Devoir à la maison n°22

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Mines-Ponts Maths I MP 2016 – Autour de l'inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *extrémale dans $\mathcal{A}$* si pour tous M, N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a l'implication :

$$A = \lambda M + (1-\lambda)N \implies A = M = N$$

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

On note enfin $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont de la forme :

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous i, j dans $\{1, 2, \dots, n\}$, où σ est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$.

La partie I n'est pas indispensable à la résolution des parties suivantes.

I Un exemple

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire par $J_{i,j} = 1$ si $j - i = 1$ ou $i - j = n - 1$, et $J_{i,j} = 0$ sinon.

1 Montrer que J est une matrice de permutation. Calculer les valeurs propres réelles et complexes de J, et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2 Déterminer une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J.

Dans les trois questions suivantes n désigne un entier naturel *impair* supérieur ou égal à 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note X_m une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$ telle que

- $X_0 = 0$ avec probabilité 1 ;
- si $X_m = k$, alors ou bien $X_{m+1} = k-1$ modulo n, ou bien $X_{m+1} = k+1$ modulo n, ceci avec équiprobabilité.

On note

$$U_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ P(X_m = 1) \\ \vdots \\ P(X_m = n-1) \end{pmatrix}$$

3 Déterminer U_0 et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$. On exprimera A à l'aide de la matrice J.

4 Déterminer les valeurs propres de la matrice A et un vecteur propre de $\mathbb{R}^n$ unitaire associé à la valeur propre de module maximal.

5 En déduire la limite de U_m lorsque $m \to +infty$.

II Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6 Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact. Est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

7 Montrer que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$. Tout élément de $\mathcal{P}_n$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est-il convexe ?

8 Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$.

Dans toute la suite de cette partie, on considère une matrice ***bistochastique*** $A = (A_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ *qui n'est* ***pas*** *une matrice de permutation.*

9 Montrer qu'il existe un entier $r > 0$ et deux familles $i_1, i_2, \dots, i_r$ et $j_1, j_2, \dots, j_r$ d'indices distincts dans $\{1, 2, \dots, n\}$ tels que pour tous $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $A_{i_k,j_k} \in]0, 1[$ et $A_{i_k,j_{k+1}} \in]0, 1[$ avec $j_{r+1} = j_1$.

10 En considérant la matrice $B = (B_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} B_{i_k,j_k} = 1 & \text{si } k \in \{1, 2, \dots, r\} \\ B_{i_k,j_{k+1}} = -1 & \text{si } k \in \{1, 2, \dots, r\} \\ B_{i,j} = 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

montrer que A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$. En déduire l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

On dit qu'une matrice $M = (M_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$, à coefficients positifs ou nuls, admet un *chemin strictement positif* s'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $M_{\sigma(1),1} M_{\sigma(2),2} \cdots M_{\sigma(n),n} > 0$.

On démontre par récurrence sur n, et on admet le résultat suivant : si M est à coefficients positifs ou nuls et si toute matrice extraite de M ayant p lignes et q colonnes avec $p + q = n + 1$ n'est pas la matrice nulle, alors M admet un chemin strictement positif.

11 Montrer que A admet un chemin strictement positif.

On note σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n} > 0$ et on pose $\lambda_0 = \min\limits_j \left(A_{\sigma(j),j}\right)$ et $A_0 = \dfrac{1}{1 - \lambda_0}(A - \lambda_0 M_\sigma)$ où M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

12 Montrer que A_0 est bien définie, et que c'est une matrice bistochastique contenant au moins un élément nul de plus que A.

13 En raisonnant par récurrence, démontrer que A s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \dots, M_s$:

$$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$$

où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs et de somme $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$.

14 Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf_{M \in \mathcal{P}_n} \varphi(M)$ existe. En déduire que $\inf_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation.

III Inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans cette partie, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$ et de la norme euclidienne associée notée $\|\cdot\|$. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $O_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales.

15 Montrer que pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P, Q dans $O_n(\mathbb{R})$, on a $\|PAQ\| = \|A\|$.

Dans la suite de cette partie, A *et* B *désignent deux matrices* ***symétriques réelles****.*

16 Montrer qu'il existe deux matrices diagonales réelles D_A, D_B, et une matrice orthogonale $P = (P_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ telles que $\|A - B\|^2 = \|D_A P - P D_B\|^2$.

17 Montrer que la matrice R définie par $R_{i,j} = (P_{i,j})^2$ pour tous i, j dans $\{1, 2, \dots, n\}$ est bistochastique et que

$$\|A - B\|^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} R_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$$

où $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ désignent les valeurs propres de A et $\lambda_1(B), \dots, \lambda_n(B)$ celles de B.

18 En déduire que

$$\min_{\sigma} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 \le \|A - B\|^2$$

où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et L^2 l'ensemble des variables aléatoires définies sur cet espace admettant un moment d'ordre 2. Pour tout X de L^2, on note $X \sim \mathbb{P}_X$ si X suit la loi $\mathbb{P}_X$. Pour tout couple $(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)$ de lois, on pose

$$d^2(P_1, P_2) = \inf_{\substack{X, Y \in L^2 \\ X \sim \mathbb{P}_1, Y \sim \mathbb{P}_2}} \mathbb{E}(|X - Y|^2)$$

Soit $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux familles de réels. On note $\mathbb{P}_1$ la loi uniforme sur $\{a_1, \dots, a_n\}$ et $\mathbb{P}_2$ la loi uniforme sur $\{b_1, \dots, b_n\}$.

19 Montrer que

$$d^2(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |a(i) - b(i)|^2$$

où l'on a noté $a(1) \le \cdots \le a(n)$ et $b(1) \le \cdots \le b(n)$ les suites $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ réordonnées par ordre croissant. En déduire que pour toutes matrices symétriques réelles A, B de valeurs propres respectives $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$, on a l'inégalité :

$$d^2(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) \le \|A - B\|^2$$