Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. En effectuant le changement de variable $t = au$, on obtient $\mathrm{I}(a) = \mathrm{J} = \frac{\pi}{2}$. Il est aussi clair que $\mathrm{I}(0) = 0$. Enfin, l'application $a \mapsto \mathrm{I}(a)$ est clairement impaire donc $\mathrm{I}(a) = -\frac{\pi}{2}$ pour tout $a \in \mathbb{R}_-^*$.

2. a. Tout d'abord, $f : u \mapsto \frac{\sin^2 u}{u^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc $f(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ et f est intégrable en 0^+. Enfin, comme sin est bornée, $f(u) \underset{u\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right)$ et f est intégrable en $+\infty$. Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. A fortiori, J converge.

b. Les applications $u \mapsto \sin^2 u$ et $u \mapsto -\frac{1}{u}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées respectives $u \mapsto 2\sin u \cos u$ et $u \mapsto \frac{1}{u^2}$. Ainsi, par intégration par parties,

$$\mathrm{J} = -\left[\frac{\sin^2 u}{u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin u \cos u}{u}\,\mathrm{d}u$$

Cette intégration par parties est légitime car $\lim_{u\to 0} \frac{\sin^2 u}{u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\sin^2 u}{u} = 0$ (on utilise à nouveau le même équivalent de sin en 0 et le fait que sin est bornée). Par conséquent,

$$\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin u\cos u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \mathrm{I}(2) = \frac{\pi}{2}$$

3. a. Remarquons déjà que

$$\mathrm{K}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos((a-b)u) - \cos((a+b)u)}{2u^2}\,\mathrm{d}u$$

Remarque. Il ne faut surtout pas séparer l'intégrale en deux à ce stade puisque les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\cos((a-b)u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos((a+b)u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ divergent.

On intègre à nouveau par parties :

$$\mathrm{K}(a,b) = -\left[\frac{\cos((a-b)u) - \cos((a+b)u)}{2u}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{(a-b)\sin((a-b)u) - (a+b)\sin((a+b)u)}{2u}\,\mathrm{d}u$$

Justifions a posteriori cette intégration par parties. Comme $\cos(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + \mathcal{O}(u^2)$,

$$\frac{\cos((a-b)u) - \cos((a+b)u)}{2u} \underset{u\to 0}{=} \mathcal{O}(u)$$

A fortiori,

$$\frac{\cos((a-b)u) - \cos((a+b)u)}{2u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$$

Comme cos est bornée,

$$\frac{\cos((a-b)u)-\cos((a+b)u)}{2u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

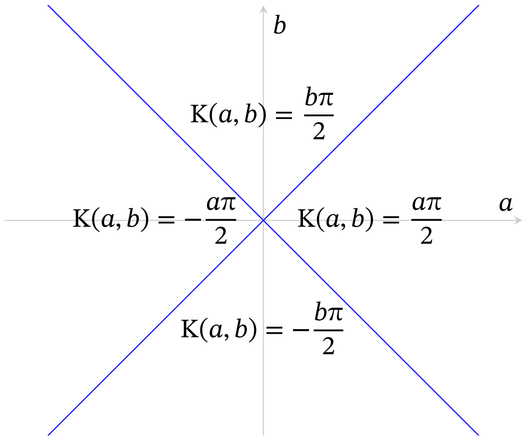
Par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} \frac{(a-b)\sin((a-b)u)-(a+b)\sin((a+b)u)}{2u}\,\mathrm{d}u$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{(a-b)\sin((a-b)u)-(a+b)\sin((a+b)u)}{2u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(a-b)\mathrm{I}(a-b)-\frac{1}{2}(a+b)\mathrm{I}(a+b)$$

Par conséquent, $\mathrm{K}(a,b)$ converge et

$$\mathrm{K}(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)\mathrm{I}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)\mathrm{I}(a-b)$$

b.



c. On peut vérifier que

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{K}(a,b) = \frac{\pi}{4}\left(|a+b|-|a-b|\right)$$

Solution 2

1. Il suffit d'utiliser le fait que $(a-b)^2 \geq 0$.

2. Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. D'après la question précédente,

$$\forall t \in \mathrm{I},\ 0 \leq |f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}\left(f(t)^2 + g(t)^2\right)$$

Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur I, $\frac{1}{2}\left(f^2+g^2\right)$ l'est aussi puis fg également.

3. On a déjà $\mathrm{E} \subset \mathcal{C}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $0 \in \mathrm{E}$. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. Alors

$$(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + \mu^2 g^2 + 2\lambda\mu fg$$

Comme f et g sont dans E, f^2 et g^2 sont intégrables sur I et fg l'est également d'après la question précédente. Ainsi $(\lambda f + \mu g)^2$ est intégrable comme combinaison linéaire de fonctions intégrables. Par conséquent, $\lambda f + \mu g \in \mathrm{E}$ et E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathrm{I},\mathbb{R})$. A fortiori, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4.

5. On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{J}_n = \int_0^{n+1} h(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^n h(t)\ \mathrm{d}t$$

Comme $\int_0^{+\infty} h(t)\ \mathrm{d}t$ converge,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n h(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n+1} h(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)\ \mathrm{d}t$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = 0$.

6. Comme h est continue sur I, elle possède une primitive H sur I. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = \mathrm{H}(n+1) - \mathrm{H}(n)$. Or H est $\mathcal{C}^1$ sur I donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in]n, n+1[$ tel que $\mathrm{H}'(a_n) = \mathrm{H}(n+1) - \mathrm{H}(n)$ en vertu du théorème des accroissemnts finis. On a donc $h(a_n) = \mathrm{J}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} h(a_n) = 0$ d'après la question précédente. Enfin, $a_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ par minoration.

7. D'après l'énoncé, $t \mapsto t^2 f^2(t)$ est intégrable sur I car positive. Or $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^2 f(t)^2)$ donc $t \mapsto f(t)^2$ est intégrable sur I. A fortiori, $\int_0^{+\infty} f(t)^2\ \mathrm{d}t$ converge.
Toujours d'après l'énoncé, $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto f'(t)$ appartiennent à E. Or le produit de deux éléments de E est intégrable sur I d'après la question **2**. Ainsi $t \mapsto tf(t)f'(t)$ est intégrable sur I. A fortiori, $\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

8. Les applications $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{1}{2}f(t)^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives $t \mapsto 1$ et $t \mapsto f(t)f'(t)$. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$. Par intégration par parties,

$$\int_0^{\mathrm{A}} tf(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[tf(t)^2\right]_0^{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{A}f(\mathrm{A})^2 - \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{A}} f(t)^2\ \mathrm{d}t$$

Comme $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2\ \mathrm{d}t$ converge, on peut appliquer la question **6** à $h\colon\ t \mapsto t^2 f(t)^2$: il existe donc une suite (a_n) d'éléments de I telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+} a_n^2 f(a_n)^2 = 0$.
On écrit alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{a_n} tf(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_n f(a_n)^2 - \frac{1}{2}\int_0^{a_n} f(t)^2\ \mathrm{d}t$$

Comme $\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge et (a_n) diverge vers $+\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{a_n} tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

De la même manière,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{a_n} f(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Enfin, (a_n) diverge vers $+\infty$ donc ne s'annule pas à partir d'un certain rang et

$$a_nf(a_n)^2 = \frac{a_n^2f(a_n)^2}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par opérations. Par passage à la limite, on obtient donc bien :

$$\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

9. Posons $g : t \mapsto tf(t)$. Comme g et f' appartiennent à E, on obtient par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle g \mid f'\rangle^2 \leq \|g\|^2\|f'\|^2$$

ou encore

$$\left(\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} t^2f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)$$

En utilisant la question précédente, on a donc bien

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq 4\left(\int_0^{+\infty} t^2f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)$$

10. On sait qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz précédente si et seulement si g et f' sont colinéaires. Remarquons que si g est nulle, alors f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_+$ par continuité de sorte que f' est également nulle sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi f' et g sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f' = \lambda g$. Ainsi $f \in \mathrm{F}$ vérifie l'égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que f est solution de l'équation differetielle $y' = \lambda ty$. Les fonctions recherchées sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{C}e^{\lambda t^2/2}$ qui appartiennent à F, ce qui impose $\mathrm{C} = 0$ ou $\lambda < 0$. Pour conclure les fonctions recherchées sont les fonctions

$$t \mapsto \mathrm{C}e^{-\mathrm{K}t^2} \text{ où } (\mathrm{C},\mathrm{K}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$$

Solution 3

1. Supposons $\lambda < 0$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\lambda n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leq 0$ à partir d'un certain rang. Ainsi (u_n) est croissante à partir d'un certain rang N. Alors $u_n \geq u_{\mathrm{N}} > 0$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. Ainsi (u_n) ne peut converger vers 0 : $\sum u_n$ diverge grossièrement.

2. Remarquons que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par conséquent,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta-\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. **a.** Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\beta-\lambda}{n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 0$ à partir d'un certain rang N.

b. Soit $n \geq \mathrm{N}$. Alors

$$\prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k}$$

donc $\frac{u_n}{u_{\mathrm{N}}} \leq \frac{v_n}{v_{\mathrm{N}}}$ puis $u_n \leq \mathrm{K}v_n$ avec $\mathrm{K} = \frac{u_{\mathrm{N}}}{v_{\mathrm{N}}}$. Puisque $\beta > 1$, $\sum v_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge également.

4. On choisit cette fois-ci $\beta \in]\lambda, 1[$. On prouve comme précédemment que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang N. On en déduit que $u_n \geq \mathrm{K}v_n$ pour $n \geq \mathrm{N}$ avec $\mathrm{K} = \frac{u_{\mathrm{N}}}{v_{\mathrm{N}}} > 0$. Comme $\sum v_n$ diverge, $\sum \mathrm{K}v_n$ diverge également ($\mathrm{K} \neq 0$). Ainsi $\sum u_n$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

5. La série $\sum x_n$ diverge d'après le cours et $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$,

$$\forall n \geq 2, 0 \leq \frac{1}{n\ln^2 n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

La suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ converge donc la série télescopique $\sum \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$ converge également. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum y_n$ converge. Par ailleurs,

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}}$$

D'une part

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'autre part

$$\frac{1}{1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

et, a fortiori,

$$\frac{1}{1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Finalement,

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Le cas $\lambda = 1$ est bien douteux puisqu'on peut aussi bien avoir convergence que divergence.

6. Il est clair que

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n^{1/2}\left(\frac{1}{n^{1/2}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)$$

Ainsi

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Avec les notations précédentes, $\lambda = \frac{1}{6} < 1$ donc $\sum w_n$ diverge.

7. **a.** L'application $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^4)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{4n}}$ et $4n \geq 4 > 1$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. A fortiori, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

b. Par intégration par parties

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_0^{+\infty} 1 \times (t^4+1)^{-n}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[t(t^4+1)^{-n}\right]_0^{+\infty} + 4n\int_0^{+\infty} t^4(t^4+1)^{-n-1}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Cette intégration par parties est légitime car $\lim_{t\to+\infty} t(t^4+1)^{-n} = 0$. En effet, $t(t^4+1)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} t^{1-4n}$ et $1-4n \leq -3 < 0$. Ainsi

$$\mathrm{I}_n = 4n\int_0^{+\infty} t^4(t^4+1)^{-n-1}\,\mathrm{d}t = 4n\int_0^{+\infty} (t^4+1-1)(t^4+1)^{-n-1}\,\mathrm{d}t = 4n\left(\int_0^{+\infty} (t^4+1)^{-n}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} (t^4+1)^{-n-1}\,\mathrm{d}t\right) = 42(\mathrm{I}_$$

c. D'après la question précédente,

$$\frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} = \frac{4n-1}{4n} = 1 - \frac{1}{4n}$$

On est donc dans le cas $\lambda = \frac{1}{4} < 1$ donc $\sum \mathrm{I}_n$ diverge.