeur absolue

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) x^{k+1} \right| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x^{n+2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

Le reste converge donc uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ . La série entière  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$  converge donc uniformément sur  $[0, 1]$  : elle est donc continue sur  $[0, 1]$ . En particulier, elle est continue en 1 de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

**Deuxième méthode.** Comme la suite  $\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$  est décroissante de limite nulle, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées. Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$  vaut 1 (utiliser la règle de d'Alembert par exemple). D'après le théorème de convergence radiale d'Abel,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$ , on en déduit par produit que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

4. Posons  $S_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . On sait déjà que  $(S_N)$  converge. Pour déterminer sa limite, il suffit donc de déterminer la limite de

$(S_{2N})$ .

$$\begin{aligned}
 S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \sum_{n=1}^N \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \ln(2n+1) + \ln(2n-1) - 2\ln(2n) \\
 &= \ln(2N+1) + 2 \sum_{n=1}^N \ln(2n-1) - 2 \sum_{n=1}^N \ln(2n) \\
 &= \ln(2N+1) + 2 \sum_{n=1}^{2N} \ln(n) - 4 \sum_{n=1}^N \ln(2n) \\
 &= \ln(2N+1) + 2\ln((2N)!) - 4N\ln(2) - 4\ln(N!) \\
 &= \ln\left(\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{2^{4N}(N!)^4}\right)
 \end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling,

$$N! \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N} \cdot N^N \cdot e^{-N}$$

donc

$$\begin{aligned}
 ((2N)!)^2 &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} 4\pi N (2N)^{4N} e^{-4N} \\
 (N!)^4 &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} 4\pi^2 N^2 N^{4N} e^{-4N}
 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{2^{4N}(N!)^4} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi}$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N} = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

## Solution 153

1. On prouve aisément par récurrence que  $(a_n)$  est strictement positive. De plus, un argument de concavité montre que  $\ln(1+x) \leq x$  pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$  : la suite  $(a_n)$  est donc décroissante. D'après le théorème de convergence monotone,  $(a_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}_+$ . Par continuité de  $f : x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $\ln(1+\ell) = \ell$ . Une étude rapide de  $x \mapsto \ln(1+x) - x$  montre que 0 est l'unique point fixe de  $f$ . Ainsi  $\ell = 0$ .

2. Comme  $(a_n)$  converge vers 0,  $\ln(1+a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$ .

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  vaut 1.



3. Il s'agit d'étudier la convergence en  $-1$  et  $1$ .

La série  $\sum (-1)^n a_n$  vérifie le critère spécial des séries alternées car  $(a_n)$  est décroissante de limite nulle : cette série converge. Remarquons que

$$\ln(1 + a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a_n \left(1 - \frac{a_n}{2} + o(a_n)\right)$$

Par conséquent

$$\frac{1}{a_{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a_n}{2} + o(a_n)} = \frac{1}{a_n} \left(1 + \frac{a_n}{2} + o(a_n)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} + o(1)$$

Ainsi  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ . Or la série  $\sum \frac{1}{2}$  diverge. Par sommation de relation d'équivalence pour des séries à termes positifs divergentes, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}$$

ou encore

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

Ainsi

$$\frac{1}{a_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

puis

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

On en déduit que la série  $\sum a_n$  diverge par critère de Riemann.

Le domaine de définition de  $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est donc  $] -1, 1[$ .

### Solution 154

Par souci de simplicité, on confondra les fractions rationnelles et leurs fonctions rationnelles associées.

Montrons tout d'abord qu'une fraction rationnelle est développable en série entière en 0 si et seulement si elle n'admet pas 0 pour pôle. Si une fraction rationnelle est développable en série entière en 0, il est clair qu'elle n'admet pas 0 pour pôle.

Soit  $a \in \mathbb{C}^*$ . Il est clair que  $\frac{1}{X-a}$  est développable en série entière en 0. Par dérivations successives,  $\frac{1}{(X-a)^n}$  est également développable en série entière en 0 pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant une décomposition en éléments simples, on prouve qu'une fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle est développable en série entière en 0 de rayon de convergence le minimum des modules de ses pôles.

Soient  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions développables en série entière en 0 et  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fractions rationnelles de  $\mathbb{C}(X)$  n'admettant pas 0 pour pôle.  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}$ .

Notons  $T$  l'application de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  qui à une fonction développable en série entière associe la suite des coefficients de son développement en série entière.  $T$  est bien définie par unicité du développement en série entière. De plus,  $T$  est clairement linéaire et injective.

Notons enfin  $S$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  qui à une suite  $(u_n)$  associe la suite  $(u_{n+1})$ .

Remarquons qu'une suite  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  est récurrente linéaire si et seulement si il existe  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul tel que  $(u_n) \in \text{Ker } P(S)$ . On en déduit en particulier que l'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . En effet, si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont récurrentes linéaires, il existe  $P, Q \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $(u_n) \in \text{Ker } P(S)$  et  $(v_n) \in \text{Ker } Q(S)$ . Mais alors pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,

$$\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in \text{Ker } P(S) + \text{Ker } Q(S) \subset \text{Ker}(PQ)(S)$$

et donc  $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$  est récurrente linéaire.

Soit  $G \in \mathbb{C}[X]$ . Alors  $T(G)$  est une suite presque nulle donc récurrente linéaire.

Soient  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ . On montre classiquement que

$$\text{Ker} \left( S - \frac{1}{a} \text{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} \right) = \left\{ \left( \frac{P(n)}{a^n} \right), P \in \mathbb{C}_{r-1}[X] \right\}$$

Puisque  $T\left(\frac{1}{X-a}\right) = \left(-\frac{1}{a^{n+1}}\right)$  et que

$$\frac{1}{(X-a)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \left(\frac{1}{X-a}\right)^{(r-1)}$$

on obtient en dérivant  $(r-1)$  fois la série entière définissant  $\frac{1}{X-a}$  :

$$T\left(\frac{1}{(X-a)^r}\right) = \left((-1)^r \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} \frac{1}{a^{n+r}}\right)$$

On a donc bien  $T\left(\frac{1}{(X-a)^r}\right)$  de la forme  $\left(\frac{P(n)}{a^n}\right)$  avec  $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$ . Ainsi

$$T\left(\frac{1}{(X-a)^r}\right) \in \text{Ker}\left(S - \frac{1}{a} \text{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}\right) = \text{Ker } Q(S)$$

avec  $Q = \left(X - \frac{1}{a}\right)^r$ . On en déduit que  $T\left(\frac{1}{(X-a)^r}\right)$  est récurrente linéaire.

Soit  $F \in \mathcal{F}$ . Alors  $F$  est la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Ce qui précède montre que  $T(F)$  est récurrente linéaire.

Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{D}$  telle que  $T(f)$  soit une suite récurrente linéaire. Alors il existe  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul tel que  $T(f) \in \text{Ker } P(S)$ . Posons  $P = X^n Q$  où  $Q \in \mathbb{C}[X]$  n'admet pas 0 pour racine. D'après le lemme des noyaux  $T(f) \in \text{Ker } S^n + \text{Ker } Q(S)$ .  $T(f)$  est donc la somme d'une suite presque nulle et d'une suite de  $\text{Ker } Q(S)$ . Il existe donc  $G \in \mathbb{C}[X]$  et  $g \in \mathcal{D}$  tels que  $f = G + g$  avec  $G \in \mathbb{C}[X]$  et  $T(g) \in \text{Ker } Q(S)$ . Si  $Q$  est constant (non nul), alors  $T(g)$  est nulle et  $g$  est nulle par injectivité de  $T$ . Dans ce cas,  $f = G \in \mathcal{F}$ . Sinon, on écrit la décomposition en facteurs irréductibles de  $Q$  :

$$Q = \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{r_i}$$

où les  $a_i$  sont non nuls. Posons  $q = \deg Q$ . On montre que  $\dim \text{Ker } Q(S) = q$  en considérant l'isomorphisme  $\begin{cases} \text{Ker } Q(S) & \longrightarrow & \mathbb{C}^q \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, \dots, u_{q-1}) \end{cases}$ .

La famille  $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{(X-a_i)^{k_i}}\right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq k_i \leq r_i}}$  est libre et  $T$  est injective donc la famille  $T(\mathcal{B})$  est libre. De plus, on a montré plus haut que

$$T\left(\frac{1}{(X-a_i)^{r_i}}\right) \in \text{Ker}\left(S - \frac{1}{a_i} \text{Id}_{\mathbb{C}^n}\right)^{r_i} \subset \text{Ker } Q(S)$$

Ainsi  $T(\mathcal{B})$  est une famille de vecteurs de  $\text{Ker } Q(S)$ . De plus, elle possède  $q$  éléments : c'est donc une base de  $\text{Ker } Q(S)$ . Ainsi  $T(g) \in \text{vect}(T(\mathcal{B})) = T(\text{vect}(\mathcal{B}))$ . Par injectivité de  $T$ ,  $g \in \text{vect}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$  puis  $f = G + g \in \mathcal{F}$ .

En conclusion, les suites recherchées sont les suites récurrentes linéaires.

### Solution 155

1. L'unicité provient du fait que deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini ( $\mathbb{C}$  en l'occurrence) sont égaux.

Tout d'abord, la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{P(n)z^n}{n!}$  a un rayon de convergence infini car la suite de terme général  $\frac{P(n)z^n}{n!}$  est bornée pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

Posons  $P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  ( $P_0 = 1$ ). On remarque que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_k(n)z^n}{n!} = z^k$$

De plus,  $\deg P_k = k$  et on montre alors classiquement que  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{C}[X]$ . Il existe donc une suite presque nulle  $(a_k)$  de complexes telle que  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k P_k$ . En posant  $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ , on a donc

$$e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)z^n}{n!} = Q(z)$$

2. La question précédente montre que  $u$  est bien une application de  $\mathbb{C}[X]$  dans lui-même. On vérifie sans peine sa linéarité (on l'a en fait déjà utilisé). On a même montré que l'endomorphisme  $u$  envoie la base  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}[X]$  sur la base canonique de  $\mathbb{C}[X]$  : c'est donc un automorphisme de  $\mathbb{C}[X]$ .
3. Notons  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  et  $P$  un polynôme associé à cette valeur propre. Posons  $d = \deg P$ . Il existe alors  $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$  tel que  $P = \sum_{k=0}^d a_k P_k$  puisque  $(P_0, \dots, P_d)$  est une base de  $\mathbb{C}_d[X]$ . Notamment  $a_d \neq 0$  puisque  $\deg P = d$ . Or  $u(P) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  donc en identifiant le coefficient de  $X^d$  dans  $u(P)$  et  $\lambda P$ , on obtient  $a_d = \lambda a_d$  et donc  $\lambda = 1$ . On a donc  $\sum_{k=0}^d a_k (P_k - X^k) = 0$ . Si l'on suppose  $d \geq 2$ , on obtient  $\sum_{k=2}^d a_k (P_k - X^k)$  car  $P_0 = X^0$  et  $P_1 = X^1$ . Or  $\deg P_k - X^k = k - 1$ , donc la famille  $(P_2 - X^2, \dots, P_d - X^d)$  est libre de sorte  $a_2 = \dots = a_d = 0$ , ce qui contredit le fait que  $a_d \neq 0$ . Ainsi  $d \leq 1$ . Donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est inclus dans  $\mathbb{C}_1[X]$ . On vérifie sans peine l'inclusion réciproque. La seule valeur propre de  $u$  est donc 1 et le sous-espace propre associé est  $\mathbb{C}_1[X]$ .

### Solution 156

1. Soit  $z \in D$ . Puisque les  $a_n$  sont réels,  $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ . Ainsi, si  $z \in \mathbb{R}$ ,

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}) = f(z)$$

de sorte que  $f(z) \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, si  $z \in D$  et  $f(z) \in \mathbb{R}$ , alors

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = f(z)$$

et donc  $z = \overline{z}$  par injectivité de  $f$ , puis  $z \in \mathbb{R}$ .

2. Posons  $H^+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$  et  $H^- = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) < 0\}$ . D'après la question précédente,  $f(D \cap H^+) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = H^+ \sqcup H^-$ . Or  $f$  est continue sur  $D$  et  $D \cap H^+$  est une partie connexe par arcs (et même convexe) de  $D$  en tant qu'intersection de deux convexes. Ainsi  $f(D)$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . En particulier,  $f(D \cap H^+) \subset H^+$  ou  $f(D \cap H^+) \subset H^-$ . De plus, pour  $r \in ]-1, 1[$ ,

$$\operatorname{Im}(f(ir)) = r + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_{2n+1} r^{2n+1}$$

En particulier,  $\operatorname{Im}(f(ir)) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r$ . Puisque deux fonctions équivalentes en 0 sont de même signe au voisinage de 0, il existe  $r \in ]0, 1[$  tel que  $\operatorname{Im}(f(ir)) > 0$ . On en déduit donc que  $f(D \cap H^+) \subset H^+$ .

De la même manière,  $f(D \cap H^-) \subset H^+$  ou  $f(D \cap H^-) \subset H^-$ . A nouveau,  $\operatorname{Im}(f(ir)) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r$  et donc il existe  $r \in ]-1, 0[$  tel que  $\operatorname{Im}(f(ir)) < 0$ , de sorte que  $f(D \cap H^-) \subset H^-$ .

On rappelle enfin que  $f(D \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  d'après la question précédente.

Soit alors  $z \in D$ . Si  $\operatorname{Im}(z) > 0$ , alors  $\operatorname{Im}(f(z)) > 0$  puisque  $f(D \cap H^+) \subset H^+$ . Réciproquement, si  $\operatorname{Im}(f(z)) > 0$ , on a nécessairement  $\operatorname{Im}(z) > 0$  puisque  $f(D \cap H^+) \subset H^+$  et  $f(D \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ .

3. Pour simplifier, posons  $a_1 = 1$ . Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{Im}(f(re^{i\theta})) \sin(n\theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k r^k \sin(k\theta) \sin(n\theta)$$

Posons  $g_k : \theta \mapsto a_k r^k \sin(k\theta) \sin(n\theta)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $\theta \in [0, \pi]$ ,

$$|g_k(\theta)| \leq |a_k| r^k$$

Comme la série entière définissant  $f(r)$  converge absolument, la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} g_k$  converge normalement sur  $[0, \pi]$ . On en déduit que

$$I_n(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k r^k \int_0^\pi \sin(k\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

Or pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sin(k\theta) \sin(n\theta) = \cos((k-n)\theta) - \cos((k+n)\theta)$$

On en déduit notamment que

$$\int_0^\pi \sin(k\theta) \sin(n\theta) \, d\theta = \delta_{k,n}$$

Finalement,  $I_n(r) = a_n r^n$ .

4. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r \in [0, 1[$ . Par inégalité triangulaire,

$$|a_n| r^n = |I_n(r)| \leq \int_0^\pi |\operatorname{Im}(f(re^{i\theta}))| |\sin(n\theta)| \, d\theta \leq n \int_0^\pi |\operatorname{Im}(f(re^{i\theta}))| \sin \theta \, d\theta$$

D'après les questions 1 et 2,  $\operatorname{Im}(z) \geq 0 \implies \operatorname{Im}(f(z)) \geq 0$ . Or pour  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\operatorname{Im}(re^{i\theta}) = r \sin \theta \geq 0$  donc  $\operatorname{Im}(f(re^{i\theta})) \geq 0$ . On en déduit donc que

$$|a_n| r^n \leq n \int_0^\pi \operatorname{Im}(f(z)) \sin \theta \, d\theta = n a_1 r^1 = nr$$

En faisant tendre  $r$  vers 1, on obtient bien  $|a_n| \leq n$ .

Montrons maintenant le résultat stipulant que  $|\sin(n\theta)| \leq n \sin \theta$  pour tout  $\theta \in [0, \pi]$ . On peut en fait montrer que  $|\sin(n\theta)| \leq n |\sin \theta|$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , ce qui donne le résultat par positivité de  $\sin$  sur  $[0, \pi]$ . On procède par récurrence. Le résultat est évidemment vrai lorsque  $n = 0$ . Supposons le vrai pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin(n\theta) \cos \theta + \sin \theta \cos(n\theta)| \leq |\sin(n\theta)| + |\sin \theta| \leq (n+1) |\sin \theta|$$

ce qui permet de conclure la récurrence.

### Solution 157

1. On rappelle que  $S(E)$  désigne l'ensemble des permutations de  $E$  et que  $\operatorname{card} S(E) = n!$ . Notons  $S_k(E)$  l'ensemble des permutations de  $E$  possédant exactement  $k$  points fixes. Alors  $S(E) = \bigsqcup_{k=0}^n S_k(E)$ . Se donner une permutation à  $k$  point fixes correspond à se donner une partie de  $E$  à  $k$  éléments qui formeront les  $k$  points fixes et un dérangement des  $n-k$  éléments restants. Ainsi  $\operatorname{card} S_k(E) = \binom{n}{k} D_{n-k}$ . Or,

$$\operatorname{card} S(E) = \sum_{k=0}^n \operatorname{card} S_k(E)$$

donc

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} D_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$$

2. On a clairement  $D_n \leq n!$  donc  $0 \leq \frac{D_n}{n!} \leq 1$ . Le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$  est donc supérieur ou égal à 1, ce qui justifie que  $f$  est définie sur  $] -1, 1[$ .

3. On sait que la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$  a un rayon de convergence infini et a pour somme  $e^x$ . Par conséquent, par produit de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-1, 1[, \quad e^x f(x) &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{D_k}{k!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{d'après la première question} \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Autrement dit

$$\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

4. D'une part,

$$\forall x \in ]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

D'autre part, en utilisant un nouveau produit de Cauchy,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{1-x} &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

5. Puisque  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$ , la dernière égalité peut aussi s'écrire

$$D_n = n! \left( \frac{1}{e} - R_n \right)$$

en posant

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Comme la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$  vérifie clairement le critère des séries alternées,

$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

Ainsi

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{n+1} \leq D_n \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{n+1}$$

Pour  $n \geq 2$ , on a

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{2} < \frac{n!}{e} - \frac{1}{3} \leq D_n \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{3} \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$$

donc  $D_n$  est bien la partie entière de  $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$ .

Lorsque  $n = 1$ , on peut remarquer que  $R_1$  est du signe de  $\frac{(-1)^1}{1!} = -1$  donc négatif. Ainsi  $-\frac{1}{2} \leq R_1 \leq 0$  donc

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{2} < \frac{n!}{e} \leq D_n \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$$

A nouveau,  $D_n$  est bien la partie entière de  $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$ .

## Solution 158

1. Notons  $\mathcal{P}_n$  l'assertion de l'énoncé. Il est clair que  $u_1(x) = 1 + x$  donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie. Supposons  $\mathcal{P}_n$  vérifiée pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x (u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2)) dt$$

Or

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \int_0^x (u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2)) dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} dt = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

Ainsi  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. Par récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Comme la série exponentielle  $\sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$  converge, la série télescopique  $\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$  converge également donc la suite  $(u_n(x))$  converge. La suite de fonctions  $(u_n)$  converge simplement vers une certaine fonction  $u$ .

2. Fixons  $x \in \mathbb{R}_+$ . Remarquons que

$$\forall t \in [0, x/2], 0 \leq u_{n+1}(t) - u_n(t) \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$$

A nouveau la série  $\sum \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$  converge donc la série de fonctions  $\sum u_{n+1} - u_n$  converge normalement sur  $[0, x/2]$ . A fortiori, elle converge uniformément sur  $[0, x/2]$ . On en déduit que la suite  $(u_n)$  converge uniformément vers  $u$  sur le segment  $[0, x/2]$ . On peut alors affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x u_n(t/2) dt = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{x/2} u_n(t) dt = \int_0^{x/2} u(t) dt = \int_0^x u(t/2) dt$$

Or

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t/2) dt$$

donc par passage à la limite

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t/2) dt$$

La fonction  $u$  est bien solution de (E).

3. Soit  $u$  une fonction développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  dont la restriction à  $\mathbb{R}_+$  est solution de (E). Il existe donc  $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Fixons  $x \in \mathbb{R}_+$ . Comme la série entière  $\sum a_n t^n$  converge normalement sur le segment  $[0, x/2]$ ,

$$\int_0^x u(t/2) dt = 2 \int_0^{x/2} u(t) dt = 2 \int_0^{x/2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{x/2} a_n t^n dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{2^n(n+1)}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{2^n(n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1} x^n}{2^{n-1}n}$$

Par unicité du développement en série entière,  $a_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}n}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!}$$

Réciproquement, la série entière  $\sum \frac{x^n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!}$  possède bien un rayon de convergence infini (règle de d'Alembert ou comparaison à la série exponentielle) et ce qui précède montre que sa somme est effectivement solution de (E).

## Solution 159

1. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$  vaut 1. Par conséquent, si  $|t| > \sqrt{2}$ , la série  $\sum f_n(t)$  diverge grossièrement et si  $|t| < \sqrt{2}$ , elle converge. Si  $|t| = \sqrt{2}$ , la série  $\sum f_n(t)$  diverge (série de Riemann).

Finalement,  $D = ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ .

2. On sait que pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  donc, par intégration d'une série entière,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$ .

Ainsi, pour  $t \in ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = -\ln(1-(t^2-1)) = -\ln(2-t^2)$$

3. Remarquons que

$$\max_{[0,1]} |f_n| = |f_n(0)| = \frac{1}{n+1}$$

et  $\sum \frac{1}{n+1}$  diverge. La série  $\sum f_n$  ne converge donc pas normalement sur  $[0, 1]$ .

4. Lorsque  $t \in [0, 1]$ , la suite de terme général  $\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}$  est décroissante et converge vers 0. La série  $\sum g f_n(t)$  vérifie donc le critère spécial des séries alternées. En particulier,

$$\forall t \in [0, 1], \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right| \leq |f_{n+1}(t)| = \frac{(1-t^2)^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

Le reste de la série  $\sum f_n$  converge donc uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$  i.e. la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

5. Comme la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur le segment  $[0, 1]$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge vers  $-\int_0^1 \ln(2-t^2) dt$ .

6. Il s'agit d'un simple calcul.

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \ln(2-t^2) dt &= -\int_0^1 \ln(\sqrt{2}-t) dt - \int_0^1 \ln(\sqrt{2}+t) dt \\ &= -\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}} \ln u du - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1} \ln u du \quad \text{par changement de variable} \\ &= -[u \ln u - u]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}} - [u \ln u - u]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1} \\ &= 2 - 2\sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from numpy import log, sqrt
>>> I=quad(lambda t: -log(2-t**2),0,1)[0]
>>> J=2-2*sqrt(2)*log(sqrt(2)+1)
>>> print(I,J)
-0.49290096056092203 -0.49290096056092203
```

## Solution 160

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que les  $a_n$  ne soient pas tous nuls. Posons  $m = \min\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$ . Alors

$$\forall z \in D(0, R), f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k z^k = z^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+m} z^k$$

Posons alors  $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+m} z^k$  de sorte que

$$\forall z \in D(0, R), f(z) = z^m g(z)$$

Par conséquent,

$$\forall p \in \mathbb{N}, f(z_p) = z_p^m g(z_p)$$

Mais comme la suite  $(z_p)$  ne s'annule pas,

$$\forall p \in \mathbb{N}, g(z_p) = 0$$

$g$  est évidemment développable en série entière donc continue en 0. Notamment,  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0) = a_p \neq 0$ . Mais comme  $(z_p)$  converge vers 0, la continuité de  $g$  en 0, montre que  $g(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} g(z_p) = 0$ , ce qui est contradictoire.

Finalement, la suite  $(a_n)$  est nulle.

2. Notons  $R$  le rayon de convergence commun de  $f$  et  $g$ . Alors  $f - g$  est développable en série entière et son rayon de convergence au moins égal à  $R$ . D'après la question précédente, tous les coefficients du développement en série entière de  $f - g$  sont nuls. Autrement dit  $f - g$  est nul sur  $D(0, R)$ . Ainsi  $f$  et  $g$  coïncident sur leur disque ouvert de convergence commun.

### Solution 161

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|w_n\|_\infty = \frac{|\alpha|^n}{n} \leq |\alpha|^n$ . Or  $|\alpha| < 1$  donc  $\sum \|a_n\|^n$  converge donc  $\sum w_n$  converge normalement et donc simplement sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $w_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $w'_n(x) = -\alpha^n \sin(nx)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $\|w'_n\|_\infty = |\alpha|^n$  et donc  $\sum w'_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $W$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, W'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} w'_n(x) \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \sin(nx) \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \sin(nx) \\ &= - \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{inx} \right) \\ &= - \operatorname{Im} \left( \frac{1}{1 - \alpha e^{ix}} \right) \quad \text{car } |\alpha e^{ix}| < 1 \\ &= - \frac{\alpha \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} \end{aligned}$$

2. On en déduit qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, W(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) + C$$

D'après un développement en série entière usuel,

$$W(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n} = -\ln(1 - \alpha)$$



On en déduit que  $C = 0$ . La série  $\sum w_n$  converge vers  $W$  uniformément sur le segment  $[-\pi, \pi]$  donc

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} W(x) dx \\ &= -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_n(x) dx \\ &= -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

## Solution 162

1. Posons  $q = \text{card } \mathbb{K}$  et notons  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré  $n$ . Posons  $P_n(t) = \prod_{k=1}^n \prod_{P \in \mathcal{P}_k} \frac{1}{1 - t^{\deg P}}$  pour  $t \in [0, 1[$ ,

$$\ln(P_n(t)) = \sum_{k=1}^n \sum_{P \in \mathcal{P}_k} -\ln(1 - t^k)$$

Or il est clair que  $\text{card } \mathcal{P}_k$  est inférieur ou égal au nombre de polynômes unitaires de degré  $k$ , c'est-à-dire  $q^k$ , donc

$$0 \leq \ln(P_n(t)) \leq \sum_{k=1}^n -q^k \ln(1 - t^k)$$

Or pour  $t \in [0, 1[$ ,  $-q^k \ln(1 - t^k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} (qt)^k$ . On en déduit que la série de terme général  $-q^k \ln(1 - t^k)$  converge pour  $t \in [0, \frac{1}{q}[$ . Il en est donc de même pour la suite  $(\ln(P_n(t)))$  et donc pour le produit infini définissant  $\zeta(t)$ . La fonction  $\zeta$  est donc définie sur  $\left[0, \frac{1}{q}\right]$ .

2. On va montrer que pour  $t \in \left[0, \frac{1}{q}\right]$ ,

$$\zeta(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n t^n$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{Q}_n$  l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré inférieur ou égal à  $n$ . Fixons  $N \in \mathbb{N}$  et remarquons que

$$\prod_{P \in \mathcal{Q}_N} \sum_{k=0}^M t^{k \deg P} = \sum_{k \in \llbracket 0, M \rrbracket^{\mathcal{Q}_N}} t^{\deg Q_k}$$

avec  $Q_k = \prod_{P \in \mathcal{Q}_N} P^{k_P}$ . Tout d'abord, on sait que tout polynôme unitaire de  $\mathbb{K}[X]$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\prod_{P \in \mathcal{P}} \prod_{k \in \mathbb{N}^{(\mathcal{P})}} P^{k_P}$  (où  $\mathbb{N}^{(\mathcal{P})}$  désigne classiquement l'ensemble des familles presque nulles de  $\mathbb{N}^{(\mathcal{P})}$ ). De plus, il existe exactement  $q^n$  polynômes unitaires de degré  $n$ . On en déduit :

$$\prod_{P \in \mathcal{Q}_N} \sum_{k=0}^M t^{k \deg P} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} q^n t^n$$

Enfin la décomposition en facteurs irréductibles unitaires d'un polynôme unitaire de  $\mathbb{K}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $N$  fait intervenir des polynômes irréductibles unitaires de degré au plus  $N$  donc

$$\sum_{n=0}^N q^n n t^n \leq \prod_{P \in \mathcal{Q}_N} \sum_{k=0}^M t^{k \deg P}$$

En faisant tendre  $M$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\sum_{n=0}^N q^n t^n \leq \prod_{P \in \mathcal{Q}_N} \frac{1}{1 - t^{\deg P}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} q^n t^n$$

Il suffit alors de faire tendre  $N$  vers  $+\infty$  pour avoir le résultat voulu.

**REMARQUE.** On a en fait prouvé que  $\zeta(t) = \frac{1}{1-qt}$  pour  $t \in \left[0, \frac{1}{q}\right[$ .

### Solution 163

Remarquons que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car le discriminant du trinôme  $X^2 - \sqrt{2}X + 1$  est strictement négatif. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} = \frac{2x - \sqrt{2}}{\left(x - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(x - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)} = \frac{1}{x - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{1}{x - e^{-\frac{i\pi}{4}}} = -\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{1 - xe^{-\frac{i\pi}{4}}} - \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{1 - xe^{\frac{i\pi}{4}}}$$

Or on sait que pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| < 1$ ,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Ainsi pour tout  $x \in ]-1, 1[$

$$f'(x) = -e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-\frac{ni\pi}{4}} - e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{\frac{ni\pi}{4}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{-\frac{ni\pi}{4}} - \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{\frac{ni\pi}{4}} = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^{n-1}$$

Comme  $f(0) = 0$ , on obtient en intégrant,

$$\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n} x^n$$

### Solution 164

1. Posons  $u_n(x) = e^{-n+n^2ix}$ . Les  $u_n$  sont clairement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $u_n^{(k)}(x) = n^{2k} i^k e^{-n+n^2ix}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|u_n^{(k)}\|_\infty = n^{2k} e^{-n}$  et la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{2k} e^{-n}$  converge ( $n^{2k} e^{-n} = o(1/n^2)$ ). La série  $\sum u_n^{(k)}$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Supposons que  $g$  soit développable en série entière. Il existerait donc  $R > 0$  tel que

$$\forall x \in ]-R, R[, g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

D'après la question précédente

$$\forall k \in \mathbb{N}, g^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0) = i^k \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k} e^{-n}$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left| \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \right| = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k} e^{-n} \geq \frac{k^{2k} e^{-k}}{k!} = \frac{k^k}{k!} \cdot k^k e^{-k} \geq k^k e^{-k}$$

Notamment pour  $r > 0$ ,

$$\left| \frac{g^{(k)}(0)}{k!} r^k \right| \geq \left( \frac{kr}{e} \right)^k$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{g^{(k)}(0)}{k!} r^k \right| = +\infty$$

ce qui contredit la convergence de la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} r^k$ .  $g$  n'est donc pas développable en série entière.

### Solution 165

1. On décompose en éléments simples :

$$f(z) = \frac{1}{(1-2z)(1-3z)} = \frac{3}{1-3z} - \frac{2}{1-2z}$$

D'une part

$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^n$$

avec rayon de convergence  $\frac{1}{3}$ .

D'une part

$$\frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$$

avec rayon de convergence  $\frac{1}{2}$ .

Par conséquent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{n+1} - 2^{n+1}) z^n$$

Et comme  $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$ , le rayon de convergence est  $\min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$ .

2. Remarquons que

$$g(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln(1-x)$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{2^n n}$$

avec rayon de convergence 2 et

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

avec rayon de convergence 1. Ainsi

$$g(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} + \frac{1}{n} \right) x^n$$

avec rayon de convergence  $\min(1, 2) = 1$ .

3. Tout d'abord

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

avec rayon de convergence infini. Par «primitivation»

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}$$

avec rayon de convergence infini également.

## Solution 166

1. Supposons qu'une telle fonction  $f$  existe. On montre alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, 1[, f(x) = f(q^n x) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+q^k x}{1-q^k x}$$

Fixons  $x \in ]-1, 1[$ . Comme  $q \in ]-1, 1[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(q^n x) = f(0) = 1$  par continuité de  $f$  en 0. Posons  $u_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+q^k x}{1-q^k x}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Il est clair que la suite  $(u_n(x))$  est strictement positive. De plus,

$$\ln(u_{n+1}(x)) - \ln(u_n(x)) = \ln(1+q^n x) - \ln(1-q^n x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2q^n x$$

On en déduit que la série télescopique  $\sum \ln(u_n + 1(x)) - \ln(u_n(x))$  converge. Par conséquent, la suite  $(\ln(u_n(x)))$  converge puis la suite  $(u_n(x))$  converge également. On a donc nécessairement  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$ , ce qui permet de conclure à l'unicité de  $f$ .

Posons maintenant  $u_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+q^k x}{1-q^k x}$  pour  $x \in ]-1, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Comme précédemment, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la suite  $(u_n(x))$  converge vers un réel que l'on note  $f(x)$ . Remarquons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $u_{n+1}(x) = \frac{1+x}{1-x} u_n(qx)$  donc  $f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx)$  par passage à la limite.

Démontrons enfin que  $f$  est continue en 0 (en fait sur  $] -1, 1[$ ). Tout d'abord, les fonctions  $\ln \circ u_{n+1} - \ln \circ u_n$  sont continues sur  $] -1, 1[$ . Fixons  $a \in [0, 1[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [-a, a]$ ,

$$|\ln(u_{n+1}(x)) - \ln(u_n(x))| \leq 2 \max\{\ln(1 + |q|^n a), -\ln(1 - |q|^n a)\} \leq 2|q|^n a$$

On en déduit que la série  $\sum \ln \circ u_{n+1} - \ln \circ u_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $[-a, a]$ . Ainsi sa somme  $\ln \circ f$  est continue sur  $] -1, 1[$ . Par continuité de l'exponentielle,  $f$  est donc également continue sur  $] -1, 1[$  et donc a fortiori en 0.

2. Supposons que  $f$  soit développable en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$ . Notons  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  son développement en série entière. Puisque  $(1-x)f(x) = (1+x)f(qx)$  pour tout  $x \in ]-r, r[$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^{n+1}$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} q^{n-1} x^n$$

ou enfin

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n q^n - a_{n-1} q^{n-1}) x^n$$

Par unicité du développement en série entière

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n - a_{n-1} = a_n q^n - a_{n-1} q^{n-1}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q^n} a_{n-1}$$

De plus, on a  $a_0 = f(0) = 1$ .

Réciproquement, considérons la suite  $(a_n)$  telle que  $a_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q^n} a_{n-1}$$

Comme  $q \in ]-1, 1[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = 1$ . D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  vaut 1.

Posons alors  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour  $x \in ]-1, 1[$ . Alors  $g(0) = 1$  et  $g$  est continue sur  $] -1, 1[$  donc en 0. Par ailleurs, en reprenant «à l'envers» ce qui précède, on montre que

$$\forall x \in ]-1, 1[, g(x) = \frac{1+x}{1-x} g(qx)$$

D'après l'unicité prouvée à la première question,  $f = g$ . Ainsi  $f$  est développable en série entière et cette série entière a pour rayon de convergence 1.

**REMARQUE.** La deuxième question prouve en fait la partie «existence» de la première question. En étant un peu malin, on aurait pu rechercher une fonction  $f$  développable en série entière dans la première question.

**Solution 167**

La série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} H_n x^n$  est le produit de Cauchy des séries entières  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ . Comme ces deux séries entières ont pour rayon de convergence 1, le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} H_n x^n$  est supérieur ou égal à 1. De plus,  $(H_n)$  ne converge pas vers 0 donc le rayon de convergence est inférieur ou égal à 1 : il vaut donc 1. Enfin, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

**Solution 168**

Soit  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . La suite  $(a_n r^n)$  est bornée si et seulement si la suite extraite  $(a_{n^2} r^{n^2})$  est bornée (les autres termes sont nuls), c'est-à-dire si et seulement si la suite  $(q^n r^{n^2})$  est bornée. Or

$$q^n r^{n^2} = \exp(n^2 \ln(r) + n \ln(q))$$

On en déduit que  $(q^n r^{n^2})$  diverge vers  $+\infty$  si  $r > 1$  ou si  $r = 1$  et  $q > 1$  et qu'elle est bornée sinon. Le rayon de convergence vaut donc toujours 1.

**Solution 169**

1. C'est du cours. La série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^{2n}$  a pour rayon de convergence 1 et pour somme  $\frac{1}{1+x^2}$ . Par intégration, la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \text{ a également pour rayon de convergence 1 et pour somme } \arctan(x), \text{ ce qui répond à la question.}$$

2. Une simple application de la règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence vaut 1.  
3.  $f$  est bien dérivable sur  $] -1, 1[$  et pour  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{2k-1} = x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x^{2k+1}} 2k+1 = x \arctan(x)$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x t \arctan(t) dt \\ &= 0 + \frac{x^2 \arctan(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{x^2 \arctan(x)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x) \end{aligned}$$

4. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\left| \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1} \right| \leq \frac{1}{4k^2-1}$$

Or la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{4k^2-1}$  converge (équivalent + critère de Riemann) donc la série entière définissant  $f$  converge normalement sur  $[-1, 1]$ .

5. La convergence normale et donc uniforme sur  $[-1, 1]$  permet d'appliquer le théorème d'interversion limite/série. Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

**Solution 170**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} a_n &= \left[ \frac{t}{(2+t^2)^{n+1}} \right]_0^1 + 2(n+1) \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(2+t^2)^{n+2}} \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)(a_n - 2a_{n+1}) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$4(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n + \frac{1}{3^{n+1}}$$

puis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{4(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)3^{n+1}a_n}$$

Or pour  $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{(2+t^2)^{n+1}} \geq \frac{1}{3^{n+1}}$$

donc

$$a_n \geq \frac{1}{3^{n+1}}$$

Par conséquent,

$$4(n+1)3^{n+1}a_n \geq 4(n+1)$$

de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(n+1)3^{n+1}a_n} = 0$$

puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  vaut 2.

2. Notons  $f(x)$  la somme de cette série entière.

Soit  $x \in ]-2, 2[$ . En reprenant la relation obtenue à la première question

$$4 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$$

ou encore

$$4f'(x) = 2xf'(x) + f(x) + \frac{1}{3-x}$$

puis

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}f(x) + \frac{1}{2(2-x)(3-x)}$$

Les solutions de l'équation différentielle  $y' = \frac{1}{2(2-x)}f(x)$  sur  $] -2, 2[$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{2-x}}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On applique alors la méthode de variation de la constante et on recherche une solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = \frac{1}{2(2-x)}y + \frac{1}{2(2-x)(3-x)}$$

de la forme  $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2-x}}$  avec  $\varphi$  dérivable sur  $] -2, 2[$  ce qui donne

$$\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2(2-x)(3-x)}$$

ou encore

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-x}(3-x)} = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{2-x}}$$

On peut alors choisir

$$\varphi(x) = -\arctan(\sqrt{2-x})$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{2-x}} - \frac{\arctan(\sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}}$$

Or

$$f(0) = a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi/2 - \arctan(\sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)$$

### Solution 171

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.

On effectue maintenant une décomposition en éléments simples :

$$\frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} = n + 2 - \frac{5}{n + 2}$$

Ainsi pour  $x \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ ,

$$\frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} x^n = (n + 1)x^n + x^n - \frac{5}{x^2} \cdot \frac{x^{n+2}}{n + 2}$$

La série géométrique  $\sum x^n$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

En considérant la dérivée de cette série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Et en en considérant une primitive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) - x$$

Finalement,

$$\forall x \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)} + \frac{5(\ln(1-x) + x)}{x^2}$$

La somme vaut  $-\frac{1}{2}$  lorsque  $x = 0$ .

## Probabilités

### Solution 172

1. Notons  $Y_i$  la variable aléatoire valant 1 si la  $i$ -ème ampoule est annulée et 0 sinon. Les  $Y_i$  sont des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre  $p_i$  mutuellement indépendantes et  $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Ainsi  $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^n p_i$  et  $\mathbb{V}(Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(Y_i) = \sum_{i=1}^n p_i - p_i^2$ .

2. Dans ce cas,  $\mathbb{V}(Y) = m - \sum_{i=1}^n p_i^2$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n 1 \sum_{i=1}^n p_i^2$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 \geq \frac{m^2}{n}$$

De plus, cette inégalité est une égalité lorsque tous les  $p_i$  sont égaux à  $\frac{m}{n}$ .  $\mathbb{V}(Y)$  est donc maximale dans ce cas et alors  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{m}{n}$ .

### Solution 173

$Z$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  puisque  $X$  et  $Y$  le sont. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Remarquons que  $\{Z \geq k\} = \{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}$  donc par indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}(\{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k)$$

Puisque  $\{X \geq k\} = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} \{X = n\}$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p_1)^{n-1} p_1 = (1-p_1)^{k-1}$$

**REMARQUE.** On aurait pu se passer du calcul de somme de série puisqu'une loi géométrique représente la loi du premier succès.

De la même manière

$$\mathbb{P}(Y \geq k) = (1-p_2)^{k-1}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}$$

On constate enfin que

$$\{Z \geq k\} = \{Z = k\} \sqcup \{Z \geq k+1\}$$

donc

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1) = (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1} - (1-p_1)^k(1-p_2)^k$$

### Solution 174

1. Remarquons que

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\{X = n\} \cap \{Y = n\})$$

Ainsi par indépendance de  $X$  et  $Y$ ,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)^{n-1}p)^2 = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{2n} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

2.  $X + Y$  est à valeurs dans  $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$ . Soit  $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ . Remarquons que

$$\{X + Y = n\} = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} (\{X = k\} \cap \{Y = n-k\})$$

A nouveau par indépendance de  $X$  et  $Y$ ,

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}p = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$



**REMARQUE.** On aurait aussi pu utiliser les fonctions génératrices de  $X$  et  $Y$ .

3. Puisque  $\{Z > n\} = \bigcup_{k \geq n+1} \{Z = k\}$ ,

$$\mathbb{P}(Z > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = p(1-p)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = (1-p)^n$$

**REMARQUE.** Ceci est cohérent avec l'interprétation de la loi géométrique comme loi du premier succès.

4. On remarque que

$$\{Z > X + Y\} = \bigcup_{n \geq 2} (\{Z > n\} \cap \{X + Y = n\})$$

Par indépendance de  $Z$  et  $X + Y$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > X + Y) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n) \mathbb{P}(X + Y = n) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^n (n-1) p^2 (1-p)^{n-2} \\ &= p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) (1-p)^{2n-2} \\ &= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n (1-p)^{2n} \\ &= p^2 (1-p)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n (1-p)^{2(n-1)} \\ &= \frac{p^2 (1-p)^2}{(1 - (1-p)^2)^2} \end{aligned}$$

car  $\sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$  pour  $t \in ]-1, 1[$ . En simplifiant

$$\mathbb{P}(Z > X + Y) = \frac{(1-p)^2}{(2-p)^2}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> import numpy.random as rd
>>>
>>> p=.2
>>> n=10000
>>> X=rd.geometric(p,n)
>>> Y=rd.geometric(p,n)
>>> Z=rd.geometric(p,n)
>>> sum(Z>X+Y)/n
np.float64(0.2008)
>>> (1-p)**2/(2-p)**2
0.19753086419753088
```

## Solution 175

1. La loi de  $X$  est une loi géométrique de paramètre  $1/2$ .

2. Notons B l'événement consistant à obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience. Alors

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (B \cap \{X = n\})$$

Or

$$\mathbb{P}(B \cap X = n) = \mathbb{P}_{X=n}(B) \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}$$

Comme

$$\forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on obtient par intégration

$$\forall x \in ]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(B) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from random import random
>>> from math import log
>>>
>>> def simul():
...     nb=1
...     while random()<.5:
...         nb+=1
...     return random()<1/nb
...
>>> N=10**5
>>> sum([simul() for n in range(N)])/N
0.69218
>>> log(2)
0.6931471805599453
```

## Solution 176

1. X et Y sont à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1-p)^{n-1}p$$

2. a. U et V sont respectivement à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{Z}$ . Soit alors  $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ .

Traitons d'abord le cas où  $m = 0$ . Alors

$$\{(U, V) = (n, 0)\} = \{X = n\} \cap \{Y = n\}$$

donc, par indépendance de X et Y

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, 0)) = \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = n) = p^2 (1-p)^{2n-2}$$

Traitons maintenant le cas  $m > 0$ . Alors

$$\{(U, V) = (n, m)\} = (\{X = n + m\} \cap \{Y = n\})$$

A nouveau, par indépendance de  $X$  et  $Y$ ,

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, m)) = \mathbb{P}(X = n + m)\mathbb{P}(Y = n) = p^2(1 - p)^{2n+m-2}$$

En intervertissant  $X$  et  $Y$ , on trouve que si  $m < 0$ ,

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, m)) = p^2(1 - p)^{2n-m-2}$$

Dans tous les cas,

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, m)) = p^2(1 - p)^{2n+|m|-2}$$

On retrouve alors les lois marginales.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(U = n, V = m) \\ &= p^2(1 - p)^{2n-2} + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} p^2(1 - p)^{2n+m-2} \\ &= p^2(1 - p)^{2n-2} + 2p^2(1 - p)^{2n-1} \sum_{m=1}^{+\infty} (1 - p)^{m-1} \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (1 - p)^{m-1} = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p}$$

donc

$$\mathbb{P}(U = n) = p(1 - p)^{2n-2}(2 - p) = ((1 - p)^2)^{n-1} (1 - (1 - p)^2)$$

Notamment,  $U$  suit la loi géométrique de paramètre  $1 - (1 - p)^2$ .

De la même manière

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U = n, V = m) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1 - p)^{2n+|m|-2} \\ &= p^2(1 - p)^{|m|} \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - p)^{2(n-1)} \\ &= p^2(1 - p)^{|m|} \cdot \frac{1}{1 - (1 - p)^2} = \frac{p(1 - p)^{|m|}}{2 - p} \end{aligned}$$

**b.** Il s'agit d'une simple vérification :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}, \mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = m) = p(1 - p)^{2n-2}(2 - p) \cdot \frac{p(1 - p)^{|m|}}{2 - p} = p^2(1 - p)^{2n+|m|-2} = \mathbb{P}(\{U = n\} \cap \{V = m\})$$

**3.** L'énoncé suppose implicitement que  $U$  et  $V$  sont respectivement à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{Z}$ . Puisque  $X = U + \max(V, 0)$  et  $Y = U - \min(V, 0)$ ,  $X$  et  $Y$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

Posons  $p_n = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par indépendance de  $U$  et  $V$  d'une part et de  $X$  et  $Y$  d'autre part,

$$\mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = 0) = \mathbb{P}(U = n, V = 0) = \mathbb{P}(X = n, Y = n) = p_n^2$$

De même,

$$\mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = 1) = \mathbb{P}(U = n, V = 1) = \mathbb{P}(X = n + 1, Y = n) = p_n p_{n+1}$$

Par hypothèse ces deux quantités ne sont pas nulles, donc en divisant membre à membre

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$$

La suite de terme général  $\frac{p_{n+1}}{p_n}$  est donc constante i.e. la suite  $(p_n)$  est géométrique. En notant  $1 - p$  sa raison,  $p_n = (1 - p)^{n-1} p_1$ .

Mais comme  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ ,  $p_1 = p$ . Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

donc  $X$  et  $Y$  suivent bien la loi géométrique de paramètre  $p$ .

On a vu plus haut que  $1 - p = \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$  i.e.  $p = 1 - \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$ .

### Solution 177

1. a. Les variables aléatoires  $Y_k$  sont mutuellement indépendantes.

On a clairement  $Y_1 = 1$ .

- b.  $Y_k$  suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{n - k + 1}{n} = 1 - \frac{k - 1}{n}$ . On en déduit que  $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{n}{n - k + 1}$  et que  $\mathbb{V}(Y_k) = \frac{\frac{k-1}{n}}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2} = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}$ .

2. On a clairement  $X = \sum_{k=1}^n Y_k$ . Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k) = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n - k + 1} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n H_n$$

3. Par comparaison série/intégrale, on obtient classiquement  $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ . Par conséquent,  $\mathbb{E}(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln n$ .

### Solution 178

Pour  $1 \leq i \leq 6$ , notons  $p_i$  (resp.  $q_i$ ) la probabilité d'obtenir  $i$  en lançant le premier (resp. le deuxième) dé. De même, pour  $2 \leq i \leq 12$ , notons  $r_i$  la probabilité d'obtenir  $i$  en lançant deux dés. On a la relation suivante :  $r_k = \sum_{i+j=k} p_i q_j$ .

Notons  $P = \sum_{i=1}^6 p_i X^{i-1}$ ,  $Q = \sum_{i=1}^6 q_i X^{i-1}$  et  $R = \sum_{i=2}^{12} r_i X^{i-2}$ . La relation précédente signifie que  $R = PQ$ . S'il y avait équiprobabilité sur les sommes, on aurait  $r_i = \frac{1}{11}$  pour  $2 \leq i \leq 12$  i.e.  $R = \frac{1}{11} \sum_{i=0}^{10} X^i$ .

Les racines de  $R$  sont les racines 11<sup>èmes</sup> de l'unité privées de 1. Aucune de ces racines n'est réelle. De plus,  $\deg P \leq 5$  et  $\deg Q \leq 5$ . Puisque  $\deg R = \deg PQ = 10$ ,  $\deg P = \deg Q = 5$ . Puisque 5 est impair, les polynômes  $P$  et  $Q$  admettent chacun au moins une racine réelle en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, d'où une contradiction.

Il est donc impossible de piper deux dés de manière à avoir équiprobabilité sur les sommes.

### Solution 179

1. Il est nécessaire et suffisant d'avoir  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$  et  $\mathbb{P}(\{n\}) \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On prend donc  $\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$ .

2. Comme  $A_r = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{rn\}$ ,

$$\mathbb{P}(A_r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{rn\}) = \frac{1}{r^s}$$

3. Soient  $p_1, \dots, p_n$  des nombres premiers distincts. Comme les  $p_i$  sont premiers entre eux deux à deux,

$$\bigcap_{i=1}^n A_{p_i} = A_q$$

avec  $q = \prod_{i=1}^n p_i$ . Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_{p_i}\right) = \mathbb{P}(A_q) = \frac{1}{q^s} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_{p_i})$$

Les  $A_p$  pour  $p \in \mathcal{P}$  sont donc mutuellement indépendants.

4.  $A_p$  est l'ensemble des multiples de  $p$  strictement positifs i.e. l'ensemble des entiers naturels non nuls divisibles par  $p$ . Ainsi  $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$

est l'ensemble des entiers naturels non nuls ne possédant aucun diviseur premier. Il est donc clair que  $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p} = \{1\}$ .

On montre classiquement que les  $\overline{A_p}$  pour  $p \in \mathcal{P}$  sont également mutuellement indépendants. Notons  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite strictement croissante des nombres premiers. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_{p_i}}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$

Posons  $B_n = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_{p_i}}$ . La suite  $(B_n)$  est décroissante pour l'inclusion et

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \overline{A_{p_i}} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$$

Par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

**REMARQUE.** La notion de produit indexé sur un ensemble infini n'est pas au programme. Il faudrait établir pour les produits une théorie similaire à celle des familles sommables pour donner un sens précis à ce produit infini.

Finalement

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

et donc

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

5. Supposons que la famille  $\left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathcal{P}}$  soit sommable. Comme il s'agit d'une famille positive, ceci équivaut à la convergence de la série

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p_n}$ . Comme  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ,  $\frac{1}{p_n} \sim -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ . Ainsi la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$  converge. Notons  $S_n = \sum_{i=1}^n -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ . Alors  $(S_n)$  converge vers un réel  $\ell$ . Par conséquent

$$e^{S_n} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$$

Mais pour tout  $s > 1$ ,

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} \leq \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$$

donc, en passant à la limite,  $\zeta(s) \leq e^\ell$  pour tout  $s > 1$ .

On montre alors que  $\lim_{1^+} \zeta = +\infty$  pour aboutir à une contradiction. On peut par exemple utiliser une comparaison série/intégrale :

$$\forall s > 1, \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1}$$

### Solution 180

1. Notons  $S_{j,k}$  la somme de l'énoncé. Si  $\omega^j = 1$ , autrement dit si  $k$  divise  $j$ ,  $S_{j,k} = k$ . Sinon,  $S_{j,k} = \frac{\omega^k - 1}{\omega - 1} = 0$ .
2.  $X_n$  suit clairement la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1}{2}$ . D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(k | X_n) &= \sum_{j=0}^n \frac{S_{j,k}}{k} \mathbb{P}(X = j) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{S_{j,k}}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{j} \quad \text{car } X_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2) \\ &= \frac{1}{2^n k} \sum_{j=0}^n \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{n}{j} \omega^{\ell j} \\ &= \frac{1}{2^n k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \omega^{\ell j} \quad \text{car les deux sommes sont finies} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{2^n} (1 + \omega^\ell)^n \end{aligned}$$

Lorsque  $\ell = 0$ ,  $\frac{1}{2^n} (1 + \omega^\ell)^n = 1$  et lorsque  $\ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ ,

$$|1 + \omega^\ell| = 2 \left| \cos \frac{\pi \ell}{k} \right| < 2$$

Ainsi, dans ce cas,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} (1 + \omega^\ell)^n = 0$ . On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(k | X_n) = \frac{1}{k}$$

ce qui est conforme à l'intuition.

### Solution 181

1. Le premier tirage étant effectué, on tire des jetons jusqu'à obtention d'un jeton différent du premier jeton tiré. A chaque tentative, la probabilité de réussite est de  $\frac{2}{3}$ . On en déduit que  $Y - 1 \sim \mathcal{G}(2/3)$ .
2. Par conséquent,  $Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et

$$\forall n \geq 2, \mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y - 1 = n - 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n-1}}$$

3. On sait alors que  $\mathbb{E}(Y - 1) = \frac{3}{2}$  et  $\mathbb{V}(Y - 1) = \frac{3}{4}$ . Donc  $\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{2}$  et  $\mathbb{V}(Y) = \frac{3}{4}$ .
4. Remarquons que  $(Y, Z)$  est à valeurs dans  $\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2, 2 \leq k < \ell\} \cup \{(+\infty, +\infty)\}$ . De plus, pour  $2 \leq k < \ell$ ,

$$\mathbb{P}((Y, Z) = (k, \ell)) = \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(Z = \ell | Y = k) = \frac{2}{3^{k-1}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}}$$

5.  $\mathbb{Z}$  est à valeurs dans  $\llbracket 3, +\infty \rrbracket$ . Pour tout entier  $\ell \geq 3$ ,

$$\mathbb{P}(Z = \ell) = \sum_{k=2}^{\ell-1} \mathbb{P}((Y, Z) = (k, \ell)) = \sum_{k=2}^{\ell-1} \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}} = \frac{2^{\ell-1}}{3^{\ell-1}} \left(1 - \frac{1}{2^{\ell-2}}\right)$$

On peut vérifier avec Python.

```
from random import randint

def Z():
    X=randint(1,3)
    Y=randint(1,3)
    n=2
    while X==Y:
        Y=randint(1,3)
        n+=1
    Z=randint(1,3)
    n+=1
    while Y==Z or X==Z:
        Z=randint(1,3)
        n+=1
    return n

def frequencies(l):
    proba_theorique = lambda i: 2**(i-1)/3**(i-1)*(1-1/2**(i-2))
    proba_empirique = lambda i: l.count(i)/len(l)
    return [(proba_theorique(i), proba_empirique(i)) for i in range(3,max(l)+1)]

>>> frequencies([Z() for _ in range(100000)])
[(0.2222222222222222, 0.22267), (0.2222222222222222, 0.22117), (0.1728395061728395, 0.17327),
 (0.1234567901234568, 0.12389), (0.0850480109739369, 0.08669), (0.05761316872427984, 0.05584),
 (0.03871361073007164, 0.03852), (0.025910684346898336, 0.02558), (0.017307659740215753,
 0.01737), (0.011549729885349455, 0.01163), (0.007703583276412622, 0.00785),
 (0.005136976635223854, 0.00512), (0.003425069240465493, 0.00335), (0.0022835188770824145,
 0.00239), (0.001522392379201194, 0.00155), (0.0010149437398495463, 0.00111),
 (0.0006766343222492809, 0.00064), (0.00045109126894938174, 0.00051), (0.00030072808622731934,
 0.00026), (0.00020048558201634563, 0.00028), (0.00013365711841027467, 9e-05),
 (8.910476685108673e-05, 7e-05), (5.9403184982136813e-05, 4e-05), (3.9602125681895316e-05,
 8e-05), (2.6401417908087134e-05, 2e-05), (1.760094553433262e-05, 0.0),
 (1.1733963776979923e-05, 0.0), (7.82264254712823e-06, 0.0), (5.215095041132692e-06, 1e-05)]
```

## Solution 182

1. Si  $n$  voitures sont passés en 1H, chacune de ces voitures a une probabilité  $\frac{1}{m}$  de choisir le guichet n°1. Ainsi la loi de  $X$  conditionnée par l'événement  $N = n$  est une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1}{m}$ . Autrement dit

$$\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}$$

2. D'après la formule des probabilités totales, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n) \mathbb{P}(N = n)$$

Or  $\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = 0$  lorsque  $k > n$  donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n+k) \mathbb{P}(N = n+k) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

3. On reconnaît la somme d'une série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{\lambda(1-\frac{1}{m})}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\frac{\lambda}{m}} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!}$$

Par conséquent,  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\frac{\lambda}{m}$ .

4. C'est du cours :  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \frac{\lambda}{m}$ .

### Solution 183

1. L'application  $t \mapsto t^n e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $t^n e^{-t^2} = \frac{1}{t^2}$  par croissances comparées. donc l'intégrale  $I_n$  converge par comparaison à une intégrale de Riemann.

2. Remarquons que

- $t \mapsto t^{n+1}/(n+1)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ ;
- $t \mapsto e^{-t^2}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ ;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2} = 0$ .

Donc, par intégration par parties

$$I_n = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t^{n+2}}{n+1} e^{-t^2} dt$$

ou encore

$$2I_{n+2} = (n+1)I_n$$

Comme  $t \mapsto t e^{-t^2}$  est impaire,  $I_1 = 0$ . Ainsi  $I_{2n+1} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On montre également que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$



3. On utilise la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) I_n \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n I_n}{n!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n} I_{2n}}{(2n)!} \\
 &= e^{-\lambda} \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^{2n} n!} \\
 &= e^{-\lambda} \sqrt{\pi} e^{\frac{\lambda^2}{4}} \\
 &= \sqrt{\pi} e^{-\lambda + \frac{\lambda^2}{4}}
 \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de transfert est justifiée a posteriori puisque le calcul précédent montre que la série à termes positifs  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n) I_n$  converge.

#### Solution 184

On note respectivement  $P_n$  et  $F_n$  le nombre de «piles» et de «faces» obtenus en  $n$  coups. En remarquant que  $P_n + F_n = n$ , l'événement  $P_n = 2F_n$  est également l'événement  $3F_n = n$ . Remarquons que,  $F_n$  étant à valeurs entières, l'événement  $3F_n = n$  est vide si  $n$  n'est pas multiple de 3. Si on note  $A$  l'événement dont on recherche la probabilité, alors  $\bar{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{F_{3n} = n\}$ .  $F_{3n} = n$

Notons  $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*, F_{3n} = n\}$ . On convient que  $T = \infty$  si  $F_{3n}$  n'est jamais égal à  $n$ .

Posons  $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_{3n} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}}$  et  $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)$ .

On vérifie que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_{n-k}) \mathbb{P}(T = k)$$

$$S_1 = 1 + S_1 S_2$$

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(T = \infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1 - S_2 = \frac{1}{S_1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 3}$$

#### Solution 185

1. a. Le nombre de tirages possibles est  $\binom{2n}{n}$ .

b. Notons  $A$  l'ensemble des tirages possibles et  $A_k$  le nombre de tirages dans lesquels figurent  $k$  boules blanches. Alors  $A = \bigsqcup_{k=0}^n A_k$ .  
De plus, se donner un tirage dans  $A_k$  équivaut à choisir  $k$  boules parmi les  $n$  boules blanches et  $n - k$  boules parmi les  $n$  noires. Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \text{card}(A) = \sum_{k=0}^n \text{card}(A_k) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

2. a. Pour que la puce se retrouve en  $O$ , il faut qu'elle est sauté autant de fois à gauche qu'à droite et le nombre de sauts doit donc être pair. Ainsi  $\mathbb{P}(C_{2n+1}) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, si le nombre de sauts est  $2n$ , il y faut placer  $n$  sauts à droite parmi les  $2n$  sauts, le reste des sauts étant à gauche. Ainsi  $\mathbb{P}(C_{2n}) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ .

b. D'après la formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

puis

$$\mathbb{P}(C_{2n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{2n}) = 0$ .

3. a. Pour se retrouver à l'origine, il faut, pour les mêmes raisons que précédemment, un nombre pair de déplacements horizontaux et un nombre pair de déplacements verticaux. Ainsi pour se retrouver à l'origine en  $2n$  coups :

- on fixe un nombre  $2k$  ( $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ) de déplacements horizontaux (les  $2n - 2k$  déplacements restants sont horizontaux) ;
- on choisit  $k$  déplacements à droite parmi les  $2k$  déplacements horizontaux (les  $k$  déplacements restants étant à gauche) ;
- on choisit  $n - k$  déplacements vers le haut parmi les  $2n - 2k$  déplacements verticaux (les  $n - k$  déplacements restants étant vers le bas).

Finalement

$$\mathbb{P}(C_{2n}) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}^2$$

b. On avait trouvé précédemment

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

donc

$$\binom{2n}{n}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^{2n}}{\pi n}$$

puis

$$\mathbb{P}(C_{2n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$$

et enfin  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{2n}) = 0$ .

## Solution 186

1. Posons  $a_n = \frac{n^2 + n + 1}{n!}$ . Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n^2 + n + 1)(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que  $R = +\infty$ .

2. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1) + 2n + 1}{n!} t^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-2)!} t^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{n!} t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= t^2 e^t + 2te^t + e^t = (t^2 + 2t + 1)e^t \end{aligned}$$

3. a. On doit avoir  $G_X(1) = 1$  donc  $\lambda = \frac{1}{4e}$ .

b. On sait que  $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ . Or  $G'_X(t) = \lambda(t^2 + 4t + 3)e^t$  donc  $\mathbb{E}(X) = 2$ .

Par ailleurs,  $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$ . Or  $G''_X(t) = \lambda(t^2 + 6t + 7)e^t$  donc  $\mathbb{V}(X) = \frac{7}{2} + 2 - 2^2 = \frac{3}{2}$ .

## Equations différentielles

### Solution 187

En posant  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ , il s'agit de résoudre l'équation différentielle  $X' = AX$ . Ces solutions sont de la forme

$t \mapsto \exp(tA)X_0$  avec  $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

Procédons à la réduction de  $A$ .

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -6 & 0 \\ 3 & X+6 & 0 \\ 3 & 6 & X+5 \end{vmatrix} = (X+5) \begin{vmatrix} X-3 & 6 \\ 3 & X+6 \end{vmatrix} = X(X+3)(X+5)$$

Ainsi,  $\chi_A$  est scindé à racines simples donc  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(A) = \{0, -3, -5\}$ . Des vecteurs propres associés aux valeurs propres

$0, -3, -5$  sont respectivement  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi, en posant  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = PDP^{-1}$ . En posant

$Y = P^{-1}X$ , le système  $X' = AX$  équivaut à  $Y' = DY$ . L'ensemble des solutions de ce système est  $\text{vect}(Y_1, Y_2, Y_3)$  avec  $Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$Y_2 : t \mapsto e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $Y_3 : t \mapsto e^{-5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On en déduit que l'ensemble des solutions du système  $X' = AX$  est  $\text{vect}(X_1, X_2, X_3)$ , avec

$X_1 = PY_1, X_2 = PY_2$  et  $X_3 = PY_3$ , c'est-à-dire  $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 : t \mapsto e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $X_3 : t \mapsto e^{-5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### Solution 188

1. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Le polynôme caractéristique de  $A(t)$  est

$$\chi_{A(t)} = X^2 - \text{tr}(A(t))X + \det(A(t)) = X^2 - 2X + (1 - t^2) = (X - 1 - t)(X - 1 + t)$$

Les valeurs propres de  $A(t)$  sont donc  $1 + t$  et  $1 - t$ .

2. On remarque  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $1 + t$  et que  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la

valeur propre  $1 - t$ . Ainsi en posant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, P^{-1}A(t)P = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = D(t)$$

3. En posant  $X = P^{-1}Y$  le système équivaut à  $X' = D(t)X$ . Si on note  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , le système équivaut à  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)x \\ (1-t)y \end{pmatrix}$ . On en déduit

que les solutions de  $X' = D(t)X$  sont les fonctions  $t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{t+t^2/2} \\ \mu e^{t-t^2/2} \end{pmatrix}$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Les solutions de  $Y' = A(t)Y$  sont donc les

fonctions

$$t \mapsto P \begin{pmatrix} \lambda e^{t+t^2/2} \\ \mu e^{t-t^2/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{t+t^2/2} + \mu e^{t-t^2/2} \\ -2\lambda e^{t+t^2/2} - \mu e^{t-t^2/2} \end{pmatrix}$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

### Solution 189

#### Première version

On écrit le système sous la forme  $X' = AX + B(t)$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$  et  $B(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$ . On calcule

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

Comme  $\chi_A$  est scindé à racines simples,  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(A) = \{4, -1\}$ . On trouve sans peine que  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Le système  $X' = AX + B$  équivaut donc à  $Y' = DY + C(t)$  avec  $Y = P^{-1}X$  et  $C = P^{-1}B(t)$ . On trouve sans peine

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  de sorte que  $C(t) = \begin{pmatrix} 4t - e^t \\ -2t + e^t \end{pmatrix}$ . En posant  $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , le système  $Y' = DY + C(t)$  équivaut à

$$\begin{cases} u' - 4u = 4t - e^t \\ v' + v = -2t + e^t \end{cases}$$

On résout séparément ces deux équations différentielles. Les solutions de la première sont les fonctions

$$t \mapsto ae^{4t} - t - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^t, \quad a \in \mathbb{R}$$

tandis que les solutions de la seconde sont les fonctions

$$t \mapsto be^{-t} - 2t + 2 + \frac{1}{2}e^t, \quad b \in \mathbb{R}$$

On en déduit que les solutions de  $X' = AX + B(t)$  sont les fonctions

$$t \mapsto P \begin{pmatrix} ae^{4t} - t - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^t \\ be^{-t} - 2t + 2 + \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{4t} + be^{-t} - 3t + \frac{7}{4} + \frac{5}{6}e^t \\ ae^{4t} + 2be^{-t} - 5t + \frac{15}{4} + \frac{4}{3}e^t \end{pmatrix}$$

#### Deuxième version

On résout d'abord l'équation homogène. On trouve comme précédemment que  $X_1 : t \mapsto e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $X_2 : t \mapsto e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  forment une base

du sous-espace vectoriel des solutions du système homogène. On recherche une solution particulière du système avec second membre. On cherche donc une solution de la forme  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$  où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)e^{4t} + \lambda_2'(t)e^{-t} = 2t \\ \lambda_1'(t)e^{4t} + 2\lambda_2'(t)e^{-t} = e^t \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = 4te^{-4t} - e^{-3t} \\ \lambda_2'(t) = e^{2t} - 2te^t \end{cases}$$

A l'aide d'intégration par parties, on peut choisir

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = -te^{-4t} - \frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \lambda_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - 2te^t + 2e^t \end{cases}$$

On en déduit donc qu'une solution de l'équation avec second membre est

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} -3t + \frac{7}{4} + \frac{5}{6}e^t \\ -5t + \frac{15}{4} + \frac{4}{3}e^t \end{pmatrix}$$

## Solution 190

1. Remarquons que  $\text{Ker}(A - 2I_3) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . On cherche trois vecteurs  $C_1, C_2$  et  $C_3$  tels que  $AC_1 = 2C_1$ ,  $AC_2 = 2C_2 + C_1$  et

$AC_3 = 2C_3$ . On choisit un vecteur  $C_2$  qui n'est pas dans  $\text{Ker}(A - 2I_3)$ , par exemple  $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On pose ensuite  $C_1 = AC_2 - C_2 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On vérifie que  $C_1 \in \text{Ker}(A - 2I_3)$  i.e.  $AC_1 = 2C_1$  (c'est forcément le cas puisque  $(A - 2I_3)^2 = 0$ ). On choisit ensuite un

dernier vecteur  $C_3$  dans  $\text{Ker}(A - 2I_3)$  non colinéaire à  $C_1$ , par exemple,  $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ainsi en posant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on a bien  $A = PTP^{-1}$ .

2. En posant  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , le système  $X'(t) = AX(t)$  équivaut à  $Y'(t) = TY(t)$ . Les solutions de ce système sont les fonctions

$$t \mapsto \exp(tT)Y_0, \quad Y_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Or  $T = 2I_3 + N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Les matrices  $I_3$  et  $N$  commutent et  $N^2 = 0$  de sorte que

$$\exp(tT) = e^{2t}(I_3 + tN) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ainsi les solutions de  $X'(t) = AX(t)$  sont les fonctions

$$t \mapsto P \exp(tT) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

ou encore

$$\begin{cases} f(t) = ae^{2t} + b(t+1)e^{2t} \\ g(t) = -ae^{2t} - bte^{2t} + ce^{2t} \\ h(t) = ae^{2t} + bte^{2t} \end{cases}$$

## Solution 191

1. On recherche une solution polynomiale de degré 2. On trouve sans difficulté  $x \mapsto x^2 + \frac{1}{9}$ .
2. On pose  $z(t) = y(x) = y(e^t)$  ou encore  $y(x) = z(\ln(x))$ . On trouve sans peine que  $y$  est solution de  $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $z$  est solution de  $4z'' - 12z' + 9z = 0$  sur  $\mathbb{R}$ .  
L'équation homogène associée  $4z'' - 12z' + 9z = 0$  admet pour polynôme caractéristique  $4X^2 - 12X + 9 = (2X - 3)^2$  donc ses solutions sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions  $t \mapsto (At + B)e^{\frac{3t}{2}}$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .  
On en déduit que les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation homogène  $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$  sont les fonctions  $x \mapsto (A \ln(x) + B)x^{\frac{3}{2}}$ . D'après la première question, les solutions de l'équation différentielle  $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont les fonctions

$$x \mapsto x^2 + \frac{1}{9} + (A \ln(x) + B)x^{\frac{3}{2}}$$

avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

3. En effectuant cette fois-ci le changement de variable  $x = -e^t$ , on trouve de la même manière que les solutions de l'équation différentielle  $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$  sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont les fonctions

$$x \mapsto x^2 + \frac{1}{9} + (A \ln(-x) + B)(-x)^{\frac{3}{2}}$$

avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

## Solution 192

1. On a  $f' = \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = -q - f^2$ .  $f$  vérifie donc  $f^2 + f' = -q$ .
2. Supposons que  $f$  s'annule. Il existe donc  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) = 0$ . On en déduit  $y'(x_0) = 0$ . Comme  $y'' = -qy \leq 0$ ,  $y$  est concave sur  $\mathbb{R}_+$ . On a donc  $y(x) \leq y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = y(x_0)$ . Supposons qu'il existe  $x_1 > x_0$  tel que  $y(x_1) < y(x_0)$ . D'après l'inégalité des pentes,

$$\forall x \geq x_1 \quad \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ou encore, en posant  $c = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0} < 0$

$$y(x) \leq c(x - x_0) + f(x_0)$$

On en déduirait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ , ce qui contredirait la stricte positivité de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit par l'absurde que  $y(x_1) = y(x_0)$  pour tout  $x_1 \in ]x_0, +\infty[$ .

Ainsi  $y$  est constante sur  $[x_0, +\infty[$  puis  $qy = -y'' = 0$  sur  $[x_0, +\infty[$  et enfin, comme  $y$  ne s'annule pas,  $q$  est nulle sur  $[x_0, +\infty[$ , ce qui contredit l'énoncé.  $f$  ne s'annule donc pas.

3. Puisque  $f' = -q - f^2$  et que  $q$  est à valeurs positives,  $f'$  est négative sur  $\mathbb{R}_+$  :  $f$  est donc décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Comme  $f$  ne s'annule pas, l'équation différentielle  $f^2 + f' = -q$  peut se réécrire  $\left(\frac{1}{f}\right)' = q + 1$ . Comme  $q$  est positive, on a donc

$\left(\frac{1}{f}\right)' \geq 1$ . L'inégalité des accroissements finis donne alors  $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(0)} \geq x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ . On en déduit notamment que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$  et donc que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Comme  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $f$  ne s'annule pas, elle est en fait strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$ .

4. On a vu à la question précédente que  $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(0)} \geq x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ . On en déduit que  $0 < f(x) \leq \frac{1}{\frac{1}{f(0)} + x}$  pour  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Ainsi  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$  puis  $f(x)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ . Notamment  $f^2$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus, comme  $f'$  est négative, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\int_0^x |f'(x)| dx = - \int_0^x f'(x) dx = f(0) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0)$$

car on a montré que  $f$  est de limite nulle en 0. Ceci prouve que  $f'$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Enfin,  $q = -f^2 - f'$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur cet intervalle.

5. Comme  $f(x)^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , on a  $\int_{[x, +\infty[} f^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$  par intégration d'une relation de domination. Enfin puisque  $f$  a une limite nulle en 0,  $\int_{[x, +\infty[} f' = f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ . Puisque  $q = -f^2 - f'$ , on en déduit que  $\int_{[x, +\infty[} q = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ .

### Solution 193

Il suffit de montrer que  $f$  s'annule au moins une fois sur tout intervalle du type  $[A, +\infty[$ . En effet, pour  $A = 0$ , on trouve que  $f$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}_+$ . Si on suppose que  $f$  ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur  $\mathbb{R}_+$ , disons  $n$  fois, et en notant  $x_1, \dots, x_n$  les zéros de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on aboutit à une contradiction en choisissant  $A > \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ .

Soit donc  $A \in \mathbb{R}$ . Supposons que  $f$  ne s'annule pas sur  $[A, +\infty[$ . Quitte à changer  $f$  en  $-f$  qui est aussi solution de l'équation différentielle  $y'' + qy = 0$ , on peut supposer  $f > 0$  sur  $[A, +\infty[$ .

Comme  $q$  est non identiquement nulle et positive, il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $q(a) > 0$ . Posons  $c = \frac{q(a)}{2}$ . Par continuité de  $q$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $q \geq c > 0$  sur  $[a - \alpha, a + \alpha]$ . On peut supposer  $\alpha \leq \frac{T}{2}$  où  $T$  est une période de  $q$ . Comme  $q$  est périodique et positive, on a alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{A+kT}^{A+(k+1)T} q(t) dt \geq 2\alpha c$$

Supposons que  $f' \geq 0$  sur  $[A, +\infty[$ . Alors  $f$  est croissante sur  $[A, +\infty[$  et donc  $f \geq f(A) > 0$  sur  $[A, +\infty[$ . On a alors pour  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f'(A + nT) &= f'(A) - \int_A^{A+nT} q(t)f(t) dt \\ &\geq f'(A) - f(A) \int_A^{A+nT} q(t) dt \\ &\geq f'(A) - 2n\alpha c f(A) \end{aligned}$$

Comme  $\alpha c f(A) > 0$ , on obtient que  $f'(A + nT) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ , ce qui contredit notre hypothèse selon laquelle  $f' \geq 0$  sur  $[A, +\infty[$ . Ainsi il existe  $B \geq A$  tel que  $f'(B) < 0$ .

Or  $f'' = -qf \geq 0$  sur  $[A, +\infty[$  donc  $f'$  est décroissante sur  $[A, +\infty[$ . En particulier,  $f' \leq f'(B) < 0$  sur  $[B, +\infty[$ . Pour  $x \geq B$ , on a donc

$$f(x) = f(B) + \int_B^x f'(t) dt \leq f(B) + f'(B)(x - B)$$

Puisque  $f'(B) < 0$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ , ce qui contredit notre hypothèse suivant laquelle  $f > 0$  sur  $[A, +\infty[$ . On en déduit donc que  $f$  s'annule sur  $[A, +\infty[$ .

### Solution 194

- On peut trouver une suite injective  $(x_n)$  de zéros de  $f$ . Comme  $[0, 1]$  est compact, on peut supposer que  $(x_n)$  converge quitte à considérer une suite extraite. Notons  $\ell \in [0, 1]$  sa limite. Comme deux termes consécutifs  $x_n$  et  $x_{n+1}$  de cette suite sont distincts, en appliquant le théorème de Rolle, il existe  $y_n$  strictement compris entre  $x_n$  et  $x_{n+1}$  tel que  $f'(y_n) = 0$ . Par encadrement,  $(y_n)$  converge également vers  $\ell$ . Par continuité de  $f$  et  $f'$ ,  $f(\ell) = f'(\ell) = 0$ .
- Soit  $f$  une solution de (E) s'annulant une infinité de fois sur  $[0, 1]$ . D'après la question précédente, il existe  $\ell \in [0, 1]$  tel que  $f$  est solution du problème de Cauchy  $\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ f(\ell) = f'(\ell) = 0 \end{cases}$ . La fonction nulle est également solution de ce problème de Cauchy. Par unicité de la solution de ce problème,  $f$  est nulle. Ainsi l'unique solution de (E) s'annulant une infinité de fois est la fonction nulle.

### Solution 195

Supposons que  $A^T$  possède une valeur propre  $\lambda$  strictement positive. Notons  $u$  un vecteur propre associé. Posons  $\varphi(t) = u^T x(t)$ . Comme  $\ell : y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto u^T y$  est une forme linéaire,  $\varphi$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = u^T x'(t) = u^T A x(t) = (A^T u)^T x(t) = \lambda u^T x(t) = \lambda \varphi(t)$$

Ainsi  $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Mais comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ . On ne peut avoir  $\varphi(0) \neq 0$  sinon  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pm\infty$  puisque  $\lambda > 0$ . Ainsi  $\varphi(0) = 0$  puis  $\varphi(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , ou encore  $\ell(x(t)) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Si  $A^T$  ne possède aucune valeur propre strictement positive, on peut néanmoins affirmer que  $A^T$  possède une valeur propre complexe  $\lambda$  non réelle de partie réelle strictement positive car  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A) > 0$ . On note à nouveau  $u$  un vecteur propre associé.

**ATTENTION!**  $u$  est un vecteur à coefficients complexes donc on va devoir raisonner un peu différemment que dans le cas précédent.

Comme précédemment,  $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . A nouveau,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$  car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ . Si  $\varphi(0) \neq 0$ ,  $|\varphi(t)| = |\varphi(0)|e^{\text{Re}(\lambda)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $\varphi(0) = 0$  puis  $\varphi(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On ne peut plus poser  $\lambda : y \mapsto u^T y$  car  $\lambda$  serait alors à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et ne serait pas une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Néanmoins, il existe  $(v, w) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$  tel que  $u = v + iw$ . Comme  $u^T x(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et que  $x$  est à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $v^T x(t) = w^T x(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On peut donc poser au choix  $\lambda : y \mapsto v^T y$  ou  $\lambda : y \mapsto w^T y$ .

### Solution 196

1. a. On a  $W' = u''v - uv'' = (q - p)uv$ .
- b. Supposons que  $v$  ne s'annule pas sur  $[a, b]$ . Comme  $u$  et  $v$  sont continues, elles restent de signe constant respectivement sur  $]a, b[$  et  $[a, b]$ . Quitte à changer  $u$  en  $-u$  et/ou  $v$  en  $-v$  (qui sont aussi solution des mêmes équations différentielles que  $u$  et  $v$ ), on peut supposer  $u > 0$  sur  $]a, b[$  et  $v > 0$  sur  $[a, b]$ . Alors  $W' \geq 0$  sur  $]a, b[$  et donc  $W$  est croissante sur  $]a, b[$ . De plus,  $W(a) = u'(a)v(a)$  et  $W(b) = u'(b)v(b)$ . On a  $u'(a) \geq 0$  et  $u'(b) \leq 0$  en considérant la limite du taux de variation de  $u$  en  $a^+$  et  $b^-$ . Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, on ne peut avoir  $u'(a) = 0$  ou  $u'(b) = 0$  sinon  $u$  serait nulle. Par conséquent,  $u'(a) > 0$  et  $u'(b) < 0$ . Ainsi  $W(a) > 0$  et  $W(b) < 0$  ce qui contredit la décroissance de  $W$ . On en déduit que  $v$  s'annule sur  $[a, b]$ .
2. a. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . La fonction  $u : x \mapsto \sin(M(x - a))$  vérifie  $u'' + M^2 u = 0$ . De plus,  $u$  s'annule en  $a$  et  $a + \frac{\pi}{M}$  mais ne s'annule pas sur  $]a, a + \frac{\pi}{M}[$ . On déduit de la question précédente que  $f$  s'annule sur  $[a, a + \frac{\pi}{M}]$ .
- b. Soit  $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{M}[$ . La fonction  $v : x \mapsto \sin(M(x - a + \varepsilon))$  vérifie  $v'' + M^2 v = 0$ . La question précédente montre que  $v$  s'annule sur  $[a, b]$ . Comme  $v$  ne s'annule pas sur  $[a, \frac{a}{M} + \frac{\pi}{M} - \varepsilon]$ , on a  $b \geq a + \frac{\pi}{M} - \varepsilon$  i.e.  $b - a \geq \frac{\pi}{M} - \varepsilon$ . Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{M}[$ ,  $b - a \geq \frac{\pi}{M}$ .

## Topologie

### Solution 197

1. Remarquons déjà que l'existence de la valeur d'adhérence  $(x', y')$  est justifiée par la compacité de  $K^2$ . Il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que la suite  $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(x', y')$ . Remarquons alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|g^n(x') - x\| = \|g^n(x') - g^n(x_n)\| \leq \|x' - x_n\| \quad \text{et} \quad \|g^n(y') - y\| = \|g^n(y') - g^n(y_n)\| \leq \|y' - y_n\|$$

car  $g$  et donc  $g^n$  est 1-lipschitzienne. On en déduit donc que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|(g^{\varphi(n)}(x') - g^{\varphi(n)}(y')) - (x - y)\| \leq \|g^{\varphi(n)}(x') - x\| + \|g^{\varphi(n)}(y') - y\| \leq \|x' - x_{\varphi(n)}\| + \|y' - y_{\varphi(n)}\|$$

Ainsi la suite  $(g^{\varphi(n)}(x') - g^{\varphi(n)}(y'))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x - y$ , qui est bien une valeur d'adhérence de la suite  $(g^n(x') - g^n(y'))_{n \in \mathbb{N}}$ .



2. A nouveau, le fait que  $g$  soit 1-lipschitzienne montre que la suite  $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle décroissante. Elle est également minorée donc elle converge.

La question précédente et la continuité de la norme montrent que  $\|x - y\|$  est une valeur d'adhérence de cette même suite. C'est donc que la suite  $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\|x - y\|$ .

Si l'on reprend la première question,

$$\|g^{n+1}(x') - g(x)\| \leq \|g^n(x') - x\| = \|g^n(x') - g^n(x_n)\| \leq \|x' - x_n\| \quad \text{et} \quad \|g^{n+1}(y') - g(y)\| \leq \|g^n(x') - x\| = \|g^n(y') - g^n(y_n)\| \leq \|y' - y_n\|$$

On en déduit comme précédemment que  $g(x) - g(y)$  est encore une valeur d'adhérence de la suite  $(g^n(x') - g^n(y'))_{n \in \mathbb{N}}$  et donc également de la suite  $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$ . On en déduit que  $\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$ .  
 $g$  est donc bien une isométrie.

3. Fixons  $y \in E$ . La suite  $(g^n(y))_{n \in \mathbb{N}}$  est à valeurs dans le compact  $K$  donc on peut en extraire une suite  $g^{\varphi(n)}(y)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente. La suite  $(g^{\varphi(n+1)}(y) - g^{\varphi(n)}(y))_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers 0. Mais comme  $g$  est une isométrie,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y) - y\| = \|(g^{\varphi(n+1)}(y) - g^{\varphi(n)}(y))\|$$

donc la suite  $(g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $y$ . Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi(n+1) > \varphi(n)$  car  $\varphi$  est strictement croissante donc  $g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)$  appartient à  $g(K)$ . On en déduit que  $y \in \overline{g(K)}$ . Mais comme  $g$  est continue et  $K$  est compact,  $g(K)$  est compact donc fermé. Ainsi  $\overline{g(K)} = g(K)$  et  $y \in g(K)$ . L'application  $g$  est donc surjective. Pour le contre-exemple, on peut considérer l'espace vectoriel  $E$  des suites bornées muni de la norme infinie ainsi que la boule unité  $K$ . L'application  $g$  qui à une suite  $u \in E$  associe la suite  $v$  définie par  $v_0 = 0$  et  $v_{n+1} = u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est clairement une isométrie. De plus,  $K$  est stable par  $g$  mais  $g$  n'est clairement pas surjective.

### Solution 198

1. L'application  $\phi : \begin{cases} K^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \|x - y\| \end{cases}$  est continue comme composée des applications continues  $(x, y) \mapsto x - y$  et  $x \mapsto \|x\|$ .

Comme  $K^2$  est compact comme produit de compacts,  $\phi(K^2)$  est un compact de  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $\phi(K)$  est majoré et contient sa borne supérieure. Ainsi  $\delta(K)$  existe et la borne supérieure le définissant est atteinte.

2. Remarquons tout d'abord que le symétrique par rapport à  $a$  d'un point  $x$  de  $E$  est  $2a - x$ .

Soit  $B \in \mathcal{S}_a$ . Pour  $y \in E$ , notons  $\phi_y : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \|x - y\| \end{cases}$ . On a

$$T(B) = B \cap \left( \bigcap_{y \in B} \phi_y^{-1} \left( \left[ 0, \frac{1}{2} \delta(B) \right] \right) \right)$$

Comme  $\phi_y$  est continue pour tout  $y \in B$ , les  $\phi_y^{-1} \left( \left[ 0, \frac{1}{2} \delta(B) \right] \right)$  sont fermés. Ainsi  $T(B)$  est fermé comme intersection de fermés. De plus,  $T(B) \subset B$  avec  $B$  compact donc  $T(B)$  est compact.

Montrons que  $T(B)$  est symétrique par rapport à  $a$ . Soit  $x \in T(B)$ . On veut donc montrer que  $2a - x \in T(B)$ . Or pour tout  $y \in B$  :

$$\|(2a - x) - y\| = \|x - (2a - y)\| \leq \frac{1}{2} \delta(B)$$

car  $x \in T(B)$  et  $2a - y \in B$  par symétrie de  $B$  par rapport à  $a$ . Ainsi  $2a - x \in T(B)$ . Donc  $T(B) \in \mathcal{S}_a$ .

3. Soient  $B \in \mathcal{S}_a$  et  $(x, y) \in T(B)^2$ . A fortiori,  $(x, y) \in B^2$  de sorte que, par définition de  $T(B)$   $\|x - y\| \leq \frac{1}{2} \delta(B)$ . On en déduit que  $\delta(T(B)) \leq \frac{1}{2} \delta(B)$ . On peut alors montrer par récurrence que  $\delta(B_n) \leq \frac{1}{2^n} \delta(B_0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Posons  $\tilde{B} = \bigcap_{n \geq 0} B_n$ . Alors  $\tilde{B}$  est fermé comme intersection de fermés et  $\tilde{B}$  est inclus dans le compact  $B_0$  donc il est compact. Puisque

$\tilde{B} \subset B_n$ ,  $\delta(\tilde{B}) \leq \delta(B_n) \leq \frac{1}{2^n} \delta(B_0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $\delta(\tilde{B}) = 0$ . Si  $B_0 = \emptyset$ , alors clairement  $\tilde{B} = \emptyset$ . Montrons maintenant que si  $B_0 \neq \emptyset$ , alors  $\tilde{B} = \{a\}$ . Soit  $x \in \tilde{B}$ . Alors  $x$  et  $2a - x$  appartiennent à  $\tilde{B}$  puisque tous les  $T_n(B)$  sont symétriques par rapport à  $a$ . En particulier,  $\|x - (2a - x)\| = 0$  puis  $a = x$ .

4. Soient  $u$  une isométrie et  $(x, y) \in E^2$ . On pose alors  $B_0 = \{x, y\}$  et on définit la suite  $(B_n)$  comme précédemment. Posons  $m = \frac{x+y}{2}$  de sorte que  $B_0$  est symétrique par rapport à  $m$ . Alors, comme précédemment,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{m\}$ .

Montrons maintenant que si  $B$  est un compact de  $E$ , alors  $T(u(B)) \subset u(T(B))$ . Soit en effet  $x \in T(u(B))$ . En particulier,  $x \in u(B)$  donc il existe  $a \in T(B)$  tel que  $x = u(a)$ . De plus, pour tout  $y \in u(B)$ ,  $\|x - y\| \leq \frac{1}{2}\delta(u(B))$  donc pour tout  $b \in B$ ,  $\|u(a) - u(b)\| \leq \frac{1}{2}\delta(u(B))$ .

Or  $u$  est une isométrie donc  $\|u(a) - u(b)\| = \|a - b\|$  et on montre facilement que  $\delta(u(B)) = \delta(B)$ . Finalement  $\|a - b\| \leq \frac{1}{2}\delta(B)$  pour tout  $b \in B$  i.e.  $a \in T(B)$ . Ainsi  $x = u(a) \in u(T(B))$ .

On en déduit alors par récurrence que  $T^n(u(B_0)) \subset u(T^n(B_0))$  i.e.  $C_n \subset u(B_n)$  en posant  $C_n = T^n(u(B_0))$ . Finalement,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} u(B_n)$$

Mais comme  $u$  est injective en tant qu'isométrie,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} u(B_n) = u\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = u(\{a\}) = \{u(a)\}$$

Mais  $C_0 = \{u(x), u(y)\}$  est symétrique par rapport à  $n = \frac{u(x) + u(y)}{2}$  donc on montre comme à la question précédente que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \{n\}$ . Finalement,  $\{n\} \subset \{u(a)\}$  donc  $n = u(a)$ .  $u$  conserve bien les milieux.

### Solution 199

1. Tout d'abord,  $f$  est continue sur  $K$  car lipschitzienne. L'application  $\varphi : x \in K \mapsto \|f(x) - x\|$  est alors elle-même continue par continuité de la norme. Elle admet donc un minimum sur le compact  $K$  atteint en  $a \in K$ . Supposons que  $f(a) \neq a$ . D'après la propriété vérifiée par  $f$ , on aurait alors  $\varphi(f(a)) < \varphi(a)$ , ce qui est contradictoire. Ainsi  $f(a) = a$  et  $f$  admet un point fixe. Supposons maintenant que  $f$  possède deux points fixes  $a$  et  $b$ . Comme  $a \neq b$ ,  $\|f(a) - f(b)\| < \|a - b\|$  i.e.  $\|a - b\| < \|a - b\|$ , ce qui est absurde. Ainsi  $f$  possède un unique point fixe.
2. Notons  $a$  l'unique point fixe de  $f$ . La suite de terme général  $\|x_n - a\|$  est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc. Notons  $m$  sa limite. Soit alors  $\ell$  une valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)$ . On peut alors extraire de la suite  $(x_n)$  une suite  $(x_{\psi(n)})$  convergeant vers  $\ell$ .

La suite de terme général  $\|x_{\psi(n)} - a\|$

- converge vers  $m$  en tant que suite extraite de la suite de terme général  $\|x_n - a\|$ ;
- converge vers  $\|\ell - a\|$  par continuité de la norme.

Ainsi  $m = \|\ell - a\|$ .

De même, la suite de terme général  $\|x_{\psi(n)+1} - a\|$

- converge vers  $m$  en tant que suite extraite de la suite de terme général  $\|x_n - a\|$ ;
- converge également vers  $\|f(\ell) - a\|$  puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|x_{\psi(n)+1} - a\| = \|f(x_{\psi(n)}) - a\|$  et que  $f$  est continue.

Ainsi  $m = \|f(\ell) - a\|$ .

Supposons que  $\ell \neq a$ . Alors

$$m = \|f(\ell) - a\| = \|f(\ell) - f(a)\| < \|\ell - a\| = m$$

ce qui est absurde. Ainsi  $\ell = a$ .

La suite  $(x_n)$  est donc à valeurs dans un compact et ne possède que  $a$  comme unique valeur d'adhérence : elle converge donc vers  $a$ .

3. On peut par exemple considérer  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ .  $f$  n'admet clairement aucun point fixe. Par contre, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x \neq y$ ,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}}$$

Or, par stricte croissance de la racine carrée et inégalité triangulaire

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| \geq |x + y|$$

On en déduit que

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

### Solution 200

Tout d'abord les deux maxima sont bien définies car  $B$  et  $S$  sont des compacts et  $z \mapsto |P(z)|$  est continue.

Tout d'abord,  $S \subset B$  donc  $\max_{z \in B} |P(z)| \geq \max_{z \in S} |P(z)|$ . Supposons que l'inégalité soit stricte. Le maximum de  $|P|$  sur  $B$  est alors atteint en un point  $z_0$  qui n'appartient pas à  $S$ , autrement dit un point intérieur à  $B$ .

Si pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P^{(k)}(z_0) = 0$ , alors  $P$  est constant d'après la formule de Taylor. De même, si  $P(z_0) = 0$ ,  $P$  est le polynôme constant nul. Mais on a alors clairement  $\max_{z \in B} |P(z)| = \max_{z \in S} |P(z)|$ , ce qui contredit notre hypothèse.

Ainsi  $P(z_0) \neq 0$  et on peut poser  $p = \min \{k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}(z_0) \neq 0\}$ . D'après la formule de Taylor, il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = P(z_0) + \frac{P^{(p)}(z_0)}{p!} (z - z_0)^p + Q(z - z_0)(z - z_0)^{p+1}$$

Notamment,

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, P(z_0 + re^{i\theta}) = P(z_0) \left( 1 + \frac{P^{(p)}(z_0)}{p!P(z_0)} r^p e^{ip\theta} + \frac{Q(re^{i\theta})}{P(z_0)} r^{p+1} e^{i(p+1)\theta} \right)$$

Posons  $A = \frac{P^{(p)}(z_0)}{p!P(z_0)}$  et  $R = \frac{Q}{P(z_0)}$ .

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, P(z_0 + re^{i\theta}) = P(z_0) (1 + Ar^p e^{ip\theta} + R(re^{i\theta}) r^{p+1} e^{i(p+1)\theta})$$

Choisissons  $\theta$  de telle sorte que  $Ae^{ip\theta} = |A|$ . Par inégalité triangulaire,

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, |P(z_0 + re^{i\theta})| \geq |P(z_0)| (1 + |A|r^p - |R(re^{i\theta})| r^{p+1}) = |P(z_0)| (1 + r^p (|A| - |R(re^{i\theta})| r))$$

Ainsi

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, |P(z_0 + re^{i\theta})| - |P(z_0)| \geq |A||P(z_0)| r^p - |R(re^{i\theta})| r^{p+1} = r^p (|A||P(z_0)| - |R(re^{i\theta})| r)$$

Comme  $R$  est continue et  $|A||P(z_0)| \neq 0$ ,

$$r^p (|A||P(z_0)| - |R(re^{i\theta})| r) \underset{r \rightarrow 0^+}{\sim} |A||P(z_0)| r^p$$

Notamment,  $r \mapsto |P(z_0 + re^{i\theta})| - |P(z_0)|$  est strictement positive au voisinage de  $0^+$ . Comme  $z_0$  est intérieur à  $B$ , il existe  $r > 0$  tel que  $z_0 + re^{i\theta} \in B$  et  $|P(z_0 + re^{i\theta})| - |P(z_0)| > 0$ , ce qui contredit le fait que  $|P|$  admet son maximum sur  $B$  en  $z_0$ .

On conclut donc par l'absurde que  $\max_{z \in B} |P(z)| = \max_{z \in S} |P(z)|$ .

### Solution 201

On raisonne par récurrence sur  $n$ .

Soit  $A$  une partie convexe et dense de  $\mathbb{R}$ .  $A$  est donc un intervalle vérifiant  $\bar{A} = \mathbb{R}$ . On a donc  $\sup A = \sup \bar{A} = +\infty$  et  $\inf A = \inf \bar{A} = -\infty$ . Ainsi  $A = \mathbb{R}$ .

Supposons la propriété à montrer vraie à un rang  $n - 1 \geq 1$ . Soit alors  $A$  une partie convexe et dense de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ . On va montrer que  $A \cap H$  est une partie convexe et dense de  $H$ .

D'abord  $A \cap H$  est convexe comme intersection de deux convexes.

On munit alors  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique et on note  $u$  un vecteur unitaire normal à  $H$ . Soit  $x \in H$  et  $\varepsilon > 0$ .

Posons  $a = x + \frac{\varepsilon}{2}u$ . Par densité de  $A$  dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $b \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|b - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . On a alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que  $\|u\| = 1$  :

$$\langle b, u \rangle = \langle b - a, u \rangle + \langle a, u \rangle \geq -\|b - a\| \|u\| + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 > 0$$

Posons  $c = x - \frac{\varepsilon}{2}u$ . Par densité de  $A$  dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $d \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|d - c\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . On a alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que  $\|u\| = 1$  :

$$\langle d, u \rangle = \langle d - c, u \rangle + \langle c, u \rangle \leq \|d - c\| \|u\| - \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 < 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'application  $t \mapsto \langle (1 - t)b + td, u \rangle$  s'annule en un point  $t_0 \in ]0, 1[$ . Posons  $e = (1 - t_0)b + t_0d$ . On a donc  $e \in H$  et  $e \in A$  par convexité de  $A$ . De plus,

$$\|b - x\| \leq \|b - a\| + \|a - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et

$$\|d - x\| \leq \|d - c\| + \|c - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|e - x\| = (\leq (1 - t_0)\|b - x\| + t_0\|d - x\| < (1 - t_0)\varepsilon + t_0\varepsilon = \varepsilon$$

Ceci achève de prouver la densité de  $A \cap H$  dans  $H$ .

D'après notre hypothèse de récurrence,  $A \cap H = H$ . Or  $\mathbb{R}^n$  est égal à la réunion de ses hyperplans. Donc  $A = \mathbb{R}^n$ .

**REMARQUE.** L'énoncé est faux en dimension infinie.  $\mathbb{R}[X]$  est une partie convexe (en tant que sous-espace vectoriel) et dense (d'après le théorème de Stone-Weierstrass) de  $\mathcal{C}([0, 1])$  muni de la topologie de la convergence uniforme. Pourtant,  $\mathbb{R}[X]$  est d'intérieur vide. En effet,  $\mathbb{R}[X]$  est l'union des  $\mathbb{R}_n[X]$  qui sont des fermés d'intérieur vide en tant que sous-espaces vectoriels de dimension finie. On conclut par le théorème de Baire.

## Solution 202

Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  et  $\beta_1, \dots, \beta_n$  sont des réels strictement positifs, on montre que

$$\det\left(\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}\right) = \frac{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i - \alpha_j\right)\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \beta_i - \beta_j\right)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i + \beta_j} \quad (1)$$

Pour des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  d'un espace préhilbertien  $E$ , on pose  $\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = \det((x_i | x_j)_{1 \leq i, j \leq n})$ . On montre que si  $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille libre de vecteurs de  $E$  et  $u$  un vecteur de  $E$ , alors

$$d(x, \text{vect}(u_1, \dots, u_n))^2 = \frac{\text{Gram}(u_1, \dots, u_n, u)}{\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)} \quad (2)$$

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , on notera  $f_\alpha \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  la fonction  $x \mapsto x^\alpha$ . On a donc pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ ,  $(f_\alpha | f_\beta) = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$ .

(i)  $\implies$  (ii) Comme la suite  $(a_n)$  est croissante, soit elle converge, soit elle diverge vers  $+\infty$ . Si elle converge, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$  est grossièrement divergente. Supposons donc que la suite  $(a_n)$  diverge vers  $+\infty$ . En utilisant (1) et (2), on montre que

$$d_n^2 = d(f_0, \text{vect}(f_{a_0}, \dots, f_{a_n}))^2 = \frac{\prod_{i=0}^n a_i^2}{\prod_{i=0}^n (1 + a_i)^2} = \left(\prod_{i=0}^n \frac{a_i}{1 + a_i}\right)^2$$

et donc

$$d_n = \prod_{i=0}^n \frac{a_i}{1 + a_i}$$

Comme  $\text{vect}((f_{a_n})_{n \in \mathbb{N}})$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $(d_n)$  converge vers 0. En passant au logarithme, on en déduit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$  diverge vers  $+\infty$ . Puisque  $(a_n)$  diverge vers  $+\infty$ ,  $\ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \sim \frac{1}{a_n}$  et la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$  diverge donc également.

(ii)  $\implies$  (i) Fixons  $p \in \mathbb{N}$ . En utilisant à nouveau (1) et (2), on trouve

$$d_{p,n}^2 = d(f_p, \text{vect}(f_{a_0}, \dots, f_{a_n}))^2 = \frac{1}{2p+1} \left(\prod_{i=0}^n \frac{a_i - p}{1 + p + a_i}\right)^2$$

et donc

$$d_{p,n} = \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \prod_{i=0}^n \frac{|a_i - p|}{1 + p + a_i}$$

S'il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $a_i = p$ , alors  $d_{p,n} = 0$  pour tout  $n \geq i$ . Dans le cas contraire, on a

$$\ln d_{p,n} = -\frac{1}{2} \ln(2p+1) + \sum_{i=0}^n \ln \left| \frac{a_i - p}{1 + p + a_i} \right|$$

On distingue à nouveau plusieurs cas :

- Si  $(a_n)$  converge vers un réel  $l$ , on montre que la suite  $\left(\left|\frac{a_n - p}{1 + p + a_n}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel positif strictement inférieur à 1 (distinguer les cas  $l \leq p$  et  $l > p$ ). La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left|\frac{a_n - p}{1 + p + a_n}\right|$  diverge donc grossièrement vers  $-\infty$ . On en déduit que  $d_{p,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- Si  $(a_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors

$$\ln \left|\frac{a_n - p}{1 + p + a_n}\right| \sim -\frac{2p+1}{1+p+a_n} \sim -\frac{2p+1}{a_n}$$

Comme la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$  diverge vers  $+\infty$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left|\frac{a_n - p}{1 + p + a_n}\right|$  diverge également vers  $+\infty$  et, à nouveau,  $d_{p,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Bref, dans tous les cas  $d_{p,n}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$  et  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme  $P$  à coefficients réels tels que  $\|f - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ . On montre facilement que  $\|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ . Si  $P$  est nul c'est fini, puisqu'alors  $P$  appartient à  $\text{vect}((f_{a_n})_{n \in \mathbb{N}})$ .

Sinon, posons  $P = \sum_{p=0}^n a_p f_p$ . Posons  $M = \max\{|a_p|, 0 \leq p \leq n\}$ . Pour  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , il existe  $g_p \in \text{vect}((f_{a_n})_{n \in \mathbb{N}})$  tel que  $\|f_p - g_p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2M(n+1)}$ . Posons alors  $g = \sum_{p=0}^n a_p g_p$ . Alors, par inégalité triangulaire

$$\|P - g\|_2 \leq \sum_{p=0}^n |a_p| \|f_p - g_p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

A nouveau par inégalité triangulaire

$$\|f - g\|_2 \leq \|f - P\|_2 + \|P - g\|_2 < \varepsilon$$

ce qui prouve la densité de  $\text{vect}((f_{a_n})_{n \in \mathbb{N}})$ .

### Solution 203

1. Tout d'abord  $0 \in F \subset \overline{F}$ . Soient  $(x, y) \in \overline{F}^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Il existe donc deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  à valeurs dans  $F$  convergeant respectivement vers  $x$  et  $y$ . Alors  $(\lambda x_n + \mu y_n)$  est une suite à valeurs dans  $F$  (puisque c'est un sous-espace vectoriel de  $E$ ) convergeant vers  $\lambda x + \mu y$ . Ainsi  $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$ . Par conséquent,  $\overline{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Supposons  $H$  non fermé i.e.  $H \subsetneq \overline{H}$ . Il existe donc  $u \in \overline{H} \setminus H$ . Alors  $\text{vect}(u)$  est une droite vectorielle non incluse dans  $H$ . On sait alors que  $H \oplus \text{vect}(u) = E$ . On sait que  $u \in \overline{H}$ , donc  $\text{vect}(u) \subset \overline{H}$  car  $\overline{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . De même,  $H \subset \overline{H}$  donc  $E = H \oplus \text{vect}(u) \subset \overline{H}$  car  $\overline{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Ainsi  $\overline{H} = E$  et  $H$  est dense dans  $E$ .

### Solution 204

Clairement,  $N$  est positive, homogène et vérifie l'inégalité triangulaire. Soit alors  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $N(P) = 0$ . Alors  $P(\alpha_k) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Puisque  $\deg P \leq n$ ,  $P = 0$ . Ainsi  $N$  est bien une norme.

Supposons que  $N$  soit une norme euclidienne. Alors pour tout  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ ,

$$N(P + Q)^2 + N(P - Q)^2 = 2N(P)^2 + 2N(Q)^2$$

Par interpolation de Lagrange, il existe deux polynômes  $P$  et  $Q$  tels que  $P(\alpha_k) = \delta_{k,0}$  et  $Q(\alpha_k) = \delta_{k,n}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Puisque  $n \neq 0$ ,  $N(P + Q) = N(P - Q) = 2$  tandis que  $N(P) = N(Q) = 1$ , ce qui contredit l'égalité précédente.

### Solution 205

1. a. Supposons que la suite  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$  et  $x'$ . Soit  $y \in E$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n - x', y \rangle = 0$ . Par différence,  $\langle x' - x, y \rangle = 0$ . Ainsi  $x' - x \in E^\perp = \{0_E\}$  et  $x = x'$ .

b. Supposons que  $(x_n)$  converge fortement vers  $x$ . Soit  $y \in E$ . Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n - x\| \|y\|$$

On en déduit immédiatement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$ . Ainsi  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$ .

2. Supposons que  $(x_n)$  converge fortement vers  $x$ . Alors, d'après la question précédente,  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$ . De plus, par inégalité triangulaire,

$$\| \|x_n\| - \|x\| \| \leq \|x_n - x\|$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$ .

Supposons maintenant que  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$ . Remarquons que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x \rangle$$

Par hypothèse,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2$ . De plus,  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n - x, x \rangle = 0$  ou encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, x \rangle = \|x\|^2$ . Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|^2 = 0$$

ce qui prouve que  $(x_n)$  converge fortement vers  $x$ .

3. Supposons que  $E$  soit de dimension finie.

Soit donc une suite  $(x_n)$  convergeant faiblement vers  $x$ . Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ . Par convergence faible, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n - x, e_i \rangle = 0$ . De plus, la base  $(e_1, \dots, e_n)$  étant orthonormée, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x_n - x, e_i \rangle^2$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|^2 = 0$$

ou encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$ .

4. Considérons  $E = \mathbb{R}[X]$ , que l'on munit de sa norme usuelle (somme des produits des coefficients), c'est-à-dire

$$(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \cdot \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$$

On considère alors la suite  $(X^n)$ . Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\langle X^n, P \rangle = 0$  dès lors que  $n > \deg P$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle X^n, P \rangle = 0$ , ce qui permet d'affirmer que  $(X^n)$  converge faiblement vers 0. Mais, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|X^n\| = 1$  donc la suite  $(X^n)$  ne peut converger fortement vers 0.

## Solution 206

1. Pour tout  $f \in E$ ,

$$\|f\|_2^2 = \int_{[0,1]} f^2 \leq \int_{[0,1]} \|f\|_\infty^2 = \|f\|_\infty^2$$

Par conséquent,  $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ .

2. Les normes  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  induisent des normes sur  $V$ . Comme  $V$  est de dimension finie, ces normes sont équivalentes et on en déduit l'inégalité demandée.

3. On peut munir  $V$  du produit scalaire  $(f, g) \mapsto \int_{[0,1]} fg$ . On se donne une famille libre de  $V$  à  $p$  éléments. On peut alors l'orthonormaliser en une famille  $(f_1, \dots, f_p)$ . Soit  $x \in [0, 1]$ . Alors pour  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left( \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x) \right)^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i \right\|_\infty^2 \leq n^2 \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 f_i^2$$

Or la famille  $(f_1, \dots, f_p)$  étant orthonormale,  $\|\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$ . L'astuce consiste à prendre maintenant  $\lambda_i = f_i(x)$  pour  $1 \leq i \leq p$ .

On obtient alors

$$\left(\sum_{i=1}^p f_i(x)^2\right)^2 \leq n^2 \sum_{i=1}^p f_i(x)^2$$

et donc

$$\sum_{i=1}^p f_i(x)^2 \leq n^2$$

Il suffit alors d'intégrer entre 0 et 1 pour obtenir

$$\sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 \leq n^2$$

La famille  $(f_1, \dots, f_p)$  étant normée, on aboutit à  $p \leq n^2$ , ce qui prouve que  $V$  est nécessairement de dimension finie et que  $\dim V \leq n^2$ .

### Solution 207

1.  $N_\infty$  est la norme de la convergence uniforme. On en déduit sans peine que  $N$  et  $N_1$  sont également des normes.
2. Posons  $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$ . On a clairement  $N_\infty(f_n) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Cependant,  $N(f_n) = N_1(f_n) = n^2 - n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .  
Donc  $N_\infty$  n'est équivalente ni à  $N$  ni à  $N_1$ .
3. Soit  $x \in [0, 1]$ . Par intégration par parties

$$\int_0^x \sin(x-t)f''(t) dt = [\sin(x-t)f'(t)]_0^x + \int_0^x \cos(x-t)f'(t) dt$$

Puisque  $f \in E$ ,  $f'(0) = 0$  de sorte que le crochet est nul. Par une seconde intégration par parties,

$$\int_0^x \sin(x-t)f''(t) dt = [\cos(x-t)f(t)]_0^x - \int_0^x \sin(x-t)f(t) dt$$

Finalement

$$\int_0^x \sin(x-t)(f(t) + f''(t)) dt = [\cos(x-t)f(t)]_0^x = f(x) - f(0)\cos x = f(x)$$

car  $f(0) = 0$  puisque  $f \in E$ .

4. On a clairement  $N \leq N_1$ .  
Soit  $f \in E$ . D'après la question précédente, pour tout  $x \in E$

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)(f(t) + f''(t)) dt$$

puis

$$|f(x)| \leq \int_0^x |\sin(x-t)||f(t) + f''(t)| dt \leq \int_0^x N(f) = xN(f) \leq N(f)$$

Par conséquent  $N_\infty(f) \leq N(f)$ . Par ailleurs,

$$N_\infty(f'') = N_\infty(f'' + f - f) \leq N(f) + N_\infty(f)$$

puis  $N_\infty(f'') - N_\infty(f) \leq N(f)$ . Finalement

$$N_1(f) = N_\infty(f'') - N_\infty(f) + 2N_\infty(f) \leq 3N(f)$$

Ainsi  $N \leq N_1 \leq 3N$  donc  $N$  et  $N_1$  sont équivalentes.

## Solution 208

1. La forme linéaire  $\phi : f \in E \mapsto f(0)$  est continue puisque pour tout  $f \in E$ ,  $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$ . De même, la forme linéaire  $\psi : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t) dt$  est également continue puisque pour tout  $f \in E$ ,  $\left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \|f\|_\infty$ .

On en déduit que  $\phi^{-1}(\{0\})$  et  $\psi^{-1}([1, +\infty[)$  sont fermés en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. Enfin,  $A$  est fermé en tant qu'intersection de ces deux fermés.

2. Soit  $f \in A$ . Supposons  $\|f\|_\infty \leq 1$ . Alors  $|f(t)| \leq 1$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . En particulier,  $f \leq 1$  sur  $[0, 1]$  donc  $\int_0^1 f(t) dt \leq 1$ . Mais puisque  $f \in A$ ,  $\int_0^1 f(t) dt \geq 1$ . Finalement  $\int_0^1 f(t) dt = 1$  ou encore  $\int_0^1 (1 - f(t)) dt = 0$ . L'application  $1 - f$  est positive, continue et d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$  : elle est donc nulle i.e.  $f$  est constante égale à 1, ce qui contredit le fait que  $f(0) = 0$ . On a donc montré par l'absurde que  $\|f\|_\infty > 1$ .

3. On vérifie que  $f_n$  est bien continue en  $\alpha$  donc continue sur  $[0, 1]$ . On a bien également  $f_n(0) = 0$ . Enfin, par la relation de Chasles,

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^\alpha \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right) t dt + \int_\alpha^1 \left(1 + \frac{1}{n}\right) dt = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Il suffit donc de choisir  $\alpha = \frac{2}{n+1}$  pour avoir  $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$  de sorte que  $f_n \in A$ . On vérifie également que  $\frac{2}{n+1} \in ]0, 1]$ .

4. Puisque pour tout  $f \in A$ ,  $\|f\|_\infty > 1$ ,  $d(0, A) \geq 1$ . De plus, en définissant  $f_n$  comme dans la question précédente

$$d(0, A) \leq \|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$$

Par passage à la limite,  $d(0, A) \leq 1$ . Finalement,  $d(0, A) = 1$ .

## Solution 209

1. L'application  $\varphi : f \in E \mapsto f(1)$  est une forme linéaire. De plus, pour tout  $f \in E$ ,  $|\varphi(f)| = |f(1)| \leq \|f\|_\infty$  donc  $\varphi$  est continue lorsque l'on munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Ainsi  $0$  est ouvert pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  comme image réciproque de l'ouvert  $\mathbb{R}_+^*$  par l'application continue  $\varphi$ .

2. L'application  $\psi : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t) dt$  est une forme linéaire. De plus, pour tout  $f \in E$ ,

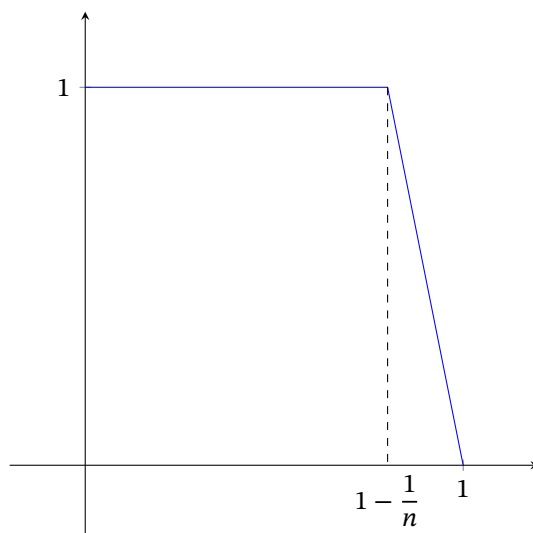
$$|\psi(f)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1$$

Ainsi  $\psi$  est à nouveau continue si l'on unit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ . Par conséquent,  $F$  est fermé pour la norme  $\|\cdot\|_1$  comme image réciproque du fermé  $\mathbb{R}_-$  par l'application continue  $\psi$ .

3. Pour montrer que  $0$  n'est pas ouvert pour la norme  $\|\cdot\|_1$ , on va montrer que  $E \setminus 0$  n'est pas fermé pour cette même norme. Posons pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n - nx & \text{sinon} \end{cases}$$





On vérifie aisément que  $f_n \in E \setminus O$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . De plus, en notant  $f$  la fonction constante égale à 1, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|f - f_n\| = \frac{1}{2n}$$

Donc  $(f_n)$  converge vers  $f$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$  mais  $f \notin O$ . D'après la caractérisation séquentielle des fermés,  $E \setminus O$  n'est pas fermé pour la norme  $\|\cdot\|_1$  et  $O$  n'est donc pas ouvert pour cette norme.

### Solution 210

1. Evident.

2. Supposons que  $|b| > 1$ . Alors

$$\frac{|f(X^n)|}{\|X^n\|} = |b|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

D'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires,  $f$  n'est pas continue.

Supposons  $|b| \leq 1$ . Soit  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$ . Par inégalité triangulaire,

$$|f(P)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| |b|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = \|P\|$$

D'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires,  $f$  est continue.

On en déduit de plus que  $\|f\| \leq 1$ . Mais comme

$$\|f\| \geq \frac{|f(1)|}{\|1\|} = 1$$

on a donc  $\|f\| = 1$ .

### Solution 211

Remarquons déjà que  $T_\omega(f)$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  puisque le dénominateur ne s'annule pas (stricte positivité de l'intégrale).

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$T_\omega(f)(x) = \frac{x}{\int_0^x \omega(t) dt} \cdot \frac{\int_0^x f(t) \omega(t) dt}{x}$$

Comme  $x \mapsto \int_0^x \omega(t) dt$  est une primitive de  $\omega$ , on a par définition du nombre dérivé en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \omega(t) dt}{x} = \omega(0) > 0$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)\omega(t) dt}{x} = \omega(0)f(0)$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} T_\omega(f)(x) = f(0)$$

de sorte que  $T_\omega(f)$  est bien prolongeable par continuité en 0.

2.  $T_\omega$  est clairement linéaire. Soit  $f \in \mathcal{C}([0, a], \mathbb{R})$ . Alors  $T_\omega(f)$  est continue sur  $]0, a]$  comme quotient de fonctions continues (et même  $\mathcal{C}^1$ ), le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. La question précédente montre que  $T_\omega(f)$  est continue en 0. Ainsi  $T_\omega(f) \in \mathcal{C}^0([0, a], \mathbb{R})$ .  $T_\omega$  est donc un endomorphisme de  $\mathcal{C}([0, a], \mathbb{R})$ .

De plus, par inégalité triangulaire et positivité de  $\omega$ ,

$$\forall x \in [0, a], |T_\omega(f)(x)| \leq \frac{1}{\int_0^x \omega(t) dt} \int_0^x |f(t)|\omega(t) dt \leq \frac{1}{\int_0^x \omega(t) dt} \int_0^x \|f\|_\infty \omega(t) dt = \|f\|_\infty$$

Autrement dit,  $\|T_\omega(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  donc  $T_\omega$  est continu en vertu de la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

Soit  $k \in \text{Ker } T_\omega$ . Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \int_0^x f(t)\omega(t) dt = 0$$

puis en dérivant,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x)\omega(x) = 0$$

et comme  $\omega$  ne s'annule pas,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 0$$

Mais comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et donc notamment en 0,  $f = 0$ . Ainsi  $\text{Ker } T_\omega = \{0\}$  et  $T_\omega$  est injectif.

3. a.  $T_\omega$  est injectif et  $f \neq 0$  donc  $\lambda \neq 0$ . Comme  $T_\omega(f) = \lambda f$ , on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{\lambda \int_0^x \omega(t) dt} \int_0^x f(t)\omega(t) dt$$

On en déduit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^*$  comme quotient de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  (théorème fondamental de l'analyse), le dénominateur ne s'annulant pas.

Posons  $\Omega(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Alors  $\Omega$  est une primitive de  $\omega$  donc, en dérivant sur  $\mathbb{R}^*$  la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \Omega(x)f(x) = \int_0^x f(t)\omega(t) dt$$

on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\omega(x)}{\Omega(x)} f(x)$$

Ainsi  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  de l'équation différentielle

$$y' = \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\omega}{\Omega} y$$

Les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  de cette équation différentielle sont les fonctions

$$x \mapsto C\Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

- b. Il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C\Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \exp\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln(\Omega(x))\right)$$

et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x) = 0$  donc si  $\lambda < 0$  ou  $\lambda > 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Omega(x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = +\infty$$

Comme  $f$  est continue en 0, ceci impose que  $C = 0$ . Mais  $f$  n'est pas nulle donc on a nécessairement  $\lambda \in [0, 1]$ . On a vu à la question précédente que  $\lambda \neq 0$  donc  $\lambda \in ]0, 1]$ .

### Solution 212

Commençons par supposer  $A$  inversible. Puisque l'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto A^{-1}MA$  est linéaire et que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie, cette application est continue. On en déduit que  $A^{-1}\exp(AB)A = \exp(A^{-1}ABA) = \exp(BA)$ . Ainsi  $\exp(AB)$  et  $\exp(BA)$  sont semblables; elles ont donc même polynôme caractéristique.

Revenons au cas général. On montre classiquement que  $GL_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Fixons  $\lambda \in \mathbb{C}$ . L'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto MB$  est linéaire donc continue puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie. L'application  $\exp$  est également continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Enfin, l'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \det(M - \lambda I_n)$  est aussi continue puisque  $\det(M - \lambda I_n)$  est polynomial en les coefficients de  $M$ . Par composition,  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \det(\exp(MB) - \lambda I_n) = \chi_{\exp(MB)}(\lambda)$  est continue. De même,  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_{\exp(MB)}(\lambda)$ . D'après cas A inversible, ces deux applications continues coïncident sur l'ensemble dense  $GL_n(\mathbb{C})$ . On en déduit qu'elles sont égales sur tout  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Ainsi  $\chi_{\exp(AB)}(\lambda) = \chi_{\exp(BA)}(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  puis  $\chi_{\exp(AB)} = \chi_{\exp(BA)}$ .

## Espaces préhilbertiens réels

### Solution 213

Soit  $S_n$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  de norme 1. Pour  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $X \in \mathbb{R}^n$ , on pose  $\varphi_A(X) = X^T A X$ .

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Il existe une base orthonormée  $(E_1, \dots, E_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle  $A$  diagonalise. Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $\lambda_i$  la valeur propre de  $A$  associée à  $E_i$ . Soit  $X \in S_n$ . Il existe donc  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$  et  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ . On a alors  $\varphi_A(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ . On a

alors  $\varphi(X) \leq \left( \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i \right) \sum_{i=1}^n x_i^2 = \Phi(A)$ . De plus, notons  $j$  l'indice de la plus grande valeur propre de  $A$ , on a alors  $\varphi_A(E_j) = \lambda_j = \Phi(A)$ . Par conséquent,  $\Phi(A) = \max_{X \in S_n} \varphi_A(X)$ .

Soient  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .

$$\Phi(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \max_{X \in S_n} \varphi_{\lambda A + (1 - \lambda)B}(X) = \max_{X \in S_n} (\lambda \varphi_A(X) + (1 - \lambda)\varphi_B(X))$$

Puisque  $\lambda \geq 0$  et  $1 - \lambda \geq 0$ , on a pour tout  $X \in S_n$

$$\lambda \varphi_A(X) + (1 - \lambda)\varphi_B(X) \leq \lambda \max_{X \in S_n} \varphi_A(X) + (1 - \lambda) \max_{X \in S_n} \varphi_B(X) = \lambda \Phi(A) + (1 - \lambda)\Phi(B)$$

Il suffit alors de passer au maximum pour  $X \in S_n$  pour obtenir

$$\Phi(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda \Phi(A) + (1 - \lambda)\Phi(B)$$

Autrement dit,  $\Phi$  est convexe.

### Solution 214

Comme  $A$  est symétrique, elle diagonalise dans une base orthonormale i.e. il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^T A P = D$  avec  $D$  diagonale.

Posons  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix}$ . On vérifie que  $Q \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ . De plus,  $Q^T B Q = \begin{pmatrix} D + I_n & 0 \\ 0 & D - I_n \end{pmatrix}$ . Ceci prouve que  $B$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont les  $\lambda \pm 1$  où  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ .

### Solution 215

Supposons (i). Alors il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées. Posons également  $E_{i,j} = e_i e_j^T + e_j e_i^T$ . On montre aisément que  $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

L'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM + MA \end{cases}$$

est bien définie et c'est un endomorphisme de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . De plus, pour tout  $1 \leq i \leq j \leq n$ ,  $\Phi(E_{i,j}) = (\lambda_i + \lambda_j)E_{i,j}$ . L'application  $\Phi$  est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les  $\lambda_i + \lambda_j$  pour  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Aucune de ces valeurs propres n'est nulle donc  $\Phi$  est un automorphisme. On en déduit la proposition (ii).

**REMARQUE.** On peut raisonner différemment. Il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale telle que  $A = PDP^T$ . Fixons  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . L'équation  $AM + MA = B$  équivaut à  $DN + ND = C$  en posant  $N = P^T MP$  et  $C = P^T BP$ . Cette équation équivaut à

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (\lambda_i + \lambda_j)N_{i,j} = C_{i,j}$$

Comme  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , l'équation admet donc bien une unique solution  $N$ . Comme  $C$  est symétrique,  $N$  l'est également et donc  $M$  aussi. L'équation  $AM + MA = B$  admet donc bien une unique solution symétrique.

Supposons (ii). Considérons l'application  $\Psi$  qui à  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  associe l'unique matrice  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telle que  $AM + MA = B$ . On vérifie aisément que  $\Psi$  est un automorphisme de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $I_n = \Psi(\Psi^{-1}(I_n))$  est l'unique matrice telle que  $AI_n + I_nA = \Psi^{-1}(I_n)$ . Ainsi  $A = \frac{1}{2}\Psi^{-1}(I_n) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On reprend alors le raisonnement de la première implication. L'endomorphisme  $\Phi$  (qui n'est autre que  $\Psi^{-1}$ ) est alors un automorphisme. Ses valeurs propres, à savoir les  $\lambda_i + \lambda_j$  ne peuvent être nulles.

### Solution 216

Il est clair que si  $S$  est nulle,  $S + D$  est semblable à  $D$ .

Supposons maintenant que  $S + D$  est semblable à  $D$ . On rappelle que  $X \mapsto \text{tr}(X^T X)$  est une norme euclidienne de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Comme  $S + D$  est semblable à  $D$ ,  $(S + D)^2$  est également semblable à  $D^2$  et ces deux matrices ont même trace. Ainsi

$$\text{tr}(D^2) = \text{tr}((S + D)^2) = \text{tr}(S^2) + \text{tr}(SD) + \text{tr}(DS) + \text{tr}(D^2)$$

On vérifie aisément que  $SD$  a une diagonale nulle donc  $\text{tr}(SD) = \text{tr}(DS) = 0$ . Ainsi  $\text{tr}(S^2) = \text{tr}(S^T S) = 0$  puis  $S = 0$  via la norme euclidienne citée plus haut.

### Solution 217

1.  $M$  est symétrique réelle donc  $M$  est diagonalisable. De plus,  $M$  est nilpotente donc sa seule valeur propre est 0. On en déduit que  $M = 0$ .
2. Comme  $M$  et  $M^T$  commutent,  $(M^T M)^n = M^n (M^T)^n M^n = 0$ . Comme  $M^T M$  est symétrique réelle,  $M^T M = 0$  d'après la question précédente. Ainsi  $\text{tr}(M^T M) = 0$ . On en déduit que  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 = 0$  puis  $M_{i,j} = 0$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  (somme nulle de termes positifs). Ainsi  $M = 0$ .

### Solution 218

1. Notons  $p_u$  le projecteur orthogonal sur  $\text{vect}(u)$ . Remarquons que  $p_u(e_i) = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, e_i \right\rangle \frac{u}{\|u\|}$ . Ainsi  $\|p_u(e_i)\| = \frac{|\langle u, e_i \rangle|}{\|u\|}$ . Posons alors  $u = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\|e_i\|^2}$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthogonale, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\langle u, e_k \rangle = 1$ . Donc pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\|p_u(e_k)\| = \frac{1}{\|u\|}$ . Les projetés orthogonaux de  $e_1, \dots, e_n$  sur  $\text{vect}(u)$  ont donc toute la même norme.

2. Soit  $u$  un vecteur répondant aux conditions de l'énoncé. Notons  $N$  la norme commune des vecteurs  $p_u(e_1), \dots, p_u(e_n)$ . On a donc  $N = \frac{|\langle e_i, u \rangle|}{\|u\|}$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

Comme la base  $\left( \frac{e_i}{\|e_i\|} \right)_{1 \leq i \leq n}$  est orthonormale, on a :

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle e_i, u \rangle^2}{\|e_i\|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{N^2 \|u\|^2}{\|e_i\|^2}$$

Comme  $u$  est non nul, on obtient :

$$N = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\|e_i\|^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ceci prouve que  $N$  est indépendante de  $u$  et nous donne bien une expression de  $N$  en fonction de  $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$ .

### Solution 219

1. Tout d'abord, pour  $(P, Q) \in E^2$ ,  $P(t)Q(t)e^{-t} = o(1/t^2)$  par croissances comparées donc  $\langle P, Q \rangle$  est bien défini. La bilinéarité et la positivité sont évidentes. Soit enfin  $P \in E$  tel que  $\langle P, P \rangle = 0$ . Comme  $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$  est continue, positive et d'intégrale nulle sur  $\mathbb{R}_+$ , cette fonction est nulle sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi  $P$  admet une infinité de racines puis  $P = 0$ .
2. Notons  $I_n$  l'intégrale à calculer. Par intégration par parties,  $I_n = nI_{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Or  $I_0 = 1$  donc  $I_n = n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. On orthonormalise la base  $(1, X, X^2)$  de  $F$  via le procédé de Gram-Schmidt. On pose

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\|1\|} = 1 \\ P_1 &= \frac{X - \langle P_0, X \rangle P_0}{\sqrt{\|X\|^2 - \langle P_0, X \rangle^2}} = \frac{X - I_1 P_0}{\sqrt{I_2 - I_1^2}} = X - 1 \\ P_2 &= \frac{X^2 - \langle P_0, X^2 \rangle P_0 - \langle P_1, X^2 \rangle P_1}{\sqrt{\|X^2\|^2 - \langle P_0, X^2 \rangle^2 - \langle P_1, X^2 \rangle^2}} = \frac{X^2 - I_2 P_0 - (I_3 - I_2) P_1}{\sqrt{I_4 - I_2^2 - (I_3 - I_2)^2}} = \frac{1}{2} X^2 - 2X + 1 \end{aligned}$$

Alors  $(P_0, P_1, P_2)$  est une base orthonormée de  $F$ .

4. Comme  $(P_0, P_1, P_2)$  est une base orthonormée de  $F$ , le projeté orthogonal de  $X^3$  sur  $F$  est

$$\langle P_0, X^3 \rangle P_0 + \langle P_1, X^3 \rangle P_1 + \langle P_2, X^3 \rangle P_2 = I_3 P_0 + (I_4 - I_3) P_1 + (I_5/2 - 2I_4 + I_3) P_2 = 9X^2 - 18X + 6$$

5. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \right| = |\langle P, 1 \rangle| \leq \|P\| \|1\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt}$$

### Solution 220

Comme  $E$  est ouvert, un minimum de  $f$  est forcément un minimum local et donc un point critique. Pour  $x \in E$ ,  $\nabla f(x) = 2 \sum_{i=1}^p (x - x_i)$ .

L'unique point critique de  $f$  sur  $E$  est donc  $m = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$ . Il suffit donc de vérifier que  $m$  est bien un minimum : il sera nécessairement unique.

Pour  $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^p \|x - m + m - x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p (\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i \rangle + \|m - x_i\|^2) \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^p m - x_i \right\rangle \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m) \end{aligned}$$

car  $\sum_{i=1}^p m - x_i = 0$ . Ceci prouve que  $f$  atteint bien son minimum en  $m$ .

### Solution 221

1. Remarquons que l'intégrale définissant  $\langle P, Q \rangle$  est bien définie car  $P(t)Q(t)e^{-t^2} = o(1/t^2)$ .

- (i)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est clairement symétrique.
- (ii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bilinéaire par linéarité de l'intégrale.
- (iii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est positive par positivité de l'intégrale.
- (iv) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\langle P, P \rangle = 0$ . Alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} dt = 0$ . Comme  $t \mapsto P(t)e^{-t^2}$  est continue, elle est nulle sur  $]-\infty, +\infty[$ .  
Par conséquent,  $P$  admet une infinité de racines (tous les réels) puis  $P = 0$ .

Ainsi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

2. Remarquons que  $t \mapsto t^{2n+1}e^{-t^2}$  est impaire donc  $A_{2n+1} = 0$ .

Par intégration par parties

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{n+1} [t^{n+1} e^{-t^2}]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} e^{-t^2} dt \right)$$

L'intégration par parties est légitimée par le fait que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^{n+1} e^{-t^2} = 0$ . On en déduit que

$$A_n = \frac{2}{n+1} A_{n+2}$$

ou encore

$$A_{n+2} = \frac{n+1}{2} A_n$$

Comme  $A_0 = 1$ , on en déduit que

$$A_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

3. On peut orthonormaliser la base canonique  $(1, X, X^2)$  via le processus de Gram-Schmidt.

**REMARQUE.** Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base d'un espace euclidien  $E$ , on peut l'orthonormaliser en une base orthonormée en posant

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_k = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i}{\|e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i\|} = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle f_i}{\sqrt{\|e_k\|^2 - \sum_{i=0}^{k-1} \langle f_i, e_k \rangle^2}}$$

(i)  $\|1\|^2 = A_0 = 1$  donc on pose  $P_0 = 1$ .

(ii)  $\langle 1, X \rangle = A_1 = 0$  et  $\|X\|^2 = A_2 = \frac{1}{2}$  donc on pose  $P_1 = X\sqrt{2}$ .

(iii)  $\langle 1, X^2 \rangle = A_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\langle X, X^2 \rangle = A_3 = 0$  et  $\|X^2\|^2 = A_4 = \frac{3}{4}$  donc on pose  $P_2 = \frac{2(2X^2 - 1)}{\sqrt{5}}$ .

$(P_0, P_1, P_2)$  est alors une base orthonormée de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

4. Si  $p$  désigne le projecteur orthogonal sur  $\mathbb{R}_2[X]$ ,

$$\begin{aligned} d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 &= \|X^3 - p(X^3)\|^2 \\ &= \|X^3\|^2 - \|p(X^3)\|^2 \\ &= \|X^3\|^2 - \langle X^3, P_0 \rangle^2 - \langle X^3, P_1 \rangle^2 - \langle X^3, P_2 \rangle^2 \\ &= A_6 - A_3^2 - 2A_4 \quad \text{car } X^3 P_2 \text{ est impair} \\ &= \frac{15}{8} - \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

donc  $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{\sqrt{6}}{4}$ .

**Solution 222**

Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  laissant  $(\mathbb{R}_+)^n$  invariant. On notera  $(C_j)_{1 \leq j \leq n}$  la famille des vecteurs colonnes de  $A$  et  $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$  la famille des vecteurs lignes de  $A$ . Notons  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Comme  $E_i \in (\mathbb{R}_+)^n$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $C_i = AE_i \in (\mathbb{R}_+)^n$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Autrement dit  $A$  est à coefficients positifs.

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Supposons  $A_{ij} \neq 0$ , c'est-à-dire  $A_{ij} > 0$  puisque  $A$  est à coefficients positifs. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ .

$$\langle L_i, L_k \rangle = \sum_{l=1}^n A_{il}A_{kl} \geq A_{ij}A_{kj}$$

car  $A$  est à coefficients positifs. Or la famille des vecteurs lignes de  $A$  est orthonormée donc  $\langle L_i, L_k \rangle = 0$ . On en déduit que  $A_{kj} = 0$ . En raisonnant sur les colonnes de  $A$ , on démontre de la même manière que pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}$ ,  $A_{ik} = 0$ .

Ceci signifie que chaque ligne et chaque colonne comporte au plus un coefficient non nul. Puisque les vecteurs lignes et colonnes de  $A$  sont normés, chaque ligne et chaque colonne possède exactement un coefficient non nul valant  $\pm 1$ , en fait 1 car  $A$  est à coefficients positifs. Ainsi  $A$  est une matrice de permutation.

Réciproquement, toute matrice de permutation est bien orthogonale et laisse stable  $(\mathbb{R}_+)^n$ .

**Solution 223**

Soient  $y \in \text{Im } v$  et  $z \in \text{Ker } v$ . Il existe donc  $x \in E$  tel que  $y = v(x)$  i.e.  $y = x - u(x)$ . On a également  $v(z) = 0_E$  i.e.  $z = u(z)$ .

$$\langle y | z \rangle = \langle x - u(x) | z \rangle = \langle x | z \rangle - \langle u(x) | z \rangle = \langle x | z \rangle - \langle u(x) | u(z) \rangle = 0$$

car  $u$  conserve le produit scalaire. On a donc prouvé que  $\text{Im } v$  et  $\text{Ker } v$  sont orthogonaux.

En particulier, ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang  $\dim \text{Ker } v + \dim \text{Im } v = \dim E$ , donc  $\text{Im } v$  et  $\text{Ker } v$  sont supplémentaires.

**Solution 224**

$f$  et  $g$  sont deux rotations. Si l'une des deux est l'identité, alors on peut toujours considérer que  $f$  et  $g$  sont deux rotations de même axe.

Supposons maintenant  $f$  et  $g$  distinctes de l'identité. Soit  $u$  un vecteur directeur de l'axe de  $f$ . Comme  $f$  et  $g$  commutent,  $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$ . Donc  $g(u)$  appartient à l'axe de  $f$ , c'est-à-dire  $\text{vect}(u)$ . Mais comme  $g$  est une isométrie,  $\|g(u)\| = \|u\|$  et donc  $g(u) = u$  ou  $g(u) = -u$ . Si  $g(u) = u$ , alors  $u$  est un vecteur de l'axe de  $g$ .  $f$  et  $g$  sont donc deux rotations de même axe.

Si  $g(u) = -u$ , notons  $v$  un vecteur directeur de l'axe de  $g$  de sorte que  $g(v) = v$ . Puisque  $g$  est une isométrie  $\langle g(u), g(v) \rangle = \langle u, v \rangle$  et donc  $\langle u, v \rangle = 0$ . Les axes de  $f$  et  $g$  sont donc orthogonaux. Comme  $g(u) = -u$ ,  $g$  est une rotation d'angle  $\pi$  autrement dit une symétrie orthogonale par rapport à son axe. On a également  $g(f(v)) = f(v)$  donc  $f(v)$  appartient à l'axe de  $g$  et on a à nouveau  $f(v) = v$  ou  $f(v) = -v$ . On ne peut avoir  $f(v) = v$  puisque  $v$  n'appartient pas à l'axe de  $f$  (il lui est orthogonal et non nul). Ainsi  $f(v) = -v$ , ce qui prouve que  $f$  est une rotation d'angle  $\pi$  donc une symétrie orthogonale par rapport à son axe.

**Solution 225**

1. Soit  $(x, y) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \times \text{Im}(f - \text{Id}_E)$ . Alors  $f(x) = x$  et il existe  $a \in E$  tel que  $y = f(a) - a$ . Alors

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(a) - a \rangle = \langle x, f(a) \rangle - \langle x, a \rangle = \langle f(x), f(a) \rangle - \langle x, a \rangle = 0$$

car  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Ainsi  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$ .

De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \dim E - \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E) = \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$$

Par conséquent,  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$ .

2. Supposons que  $(f - \text{Id}_E)^2 = 0$ . Alors  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ . D'après la question précédente, on a donc  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$ . Ainsi  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp = \{0_E\}$  puis  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \{0_E\}$  i.e.  $f = \text{Id}_E$ .

**REMARQUE.** On peut également directement en terme d'adjoint sans utiliser la question précédente. Comme  $f \in \mathcal{O}(E)$ ,  $f^* = f^{-1}$ . Remarquons alors que

$$(f - \text{Id})^* \circ (f - \text{Id}_E) = f^* \circ f - f - f^* + \text{Id}_E = 2 \text{Id}_E - f - f^{-1} = -f^{-1} \circ (f - \text{Id}_E)^2 = 0$$

Alors pour tout  $x \in E$ ,

$$\|f(x) - x\|^2 = \langle f(x) - x, f(x) - x \rangle = \langle x, (f - \text{Id}_E)^* \circ (f - \text{Id}_E)(x) \rangle = 0$$

puis  $f = \text{Id}_E$ .

### Solution 226

1. Si  $A$  est symétrique  $A^T = A$  et donc  $A^2 = I_n$ . On en déduit que  $a$  est une symétrie orthogonale.

2. **Première méthode.** Remarquons que

$$A = (A^T)^2 + A^T - I_n = (A^2 + A - I_n)^2 + (A^2 + A - I_n) - I_n$$

Après simplification, on obtient

$$A^4 + 2A^2 - 2A - I_n = 0$$

Ainsi  $X^4 + 2X^2 - 2X - 1 = (X - 1)(X + 1)^3$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Ainsi  $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$ . On en déduit que 0 est la seule valeur propre de  $A^T - A = A^2 - I_n$ . Autrement dit,  $M = A^T - A$  est nilpotente. Comme  $A^T = A^2 + A - I_n$ ,  $A^T$  commute avec  $A$  puis  $M^T$  commute avec  $M$ . On en déduit que  $M^T M$  est également nilpotente. Comme  $M^T M$  est symétrique réelle, elle est également diagonalisable donc nulle. Ainsi

$$\|M\|^2 = \text{tr}(M^T M) = 0$$

puis  $M = 0$ . Ceci signifie que  $A^T = A$  et on est ramené à la question précédente :  $a$  est à nouveau une symétrie orthogonale.

**Deuxième méthode.** Posons  $S = \frac{A + A^T}{2}$  et  $T = \frac{A - A^T}{2}$ . Alors  $A = S + T$  et  $S$  et  $T$  sont respectivement symétrique et antisymétrique. Comme  $A$  et  $A^T$  commutent,  $S$  et  $T$  commutent également. L'égalité  $A^T = A^2 + A - I_n$  peut alors s'écrire

$$S - T = S^2 + T^2 + 2ST + S + T - I_n$$

ou encore

$$S^2 + T^2 + 2ST + 2T = I_n$$

Remarquons que  $ST$  est antisymétrique. Comme toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique,

$$\begin{cases} S^2 + T^2 = I_n \\ ST + T = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} S^2 + T^2 = I_n \\ S^2 T^2 = T^2 \end{cases}$$

Comme  $S^2$  et  $T^2$  sont symétriques et diagonalisables, elles possèdent une base commune de vecteurs propres. En notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  leurs valeurs propres respectives, on a alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \mu = \mu \end{cases}$$

On en déduit sans peine que  $\lambda_i = 1$  et  $\mu_i = 0$ . Ainsi  $T^2 = 0$  et  $S^2 = I_n$ . De plus,

$$\|T\|^2 = \text{tr}(T^T T) = \text{tr}(-T^2) = 0$$

donc  $T = 0$ . Ainsi  $A = S = A^T$  et  $A^2 = S^2 = I_n$ .  $a$  est donc une symétrie orthogonale.

### Solution 227



1. Soit  $(x, y) \in E^2$ . Alors  $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$ . En développant, on obtient

$$\langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle$$

puis  $\langle u(y), x \rangle = -\langle u(x), y \rangle$  car  $\langle u(x), x \rangle = \langle u(y), y \rangle = 0$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ . On note  $A$  la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ . On a alors  $A_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle$  pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . D'après ce qui précède,

$$A_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle = -A_{j,i}$$

Ainsi  $A$  est antisymétrique.

2. Soit  $x \in (\text{Ker } u)^\perp$ . Alors pour tout  $y \in \text{Ker } u$ ,

$$\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle = -\langle x, 0_E \rangle = 0$$

donc  $u(x) \in (\text{Ker } u)^\perp$  et  $(\text{Ker } u)^\perp$  est stable par  $u$ .

3. On choisit une base orthonormale de  $\text{Ker } u$  et une base orthonormale de  $(\text{Ker } u)^\perp$ . La concaténation de ces deux bases est une base orthonormale de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$  où  $N \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$  avec  $r = \dim(\text{Ker } u)^\perp = n - \dim \text{Ker } u = \text{rg } u$ . Or  $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = \text{rg}(N)$  donc  $N$  est inversible.

4. Comme  $A$  est antisymétrique,  $N$  l'est également. Ainsi  $\det(N) = \det(N^T) = \det(-N) = (-1)^r \det(N)$ . Comme  $N$  est inversible,  $\det(N) \neq 0$  donc  $(-1)^r = 1$  et  $r = \text{rg}(u)$  est pair.

### Solution 228

Remarquons que  $\phi = p + q$  où  $p$  et  $q$  sont les projecteurs orthogonaux respectifs sur  $\text{vect}(a)$  et  $\text{vect}(b)$ . Ainsi  $\phi$  est un endomorphisme auto-adjoint comme somme d'endomorphismes auto-adjoints. En particulier,  $\phi$  est diagonalisable. On va de toute façon s'en rendre compte en déterminant les éléments propres de  $\phi$ .

Remarquons déjà que  $\phi$  est nulle sur  $(\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$ . Ainsi  $(\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp \subset \text{Ker } \phi$ . Réciproquement si  $x \in \text{Ker } \phi$ ,  $\langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b = 0$  de sorte que  $\langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle = 0$  car la famille  $(a, b)$  est libre. Ainsi  $x \in \text{vect}(a)^\perp \cap \text{vect}(b)^\perp = (\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$ . Finalement,  $\text{Ker } \phi = (\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$ .

La nature géométrique de  $\phi$  incite fortement à penser que  $a+b$  et  $a-b$  sont vecteurs propres. En effet, ces deux vecteurs sont non nuls puisque  $a$  et  $b$  sont non colinéaires et un calcul simple montre que  $\phi(a) = a + \langle a, b \rangle b$  et  $\phi(b) = b + \langle a, b \rangle a$  donc  $\phi(a+b) = (1 + \langle a, b \rangle)(a+b)$  et  $\phi(a-b) = (1 - \langle a, b \rangle)(a-b)$ . Donc  $a+b$  et  $a-b$  sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres  $1 + \langle a, b \rangle$  et  $1 - \langle a, b \rangle$ . Si  $\langle a, b \rangle \neq 0$ , ces valeurs propres sont distinctes : les sous-espaces propres associées à ces valeurs propres sont donc de dimension 1 puisqu'on a déjà vu que le noyau i.e. le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 était de dimension  $n - 2$ . Ces sous-espaces propres sont donc respectivement  $\text{vect}(a+b)$  et  $\text{vect}(a-b)$ . Si  $\langle a, b \rangle = 0$ , alors le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 contient  $\text{vect}(a+b, a-b) = \text{vect}(a, b)$  et est en fait exactement égal à celui-ci puisque la dimension de  $\text{vect}(a, b)$  est 2 et que  $\text{Ker } \phi$  est déjà de dimension  $n - 2$ .

Récapitulons. Dans tous les cas, 0 est valeur propre de  $\phi$  et le sous-espace propre associé est  $(\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$ . Si  $\langle a, b \rangle \neq 0$ ,  $\phi$  possède deux valeurs propres supplémentaires  $1 + \langle a, b \rangle$  et  $1 - \langle a, b \rangle$  et les sous-espaces propres respectivement associés sont  $\text{vect}(a+b)$  et  $\text{vect}(a-b)$ . Si  $\langle a, b \rangle = 0$ ,  $\phi$  possède 1 comme seule valeur propre en sus de 0 et le sous-espace propre associé est  $\text{vect}(a, b)$ . Il est d'ailleurs géométriquement clair dans ce cas que  $\phi$  induit l'identité sur  $\text{vect}(a, b)$ .

### Solution 229

1. Pour tout  $x \in E$ ,

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle^2 \geq 0$$

donc  $v$  est positif. Supposons maintenant que  $\langle f(x), x \rangle = 0$ . Tous les termes de la somme précédente étant positifs, ils sont tous nuls. Ainsi  $x$  est orthogonal à chacun des  $u_k$  et donc au sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, c'est-à-dire  $E$ . Ainsi  $x = 0_E$ .

2. Considérons une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $E$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées à ces vecteurs propres. Ces valeurs propres sont toutes strictement positives. Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , il existe un unique endomorphisme  $g$  de  $E$  tel que  $g(e_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i$ . On a clairement  $g^2(e_i) = \frac{1}{\lambda_i} e_i = f^{-1}(e_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est

une base de  $E$ ,  $g^2 = f^{-1}$ .  
Soit  $(x, y) \in E^2$ . Alors

$$\langle g(x), y \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \langle x, g(y) \rangle$$

donc  $g$  est auto-adjoint. Les valeurs propres de  $g$  sont les réels strictement positifs  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$  donc  $v$  est défini positif.

3. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors

$$u_i = f(f^{-1}(u_i)) = \sum_{k=1}^n \langle f^{-1}(u_i), u_k \rangle u_k$$

Mais comme  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre,  $\langle f^{-1}(u_i), u_k \rangle = \delta_{i,k}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Alors, comme  $g$  est auto-adjoint,

$$\langle g(u_i), g(u_j) \rangle = \langle g^2(u_i), u_j \rangle = \langle f^{-1}(u_i), u_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Ainsi  $(g(u_1), \dots, g(u_n))$  est bien une base orthonormée de  $E$ .

### Solution 230

On note  $n = \dim E$  dans ce qui suit.

1. Soit  $x \in E$ . Alors

$$\begin{aligned} & x \in \text{Im}(u)^\perp \\ \iff & \forall y \in E, \langle x, u(y) \rangle = 0 \\ \iff & \text{forally } y \in E, \langle u(x), y \rangle = 0 \\ \iff & u(x) = 0_E \\ \iff & x \in \text{Ker}(u) \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Im}(u)^\perp = \text{Ker}(u)$  mais, comme  $E$  est de dimension finie,  $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)^\perp$ .

2. Soit  $x \in E$ . Si  $u(x) = 0$ , il est clair que  $\langle u(x), x \rangle = 0$ . Réciproquement, supposons que  $\langle u(x), x \rangle = 0$ . Alors  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i \rangle^2 = 0$ . Comme

il s'agit d'une somme de termes positifs, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i \langle x, e_i \rangle^2 = 0$  ou encore  $\lambda_i \langle x, e_i \rangle = 0$ . Ainsi  $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i = 0_E$ .

3. a. D'une part,  $u+v \in \mathcal{S}(E)$  car  $\mathcal{S}(E)$  est un espace vectoriel. D'autre part, pour tout  $x \in E$ ,  $\langle (u+v)(x), x \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle v(x), x \rangle \geq 0$ . On en déduit que  $u+v \in \mathcal{S}^+(E)$ .

b. Il est clair que  $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u+v)$ . Réciproquement, soit  $x \in \text{Ker}(u+v)$ . Alors  $\langle u(x), x \rangle + \langle v(x), x \rangle = \langle (u+v)(x), x \rangle = 0$ . Les deux termes étant positifs,  $\langle u(x), x \rangle = \langle v(x), x \rangle = 0$ . D'après la question 2,  $u(x) = v(x) = 0_E$  donc  $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$ .

c. On montre classiquement que, si  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ ,  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ . Comme  $u, v$  et  $u+v$  sont auto-adjoints, la question 1 donne alors

$$\text{Im}(u+v) = \text{Ker}(u+v)^\perp = (\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v))^\perp = \text{Ker}(u)^\perp + \text{Ker}(v)^\perp = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$$

### Solution 231

1. Il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  leurs valeurs propres associés. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\exp(u)(e_i) = \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{u^p}{p!} \right) (e_i)$$

L'application  $v \in \mathcal{L}(E) \mapsto v(e_i)$  est une application linéaire et  $\mathcal{L}(E)$  est de dimension finie donc cette application est continue. Ainsi

$$\exp(u)(e_i) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} u^p(e_i)$$

On montre aisément par récurrence que  $u^p(e_i) = \lambda_i^p e_i$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi

$$\exp(u)(e_i) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^p}{p!} e_i = e^{\lambda_i} e_i$$

Ainsi  $(e_1, \dots, e_n)$  est également une base orthonormée de vecteurs propres de  $\exp(u)$  donc  $\exp(u)$  est auto-adjoint. De plus,  $\text{Sp}(\exp(u)) = \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+^*$  donc  $\exp(u)$  est défini positif.

2. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres de  $v$ . Notons  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les valeurs propres associées toutes strictement positives. Posons  $\lambda_i = \ln(\mu_i)$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On peut définir un endomorphisme  $u$  en posant  $u(e_i) = \lambda_i e_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$  donc  $u$  est auto-adjoint. La question précédente montre que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exp(u)(e_i) = e^{\lambda_i} e_i = \mu_i e_i = v(e_i)$$

Comme les endomorphismes  $v$  et  $\exp(u)$  coïncident sur une base de  $E$ , ils sont égaux.

Supposons qu'il existe  $w \in \mathcal{S}(E)$  tel que  $v = \exp(u) = \exp(w)$ . Notons  $(f_1, \dots, f_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $w$  et  $\nu_1, \dots, \nu_n$  les valeurs propres associées. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . D'une part,

$$\langle \exp(u)(e_i), f_j \rangle = e^{\lambda_i} \langle e_i, f_j \rangle$$

mais comme  $\exp(u)$  est auto-adjoint

$$\langle \exp(u)(e_i), f_j \rangle = \langle e_i, \exp(u)(f_j) \rangle = \langle e_i, \exp(w)(f_j) \rangle = e^{\nu_j} \langle e_i, f_j \rangle$$

Ainsi

$$e^{\lambda_i} \langle e_i, f_j \rangle = e^{\nu_j} \langle e_i, f_j \rangle$$

Si on a  $\langle e_i, f_j \rangle = 0$ , alors  $\lambda_i \langle e_i, f_j \rangle = \nu_j \langle e_i, f_j \rangle$ . Sinon  $e^{\lambda_i} = e^{\nu_j}$  puis  $\lambda_i = \nu_j$  par injectivité de  $\exp$ . On a nouveau  $\lambda_i \langle e_i, f_j \rangle = \nu_j \langle e_i, f_j \rangle$ . Ceci peut également s'écrire  $\langle u(e_i), f_j \rangle = \langle e_i, w(f_j) \rangle$  ou encore  $\langle u(e_i), f_j \rangle = \langle w(e_i), f_j \rangle$  car  $w$  est auto-adjoint. Ceci est valable pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $E$  donc  $u(e_i) = w(e_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est également une base de  $E$ ,  $u = w$ .

### Solution 232

1. Soit  $(x, y) \in E^2$ . Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

Ainsi

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

2. La première implication est triviale. Supposons donc que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle s(x), s(y) \rangle = 0$$

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs unitaires. Alors  $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$ . On en déduit que  $\langle s(x + y), s(x - y) \rangle = 0$ , ce qui donne, par linéarité de  $s$ ,  $\|s(x)\|^2 = \|s(y)\|^2$ . Ainsi le carré de la norme de  $s$  est constant sur la sphère unité. Notons  $c$  cette constante. Soit  $x \in E$ . Si  $x = 0_E$ , alors  $\|s(x)\|^2 = 0 = c\|x\|^2$ . Sinon,  $x/\|x\|$  est unitaire donc  $\|s(x/\|x\|)\|^2 = c$  i.e.  $\|s(x)\|^2 = c\|x\|^2$  par linéarité de  $s$  et homogénéité de la norme. Finalement,  $\|s(x)\|^2 = c\|x\|^2$  pour tout  $x \in E$ .

Soit alors  $(x, y) \in E^2$ . Par identité de polarisation,

$$\begin{aligned} \langle s(x), s(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|s(x) + s(y)\|^2 - \|s(x)\|^2 - \|s(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|s(x + y)\|^2 - \|s(x)\|^2 - \|s(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (c\|x + y\|^2 - c\|x\|^2 - c\|y\|^2) \\ &= c\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

3. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant la condition de l'énoncé. Soit  $(x, y) \in E^2$  tel que  $\langle x, y \rangle = 0$ . En considérant  $V = \text{vect}(x)$ , on a donc  $y \in V^\perp$ . Ainsi  $u(y) \in u(V)^\perp$ . Notamment,  $\langle u(x), u(y) \rangle = 0$ . D'après la question précédente, il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = c \langle x, y \rangle$$

En choisissant  $x = y \neq 0_E$ , on constate que  $c \geq 0$ . Si  $c \neq 0$ , alors  $v = u/\sqrt{c} \in O(E)$  puisque

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle v(x), v(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Ainsi  $u$  est la composée d'une homothétie de rapport  $\sqrt{c}$  et d'une isométrie vectorielle. C'est aussi vrai si  $c = 0$  i.e.  $u = 0$ .

Réciproquement supposons que  $u$  est la composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle. Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $v \in O(E)$  tels que  $u = \lambda v$ . Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soit ensuite  $x \in V^\perp$ . Alors pour tout  $y \in V$ ,

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \lambda^2 \langle v(x), v(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle = 0$$

donc  $u(x) \in u(V)^\perp$ . On a donc bien  $u(V^\perp) \subset u(V)^\perp$ .

### Solution 233

1. a. La linéarité de  $u \otimes v$  découle essentiellement de la bilinéarité du produit scalaire. De plus,  $\text{Im}(u \otimes v) \subset \text{vect}(u)$  donc  $\text{rg}(u \otimes v) \leq 1$ . Par ailleurs,  $(u \otimes v)(v) = \|v\|^2 u \neq 0_E$  car  $u$  et  $v$  sont non nuls. Par conséquent,  $\text{rg}(u \otimes v) = 1$ .
- b. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u \otimes v$  et  $x$  un vecteur propre associé. Alors  $\langle v|x \rangle u = \lambda x$ . Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $x \in \text{vect}(u)$ . On en déduit que  $\langle v|u \rangle u = \lambda u$  puis  $\lambda = \langle v|u \rangle$  car  $u \neq 0_E$ . Si  $\langle v|u \rangle \neq 0$ , alors  $\text{Sp}(u \otimes v) \subset \{0, \langle v|u \rangle\}$ . De plus,  $\text{Ker}(u \otimes v) = \text{vect}(v)^\perp$  et, ce qui précède montre que  $\text{Ker}(u \otimes v - \langle v|u \rangle \text{Id}_E) \subset \text{vect}(u)$ . L'inclusion réciproque est triviale. En conclusion,  $\text{Sp}(u \otimes v) = \{0, \langle v|u \rangle\}$ ,  $E_0(u \otimes v) = \text{vect}(v)^\perp$  et  $E_{\langle v|u \rangle}(u \otimes v) = \text{vect}(u)$ . Si  $\langle v|u \rangle = 0$ , ce qui précède montre que  $\text{Sp}(u \otimes v) = \{0\}$  et  $E_0(u \otimes v) = \text{vect}(v)^\perp$ .
- c. Si  $\langle v|u \rangle \neq 0$ , alors  $u \otimes v$  est diagonalisable car  $\dim E_0(u \otimes v) + \dim E_{\langle v|u \rangle}(u \otimes v) = \dim E - 1 + 1 = \dim E$ . Si  $\langle v|u \rangle = 0$ ,  $u \otimes v$  n'est pas diagonalisable car 0 est son unique valeur propre et  $\dim E_0(u \otimes v) = \dim E - 1 < \dim E$ .

2. Soit  $x \in E$ . Alors

$$(u \otimes v)^2(x) = \langle v|x \rangle (u \otimes v)(u) = \langle v|x \rangle \langle v|u \rangle u = \langle v|u \rangle (u \otimes v)(x)$$

Ainsi  $(u \otimes v)^2 = \langle v|u \rangle (u \otimes v)$ . On en déduit que  $P = X^2 - \langle v|u \rangle X$  annule  $u \otimes v$ . Si  $\langle v|u \rangle \neq 0$ , alors  $P$  est simplement scindé et  $u \otimes v$  est diagonalisable. Si  $\langle v|u \rangle = 0$ , alors  $(u \otimes v)^2 = 0$  et  $u \otimes v$  est nilpotent. Il ne peut être diagonalisable car sinon il serait nul.

3. Supposons que  $g$  commute avec  $u \otimes v$ . Alors, pour tout  $x \in E$ ,

$$(u \otimes v) \circ g(x) = g \circ (u \otimes v)(x)$$

ou encore

$$\langle v|g(x) \rangle u = \langle v|x \rangle g(u)$$

Notamment, comme  $v \neq 0_E$ ,  $g(u) = \alpha u$  avec  $\alpha = \frac{\langle v|g(u) \rangle}{\|v\|^2}$ . La dernière égalité peut également s'écrire

$$\forall x \in E, \langle g^*(v)|x \rangle u = \alpha \langle v|x \rangle u$$

Comme  $u \neq 0_E$ , on a donc  $\langle g^*(v) - \alpha v|x \rangle = 0$  pour tout  $x \in E$  et donc  $g^*(v) = \alpha v$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $g(u) = \alpha u$  et  $g^*(v) = \alpha v$ . Alors, pour tout  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} (u \otimes v) \circ g(x) &= \langle v|g(x) \rangle u = \langle g^*(v)|x \rangle u = \alpha \langle v|x \rangle u \\ g \circ (u \otimes v)(x) &= \langle v|x \rangle g(u) = \alpha \langle v|x \rangle u \end{aligned}$$

donc  $g$  et  $u \otimes v$  commutent.

## Calcul différentiel

### Solution 234

1. On montre sans difficulté que  $D$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$ . On vérifie également sans peine que les formes linéaires  $\varphi_i : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  appartiennent toutes à  $D$ . Elles sont calirement non nulles puisque  $\varphi_i(e_i^*) = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
2. Notons  $\psi$  l'application de l'énoncé. Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\forall f \in E, \psi(\lambda a + \mu b)(f) = df(0) \cdot (\lambda a + \mu b) = \lambda df(0) \cdot a + \mu df(0) \cdot b = \lambda \psi(a)(f) + \mu \psi(b)(f)$$

car  $df(0)$  est linéaire par définition. Ainsi  $\psi(\lambda a + \mu b) = \lambda \psi(a) + \mu \psi(b)$  de sorte que  $\psi$  est linéaire.

Soit  $a \in \text{Ker } \psi$ . Pour tout  $f \in E$ ,  $\psi(a)(f) = 0$ . Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique et  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  sa base duale. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_i^* \in E$  et  $de_i^*(0) = e_i^*$  car  $e_i^*$  est linéaire. Ainsi

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \psi(a)(e_i^*) = 0 = e_i^*(a)$$

Par conséquent,  $a = \sum_{i=1}^n e_i^*(a) e_i = 0$ . L'application  $\psi$  est donc bien injective.

3. Soit  $f \in E$ . Fixons  $x \in \mathbb{R}^n$ . Par composition, l'application  $\xi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$  est dérivable et, d'après la règle de la chaîne,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \xi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) e_i^*(x)$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse

$$f(x) - f(0) = \xi(1) - \xi(0) = \int_0^1 \xi'(t) dt = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

Notons  $\mathbb{1}$  la fonction constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}^n$  ainsi que  $f_i : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Ainsi

$$f = f(0)\mathbb{1} + \sum_{i=1}^n f_i e_i^*$$

On peut prouver à l'aide du théorème de dérivation des intégrales à paramètre que les  $f_i$  sont de classe  $C^\infty$  et sont donc des éléments de  $E$ . Soit alors  $\varphi \in D$ .

$$\varphi(f) = f(0)\varphi(\mathbb{1}) + \sum_{i=1}^n \varphi(f_i e_i^*)$$

Tout d'abord,

$$\varphi(\mathbb{1}) = \varphi(\mathbb{1}^2) = 2\mathbb{1}(0)\varphi(\mathbb{1}) = 2\varphi(\mathbb{1})$$

donc  $\varphi(\mathbb{1}) = 0$ . De plus, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\varphi(f_i e_i^*) = f_i(0)\varphi(e_i^*) + e_i^*(0)\varphi(f_i) = \varphi(e_i^*)f_i$$

Ainsi

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i^*) f_i(0) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i^*) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) dt = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i^*) \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \sum_{i=1}^n \varphi(e_i^*) \varphi_i$$

On a vu à la première question que les  $\varphi_i$  appartiennent à  $D$ . Comme les  $\varphi(e_i^*)$  sont des scalaires, on peut affirmer que la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  engendre  $D$ . De plus,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est l'image de la base  $(e_1, \dots, e_n)$  par l'application linéaire injective  $\psi$  donc cette famille est libre : c'est une base de  $D$ .

### Solution 235

1. Comme le produit scalaire est bilinéaire,  $g$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^n$  et

$$\forall (x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad dg(x) \cdot h = 2\langle f(x) - a \mid df(x) \cdot h \rangle$$

2. Posons  $M = g(0)$ . Puisque  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > A \implies \|g(x)\| > M$$

Comme la boule de centre 0 et de rayon  $A$  est compact, la fonction continue  $g$  admet un minimum  $m$  sur cette boule. De plus, comme 0 appartient à cette boule,  $m \leq g(0) = M$ . Comme  $f(x) > M$  lorsque  $x$  n'appartient pas à cette boule,  $m$  est bien le minimum de  $g$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

3. Notons  $x_0$  le point où est atteint le minimum de  $g$ . Par conséquent,  $dg(x_0) = 0$ . D'après la première question,

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \langle f(x_0) - a \mid df(x_0) \cdot h \rangle = 0$$

Mais  $df(x_0)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  injectif et donc également surjectif. Il s'ensuit que

$$\forall k \in \mathbb{R}^n, \langle f(x_0) - a \mid k \rangle = 0$$

puis  $f(x_0) - a = 0$ . Ainsi  $f(x_0) = a$  de sorte que  $f$  est surjective.

### Solution 236

1. Tout d'abord, par sous-multiplicativité de la norme,  $\|H\|^n \leq \|H\|^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $\|H\| < 1$ , la série géométrique  $\sum \|H\|^n$  converge. On en déduit que  $\sum H^n$  converge absolument puis que  $\sum H^n$  converge puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie. Par ailleurs, par continuité de la multiplication matricielle à gauche,

$$(I_n - H) \sum_{n=0}^{+\infty} H^n = \sum_{n=0}^{+\infty} H^n - H \sum_{n=0}^{+\infty} H^n = \sum_{n=0}^{+\infty} H^n - \sum_{n=0}^{+\infty} H^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} H^n - \sum_{n=1}^{+\infty} H^n = H^0 = I_n$$

Ainsi  $I_n - H$  est inversible, d'inverse  $\sum_{n=0}^{\infty} H^n$ .

2. On remarque que  $GL_n(\mathbb{R})$  est l'image réciproque de l'ouvert  $\mathbb{R}^*$  par l'application continue  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$ . Ainsi  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. a. Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\|H\| < 1$ . D'après ce qui précède

$$f(I_n + H) = (I_n + H)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H^n = I_n - H + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n H^n = f(I_n) - H + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n H^n$$

Posons  $\varphi(H) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n H^n$ . Par continuité de la multiplication matricielle à gauche,

$$\varphi(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H^{n+2} = H^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H^n$$

Puis, par inégalité triangulaire et sous-multiplicativité de la norme,

$$\|\varphi(H)\| \leq \|H\|^2 \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H^n \right\| \leq \|H\|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \|H\|^n = \frac{\|H\|^2}{1 - \|H\|}$$

Comme  $\frac{\|H\|}{1 - \|H\|} \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$ ,  $\varphi(H) = o(H)$  puis

$$f(I_n + H) \underset{H \rightarrow 0}{=} I_n - H + o(H)$$

Comme l'application  $H \mapsto -H$  est clairement linéaire,  $f$  est différentiable en  $I_n$  et  $df(I_n) = -\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ .

b. Fixons  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\|H\| < 1/\|M^{-1}\|$  de sorte que  $\|M^{-1}H\| \leq \|M^{-1}\|\|H\| < 1$ . On peut alors écrire :

$$f(M+H) = (M+H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} = f(M) - M^{-1}HM^{-1} + \varphi(M^{-1}H)M^{-1}$$

Mais, d'après la question précédente,

$$\|\varphi(M^{-1}H)M^{-1}\| \leq \|\varphi(M^{-1}H)\|\|M^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}H\|^2}{1 - \|M^{-1}H\|} \|M^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}\|^3 \|H\|^2}{1 - \|M^{-1}\|\|H\|}$$

On en déduit alors que  $\varphi(M^{-1}H)M^{-1} \underset{H \rightarrow 0}{=} o(H)$  et donc que

$$f(M+H) \underset{H \rightarrow 0}{=} f(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(H)$$

Comme l'application  $H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$  est clairement linéaire,  $f$  est différentiable en  $M$  et  $df(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$  pour tout  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Solution 237

1. En vertu du théorème spectral, il existe une base orthornormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs propres de  $f$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées à ces vecteurs propres. Soit alors  $h \in E \setminus \{0_E\}$ . Alors

$$h = \sum_{i=1}^n (e_i | h) e_i$$

puis

$$f(h) = \sum_{i=1}^n (e_i | h) f(e_i) = \sum_{i=1}^n (e_i | h) \lambda_i e_i$$

Mais comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthornormée

$$(f(h) | h) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i | h)^2$$

Les  $\lambda_i$  sont strictement positifs et les  $(e_i | h)$  ne peuvent être tous nuls car  $h \neq 0_E$ . Ainsi  $(f(h) | h) > 0$ .

2. a. **Première méthode.** Soit  $(x, h) \in E^2$ . Remarquons que

$$g(x+h) = \frac{1}{2}(f(x) | x) + \frac{1}{2}(f(x) | h) + \frac{1}{2}(f(h) | x) + \frac{1}{2}(f(h) | h) - (u | x) - (u | h)$$

$$g(x+h) = g(x) + (f(x) - u | h) + \frac{1}{2}(f(h) | h) \quad \text{car } (f(h) | x) = (f(x) | h) \text{ en vertu de la symétrie de } f$$

Comme  $f$  est linéaire et que  $E$  est de dimension finie, il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\|f(z)\| \leq C\|z\|$  pour tout  $z \in E$ . D'après Cauchy-Schwarz

$$|(f(h) | h)| \leq \|f(h)\|\|h\| \leq C\|h\|^2$$

En particulier,

$$(f(h) | h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h)$$

On en déduit que  $g$  est différentiable en  $x$  et que  $dg(x)$  est l'application  $h \mapsto (f(x) - u | h)$ . On peut également affirmer que  $\nabla g(x) = f(x) - u$ .

**Deuxième méthode** L'application  $\varphi : x \mapsto (u | x)$  est linéaire donc est différentiable sur  $E$  et  $d\varphi = \varphi$ .  $f$  et  $\text{Id}_E$  sont différentiables sur  $E$  en tant qu'applications linéaires, donc  $\psi : x \mapsto (f(x) | x)$  est également différentiable sur  $E$  car le produit scalaire est bilinéaire. De plus,  $df = f$  et  $d\text{Id}_E = \text{Id}_E$  de sorte que

$$\forall (x, h) \in E^2, \quad d\psi(x) \cdot h = (f(h) | x) + (f(x) | h) = 2(f(x) | h)$$

Finalement,  $g = \frac{1}{2}\psi - \varphi$  est également différentiable et

$$\forall (x, h) \in E^2, \quad dg(x) \cdot h = (f(x) - u | h)$$

- b. D'après la question précédente, les points critiques de  $g$  sont les vecteurs  $z \in E$  tels que  $f(z) = u$ . Mais comme  $\text{Sp}(f) \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f$  est inversible. L'unique point critique de  $g$  est donc  $z_0 = f^{-1}(u)$ .
- c. En reprenant la question 2.a,

$$\forall h \in E, g(z_0 + h) = g(z_0) + (f(z_0) - u | h) + \frac{1}{2}(f(h) | h) = g(z_0) + \frac{1}{2}(f(h) | h)$$

D'après la première question

$$\forall h \in E, g(z_0 + h) \geq g(z_0)$$

donc  $g$  admet bien un minimum global en  $z_0$ . Mais on a même prouvé que  $(f(h) | h) > 0$  pour tout  $h \in E$  non nul donc  $g(z_0 + h) = g(z_0)$  si et seulement si  $h = 0_E$ . On peut donc préciser que  $z_0$  est l'unique point en lequel  $g$  admet son minimum global.

### Solution 238

1. Comme  $T$  est ouvert, si  $F$  admet un extremum local sur  $T$ , il s'agira d'un point critique. Or pour  $(x, y) \in T$ ,  $F(x, y) = x(1 - y)$  de sorte que pour  $(x, y) \in T$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 1 - y \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -x$$

Puisque  $0 < x < y < 1$  pour  $(x, y) \in T$ , ces dérivées partielles ne s'annulent pas sur  $T$  :  $F$  n'admet pas d'extremum local sur  $T$ .

2. Remarquons que  $F$  est continue sur  $K$ . Si on n'est pas convaincu, on peut par exemple remarquer que

$$\forall (x, y) \in K, F(x, y) = \min(x, y)(1 - \max(x, y))$$

De plus, les fonctions  $(x, y) \mapsto \min(x, y)$  et  $(x, y) \mapsto \max(x, y)$  sont continues puisque

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2} \qquad \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Comme  $K = [0, 1]^2$  est compact comme produit de compacts, la fonction continue  $F$  admet un maximum et un minimum sur  $K$ . D'après la question précédente, ces extrema ne peuvent être atteints sur  $T$ , et par symétrie des rôles de  $x$  et  $y$ , ils ne peuvent pas non plus être atteints sur  $T' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < x < 1\}$ . Par conséquent, ils sont atteints sur

$$(\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\}) \cup \Delta$$

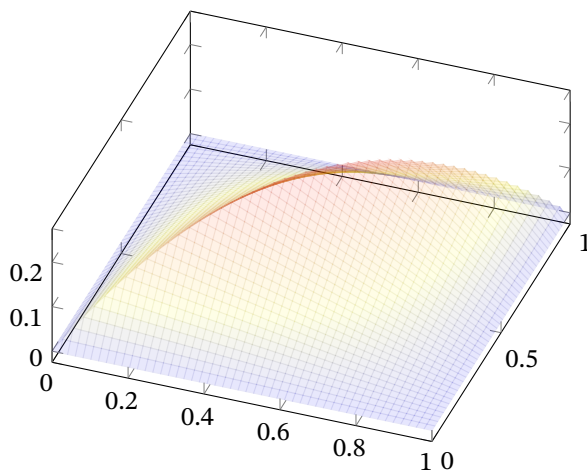
Or

$$\forall y \in [0, 1], F(0, y) = 0$$

$$\forall x \in [0, 1], F(x, 0) = 0$$

$$\forall t \in [0, 1], F(t, t) = t(1 - t)$$

Une rapide étude montre que le minimum de  $t \mapsto t(1 - t)$  sur  $[0, 1]$  est 0 et que son maximum est  $\frac{1}{4}$ . On en déduit que  $\max_K F = \frac{1}{4}$  et  $\min_K F = 0$ .





**REMARQUE.** On peut aussi pressentir que  $\max_K F = \frac{1}{4}$ . Dans ce cas, il suffit de constater que  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$  et que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = \begin{cases} x(1-y) \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) \leq y(1-y) \leq \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ceci prouve bien que  $\max_K F = \frac{1}{4}$ .

### Solution 239

1. On prouve classiquement que  $\varphi : x \mapsto \|x\|^2$  est différentiable sur  $E$  et que pour tout  $x \in E$ ,  $d\varphi(x)$  est l'application  $h \mapsto 2\langle x, h \rangle$ . L'application  $\psi : x \mapsto f(x) - a$  est également différentiable et pour tout  $x \in E$ ,  $d\psi(x) = df(x)$ . Par composition,  $g = \varphi \circ \psi$  est différentiable sur  $E$  et

$$\forall (x, h) \in E^2, dg(x) \cdot h = d\varphi(\psi(x)) \circ d\psi(x) \cdot h = 2\langle f(x) - a, df(x) \cdot h \rangle$$

2. Pour tout  $x \in E$ ,  $g(x) \geq (\|f(x)\| - \|a\|)^2$ . Comme  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$ , on a également  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ . Ainsi il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall x \in E, \|x\| \geq A \implies g(x) \geq g(0)$$

Par ailleurs, la boule  $B$  fermée de centre  $0$  et de rayon  $A$  est compact car  $E$  est de dimension finie.  $g$  est continue sur  $E$  car elle y est différentiable donc  $g$  admet un minimum  $m$  sur le compact  $B$ . Par définition de  $A$ ,  $m$  est le minimum de  $g$  sur  $E$ .

3. Notons  $x_0$  un point où  $g$  admet son minimum. On a alors  $dg(x) = 0$  et donc

$$\forall h \in E, \langle f(x_0) - a, df(x_0) \cdot h \rangle = 0$$

ou encore

$$\forall h \in \text{Im } df(x_0), \langle f(x_0) - a, h \rangle = 0$$

Comme  $df(x_0)$  est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie  $E$ , elle est également surjective i.e.  $\text{Im } df(x_0) = E$ . Ainsi

$$\forall h \in E, \langle f(x_0) - a, h \rangle = 0$$

On en déduit que  $f(x_0) - a \in E^\perp = \{0_E\}$  i.e.  $a = f(x_0)$ . L'application  $f$  est donc surjective.

### Solution 240

$f$  est clairement continue sur  $\mathbb{R}^2$  donc elle admet un maximum et un minimum sur le compact  $S$ . Posons  $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 - 1$  de sorte que  $S = g^{-1}(\{0\})$ . Alors  $f$  et  $g$  sont clairement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Notons  $(a, b) \in S$  le point où  $f$  atteint son minimum/maximum. Comme  $\nabla(a, b) = (2a, 2b) \neq (0, 0)$  puisque  $(a, b) \in S$ , on peut appliquer le

théorème des extrema liés : on résout le système  $\begin{cases} \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b) \\ g(a, b) = 0 \end{cases}$  i.e.  $\begin{cases} b = 2\lambda a \\ a = 2\lambda b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$  ce qui donne  $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Puisque

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}, \text{ on en déduit que } \max_S f = \frac{1}{2} \text{ et } \min_S f = -\frac{1}{2}.$$

### Solution 241

Remarquons que  $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$  est compact. Tout d'abord,  $\mathcal{E}$  est fermé comme image réciproque du fermé  $\{0\}$  par l'application continue  $g$ . On montre aisément que  $xy \geq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On en déduit que pour  $(x, y) \in \mathcal{E}$ ,

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2 - xy = 1$$

Ainsi  $\mathcal{E}$  est inclus dans le disque de centre l'origine et de rayon  $\sqrt{2}$ . Notamment,  $\mathcal{E}$  est bornée. Comme  $\mathbb{R}^2$  est de dimension finie,  $\mathcal{E}$  est compacte.

Soit  $(a, b)$  un extremum global de  $f$  sur  $\mathcal{E}$ . C'est a fortiori un extremum local. Comme  $\nabla f(a, b) = (2, -1) \neq (0, 0)$ ,  $\nabla g(a, b) = (2a+b, a+2b)$  est colinéaire à  $\nabla f(a, b)$ . Ainsi  $\begin{vmatrix} 2a+b & 2 \\ a+2b & -1 \end{vmatrix} = -2a-b-2(a+2b) = -4a-5b = 0$ . Comme  $g(a, b) = 0$ , on obtient  $b = \pm \frac{4}{\sqrt{21}}$ . Ainsi  $(a, b) = \pm \frac{1}{\sqrt{21}}(-5, 4)$ . Or

$$f\left(-\frac{5}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right) = -\frac{14}{\sqrt{21}} < \frac{14}{\sqrt{21}} = f\left(\frac{5}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

Donc  $f$  admet pour minimum  $-\frac{14}{\sqrt{21}}$  atteint en  $\left(-\frac{5}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$  et comme maximum  $\frac{14}{\sqrt{21}}$  atteint en  $\left(\frac{5}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$

### Solution 242

1. Comme les applications  $(x, y) \mapsto x^3 - y^3$  et  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  sont polynomiales, elles sont continue sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  ne s'annule qu'en  $(0, 0)$  donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . De plus,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x^3 - y^3| \leq |x^3| + |y^3| \leq (|x| + |y|)(x^2 + y^2)$$

donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, |f(x, y)| \leq \|(x, y)\|_1$$

Ainsi  $f$  est bien continue en  $(0, 0)$ . Finalement,  $f$  est bien continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. De la même manière, les applications polynomiales  $(x, y) \mapsto x^3 - y^3$  et  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Par ailleurs,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 1$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ ,

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = -1$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$ .

Enfin,

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ . De même,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0 \neq -1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial y}$  n'est pas non plus continue en  $(0, 0)$ .

3. Attention,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  peuvent ne pas être continues en  $(0, 0)$  mais pourtant y admettre des dérivées partielles.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = \frac{1}{x}$$

donc  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  n'est pas définie.  
De même,

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -\frac{1}{y}$$

donc  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  n'est pas non plus définie.  
Par contre,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{x - 0} = 0$$

donc  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$  et

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{y - 0} = 0$$

donc  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$ .

### Solution 243

1. Par composition,  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et on obtient leurs dérivées par la règle de la chaîne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$$

$w_x$  n'est autre qu'une application partielle de  $f$  : elle est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\forall y \in \mathbb{R}, w'_x(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

2. Si  $x = 0$ , il suffit de prendre  $y_0 = 0$  puisque  $f(0, 0) = 0$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Par hypothèse,

$$\forall t \in [0, x], u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, t) > 0$$

Ainsi  $u$  est strictement croissante sur  $[0, x]$  de sorte que  $w_x(x) = f(x, x) = u(x) > u(0) = 0$ . De même

$$\forall t \in [0, x], v'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, -t) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, -t) < 0$$

Ainsi  $v$  est strictement décroissante sur  $[0, x]$  de sorte que  $w_x(-x) = f(x, -x) = v(x) < v(0) = 0$ . Comme  $w_x$  est continue sur  $[-x, x]$ , il existe  $y_x \in [-x, x]$  tel que  $w_x(y_x) = 0$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_-^*$ . Par hypothèse,

$$\forall t \in [x, 0], u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, t) > 0$$

Ainsi  $u$  est strictement croissante sur  $[x, 0]$  de sorte que  $w_x(x) = f(x, x) = u(x) < u(0) = 0$ . De même

$$\forall t \in [x, 0], v'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, t) < 0$$

Ainsi  $v$  est strictement décroissante sur  $[x, 0]$  de sorte que  $w_x(-x) = f(x, -x) = v(x) > v(0) = 0$ . Comme  $w_x$  est continue sur  $[-x, x]$ , il existe  $y_x \in [-x, x]$  tel que  $w_x(y_x) = 0$ .

Dans tous les cas, on a bien montré qu'il existe  $y_x \in [-x, x]$  tel que  $w_x(y_x) = 0$ .

Enfin,  $w'_x(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) > 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  donc  $w_x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $y_x$  est unique.

3. Par définition,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x, \varphi(x)) = w_x(\varphi(x)) = 0$$

D'après la règle de la chaîne,  $x \mapsto f(x, \varphi(x))$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0$$

Comme  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Comme  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues, de même que  $\varphi$  qui est même dérivable d'après l'énoncé. On en déduit que  $\varphi'$  est continue sur  $\mathbb{R}$  i.e.  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Solution 244

Remarquons que  $v = y - \frac{x^2}{2}$  et posons  $g(u, v) = f(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} - x \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

Enfin,  $x + y = \frac{u^2}{2} + u + v$ . Donc (E) équivaut à  $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{u^2}{2} + u + v$ . Ainsi

$$g(u, v) = \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} + uv + \varphi(v)$$

où  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a alors

$$f(x, y) = g\left(x, y - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x\left(y - \frac{x^2}{2}\right) + \varphi\left(y - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + xy + \varphi\left(y - \frac{x^2}{2}\right)$$

La condition  $f(0, y) = 0$  donne  $\varphi(y) = y$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .

La solution recherchée est donc

$$f : (x, y) \mapsto -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + xy + \left(y - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^3}{3} + xy + y$$