Devoir surveillé n°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 **1.a**

$$\mathrm{I}(1,a)=\int_0^1(1-x)^{a-1}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\left[(1-x)^a\right]_0^1=\frac{1}{a}$$

1.b Par intégration par parties

$$\mathrm{I}(b+1,a)=\int_0^1 x^b(1-x)^{a-b-1}=-\frac{1}{a-b}\left[x^b(1-x)^{a-b}\right]_0^1+\frac{b}{a-b}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}=\frac{b}{a-b}\mathrm{I}(b,a)$$

1.c Fixons $a\in\mathbb{N}^*$. On a d'abord

$$\mathrm{I}(1,a)=\frac{1}{a}=\frac{1}{1\cdot\binom{a}{1}}$$

Supposons que $\mathrm{I}(b,a)=\dfrac{1}{b\binom{a}{b}}$ pour un certain $b\in[\![1,a-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(b+1,a)&=\frac{b}{a-b}\mathrm{I}(b,a)\\&=\frac{1}{(a-b)\binom{a}{b}}\\&=\frac{1}{(a-b)\times\frac{a!}{b!(a-b)!}}\\&=\frac{1}{(b+1)\frac{a!}{(b+1)!(a-b-1)!}}\\&=\frac{1}{(b+1)\binom{a}{b+1}}\end{aligned}$$

Par récurrence, $\mathrm{I}(b,a)=\dfrac{1}{b\binom{a}{b}}$ pour tout $b\in[\![1,a]\!]$.

2 **2.a** D'après la formule du binôme et la linéarité de l'intégrale,

$$\mathrm{I}(b,a)=\int_0^1 x^{b-1}\left(\sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}(-1)^kx^k\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\int_0^1 x^{b-1+k}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{1}{k+b}$$

2.b Remarquons que

$$\frac{\Delta_a}{b\binom{a}{b}}=\mathrm{I}(b,a)\Delta_a=\sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{\Delta_a}{k+b}$$

Or pour tout $k\in[\![0,a-b]\!]$, $k+b\in[\![b,a]\!]\subset[\![1,a]\!]$ donc $k+b$ divise $\Delta_a=\operatorname{ppcm}(1,2,\dots,a)$. Ainsi $\dfrac{\Delta_a}{b\binom{a}{b}}\in\mathbb{Z}$ donc $b\dbinom{b}{a}$ divise Δ_a.

$\boxed{3}$ **3.a** D'après la question précédente, $n\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n}. Or Δ_{2n+1} est un multiple commun de $1, 2, \dots, 2n+1$ donc c'est a fortiori un multiple commun de $1, 2, \dots, 2n$ et donc de leur ppcm Δ_{2n}. Ainsi $n\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.

Par ailleurs, $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n+1}$ divise également Δ_{2n+1} d'après la question précédente.

3.b D'après la question précédente, $\operatorname{ppcm}\left(n\binom{2n}{n}, (2n+1)\binom{2n}{n}\right) = \binom{2n}{n}\operatorname{ppcm}(n, 2n+1)$ divise Δ_{2n+1}. Or n et $2n+1$ sont premiers entre eux en vertu de la relation de Bézout $1 \cdot (2n+1) - 2 \cdot n = 1$ donc $\vee n, 2n+1 = n(2n+1)$. Ainsi $n(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.

3.c Soit $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{n!}{(2n-k)!} = \prod_{m=1}^{n-k} \frac{k+m}{n+m} \leq 1$$

Ainsi $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Par symétrie des coefficients binomiaux, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

3.d Par la formule du binôme

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{2n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}$$

3.e Comme $n(n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} et comme il s'agit de deux entiers naturels non nuls,

$$\Delta_{2n+1} \geq n(n+1)\binom{2n}{\geq}4^n n$$

3.f Soit $n \geq 9$. Si n est impair, il existe un entier $p \geq 4$ tel que $n = 2p+1$. Alors

$$\Delta_n = \Delta_{2p+1} \geq 4^p p \geq 4^{p+1} \geq 2^{2p+1} = 2^n$$

Si n est pair, il existe un entier $p \geq 5$ tel que $n = 2p$. Comme Δ_{2p-1} divise Δ_{2p}

$$\Delta_{2p} \geq \Delta_{2p-1} \geq 4^{p-1}(p-1) \geq 4^p = 2^n$$

$\boxed{4}$ **4.a** D'après un résultat admis dans l'énoncé,

$$v_p(\Delta_n) = \max\{v_p(1), \dots, v_p(n)\}$$

Ainsi

$$p^{v_p(\Delta_n)} = \max\{p^{v_p(1)}, \dots, p^{v_p(n)}\}$$

Or pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p^{v_p(k)}$ divise k donc $p^{v_p(k)} \leq k \leq n$. Finalement, $p^{v_p(\Delta_n)} \leq n$.

4.b Soit $p \in \mathcal{P}$ tel que $p > n$. Alors pour $k \in [\![1, n]\!]$, $p > n \geq k$ donc $v_p(k) = 0$ puis $v_p(\Delta_n) = \max\{v_p(1), \dots, v_p(n)\} = 0$. Ainsi

$$\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)}$$

4.c D'après les questions précédentes,

$$\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)} \leq \prod_{p \leq n} n = n^{\pi(n)}$$

$\boxed{5}$ On a vu précédemment que pour $n \geq 9$,

$$2^n \leq \Delta_n \leq n^{\pi(n)}$$

donc, par croissance du logarithme,

$$n \ln 2 \leq \pi(n) \ln(n)$$

et enfin

$$\pi(n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln n}$$

$\boxed{6}$ **6.a** Remarquons que

$$a!\binom{b}{a} = \prod_{b-a<k\leq b} k$$

Soit p un nombre premier tel que $a < p \leq b$. Comme $b/2 \leq a$, $b - a \leq a$ et donc $b - a < p \leq b$. D'après ce qui précède, p divise $a!\binom{b}{a}$. Mais, puisque $p > a$, p ne divise aucun des entiers $1, 2, \dots, a$ donc, en tant que nombre premier, il est premier avec chacun de ces entiers et donc avec leur produit également. Ainsi p est premier avec $a!$ donc p divise $\binom{b}{a}$ d'après le lemme de Gauss. Comme des nombres premiers sont toujours premiers entre eux deux à deux, le produit $\prod_{a<p\leq b} p$ divise $\binom{b}{a}$.

6.b Comme des coefficients binomiaux sont positifs,

$$2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2n+1}{k} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{2m+1} = 2\binom{2m+1}{m}$$

Ainsi $\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m} = 4^m$.

6.c Il est clair que $\frac{2m+1}{2} < m+1 \leq 2m+1$. D'après la question **6.a**, $\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p$ divise donc $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$. Ainsi

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m} \leq 4^m$$

6.d Notons P_n la propriété de l'énoncé. P_1 et P_2 sont évidemment vraies.
Supposons $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n$ vraies pour un certain entier $n \geq 2$.
Si $n+1$ est impair, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $n+1 = 2m+1$. Alors

$$\prod_{p\leq n+1} p = \left(\prod_{p\leq m+1} p\right)\left(\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p\right)$$

Puisque $m \geq 1$, $m+1 \leq 2m = n$ donc on peut appliquer P_m. Ainsi, avec la question précédente

$$\prod_{p\leq n+1} p \leq 4^m \cdot 4^m = 4^{2m} \leq 4^{2m+1} = 4^{n+1}$$

Si $n+1$ est pair, il existe un entier $m \geq 2$ tel que $n+1 = 2m$. Alors

$$\prod_{p\leq n+1} p = \left(\prod_{p\leq m+1} p\right)\left(\prod_{m+1<p\leq 2m} p\right) \leq \left(\prod_{p\leq m+1} p\right)\left(\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p\right)$$

Puisque $m \geq 2$, $m+1 \leq 2m-1 = n$ donc on peut appliquer P_m. Ainsi, avec la question précédente

$$\prod_{p\leq n+1} p \leq 4^m \cdot 4^m = 4^{2m} = 4^{n+1}$$

Ceci conclut la récurrence.

$\boxed{7}$ **7.a** Remarquons que

$$e^m = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^m}{k!} \geq \frac{m^m}{m!}$$

Par conséquent, $m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$.

7.b Notons $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Comme cette suite une suite strictement croissante d'entiers naturels, $p_k \geq p_1 + k - 1 = k + 1 \geq k$. Ainsi

$$\pi(n)! = \prod_{k=1}^{\pi(n)} k \leq \prod_{k=1}^{\pi(n)} p_k$$

Mais, par définition de $\pi(n)$, $p_1, \dots, p_{\pi(n)}$ sont exactement les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Ainsi

$$\pi(n)! \leq \prod_{p \leq n} p \leq 4^n$$

D'après la question précédente,

$$\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)} \leq \pi(n)! \leq 4^n$$

donc, par croissance du logarithme,

$$\pi(n) \ln \pi(n) - \pi(n) \leq n \ln 4$$

$\boxed{8}$ **8.a** La fonction $f : x \mapsto x \ln x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f' = \ln$. Notamment, f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On sait que

$$0 < \ln(n_0) \leq \ln(1 + n_0) \leq n_0 \leq n_0 e$$

donc $\dfrac{n_0 e}{\ln n_0} \in [1, +\infty[$. La stricte croissance de f et la question précédente donnent :

$$f\left(\frac{n_0 e}{\ln n_0}\right) < f(\pi(n_0)) \leq n_0 \ln 4$$

ou encore

$$\frac{n_0 e}{\ln n_0} (\ln n_0 - \ln \ln n_0) \leq n_0 \ln 4$$

puis

$$\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0}$$

8.b On montre aisément que $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est croissante sur $]0, e]$ puis décroissante sur $[e, +\infty[$. Ainsi g est majorée par $g(e) = 1/e$. D'après la question précédente,

$$\frac{e - \ln 4}{e} < g(\ln n_0) \leq \frac{1}{e}$$

puis $e < 1 + \ln 4$, ce qui contredit les approximations fournies par l'énoncé. On a donc montré par l'absurde que

$$\forall n \geq 2,\ \pi(n) \leq \frac{ne}{\ln n}$$

$\boxed{9}$ Remarquons que U_k est l'ensemble des entiers de la forme mp^k où m est un entier compris entre 1 et $\dfrac{n}{p^k}$. On en déduit que $\#U_k = \lfloor n/p^k \rfloor$.
De plus, $\Omega_k = U_k \setminus U_{k+1}$. Or $U_{k+1} \subset U_k$ donc

$$\#\Omega_k = \#U_k - \#U_{k+1} = \lfloor n/p^k \rfloor - \lfloor n/p^{k+1} \rfloor$$

$\boxed{10}$ Tout d'abord,

$$[\![1, n]\!] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \#\Omega_k$$

donc, par sommation par paquets,

$$v_p(n!) = \sum_{a \in [\![1,n]\!]} v_p(a) = \sum_{k \geq 0} \sum_{a \in \Omega_k} v_p(a) = \sum_{k \geq 0} \sum_{a \in \Omega_k} k = \sum_{k \geq 0} k \#\Omega_k$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k \geq 0} k \left(\lfloor n/p^k \rfloor - \lfloor n/p^{k+1} \rfloor\right) \\ &= \sum_{k \geq 0} k \lfloor n/p^k \rfloor - (k+1) \lfloor n/p^{k+1} \rfloor + \sum_{k \geq 0} \lfloor n/p^{k+1} \rfloor \end{aligned}$$

Ces opérations sont licites car les sommes en question ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. En effet, $\lfloor n/p^k \rfloor$ est nul pour k suffisamment grand. On a donc a fortiori par télescopage

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 0} \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

11 On rappelle que $x-1<\lfloor x\rfloor \leq x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc, comme tous les temes de la somme sont positifs,

$$\sum_{k\geq1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor \geq \left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor \geq \frac{n}{p}-1$$

et

$$\sum_{k\geq1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor \leq \sum_{k\geq1}\frac{n}{p^k}=\frac{n}{p}\sum_{k\geq2}\frac{n}{p^k}=\frac{n}{p}+\frac{n/p^2}{1-1/p}=\frac{n}{p}+\frac{n}{p(p-1)}$$

Avec la formule de Legendre,

$$\frac{n}{p}-1<v_p(n!)\leq\frac{n}{p}+\frac{n}{p(p-1)}$$

12 D'après le lemme d'Euclide, tout diviseur premier de $n!$ est un diviseur premier de l'un des entiers $1,2,\dots,n$. Ainsi tous les facteurs premiers de $n!$ sont inférieurs ou égaux à n. Ainsi $n!=\prod_{p\leq n}p^{v_p(n!)}$. Par conséquent,

$$\ln(n!)=\sum_{p\leq n}v_p(n!)\ln p$$

et, avec l'encadrement de la question précédente, on obtient bien

$$n\sum_{p\leq n}\frac{\ln p}{p}-\sum_{p\leq n}\ln p<\ln n!\leq n\sum_{p\leq n}\frac{\ln p}{p}+n\sum_{p\leq n}\frac{\ln p}{p(p-1)}$$

13 **13.a** On sait que pour tout $x\in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ donc, par dérivation terme à terme d'une série entière, $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ puis $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$. En choisissant $x=1/2\in]-1,1[$,

$$\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{r}{2^r}=2$$

13.b Tout d'abord

$$\sum_{2^{r-1}<m\leq2^r}\frac{\ln m}{m(m-1)}\leq\sum_{2^{r-1}<m\leq2^r}\frac{\ln(2^r)}{m(m-1)}=r\ln2\sum_{2^{r-1}<m\leq2^r}\frac{1}{m(m-1)}$$

Mais, par télescopage,

$$\sum_{2^{r-1}<m\leq2^r}\frac{1}{m(m-1)}=\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r}\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}=\frac{1}{2^{r-1}}-\frac{1}{2^r}=\frac{1}{2^r}$$

Ainsi,

$$\sum_{2^{r-1}<m\leq2^r}\frac{\ln m}{m(m-1)}\leq\frac{r\ln2}{2^r}$$

13.c Par théorème de sommation par paquets pour une série à termes positifs,

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{\ln m}{m(m-1)}=\sum_{r=1}^{+\infty}\sum_{2^{r-1}<m\leq2^r}\frac{\ln n}{m(m-1)}\leq\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{r\ln2}{2^r}=2\ln2=\ln4$$

La majoration prouve la convergence de la série à termes positifs $\sum\frac{\ln m}{m(m-1)}$.

13.d On procède à une comparaison série/intégrale. Par croissance de ln,

$$\ln k\leq\int_k^{k+1}\ln t\,\mathrm{d}t\leq\ln(k+1)$$

puis, par relation de Chasles

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k\leq\int_1^n\ln t\,\mathrm{d}t\leq\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)=\sum_{k=2}^{n}\ln k$$

ou encore

$$\ln(n!)-\ln n\leq n\ln n-n+1\leq\ln(n!)$$

et enfin

$$0\leq\ln(n!)-(n\ln-n+1)\leq\ln n$$

Il existe donc $\theta_n\in[0,1]$ tel que $\ln(n!)-(n\ln-n+1)=\theta_n\ln n$.

14 Posons $S_n = \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p}$. Avec les questions précédentes,

$$\begin{aligned} S_n &\geq \frac{1}{n}\ln n! - \sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)} \\ &\geq \ln n - 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n}\ln n - \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \\ &> \ln n - 1 - \ln 4 \end{aligned}$$

15 De même,

$$S_n \leq \frac{1}{n}\ln n! + \frac{1}{n}\sum_{p\leq n} \ln p = \ln n - 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{p\leq n} p\right) < \ln n + \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{p\leq n} p\right)$$

car $1 - 1/n > 0$. Avec la question **6.d**, $\prod_{p\leq n} p \leq 4^n$ donc

$$S_n < \ln n + \ln 4$$

La suite $(S_n - \ln n)$ est donc bornée i.e. $S_n = \ln n + \mathcal{O}(1)$.

16 **16.a** Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$,

$$0 \leq \frac{1}{n\ln^2 n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

La série télescopique $\sum \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$ converge car la suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ converge. On en déduit que $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ converge.

16.b

$$\begin{aligned} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) &= \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\ln^2 n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n\ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\ln^2 n}\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n^2\ln^2 n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) - \frac{1}{n\ln n}$ converge i.e. la suite de ses sommes partielles converge. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} - \sum_{k=2}^{n-1} \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) = C + o(1)$$

puis, par télescopage,

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln(\ln(n)) + \ell + o(1)$$

en posant $\ell = C + \ln\ln 2$.

17 **17.a** On convient que $\psi(1) = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k)\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi(k)}{\ln(k)} - \frac{\psi(k)}{\ln(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi(k)}{\ln(k)} - \frac{\psi(k+1)}{\ln(k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi(k+1) - \psi(k)}{\ln(k+1)} \\ &= -\frac{\psi(n)}{\ln(n)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\psi(k) - \psi(k-1)}{\ln k} \end{aligned}$$

Or $\psi(k)-\psi(k-1)=\begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \mathcal{P} \\ \dfrac{\ln k}{k} & \text{si } k \in \mathcal{P} \end{cases}$ de sorte que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\psi(k)-\psi(k-1)}{\ln k} = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p}$$

Ceci permet de conclure.

17.b D'après le théorème de Mertens,

$$\psi(k) = \ln(k)\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} &= \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} \\ &= \frac{1}{\ln k} \cdot \frac{u_k}{1+u_k} \end{aligned}$$

avec

$$u_k = \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k} = \frac{1}{k\ln k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2\ln k}\right) = \frac{1}{k\ln k}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

A fortiori

$$u_k = \frac{1}{k\ln k}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right)$$

puis

$$\frac{1}{1+u_k} = 1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln k}\right)$$

Tout compte fait,

$$\psi(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k\ln(k+1)} = \frac{1}{k\ln k}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right) = \frac{1}{k\ln k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right)$$

18 Comme $\sum \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ converge, il existe une constante C telle que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \psi(k)\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} + \mathrm{C} + o(1)$$

Or on a vu que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + \ell + o(1)$$

donc il existe une constante λ telle que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \psi(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k\ln(k+1)} = \ln\ln n + \lambda + o(1)$$

Enfin,

$$\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k)\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) + \frac{\psi(n)}{\ln n} = \ln\ln n + \lambda + \frac{\psi(n)}{n} + o(1)$$

Or $\psi(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$ donc $\dfrac{\psi(n)}{n} = o(1)$ et finalement

$$\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} = \ln\ln n + \lambda + o(1)$$

19 On procède comme précédemment

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k} - \frac{\pi(k)}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k} - \frac{\pi(k+1)}{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k+1)-\pi(k)}{k+1} \\ &= \pi(1) - \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\pi(k)-\pi(k-1)}{k} \end{aligned}$$

Comme $\pi(1) = 0$ et $\pi(k) - \pi(k-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} = -\frac{\pi(n)}{n} + \sum_{p \leq n} \frac{1}{p}$$

On en déduit l'égalité voulue.
Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que $\pi(n) \sim c\frac{n}{\ln n}$. Alors

$$\frac{\pi(k)}{k(k+1)} \sim c\frac{1}{k\ln k}$$

donc par sommation d'équivalents pour des séries divergentes à termes positifs, on obtient avec la question **16.b**

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} \sim \ln\ln n$$

Comme $\frac{\pi(n)}{n} \sim \frac{c}{\ln n}$,

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n} \sim c \ln\ln n$$

Mais on a vu à la question précédente que

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \sim \ln\ln n$$

On en déduit que $c = 1$.

20 D'après la question **18**,

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \ln\ln n + \lambda + o(1)$$

Par conséquent,

$$\sum_{p \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p} = \ln\ln\sqrt{n} + \lambda + o(1) = \ln\ln n - \ln 2 + \lambda + o(1)$$

Ainsi

$$\sum_{\sqrt{n} < p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} - \sum_{p \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p} = \ln 2 + o(1)$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\sqrt{n} < p \leq n} \frac{1}{p} = \ln 2$$

21 **21.a** Supposons que $p = \mathrm{P}^+(n)$ et $n \in \mathrm{A}(x)$. Alors $p \geq \sqrt{n}$. Ainsi $p^2 > n = mp$ donc $p > m$. De plus, $mp = n \leq x$ donc $p \leq \frac{x}{m}$.
Réciproquement, supposons que $m < p \leq x/m$. Alors $n = mp \leq x$ i.e. $n \in [0, x]$. De plus, $n = mp < p^2$ donc $p > \sqrt{n}$ et $n \in \mathrm{A}(x)$.

21.b Si $p = p'$ et $m = m'$, on a évidemment $mp = m'p'$.
Supposons que $mp = m'p'$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $m \neq m'$. Sans perte de généralité, on peut supposer $m < m'$. Comme p et p' sont alors deux nombres premiers distincts, ils sont alors premiers entre eux. D'après le lemme de Gauss, p divise m'. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m' = kp$. Alors

$$m'^2 < m'p' = mp = \frac{mm'}{k}$$

ou encore $m' \leq m'k < m$, ce qui est contradictoire. Par conséquent $m = m'$ puis $p = p'$.

21.c Conséquence directe des deux questions précédentes.

21.d Pour $p \in \mathcal{P}$, notons

$$\mathrm{B}_m = \{m \in \mathbb{N}^*,\ m < p \leq x/m\}$$

La question précédente montre que $a(x) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \#\mathrm{B}_m$. De plus,

$$\mathrm{B}_m = \{m \in \mathbb{N}^*,\ m < p \text{ ET } m \leq x/p\} = \{m \in \mathbb{N}^*,\ m \leq p-1 \text{ ET } m \leq \lfloor x/p \rfloor\} = \{m \in \mathbb{N}^*,\ m \leq \min\{p-1, \lfloor x/p \rfloor\}\}$$

En particulier, $\mathrm{B}_m = \varnothing$ lorsque $p > x$ et que $\#\mathrm{B}_m = \min\{p-1, \lfloor x/p \rfloor\}$ sinon. On en déduit le résultat voulu.

22 **22.a** Puisque $p-1$ est un entier

$$p-1 \leq \lfloor x/p \rfloor \iff p-1 \leq \frac{x}{p} \iff p^2-p-x \leq 0$$

Or les racines du trinôme X^2-X-x sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+4x}}{2}$ et seule la racine $\varphi(s)$ est positive. Comme p positif, la dernière inégalité équivaut à $p \leq \varphi(x)$.

22.b Tout d'abord,

$$\varphi(x) = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} > \frac{\sqrt{4x}}{2} = \sqrt{x}$$

De plus,

$$\varphi(x) = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} < \frac{1+\sqrt{1+4\sqrt{x}+4x}}{2} = \frac{1+\sqrt{(1+2\sqrt{x})^2}}{2} = \sqrt{x}+1$$

22.c

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{p \leq x} \min\left\{p-1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor\right\} \\ &= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \min\left\{p-1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor\right\} + \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \min\left\{p-1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor\right\} \end{aligned}$$

Si $p <\leq \sqrt{x}$, alors $p < \varphi(x)$ puis $p-1 \leq \lfloor x/p \rfloor$ i.e. $\min\{p-1, \lfloor x/p \rfloor\} = p-1$ avec les deux questions précédentes. Soit alors $p \in]\sqrt{x}, x]$. Si $p > \varphi(x)$, alors $p-1 > \lfloor x/p \rfloor$ et donc $\min\{p-1, \lfloor x/p \rfloor\} = \lfloor x/p \rfloor$. Sinon, comme $\varphi(x)$ est la racine positive du trinôme X^2-X-x, $p^2-p-x \leq 0$ i.e. $p-1 \leq x/p$. Or $p > \sqrt{x}$ i.e. $x/p < p$. Finalement $p-1 \leq x/p < p$ i.e. $\lfloor x/p \rfloor = p-1$ et $\min\{p-1, \lfloor x/p \rfloor\} = \lfloor x/p \rfloor$ à nouveau. Finalement

$$a(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \lfloor x/p \rfloor$$

22.d Tout d'abord,

$$0 \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p-1) \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \sqrt{x} = \sqrt{x}\pi(\sqrt{x})$$

Avec la question **8.b**, pour u suffisament grand,

$$0 \leq \pi(u) \leq \pi(\lfloor u \rfloor + 1) \leq \frac{e(\lfloor u \rfloor + 1)}{\ln(\lfloor u \rfloor + 1)}$$

Comme $u \underset{u\to+\infty}{\sim} \lfloor u \rfloor$, on prouve aisément que $\dfrac{\lfloor u \rfloor + 1}{\ln(\lfloor u \rfloor + 1)} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{u}{\ln u}$. On en déduit que $\pi(u) \underset{u\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{u}{\ln u}\right)$ puis que $\sqrt{x}\pi(\sqrt{x}) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)$. Ainsi

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} (p-1) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

A fortiori,

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} (p-1) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$$

22.e Tout d'abord, par encadrement de la partie entière,

$$(x-1) \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \frac{1}{p} \leq \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \leq x \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \frac{1}{p}$$

Ainsi

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \frac{1}{p}$$

Comme p est entier,

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \frac{1}{p} = \sum_{\sqrt{x}<p\leq \lfloor x \rfloor} \frac{1}{p} = \sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor}<p\leq \lfloor x \rfloor} \frac{1}{p} - \sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor}<p\leq \sqrt{x}} \frac{1}{p}$$

Comme $\lfloor x \rfloor$ est entier, la question **20** montre que

$$\sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor} < p \leq \lfloor x \rfloor} \frac{1}{p} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 2$$

Par ailleurs, on montre classiquement que pour $0 \leq a \leq b$, $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a}$ donc

$$\sqrt{x} - \sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} < 1$$

La somme $\displaystyle\sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor} < p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p}$ contient donc au plus un terme. Ainsi

$$0 \leq \sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor} < p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p} \leq \frac{1}{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}$$

On en déduit que

$$\sum_{\sqrt{\lfloor x \rfloor} < p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent,

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 2$$

puis

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} x \ln 2$$

ou encore

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \underset{x \to +\infty}{=} x \ln 2 + o(x)$$

22.f D'après les questions précédentes,

$$a(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \lfloor x/p \rfloor \underset{x \to +\infty}{=} x \ln 2 + o(x)$$