

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK
RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

MASTERARBEIT

Algorithmen zur Berechnung
arithmetischer Quotienten von
Bruhat-Tits-Gebäuden zu $\mathrm{PGL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$

Lutz Hofmann

BETREUT VON

Prof. Dr. Gebhard Böckle

MENTOR

Dr. Juan Marcos Cerviño

27. AUGUST 2015

Zusammenfassung

Wir entwickeln einen Algorithmus zur Berechnung von Quotienten des Bruhat-Tits-Gebäudes \mathcal{B} über Funktionenkörpern modulo einer Kongruenzuntergruppe Γ . Speziell für den Fall $\Gamma = \Gamma_0(N)$ beschreiben wir den Quotienten $\Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0$, wobei $\Gamma_0 := \Gamma_0(1)$, mit Hilfe von projektiven Räumen und erhalten einen effizienten Algorithmus zur Entscheidung von Äquivalenzen modulo $\Gamma_0(N)$. Mit dessen Hilfe können wir die Quotienten-Gebäude $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{B}$ effizient berechnen. Für den zwei-dimensionalen Fall beschreiben wir die Standardweylkammer $\mathcal{W} \cong \Gamma_0 \backslash \mathcal{B}$ mit Doppelnebenklassen in $GL_3(\mathcal{K}_\infty)$ und geben Algorithmen zum Bestimmen der zugehörigen Matrixzerlegungen an. Wir betrachten spezielle Γ -invariante Funktionen auf den orientierten maximalen Simplex des Gebäudes \mathcal{B} , die harmonischen Koketten, und fassen diese als Funktionen auf dem Quotienten-Gebäude $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ auf. Wir zeigen, dass deren Träger in einem endlichen Teil des Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ liegt, der nur von Γ abhängt, und können so eine Basis des \mathbb{Z} -Moduls der harmonischen Koketten algorithmisch berechnen. Schließlich definieren wir Hecke-Operatoren auf diesem Raum und berechnen Abbildungsmatrizen für $\Gamma = \Gamma_0(N)$ im zwei-dimensionalen Fall. Einen großen Teil dieser Arbeit macht die Implementierung der Algorithmen in MAGMA aus, die zusammen mit dieser Arbeit zur Verfügung gestellt wird.

Abstract

We develop an algorithm to compute quotients of Bruhat-Tits buildings \mathcal{B} over function fields modulo a congruence subgroup Γ . In the case of $\Gamma = \Gamma_0(N)$ we describe the quotient $\Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0$, where $\Gamma_0 := \Gamma_0(1)$, using projective spaces and obtain an efficient algorithm that decides congruences modulo $\Gamma_0(N)$. Thus we are able to compute the quotient buildings $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{B}$ efficiently. In the two-dimensional case we describe the standard Weyl chamber $\mathcal{W} \cong \Gamma_0 \backslash \mathcal{B}$ in terms of double cosets in $GL_3(\mathcal{K}_\infty)$ and give algorithms to obtain the corresponding matrix decompositions. We consider certain Γ -invariant functions on the pointed maximal simplices of the building \mathcal{B} , the harmonic cochains, and view them as functions on the quotient $\Gamma \backslash \mathcal{B}$. We show that their support lies in a finite part of $\Gamma \backslash \mathcal{B}$, that depends only on Γ , which enables us to algorithmically compute a basis of the \mathbb{Z} -module of harmonic cochains. Finally we define Hecke operators on this space and compute their transformation matrices for the two-dimensional case and $\Gamma = \Gamma_0(N)$. A big part of this thesis was

the implementation of our algorithms in MAGMA, which will be provided alongside this thesis.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	7
Inhaltsverzeichnis	10
Notation	11
0 Einleitung	13
1 Fahnen und projektive Räume	15
2 Das Bruhat-Tits-Gebäude	27
2.1 Die Operation von $GL_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$	32
2.2 Die Operation von Γ_0	36
2.3 Quotienten-Gebäude	38
2.4 Repräsentanten in der Weylkammer im 2-dimensionalen Fall	43
3 Harmonische Koketten	55
3.1 Harmonische Koketten auf dem Quotienten-Gebäude	58
3.2 Heckeoperatoren	60
4 Algorithmen und Datenstrukturen	67
4.1 Datenstruktur des Quotienten	67
4.2 Harmonische Koketten	69
4.3 Heckeoperatoren	70
5 Beispiele	73
5.1 $q = 2, N = T^2 + T + 1$	74
5.2 $q = 2, N = (T + 1)^2$	76
5.3 $q = 2, N = T(T + 1)^2$	77
5.4 $q = 2, N = T^3$	77
5.5 $q = 2, N = T(T^2 + T + 1)$	78
5.6 $q = 2, N = T^2(T + 1)^2$	79
5.7 $q = 3, N = T(T + 1)$	80
5.8 $q = 3, N = T(T^2 + 1)$	80
5.9 $q = 4, N = T^2$	82
5.10 $q = 4, N = T(T + 1)$	82
5.11 Ein-dimensionale Beispiele	83

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

85

Notation

q	=	Eine Primzahlpotenz $p^k \in \mathbb{Z}$
A	=	Der Polynomring $\mathbb{F}_q[T]$
d	=	Die Dimension des Gebäudes
N	=	Ein normiertes Polynom N in A mit $\deg(N) \geq 1$
A_N	=	Der endliche Quotientenring $A/(N)$
$B_{d+1}(A)$	=	Die Boreluntergruppe von $\mathrm{GL}_{d+1}(A)$ der oberen Dreiecksmatrizen
$U_{d+1}(A)$	=	Die Untergruppe von $B_{d+1}(A)$ der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen
Γ_0	=	$\mathrm{GL}_{d+1}(A)$
$\Gamma(N)$	=	$\{B \in \Gamma_0 \mid B \equiv \mathbb{1} \pmod{N}\}$
$\Gamma_0(N)$	=	$\left\{ B \in \Gamma_0 \mid B \equiv \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$
K	=	$\mathbb{F}_q(T)$ mit der Bewertung $\nu_\infty : K \rightarrow \mathbb{Z}, \nu_\infty(\frac{f}{g}) := \deg(g) - \deg(f)$
π_∞	=	T^{-1} , ein uniformisierendes Element bzgl. ν_∞
\mathcal{K}_∞	=	$\mathbb{F}_q((\pi_\infty))$, die Vervollständigung von K bzgl. ν_∞
\mathcal{O}_∞	=	$\mathbb{F}_q[[\pi_\infty]]$, der Ganzheitsring von \mathcal{K}_∞
V	=	Ein $(d+1)$ -dimensionaler \mathcal{K}_∞ -Vektorraum mit Standardbasis e_0, \dots, e_d
$Z(\mathcal{K}_\infty)$	=	Das Zentrum in $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$, das heißt die Untergruppe der Skalarmatrizen

0 Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Algorithmen für die Berechnung von Quotienten-Gebäuden modulo Kongruenzuntergruppen zu entwickeln.

In der Praxis stellt sich heraus, dass der Rechenaufwand für Dimensionen $d > 2$ zu groß ist und praktisch nicht durchgeführt werden kann. Wir werden einige Aussagen nur für den Fall $d = 2$ beweisen, diese Beweise aber so formulieren, dass sie mit wenig Aufwand auf höhere d verallgemeinert werden können. Außerdem betrachten wir nur die Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$, da der Rechenaufwand für kleinere Kongruenzuntergruppen ebenfalls zu groß ist.

Im ersten Kapitel bringen wir den Quotienten $\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0$ in Verbindung mit Fahnen über dem endlichen Ring $A/(N)$ sowie mit gewissen projektiven Räumen über denselben Ring. Daraus entwickeln wir einen Algorithmus, der nicht nur ein Repräsentantensystem von $\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0$ berechnen kann, sondern auch eine effiziente Projektion von Γ_0 in dieses Repräsentantensystem.

Im zweiten Kapitel fassen wir die wichtigsten Eigenschaften der Bruhat-Tits-Gebäude zusammen und formulieren diese für allgemeine Dimensionen d . Dieser Teil basiert auf [Geb96] und [DS01]. Wir definieren Quotienten-Gebäude und sehen, dass diese auf einem endlichen Teil, auf der Faser über der Weylkammer, vollständig bestimmt sind. Wir zeigen im zwei-dimensionalen Fall, dass der Teil außerhalb dieses endlichen Teils ähnliche Eigenschaften wie die *Spitzen* der ein-dimensionalen Quotienten-Bäume besitzen. Weiterhin geben wir im zwei-dimensionalen Fall Repräsentantensysteme für die Simplexes in der Weylkammer, sowie Algorithmen zur Berechnung der zugehörigen Matrixzerlegungen an. Diese Algorithmen basieren auf den Algorithmen im ein-dimensionalen Fall, siehe [Ser80] und [But07].

Im dritten Kapitel betrachten wir bestimmte Γ -invariante Funktionen auf den maximalen Simplexes des Bruhat-Tits-Gebäudes, die harmonischen Koketten, die wir wie in [DS01] definieren. Wir fassen diese als Funktionen auf dem Quotienten-Gebäude $\Gamma\backslash\mathcal{B}$ auf und zeigen, dass jede solche Funktion einen endlichen Träger besitzt, der nur von Γ abhängt. Anschließend definieren wir auf den harmonischen Koketten Heckeoperatoren. Zusammen mit den Matrixzerlegungen aus dem zweiten Kapitel können wir nun die Heckeoperatoren algorithmisch berechnen.

Im vierten Kapitel beschreiben wir einige Details zur Implementierung der Algorithmen und geben im letzten Kapitel Beispiele an. Die Implementierung in

0 Einleitung

MAGMA wird auf <https://github.com/lhofmann/buildings> unter der MIT-Lizenz zur Verfügung gestellt.

Während unserer Arbeit an diesem Thema wurde ohne unsere vorherige Kenntnis die Dissertation „Modulsymbole und Bruhat-Tits-Gebäude der $\mathrm{PGL}(3)$ über Funktionenkörpern“ von Jennylee Müller ([Mül15]) veröffentlicht, die ein ähnliches Thema wie unsere Arbeit hat. Wir haben die hier vorgestellten Algorithmen unabhängig davon entwickelt, jedoch haben wir aus Zeitgründen im Zusammenhang mit den harmonischen Koketten diese Arbeit verwendet, um die Richtigkeit unserer Implementation zu kontrollieren.

1 Fahnen und projektive Räume

In diesem Kapitel wollen wir ein kanonisches Repräsentantensystem s_1, \dots, s_m von $\Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0$ konstruieren. Dieses Repräsentantensystem soll so konstruiert werden, dass für eine beliebige Matrix $B \in \Gamma_0$ effizient $i \in \{1, \dots, m\}$ bestimmt werden kann, sodass $\Gamma_0(N) \cdot B = \Gamma_0(N) \cdot s_i$ gilt. Insbesondere soll i ermittelt werden können, ohne jeden Repräsentanten auf $\Gamma_0(N)$ -Äquivalenz zu B zu testen. In späteren Kapiteln werden wir sehen, dass dies für die algorithmische Berechnung des Quotienten-Gebäudes $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{B}$ von Bedeutung ist.

Lemma 1.1. *Der durch die Projektion $A \twoheadrightarrow A_N$ definierte Homomorphismus*

$$\mathrm{SL}_{d+1}(A) \longrightarrow \mathrm{SL}_{d+1}(A_N)$$

ist surjektiv.

Beweis. (Nach [Geb96], Satz 4.15)

Für $d = 0$ ist die Aussage klar. Wir nehmen an, die Aussage sei für $d - 1$ gezeigt. Sei $B \in \mathrm{Mat}_{d+1}(A)$ mit $\det(B) \equiv 1 \pmod{N}$. Dann existieren Matrizen $U, V \in \mathrm{GL}_{d+1}(A)$ und $a_1 \mid \dots \mid a_{d+1} \in A$, sodass

$$UBV = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{d+1} \end{pmatrix} \quad (\text{Smith-Normalform}).$$

Falls $U, V \notin \mathrm{SL}_{d+1}(A)$, dann teile die erste Zeile von U durch $\det(U)$ und die erste Spalte von V durch $\det(V)$ und ersetze a_1 durch $a_1 \det(U) \det(V)$. Somit können wir $U, V \in \mathrm{SL}_{d+1}(A)$ annehmen.

1 Fahnen und projektive Räume

Sei $b := a_2 \cdots a_{d+1}$. Dann gilt wegen $a_1 b = \det(B) \equiv 1 \pmod{N}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b & 1 & & \\ b-1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=:W} UBV \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -a_2 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=:X} \\ \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 1-a_1 & a_1 a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{d+1} \end{pmatrix} \pmod{N},$$

und $W, X \in \mathrm{SL}_{d+1}(A)$. Nach Induktionsannahme gibt es ein $C \in \mathrm{SL}_d(A)$, sodass

$$C \equiv \begin{pmatrix} a_1 a_2 & & & \\ & a_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{d+1} \end{pmatrix} \pmod{N}.$$

Schließlich ist

$$\mathrm{SL}_{d+1}(A) \ni B' := U^{-1} W^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1-a_1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix} X^{-1} V^{-1} \equiv B \pmod{N}.$$

□

Algorithmus 1.2 (Schnelle algorithmische Berechnung der Urbilder von $\mathrm{SL}_3(A) \rightarrow \mathrm{SL}_3(A_N)$).

Sei $B \in \mathrm{SL}_3(A_N)$. Wir suchen $B' \in \mathrm{SL}_3(A)$ mit $B \equiv B' \pmod{N}$.

Schreibe $B' = \begin{pmatrix} - & b_1 + c_1 \cdot N & - \\ - & b_2 + c_2 \cdot N & - \\ - & b_3 + c_3 \cdot N & - \end{pmatrix}$ mit Zeilenvektoren $b_i, c_i \in A^3$ und $\det(B) = 1 + k \cdot N$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \det(B') &= \det(b_1 + c_1 N, b_2 + c_2 N, b_3 + c_3 N) \\ &= \det(B) + \det(c_1 N, b_2 + c_2 N, b_3 + c_3 N) + \det(b_1, c_2 N, b_3 + c_3 N) + \det(b_1, c_2, c_3 N) \\ &= 1 + N(k + \det(c_1, b_2 + c_2 N, b_3 + c_3 N) + \det(b_1, c_2, b_3 + c_3 N) + \det(b_1, c_2, c_3)) . \end{aligned}$$

Schreibe $b_i = (b_i^1, b_i^2, b_i^3)$, $c_i = (c_i^1, c_i^2, c_i^3)$ und betrachte

$$\begin{aligned} \det(c_1, b_2 + c_2 N, b_3 + c_3 N) &= \det \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ b_2^1 + c_2^1 N & b_2^2 + c_2^2 N & b_2^3 + c_2^3 N \\ b_3^1 + c_3^1 N & b_3^2 + c_3^2 N & b_3^3 + c_3^3 N \end{pmatrix} \\ &= c_1^1 \det \underbrace{\begin{pmatrix} b_2^2 + c_2^2 N & b_2^3 + c_2^3 N \\ b_3^2 + c_3^2 N & b_3^3 + c_3^3 N \end{pmatrix}}_{=:M_1} - c_1^2 \det \underbrace{\begin{pmatrix} b_2^1 + c_2^1 N & b_2^3 + c_2^3 N \\ b_3^1 + c_3^1 N & b_3^3 + c_3^3 N \end{pmatrix}}_{=:M_2} \\ &\quad + c_1^3 \det \underbrace{\begin{pmatrix} b_2^1 + c_2^1 N & b_2^2 + c_2^2 N \\ b_3^1 + c_3^1 N & b_3^2 + c_3^2 N \end{pmatrix}}_{=:M_3}. \end{aligned}$$

Vermutung: Die c_2, c_3 können stets so gewählt werden, dass $\text{ggT}(\det M_1, \det M_2, \det M_3) = 1$. Hierzu reicht c_2, c_3 von kleinem Grad. Damit können die c_2, c_3 durch ausprobieren algorithmisch gefunden werden.

Haben wir die c_2, c_3 so gewählt, dann schreibe

$$1 = \text{ggT}(\det M_1, \det M_2, \det M_3) = \alpha_1 \det M_1 + \alpha_2 \det M_2 + \alpha_3 \det M_3$$

für $\alpha_i \in A$. Definiere

$$c_1^i := (-1)^i \alpha_i (k + \det(b_1, c_2, b_3 + c_3 N) + \det(b_1, c_2, c_3)).$$

Dann ist per Konstruktion $\det(B') = 1$ und $B' \equiv B \pmod{N}$.

Lemma 1.3.

$$\Gamma(N) \backslash \Gamma_0 \cong \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^\times & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} SL_{d+1}(A_N)$$

Beweis. $\Gamma'(N) := \Gamma(N) \cap SL_{d+1}(A)$ ist der Kern des nach Lemma 1.1 surjektiven Homomorphismus

$SL_{d+1}(A) \twoheadrightarrow SL_{d+1}(A_N)$, also gilt $\Gamma'(N) \backslash SL_{d+1}(A) \cong SL_{d+1}(A_N)$ und mit

$$GL_{d+1}(A) = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^\times & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} SL_{d+1}(A)$$

folgt die Behauptung. □

Algorithmus 1.4 (Naive Berechnung eines Repräsentantensystems von $\Gamma \backslash \Gamma_0$ für Kongruenzuntergruppen $\Gamma(N) \subset \Gamma \subset \Gamma_0$).

Berechne mit Hilfe von Lemma 1.3 und Algorithmus 1.2 ein Repräsentantensystem $R := \{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma_0$ von $\Gamma(N) \backslash \Gamma_0$. Falls dabei der \mathbb{F}_q^\times -Faktor aus Lemma 1.3 bereits in Γ liegt, lassen wir diesen weg. Nun muss für $i \neq j$ geprüft werden, ob für $s_i s_j^{-1}$ in der Kongruenzuntergruppe Γ liegt. Ist dies der Fall, kann s_j entfernt werden.

Der Algorithmus kann geringfügig verbessert werden (Divide-and-Conquer), indem man das Repräsentantensystem in zwei möglichst gleichgroße Mengen partitioniert, etwa $R = R_1 \sqcup R_2$ mit $R_1 := \{s_1, \dots, s_m\}$, $R_2 := \{s_{m+1}, \dots, s_n\}$.

Sind die Elemente in R_1 bzw. R_2 jeweils paarweise Γ -inäquivalent, dann muss nur noch für $s \in R_1, t \in R_2$ geprüft werden, ob $st^{-1} \in \Gamma$, und gegebenenfalls t entfernt werden.

Wir wenden dieses Verfahren rekursiv an, bis die Mengen R_i höchstens ein-elementig sind. Dann ist die Bedingung an die Elemente, paarweise Γ -inäquivalent zu sein, trivial.

Definition 1.5. Für $\bar{a}, \bar{b} \in A_N$ mit $a, b \in A$ Vertreter der Klassen modulo N definiere

$$\text{ggT}(\bar{a}, \bar{b}, N) := \text{ggT}(a, b, N).$$

Dies ist wohldefiniert, da die Vertreter a, b bis auf Vielfache von N bestimmt sind und es gilt

$$\text{ggT}(a + k \cdot N, N) = \text{ggT}(a, N).$$

Definition 1.6.

$$\mathbb{P}^n(A_N) := \{(a_0, \dots, a_n) \in A_N^{n+1} : \text{ggT}(a_0, \dots, a_n, N) = 1\} / A_N^\times,$$

wobei die Operation von A_N^\times gegeben ist durch $\lambda \cdot (a_0, \dots, a_n) := (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$, heißt der n -dimensionale projektive Raum über A_N . Die A_N^\times -Bahn von (a_0, \dots, a_n) wird mit $(a_0 : \dots : a_n)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.7. Diese Definition ist äquivalent zu

$$\mathbb{P}(A_N^{n+1}) := \{W \subseteq A_N^{n+1} : W \text{ ist projektiver Untermodul von } A_N^{n+1} \text{ vom Rang } 1\},$$

denn A und somit A_N ist Hauptidealring, also ist ein Modul über A_N genau dann projektiv wenn er frei ist. Weiterhin gilt $\langle (a_0, \dots, a_n) \rangle_{A_N} \cong A_N$ genau dann, wenn $\text{ggT}(a_0, \dots, a_n, N) = 1$, denn $\langle (a_0, \dots, a_n) \rangle_{A_N} \cong \text{ggT}(a_0, \dots, a_n, N) \cdot A_N$.

Lemma 1.8. Es gilt die disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{P}^d(A_N) = \coprod_{i=0}^d \{(a_0 : \dots : a_d) \mid \text{ggT}(a_0, \dots, a_i, N) = 1, \text{ggT}(a_0, \dots, a_{i-1}, N) \neq 1\}.$$

Insbesondere gilt für ein irreduzibles Polynom $p \in A$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}^d(A_{p^k}) = \prod_{i=0}^d \{(p \cdot a_0 : \dots : p \cdot a_{i-1} : a_i : \dots : a_d) \mid \text{ggT}(a_i, p) = 1, a_0, \dots, a_d \in A_{p^k}\},$$

und ein kanonisches Repräsentantensystem von $\mathbb{P}^d(A_{p^k})$ ist

$$\prod_{i=0}^d \{(p \cdot a_0, \dots, p \cdot a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_d) \mid a_j \in A, \\ \deg(a_j) < \deg(p^{k-1}) \text{ für } j < i, \\ \deg(a_j) < \deg(p^k) \text{ für } j > i\}.$$

Beweis. $\text{ggT}(a_0, \dots, a_i, N)$ ist invariant nach Multiplikation der a_j mit Einheiten in A_N . Somit ist die Zerlegung disjunkt. Weiterhin existiert für $(a_0 : \dots : a_d) \in \mathbb{P}^d(A_N)$ per Definition stets das Minimum $\min\{i \in \mathbb{N} \mid \text{ggT}(a_0, \dots, a_i, N) = 1\}$.

Für $N = p^k$ ist $\text{ggT}(a_0, \dots, a_{i-1}, N) \neq 1$ äquivalent zu $p \mid a_j$, $j = 1, \dots, i-1$. Die einzige Möglichkeit für a_i , sodass $\text{ggT}(a_0, \dots, a_i, N) = 1$, besteht darin selbst teilerfremd zu N zu sein, das heißt $\text{ggT}(a_i, p) = 1$. \square

Bemerkung 1.9. Sei $N = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$ eine Zerlegung in paarweise teilerfremde Primfaktoren. Dann gilt nach chinesischem Restsatz

$$\mathbb{P}^d(A_N) \cong \bigtimes_{i=1}^k \mathbb{P}^d(A_{p_i^{e_i}}).$$

Via diesem Isomorphismus erhalten wir ein *kanonisches* Repräsentantensystem von $\mathbb{P}^d(A_N)$, indem wir Lemma 1.8 auf jede Komponente anwenden und in A_N Vertreter von kleinstem Grad wählen.

Definition 1.10.

$$\text{Flag}_{\mathbb{1}}^n(A_N) := \{(0 \neq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_n = A_N^n) : \\ W_i \text{ ist projektiver Untermodul von } A_N^n \text{ vom Rang } i\}$$

heißt die *Varietät der vollständigen Fahnen der Dimension n über A_N* . Hierbei bezeichnet $\mathbb{1}$ das Tupel $(1, \dots, 1)$ von Länge n . Allgemeiner beschreibt dieses Tupel die Kodimensionen benachbarter Untermoduln in der Fahne, jedoch wollen wir uns auf *vollständige Fahnen*, das heißt mit Kodimension überall 1 beschränken.

Lemma 1.11. *Es gibt eine kanonische 1:1-Korrespondenz von Mengen*

$$\text{Flag}_{\mathbb{1}}^n(A_N) \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{P}^{n-1}(A_N) \times \dots \times \mathbb{P}^1(A_N).$$

1 Fahnen und projektive Räume

Beweis. Beide Seiten lassen sich mit dem chinesischen Restsatz in p -Komponenten zerlegen. Wir können also annehmen $N = p^e$.

Für $n = 2$ sind die Elemente von $\text{Flag}_1^2(A_N)$ genau die projektiven Untermoduln von A_N^2 vom Rang 1. Die Aussage folgt aus der Bemerkung zur Definition von $\mathbb{P}^1(A_N)$.

Für $n > 2$ beweisen wir die Aussage induktiv:

Die projektiven Untermoduln W von A_N^n vom Rang 1 sind die Punkte in $\mathbb{P}^{n-1}(A_N)$. Da wir $N = p^e$ angenommen haben, können wir nach Lemma 1.8 schreiben $W = \langle w \rangle$ mit kanonische gewähltem $w := (a_1, \dots, a_n)$. Weiter existiert

$$i_0 := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \text{ggT}(a_i, p) = 1\}.$$

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis von A_N^n . Dann ist $\{w\} \cup \{e_1, \dots, \widehat{e_{i_0}}, \dots, e_n\}$ eine Basis von A_N^n . Das heißt wir erhalten eine abhängig von w kanonische Basis $\{e_1 + W, \dots, \widehat{e_{i_0} + W}, \dots, e_n + W\}$ von $A_N^n/W \cong A_N^{n-1}$ und einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \phi_w : A_N^n &\longrightarrow W \oplus A_N^{n-1}/W \\ e_i &\longmapsto e_i + W \quad \text{für } i \neq i_0 \\ e_{i_0} &\longmapsto w. \end{aligned}$$

Die Fahnen $(0 \neq W \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_n = A_N^n)$ entsprechen unter diesem Isomorphismus genau den Fahnen $\text{Flag}_1^{n-1}(A_N)$. \square

Algorithmus 1.12 (Berechnung einer Fahne zu einem Element in $\mathbb{P}^d(A_N) \times \dots \times \mathbb{P}^1(A_N)$ und umgekehrt).

Aus dem Beweis von Lemma 1.11 erhält man die folgenden Algorithmen direkt. Da wir aus Lemma 1.8 kanonische Vertreter der auftretenden projektiven Räumen haben, erhalten wir in diesem Sinne kanonische Basen der Fahnen. Wie zuvor verwenden wir den chinesischen Restsatz und geben die Algorithmen für den Fall $N = p^e$ an. Für allgemeine N müssen diese Algorithmen dann für jede p -Komponenten ausgeführt werden.

Für $w = [(a_0, \dots, a_d)] \in \mathbb{P}^d(A_N)$ bezeichnen wir

$$i_0(w) := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \text{ggT}(a_i, p) = 1\}$$

und es sei $\{e_1, \dots, e_{d+1}\}$ die kanonische Basis von A_N^{d+1} .

Eingabe: Ein Element $(\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_d) \in \mathbb{P}^d(A_N) \times \dots \times \mathbb{P}^1(A_N)$.

Ausgabe: Die zugehörige Fahne $0 \neq \langle w_1 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle w_1, \dots, w_d \rangle \subsetneq \langle w_1, \dots, w_{d+1} \rangle = A_N^{d+1}$

1. Sei $w_1 \in \widetilde{w}_1$ der kanonische Vertreter in $\mathbb{P}^d(A_N)$.
Dann ist per Definition $\langle w_1 \rangle$ als A_N -Modul projektiv vom Rang 1.

2. Setze $B := \{e_1, \dots, e_{d+1}\}$.
3. Für $i = 1, \dots, d-1$:
 - a) Setze $W_i := \langle w_1, \dots, w_i \rangle$.
 - b) Mit $j := i_0(w_i)$ entferne e_j aus B . Dann ist $\{b + W : b \in B\}$ eine Basis von A_N^{d+1}/W_i , und wir erhalten eine Inklusion $\iota : A_N^{d+1-i} \cong A_N^{d+1}/W_i \rightarrow A_N^{d+1}$.
 - c) Sei $w \in \widetilde{w_{i+1}}$ der kanonische Vertreter. Setze $w_{i+1} := \iota(w)$.
Dann ist per Konstruktion $\langle w_1, \dots, w_i \rangle \subsetneq \langle w_1, \dots, w_{i+1} \rangle$ ein projektiver A_N -Modul vom Rang $i+1$.
4. Mit $j := i_0(w_d)$ entferne e_j aus B . Dann hat B nur noch ein Element e .
Setze $w_{d+1} := e$.

Eingabe: Eine Fahne $0 \neq \langle w_1 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle w_1, \dots, w_d \rangle \subsetneq \langle w_1, \dots, w_{d+1} \rangle = A_N^{d+1}$

Ausgabe: Ein Element $(\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_d) \in \mathbb{P}^d(A_N) \times \dots \times \mathbb{P}^1(A_N)$.

1. Setze $\widetilde{w}_1 := [w_1]$. Dies ist nach der Bemerkung zur Definition 1.6 wohldefiniert.
2. Setze $B := \{e_1, \dots, e_{d+1}\}$.
3. Für $i = 1, \dots, d-1$:
 - a) Setze $W_i := \langle w_1, \dots, w_i \rangle$.
 - b) Mit $j := i_0(w_i)$ entferne e_j aus B . Dann ist $B \cup \{w_1, \dots, w_i\}$ eine Basis von A_N^{d+1} .
 - c) Sei $\pi_{W_i} : A_N^{d+1} \rightarrow A_N^{d+1}/W_i$ die zu dieser Basis gehörende Projektion.
 - d) Setze $\widetilde{w_{i+1}} := [\pi_{W_i}(w_{i+1})]$.

Satz 1.13. *Es gibt eine kanonische 1:1-Korrespondenz von Mengen*

$$\Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0 \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{P}^d(A_N) \times \dots \times \mathbb{P}^1(A_N).$$

Mit Lemma 1.11, in dem wir die rechte Seite mit $\text{Flag}_{\mathbb{1}}^{d+1}(A_N)$ identifizieren, ist diese Korrespondenz ein Isomorphismus von Γ_0 -Räumen, wobei Γ_0 von rechts operiert.

Beweis. $\text{SL}_{d+1}(A_N)$ operiert transitiv auf $\text{Flag}_{\mathbb{1}}^{d+1}(A_N)$ via

$$(0 \neq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_{d+1} = A_N^{d+1}).g := (0 \neq W_1g \subsetneq W_2g \subsetneq \dots \subsetneq W_{d+1}g = A_N^{d+1}),$$

denn $\text{GL}_{d+1}(A_N)$ operiert transitiv auf den Basen von A_N^{d+1} .

Sei $\mathcal{F}_0 := (0 \neq \langle e_1 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle e_1, \dots, e_{d+1} \rangle = A_N^{d+1})$ die Standard-Fahne bezüglich der Standard-Basis e_1, \dots, e_{d+1} von A_N^{d+1} . Dann gilt

$$\text{Stab}_{\text{SL}_{d+1}(A_N)}(\mathcal{F}_0) = B_{d+1}(A_N) \cap \text{SL}_{d+1}(A_N), \text{ also}$$

$$(B_{d+1}(A_N) \cap \text{SL}_{d+1}(A_N)) \backslash \text{SL}_{d+1}(A_N) \cong \text{Flag}_{\mathbb{1}}^{d+1}(A_N).$$

Via dem surjektiven (Lemma 1.1) Homomorphismus $\pi : \text{SL}_{d+1}(A) \rightarrow \text{SL}_{d+1}(A_N)$ operiert $\text{SL}_{d+1}(A)$ auf $\text{Flag}_{\mathbb{1}}^{d+1}(A_N)$. Weiterhin operiert $\ker(\pi) = \{\Gamma_0 \ni B \equiv \mathbb{1} \pmod{N}\}$ trivial. Es gilt

$$\pi^{-1}(B_{d+1}(A_N) \cap \text{SL}_{d+1}(A_N)) = \Gamma_0(N) \cap \text{SL}_{d+1}(A)$$

1 Fahnen und projektive Räume

und $\pi^{-1}(\mathrm{SL}_{d+1}(A_N)) = \mathrm{SL}_{d+1}(A)$. Wir erhalten mit Lemma 1.11

$$(\Gamma_0(N) \cap \mathrm{SL}_{d+1}(A)) \setminus \mathrm{SL}_{d+1}(A) \cong \mathrm{Flag}_1^{d+1}(A_N) \xrightarrow{1:1} \mathbb{P}^d(A_N) \times \cdots \times \mathbb{P}^1(A_N).$$

Schließlich ist $(\Gamma_0(N) \cap \mathrm{SL}_{d+1}(A)) \setminus \mathrm{SL}_{d+1}(A) \cong \Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0$, denn

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^\times & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{SL}_{d+1}(A) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^\times & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \subseteq \Gamma_0(N).$$

□

Korollar 1.14. Sei $B_n(\mathbb{F}_q) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ die Borel-Untergruppe von oberen Dreiecksmatrizen, dann gilt

$$B_n(\mathbb{F}_q) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{1:1} \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q).$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Satz 1.13. □

Korollar 1.15. Sei $N = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$ eine Zerlegung in paarweise teilerfremde Primfaktoren. Dann gilt

$$\#\mathbb{P}^d(A_N) = q^{d \deg(N)} \prod_{i=1}^k \frac{1 - Q_i^{-d-1}}{1 - Q_i^{-1}} \quad \text{mit} \quad Q_i := q^{\deg(p_i)},$$

und

$$[\Gamma_0 : \Gamma_0(N)] = q^{\binom{d+1}{2} \deg(N)} \prod_{j=1}^d \prod_{i=1}^k \frac{1 - Q_i^{-j-1}}{1 - Q_i^{-1}}.$$

Hierbei sei $\binom{d+1}{2} = \frac{d(d+1)}{2}$ der Binomialkoeffizient.

Beweis. Sei $p \in A$ irreduzibel, $k \in \mathbb{N}$. Es gibt $Q := q^{\deg(p)}$ Polynome vom Grad echt kleiner als $\deg(p)$, also Q^k Polynome vom Grad echt kleiner als $\deg(p^k) = k \deg(p)$. Aus dem Repräsentantensystem in Lemma 1.8 folgt nun

$$\begin{aligned} \#\mathbb{P}^d(A_{p^k}) &= \sum_{i=0}^d \left(Q^{k-1}\right)^i \cdot \left(Q^k\right)^{d-i} = \sum_{i=0}^d \left(Q^k\right)^{d-i} \left(Q^{k-1}\right)^d \\ &= Q^{(k-1)d} \sum_{i=0}^d Q^i = Q^{kd} \sum_{i=0}^d Q^{i-d} = q^{d \deg(p^k)} \sum_{i=0}^d \left(\frac{1}{Q}\right)^i \\ &= q^{d \deg(p^k)} \frac{1 - Q^{-d-1}}{1 - Q^{-1}}. \end{aligned}$$

Die erste Aussage folgt nun mit dem chinesischen Restsatz durch Multiplizieren der jeweiligen Terme. Die zweite Aussage folgt aus der vorherigen und Satz 1.13 zusammen mit der gaußschen Summenformel. \square

Algorithmus 1.16 (Reduktion eines Vertreters einer Klasse in $\mathbb{P}^d(A_N)$ auf einen kanonischen Vertreter).

Eingabe: Ein Vertreter (a_0, \dots, a_d) einer Klasse $(a_0 : \dots : a_d) \in \mathbb{P}^d(A_N)$.

Ausgabe: Ein Skalar $\lambda \in A_N^\times$, sodass $\lambda \cdot (a_0, \dots, a_d)$ ein nach Lemma 1.8 kanonischer Vertreter derselben Klasse ist.

1. Für $i = 1, \dots, k, j = 0, \dots, d$, setze $a_j^i := a_j \mod p_i^{e_i}$.
2. Setze $m_i := \min\{j \mid \text{ggT}(a_0^i, \dots, a_j^i, p_i) = 1\}$, $\lambda_i := a_{m_i}^i$,
das heißt $\text{ggT}(\lambda_i, p_i) = 1$.
3. Sei $\phi : A_N^\times \rightarrow A_{p_1}^\times \times \dots \times A_{p_k}^\times$ der auf die Einheitengruppen eingeschränkte Isomorphismus aus dem chinesischen Restsatz. Dann ist $\lambda := \phi^{-1}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1})$ das gesuchte Skalar.

Bemerkung 1.17. Wir können nun ein *kanonisches* Vertretersystem von $\Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0$ algorithmisch bestimmen und in konstanter Zeit eine beliebige Matrix in Γ_0 auf einen Vertreter aus unserem Vertretersystem reduzieren.

Hierzu identifizieren wir die Spalten einer Matrix

$$\Gamma_0 \ni B = \left(\begin{array}{c|ccc|c} & & & & & \\ & & & & & \\ w_{d+1} & & \dots & & w_1 & \\ & & & & & \end{array} \right)$$

mit der Fahne

$$0 \neq \langle w_1 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle w_1, \dots, w_d \rangle \subsetneq \langle w_1, \dots, w_{d+1} \rangle = A_N^{d+1}.$$

Aus dieser Fahne berechnen wir mit Algorithmus 1.12 (Teil 2) ein Tupel in $\mathbb{P}^d(A_N) \times \dots \times \mathbb{P}^1(A_N)$. Davon wiederum erhalten wir aus Algorithmus 1.16 einen kanonischen Vertreter. Mit Algorithmus 1.12 (Teil 1) erhalten wir einen kanonischen Vertreter einer Klasse in $\Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0$, indem wir zu der zu der berechneten Fahne gehörenden Matrix in $\text{SL}_{d+1}(A_N)$ nach Algorithmus 1.2 eine Matrix in Γ_0 wählen.

Gewöhnlich reicht es aus, den letzten Schritt auszulassen und mit Elementen in $\mathbb{P}^d(A_N) \times \dots \times \mathbb{P}^1(A_N)$ zu arbeiten. Zur Berechnung des Vertretersystems genügt es dann, einmal die kanonischen Vertreter von $\mathbb{P}^d(A_N) \times \dots \times \mathbb{P}^1(A_N)$ aufzulisten und für diese den Lift nach Γ_0 zu berechnen und abzuspeichern.

Algorithmus 1.18 (Bestimmen der Übergangsmatrix zum kanonischen Vertreter in $\Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0$).

Eingabe: $g \in \Gamma_0$.

Ausgabe: $h \in \Gamma_0(N)$, sodass $h \cdot g$ der kanonische Vertreter von $\Gamma_0(N) \cdot g$ ist.

1 Fahnen und projektive Räume

1. Sei $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_d) \in \mathbb{P}^d(A_N) \times \dots \times \mathbb{P}^1(A_N)$ das mit Algorithmus 1.12 berechnete Tupel zu g .
2. Sei $(\lambda_1 \tilde{w}_1, \dots, \lambda_d \tilde{w}_d)$ der kanonische Vertreter nach Algorithmus 1.16.
3. Setze $h_1 := (0, \dots, 0, \lambda_1)$.
4. Für $i = 1, \dots, d$:
 - a) Setze $W_i := \langle w_1, \dots, w_i \rangle$ und sei $\pi_{W_i} : A_N^{d+1} \rightarrow A_N^{d+1}/W_i$ eine Projektion.
 - b) Via dieser Projektion erhalten wir $A_N^{d+1} = W_i \oplus \widetilde{A_N^{d+1}/W_i}$.
Schreibe $w_{i+1} = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_i w_i + \widetilde{w_{i+1}}$.
Dann ist $\lambda_{i+1} \widetilde{w_{i+1}} = \lambda_{i+1} w_{i+1} - \lambda_{i+1} \mu_i w_i \dots - \lambda_{i+1} \mu_1 w_1$.
Setze $h_{i+1} := (0, \dots, 0, \lambda_{i+1}, -\lambda_{i+1} \mu_i, \dots, -\lambda_{i+1} \mu_1)$.
5. Nun ist $H := {}^t(h_{d+1}, \dots, h_1) \in \text{SL}_{d+1}(A_N)$ eine obere Dreiecksmatrix modulo N und $H \cdot g$ der kanonische Vertreter aus Algorithmus 1.12.
6. Ein Lift $\Gamma_0(N) \ni h \equiv H \pmod{N}$ ist die gesuchte Matrix (Algorithmus 1.2).

Lemma 1.19. Seien $(a_0 : \dots : a_d), (a'_0 : \dots : a'_d) \in \mathbb{P}^d(A_N)$. Dann sind äquivalent:

- (i) $(a_0 : \dots : a_d) \sim (a'_0 : \dots : a'_d)$,
- (ii) $a_i a'_j \equiv a'_i a_j \pmod{N}$ für alle $0 \leq i < j \leq d$.

Beweis. Aus (i) folgt (ii) direkt. Es gelte (ii). Mit dem chinesischen Restsatz können wir annehmen $N = p^e$ für ein irreduzibles Polynom p . Seien wie in Lemma 1.8

$$\begin{aligned} i_0 &:= \min\{i \in \mathbb{N} \mid \text{ggT}(a_i, p) = 1\}, \\ j_0 &:= \min\{j \in \mathbb{N} \mid \text{ggT}(a'_j, p) = 1\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$a_{i_0} a'_{j_0} \equiv a'_{i_0} a_{j_0} \pmod{N}.$$

Da nach Wahl der i_0, j_0 gilt $a_{i_0}, a'_{j_0} \in A_N^\times$ und da Einheiten in A_N solche Elemente sind, die nicht von p geteilt werden, folgt $a'_{i_0} \in A_N^\times$.

Setze $\lambda := a'_{i_0} a_{i_0}^{-1} \in A_N^\times$. Dann folgt nach Voraussetzung

$$a_{i_0} a'_j \equiv a'_{i_0} a_j \pmod{N} \Leftrightarrow a'_j \equiv a'_{i_0} a_{i_0}^{-1} a_j \equiv \lambda a_j \pmod{N},$$

das heißt $(a_0 : \dots : a_d) \sim (a'_0 : \dots : a'_d)$. □

Beispiel 1.20. Sei $B_3(\mathbb{F}_q) \subset \text{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ die Borel-Untergruppe von oberen Dreiecksmatrizen. Nach vorherigen Überlegungen sind folgende Mengen vollständige Repräsentantensysteme:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) &= \{(1 : a : b) \mid a, b \in \mathbb{F}_q\} \cup \{(0 : 1 : a) \mid a \in \mathbb{F}_q\} \cup \{(0 : 0 : 1)\}, \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) &= \{(1 : c) \mid c \in \mathbb{F}_q\} \cup \{(0 : 1)\}. \end{aligned}$$

Nun identifizieren wir $B_3(\mathbb{F}_q) \setminus GL_3(\mathbb{F}_q) = \text{Flag}_1^3(\mathbb{F}_q)$ mit $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$. Zunächst betrachten wir nur den $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ -Anteil:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & * & * \\ b & * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ a & * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt füllen wir die mit $*$ markierten 2x2-Untermatrizen auf die gleiche Weise mit dem $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ -Anteil auf:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & * \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & c & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & * \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die verbleibende 1x1-Untermatrix entspricht dem Punkt $\mathbb{P}^0(\mathbb{F}_q)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge dieser Matrizen, wobei $a, b, c \in \mathbb{F}_q$ bilden ein vollständiges Repräsentantensystem von $B_3(\mathbb{F}_q) \setminus GL_3(\mathbb{F}_q)$.

Betrachten wir nun $\text{Flag}_1^3(\mathbb{F}_q)$ mit Operation von $GL_3(\mathbb{F}_q)$ via $g \cdot \mathcal{F} := \mathcal{F}g^t$, dann gilt mit

$$\mathcal{F}_0 := (0 \subsetneq \langle e_3 \rangle \subsetneq \langle e_3, e_2 \rangle \subsetneq \langle e_3, e_2, e_1 \rangle = \mathbb{F}_q^3),$$

die Fixgruppe bezüglich dieser Operation ist $\text{Fix}(\mathcal{F}_0) = B_3(\mathbb{F}_q)$. Es folgt

$$GL_3(\mathbb{F}_q) / B_3(\mathbb{F}_q) \longleftrightarrow \text{Flag}_1^3(\mathbb{F}_q), \quad g B_3(\mathbb{F}_q) \longmapsto \mathcal{F}_0 g^t.$$

Wir erhalten ein vollständiges Repräsentantensystem von $GL_3(\mathbb{F}_q) / B_3(\mathbb{F}_q)$ durch Transponieren und anschließend Umkehren der Spalten aus dem Repräsentantensystem von $B_3(\mathbb{F}_q) \setminus GL_3(\mathbb{F}_q)$:

$$\begin{pmatrix} b & a & 1 \\ c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 1.21. Dieses Vertretersystem kann man ebenso aus der Bruhat-Zerlegung erhalten. Diese lautet für einen Körper K :

$$GL_n(K) = \coprod_{w \in \mathfrak{S}_n} U_n(K) w B_n(K),$$

wobei die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_n mit einer Einbettung in $GL_n(K)$ versehen ist.

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

Im Folgenden sei V ein $(d+1)$ -dimensionaler \mathcal{K}_∞ -Vektorraum mit kanonischer Basis $\{e_0, \dots, e_d\}$.

Definition 2.1. (i) Sei $\{b_0, \dots, b_d\}$ eine Basis von V . Dann heißt der von $\{b_0, \dots, b_d\}$ erzeugte \mathcal{O}_∞ -Untermodul $\langle b_0, \dots, b_d \rangle_{\mathcal{O}_\infty}$ ein *Gitter in V* .
(ii) Die *Gitterklasse* eines Gitters L ist die Bahn eines Gitters unter der Operation von $\mathcal{K}_\infty^\times$, $[L] := \{xL \mid x \in \mathcal{K}_\infty^\times\} = \{\pi_\infty^i L \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

Definition 2.2. Ein (*abstrakter*) *Simplizialkomplex* \mathcal{D} besteht aus einer nicht-leeren Menge $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ und einer Menge $S(\mathcal{D})$ von endlichen, nicht-leeren Teilmengen von $\mathcal{V}(\mathcal{D})$, sodass gilt

1. $\{v\} \in S(\mathcal{D}) \Leftrightarrow v \in \mathcal{V}(\mathcal{D})$,
2. $\sigma \in S(\mathcal{D}), \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in S(\mathcal{D})$.

Die Elemente aus $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ heißen *Knoten* oder *Vertices*, die Elemente aus $S(\mathcal{D})$ heißen *Simplizes*. Statt $\sigma \in S(\mathcal{D})$ schreiben wir kurz $\sigma \in \mathcal{D}$. Falls $\tau \subseteq \sigma$, dann nennen wir τ eine *Seite* von σ und wir schreiben $\tau \leq \sigma$.

Definition 2.3. Sei \mathcal{D} ein Simplizialkomplex, σ ein Simplex aus \mathcal{D} . Dann ist die *Dimension von σ*

$$\dim(\sigma) := \#\sigma - 1$$

und die *Dimension von \mathcal{D}*

$$\dim(\mathcal{D}) := \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{D}\}.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}_k(\mathcal{D})$ die Menge der k -dimensionalen Simplizes in \mathcal{D} . Hierbei ist $\mathcal{S}_0(\mathcal{D}) := \mathcal{V}(\mathcal{D})$.

Definition 2.4. Eine Δ -Menge ist eine Folge von Mengen $\{S_k\}_{k=0}^\infty$ mit Seiten-Abbildungen

$$\psi_k^i : S_k \longrightarrow S_{k-1}, \quad i = 0, \dots, k, \quad k > 0,$$

sodass für $i < j$ und $k > 1$ gilt

$$\psi_{k-1}^i \circ \psi_k^j = \psi_{k-1}^{j-1} \circ \psi_k^i.$$

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

Die Definition der Δ -Menge verallgemeinert die des Simplizialkomplexes. Die Mengen S_k sind als Mengen von k -Simplizes zu verstehen, und die Abbildungen ψ_k^i als die zugehörigen Seiten-Abbildungen, die jedem k -Simplex seine $(k-1)$ -Seiten zuordnet.

Als Dimension einer Δ -Menge bezeichnen wir $\dim(S) := \inf\{k \mid \forall k' > k : S_{k'} = \emptyset\}$, wobei in den auftretenden Δ -Mengen stets gilt $S_k = \emptyset$ für fast alle k .

Für $\sigma \in S_k$, $\tau \in S_{k-1}$ schreiben wir $\tau < \sigma$, falls es ein i gibt, sodass $\psi_k^i(\sigma) = \tau$.

Für $\tau \in S_l$ mit $l < k$ schreiben wir $\tau < \sigma$, falls es eine Folge von Simplizes $\tau_i \in S_{l+i}$ mit $\tau < \tau_1 < \dots < \sigma$ gibt.

Bemerkung 2.5. Man kann einem Simplizialkomplex kanonisch eine Δ -Menge durch *zweifache baryzentrische Unterteilung* zuordnen, siehe dazu [Hat10] Section 2.1, Exercise 23. Für unseren speziellen Fall erhalten wir eine solche Zuordnung jedoch einfacher, indem wir eine Ordnung auf den Simplizes definieren und die Seiten-Abbildungen direkt angeben.

Definition 2.6. Seien $\mathcal{S} := (\{S_k\}_{k=0}^\infty, \psi_k^i)$, $\mathcal{T} := (\{T_k\}_{k=0}^\infty, \phi_k^i)$ zwei Δ -Mengen. Ein *Morphismus von Δ -Mengen* $\theta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ ist eine Folge von Abbildungen $\theta_k : S_k \rightarrow T_k$ sodass gilt

$$\theta_{k-1} \circ \psi_k^i = \phi_k^i \circ \theta_k \quad \text{für } i = 0, \dots, k.$$

Definition 2.7. Das (nicht-orientierte) *Bruhat-Tits-Gebäude* \mathcal{B} zur $\mathrm{PGL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$ ist der Simplizialkomplex

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{B}) &:= \{[L] \mid L \text{ ist Gitter in } V\} \\ \{[L_0], \dots, [L_k]\} \in \mathcal{S}_k &:= \mathcal{S}_k(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \exists \tilde{L}_i \in [L_i] : \tilde{L}_0 \supsetneq \tilde{L}_1 \supsetneq \dots \supsetneq \tilde{L}_k \supsetneq \pi_\infty \tilde{L}_0 \end{aligned}$$

Eine solche Folge von Gittern nennen wir *(Gitter-)Fahne in L_0* .

Wir möchten nun dem Simplizialkomplex \mathcal{B} die Struktur einer Δ -Menge zuordnen. Dazu benötigen wir eine Ordnung auf den Vertices.

Definition 2.8. Sei $B = (b_0, \dots, b_d)$ eine Basis von V und $[L] = [\langle b_0, \dots, b_d \rangle_{\mathcal{O}_\infty}]$ die zugehörige Gitterklasse. Dann heißt

$$\mathrm{Typ}^*([L]) := v(\det(b_0, \dots, b_d)) \mod d+1$$

der (nicht-orientierte) *Typ* des Gitters $[L]$. Für einen Simplex $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$ setzen wir diese Definition fort:

$$\mathrm{Typ}^*(\sigma) := \{\mathrm{Typ}^*(v_0), \dots, \mathrm{Typ}^*(v_k)\}.$$

Da wir im Folgenden $\mathrm{Typ}^*([L])$ verwenden wollen, um gewisse Nummerierungen vorzunehmen, seien die Werte von $\mathrm{Typ}^*([L])$ via der natürlichen Ordnung auf dem Repräsentantensystem $\{0, 1, \dots, d\}$ geordnet.

Lemma 2.9. *Typ* ist wohldefiniert.*

Beweis. Sei L ein Gitter mit Basis $B = (b_0, \dots, b_d)$ wie in Definition 2.8. Ist $C = (c_0, \dots, c_d)$ eine weitere Basis eines Gitters in $[L]$, dann gibt es $i \in \mathbb{Z}, g \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_\infty)$, sodass

$$C \cdot g \cdot \pi_\infty^i = B.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} v(\det(B)) &= v(\det(C \cdot g \cdot \pi_\infty^i)) \\ &= v(\det(C)) + v(\det(g)) + v(\pi_\infty^{(d+1)i}) \\ &= v(\det(C)) + 0 + (d+1)i \equiv v(\det(C)) \pmod{d+1}. \end{aligned}$$

Somit ist $\mathrm{Typ}^*([L])$ unabhängig von der gewählten Basis. \square

Lemma 2.10. *Jeder d -Simplex enthält genau einen Vertex von jedem Typ. Insbesondere enthält jeder k -Simplex höchstens einen Vertex von jedem Typ.*

Beweis. Ist $\sigma := \{v_0, \dots, v_d\} \in \mathcal{S}_d$ ein d -Simplex, und die v_i gegebenenfalls nach umordnen so benannt, dass

$$\exists L_i \in v_i : L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_d \supsetneq \pi_\infty L_0.$$

Dann gibt es nach dem Elementarteilersatz eine Basis $\{b_0, \dots, b_d\}$ von V , sodass gilt

$$\begin{aligned} v_0 &= [\langle b_0, \dots, b_d \rangle_{\mathcal{O}_\infty}] \\ v_1 &= [\langle b_0, \dots, b_{d-1}, \pi_\infty b_d \rangle_{\mathcal{O}_\infty}] \\ v_2 &= [\langle b_0, \dots, b_{d-2}, \pi_\infty b_{d-1}, \pi_\infty b_d \rangle_{\mathcal{O}_\infty}] \\ &\vdots \\ v_d &= [\langle b_0, \pi_\infty b_1, \dots, \pi_\infty b_d \rangle_{\mathcal{O}_\infty}]. \end{aligned}$$

Somit gilt, ist $\mathrm{Typ}^*(v_0) \equiv t_0 \pmod{d+1}$, dann gilt $\mathrm{Typ}^*(v_i) = t_0 + i \pmod{d+1}$. \square

Mit Hilfe des nicht-orientierten Typs können wir nun das Gebäude \mathcal{B} als Δ -Menge auffassen und äquivalent zu Definition 2.7 definieren:

Bemerkung 2.11. Das (nicht-orientierte) *Bruhat-Tits-Gebäude* \mathcal{B} zur $\mathrm{PGL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$ kann aufgefasst werden als die Δ -Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &:= \{[L] \mid L \text{ ist Gitter in } V\}, \\ \{[L_0], \dots, [L_k]\} \in \mathcal{S}_k &\Leftrightarrow \exists \widetilde{L}_i \in [L_i] : \widetilde{L}_0 \supsetneq \widetilde{L}_1 \supsetneq \dots \supsetneq \widetilde{L}_k \supsetneq \pi_\infty \widetilde{L}_0, \\ \psi_k^i(\{[L_0], \dots, [L_k]\}) &:= \{[L_0], \dots, [\widehat{L_i}], \dots, [L_k]\}, \end{aligned}$$

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

wobei die Gitterklassen in den Mengen $\{[L_0], \dots, [L_k]\}$ der Größe nach bezüglich ihres Typs $\text{Typ}^*([L_i])$ nummeriert seien.

Im Folgenden werden wir nicht zwischen der Auffassung von \mathcal{B} als Simplizialkomplex und \mathcal{B} als Δ -Menge unterscheiden.

Proposition 2.12. *Sei $v \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$, $\{v_0, \dots, v_{d-1}\} \in \mathcal{S}_{d-1}$. Dann gilt*

- i. $\dim(\mathcal{B}) = d$,
- ii. v ist in $\prod_{i=1}^d \left(\sum_{j=0}^i q^j\right)$ d -Simplizes enthalten,
- iii. $\{v_0, \dots, v_{d-1}\}$ ist Seite von $(q+1)$ d -Simplizes.

Beweis. Sei L ein Gitter mit $v = [L]$, wähle b_0, \dots, b_d eine \mathbb{F}_q -Basis von $L/\pi_\infty L$. Bezeichne mit \mathcal{F} die Menge der vollständigen \mathbb{F}_q -Fahnen in $L/\pi_\infty L$ und definiere

$$\mathcal{G} := \{(L \supsetneq L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_d \supsetneq \pi_\infty L) \mid L_i \text{ Gitter}\}.$$

Dann erhalten wir eine Bijektion

$$\varphi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$(L \supsetneq L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_d \supsetneq \pi_\infty L) \longmapsto (L/\pi_\infty L \supsetneq L_1/\pi_\infty L \supsetneq \dots \supsetneq L_d/\pi_\infty L \supsetneq \pi_\infty L/\pi_\infty L = 0).$$

Wegen $\dim_{\mathbb{F}_q}(L/\pi_\infty L) = d$ folgt $\dim(\mathcal{B}) = d$.

Die Menge \mathcal{G} sind genau die d -Simplizes, die $v = [L]$ enthalten. Weiter sind das Bild von \mathcal{G} unter φ die vollständigen Fahnen über \mathbb{F}_q , dh $\#\mathcal{G} = \#\text{Flag}_{\mathbb{1}}^{d+1}(\mathbb{F}_q)$ und somit folgt die Behauptung aus Lemma 1.11 und Korollar 1.15 mit $N = T$:

$$\#\text{Flag}_{\mathbb{1}}^{d+1}(\mathbb{F}_q) = \prod_{i=1}^d \#\mathbb{P}^i(\mathbb{F}_q).$$

Für die letzte Aussage, sei $\tau := \{v_0, \dots, v_{d-1}\} \in \mathcal{S}_{d-1}$ und $L_i \in v_i$ Gitter, sodass

$$L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_{d-1} \supsetneq \pi_\infty L_0$$

und $\dim_{\mathbb{F}_q}(L_0/L_1) = 2$ und $\dim_{\mathbb{F}_q}(L_i/L_{i+1}) = 1$ für $i > 0$. Dann ist die Menge der d -Simplizes mit Seite τ

$$\mathcal{G}' := \{(L_0 \supsetneq L \supsetneq L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_{d-1} \supsetneq \pi_\infty L_0) \mid L \text{ Gitter}\}.$$

Das Bild von \mathcal{G}' unter Reduktion modulo $\pi_\infty L_0$ ist

$$\mathcal{F}' := \{L_0/\pi_\infty L_0 \supsetneq U \supsetneq L_1/\pi_\infty L_0 \supsetneq \dots \supsetneq \pi_\infty L_0/\pi_\infty L_0 \mid \dim_{\mathbb{F}_q}(U) = d\}.$$

Die d -dimensionalen Unterräume von $L_0/\pi_\infty L_0$, die $L_1/\pi_\infty L_0$ enthalten, entsprechen wegen $\dim_{\mathbb{F}_q}(L_1/\pi_\infty L_0) = d-1$ den eindimensionalen Unterräumen von L_0/L_1 unter der Bijektion

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' &\longrightarrow \{V \mid L_0/L_1 \supsetneq V \supsetneq 0\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) \\ U &\longmapsto U/L_1. \end{aligned}$$

Damit ist $\#\mathcal{G}' = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) = q+1$. □

2.1 Die Operation von $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$

Eine Gitter-Fahne ist bis auf zyklische Vertauschung eindeutig. Ist

$$(L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq \dots L_k \supsetneq \pi_\infty L_0)$$

eine Gitter-Fahne, dann auch

$$(L_i \supsetneq \dots L_k \supsetneq \pi_\infty L_0 \supsetneq \dots \supsetneq \pi_\infty L_i)$$

für jedes $i = 0, \dots, k$ und jede mögliche Anordnung der L_i zu einer Fahne erhält man auf diese Weise. Die Auswahl des ersten Gitters legt die Gitter-Fahne also eindeutig fest und wir nennen dessen Gitterklasse den *ausgezeichneten Vertex*.

Definition 2.13. Das *orientierte Bruhat-Tits-Gebäude* $\widehat{\mathcal{B}}$ zur $\mathrm{PGL}_d(\mathcal{K}_\infty)$ ist die Δ -Menge

$$([L_0], \dots, [L_k]) \in \widehat{S}_k := \widehat{S}_k(\widehat{\mathcal{B}}) \Leftrightarrow \exists \widetilde{L}_i \in [L_i] : \widetilde{L}_0 \supsetneq \widetilde{L}_1 \supsetneq \dots \supsetneq \widetilde{L}_n \supsetneq \pi_\infty \widetilde{L}_0,$$

$$\psi_k^i([L_0], \dots, [L_k]) := ([L_0], \dots, [\widehat{L}_i], \dots, [L_k]).$$

Einen Simplex im orientierten Bruhat-Tits-Gebäude nennen wir einen orientierten Simplex. Die Zuordnung eines orientierten Simplex zu seinem nicht-orientierten Simplex bezeichnen wir als die Projektion (von Mengen)

$$\widehat{\pi} : \widehat{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{B}, \quad ([L_0], \dots, [L_k]) \longmapsto \{[L_0], \dots, [L_k]\}.$$

Definition 2.14. Sei $([L_0], \dots, [L_k]) = \sigma \in \widehat{\mathcal{B}}$ ein orientierter k -Simplex. Dann heißt

$$\mathrm{Typ}(\sigma) := (t_0, \dots, t_k)$$

mit

$$t_i := \dim L_i / L_{i+1}$$

wobei $L_{k+1} := \pi_\infty L_0$ und die Dimension über \mathbb{F}_q ist, der *Typ von σ* .

Während man die vorhergehende Definition des nicht-orientierten Typs Typ^* auch auf orientierte Simplizes anwenden kann, ist dieser Typ nur für orientierte Simplizes definiert. Im Folgenden schreiben wir stets „nicht-orientierter Typ“, falls wir ebendiesen meinen und „Typ“ für den auf orientierten Simplizes definierten Typ.

Es gilt $\sum_0^k t_i = d+1$. Vertices haben immer Typ $(d+1)$ und d -Simplizes haben immer Typ $(1, \dots, 1)$.

2.1 Die Operation von $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$

Nach festlegen einer Basis von V operiert $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$ von links auf den Gitterklassen durch

$$g \cdot [L] := [gL].$$

Da diese Operation bekanntlich Inklusionen erhält, können wir sie auf das ganze orientierte Bruhat-Tits-Gebäude durch

$$g \cdot ([L_0], \dots, [L_k]) := (g \cdot [L_0], \dots, g \cdot [L_k])$$

erweitern und genauso eine Operation auf dem nicht-orientierten Bruhat-Tits-Gebäude definieren.

Definition 2.15 (Standard-Simplizes). Für $i_0, \dots, i_d \in \mathbb{Z}$ definieren wir die Gitterklasse

$$[i_0, \dots, i_d] := [\langle \pi_\infty^{i_0} e_0, \dots, \pi_\infty^{i_d} e_d \rangle \mathcal{O}_\infty].$$

Sei $t := (t_0, \dots, t_k)$ ein Typ eines k -Simplizes, dann ist der *Standard-Simplex vom Typ t*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{k,t} &:= (\mathcal{C}_{k,t}^{(0)}, \dots, \mathcal{C}_{k,t}^{(k)}) \\ \mathcal{C}_{k,t}^{(i)} &:= [0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{E_i \text{ mal}}, \dots, 1], \quad E_i := \sum_{j=0}^{i-1} t_j. \end{aligned}$$

Insbesondere sei der *Standard-Vertex*

$$\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}_{0,(d+1)} := [0, \dots, 0]$$

und der *Standard- d -Simplex*

$$\mathcal{C}_d := \mathcal{C}_{d,(1,\dots,1)} := ([0, \dots, 0], [0, \dots, 0, 1], \dots, [0, 1, \dots, 1]).$$

Für $j \in \mathbb{Z}$ gilt $[i_0, \dots, i_d] = [i_0 + j, \dots, i_d + j]$. Deshalb können wir diese Gitterklassen durch $[0, i_1, \dots, i_d]$ normieren.

Definition 2.16. Sei $t := (t_0, \dots, t_k)$ ein Typ eines k -Simplizes, das heißt $e_i > 0$ und $\sum_0^k e_i = d + 1$. Dann ist die *Standard-Parahorigruppe vom Typ t* die Untergruppe \mathcal{P}_t von $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_\infty)$ mit $g \in \mathcal{P}_t$, genau dann wenn $g \bmod \pi_\infty$ eine Matrix ist, entlang deren Diagonalen $(k+1)$ Blöcke der Größen e_k, \dots, e_0 von beliebigen Einträgen liegen,

2.1 Die Operation von $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$

unterhalb der Blöcke nur Nullen stehen und oberhalb der Blöcke beliebige Einträge:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} * & \dots & * & & & & * \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ * & \dots & * & & & & \\ \hline & & & * & \dots & * & \\ & & \vdots & & & \vdots & \\ & & \vdots & & & \vdots & \\ & & * & \dots & * & & \\ \hline & & & & & \ddots & \\ & & & & & & * & \dots & * \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & * & \dots & * \\ \hline & & & & & & & & t_0 \end{array} \right)$$

Falls $t = (d+1)$, dann ist $\mathcal{P}_t = \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_\infty)$ und falls $t = (1, \dots, 1)$, dann ist $P_t = \mathcal{I}$ die *Standard-Iwahorigruppe*, das heißt die Untergruppe von $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_\infty)$ der modulo π_∞ oberen Dreiecksmatrizen.

Lemma 2.17. *Sei $\sigma \in \widehat{\mathcal{S}}_k$ ein orientierter k -Simplex vom Typ $t = (t_0, \dots, t_k)$. Dann gilt*

$$\mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)}(\sigma) \cong \mathcal{P}_t \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty).$$

Beweis. $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$ operiert transitiv auf den Basen von V und somit transitiv auf den k -Simplizes desselben Typs. Damit sind die Fixgruppen der Simplizes eines festen Typs t konjugiert und die Konjugation entspricht einem Basis-Wechsel. Wir müssen im Folgenden nur die Standard-Simplizes betrachten.

Die Menge der k -Simplizes vom Typ t entspricht der Menge der \mathbb{F}_q -Fahnen vom Typ t via der Abbildung

$$(L_0 \not\supseteq L_1 \not\supseteq \dots L_k \not\supseteq \pi_\infty L_0) \mapsto (L_0/\pi_\infty L_0 \not\supseteq L_1/\pi_\infty L_0 \not\supseteq \dots L_k \not\supseteq \pi_\infty L_0/\pi_\infty L_0 = 0).$$

Somit sieht man leicht, dass zum Standard-Simplex $\mathcal{C}_{k,t}$ die Fahne gehört, die genau von der Standard-Parahorigruppe \mathcal{P}_t fixiert wird. \square

Korollar 2.18. *Sei $\hat{\mathcal{S}}_t$ die Menge der orientierten k -Simplizes vom Typ t . Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)/\mathcal{P}_t \cdot \mathbb{Z}(\mathcal{K}_\infty) &\longleftrightarrow \widehat{S}_t \\ g \cdot \mathcal{P}_t \cdot \mathbb{Z}(\mathcal{K}_\infty) &\longmapsto g \cdot \mathcal{C}_{k,t} \end{aligned}$$

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

Insbesondere gilt

$$\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty) / \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_\infty) \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty) \longleftrightarrow \mathcal{V}$$

und für $\widehat{\mathcal{S}}_{(1,\dots,1)}$ die Menge der orientierten d -Simplizes gilt

$$\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty) / \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty) \longleftrightarrow \widehat{\mathcal{S}}_{(1,\dots,1)}.$$

Weiterhin gilt für die nicht-orientierten 2-Simplizes im Fall $d = 2$:

$$\mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \langle R \rangle \cdot \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty) \longleftrightarrow \mathcal{S}_2$$

wobei

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Alle Aussagen bis auf die letzte folgen aus vorherigem Lemma. Es bleibt zu zeigen

$$\mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)}(\mathcal{C}_2^*) = \langle R \rangle \cdot \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty),$$

wobei hier \mathcal{C}_2^* den nicht-orientierten Standard-2-Simplex

$$\mathcal{C}_2^* := \{\mathcal{C}_2^{(0)}, \mathcal{C}_2^{(1)}, \mathcal{C}_2^{(2)}\}$$

bezeichne. Ein Element in $\mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)$, das alle Vertices in \mathcal{C}_2^* fest lässt, lässt auch \mathcal{C}_2^* fest, das heißt

$$\mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty) \subset \mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)}(\mathcal{C}_2^*).$$

Sind v, w zwei Gitterklassen mit $\mathrm{Typ}^*(v) \neq \mathrm{Typ}^*(w)$, dann gibt es kein $g \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)$ mit $g.v = w$ und $g.w = v$:

Gäbe es ein solches g , dann folgt $g^2.v = v$ und damit

$$\mathrm{Typ}^*(v) = \mathrm{Typ}^*(g^2.v) = 2\nu_\infty(\det(g)) + \mathrm{Typ}^*(v),$$

das heißt $2\nu_\infty(\det(g)) \equiv 0 \pmod{3}$, also $\nu_\infty(\det(g)) \equiv 0 \pmod{3}$. Dann ist aber

$$\mathrm{Typ}^*(w) = \mathrm{Typ}^*(g.v) = \nu_\infty(\det(g)) + \mathrm{Typ}^*(v) = \mathrm{Typ}^*(v)$$

im Widerspruch zur Annahme.

Damit ist die einzige zulässige Operation, die \mathcal{C}_2^* fest lässt, das zyklische Vertauschen der Vertices. Dies sind gerade die Potenzen der Matrix R . \square

Lemma 2.19. Die Fixgruppe eines Vertices $[i_0, \dots, i_d]$ unter $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$ ist

$$\left\{ \left(\pi_\infty^{e(j,k)} a_{jk} \right)_{0 \leq j,k \leq d} \mid (a_{jk})_{0 \leq j,k \leq d} \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_\infty) \right\} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty),$$

wobei $e(j,k) := (i_j - i_k)$.

2.2 Die Operation von Γ_0

Beweis. Die Fixgruppe des Standard-Vertex \mathcal{C}_0 ist $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_\infty) \cdot \mathbb{Z}(\mathcal{K}_\infty)$. Der Vertex $[i_0, \dots, i_d]$ und damit seine Fixgruppe ist konjugiert zu \mathcal{C}_0 unter der Diagonalmatrix $D := \mathrm{diag}(\pi_\infty^{i_0}, \dots, \pi_\infty^{i_d})$. Es gilt

$$g \in \mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)}([i_0, \dots, i_d]) \Leftrightarrow g \in D \cdot \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_\infty) \cdot D^{-1} \cdot \mathbb{Z}(\mathcal{K}_\infty).$$

Die Aussage folgt nun durch Ausmultiplizieren von $D \cdot \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_\infty) \cdot D^{-1}$. \square

Lemma 2.20. *Sei G eine Untergruppe von*

$$\mathrm{GL}_{d+1}^+(\mathcal{K}_\infty) := \{g \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty) \mid v(\det(g)) \equiv 0 \pmod{d+1}\},$$

dann ist Typ^ invariant unter G . Insbesondere gilt für einen orientierten (nicht-orientierten) k -Simplex $\sigma := (v_0, \dots, v_k) \in \widehat{\mathcal{S}}_k (\in \mathcal{S}_k)$:*

$$\mathrm{Fix}_G(\sigma) = \bigcap_i \mathrm{Fix}_G(v_i).$$

Beweis. Sei $B = (b_0, \dots, b_d)$ eine Basis von V und $[L] = [\langle b_0, \dots, b_d \rangle_{\mathcal{O}_\infty}]$ die zugehörige Gitterklasse. Für $g \in \mathrm{GL}_{d+1}^+(\mathcal{K}_\infty)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Typ}^*(g.[L]) &\equiv v(\det(g \cdot B)) \pmod{d+1} \\ &\equiv v(\det(g)) + v(\det(B)) \pmod{d+1} \\ &\equiv v(\det(B)) \pmod{d+1} \\ &\equiv \mathrm{Typ}^*([L]) \pmod{d+1}. \end{aligned}$$

Damit ist Typ^* invariant unter $\mathrm{GL}_{d+1}^+(\mathcal{K}_\infty)$.

Nach Lemma 2.10 gilt $\mathrm{Typ}^*(v_i) \neq \mathrm{Typ}^*(v_j)$ für $i \neq j$. Da Typ^* invariant ist unter $\mathrm{GL}_{d+1}^+(\mathcal{K}_\infty)$, folgt

$$g \cdot \sigma = \sigma \iff g \cdot v_i = v_i \quad \text{für alle } i.$$

\square

Korollar 2.21. *Es gilt folgende Bijektion zwischen nicht-orientierten d -Simplizes und Nebenklassen in $\mathrm{GL}_{d+1}^+(\mathcal{K}_\infty)$:*

$$\mathrm{GL}_{d+1}^+(\mathcal{K}_\infty) / \mathcal{I} \cdot \mathbb{Z}(\mathcal{K}_\infty) \longleftrightarrow \mathcal{S}_d.$$

Beweis. Die Gruppe, die alle Vertices im Standard- d -Simplex $\{\mathcal{C}_d^{(0)}, \dots, \mathcal{C}_d^{(d)}\}$ fest lässt ist gerade die Fixgruppe des orientierten Standard- d -Simplex, $\mathcal{I} \cdot \mathbb{Z}(\mathcal{K}_\infty)$. \square

2.2 Die Operation von Γ_0

Wir betrachten nun die Operation von

$$\Gamma_0 := \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q[T]) \subset \mathrm{GL}_{d+1}^+(\mathcal{K}_\infty) \subset \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty).$$

Lemma 2.22. *Keine zwei Gitter innerhalb einer Gitterklasse sind äquivalent unter Γ_0 , das heißt*

$$\mathrm{Fix}_{\Gamma_0}([L]) = \mathrm{Fix}_{\Gamma_0}(L).$$

Beweis. Sei $g \in \Gamma_0$, $[L_1] = [L_2]$ ein Gitter mit $g.L_1 = L_2$ und $B = (b_0, \dots, b_d)$ die zu L_1 gehörende Basis von V . Es gilt $L_2 = \pi_\infty^i L_1$ für ein $i \in \mathbb{Z}$ und es folgt

$$\begin{aligned} g.L_1 &= L_2 = \pi_\infty^i L_1 \\ \Rightarrow v(\det(g)) + v(\det(B)) &= (d+1)i + v(\det(B)) \\ \Rightarrow v(\det(g)) &= (d+1)i \\ \Rightarrow i = 0 &\Rightarrow L_1 = L_2. \end{aligned}$$

□

Definition 2.23. Sei $M = (m_{ij})_{0 \leq i, j \leq d} \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{Z})$ eine ganzzahlige Matrix. Dann definieren wir die Teilmenge $\Gamma_0[M] \subset \Gamma_0$ als

$$\Gamma_0[M] := \{g = (g_{ij})_{0 \leq i, j \leq d} \in \Gamma_0 \mid \deg(g_{ij}) \leq m_{ij} \text{ für } 0 \leq i, j \leq d\}.$$

Das heißt insbesondere, falls $m_{ij} = 0$ kann der Eintrag g_{ij} nur ein Element in \mathbb{F}_q sein und falls $m_{ij} < 0$ kann der Eintrag g_{ij} nur 0 sein.

Lemma 2.24. *Die Fixgruppe eines Vertex $[i_0, \dots, i_d]$ unter Γ_0 ist*

$$\mathrm{Fix}_{\Gamma_0}([i_0, \dots, i_d]) = \Gamma_0[M], \quad \text{mit } M := (i_j - i_k)_{0 \leq j, k \leq d}.$$

Beweis. Es ist

$$\mathrm{Fix}_{\Gamma_0}([i_0, \dots, i_d]) = \mathrm{Fix}_{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)}([i_0, \dots, i_d]) \cap \Gamma_0.$$

Nach Lemma 2.19 folgt

$$\mathrm{Fix}_{\Gamma_0}([i_0, \dots, i_d]) = \{(g_{jk})_{0 \leq j, k \leq d} \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_\infty) \mid v(g_{jk}) \geq i_k - i_j\} \cdot \mathrm{Z}(\mathcal{K}_\infty) \cap \Gamma_0.$$

Die Aussage folgt dann aus

$$\{x \in \mathcal{O}_\infty \mid v(x) \geq -j\} \cap \mathbb{F}_q[T] = \{P \in \mathbb{F}_q[T] \mid \deg(P) \leq j\}.$$

□

Korollar 2.25. Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{S}_k$ ein nicht-orientierter (oder orientierter) k -Simplex und $v_m = [i_0^{(m)}, \dots, i_d^{(m)}]$. Definiere $M := (\min_m \{i_j^{(m)} - i_k^{(m)}\})_{0 \leq j, k \leq d}$. Dann gilt

$$\text{Fix}_{\Gamma_0}(\sigma) = \Gamma_0[M].$$

Beweis. Nach Lemma 2.20 ist die Fixgruppe von σ gleich dem Durchschnitt der Fixgruppen der v_m . Zusammen mit dem vorherigen Lemma folgt die Aussage. \square

Definition 2.26. Der maximale Unterkomplex \mathcal{W} von \mathcal{B} auf den Vertices

$$\mathcal{V}(\mathcal{W}) := \{[i_0, \dots, i_d] \mid i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_d\}$$

heißt die (Standard-)Weylkammer von \mathcal{B} . Genauso definieren wir die orientierte (Standard-)Weylkammer $\widehat{\mathcal{W}}$ von $\widehat{\mathcal{B}}$ durch $\widehat{\mathcal{W}} := \widehat{\pi}^{-1}(\mathcal{W})$.

Der folgende Satz ist ein Resultat aus der Theorie der Gebäude und kann aus Abramenko, Brown: Buildings [AB08], Abschnitt 11.8.6 gefolgert werden¹. Er kann auch aus unserem Abschnitt 2.4 für den Fall $d = 2$ elementar gefolgert werden.

Satz 2.27. Die Standardweylkammer \mathcal{W} ist ein Fundamentalbereich der Operation von Γ_0 auf \mathcal{B} , das heißt

- i. alle Simplizes in \mathcal{W} sind paarweise inäquivalent unter Γ_0 ,
- ii. jeder Simplex in \mathcal{B} lässt sich unter der Operation von Γ_0 in einen Simplex in \mathcal{W} transformieren.

Korollar 2.28. Die orientierte Standardweylkammer $\widehat{\mathcal{W}}$ ist ein Fundamentalbereich der Operation von Γ_0 auf $\widehat{\mathcal{B}}$.

Beweis. Nach Lemma 2.20 ist die Operation von Γ_0 auf orientierten Simplizes eines festen Typs dieselbe wie auf nicht-orientierten Simplizes. \square

Somit können wir das Bruhat-Tits-Gebäude als Vereinigung von Weylkammern auffassen:

$$\mathcal{B} = \bigcup_{g \in \Gamma_0} g \cdot \mathcal{W}.$$

Definition 2.29. Sei $\omega \in \mathcal{W}$ ein Simplex in der Weylkammer. Ein Simplex $\sigma \in \mathcal{B}$ im Gebäude hat Niveau w , falls σ in der Bahn von ω unter Γ_0 liegt. Wir schreiben dann

$$\text{Niveau}(\sigma) = \omega$$

¹In Browns Buch heißen maximale Simplizes *chambers* und die Standardweylkammer *fundamental sector*.

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

und bezeichnen die Menge der Simplizes in \mathcal{B} vom Niveau ω als $\mathcal{N}_\omega(\mathcal{B})$. Genauso definieren wir das Niveau für orientierte Simplizes. Mit dieser Definition ist Niveau eine Abbildung von Δ -Mengen $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$ bzw. $\widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \widehat{\mathcal{W}}$.

Damit können wir die vorherige Beschreibung des Gebäudes umformulieren als

$$\mathcal{B} = \coprod_{\omega \in \mathcal{W}} \mathcal{N}_\omega(\mathcal{B}).$$

2.3 Quotienten-Gebäude

Sei $\Gamma \subset \Gamma(N) \subset \Gamma_0$ eine Kongruenzuntergruppe.

Definition 2.30. Das (*nicht-orientierte*) *Quotienten-Gebäude* $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ ist die Δ -Menge

$$(\Gamma \backslash \mathcal{B})_k := \mathcal{S}_k(\Gamma \backslash \mathcal{B}) := \{\Gamma \cdot \sigma \mid \sigma \in \mathcal{S}_k(\mathcal{B})\},$$

$$\psi_k^i(\Gamma \cdot \{[L_0], \dots, [L_k]\}) := \Gamma \cdot \{[L_0], \dots, [\widehat{L_i}], \dots, [L_k]\}.$$

Hierbei seien die Vertices nach der Größe $\text{Typ}^*([L_i])$ nummeriert.

Das (*orientierte*) *Quotienten-Gebäude* $\Gamma \backslash \widehat{\mathcal{B}}$ ist die Δ -Menge

$$(\Gamma \backslash \widehat{\mathcal{B}})_k := \widehat{\mathcal{S}}_k(\Gamma \backslash \widehat{\mathcal{B}}) := \{\Gamma \cdot \sigma \mid \sigma \in \widehat{\mathcal{S}}_k(\widehat{\mathcal{B}})\},$$

$$\psi_k^i(\Gamma \cdot ([L_0], \dots, [L_k])) := \Gamma \cdot ([L_0], \dots, [\widehat{L_i}], \dots, [L_k]).$$

Die Simplizes im Quotienten-Gebäude bezeichnen wir mit $\llbracket \sigma \rrbracket := \Gamma \cdot \sigma$ für $\sigma \in \mathcal{B}$.

Lemma 2.31. *Es gilt $\Gamma_0 \backslash \mathcal{B} \cong \mathcal{W}$ und $\Gamma_0 \backslash \widehat{\mathcal{B}} \cong \widehat{\mathcal{W}}$.*

Beweis. Die Abbildung Niveau ist jeweils ein Isomorphismus von Δ -Mengen, denn die Seiten-Abbildungen sind via dem nicht-orientierten Typ definiert und Typ^* ist invariant unter Γ_0 . \square

Quotienten-Gebäude als Überlagerung der Weylkammer

Sei $\omega \in \mathcal{W}$. Definiere $\Gamma_\omega := \text{Fix}_{\Gamma_0}(\omega)$. Per Definition operiert Γ_0 transitiv auf $\mathcal{N}_\omega(\mathcal{B})$. Damit erhalten wir eine Bijektion

$$\Gamma_0 / \Gamma_\omega \longrightarrow \mathcal{N}_\omega(\mathcal{B}), \quad g \cdot \Gamma_\omega \longmapsto g \cdot \omega.$$

Da Γ eine Untergruppe von Γ_0 ist, können wir die Definition von Niveau auf den Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ fortsetzen, das heißt die Abbildung Niveau : $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W} \cong \Gamma_0 \backslash \mathcal{B}$ faktorisiert über die kanonische Projektion $\Gamma \backslash \mathcal{B} \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathcal{B}$:

$$\text{Niveau} : \mathcal{B} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{B} \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathcal{B}.$$

Wir erhalten eine Zerlegung

$$\Gamma \backslash \mathcal{B} = \coprod_{\omega \in \mathcal{W}} \mathcal{N}_\omega(\Gamma \backslash \mathcal{B})$$

und eine Bijektion

$$\Gamma \backslash \Gamma_0 / \Gamma_\omega \longrightarrow \mathcal{N}_\omega(\Gamma \backslash \mathcal{B}), \quad \Gamma \cdot g \cdot \Gamma_\omega \longmapsto \Gamma \cdot g \cdot \omega.$$

Sei $\omega = \{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{S}_k(\mathcal{W})$ ein k -Simplex der Weylkammer und $\omega_i := \{v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k\}$ eine Seite von ω . Dann entspricht die Seiten-Abbildung

$$\psi_k^i : \mathcal{S}_k(\Gamma \backslash \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{S}_{k-1}(\Gamma \backslash \mathcal{B})$$

den Abbildungen auf den Komponenten $\mathcal{S}_k(\Gamma \backslash \mathcal{B}) = \coprod_{\omega \in \mathcal{S}_k(\mathcal{W})} \mathcal{N}_\omega(\Gamma \backslash \mathcal{B})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\omega(\Gamma \backslash \mathcal{B}) &\cong \Gamma \backslash \Gamma_0 / \Gamma_\omega \longrightarrow \Gamma \backslash \Gamma_0 / \Gamma_{\omega_i} \cong \mathcal{N}_{\omega_i}(\Gamma \backslash \mathcal{B}) \\ \Gamma \cdot g \cdot \Gamma_\omega &\longmapsto \Gamma \cdot g \cdot \Gamma_{\omega_i}. \end{aligned}$$

Die Abbildung Niveau liefert eine Projektion $\Gamma \backslash \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$ und die Faser über einem Simplex $\omega \in \mathcal{W}$ besteht aus $|\Gamma \backslash \Gamma_0|$ Kopien von ω , die von der Fixgruppe Γ_ω verklebt werden.

Lemma 2.32. *Sei $\Gamma(N) \subset \Gamma$ eine Kongruenzuntergruppe, $n := \deg(N)$. Sei \mathcal{W}_n der maximale Unterkomplex von \mathcal{W} auf den Vertices*

$$\mathcal{W}_n := \{[0, i_1, \dots, i_d] \mid 0 \leq i_1 \leq n-1, \quad i_j \leq i_{j+1} \leq i_j + n-1 \text{ für } j = 1, \dots, d-1\}.$$

Dann ist das Quotienten-Gebäude $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ durch die Faser über \mathcal{W}_n vollständig bestimmt. Das heißt in den Fasern der Simplizes $\omega \in \mathcal{W} - \mathcal{W}_n$ gibt es keine weiteren Verklebungen.

Beweis. Sei $\omega \in \mathcal{W}$ ein Simplex der Weylkammer, $\{s_1, \dots, s_m\}$ ein Repräsentantensystem von $\Gamma \backslash \Gamma_0$.

Dass zwei Simplizes vom Niveau ω verklebt werden, bedeutet es gibt ein $\gamma \in \Gamma_\omega$, sodass $\Gamma s_i \gamma = \Gamma s_j$. Dies ist gleichbedeutend mit $s_i \gamma s_j^{-1} \in \Gamma$. Da $\Gamma \supset \Gamma(N)$ durch Kongruenz modulo N definiert ist, gilt $s_i \gamma s_j^{-1} \in \Gamma$ genau dann wenn

$$\pi_N(s_i \gamma s_j^{-1}) \in \Gamma, \tag{*}$$

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

wobei π_N die Reduktion modulo N sei.

Nach Lemma 2.24 werden die Grade der Einträge in den Fixgruppen der Vertices, und damit auch die der Simplizes, außerhalb von \mathcal{W}_n nur noch größer als n . Da π_N ein Homomorphismus ist, verändert sich die Bedingung (*) nicht mehr. Das heißt für $\omega \in \mathcal{W} - \mathcal{W}_n$ gibt es ein $\omega_0 \in \mathcal{W}_n$, sodass

$$\Gamma \backslash \Gamma_0 / \Gamma_\omega \cong \Gamma \backslash \Gamma_0 / \Gamma_{\omega_0}.$$

□

Somit enthält die Faser über \mathcal{W}_n im Quotienten-Gebäude bereits alle Daten, die das Quotienten-Gebäude vollständig beschreiben. Weiterhin sind der Quotient $\Gamma \backslash \Gamma_0$ und die Fixgruppen Γ_ω endlich, sodass die Bahnen der Linksoperation von Γ_ω auf $\Gamma \backslash \Gamma_0$ algorithmisch in endlicher Zeit bestimmt werden können.

Korollar 2.33. *Der Quotient $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ kann algorithmisch in endlicher Zeit berechnet werden.*

Spitzen im Quotienten-Gebäude

Im 1-dimensionalen Fall, in dem das Gebäude \mathcal{B} ein Baum ist und die Weylkammer eine Halbgerade, ist die Faser über $\mathcal{W} - \mathcal{W}_n$ in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ eine disjunkte Vereinigung von Halbgeraden, deren Zusammenhangskomponenten als *Spitzen* bezeichnet werden. In höher-dimensionalen Gebäuden gibt es keine direkte Verallgemeinerung des Begriffs einer Spitze. Die entscheidende Eigenschaft einer Spitze ist, dass sie für jeden darin enthaltenden d -Simplex $[\sigma]$ eine unendliche Folge von paar-weise verschiedenen d -Simplizes

$$([\sigma_0] := [\sigma], [\sigma_1], [\sigma_2], \dots)$$

enthält, sodass $[\sigma_i]$ und $[\sigma_{i+1}]$ eine gemeinsame $(d-1)$ -Seite $[\tau]$ besitzen und $[\tau]$ im Quotienten-Gebäude $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ nur Seite von $[\sigma_i]$ und $[\sigma_{i+1}]$ ist.

Wir zeigen im Folgenden, dass im Fall $d = 2$ die Faser über $\mathcal{W} - \mathcal{W}_n$ in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ diese Eigenschaft ebenfalls erfüllt. Der Beweis kann auch auf $d > 2$ übertragen werden.

Auf den Simplizes der Weylkammer definieren wir die Halbordnung

$$\sigma_1 \preceq \sigma_2 :\Leftrightarrow \text{Fix}_{\Gamma_0}(\sigma_1) \subseteq \text{Fix}_{\Gamma_0}(\sigma_2).$$

Für die Standard-Vertices in der Weylkammer schreiben wir $[j, k] := [0, j, k]$ für $0 \leq j \leq k$ wie in Definition 2.15. Die 2-Simplizes der Weylkammer bezeichnen wir, falls diese in \mathcal{W} enthalten sind, mit

$$\begin{aligned} \omega_{jk}^+ &:= \{[j, k], [j, k+1], [j+1, k+1]\}, \\ \omega_{jk}^- &:= \{[j, k], [j+1, k], [j+1, k+1]\}. \end{aligned}$$

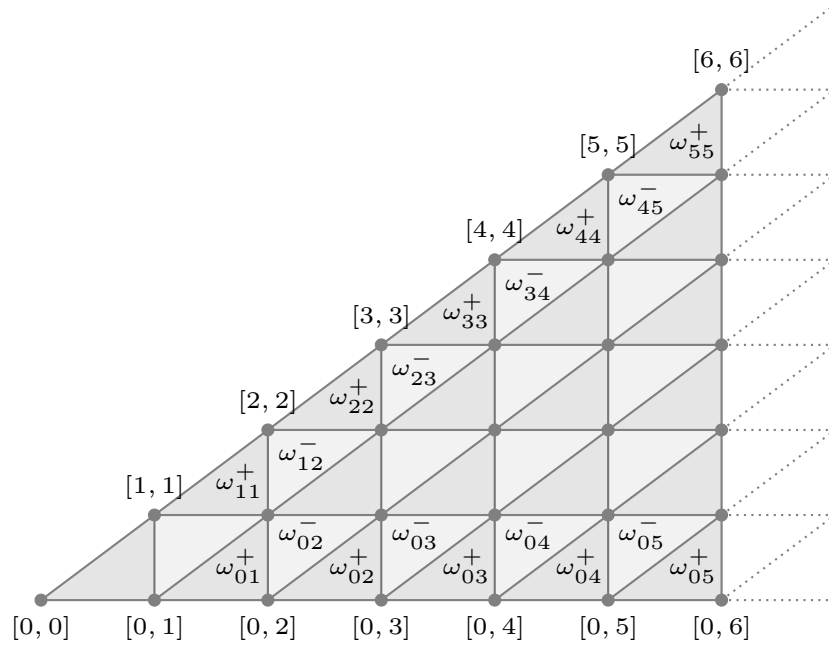


Abbildung 2.1: Teil der Weylkammer mit Standard-Simplizes.

Lemma 2.34. *Es gelten:*

1. Für $0 < k$:

$$\omega_{0,k}^+ \preccurlyeq \omega_{0,k+1}^- \quad \text{und} \quad \omega_{0,k}^- \preccurlyeq \omega_{0,k}^+.$$

2. Für $0 < k$:

$$\omega_{k,k}^+ \preccurlyeq \omega_{k,k+1}^- \quad \text{und} \quad \omega_{k-1,k}^- \preccurlyeq \omega_{k,k}^+.$$

3. Für $0 < j < k$:

$$\omega_{j,k}^+ \preccurlyeq \omega_{j,k+1}^- \quad \text{und} \quad \omega_{j,k}^- \preccurlyeq \omega_{j+1,k}^+.$$

Beweis. Mit Korollar 2.25 folgt:

$$\begin{aligned} \text{Fix}_{\Gamma_0}(\{[j, k], [j+1, k+1]\}) &= \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & j & k \\ -j & 0 & k-j \\ -k & j-k & 0 \end{bmatrix} \cap \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & j+1 & k+1 \\ -j-1 & 0 & k-j \\ -k-1 & j-k & 0 \end{bmatrix} \\ &= \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & j & k \\ -j-1 & 0 & k-j \\ -k-1 & j-k & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

$$\begin{aligned}
\text{Fix}_{\Gamma_0}(\omega_{jk}^+) &= \text{Fix}_{\Gamma_0}(\{[j, k], [j+1, k+1]\}) \cap \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & j & k+1 \\ -j & 0 & k+1-j \\ -k-1 & j-k-1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & j & k \\ -j-1 & 0 & k-j \\ -k-1 & j-k-1 & 0 \end{bmatrix}, \\
\text{Fix}_{\Gamma_0}(\omega_{jk}^-) &= \text{Fix}_{\Gamma_0}(\{[j, k], [j+1, k+1]\}) \cap \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & j+1 & k \\ -j-1 & 0 & k-j-1 \\ -k & j+1-k & 0 \end{bmatrix} \\
&= \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & j & k \\ -j-1 & 0 & k-j-1 \\ -k-1 & j-k-1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Es gilt $\Gamma_0[M] \subseteq \Gamma_0[M']$, falls für $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$, $M' = (m'_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ gilt

$$m_{ij}, m'_{ij} < 0 \text{ oder } m_{ij} \leq m'_{ij} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq 3.$$

Die Behauptungen können nun leicht verifiziert werden. \square

Lemma 2.35. *Seien $\llbracket \sigma \rrbracket \neq \llbracket \sigma' \rrbracket$ zwei 2-Simplizes in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$, sodass $\llbracket \tau \rrbracket$ eine gemeinsame 1-Seite ist. Gilt weiter*

$$\text{Niveau}(\llbracket \sigma \rrbracket), \text{Niveau}(\llbracket \sigma' \rrbracket) \in \mathcal{W} - \mathcal{W}_n \text{ und } \text{Niveau}(\llbracket \sigma \rrbracket) \preceq \text{Niveau}(\llbracket \sigma' \rrbracket),$$

dann gibt es keinen weiteren 2-Simplex in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$, der Seite $\llbracket \tau \rrbracket$ hat.

Beweis. Es sei $\omega := \text{Niveau}(\llbracket \sigma \rrbracket)$, $\omega' := \text{Niveau}(\llbracket \sigma' \rrbracket)$ und $\omega_0 := \text{Niveau}(\llbracket \tau \rrbracket)$. Nach vorherigen Überlegungen sind die Seiten-Abbildungen, die 2-Simplizes in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ die Kante $\llbracket \tau \rrbracket$ zuordnen, die kanonischen Projektionen

$$\Gamma \backslash \Gamma_0 / \Gamma_\omega \longrightarrow \Gamma \backslash \Gamma_0 / \Gamma_{\omega_0}, \quad \Gamma \backslash \Gamma_0 / \Gamma_{\omega'} \longrightarrow \Gamma \backslash \Gamma_0 / \Gamma_{\omega_0}.$$

Da in der Weylkammer jeder 1-Simplex höchstens zwei benachbarte 2-Simplizes hat, werden auf diese Weise alle benachbarten 2-Simplizes von $\llbracket \tau \rrbracket$ beschrieben. Da nach Voraussetzung gilt $\omega, \omega', \omega_0 \in \mathcal{W} - \mathcal{W}_n$, sind diese Abbildungen nach dem Beweis von Lemma 2.32 Bijektionen. $\llbracket \tau \rrbracket$ hat also genau zwei benachbarte 2-Simplizes, $\llbracket \sigma \rrbracket$ und $\llbracket \sigma' \rrbracket$. \square

Satz 2.36. *Für $d = 2$ und $\llbracket \sigma \rrbracket$ ein 2-Simplex in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ mit $\text{Niveau}(\llbracket \sigma \rrbracket) \in \mathcal{W} - \mathcal{W}_n$ gibt es eine Folge*

$$(\llbracket \sigma_0 \rrbracket := \llbracket \sigma \rrbracket, \llbracket \sigma_1 \rrbracket, \llbracket \sigma_2 \rrbracket, \dots)$$

von paar-weise verschiedenen 2-Simplizes in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$, sodass $\llbracket \sigma_i \rrbracket$ und $\llbracket \sigma_{i+1} \rrbracket$ eine gemeinsame 1-Seite $\llbracket \tau \rrbracket$ besitzen und $\llbracket \tau \rrbracket$ im Quotienten-Gebäude $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ nur Seite von $\llbracket \sigma_i \rrbracket$ und $\llbracket \sigma_{i+1} \rrbracket$ ist.

2.4 Repräsentanten in der Weylkammer im 2-dimensionalen Fall

Beweis. Sei $[\![\sigma]\!]$ ein 2-Simplex in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ mit $\text{Niveau}([\![\sigma]\!]) =: \omega \in \mathcal{W} - \mathcal{W}_n$. Nach vorherigem Lemma 2.35 genügt es eine unendliche Folge $(\omega, \omega_1, \omega_2, \dots)$ benachbarter paar-weise verschiedener Simplizes in der Weylkammer anzugeben mit $\omega \preccurlyeq \omega_1 \preccurlyeq \omega_2 \preccurlyeq \dots$ und $\omega_i \in \mathcal{W} - \mathcal{W}_n$ für $i \geq 1$. Wir nehmen an $\omega = \omega_{jk}^+$ für $0 \leq j \leq k$ und verwenden Lemma 2.34. Für $\omega = \omega_{jk}^-$ folgt die Aussage analog. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. Falls $0 = j < k$, dann gilt

$$\omega_{0,k}^+ \preccurlyeq \omega_{0,k+1}^- \preccurlyeq \omega_{0,k+1}^+ \preccurlyeq \omega_{0,k+2}^- \preccurlyeq \dots$$

2. Falls $0 < j = k$, dann gilt

$$\omega_{k,k}^+ \preccurlyeq \omega_{k,k+1}^- \preccurlyeq \omega_{k+1,k+1}^+ \preccurlyeq \omega_{k+1,k+2}^- \preccurlyeq \dots$$

3. Falls $0 < j < k$, dann gilt

$$\omega_{j,k}^+ \preccurlyeq \omega_{j,k+1}^- \preccurlyeq \omega_{j+1,k+1}^+ \preccurlyeq \omega_{j+1,k+2}^- \preccurlyeq \dots$$

□

2.4 Repräsentanten in der Weylkammer im 2-dimensionalen Fall

Im folgenden geben wir Repräsentanten für die Simplizes in der Weylkammer an und beschreiben Algorithmen um beliebige Matrizen in $\text{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$ auf diese Repräsentanten zu reduzieren. Alle Überlegungen lassen sich auf beliebige Dimensionen anwenden, jedoch führen wir diese nur für den 2-dimensionalen Fall aus.

Wir realisieren die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_3 der Permutationen auf der Menge $\{1, 2, 3\}$ als Matrixgruppe via

$$\mathfrak{s}_{(s_1, s_2, s_3)} := \begin{pmatrix} - & e_{\sigma(1)} & - \\ - & e_{\sigma(2)} & - \\ - & e_{\sigma(3)} & - \end{pmatrix},$$

wobei $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ die Permutation sei mit $\sigma(i) = s_i$ für $i = 1, 2, 3$ und e_1, e_2, e_3 die kanonische Basis vom Zeilenraum \mathcal{K}_∞^3 . Im Folgenden unterscheiden wir nicht zwischen Permutationen und Permutationsmatrizen.

Wir fassen die Weylkammer als den Quotienten $\Gamma_0 \backslash \mathcal{B}$ auf und für eine Matrix $M \in \text{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)$, $k \in \{0, 1, 2\}$ und t einen Typ von k -Simplizes schreiben wir

$$[\![M]\!]_k^t := \Gamma_0 \cdot M \cdot \mathcal{P}_t \cdot Z(\mathcal{K}_\infty)$$

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

für den durch M repräsentierten orientierten k -Simplex vom Typ t . Weiter schreiben wir $\llbracket M \rrbracket_0 := \llbracket M \rrbracket_0^{(3)}$ und $\llbracket M \rrbracket_2 := \llbracket M \rrbracket_2^{(1,1,1)}$.

Wie zuvor normalisieren wir die Standard-Vertices an der ersten Koordinate und schreiben

$$[j, k] := [0, j, k] = [\langle e_1, \pi_\infty^j e_2, \pi_\infty^k e_3 \rangle_{\mathcal{O}_\infty}].$$

Proposition 2.37. *Ein Repräsentantensystem von $\Gamma_0 \backslash \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \cdot \mathrm{Z}(\mathcal{K}_\infty)$ ist gegeben durch*

$$\left\{ \llbracket \Lambda_{jk} \rrbracket_0 : \Lambda_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \pi_\infty^j & \\ & & \pi_\infty^k \end{pmatrix}, 0 \leq j \leq k \right\}.$$

Insbesondere kann jede Matrix $M \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)$ zerlegt werden in

$$M = g \cdot \Lambda_{jk} \cdot h$$

für ein $g \in \Gamma_0, h \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \cdot \mathrm{Z}(\mathcal{K}_\infty)$.

Beweis. Diese Zerlegung ist eine direkte Verallgemeinerung der Zerlegung im 2-dimensionalen Fall, wie sie in Serres Trees ([Ser80]) und explizit in [But07] Lemma 1.18 und Satz 1.19 gezeigt wurde. Der Beweis ist im wesentlichen Gauß-Elimination, wobei wir nur Zeilenoperationen mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_q[T]$ (Linksoperation von Γ_0), Spaltenoperationen mit Koeffizienten in \mathcal{O}_∞ (Rechtsoperation von $\mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty)$) sowie Skalarmultiplikation mit Einheiten in \mathcal{K}_∞ (Rechtsoperation von $\mathrm{Z}(\mathcal{K}_\infty)$) zulassen.

Im Folgenden schreiben wir kurz $M \sim N$ für

$$\Gamma_0 \cdot M \cdot \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \cdot \mathrm{Z}(\mathcal{K}_\infty) = \Gamma_0 \cdot N \cdot \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \cdot \mathrm{Z}(\mathcal{K}_\infty).$$

Sei nun $M \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)$ wir beschreiben eine Reihe von Umformungen und referenzieren die Einträge der umgeformten Matrix in jedem Schritt mit $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$.

1. Schritt: Elimination der Elemente unterhalb der Diagonalen.

Durch Spaltenvertauschen, das heißt Multiplikation mit einer Permutationsmatrix von rechts, kann in jeder Zeile erreicht werden, dass der Eintrag, der nicht Null ist und dessen Bewertung kleiner als alle Einträge links der Diagonalen ist, auf der Diagonalen steht. Schließlich können die Einträge links der Diagonalen eliminiert werden, indem wir das $\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)$ -fache der i -ten Spalte auf die j -te Spalte addieren. Nach Konstruktion gilt

$$\nu_\infty\left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right) = \nu_\infty(a_{ij}) - \nu_\infty(a_{ii}) \geq 0.$$

2.4 Repräsentanten in der Weylkammer im 2-dimensionalen Fall

Somit entspricht diese Spaltenumformung einer Rechtsmultiplikation einer Matrix aus $\text{GL}_3(\mathcal{O}_\infty)$. Auf diese Weise erhalten wir

$$M \sim \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Normalisieren der Einträge auf der Diagonalen.

Da die Einträge auf der Diagonalen Einheiten in \mathcal{K}_∞ sind, können wir diese schreiben als

$$a_{ii} = \pi_\infty^{\nu_\infty(a_{ii})} u_{ii}$$

mit $u_{ii} \in \mathcal{O}_\infty^\times$. Multiplikation von links mit der Diagonalmatrix $\text{diag}(u_{11}, u_{22}, u_{33})^{-1} \in \text{GL}_3(\mathcal{O}_\infty)$ sowie der Einheit $\pi_\infty^{-v(a_{33})} \in \mathbb{Z}(\mathcal{K}_\infty)$ ergibt

$$M \sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{b_1} & * & * \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

3. Schritt: Reduktion der Einträge oberhalb der Diagonalen.

Wir nehmen an, die Matrix M ist wie in (1) reduziert. Es sei $b_3 := 0$. Die Einträge a_{ij} über der Diagonalen ($i > j$) können abhängig von den Diagonaleinträgen a_{ii} und a_{jj} reduziert werden. Sei

$$a_{ij} = \pi_\infty^{b_j} \cdot P + c + \pi_\infty^{b_i} \cdot c'$$

mit $P \in \mathbb{F}_q[T]$, $b_j < \nu_\infty(c) < b_i$ und $0 \leq \nu_\infty(c')$. Durch Addieren des $(-P)$ -fachen der j -ten Zeile auf die i -te Zeile und Addieren des $(-c')$ -fachen der i -ten Spalte auf die j -te Spalte kann der Eintrag a_{ij} auf das Element c reduziert werden. Falls die Einträge rechts des j -ten Diagonaleintrags bereits eliminiert waren, verändern sich außer dem Eintrag a_{ij} gegebenenfalls nur Einträge über der Diagonalen oberhalb der i -ten Zeile.

Zum Beispiel für den Eintrag a_{12} führen wir folgende Umformungen durch (wobei in der späteren Anwendung der Eintrag a_{23} stets Null sein wird):

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-c'} \quad \downarrow + \\ \left(\begin{array}{ccc} \pi_\infty^{b_1} & \pi_\infty^{b_2} \cdot P + c + \pi_\infty^{b_1} \cdot c' & * \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow[-P]{+} \sim \left(\begin{array}{ccc} \pi_\infty^{b_1} & c & * \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{array}$$

4. Schritt: Reduktion der Bewertungen der Diagonalelemente.

Wir wollen nun die Differenzen $b_i - b_j$ schrittweise echt verringern. Abwechselndes Anwenden der Reduktion der Diagonalelemente und der Reduktion der Einträge

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

rechts neben der Diagonalen führt schließlich dazu, dass der Eintrag a_{ij} auf Null reduziert werden kann.

4.1. Schritt: Reduktion der Differenz $b_2 - b_3 = b_2 - 0$.

Der Eintrag a_{23} sie wie in Schritt 3 beschrieben auf c reduziert. Wir führen folgende Umformungen durch, die [But07] genau entsprechen:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} + -\pi_\infty^{b_2} c^{-1} \\ \downarrow \overline{\hspace{1cm}} \end{array} \\
 \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \sim \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & c \\ 0 & -\pi_\infty^{b_2} c^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \uparrow \\ \leftarrow \uparrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & -\pi_\infty^{b_2} c^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot c^{-1} \\
 & \sim \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & -\pi_\infty^{b_2} c^{-2} & c^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$

Normalisieren wir nun die Diagonaleinträge wie in Schritt 2, dann verändert sich der Diagonaleintrag in der zweiten Zeile zu $\pi_\infty^{b'_2}$ mit $b'_2 = b_2 - 2\nu_\infty(c)$. b_2 wird also in jedem Schritt echt verringert.

4.2. Schritt: Reduktion der Differenzen $b_1 - b_2$ und $b_1 - b_3$.

Wir nehmen an, M ist bereits wie folgt reduziert:

$$M \sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{b_1} & c & d \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Einträge c und d mit Schritt 3 reduziert wurden, das heißt es gelten $b_2 < \nu_\infty(c)$ und $\deg(c) < b_1$ sowie $0 = b_3 < \nu_\infty(d)$ und $\deg(d) < b_1$.

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor, jedoch kann man leicht erkennen, dass es sich im Wesentlichen um jeweils dieselben Rechenschritte handelt.

1. Fall: $0 = b_3 < \nu_\infty(d) < \nu_\infty(c)$.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} + \quad -\pi_\infty^{b_1} d^{-1} \\ \downarrow \overline{\hspace{1cm}} \end{array} \quad \begin{array}{c} + \quad -cd^{-1} \\ \downarrow \overline{\hspace{1cm}} \end{array} \\
 \begin{pmatrix} \pi_\infty^{b_1} & c & d \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \sim \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & 0 \\ -\pi_\infty^{b_1} d^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & 0 \\ -\pi_\infty^{b_1} d^{-1} & -cd^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \uparrow \\ \leftarrow \uparrow \end{array} \\
 & \sim \begin{pmatrix} -\pi_\infty^{b_1} d^{-1} & -cd^{-1} & 1 \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \cdot d^{-1} \sim \begin{pmatrix} -\pi_\infty^{b_1} d^{-2} & -cd^{-2} & d^{-1} \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} d^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$

2.4 Repräsentanten in der Weylkammer im 2-dimensionalen Fall

Nach Anwenden von Schritt 2 erhalten wir $b'_1 = b_1 - 2\nu_\infty(d)$ und $b'_2 = b_2 - \nu_\infty(d)$.

2. Fall: $b_2 < \nu_\infty(c) \leq \nu_\infty(d)$.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \pi_\infty^{b_1} & c & d \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \sim \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ -\pi_\infty^{b_1+b_2}c^{-1} & \pi_\infty^{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -\pi_\infty^{b_1+b_2}c^{-1} & \pi_\infty^{b_2} & -\pi_\infty^{b_2}c^{-1}d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \\
 & \sim \begin{pmatrix} -\pi_\infty^{b_1+b_2}c^{-1} & \pi_\infty^{b_2} & -\pi_\infty^{b_2}c^{-1}d \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nach Anwenden von Schritt 2 erhalten wir $b'_1 = b_1 + b_2 - \nu_\infty(c)$ und $b'_2 = \nu_\infty(c)$.

5. Schritt: Umordnen der Diagonalelemente

Wir haben in Schritt 4 die Matrix M auf die Form

$$M \sim \begin{pmatrix} \pi_\infty^{b_1} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gebracht. Sei $\alpha := \min\{b_1, b_2, 0\}$. Dann ist $M \sim M \cdot \alpha^{-1} = \text{diag}(\pi_\infty^{c_1}, \pi_\infty^{c_2}, \pi_\infty^{c_3})$ eine Diagonalmatrix mit $c_i \leq 0$ und $c_j = 0$ für ein j . Sei $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ die Permutation, die das Tupel (c_1, c_2, c_3) so ordnet, dass

$$\sigma.(c_1, c_2, c_3) = (0, j, k)$$

mit $0 \leq j \leq k$. Sei \mathfrak{s}_σ die zu σ gehörende Permutationsmatrix. Dann gilt

$$M \sim \mathfrak{s}_\sigma M \mathfrak{s}_\sigma^t = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \pi_\infty^j & \\ & & \pi_\infty^k \end{pmatrix} = \Lambda_{jk}.$$

□

Dieser Beweis liefert einen Algorithmus zur Berechnung der Zerlegung für beliebige Matrizen $M \in \text{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)$. Wir möchten die wesentlichen Schritte noch einmal zusammenfassend als Algorithmus formulieren. Dazu verwenden wir folgende Bezeichnungen:

- **NORMALIZEDIAGONAL:** Die Operation in Schritt 2.
- **REDUCEUPPERENTRY(i, j):** Die Operation in Schritt 3 für das Element a_{ij} .
- **REDUCEDIAGONALENTRY(i):** Die Operation in Schritt 4 um die Differenz $b_i - b_{i+1}$ zu verringern.

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

Im Algorithmus führen wir die Umformungen direkt an der Matrix aus, das heißt wir berechnen

$$g' \cdot M \cdot h' = \Lambda_{jk}.$$

Die gesuchten Matrizen erhalten wir dann durch Invertieren.

Algorithmus 2.38 (Reduktion einer Matrix auf ihren Vertex).

Eingabe: Eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)$.

Ausgabe: $g \in \Gamma_0, h \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \cdot Z(\mathcal{K}_\infty), j, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq k$, sodass

$$M = g \cdot \Lambda_{jk} \cdot h.$$

1. Für $i = d + 1, \dots, 2$:
 - a) Finde $1 \leq k \leq i$ sodass $\nu_\infty(a_{ik}) \leq \nu_\infty(a_{ij})$ für alle $1 \leq j \leq i$ mit $j \neq k$.
 - b) Tausche die i -te und k -te Spalte.
 - c) Eliminiere die Einträge $a_{i,1}, \dots, a_{i,i-1}$ durch Spaltenumformungen.
2. Für $i = d, \dots, 1$:
 - a) Für $j = d + 1, \dots, i + 1$ führe $\mathrm{REDUCEUPPERENTRY}(i, j)$ aus.
 - b) Solange die (i, j) -ten Einträge für $j = i + 1, \dots, d + 1$ nicht alle Null sind:
 - i. Führe $\mathrm{REDUCEDIAGONALENTRY}(i)$ aus.
 - ii. Führe $\mathrm{NORMALIZEDIAGONAL}$ aus.
 - iii. Für $j = d + 1, \dots, i + 1$ führe $\mathrm{REDUCEUPPERENTRY}(i, j)$ aus.
3. Sortiere die Einträge auf der Diagonalen wie in Proposition 2.37 Schritt 5.

Wir wollen ausgehend von dem Repräsentantensystem der Vertices Repräsentantensysteme der übrigen Simplizes berechnen. Dazu betrachten wir die kanonische Projektion, die wir als Ursprung bezeichnen:

Definition 2.39. Sei $k \in \{1, 2\}$, t ein Typ von k -Simplizes. Dann heißt die kanonische Projektion

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_{k,0}^t : \Gamma_0 \backslash \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \mathcal{P}_t \cdot Z(\mathcal{K}_\infty) &\longrightarrow \Gamma_0 \backslash \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \cdot Z(\mathcal{K}_\infty) \\ \llbracket g \rrbracket_k^t &\longmapsto \llbracket g \rrbracket_0 \end{aligned}$$

die *Ursprung-Abbildung* von k -Simplizes vom Typ t .

Da die Zuordnungen der Doppelnebenklassen zu den Simplizes in der Weylkammer durch

$$\begin{aligned} \Gamma_0 \backslash \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \mathcal{P}_t \cdot Z(\mathcal{K}_\infty) &\longleftrightarrow \widehat{\mathcal{S}}_{k,t}(\Gamma_0 \backslash \widehat{\mathcal{B}}) \\ \llbracket g \rrbracket_k^t &\longmapsto \Gamma_0 g \cdot \mathcal{C}_{k,t} \end{aligned}$$

gegeben sind, und die Standardsimplizes $\mathcal{C}_{k,t}$ den durch die Identitätsmatrix repräsentierten Standardvertex \mathcal{C}_0 als ausgezeichneten Vertex besitzen, entspricht die Ursprung-Abbildung der Abbildung eines Simplex auf seinen ausgezeichneten

2.4 Repräsentanten in der Weylkammer im 2-dimensionalen Fall

Vertex. Das Urbild der Ursprung-Abbildung beschreibt also die Simplizes, die einen bestimmten ausgezeichneten Vertex haben.

Es gilt

$$(\mathfrak{o}_{k,0}^t)^{-1}(\llbracket g \rrbracket_0) = \{\llbracket h \rrbracket_k^t \mid \llbracket h \rrbracket_0 = \llbracket g \rrbracket_0\},$$

das heißt das Urbild besteht aus den Klassen $\Gamma_0 \cdot h \cdot \mathcal{P}_t \cdot Z(\mathcal{K}_\infty)$, für die gilt

$$\Gamma_0 \cdot h \cdot \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \cdot Z(\mathcal{K}_\infty) = \Gamma_0 \cdot g \cdot \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \cdot Z(\mathcal{K}_\infty).$$

Dies sind gerade die Γ_0 -Bahnen bezüglich links-Multiplikation von

$$g \cdot (\mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \cdot Z(\mathcal{K}_\infty)) / (\mathcal{P}_t \cdot Z(\mathcal{K}_\infty)) \cong g \cdot \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) / \mathcal{P}_t.$$

Es gilt

$$\llbracket g \rrbracket_0 = \llbracket \Lambda_{jk} \rrbracket_0 = \llbracket \Lambda_{jk} \cdot \pi_\infty^{-k} \rrbracket_0 = \left\llbracket \begin{pmatrix} \pi_\infty^{-k} & & \\ & \pi_\infty^{j-k} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\llbracket_0 = \left\llbracket \begin{pmatrix} T^k & & \\ & T^{k-j} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\llbracket_0.$$

Ist \mathcal{R} ein Repräsentantensystem von $\mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty)/\mathcal{P}_t$, dann gilt: Zwei Γ_0 -Bahnen schneiden sich, falls es ein $\gamma \in \Gamma_0$ gibt mit $\gamma g r_1 = g r_2 \Leftrightarrow \gamma = g r_2 r_1^{-1} g^{-1}$, mit $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$.

In Beispiel 1.20 haben wir ein Repräsentantensystem von $\mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\infty)/\mathcal{I} \cong \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)/\mathrm{B}_3(\mathbb{F}_q)$ berechnet. Mit dessen Hilfe erhalten wir:

Proposition 2.40. *Sei $g \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)$ mit $\llbracket g \rrbracket_0 = \llbracket \Lambda_{jk} \rrbracket_0$. Dann gilt*

$$(\mathfrak{o}_{2,0})^{-1}(\llbracket g \rrbracket_0) = \begin{cases} \{\llbracket g \rrbracket_2\} & j = k = 0 \\ \{\llbracket g \rrbracket_2, \llbracket g \cdot \mathfrak{s}_{(1,3,2)} \rrbracket_2, \llbracket g \cdot \mathfrak{s}_{(2,3,1)} \rrbracket_2\} & j = 0, k > 0 \\ \{\llbracket g \rrbracket_2, \llbracket g \cdot \mathfrak{s}_{(2,1,3)} \rrbracket_2, \llbracket g \cdot \mathfrak{s}_{(3,1,2)} \rrbracket_2\} & j = k > 0 \\ \{\llbracket g \cdot \mathfrak{s} \rrbracket_2 \mid \mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_3\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass sich die Repräsentanten aus Beispiel 1.20 von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)/\mathrm{B}_3(\mathbb{F}_q)$ schreiben lassen als $u \cdot \mathfrak{s}$ mit

$$u = \begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_3(\mathbb{F}_q)$$

einer unipotenten oberen Dreiecksmatrix über \mathbb{F}_q und $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_3$ einer Permutationsmatrix. Wir berechnen nun wie zuvor bemerkt die Terme $g r_2 r_1^{-1} g^{-1}$.

Falls $r_1 = u_1 \cdot \mathfrak{s}$ und $r_2 = u_2 \cdot \mathfrak{s}$, dann gilt

$$r_2 r_1^{-1} = u_2 u_1^{-1} =: u \in \mathrm{U}_3(\mathbb{F}_q).$$

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

Es folgt

$$\begin{aligned} gr_2 r_1^{-1} g^{-1} &= gug^{-1} = \begin{pmatrix} T^k & & \\ & T^{k-j} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-k} & & \\ & T^{j-k} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & sT^j & tT^k \\ 0 & 1 & uT^{k-j} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0 \end{aligned}$$

für alle $0 \leq j \leq k$. Somit gibt es höchstens sechs Γ_0 -Bahnen, die von den Elementen der \mathfrak{S}_3 repräsentiert werden. Zunächst ist

$$g \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 T^j & c_3 T^k \\ c_4 T^{-j} & c_5 & c_6 T^{k-j} \\ c_7 T^{-k} & c_8 T^{j-k} & c_9 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Die Terme $g\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1^{-1}g^{-1}$ mit $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \in \mathfrak{S}_3$ sind gerade diese Matrix, wobei in jeder Zeile alle außer einem Eintrag 0 sind. Falls $\mathfrak{s}_1 \neq \mathfrak{s}_2$, dann taucht immer einer der Terme im unteren Dreieck auf. Wir betrachten mehrere Fälle:

Falls $j = k = 0$, dann ist $g\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1^{-1}g^{-1} \in \Gamma_0$ für alle $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \in \mathfrak{S}_3$. Das heißt es gibt nur eine Γ_0 -Bahn.

Falls $0 < j < k$, dann ist $g\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1^{-1}g^{-1} \notin \Gamma_0$ für alle $\mathfrak{s}_1 \neq \mathfrak{s}_2 \in \mathfrak{S}_3$, also gibt es sechs Γ_0 -Bahnen.

Sei $\mathfrak{t} \in \mathfrak{S}_3$ die Permutation, die zu $\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1^{-1}$ gehört.

Falls $0 = j < k$, dann ist $g\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1^{-1}g^{-1} \in \Gamma_0$ genau dann, wenn in (*) der Eintrag $c_4 T^{-j}$ ungleich Null ist und die übrigen Einträge unter der Diagonalen gleich Null sind. Das heißt falls $\mathfrak{t}(2) = 1$, $\mathfrak{t}(3) = 3$ und damit $\mathfrak{t}(1) = 1$ und solchen Paaren $\{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2\}$ entsprechen Bahnen in $\langle \mathfrak{t} \rangle \backslash \mathfrak{S}_3$. Diese sind

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_1 &= \mathfrak{s}_{(3,1,2)}, \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_{(1,3,2)}, \text{ oder} \\ \mathfrak{s}_1 &= \mathfrak{s}_{(2,1,3)}, \mathfrak{s}_2 = \text{id}, \text{ oder} \\ \mathfrak{s}_1 &= \mathfrak{s}_{(3,2,1)}, \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_{(2,3,1)}. \end{aligned}$$

Es gibt also drei Γ_0 -Bahnen, die wir durch $\{\text{id}, \mathfrak{s}_{(1,3,2)}, \mathfrak{s}_{(2,3,1)}\}$ repräsentieren.

Im Fall $0 < j = k$ darf in (*) der Eintrag $c_8 T^{j-k}$ ungleich Null sein und wir erhalten $\mathfrak{t}(3) = 2$, $\mathfrak{t}(2) = 3$ und $\mathfrak{t}(1) = 1$ als Bedingung. Dies gilt genau für

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_1 &= \mathfrak{s}_{(2,3,1)}, \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_{(2,1,3)}, \text{ oder} \\ \mathfrak{s}_1 &= \mathfrak{s}_{(1,3,2)}, \mathfrak{s}_2 = \text{id}, \text{ oder} \\ \mathfrak{s}_1 &= \mathfrak{s}_{(3,2,1)}, \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_{(3,1,2)}. \end{aligned}$$

2.4 Repräsentanten in der Weylkammer im 2-dimensionalen Fall

Es gibt wiederum drei Γ_0 -Bahnen, die wir durch $\{\text{id}, \mathfrak{s}_{(2,1,3)}, \mathfrak{s}_{(3,1,2)}\}$ repräsentieren. \square

Korollar 2.41. *Ein Repräsentantensystem von $\Gamma_0 \backslash \text{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty)$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} & \{[\Lambda_{00}]_2\} \cup \left\{ [\Lambda_{0k}]_2, [\Lambda_{0k} \cdot \mathfrak{s}_{(1,3,2)}]_2, [\Lambda_{0k} \cdot \mathfrak{s}_{(2,3,1)}]_2 \mid k > 0 \right\} \\ & \cup \left\{ [\Lambda_{kk}]_2, [\Lambda_{kk} \cdot \mathfrak{s}_{(2,1,3)}]_2, [\Lambda_{kk} \cdot \mathfrak{s}_{(3,1,2)}]_2 \mid k > 0 \right\} \\ & \cup \{[\Lambda_{jk} \cdot \mathfrak{s}]_2 \mid \mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_3, 0 < j < k\}. \end{aligned}$$

Algorithmus 2.42 (Reduktion einer Matrix auf ihren 2-Simplex).

Eingabe: Eine Matrix $M \in \text{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)$.

Ausgabe: $g \in \Gamma_0, \iota \in \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty), \mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_3, j, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq k$, sodass

$$M = g \cdot \Lambda_{jk} \mathfrak{s} \cdot \iota.$$

1. Berechne aus Algorithmus 2.38 die Zerlegung $M = g' \cdot \Lambda_{jk} \cdot h$ mit $g' \in \Gamma_0$, $h \in \text{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty)$.
2. Suche ein Element $u \cdot \mathfrak{s}' \in \mathcal{R}$ aus dem Repräsentantensystem von $\text{GL}_3(\mathcal{O}_\infty) / \mathcal{I}$ wie in Beispiel 1.20 explizit angegeben, sodass $h^{-1} \cdot u \cdot \mathfrak{s}' \in \mathcal{I}$.
3. Definiere $\iota := (\mathfrak{s}')^{-1} \cdot u^{-1} \cdot h$, $g'' := g' \cdot \Lambda_{jk} u \Lambda_{jk}^{-1}$.
4. Falls $\Lambda_{jk} \mathfrak{s}'$ nicht im Repräsentantensystem aus Korollar 2.41 liegt, wähle \mathfrak{s} so, dass $\Lambda_{jk} \mathfrak{s}$ im Repräsentantensystem liegt und sich die zugehörigen Γ_0 -Bahnen wie im Beweis von Proposition 2.40 angeben schneiden. Sonst setze $\mathfrak{s} := \mathfrak{s}'$.
5. Definiere $g := g'' \Lambda_{jk} \mathfrak{s}' \mathfrak{s}^{-1} \Lambda_{jk}^{-1}$ und gebe $g, \iota, \mathfrak{s}, j, k$ aus.

Beweis. In Schritt 3 gilt

$$g'' \Lambda_{jk} \mathfrak{s}' \iota' = g \cdot \Lambda_{jk} u \Lambda_{jk}^{-1} \Lambda_{jk} \mathfrak{s}' (\mathfrak{s}')^{-1} \cdot u^{-1} \cdot h = M.$$

Wie im Beweis von Proposition 2.40 gezeigt, liegt $\Lambda_{jk} u \Lambda_{jk}^{-1}$ in Γ_0 . In Schritt 5 gilt

$$g \cdot \Lambda_{jk} \mathfrak{s} \cdot \iota = g'' \Lambda_{jk} \mathfrak{s}' \mathfrak{s}^{-1} \Lambda_{jk}^{-1} \Lambda_{jk} \mathfrak{s} \cdot \iota = g'' \Lambda_{jk} \mathfrak{s}' \iota' = M.$$

Ebenfalls aus dem Beweis von Proposition 2.40 folgt, dass $\Lambda_{jk} \mathfrak{s}' \mathfrak{s}^{-1} \Lambda_{jk}^{-1} \in \Gamma_0$. \square

Da sich die Fixgruppe der nicht-orientierten 2-Simplizes nur um das Erzeugnis der Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unterscheidet, können wir nun ein Repräsentantensystem der nicht-orientierten 2-Simplizes angeben. Dazu bezeichnen wir mit

$$[g]_2^* := \Gamma_0 \cdot g \cdot \langle R \rangle \cdot \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty)$$

als den von g repräsentierten nicht-orientierten 2-Simplex.

2 Das Bruhat-Tits-Gebäude

Proposition 2.43. *Ein Repräsentantensystem von $\Gamma_0 \backslash \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \langle R \rangle \cdot \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty)$ ist*

$$\{[\Lambda_{jk}]_2^*, [\Lambda_{jk} \cdot S]_2^* \mid 0 \leq j \leq k\}$$

mit

$$S := \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist weiter für $M \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty)$, $g \in \Gamma_0$, $\iota \in \mathcal{I}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j \leq k$

$$M = g \cdot \Lambda_{jk} \mathfrak{s} \cdot \iota$$

die Zerlegung für orientierte 2-Simplizes aus Proposition 2.40, dann gibt es $\alpha \in \{0, 1, 2\}$, $\beta \in \{0, 1\}$, $\epsilon \in \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty)$ mit

$$M = g \cdot \Lambda_{jk} S^\beta \cdot R^\alpha \cdot \iota \cdot \epsilon.$$

Beweis. Sei $M = g \cdot \Lambda_{jk} \mathfrak{s} \cdot \iota$ die Zerlegung aus Proposition 2.40.

Da die Matrix R bis auf π_∞ eine Permutationsmatrix ist, die zu einem 3-Zykel gehört, lässt sich \mathfrak{s} bis auf π_∞ in die Matrix S überführen, da S bis auf π_∞ zu einer Transposition gehört und die Gruppe \mathfrak{S}_3 sich von einem 3-Zykel und einer Transposition erzeugt wird.

Durch direktes Nachrechnen erhält man stets gegebenenfalls nach Multiplizieren mit einer Einheit $\epsilon \in \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty)$ einen Repräsentanten aus dem angegebenen Repräsentantensystem. Die Vertreter in Proposition 2.40 wurden hierzu passend gewählt:

$$\begin{aligned} \Lambda_{jk} \cdot \mathfrak{s}_{(1,3,2)} \cdot R &= \Lambda_{j,k-1} \cdot S \cdot \pi_\infty, \\ \Lambda_{jk} \cdot \mathfrak{s}_{(2,3,1)} \cdot R^2 &= \Lambda_{j,k-1} \cdot \pi_\infty, \\ \Lambda_{jk} \cdot \mathfrak{s}_{(2,1,3)} &= \Lambda_{j-1,k-1} \cdot S \cdot \pi_\infty, \\ \Lambda_{jk} \cdot \mathfrak{s}_{(3,1,2)} \cdot R &= \Lambda_{j-1,k-1} \cdot \pi_\infty, \\ \Lambda_{jk} \cdot \mathfrak{s}_{(3,2,1)} \cdot R^2 &= \Lambda_{j-1,k-2} \cdot S \cdot \pi_\infty^2. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Zeilen sind Repräsentanten mit $0 = j < k$ und die nächsten beiden Zeilen $0 < j = k$. Der letzte Repräsentant tritt nur im Fall $0 < j < k$ auf, das heißt insbesondere falls $k \geq 2$. \square

Wir könnten nun mit ähnlichen Überlegungen Repräsentanten für 1-Simplizes angeben. Diese entsprechen den Doppelnebenklassen

$$\Gamma_0 \backslash \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \mathcal{P}_t \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty)$$

2.4 Repräsentanten in der Weylkammer im 2-dimensionalen Fall

mit $t = (1, 2)$ oder $t = (2, 1)$. Stattdessen verwenden wir

$$\Gamma_0 \backslash \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \mathcal{P}_t \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty) \cong (\Gamma_0 \backslash \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty)) / \mathcal{P}_t \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty).$$

Aus dem Beweis von Proposition 2.40 ist ersichtlich, dass es genügt die Operation von $\langle \mathfrak{s}_{(2,1,3)} \rangle$ im Fall $t = (1, 2)$ bzw. $\langle \mathfrak{s}_{(1,3,2)} \rangle$ im Fall $t = (2, 1)$ von rechts auf dem Repräsentantensystem der 2-Simplizes zu betrachten, denn diese Untergruppen von \mathfrak{S}_3 entsprechen gerade $\mathcal{P}_t \cap \mathfrak{S}_3$. Wir erhalten:

Korollar 2.44. *Ein Repräsentantensystem von $\Gamma_0 \backslash \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \mathcal{P}_{(1,2)} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty)$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} & \left\{ \llbracket \Lambda_{00} \rrbracket_1^{(1,2)} \right\} \cup \left\{ \llbracket \Lambda_{0k} \rrbracket_1^{(1,2)}, \llbracket \Lambda_{0k} \cdot \mathfrak{s}_{(1,3,2)} \rrbracket_1^{(1,2)} \mid k > 0 \right\} \\ & \cup \left\{ \llbracket \Lambda_{kk} \rrbracket_1^{(1,2)}, \llbracket \Lambda_{kk} \cdot \mathfrak{s}_{(3,1,2)} \rrbracket_1^{(1,2)} \mid k > 0 \right\} \\ & \cup \left\{ \llbracket \Lambda_{jk} \rrbracket_1^{(1,2)}, \llbracket \Lambda_{jk} \cdot \mathfrak{s}_{(1,3,2)} \rrbracket_1^{(1,2)}, \llbracket \Lambda_{jk} \cdot \mathfrak{s}_{(3,1,2)} \rrbracket_1^{(1,2)} \mid 0 < j < k \right\}. \end{aligned}$$

Ein Repräsentantensystem von $\Gamma_0 \backslash \mathrm{GL}_3(\mathcal{K}_\infty) / \mathcal{P}_{(2,1)} \cdot \mathcal{Z}(\mathcal{K}_\infty)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \left\{ \llbracket \Lambda_{00} \rrbracket_1^{(2,1)} \right\} \cup \left\{ \llbracket \Lambda_{0k} \rrbracket_1^{(2,1)}, \llbracket \Lambda_{0k} \cdot \mathfrak{s}_{(2,3,1)} \rrbracket_1^{(2,1)} \mid k > 0 \right\} \\ & \cup \left\{ \llbracket \Lambda_{kk} \rrbracket_1^{(2,1)}, \llbracket \Lambda_{kk} \cdot \mathfrak{s}_{(3,1,2)} \rrbracket_1^{(2,1)} \mid k > 0 \right\} \\ & \cup \left\{ \llbracket \Lambda_{jk} \rrbracket_1^{(2,1)}, \llbracket \Lambda_{jk} \cdot \mathfrak{s}_{(2,3,1)} \rrbracket_1^{(2,1)}, \llbracket \Lambda_{jk} \cdot \mathfrak{s}_{(3,1,2)} \rrbracket_1^{(2,1)} \mid 0 < j < k \right\}. \end{aligned}$$

3 Harmonische Koketten

Wir betrachten nun eine Verallgemeinerung der harmonischen Koketten im 1-dimensionalen Fall. Die Definition stammt aus der Arbeit „Residues on buildings and de Rham cohomology of p-adic symmetric domains“ von Ehud de Shalit ([DS01]).

Definition 3.1. Eine Abbildung $\varphi : \widehat{\mathcal{S}}_k(\widehat{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbb{Z}$ heißt *harmonische Kokette* (auf k -Simplizes), falls gilt

(A) Ist $\sigma = (v_0, \dots, v_k) \in \widehat{\mathcal{S}}_k$ und $\sigma' = (v_1, \dots, v_k, v_0)$, dann

$$\varphi(\sigma) = (-1)^k \varphi(\sigma').$$

(B) Sei $\sigma \in \widehat{\mathcal{S}}_{k-1}$ und t ein Typ von k -Simplizes. Definiere

$$\mathcal{B}(\sigma, t) := \{\sigma' \in \widehat{\mathcal{S}}_k \mid \sigma \leq \sigma', \sigma \text{ und } \sigma' \text{ besitzen denselben ausgezeichneten Vertex und } \text{Typ}(\sigma') = t\}.$$

Dann gelte

$$\sum_{\sigma' \in \mathcal{B}(\sigma, t)} \varphi(\sigma') = 0.$$

(C) Für $k \geq 1$, sei $\sigma \in \widehat{\mathcal{S}}_k$, $0 \leq j \leq k$. Definiere

$$\mathcal{C}(\sigma, j) := \{\sigma' \in \widehat{\mathcal{S}}_k \mid L'_i = L_i \text{ für } i \neq j, L'_j \subseteq L_j, \dim L'_j / L_{j+1} = 1\},$$

wobei wir mit L_i die zu σ gehörenden Gitter und mit L'_i die zu σ' gehörenden Gitter bezeichnen. Außerdem sei $L_{k+1} := \pi_\infty L_0$. Dann gelte

$$\varphi(\sigma) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{C}(\sigma, j)} \varphi(\sigma').$$

(D) Sei $\sigma = (v_0, \dots, v_{k+1}) \in \widehat{\mathcal{S}}_{k+1}$ und $\sigma_j := (v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{k+1})$. Dann gelte

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \varphi(\sigma_j) = 0.$$

Im Fall $k = d$, das heißt harmonische Koketten auf maximal-dimensionalen Simplizes, sind die Bedingungen C und D leer, denn die Gitterfahnen in Bedingung C sind maximale Fahnen und somit ist L'_j durch L_j eindeutig festgelegt. Außerdem gibt es in Bedingung B nur einen Typ von d -Simplizes.

3 Harmonische Koketten

Definition 3.2. Den \mathbb{Z} -Modul der *harmonischen Koketten* auf k -Simplizes bezeichnen wir mit $C_{\text{har}}^k(\widehat{\mathcal{B}})$.

Im Folgenden wollen wir harmonische Koketten mit einer Kongruenzuntergruppe $\Gamma \supset \Gamma(N)$ in Verbindung bringen. Wir definieren dazu

Definition 3.3.

$$\mathcal{H}_!^k(\widehat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma := \{\varphi \in C_{\text{har}}^k(\widehat{\mathcal{B}}) \mid \varphi \text{ ist } \Gamma\text{-invariant und } \varphi \text{ hat endlichen Träger modulo } \Gamma\}.$$

Dabei operiert $\Gamma \subset \Gamma_0$ via $(\gamma \cdot \varphi)(\sigma) := \varphi(\gamma^{-1} \cdot \sigma)$.

Weiter wollen wir lediglich Γ -invariante harmonische Koketten auf maximalen Simplizes untersuchen. Diese bezeichnen wir kurz mit $\mathcal{H}_!^d(\widehat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma := \mathcal{H}_!^d(\widehat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma$.

Bisher haben wir harmonische Koketten auf dem orientierten Gebäude betrachtet. Nach Bedingung \mathcal{A} legt der Wert einer Kokette auf einem Simplex einer bestimmten Orientierung bereits die Werte auf den übrigen Orientierungen eindeutig fest. Falls k gerade ist, sind die Werte sogar unabhängig von der Orientierung. Wir können also harmonische Koketten auf maximalen Simplizes auf dem nicht-orientierten Gebäude betrachten.

Definition 3.4. Für jeden nicht-orientierten Simplex $\sigma \in \mathcal{S}$ bezeichne mit

$$\widehat{\sigma} \in \widehat{\pi}^{-1}(\sigma) \subset \widehat{\mathcal{S}}$$

den orientierten Simplex $\widehat{\sigma} = (v_0, \dots, v_k)$, sodass gilt

$$\text{Typ}^*(v_0) = \min\{\text{Typ}^*(v_i) \mid i = 0, \dots, k\}.$$

Dies entspricht einer in diesem Sinne kanonischen Wahl eines Schnittes

$$s : \mathcal{B} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}, \quad \sigma \mapsto \widehat{\sigma}$$

mit $s \circ \widehat{\pi} = \text{id}$.

Definition 3.5. Für einen k -Simplex σ und eine Seite $\tau < \sigma$ sei m die Anzahl zyklischer Vertauschungen im Sinne von (\mathcal{A}) der Gitterfahne zu $\widehat{\sigma}$, die benötigt werden damit $\widehat{\sigma}$ und $\widehat{\tau}$ denselben ausgezeichneten Vertex haben. Wir definieren das *Signum von σ in τ* als

$$\text{sign}(\sigma, \tau) := \text{sign}(\widehat{\sigma}, \widehat{\tau}) := (-1)^{k \cdot m}.$$

Lemma 3.6. Sei σ ein k -Simplex und $\tau < \sigma$ eine Seite von σ . Dann hängt $\text{sign}(\sigma, \tau)$ nur von den Klassen von σ und τ unter der Operation von Γ_0 ab. Insbesondere gilt

$$\text{sign}(\sigma, \tau) = \text{sign}(\text{Niveau}(\sigma), \text{Niveau}(\tau)).$$

Beweis. In Lemma 2.20 wurde gezeigt, dass $\text{Typ}^*([L])$ invariant unter der Operation von Γ_0 ist. Somit ändert die Operation von Γ_0 nach Definition der $\hat{\sigma}$ deren Orientierung nicht. Das heißt für $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0$ gilt

$$\text{sign}(\gamma_1\sigma, \gamma_2\tau) = \text{sign}(\sigma, \tau).$$

□

Definition 3.7. Eine *nicht-orientierte harmonische Kokette* (auf maximalen Simplizes) ist eine Funktion $\varphi : \mathcal{S}_d(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{Z}$, sodass für alle $(d-1)$ -Simplizes $\tau \in \mathcal{S}_{d-1}$ gilt

$$\sum_{\tau < \sigma} \text{sign}(\sigma, \tau) \varphi(\sigma) = 0. \quad (*)$$

Die Menge nicht-orientierten harmonischen Koketten bezeichnen wir mit $C_{\text{har}}^d(\mathcal{B})$ und wir bezeichnen mit $\mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma$ die Γ -invarianten \mathbb{Z} -wertigen harmonischen Koketten auf maximalen Simplizes mit endlichem Träger.

Diese Definition schränkt die orientierten harmonischen Koketten $C_{\text{har}}^d(\hat{\mathcal{B}})$ auf das Bild des in Definition 3.4 definierten Schnittes s von $\hat{\pi}$ ein und man kann äquivalent schreiben

$$C_{\text{har}}^d(\mathcal{B}) = \{(\varphi \circ s) \mid \varphi \in C_{\text{har}}^d(\hat{\mathcal{B}})\}.$$

Bemerkung 3.8. Falls d gerade ist, vereinfacht sich Gleichung (*) zu

$$\sum_{\tau < \sigma} \varphi(\sigma) = 0,$$

da das Signum in diesem Fall konstant 1 ist.

Lemma 3.9. Es gilt $\mathcal{H}_1(\hat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma = \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma$.

Beweis. Wie zuvor bezeichnen wir mit $\hat{\pi}$ die Projektion $\hat{\mathcal{B}} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$.

Für $\varphi \in \mathcal{H}_1(\hat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma$ definiere $\psi : \mathcal{S}_d \rightarrow \mathbb{Z}$ durch $\psi(\sigma) := \varphi(\hat{\sigma})$. Das Signum ist gerade so definiert, dass es zu einem orientierten $(d-1)$ -Simplex durch Ändern des Vorzeichens den d -Simplex auswählt, der in der Definition der harmonischen Koketten zur Orientierung passt. Gleichung (*) erhält man aus der Definition, indem man Bedingung \mathcal{A} in Bedingung \mathcal{B} einsetzt. Zu jeder der d Orientierungen eines $(d-1)$ -Simplizes erhält man eine Gleichung \mathcal{B} . Es bleibt zu zeigen, dass wenn man die Orientierung eines $(d-1)$ -Simplizes ändert, sich dann Bedingung \mathcal{B} nicht verändert, in anderen Worten:

Sind $\tau, \tau' \in \hat{\mathcal{S}}_{d-1}$ mit $\hat{\pi}(\tau) = \hat{\pi}(\tau')$, dann gilt entweder für alle $\sigma \in \hat{\mathcal{S}}_d$ mit $\tau < \sigma$: $\text{sign}(\sigma, \tau) = \text{sign}(\sigma, \tau')$ oder es gilt für alle $\sigma \in \hat{\mathcal{S}}_d$ mit $\tau < \sigma$: $\text{sign}(\sigma, \tau) = -\text{sign}(\sigma, \tau')$. Jedoch sind $(d-1)$ -Simplizes τ Gitterfahnen, die an jeder bis auf eine Stelle, an der

3 Harmonische Koketten

sie Kodimension 2 haben, Kodimension 1 haben und ein d -Simplex, der τ als Seite hat, ist eine Vervollständigung dieser Gitterfahne. Ändert sich die Orientierung von τ , dann wird die Gitterfahne zu τ zyklisch Vertauscht, somit ändern sich die Anzahl benötigter zyklischer Vertauschungen der d -Simplizes mit Seite τ gleichmäßig.

Für $\psi \in \mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma$ definiere $\varphi : \widehat{\mathcal{S}}_d \rightarrow \mathbb{Z}$ zunächst durch $\varphi(\widehat{\sigma}) := \psi(\sigma)$ und setze φ durch Bedingung \mathcal{A} auf die übrigen Orientierungen von σ fort.

Durch diese beiden Zuordnungen erhalten wir eine Bijektion. \square

3.1 Harmonische Koketten auf dem Quotienten-Gebäude

Einer harmonischen Kokette $\varphi \in \mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma$ können wir aufgrund dessen Γ -Invarianz eine Funktion $\varphi' : \mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{Z}$ zuordnen, indem wir definieren

$$\varphi'(\llbracket \sigma \rrbracket) := \varphi(\sigma).$$

Diese Zuordnung ist per Definition injektiv und wir definieren

Definition 3.10. Sei $\Theta : \mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma \rightarrow \text{Abb}(\mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}), \mathbb{Z})$ die Zuordnung $\varphi \mapsto \varphi'$. Dann definieren wir die Menge der *harmonischen Koketten auf $\Gamma \backslash \mathcal{B}$* als

$$\mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}) := \text{Bild}(\Theta).$$

Nach Definition gilt $\mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma \cong \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$.

Proposition 3.11. Sei $\varphi \in \text{Abb}(\mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}), \mathbb{Z})$ mit endlichem Träger. Dann gilt $\varphi \in \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$ genau dann, wenn für alle $\llbracket \tau \rrbracket \in \mathcal{S}_{d-1}(\Gamma \backslash \mathcal{B})$ gilt

$$\sum_{\llbracket \tau \rrbracket < \llbracket \sigma \rrbracket} \text{sign}(\sigma, \tau) \cdot [\Gamma_\tau : \Gamma_\sigma] \cdot \varphi(\llbracket \sigma \rrbracket) = 0,$$

wobei $\Gamma_\tau := \text{Fix}_\Gamma(\tau)$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass der Koeffizient $[\Gamma_\tau : \Gamma_\sigma]$ der Anzahl Elemente in

$$M := \{\sigma' \in \mathcal{S}_d(\mathcal{B}) \mid \tau < \sigma' \text{ und } \llbracket \sigma' \rrbracket = \llbracket \sigma \rrbracket\}$$

entspricht. Sei $\sigma = \{v_0, \dots, v_d\}$. Dann können wir M schreiben als

$$M = \{\{g.v_0, \dots, g.v_d\} \mid g \in \Gamma, \tau < \{g.v_0, \dots, g.v_d\}\}.$$

Wegen $\Gamma \subset \Gamma_0$ ist Typ^* invariant unter Γ . Sei oBdA $\tau = \{v_0, \dots, v_{d-1}\}$, dann ist $\tau < \{g.v_0, \dots, g.v_d\}$ äquivalent zu

$$\{g.v_0, \dots, g.v_d\} = \{v_0, \dots, v_{d-1}, g.v_d\},$$

das heißt $g \in \text{Fix}_\Gamma(\tau)$. Also ist M die Bahn von σ unter $\text{Fix}_\Gamma(\tau)$ und es folgt

$$\#M = [\Gamma_\tau : \Gamma_\sigma].$$

Nach Lemma 3.6 ist sign invariant unter Γ . Schließlich folgt für $\psi \in \mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma$ mit $\varphi = \Theta(\psi)$ aufgrund der Γ -Invarianz

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\tau < \sigma} \text{sign}(\sigma, \tau) \psi(\sigma) = \sum_{[\tau] < [\sigma]} \text{sign}(\sigma, \tau) \cdot [\Gamma_\tau : \Gamma_\sigma] \cdot \psi(\sigma) \\ &= \sum_{[\tau] < [\sigma]} \text{sign}(\sigma, \tau) \cdot [\Gamma_\tau : \Gamma_\sigma] \cdot \varphi([\sigma]). \end{aligned}$$

□

Satz 3.12. *Sei $\varphi \in \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$, $n = \deg(N)$. Dann ist der Träger von φ vollständig in der Faser über \mathcal{W}_n enthalten.*

Beweis. Ist $\varphi \in \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$, dann hat φ insbesondere endlichen Träger.

Sei $[\sigma]$ ein 2-Simplex in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ mit $\text{Niveau}([\sigma]) \in \mathcal{W} - \mathcal{W}_n$. Nach Satz 2.36 gibt es eine unendliche Folge paar-weise verschiedener 2-Simplizes

$$([\sigma_0] := [\sigma], [\sigma_1], [\sigma_2], \dots),$$

sodass für $i \geq 0$ $[\sigma_i]$ und $[\sigma_{i+1}]$ eine gemeinsame 1-Seite $[\tau_i]$ besitzen, für die $[\sigma_i]$ und $[\sigma_{i+1}]$ die einzigen benachbarten 2-Simplizes sind. Die Harmonizitätsbedingung an $[\tau_i]$ ergibt nun

$$\text{sign}(\sigma_i, \tau_i) \cdot [\Gamma_{\tau_i} : \Gamma_{\sigma_i}] \cdot \varphi([\sigma_i]) + \text{sign}(\sigma_{i+1}, \tau_i) \cdot [\Gamma_{\tau_i} : \Gamma_{\sigma_{i+1}}] \cdot \varphi([\sigma_{i+1}]) = 0,$$

das heißt

$$\varphi([\sigma_{i+1}]) = -\frac{\text{sign}(\sigma_i, \tau_i) \cdot [\Gamma_{\tau_i} : \Gamma_{\sigma_i}]}{\text{sign}(\sigma_{i+1}, \tau_i) \cdot [\Gamma_{\tau_i} : \Gamma_{\sigma_{i+1}}]} \cdot \varphi([\sigma_i]).$$

Da der Träger von φ nach Voraussetzung endlich ist, gibt es ein j , sodass $\varphi([\sigma_j]) = 0$. Dann folgt $\varphi([\sigma_i]) = 0$ für alle $i \geq 0$ und insbesondere

$$\varphi([\sigma]) = \varphi([\sigma_0]) = 0.$$

□

3.2 Heckeoperatoren

Analog den zu Heckeoperatoren, die in „Hecke Operators for GL_n and Buildings“ [CMB04] auf dem Gebäude über \mathbb{Q}_p definiert wurden, wollen wir Heckeoperatoren auf dem Raum der Γ -invarianten harmonischen Koketten definieren.

Dazu bezeichnen wir mit \mathbb{Z}^{S_2} den freien \mathbb{Z} -Modul mit Basis S_2 . Sei $\xi \in GL_{d+1}(\mathbb{F}_q(T))$ und

$$\Gamma\xi\Gamma = \bigcup_{\nu} \xi_{\nu}\Gamma$$

eine disjunkte Zerlegung in Linksnebenklassen. Dann definieren wir den Heckeoperator auf \mathbb{Z}^{S_2} durch seine Operation auf den Vertices,

$$T_{\xi}([L]) := \sum_{\nu} \xi_{\nu} \cdot [L] = \sum_{\nu} [\xi_{\nu} L].$$

Für die Wohldefiniertheit dieses Operators müssen wir nachweisen, dass das Repräsentantensystem $\{\xi_{\nu}\}$ endlich ist. Der Beweis stammt aus [DS10], Kapitel 5.1.

Lemma 3.13. *Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe in Γ_0 , $\xi \in GL_{d+1}(\mathbb{F}_q(T))$. Dann ist $\xi\Gamma\xi^{-1} \cap \Gamma_0$ eine Kongruenzuntergruppe in Γ_0 .*

Beweis. Es existiert ein $\tilde{N} \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(\tilde{N}) \subseteq \Gamma$ und $\tilde{N}\xi, \tilde{N}\xi^{-1} \in Mat_{d+1}(\mathbb{F}_q[T])$. Setze $N := \tilde{N}^3$, dann gilt

$$\begin{aligned} \xi^{-1}\Gamma(N)\xi &\subseteq \xi^{-1}(\mathbb{1} + \tilde{N}^3 Mat_{d+1}(\mathbb{F}_q[T]))\xi \\ &= \mathbb{1} + \tilde{N} \cdot (\tilde{N}\xi^{-1}) \cdot Mat_{d+1}(\mathbb{F}_q[T]) \cdot (\tilde{N}\xi) \\ &\subseteq \mathbb{1} + \tilde{N} Mat_{d+1}(\mathbb{F}_q[T]). \end{aligned}$$

Die Elemente in $\xi^{-1}\Gamma(N)\xi$ haben Determinante 1 und somit folgt $\xi^{-1}\Gamma(N)\xi \subseteq \Gamma(\tilde{N})$. Also ist gezeigt

$$\Gamma(N) \subseteq \xi\Gamma(\tilde{N})\xi^{-1} \subseteq \xi\Gamma\xi^{-1},$$

was indem man beide Seiten mit Γ_0 schneidet die Behauptung zeigt. \square

Lemma 3.14. *Seien Γ , ξ wie oben, setze $\Gamma_{\xi} := \xi\Gamma\xi^{-1} \cap \Gamma$ dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Gamma/\Gamma_{\xi} &\longrightarrow \Gamma\xi\Gamma/\Gamma \\ \beta\Gamma_{\xi} &\longmapsto \beta\xi\Gamma \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Beweis. Die Abbildung $\Gamma \rightarrow \Gamma\xi\Gamma/\Gamma, \beta \mapsto \beta\xi\Gamma$ ist surjektiv. Zwei Elemente β, β' haben dasselbe Bild, falls $\Gamma\xi\beta = \Gamma\xi\beta'$, das heißt falls $\beta'\beta^{-1} \in \xi\Gamma\xi^{-1}$ und $\beta'\beta^{-1} \in \Gamma$ gelten. Somit liefert die Definition $\Gamma_{\xi} := \xi\Gamma\xi^{-1} \cap \Gamma$ obige Bijektion. \square

Korollar 3.15. Es gibt ξ_1, \dots, ξ_m , sodass

$$\Gamma \xi \Gamma = \bigcup_{i=1}^m \xi_i \Gamma.$$

Beweis. Nach vorherigem Lemma gilt

$$|\Gamma \xi \Gamma / \Gamma| = [\Gamma : \xi \Gamma \xi^{-1} \cap \Gamma].$$

Nach Lemma 3.13 gibt es ein $N' \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N') \subseteq \xi \Gamma \xi^{-1} \cap \Gamma_0$. Da Γ ebenfalls eine Kongruenzuntergruppe ist, gibt es ein $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. Sei N_0 das kleinste gemeinsame Vielfache von N und N' . Dann gilt $\Gamma(N_0) \subseteq \Gamma$ und $\Gamma(N_0) \subseteq \xi \Gamma \xi^{-1} \cap \Gamma_0$ und damit

$$\Gamma(N_0) \subseteq \xi \Gamma \xi^{-1} \cap \Gamma.$$

Also ist, da der Index $[\Gamma : \Gamma(N_0)]$ endlich ist, auch $[\Gamma : \xi \Gamma \xi^{-1} \cap \Gamma]$ endlich. \square

Wir erweitern obige Definition des Heckeoperators auf den Raum der harmonischen Koketten:

Definition 3.16. Der Heckeoperator T_ξ auf $\mathcal{H}_!(\widehat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma$ ist definiert durch

$$(T_\xi \varphi)(\sigma) := \sum_{\nu} \varphi(\xi_\nu^{-1} \sigma).$$

Lemma 3.17. Für $\varphi \in \mathcal{H}_!(\widehat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma$ gilt

$$(T_\xi \varphi) \in \mathcal{H}_!(\widehat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma.$$

Beweis. Für ein festes ξ_ν hat die Abbildung $\varphi_\nu(\sigma) := \varphi(\xi_\nu \sigma)$ endlichen Träger, denn φ hat endlichen Träger. Es gilt

$$\sum_{\tau < \sigma} \varphi_\nu(\sigma) = \sum_{\tau < \sigma} \varphi(\xi_\nu \sigma) = \sum_{(\xi_\nu \tau) < \sigma} \varphi(\sigma) = 0.$$

Nach Definition ist $T_\xi \varphi = \sum_{\nu} \varphi_\nu$ eine endliche Summe von Abbildungen mit endlichem Träger modulo Γ , die jeweils die Harmonizitätsbedingung erfüllen. Somit hat auch $T_\xi \varphi$ endlichen Träger modulo Γ und erfüllt die Harmonizitätsbedingung.

Sei $\gamma \in \Gamma$. Dann bildet die Menge $\{\gamma \xi_\nu\}$ ebenfalls ein Vertretersystem von Linksnebenklassen, das heißt es gibt $g_\nu \in \Gamma$ sodass $\gamma \xi_\nu = \xi_\nu g_\nu$. Es folgt aufgrund der Γ -Invarianz von φ :

$$\begin{aligned} (T_\xi \varphi)(\gamma^{-1} \sigma) &= \sum_{\nu} \varphi((\gamma \xi_\nu)^{-1} \sigma) = \sum_{\nu} \varphi((\xi_\nu g_\nu)^{-1} \sigma) \\ &= \sum_{\nu} \varphi(g_\nu^{-1} \xi_\nu^{-1} \sigma) = \sum_{\nu} \varphi(\xi_\nu^{-1} \sigma) = (T_\xi \varphi)(\sigma). \end{aligned}$$

\square

3 Harmonische Koketten

Wir erweitern die Definition des Heckeoperators auf die nicht-orientierten harmonischen Koketten. Hierzu verwenden wir die Entsprechung $\mathcal{H}_!(\widehat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma \cong \mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma$ und operieren zunächst auf den kanonisch gewählten orientierten Simplizes $\widehat{\sigma} := s(\sigma)$. Der Wert der nicht-orientierten harmonischen Kokette auf $\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma}$ unterscheidet sich nun von dem Wert auf dem nicht-orientierten Simplex $\widehat{\pi}(\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma})$ um das Vorzeichen

$$\text{sign}(\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma}, s(\widehat{\pi}(\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma}))).$$

Wir schreiben für $\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}$: $\delta(\sigma) := \text{sign}(\sigma, s(\widehat{\pi}(\sigma)))$.

Definition 3.18. Der Heckeoperator T_ξ auf $\mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma$ ist definiert durch

$$(T_\xi \varphi)(\sigma) := \sum_{\nu} \delta(\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma}) \cdot \varphi(\xi_\nu^{-1}\sigma).$$

Bemerkung 3.19. Das Vorzeichen $\delta(\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma})$ wird benötigt, da sign nicht invariant unter simultaner Operation mit einem beliebigen Element $g \in \text{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$ ist. Es gilt

$$\text{sign}(g.\sigma, g.\tau) = \text{sign}(\sigma, \tau) \delta(g.\widehat{\sigma}).$$

Um die Heckeoperatoren zu berechnen, verwenden wir die zuvor eingeführten harmonischen Koketten auf dem Quotienten-Gebäude $\mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}) \cong \mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma$ und berechnen für $\varphi \in \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} (\Theta \circ T_\xi \circ \Theta^{-1})(\varphi)([\![\sigma]\!]) &= \Theta(T_\xi(\tau \mapsto \varphi([\![\tau]\!]))([\![\sigma]\!]) \\ &= \Theta \left(\tau \mapsto \sum_{\nu} \delta(\xi_\nu^{-1}\widehat{\tau}) \varphi([\![\xi_\nu^{-1}\tau]\!]) \right) ([\![\sigma]\!]) \\ &= \sum_{\nu} \delta(\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma}) \varphi([\![\xi_\nu^{-1}\sigma]\!]). \end{aligned}$$

Somit definieren wir

Definition 3.20. Der Heckeoperator \widehat{T}_ξ auf $\mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$ ist definiert durch

$$(\widehat{T}_\xi \varphi)([\![\sigma]\!]) := \sum_{\nu} \delta(\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma}) \varphi([\![\xi_\nu^{-1}\sigma]\!]).$$

Obwohl sich die Wohldefiniertheit dieses Operators direkt aus dem Isomorphismus Θ ergibt, rechnen wir diese zusätzlich nach, um zu sehen wie sich die Eigenschaften der Funktionen in $\mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma$ und $\mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$ entsprechen:

Bemerkung 3.21. Für $\varphi \in \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$ gilt

$$(\widehat{T}_\xi \varphi) \in \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}).$$

Beweis. Zunächst entspricht die Wohldefiniertheit dieser Abbildung der Γ -Invarianz auf \mathcal{B} . Seien σ, σ' zwei d -Simplizes mit $[\![\sigma]\!] = [\![\sigma']]\!]$, es gibt also ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma\sigma' = \sigma$. Wie zuvor ist $\{\gamma\xi_\nu\}$ ebenfalls ein Vertretersystem von Linksnebenklassen, das heißt es gibt $g_\nu \in \Gamma$ sodass $\gamma\xi_\nu = \xi_\nu g_\nu$. Damit gilt

$$\begin{aligned} (\widehat{T}_\xi\varphi)([\![\sigma']]\!]) &= (\widehat{T}_\xi\varphi)([\![\gamma^{-1}\sigma]\!]) = \sum_{\nu} \delta((\gamma\xi_\nu)^{-1}\widehat{\sigma})\varphi([\![\gamma\xi_\nu)^{-1}\sigma]\!]) \\ &= \sum_{\nu} \delta((\xi_\nu g_\nu)^{-1}\widehat{\sigma})\varphi([\![\xi_\nu g_\nu)^{-1}\sigma]\!]) \\ &= \sum_{\nu} \delta(\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma})\varphi([\![\xi_\nu^{-1}\sigma]\!]) = (\widehat{T}_\xi\varphi)([\![\sigma]\!]). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{[\![\tau]\!] < [\![\sigma]\!]} \text{sign}(\sigma, \tau) \cdot [\Gamma_\tau : \Gamma_\sigma] \cdot (\widehat{T}_\xi\varphi)([\![\sigma]\!]) \\ &= \sum_{[\![\tau]\!] < [\![\sigma]\!]} \text{sign}(\sigma, \tau) \cdot [\Gamma_\tau : \Gamma_\sigma] \sum_{\nu} \delta(\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma})\varphi([\![\xi_\nu^{-1}\sigma]\!]) \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\tau < \sigma} \text{sign}(\sigma, \tau) \delta(\xi_\nu^{-1}\widehat{\sigma})\varphi([\![\xi_\nu^{-1}\sigma]\!]) \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\xi_\nu^{-1}\tau < \sigma} \text{sign}(\xi_\nu\sigma, \tau) \delta(\xi_\nu^{-1}\widehat{\xi_\nu\sigma})\varphi([\![\sigma]\!]) \\ &= \sum_{\nu} \sum_{[\![\xi_\nu^{-1}\tau]\!] < [\![\sigma]\!]} [\Gamma_{\xi_\nu^{-1}\tau} : \Gamma_\sigma] \text{sign}(\sigma, \xi_\nu^{-1}\tau) \varphi([\![\sigma]\!]) = 0, \end{aligned}$$

denn es gilt nach Bemerkung 3.19 $\text{sign}(\xi_\nu\sigma, \tau) \delta(\xi_\nu^{-1}\widehat{\xi_\nu\sigma}) = \text{sign}(\sigma, \xi_\nu^{-1}\tau)$. Die Umformungen sind wohldefiniert, da eine Änderung der ξ_ν um ein Element in Γ lediglich die Summe über ν umordnet. \square

Da die ξ_ν^{-1} ein Vertretersystem einer Zerlegung von $\Gamma\xi^{-1}\Gamma$ in Rechtsnebenklassen bilden, können wir äquivalent für eine Zerlegung

$$\Gamma\xi^{-1}\Gamma = \bigcup_{\nu} \Gamma\xi'_\nu$$

schreiben

$$(\widehat{T}_\xi\varphi)([\![\sigma]\!]) = \sum_{\nu} \delta(\xi'_\nu\widehat{\sigma})\varphi([\![\xi'_\nu\sigma]\!]).$$

Speziell für den Fall $\Gamma = \Gamma_0(N)$, $d = 2$ gilt

Lemma 3.22. *Sei $P \in \mathbb{F}_q[T]$ irreduzibel, normiert und teilerfremd zu N und sei*

$$\mathcal{R} := \{S \in \mathbb{F}_q[T] \mid \deg(S) < \deg(P)\}.$$

3 Harmonische Koketten

Dann gilt für $\xi = \text{diag}(1, 1, P)$

$$\Gamma_0(N)\xi\Gamma_0(N) = \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S \in \mathcal{R}} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S, T \in \mathcal{R}} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & S \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$

Für $\xi = \text{diag}(1, P, P)$ gilt

$$\Gamma_0(N)\xi\Gamma_0(N) = \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S \in \mathcal{R}} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & S \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S, T \in \mathcal{R}} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & S & T \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir zeigen nur den Fall $\xi = \text{diag}(1, 1, P)$, der andere verläuft analog.

Da P irreduzibel ist, gilt nach Elementarteilersatz die Zerlegung

$$\Gamma_0\xi\Gamma_0 = \Gamma_0 \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S \in \mathcal{R}} \Gamma_0 \begin{pmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S, T \in \mathcal{R}} \Gamma_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & S \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix},$$

das heißt für $g_1, g_2 \in \Gamma_0(N) \subset \Gamma_0$ gibt es ein $g \in \Gamma_0$ und ein h aus diesem Vertretersystem, sodass

$$g_1\xi g_2 = gh.$$

Da $g_1\xi g_2 h^{-1}$ als Produkt von modulo N oberen Dreiecksmatrizen wieder eine modulo N obere Dreiecksmatrix ist, folgt $g \in \Gamma_0(N)$. Dies zeigt

$$\Gamma_0(N)\xi\Gamma_0(N) \subseteq \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S \in \mathcal{R}} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{S, T \in \mathcal{R}} \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & S \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$

Für die andere Inklusion seien $a, b \in \mathbb{F}_q[T]$ sodass $aP + bN = 1$. Es reicht zu zeigen, dass die Repräsentanten mit $S = T = 0$ in $\Gamma_0(N)\xi\Gamma_0(N)$ liegen, denn S und T können durch die Rechtsoperation von $\Gamma_0(N)$ eliminiert werden. Es gilt

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ N & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -N & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = \xi$$

und damit

$$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\xi\Gamma_0(N).$$

Für die anderen beiden Repräsentanten folgt die Aussage analog. \square

Bemerkung 3.23. Mit Hilfe von Lemma 3.14 kann man das vorherige Lemma auch ohne Elementarteilersatz beweisen. Dazu berechnet man zunächst ein Repräsentantensystem von $\Gamma_\xi \backslash \Gamma_0(N)$, wobei $\Gamma_\xi = \xi^{-1} \Gamma_0(N) \xi \cap \Gamma_0(N)$.

Für den Fall $\xi = \text{diag}(1, 1, P)$ gilt

$$\Gamma_\xi = \Gamma_0(N) \cap \left\{ B \in \Gamma_0 \mid B \equiv \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \pmod{P} \right\}.$$

Die Rechnung, auf die wir an dieser Stelle verzichten wollen, verläuft analog zu [DS10], Beweis zu Proposition 5.2.1. Führt man diese durch, erhält man mit $a, b \in \mathbb{F}_q[T]$ sodass $aP + bN = 1$ und $\mathcal{R} := \{S \in \mathbb{F}_q[T] \mid \deg(S) < \deg(P)\}$ ein Repräsentantensystem von $\Gamma_\xi \backslash \Gamma_0(N)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & S \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid S, T \in \mathcal{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & aP & -b \\ 0 & N & 1 \end{pmatrix} \mid S \in \mathcal{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} aP & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ N & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Schließlich erhält man das gesuchte Repräsentantensystem durch Multiplizieren von links mit ξ . Dabei gelten

$$\begin{aligned} \xi \begin{pmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & aP & -b \\ 0 & N & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & N & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \xi \begin{pmatrix} aP & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ N & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ N & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da die linken Matrizen jeweils in $\Gamma_0(N)$ liegen, ist dies dasselbe Repräsentantensystem wie in Lemma 3.22.

4 Algorithmen und Datenstrukturen

In diesem Kapitel beschreiben wir einige Implementierungsdetails zur Berechnung der Quotienten-Gebäude, harmonischen Koketten sowie den Hecke-Operatoren.

4.1 Datenstruktur des Quotienten

Repräsentanten Das Repräsentantensystem von $\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0$ wird geordnet und mit $\{s_1, \dots, s_k\}$ bezeichnet. Es wird nur einmal abgespeichert und ansonsten werden die Indices stellvertretend für die Repräsentanten gespeichert. Das heißt statt s_5 wird der Wert 5 gespeichert, vergleichbar mit einem Pointer.

Doppelnebenklassen Die Doppelnebenklassen $\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0/\Gamma_w$ werden als Partitionen des geordneten Repräsentantensystems aufgefasst, das heißt als Partition von $\{1, \dots, k\}$. Sie sind auf diese Weise ebenfalls geordnet.

Vertices Die Vertices der Weylkammer werden als normalisierte Tupel von natürlichen Zahlen dargestellt. Das Tupel $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ entspricht der Gitterklasse $[0, a_1, \dots, a_d]$.

Simplizes Die Simplizes der Weylkammer werden als ungeordnete Mengen von Vertices dargestellt, das heißt als ungeordnete Mengen von d -Tupeln natürlicher Zahlen.

Simplizialkomplex Die Weylkammer als Simplizialkomplex wird als assoziatives Array gespeichert, das einem Simplex seinen Datensatz zuordnet.

Simplex-Datensatz Zu jedem Simplex in der Weylkammer werden folgende Daten gespeichert:

- Seine Γ_0 -Fixgruppe Γ_w als ganzzahlige Matrix,

4 Algorithmen und Datenstrukturen

- Die Doppelnebenklassen $\Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0 / \Gamma_w$ als geordnete Partition von $\{1, \dots, k\}$,
- Zu jedem Repräsentanten von $\Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0$ einen Pointer auf seine Doppelnebenklasse,
- Ein assoziatives Array, das jeder Seite w' des Simplizes eine Liste von Pointern zuordnet, die jeder Doppelnebenklasse des Simplizes die Doppelnebenklasse der Seite zuordnet, mit der sie verklebt ist. Dies entspricht der Abbildung $\Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0 / \Gamma_w \mapsto \Gamma_0(N) \backslash \Gamma_0 / \Gamma_{w'}$.

Algorithmus 4.1 (Einfügen eines Simplizes).

Eingabe: Ein Simplex in der Weylkammer gegeben als $w = \{s_1, \dots, s_l\}$, eine Quotienten-Datenstruktur.

Ausgabe: Die Quotienten-Datenstruktur, die zusätzlich w enthält.

1. Erzeuge die ganzzahlige Matrix, die die Fixgruppe des Simplizes angibt.
2. Durchlaufe alle gespeicherten Simplizes und prüfe ob die Fixgruppe eines der Simplizes in der Fixgruppe des neuen Simplizes enthalten oder gleich ist.
Falls es einen gibt, kopiere dessen Doppelnebenklassen sowie die zugehörigen Pointer.
3. *Falls kein Simplex mit gleicher Fixgruppe gefunden wurde*, berechne die Doppelnebenklassen ausgehend von gegebenenfalls bereits kopierten Daten.
4. Füge den Datensatz in die Quotienten-Datenstruktur ein.
5. *Falls w kein Vertex ist*, benutze denselben Algorithmus um alle Seiten $w_i := \{s_1, \dots, \widehat{s_i}, \dots, s_l\}$ einzufügen.
6. *Falls w kein Vertex ist*:
Für jede Seite w' von w : Für jede Doppelnebenklasse t von w :
Finde die Doppelnebenklasse von w' , in der t enthalten ist, und speichere einen Pointer darauf.

Visualisierung

Um die Quotienten-Gebäude graphisch darzustellen haben wir zunächst den zugrunde liegenden Graphen mit einer auf drei Dimensionen verallgemeinerte Variante des *Spring Embedder Algorithmus*, nach [FR91], räumlich angeordnet, und anschließend höher-dimensionale Simplizes hinzugefügt. Für die graphische Darstellung wurde das Programm JavaView ([KP⁺13]) benutzt.

Dabei erhält jede Doppelnebenklasse eine Farbe, sodass gleichfarbige Simplizes zu gleichen Doppelnebenklassen im gehören. In den Illustrationen kann man somit ablesen, an welchen Stellen Simplizes verklebt wurden - nämlich dann, wenn die Farbe dessen Nachbarn verschieden ist. Folgen von benachbarten gleichfarbigen Simplizes, entsprechen somit Orbits in $\Gamma \backslash \Gamma_0$, die stabil unter der Rechtsoperation der verschiedenen Fixgruppen Γ_w sind. Insbesondere kann man die Folgen aus Satz 2.36 ablesen.

Lediglich die Überlagerung der Weylkammer ist nicht mehr sichtbar; die Faser über dem Standardvertex bzw. -simplex befindet sich im Mittelpunkt und die verklebten Kopien der Weylkammer laufen kreisförmig nach außen.

4.2 Harmonische Koketten

Sei $\Gamma \backslash \mathcal{B}'$ ein endlicher Unterkomplex von $\Gamma \backslash \mathcal{B}$. Wir nehmen an, dass $\Gamma \backslash \mathcal{B}'$ groß genug ist, sodass der Träger aller harmonischen Koketten vollständig darin enthalten ist, etwa den Bereich aus Lemma 2.32 enthält.

Dann definieren wir den bipartiten Graphen $G := G(\Gamma \backslash \mathcal{B}')$ auf den Vertices

$$\begin{aligned}\text{Val}(G) &:= \mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}'), \\ \text{Cond}(G) &:= \mathcal{S}_{d-1}(\Gamma \backslash \mathcal{B}'), \\ \mathcal{V}(G) &:= \text{Val}(G) \cup \text{Cond}(G).\end{aligned}$$

Für $v \in \text{Val}(G), c \in \text{Cond}(G)$ seien Kanten gegeben durch

$$\{v, c\} \in \mathcal{E}(G) \Leftrightarrow c \text{ ist Seite von } v.$$

Wir speichern die Mengen $\text{Val}(G)$ und $\text{Cond}(G)$ als geordnete Listen und speichern zu jedem Knoten, der zu einem Simplex $[\![\sigma]\!]$ gehört, einen Datensatz aus

- Einem orientierten und nicht-orientierten Simplex in der Weylkammer, jeweils das Niveau von $[\![\sigma]\!]$,
- Dem Index der zugehörigen Doppelnebenklasse,
- Einem Gewicht $w([\![\sigma]\!]) := \#\text{Fix}_\Gamma(\sigma)$.

Dabei erhalten wir das Gewicht für $[\![\sigma]\!] = \Gamma \cdot s_j \cdot \omega$ mit $\omega = \text{Niveau}([\![\sigma]\!])$ durch

$$|\text{Fix}_\Gamma(\sigma)| = |s_j \cdot \text{Fix}_{\Gamma_0}(\omega) \cdot s_j^{-1} \cap \Gamma|.$$

Der Unterraum $\mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}', \mathbb{Z})$ ist definiert durch die Gleichungen

$$\sum_{[\![\tau]\!] < [\![\sigma]\!]} \text{sign}(\sigma, \tau) \cdot \frac{w([\![\tau]\!])}{w([\![\sigma]\!])} \cdot \varphi([\![\sigma]\!]) = 0 \quad (*)$$

für $[\![\tau]\!] \in \mathcal{S}_{d-1}(\Gamma \backslash \mathcal{B}')$.

Der Graph $G(\Gamma \backslash \mathcal{B}')$ enthält genau die Informationen, die den Unterraum $\mathcal{H}_1(\Gamma \backslash \mathcal{B}', \mathbb{Z})$ definieren. Für jeden Knoten in $\text{Cond}(G)$ erhält man durch die Menge seiner Nachbarn die zugehörige Gleichung (*).

Da $\text{Val}(G)$ als geordnete Liste gespeichert ist, können wir $\text{Abb}(\Gamma \backslash \mathcal{B}', \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}')}$ mit dem Zeilenraum \mathbb{Z}^n für $n := \#\mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}')$ identifizieren. Sei $m := \#\mathcal{S}_{d-1}(\Gamma \backslash \mathcal{B}')$,

dann erhalten wir ein $n \times m$ großes lineares Gleichungssystem, das den Raum der harmonischen Koketten beschreibt. Da es im Quotienten-Gebäude zu jedem $(d - 1)$ -Simplex höchstens $(q+1)$ angrenzende d -Simplizes gibt, ist dieses Gleichungssystem dünn-besetzt und kann somit in wenigen Rechenschritten gelöst werden. In der Tat benötigt in der Praxis das Berechnen des Quotienten-Gebäudes deutlich mehr Rechenzeit als das Lösen dieses Gleichungssystems.

4.3 Heckeoperatoren

Ausgehend von einer berechneten Basis des Raumes der harmonischen Koketten in $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}')}$, können wir die Heckeoperatoren zu $\xi \in \text{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q(T))$ als Lineare Abbildungen

$$\widehat{T}_\xi : \mathbb{Z}^{\mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}')} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}')} ,$$

das heißt als $n \times n$ -Matrix über \mathbb{Z} mit $n := \#\mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}')$ angeben. Hierzu sei \mathcal{R} ein Repräsentantensystem wie in Lemma 3.22 für den Fall $\Gamma = \Gamma_0(N)$ angeben, sodass

$$\Gamma \xi \Gamma = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} \Gamma r .$$

Der Heckeoperator ist gegeben durch

$$(\widehat{T}_\xi \varphi)([\sigma]) := \sum_{r \in \mathcal{R}} \delta(r\widehat{\sigma}) \varphi([r\sigma]) .$$

Dabei entsprechen $\sigma, \widehat{\sigma}$ den abgespeicherten orientierten und nicht-orientierten d -Simplizes.

Sei $[\sigma] \in \mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}')$ und j der zugehörige Index aus der Identifizierung $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B}')} \cong \mathbb{Z}^n$. Die Darstellungsmatrix von \widehat{T}_ξ sei mit Null-Einträgen initialisiert. Als dünn-besetzte Matrix werden diese im einzelnen nicht gespeichert. Um die j -te Spalte zu berechnen, sei führen wir folgende Schritte durch:

1. Sei s der zu $[\sigma]$ gehörende Repräsentant in $\Gamma \backslash \Gamma_0$ und $\omega \in \mathcal{W}$ das Niveau von σ . Sei Ω ein kanonischer Vertreter von ω als Matrix in $\text{GL}_{d+1}(\mathcal{K}_\infty)$.
2. Für jedes $r \in \mathcal{R}$:
 - a) Setze $M := r \cdot s \cdot \Omega$ und berechne $M = g \cdot \Lambda_{jk} \mathbf{s} \cdot \iota$ mit $g \in \Gamma_0$, $\Lambda_{jk} \mathbf{s}$ ein Vertreter eines orientierten d -Simplex $\widehat{\sigma}$ in der Weylkammer und $\iota \in \mathcal{I}$ wie in Proposition 2.40.
 - b) Falls der zu $\Lambda_{jk} \mathbf{s}$ gehörende nicht-orientierte Simplex σ in \mathcal{B}' enthalten ist:
 - i. Projiziere g auf einen Vertreter g_0 im kanonischen Repräsentantensystem von $\Gamma \backslash \Gamma_0$.
 - ii. Finde den Index i , der zu dem Simplex $\Gamma \cdot g_0 \sigma$ in $\Gamma \backslash \mathcal{B}$ gehört.
 - iii. Addiere $\delta(\widehat{\sigma})$ zum (i, j) -ten Eintrag der Darstellungsmatrix.

4.3 Heckeoperatoren

Hierbei nehmen wir wie zuvor an, dass die harmonischen Koketten außerhalb des Teil-Quotienten $\Gamma \backslash \mathcal{B}'$ überall Null sind. Somit tragen Simplizes außerhalb dieses Bereichs nichts zur Summe im Heckeoperator bei und können ignoriert werden. Möglicherweise treten dieselben Simplizes mehr als ein Mal in der Summe auf, deshalb summieren wir jeweils das Signum.

Ist diese Matrix für ein festes ξ berechnet, kann der Heckeoperator \widehat{T}_ξ auf die Basiselemente angewendet werden. Die Bilder können dann wieder als Linearkombination in derselben Basis geschrieben werden und wir erhalten eine Abbildungsmatrix. Deren charakteristisches Polynom ist aufgrund der Isomorphismen von $\mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma \cong \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$ sowie $\mathcal{H}_!(\mathcal{B}, \mathbb{Z})^\Gamma \cong \mathcal{H}_!(\widehat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma$ dasselbe wie das des Heckeoperators T_ξ auf $\mathcal{H}_!(\widehat{\mathcal{B}}, \mathbb{Z})^\Gamma$.

5 Beispiele

Wir geben im Folgenden einige ausgewählte Beispiele für $d = 2$ an. Alle Beispiele, auch die aus Platzmangel hier nicht abgedruckten, werden zusammen mit der Implementierung auf <https://github.com/lhofmann/buildings> zur Verfügung gestellt.

Bei allen Beispielen fällt auf, dass die charakteristischen Polynome der Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P)$ und $\text{diag}(1, P, P)$ für festes P gleich sind. Dieses Phänomen konnten wir bei allen von uns ausgerechneten Beispielen beobachten. Zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit waren dies folgende Beispiele:

$q = 2$

N	P	$\dim \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$
$(T + 1)^2$	$1 \leq \deg(P) \leq 6$	1
$T^2 + T + 1$	$1 \leq \deg(P) \leq 6$	2
$T(T + 1)$	$1 \leq \deg(P) \leq 6$	2
$(T + 1)(T^2 + T + 1)$	$1 \leq \deg(P) \leq 4$	50
$T^3 + T + 1$	$1 \leq \deg(P) \leq 5$	20
$T(T + 1)^2$	$2 \leq \deg(P) \leq 4$	59
$T(T^2 + T + 1)$	$1 \leq \deg(P) \leq 6$	50
T^3	$1 \leq \deg(P) \leq 5$	22
$T(T + 1)(T^2 + T + 1)$	$3 \leq \deg(P) \leq 4$	1610
$T^2(T + 1)^2$	$2 \leq \deg(P) \leq 4$	803
$T^4 + T^3 + 1$	$1 \leq \deg(P) \leq 5$	194
$(T + 1)^2(T^2 + T + 1)$	$1 \leq \deg(P) \leq 4$	587
$T^3(T + 1)$	$2 \leq \deg(P) \leq 4$	857
T^4	$1 \leq \deg(P) \leq 3$	331
$T^5 + T^2 + 1$	$1 \leq \deg(P) \leq 3$	1600

$q = 3$

N	P	$\dim \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$
$T^2 + 1$	$1 \leq \deg(P) \leq 4$	3
$T(T + 1)$	$1 \leq \deg(P) \leq 3$	3
$T^3 - T + 1$	$1 \leq \deg(P) \leq 3$	90
$T(T^2 + 1)$	$1 \leq \deg(P) \leq 2$	177
T^3	$1 \leq \deg(P) \leq 2$	122

5 Beispiele

$$q = 4$$

N	P	$\dim \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$
$T(T+1)$	$1 \leq \deg(P) \leq 3$	4
T^2	$1 \leq \deg(P) \leq 3$	3

Wir geben deswegen in den folgenden Beispielen nur einen der beiden Heckeoperatoren an. Die charakteristischen Polynome sind dabei in ihre irreduziblen Faktoren über \mathbb{Z} zerlegt. Um Basen der harmonischen Koketten $\mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$ anzugeben, schreiben wir eine harmonische Kokette als ein Element in $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}_d(\Gamma \backslash \mathcal{B})}$.

Siehe Abschnitt 4.1, Paragraph *Visualisierung* zur Interpretation der folgenden Illustrationen.

5.1 $q = 2, N = T^2 + T + 1$

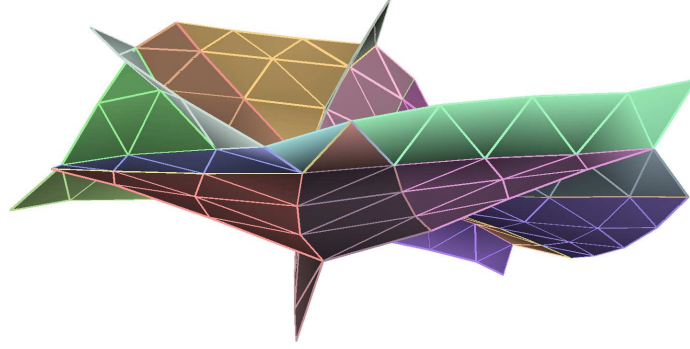


Abbildung 5.1: $d = 2, q = 2, N = T^2 + T + 1$

Eine Basis von $\mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$ ist $\{B_1, B_2\}$ mit

$$\begin{aligned}
 B_1 := & \left[\begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_2 \\
 & - \left[\begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 + \left[\begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ 1 & T^2 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 - \left[\begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ 1 & T & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_2, \\
 B_2 := & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2.
 \end{aligned}$$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P)$

P	Abbildungsmatrix	$\chi^{\text{char}}(T)$
T	$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$T^2 + T + 4$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$T^2 + T + 4$
$T^3 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$T^2 + 4T + 19$
$T^3 + T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$T^2 + 4T + 19$
$T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$T^2 - 6T + 9$
$T^4 + T + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$T^2 - 6T + 9$
$T^5 + T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} -11 & 96 \\ -24 & -35 \end{pmatrix}$	$T^2 + 46T + 2689$
$T^5 + T^4 + T^2 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -11 & 96 \\ -24 & -35 \end{pmatrix}$	$T^2 + 46T + 2689$
$T^6 + T^4 + T^3 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -15 & 72 \\ -18 & -33 \end{pmatrix}$	$T^2 + 48T + 1791$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, P, P)$

P	Abbildungsmatrix	$\chi^{\text{char}}(T)$
T	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$T^2 + T + 4$
$T + 1$	$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$T^2 + T + 4$
$T^3 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$T^2 + 4T + 19$
$T^3 + T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$T^2 + 4T + 19$
$T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$T^2 - 6T + 9$
$T^4 + T + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$T^2 - 6T + 9$
$T^5 + T^4 + T^2 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -35 & -96 \\ 24 & 11 \end{pmatrix}$	$T^2 + 46T + 2689$
$T^5 + T^4 + T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} -11 & 96 \\ -24 & -35 \end{pmatrix}$	$T^2 + 46T + 2689$
$T^6 + T^4 + T^3 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -33 & -72 \\ 18 & -15 \end{pmatrix}$	$T^2 + 48T + 1791$

5.2 $q = 2, N = (T + 1)^2$

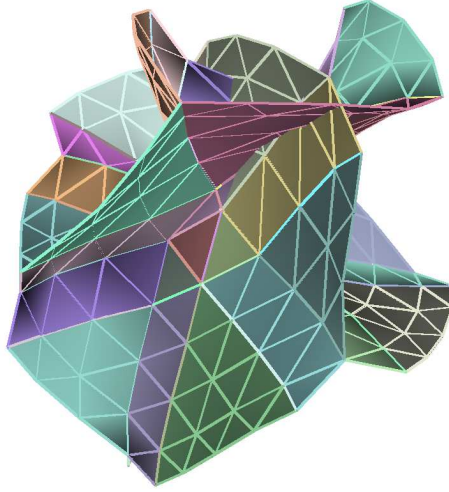


Abbildung 5.2: $d = 2, q = 2, N = T^2 + 1$

Eine Basis von $\mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z})$ ist $\{B\}$ mit

$$B := \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ T & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_2 - \left[\begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_2 + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & T+1 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 \\ - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 + \left[\begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 + \left[\begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ 1 & T^2+T & 0 \\ T & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2 - \left[\begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ 1 & T^2 & 0 \\ 0 & T & 1 \end{pmatrix} \right]_2$$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P)$			$\text{diag}(1, P, P)$	
P	Abbildungsmatrix	$\chi^{\text{char}}(T)$	Abb.mat.	$\chi^{\text{char}}(T)$
T	$\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$	$T + 1$	$\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$	$T + 1$
$T^2 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$	$T + 3$	$\begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$	$T + 3$
$T^3 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -7 \end{pmatrix}$	$T + 7$	$\begin{pmatrix} -7 \end{pmatrix}$	$T + 7$
$T^3 + T^2 + 1$	$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$	$T - 1$	$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$	$T - 1$
$T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$	$\begin{pmatrix} -15 \end{pmatrix}$	$T + 15$	$\begin{pmatrix} -15 \end{pmatrix}$	$T + 15$
$T^4 + T + 1$	$\begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}$	$T - 9$	$\begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}$	$T - 9$

5.3 $q = 2, N = T(T + 1)^2$

$$\dim \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}) = 59$$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P)$ ($\hat{=}$ $\text{diag}(1, P, P)$)

P	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T^2 + T + 1$	$(T - 5)T^{14}(T + 3)^{12}(T^2 + 7)^9(T^2 + 8T + 64) \cdot (T^4 - 6T^3 - 18T + 279)^3$
$T^3 + T^2 + 1$	$(T - 1)^{12}(T + 7)(T^2 - 7T + 13)(T^2 + T + 37)^7 \cdot (T^2 + 8T + 23)^9(T^4 + 2T^3 + 120T^2 - 826T + 1279)^3$
$T^3 + T + 1$	$(T - 1)^6(T + 7)^7(T^2 - 7T + 13)(T^2 - 6T + 37)^9 \cdot (T^2 + T + 37)^7(T^4 - 8T^3 - 30T^2 - 176T + 4309)^3$
$T^4 + T^3 + 1$	$(T + 7)^6(T + 15)^7(T^2 - 51T + 657)(T^2 - 28T + 203)^9 \cdot (T^2 + 21T + 441)^7(T^4 + 22T^3 + 228T^2 - 3278T + 16531)^3$
$T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$	$(T - 33)(T - 9)^6(T + 15)^6(T^2 - 14T + 77)^9(T^2 - 3T + 9) \cdot (T^2 + 21T + 441)^7(T^4 - 54T^2 + 360T + 3789)^3$

5.4 $q = 2, N = T^3$

$$\dim \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}) = 22$$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P)$ ($\hat{=}$ $\text{diag}(1, P, P)$)

P	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T + 1$	$(T - 3)(T + 1)^7(T^2 + 3)(T^4 + 2T^2 - 24T + 37)^3$
$T^2 + T + 1$	$(T - 5)(T - 1)(T + 3)^6(T^2 + 4T + 7) \cdot (T^4 + 18T^2 - 72T + 117)^3$
$T^3 + T^2 + 1$	$(T - 5)^2(T - 1)(T + 7)^7 \cdot (T^4 - 12T^3 + 62T^2 - 348T + 1321)^3$
$T^3 + T + 1$	$(T - 1)^6(T + 3)(T + 7)(T^2 - 12T + 39) \cdot (T^4 - 8T^3 + 90T^2 - 512T + 1261)^3$
$T^4 + T^3 + 1$	$(T - 9)(T + 7)(T + 15)^6(T^2 + 6T + 57) \cdot (T^4 + 12T^3 + 342T^2 - 2772T + 18801)^3$
$T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$	$(T + 7)^7(T + 11)(T^2 + 4T + 79) \cdot (T^4 - 16T^3 - 366T^2 + 2792T + 60373)^3$
$T^4 + T + 1$	$(T - 29)(T - 9)^6(T + 7)(T^2 - 4T + 31) \cdot (T^4 + 24T^3 + 282T^2 + 1440T + 2925)^3$
$T^5 + T^2 + 1$	$(T - 49)(T - 17)^6(T + 23)(T^2 - 2T + 1201) \cdot (T^4 - 108T^3 + 3230T^2 - 15612T + 25801)^3$

5 Beispiele

5.5 $q = 2, N = T(T^2 + T + 1)$

$$\dim \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}) = 50$$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P) \ (\cong \text{diag}(1, P, P))$	
P	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T + 1$	$(T - 2)(T + 2)(T^2 + T + 1)^3(T^2 + T + 4)^6(T^2 + T + 7)(T^4 + 3T^3 + 16T^2 - 21T + 49)(T^8 - 2T^7 - 8T^6 - 26T^5 + 112T^4 + 130T^3 - 191T^2 - 290T + 337)^3$
$T^3 + T^2 + 1$	$(T - 1)(T + 7)(T^2 - 17T + 79)(T^2 + 4T + 19)^6(T^2 + 7T + 49)^3(T^4 - 5T^2 - 666T + 4363)(T^8 - 14T^7 + 7T^6 - 44T^5 + 10648T^4 - 75878T^3 + 40282T^2 + 498334T + 1091917)^3$
$T^3 + T + 1$	$(T - 1)(T + 7)(T^2 - 17T + 79)(T^2 + 4T + 19)^6(T^2 + 7T + 49)^3(T^4 - 5T^2 - 666T + 4363)(T^8 - 2T^7 + 79T^6 - 1592T^5 + 13162T^4 - 57356T^3 + 485098T^2 + 424942T + 107839)^3$
$T^4 + T^3 + 1$	$(T - 3)^{12}(T + 7)(T + 15)(T^2 - 45T + 513)^3(T^2 + 15T + 225)(T^4 + 20T^3 + 355T^2 + 2772T + 21168)(T^8 - 6T^7 - 459T^6 - 10746T^5 + 37395T^4 + 3052890T^3 + 50674977T^2 + 344465622T + 1126699389)^3$
$T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$	$(T - 33)(T - 3)^{12}(T + 15)(T^2 - 12T + 144)(T^2 + 9T + 81)^3(T^4 + 33T^3 + 900T^2 + 6237T + 35721)(T^8 - 6T^7 + 351T^6 - 5508T^5 + 76923T^4 - 922590T^3 + 8276337T^2 - 52350948T + 152552727)^3$
$T^4 + T + 1$	$(T - 3)^{12}(T + 7)(T + 15)(T^2 + 15T + 225)(T^2 + 18T + 513)^3(T^4 - 13T^3 + 103T^2 - 2268T + 21168)(T^8 + 12T^7 + 72T^6 - 5832T^5 + 25488T^4 + 207360T^3 + 6967296T^2 - 196328448T + 1310846976)^3$
$T^5 + T^2 + 1$	$(T + 23)^2(T^2 + 10T + 457)^3(T^2 + 46T + 637)(T^2 + 46T + 2689)^6(T^4 + 2T^3 + 1365T^2 - 142492T + 2955631)(T^8 + 58T^7 + 2320T^6 + 44692T^5 + 1347058T^4 + 28381630T^3 + 714781171T^2 + 8144080978T + 81489080959)^3$
$T^5 + T^4 + T^2 + T + 1$	$(T - 17)(T + 23)(T^2 - 53T + 709)(T^2 + 46T + 961)^3(T^2 + 46T + 2689)^6(T^4 + 3T^3 + 154T^2 - 147T + 2401)(T^8 + 4T^7 - 1046T^6 - 24860T^5 + 793288T^4 + 13495270T^3 - 462435191T^2 - 850661438T + 156104572651)^3$
$T^5 + T^3 + T^2 + T + 1$	$(T - 49)(T + 23)(T^2 - 11T + 121)^3(T^2 + 7T + 559)(T^2 + 16T + 79)^6(T^4 - 106T^3 + 3621T^2 - 43036T + 213787)(T^8 - 8T^7 - 1643T^6 - 15254T^5 + 1618918T^4 + 11932576T^3 - 651669770T^2 - 1832432156T + 95942418793)^3$
$T^5 + T^3 + 1$	$(T + 23)^2(T^2 - 74T + 1429)^6(T^2 + 31T + 457)^3(T^2 + 46T + 637)(T^4 - 73T^3 - 1050T^2 + 61103T + 2955631)(T^8 + 40T^7 + 3523T^6 + 73630T^5 + 3000565T^4 + 64918492T^3 + 778843213T^2 + 6608610418T + 27643989607)^3$
$T^5 + T^4 + T^3 + T + 1$	$(T - 17)(T + 23)(T^2 - 59T + 961)^3(T^2 - 53T + 709)(T^2 + 16T + 79)^6(T^4 + 12T^3 + 49T^2 - 588T + 2401)(T^8 + 46T^7 + 2911T^6 + 56674T^5 + 1658086T^4 + 7208890T^3 + 448021222T^2 - 2208180320T + 32998467661)^3$
$T^5 + T^4 + T^3 + T^2 + 1$	$(T - 49)(T + 23)(T^2 - 74T + 1429)^6(T^2 - 11T + 121)^3(T^2 + 7T + 559)(T^4 + 74T^3 + 3180T^2 + 44030T + 213787)(T^8 - 38T^7 + 1507T^6 - 105020T^5 + 2493571T^4 - 59233214T^3 + 2355290377T^2 - 24928791104T + 243958608439)^3$
$T^6 + T^4 + T^3 + T + 1$	$(T - 57)(T - 3)^6(T + 39)(T^2 - 15T + 1575)(T^2 + 48T + 1791)^6(T^4 + 126T^3 + 18423T^2 - 192294T + 729081)(T^8 - 150T^7 + 5220T^6 - 1414314T^5 + 197004312T^4 - 5883832386T^3 + 218442722049T^2 - 30819325400370T + 1089094934852541)^3$

$$5.6 \quad q = 2, N = T^2(T + 1)^2$$

5.6 $q = 2, N = T^2(T + 1)^2$

$$\dim \mathcal{H}_l(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}) = 803$$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P)$ ($\cong \text{diag}(1, P, P)$)	
P	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T^2 + T + 1$	$(T - 7)^{18}(T - 5)^{27}(T - 3)^{72}(T)^{98}(T + 3)^{122}(T^2 + 3)^2(T^2 + 7)^{72}(T^2 + 15)^{12}(T^2 + 4T + 11)^6(T^2 + 6T + 37)^{36}(T^2 + 8T + 64)^{14}(T^3 - 8T^2 - 21T + 24)^2(T^4 - 6T^3 - 18T + 279)^{24}(T^4 + 2T^3 - 4T^2 - 26T + 43)^6(T^4 + 2T^3 + 28T^2 - 90T + 75)^{12}(T^4 + 6T^3 + 36T^2 + 18T + 387)^2$
$T^3 + T^2 + 1$	$(T - 17)^7(T - 13)^{12}(T - 1)^{103}(T + 7)^{39}(T^2 - 16T + 71)^{18}(T^2 - 7T + 13)^{14}(T^2 - 6T + 37)^{36}(T^2 - 4T + 19)^6(T^2 + 63)^3(T^2 + T + 37)^{49}(T^2 + 2T + 13)^2(T^2 + 4T + 19)^{36}(T^2 + 8T + 23)^{36}(T^2 + 8T + 79)^9(T^2 + 12T + 43)^{18}(T^2 + 14T + 161)^3(T^4 - 14T^3 - 16T^2 + 518T + 1303)^3(T^4 - 8T^3 - 30T^2 - 176T + 4309)^{12}(T^4 + 54T^2 - 4032T + 25929)^3(T^4 + 2T^3 + 120T^2 - 826T + 1279)^{12}(T^4 + 10T^3 + 96T^2 + 670T + 1591)(T^4 + 10T^3 + 144T^2 - 242T + 6679)(T^4 + 16T^3 + 198T^2 + 1072T + 2617)^6(T^4 + 18T^3 + 256T^2 + 1926T + 7783)^6(T^6 - 13T^5 + 119T^4 - 976T^3 + 5789T^2 - 17563T + 19747)$
$T^3 + T + 1$	$(T - 17)^7(T - 13)^{12}(T - 1)^{103}(T + 7)^{39}(T^2 - 16T + 71)^{18}(T^2 - 7T + 13)^{14}(T^2 - 6T + 37)^{36}(T^2 - 4T + 19)^6(T^2 + 63)^3(T^2 + T + 37)^{49}(T^2 + 2T + 13)^2(T^2 + 4T + 19)^{36}(T^2 + 8T + 23)^{36}(T^2 + 8T + 79)^9(T^2 + 12T + 43)^{18}(T^2 + 14T + 161)^3(T^4 - 14T^3 - 16T^2 + 518T + 1303)^3(T^4 - 8T^3 - 30T^2 - 176T + 4309)^{12}(T^4 + 54T^2 - 4032T + 25929)^3(T^4 + 2T^3 + 120T^2 - 826T + 1279)^{12}(T^4 + 10T^3 + 96T^2 + 670T + 1591)(T^4 + 10T^3 + 144T^2 - 242T + 6679)(T^4 + 16T^3 + 198T^2 + 1072T + 2617)^6(T^4 + 18T^3 + 256T^2 + 1926T + 7783)^6(T^6 - 13T^5 + 119T^4 - 976T^3 + 5789T^2 - 17563T + 19747)$
$T^4 + T^3 + 1$	$(T - 33)^8(T - 13)^6(T - 9)^{44}(T - 5)^{12}(T + 7)^{18}(T + 15)^{79}(T^2 - 51T + 657)^7(T^2 - 28T + 203)^{36}(T^2 - 14T + 77)^{36}(T^2 - 4T + 11)^{18}(T^2 - 3T + 9)^7(T^2 + 15)^6(T^2 + 135)^{36}(T^2 + 4T + 347)^3(T^2 + 16T + 71)^{18}(T^2 + 21T + 441)^{49}(T^2 + 28T + 539)^9(T^4 - 24T^3 - 546T^2 + 792T + 319329)^6(T^4 - 10T^3 - 68T^2 - 510T + 13131)^6(T^4 - 54T^2 + 360T + 3789)^{12}(T^4 + 8T^3 + 62T^2 + 184T + 193)^3(T^4 + 12T^3 + 582T^2 + 3276T + 62433)(T^4 + 22T^3 + 228T^2 - 3278T + 16531)^{12}(T^4 + 30T^3 + 684T^2 + 3258T + 8379)(T^4 + 38T^3 + 828T^2 + 8306T + 48427)^3(T^4 + 54T^3 + 1908T^2 + 28242T + 154179)(T^6 - 45T^5 + 651T^4 - 25812T^3 + 602217T^2 - 1996407T + 52593219)$
$T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$	$(T - 33)^8(T - 13)^6(T - 9)^{44}(T - 5)^{12}(T + 7)^{18}(T + 15)^{79}(T^2 - 51T + 657)^7(T^2 - 28T + 203)^{36}(T^2 - 14T + 77)^{36}(T^2 - 4T + 11)^{18}(T^2 - 3T + 9)^7(T^2 + 15)^6(T^2 + 135)^{36}(T^2 + 4T + 347)^3(T^2 + 16T + 71)^{18}(T^2 + 21T + 441)^{49}(T^2 + 28T + 539)^9(T^4 - 24T^3 - 546T^2 + 792T + 319329)^6(T^4 - 10T^3 - 68T^2 - 510T + 13131)^6(T^4 - 54T^2 + 360T + 3789)^{12}(T^4 + 8T^3 + 62T^2 + 184T + 193)^3(T^4 + 12T^3 + 582T^2 + 3276T + 62433)(T^4 + 22T^3 + 228T^2 - 3278T + 16531)^{12}(T^4 + 30T^3 + 684T^2 + 3258T + 8379)(T^4 + 38T^3 + 828T^2 + 8306T + 48427)^3(T^4 + 54T^3 + 1908T^2 + 28242T + 154179)(T^6 - 45T^5 + 651T^4 - 25812T^3 + 602217T^2 - 1996407T + 52593219)$

5 Beispiele

5.7 $q = 3, N = T(T + 1)$

$$\dim \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}) = 3$$

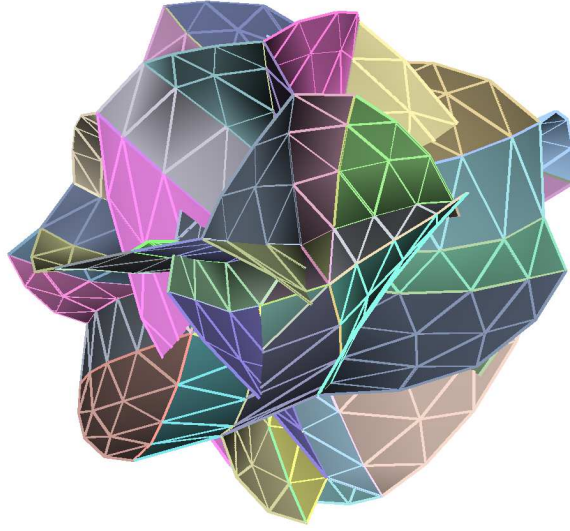


Abbildung 5.3: $d = 2, q = 3, N = T^2 + T$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P)$		$\text{diag}(1, P, P)$
P	$\chi^{\text{char}}(T)$	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T + 2$	$T^2(T + 3)$	$T^2(T + 3)$
$T^2 + 1$	$(T + 5)(T^2 + 13T + 169)$	$(T + 5)(T^2 + 13T + 169)$
$T^2 + 2T + 2$	$(T + 5)(T^2 + 13T + 169)$	$(T + 5)(T^2 + 13T + 169)$
$T^2 + T + 2$	$(T - 13)^2(T + 5)$	$(T - 13)^2(T + 5)$
$T^3 + 2T + 1$	$(T + 11)(T^2 + 7T + 139)$	$(T + 11)(T^2 + 7T + 139)$
$T^3 + 2T^2 + 2T + 2$	$(T - 37)(T^2 + 7T + 1153)$	$(T - 37)(T^2 + 7T + 1153)$
$T^3 + T^2 + T + 2$	$(T - 37)(T^2 + 7T + 1153)$	$(T - 37)(T^2 + 7T + 1153)$
$T^3 + 2T + 2$	$(T + 11)(T^2 + 7T + 139)$	$(T + 11)(T^2 + 7T + 139)$
$T^3 + T^2 + 2$	$(T + 11)(T^2 + 7T + 139)$	$(T + 11)(T^2 + 7T + 139)$

5.8 $q = 3, N = T(T^2 + 1)$

$$\dim \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}) = 177$$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P) (\cong \text{diag}(1, P, P))$	
P	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T + 2$	$(T - 3)^2(T - 1)^7(T)^2(T + 1)^6(T + 3)^2(T^2 - 6T - 11)(T^2 - T + 9)(T^2 + 4T + 16)^3(T^2 + 4T + 19)^6(T^4 - 5T^3 - 5T^2 - 150T + 900)(T^4 + T^3 + 6T^2 - 5T + 25)^3(T^8 - 8T^7 + 59T^5 + 135T^4 - 164T^3 - 320T^2 - 1272T + 4656)(T^8 - 4T^7 + 12T^6 - 172T^5 + 350T^4 - 668T^3 + 6172T^2 - 1716T + 6521)^3(T^8 + 7T^7 + 36T^6 + 26T^5 - 105T^4 - 86T^3 + 1576T^2 + 4368T + 4656)(T^8 + 7T^7 + 54T^6 + 107T^5 + 183T^4 - 1001T^3 - 1454T^2 + 771T + 13791)(T^{12} + 10T^{11} + 111T^{10} + 356T^9 + 2286T^8 + 631T^7 + 39346T^6 - 23739T^5 + 329040T^4 - 491454T^3 + 2125359T^2 - 2105352T + 2368521)(T^{20} - 6T^{19} - 12T^{18} - 16T^{17} + 779T^{16} - 110T^{15} - 4596T^{14} - 12483T^{13} - 15061T^{12} + 238726T^{11} - 68383T^{10} - 1077457T^9 + 1558162T^8 + 2124003T^7 - 4957466T^6 - 3874428T^5 + 13466043T^4 + 22350596T^3 + 41405359T^2 - 60849241T + 23156179)^3$
$T + 1$	$(T - 3)^2(T - 1)^7(T)^2(T + 1)^6(T + 3)^2(T^2 - 6T - 11)(T^2 - T + 9)(T^2 + 4T + 16)^3(T^2 + 4T + 19)^6(T^4 - 5T^3 - 5T^2 - 150T + 900)(T^4 + T^3 + 6T^2 - 5T + 25)^3(T^8 - 8T^7 + 59T^5 + 135T^4 - 164T^3 - 320T^2 - 1272T + 4656)(T^8 - 4T^7 + 12T^6 - 172T^5 + 350T^4 - 668T^3 + 6172T^2 - 1716T + 6521)^3(T^8 + 7T^7 + 36T^6 + 26T^5 - 105T^4 - 86T^3 + 1576T^2 + 4368T + 4656)(T^8 + 7T^7 + 54T^6 + 107T^5 + 183T^4 - 1001T^3 - 1454T^2 + 771T + 13791)(T^{12} + 10T^{11} + 111T^{10} + 356T^9 + 2286T^8 + 631T^7 + 39346T^6 - 23739T^5 + 329040T^4 - 491454T^3 + 2125359T^2 - 2105352T + 2368521)(T^{20} - 6T^{19} - 12T^{18} - 16T^{17} + 779T^{16} - 110T^{15} - 4596T^{14} - 12483T^{13} - 15061T^{12} + 238726T^{11} - 68383T^{10} - 1077457T^9 + 1558162T^8 + 2124003T^7 - 4957466T^6 - 3874428T^5 + 13466043T^4 + 22350596T^3 + 41405359T^2 - 60849241T + 23156179)^3$
$T^2 + 2T + 2$	$(T - 16)^2(T - 7)^2(T + 5)^7(T + 9)^2(T^2 - 11T + 37)^3(T^2 - 4T + 16)^6(T^2 - 2T + 61)^7(T^2 + 13T + 169)(T^2 + 14T + 301)^3(T^4 + 11T^3 + 162T^2 - 451T + 1681)(T^4 + 13T^3 + 148T^2 + 273T + 441)^2(T^8 - 34T^7 + 408T^6 - 1888T^5 + 1999T^4 - 2574T^3 + 94653T^2 - 369603T + 953613)(T^8 - 8T^7 + 28T^6 - 5496T^5 + 49830T^4 - 80696T^3 + 3773788T^2 - 13544648T + 12757601)^3(T^8 + 35T^7 + 621T^6 + 6326T^5 + 41167T^4 + 178308T^3 + 541260T^2 + 1063530T + 953613)(T^{12} - 11T^{11} - 149T^{10} - 2474T^9 + 52951T^8 + 340390T^7 - 2947406T^6 - 26954984T^5 + 124429945T^4 + 819785064T^3 - 10617942672T^2 + 18907371648T + 440492380416)(T^{20} + 7T^{19} + 199T^{18} - 4367T^{17} - 37187T^{16} - 960411T^{15} + 1610028T^{14} + 20109549T^{13} + 1468507453T^{12} + 10635120557T^{11} + 140390618556T^{10} + 702083456443T^9 + 6923966823054T^8 + 26921173825189T^7 + 244352610552113T^6 + 809418628453792T^5 + 5120749935191940T^4 + 14090796863597244T^3 + 35157306900615025T^2 + 92344744915041927T + 95619580232992207)^3$
$T^2 + T + 2$	$(T - 16)^2(T - 7)^2(T + 5)^7(T + 9)^2(T^2 - 11T + 37)^3(T^2 - 4T + 16)^6(T^2 - 2T + 61)^7(T^2 + 13T + 169)(T^2 + 14T + 301)^3(T^4 + 11T^3 + 162T^2 - 451T + 1681)(T^4 + 13T^3 + 148T^2 + 273T + 441)^2(T^8 - 34T^7 + 408T^6 - 1888T^5 + 1999T^4 - 2574T^3 + 94653T^2 - 369603T + 953613)(T^8 - 8T^7 + 28T^6 - 5496T^5 + 49830T^4 - 80696T^3 + 3773788T^2 - 13544648T + 12757601)^3(T^8 + 35T^7 + 621T^6 + 6326T^5 + 41167T^4 + 178308T^3 + 541260T^2 + 1063530T + 953613)(T^{12} - 11T^{11} - 149T^{10} - 2474T^9 + 52951T^8 + 340390T^7 - 2947406T^6 - 26954984T^5 + 124429945T^4 + 819785064T^3 - 10617942672T^2 + 18907371648T + 440492380416)(T^{20} + 7T^{19} + 199T^{18} - 4367T^{17} - 37187T^{16} - 960411T^{15} + 1610028T^{14} + 20109549T^{13} + 1468507453T^{12} + 10635120557T^{11} + 140390618556T^{10} + 702083456443T^9 + 6923966823054T^8 + 26921173825189T^7 + 244352610552113T^6 + 809418628453792T^5 + 5120749935191940T^4 + 14090796863597244T^3 + 35157306900615025T^2 + 92344744915041927T + 95619580232992207)^3$

5.9 $q = 4, N = T^2$

Wir repräsentieren die Elemente in \mathbb{F}_4 durch $\{0, 1, u, u^2\}$.

$$\dim \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}) = 3$$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P)$ ($\hat{=}$ $\text{diag}(1, P, P)$)

P	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T + u^2$	$(T - 5)(T + 3)^2$
$T + u$	$(T - 5)(T + 3)^2$
$T + 1$	$(T - 5)(T + 3)^2$
$T^2 + u^2T + u^2$	$(T - 9)(T + 7)(T + 15)$
$T^2 + u^2T + 1$	$(T - 9)(T + 7)(T + 15)$
$T^2 + uT + u$	$(T - 9)(T + 7)(T + 15)$
$T^2 + T + u^2$	$(T - 9)(T + 7)(T + 15)$
$T^2 + uT + 1$	$(T - 9)(T + 7)(T + 15)$
$T^2 + T + u$	$(T - 9)(T + 7)(T + 15)$
$T^3 + T^2 + T + u^2$	$(T - 105)(T + 39)(T + 63)$
$T^3 + uT^2 + u^2T + u$	$(T - 105)(T + 39)(T + 63)$
$T^3 + u^2T^2 + uT + u$	$(T - 105)(T + 39)(T + 63)$
$T^3 + T^2 + uT + u^2$	$(T - 57)(T + 15)(T + 39)$
$T^3 + uT^2 + T + u^2$	$(T - 57)(T + 15)(T + 39)$

5.10 $q = 4, N = T(T + 1)$

$$\dim \mathcal{H}_!(\Gamma \backslash \mathcal{B}, \mathbb{Z}) = 4$$

Heckeoperatoren der Form $\text{diag}(1, 1, P)$ ($\hat{=}$ $\text{diag}(1, P, P)$)

P	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T + u^2$	$(T)^2(T^2 + 3T + 36)$
$T + u$	$(T)^2(T^2 + 3T + 36)$
$T^2 + u^2T + u^2$	$(T - 3)^2(T^2 + 21T + 441)$
$T^2 + u^2T + 1$	$(T - 3)^2(T^2 + 21T + 441)$
$T^2 + uT + u$	$(T - 3)^2(T^2 + 21T + 441)$
$T^2 + T + u^2$	$(T - 21)^2(T - 3)^2$
$T^2 + uT + 1$	$(T - 3)^2(T^2 + 21T + 441)$
$T^2 + T + u$	$(T - 21)^2(T - 3)^2$
$T^3 + T^2 + T + u^2$	$(T - 45)^2(T^2 - 42T + 2601)$
$T^3 + uT^2 + u^2T + u$	$(T^2 + 48T + 1791)(T^2 + 57T + 3789)$

5.11 Ein-dimensionale Beispiele

Wir geben hier der Vollständigkeit halber einige $d = 1$ Beispiele, die wir mit unseren Algorithmen berechnet haben, an. In diesem Fall gibt es nur eine Art von Heckeoperator, $\text{diag}(1, P)$.

$$q = 2, N = T^5$$

P	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T + 1$	$(T - 1)^3(T + 1)^4(T^2 - 5)$
$T^2 + T + 1$	$(T - 3)(T - 1)^3(T + 1)^2(T + 3)(T^2 - 5)$
$T^3 + T^2 + 1$	$(T - 1)^7(T + 3)^2$
$T^3 + T + 1$	$(T - 3)^2(T - 1)(T + 1)(T + 3)^3(T^2 - 5)$
$T^4 + T^3 + 1$	$(T - 5)^2(T - 1)^5(T + 3)^2$
$T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$	$(T - 3)^3(T + 3)^4(T^2 - 5)$
$T^4 + T + 1$	$(T - 5)^3(T - 3)(T + 3)(T + 5)^2(T^2 - 45)$
$T^5 + T^2 + 1$	$(T - 9)^2(T + 3)^2(T + 7)^5$
$T^5 + T^4 + T^2 + T + 1$	$(T - 3)^2(T - 1)(T + 1)(T + 3)^3(T^2 - 45)$

$$q = 2, N = T^4 + T^2 + T$$

P	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T + 1$	$(T)(T + 2)(T^2 - 2)^2$
$T^2 + T + 1$	$(T + 1)(T + 3)(T^2 - 2T - 1)^2$
$T^3 + T^2 + 1$	$(T - 3)(T + 3)(T^2 + 2T - 1)^2$
$T^4 + T^3 + 1$	$(T - 5)(T + 1)(T^2 + 2T - 1)^2$
$T^4 + T^3 + T^2 + T + 1$	$(T - 3)^4(T + 1)(T + 5)$
$T^4 + T + 1$	$(T - 3)(T + 7)(T^2 - 2T - 17)^2$
$T^5 + T^2 + 1$	$(T - 3)(T + 7)(T^2 - 2T - 1)^2$
$T^5 + T^4 + T^2 + T + 1$	$(T - 1)(T + 3)(T^2 - 6T - 23)^2$
$T^5 + T^3 + T^2 + T + 1$	$(T - 3)(T + 3)(T^2 + 10T + 23)^2$

$$q = 3, N = T^4 + T + 1$$

P	$\chi^{\text{char}}(T)$
$T + 1$	$(T - 1)(T + 3)(T^2 - 2T - 1)(T^2 + 2T - 1)(T^3 + T^2 - 6T - 4)^2$
T	$(T - 2)(T + 2)(T^2 - 2)(T^2 + 4T + 2)(T^3 - T^2 - 5T - 2)^2$
$T^2 + 1$	$(T + 1)(T + 5)(T^2 - 2T - 17)(T^2 + 2T - 1)(T^3 - 2T^2 - 4T + 7)^2$
$T^2 + 2T + 2$	$(T - 1)(T + 3)(T^2 + 2T - 1)(T^2 + 6T + 7)(T^3 - 6T^2 + 8T + 1)^2$
$T^2 + T + 2$	$(T - 2)(T + 2)(T^2 - 2)(T^2 + 4T + 2)(T^3 - 16T - 8)^2$
$T^3 + 2T + 1$	$(T - 8)(T + 2)^2(T + 8)(T^2 - 4T - 28)(T^3 - 2T^2 - 60T + 224)^2$
$T^3 + 2T^2 + 2T + 2$	$(T - 7)^2(T^2 + 2T - 31)(T^2 + 2T - 7)(T^3 + 7T^2 + 10T - 4)^2$
$T^3 + 2T + 2$	$(T + 1)(T + 5)(T^2 - 10T + 7)(T^2 + 10T + 23)(T^3 + 7T^2 + 10T - 4)^2$
$T^3 + T^2 + 2$	$(T - 7)^2(T^2 - 2T - 7)(T^2 + 6T - 23)(T^3 + 7T^2 + 10T - 4)^2$
$T^3 + 2T^2 + T + 1$	$(T + 1)(T + 5)(T^2 - 2T - 49)(T^2 + 2T - 1)(T^3 + 7T^2 + 10T - 4)^2$
$T^3 + T^2 + 2T + 1$	$(T + 4)(T + 8)(T^2 - 12T + 34)(T^2 - 8T + 14)(T^3 - 3T^2 - 79T + 188)^2$
$T^3 + 2T^2 + 1$	$(T + 2)^2(T^2 + 4T - 28)^2(T^3 - 13T^2 + 25T + 46)^2$
$T^4 + 2T^3 + T + 1$	$(T - 4)(T + 8)(T^2 - 16T + 62)(T^2 - 4T + 2)(T^3 + 10T^2 + 12T - 64)^2$

Literaturverzeichnis

- [AB08] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown. *Buildings*. Number 248 in Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 2008.
- [BCP97] Wieb Bosma, John Cannon, and Catherine Playoust. The Magma algebra system. I. The user language. *J. Symbolic Comput.*, 24(3-4):235–265, 1997. Computational algebra and number theory (London, 1993).
- [But07] Ralf Butenuth. *Ein Algorithmus zum Berechnen von Hecke-Operatoren auf Drinfeldschen Modulformen*. Universität Duisburg-Essen, 2007.
- [CMB04] Thomas R. Shemanske Cristina M. Ballantine, John A. Rhodes. Hecke operators for gl_n and buildings. *Acta Arithmetica*, 112:131–140, 2004.
- [DS01] Ehud De Shalit. Residues on buildings and de rham cohomology of p-adic symmetric domains. *Duke Math. J.*, 106(1):123–191, 01 2001.
- [DS10] Fred Diamond and Jerry Shurman. *A first course in modular forms*. Number 228 in Graduate texts in mathematics ; 228 ; Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 2010.
- [FR91] Thomas M. J. Fruchterman and Edward M. Reingold. Graph drawing by force-directed placement, 1991.
- [Geb96] Max Gebhardt. *Operationen arithmetischer Untergruppen von $GL(3)$ auf Bruhat-Tits-Gebäuden*. Universität Saarbrücken, 1996.
- [Hat10] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge [u.a.], 13. print. edition, 2010.
- [KP⁺13] E. Preuß U. Reitebuch K. Polthier, K. Hildebrandt et al. Javaview. <http://www.javaview.de>, 1996-2013.
- [Mül15] Jennylee Müller. *Modulsymbole und Bruhat-Tits-Gebäude der $PGL(3)$ über Funktionenkörpern*. Universität Kassel, 2015.
- [Ser80] Jean Pierre Serre. *Trees*. Springer, Berlin ; Heidelberg [u.a.], 1980. Aus d. Franz. übers.