

Analisi delle proprietà strutturali e controllo via *Feedback Linearization* di un veicolo articolato



UNIVERSITÀ DI PISA

SCUOLA DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Robotica e
dell'Automazione

CONTROLLO DEI ROBOT

Livio Bisogni

Anno Accademico 2021-2022

Overview

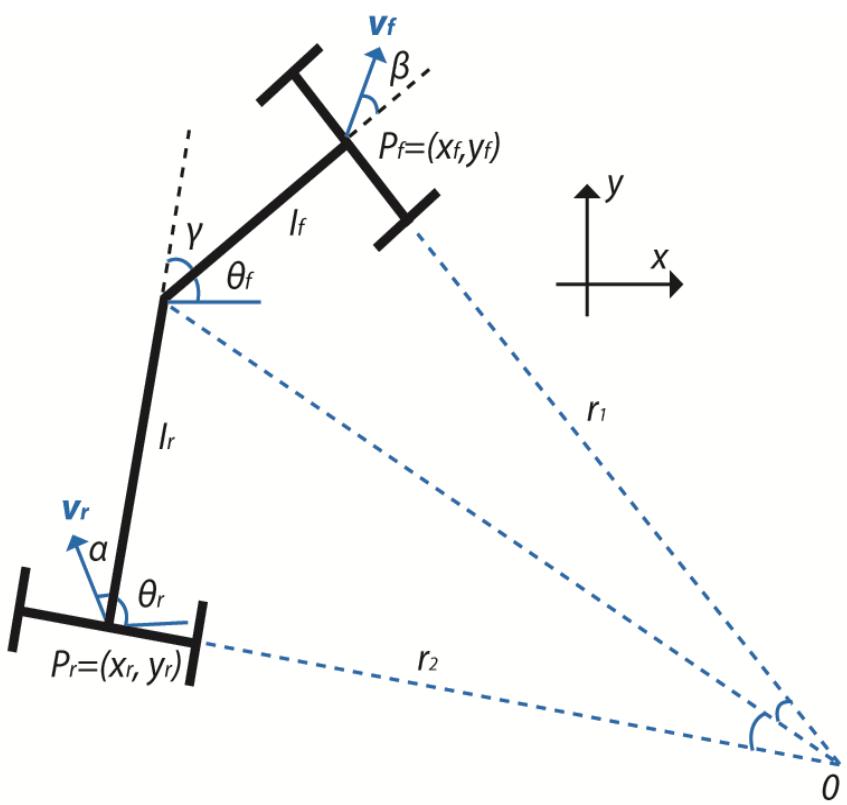
- Modello di un veicolo articolato
- Studio delle proprietà strutturali
 - Accessibilità
 - Controllabilità
 - Osservabilità
- Feedback Linearization
- Simulazione
 - Schema Simulink
 - Circonferenza
 - Sigmoide

Modello di un veicolo articolato

- Il veicolo *LHD* (*Load-Haul-Dump*) è un tipico esempio di veicolo articolato.



Modello di un veicolo articolato



(x_a, y_a) : posizione del centro dell'assale anteriore (motrice; *front*)

(x_p, y_p) : posizione del centro dell'assale posteriore (rimorchio; *rear*)

θ_a : angolo di orientazione anteriore

θ_p : angolo di orientazione posteriore

γ : angolo articolato ($\gamma = \theta_a - \theta_p$)

β : angolo di deriva anteriore

α : angolo di deriva posteriore

v_a : velocità anteriore

v_p : velocità posteriore

l_a : distanza tra assale anteriore e punto di aggancio

l_p : distanza tra punto di aggancio e assale posteriore

Modello di un veicolo articolato

T. Nayl, "Modeling, Control and Path Planning for an Articulated Vehicle", Licentiate Thesis, 2013, Department of Computer Science, Electrical and Space Engineering, Luleå University of Technology, Luleå, Sweden

- Equazioni cinematiche, sotto l'effetto di deriva, per la parte anteriore:

$$\begin{cases} \dot{x}_a = v_a \cos(\theta_a + \beta) \\ \dot{y}_a = v_a \sin(\theta_a + \beta) \end{cases}$$

- La relazione tra coordinate anteriori e posteriori è:

$$\begin{cases} x_p = x_a - l_a \cos(\theta_a) - l_p \cos(\theta_p) \\ y_p = y_a - l_a \sin(\theta_a) - l_p \sin(\theta_p) \end{cases}$$

- Le velocità possono essere calcolate come:

$$\begin{cases} v_a \cos(\alpha) = v_p \cos(\gamma - \alpha) + \dot{\theta}_p l_p \sin(\gamma + \beta - \alpha) \\ v_p \sin(\gamma + \beta - \alpha) = \dot{\theta}_a \cos(\alpha) + \dot{\theta}_p l_p \cos(\gamma - \alpha) \end{cases}$$

- La velocità angolare anteriore è:

$$\dot{\theta}_a = \frac{v_a \sin(\gamma + \beta - \alpha) + l_p \dot{y} \cos(\alpha)}{l_a \cos(\gamma - \alpha) + l_p \cos(\alpha)}$$

Modello di un veicolo articolato

- Scegliendo come vettore di stato:

$$q = [x_a \quad y_a \quad \theta_a \quad \gamma]^T$$

- e come ingresso il vettore:

$$u = [v_a \quad \dot{\gamma}]^T$$

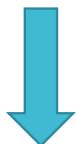
- si arriva a esprimere il sistema nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta}_a \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_a + \beta) & 0 \\ \sin(\theta_a + \beta) & 0 \\ \frac{\sin(\gamma + \beta - \alpha)}{l_a \cos(\gamma - \alpha) + l_p \cos(\alpha)} & \frac{l_p \cos(\alpha)}{l_a \cos(\gamma - \alpha) + l_p \cos(\alpha)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(q_3 + \beta) \\ \sin(q_3 + \beta) \\ \frac{\sin(q_4 + \beta - \alpha)}{l_a \cos(q_4 - \alpha) + l_p \cos(\alpha)} \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_p \cos(\alpha)}{l_a \cos(q_4 - \alpha) + l_p \cos(\alpha)} \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \end{aligned}$$

Studio delle proprietà strutturali

Accessibilità

- Teorema di Chow: se la distribuzione di accessibilità $\langle \Delta | \Delta_0 \rangle$ ha dimensione $r = n$ in x_0 allora il sistema è s.t.l.a. (*small-time local accessible*)
- Con riferimento al modello in forma affine di controllo si ha:
 - $\Delta_0(x) = \text{span}\{g_1, g_2\}$ $\dim \Delta_0(x) = 2$
 - $\Delta(x) = \text{span}\{g_1, g_2\}$ $(f = 0: \text{sistema } \textit{driftless})$
- Si procede con la filtrazione ottenendo:
 - $\Delta_1 = \text{span}\{g_1, g_2, [g_1, g_2]\}$ $\dim \Delta_1(x) = 3$
 - $\Delta_2 = \text{span}\{g_1, g_2, [g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]]\}$ $\dim \Delta_2(x) = 4$
- Iterando nuovamente si ha che $\dim \Delta_3(x) = \dim \Delta_2(x) = n = 4$



STOP della filtrazione!

Studio delle proprietà strutturali

Controllabilità

- Nel punto di equilibrio $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (e con $\beta = \alpha = 0$) la distribuzione Δ_2 :

$$\Delta_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_p/(l_a + l_p) \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -l_p/(l_a + l_p) \\ -1/(l_a + l_p) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(l_a + l_p) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

ha rango pieno, per cui il sistema è s.t.l.a. nell'origine.

- Poiché il sistema è senza drift ed è verificata la s.t.l.a., si può concludere sulla s.t.l.c.

Studio delle proprietà strutturali

Osservabilità

- Due stati x_1, x_2 sono indistinguibili quando $\forall u \in U$ le loro evoluzioni temporali producono la stessa uscita $y(x, u, t)$.
- L'osservabilità del sistema viene studiata attraverso le seguenti due uscite (coordinate cartesiane dell'assale anteriore):

$$\begin{cases} h_1(x) = x_a \\ h_2(x) = y_a \end{cases}$$

- Si costruisce la codistribuzione di osservabilità:

$$\begin{aligned} d\mathcal{O} &= \text{span}\{dh_1, dh_2, dL_{g_1}h_2, dL_{g_1}L_{g_1}h_2\} \\ &= \text{rowspan} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta + x_3) & 0 \\ 0 & 0 & -a/d & b/d - c/d^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- dove:

$$a = \sin(\beta - \alpha + x_4) \sin(\beta + x_3)$$

$$b = \cos(\beta - \alpha + x_4) \cos(\beta + x_3)$$

$$c = l_1 \sin(\alpha - x_4) \sin(\beta - \alpha + x_4) \cos(\beta + x_3)$$

$$d = l_2 \cos(\alpha) + l_1 \cos(\alpha - x_4)$$

Studio delle proprietà strutturali

Osservabilità

- Il determinante della codistribuzione di osservabilità è:

$$\dim d\mathcal{O} = \frac{\cos^2(\beta + x_3)(\frac{1}{2}(l_2 \cos(\beta - 2\alpha + x_4)) + \frac{1}{2}(l_2 \cos(\beta + x_4)) + l_1 \cos(\beta))}{(l_2 \cos(\alpha) + l_1 \cos(\alpha - x_4))^2}$$

- Si annulla in (punti di singolarità):

$$x_3 = \frac{\pi}{2} - \beta \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Fuori dai punti di singolarità $\dim d\mathcal{O} = n = 4$ e quindi il sistema è localmente osservabile.

Feedback Linearization

- La *Feedback Linearization* è una tecnica di controllo utilizzata per sistemi non lineari.
- L'idea di base consiste nella trasformazione, mediante un opportuno cambio di coordinate $\phi(x)$ ed ingresso linearizzante u , di un sistema non lineare in un equivalente (parziale o completo) sistema lineare, al fine di poter applicare su di esso tecniche di controllo lineare note.
- Le $m = 2$ uscite considerate sono quelle usate per l'analisi di osservabilità (coordinate cartesiane dell'assale anteriore):

$$\begin{aligned}y_1 &= h_1(x) = x_1 \\y_2 &= h_2(x) = x_2\end{aligned}$$

- Si derivano le uscite fino a quando non compaiono tutti gli $m = 2$ ingressi ($u = [v_a \quad \dot{\gamma}]^T$):

$$\begin{aligned}\dot{h}_1(x) &= u_1 \cos(x_3 + \beta) \\ \dot{h}_2(x) &= u_1 \sin(x_3 + \beta)\end{aligned}$$

Feedback Linearization

- Poiché è comparso solo il primo ingresso occorre eseguire una seconda derivazione.
- A questo scopo si ricorre a una linearizzazione dinamica:
 - introducendo un integratore a monte ($\dot{v}_a = a$);
 - aumentando lo spazio di stato ($\hat{q} = [x_a \ y_a \ \theta_a \ \gamma \ v_a]^T$);
 - utilizzando a come nuove prime ingresso ($\hat{u} = [a \ \dot{\gamma}]^T$).
- Procedendo con le derivazioni si ottiene:

$$\ddot{h}_1(x) = a \cos(\beta + x_3) - \frac{u_1 \sin(\beta + x_3) (u_1 \sin(\beta - \alpha + x_4) + l_2 u_2 \cos(\alpha))}{l_2 \cos(\alpha) + l_1 \cos(\alpha - x_4)}$$
$$\ddot{h}_2(x) = a \sin(\beta + x_3) + \frac{u_1 \sin(\beta + x_3) (u_1 \sin(\beta - \alpha + x_4) + l_2 u_2 \cos(\alpha))}{l_2 \cos(\alpha) + l_1 \cos(\alpha - x_4)}$$

Feedback Linearization

- L'ingresso linearizzante è:

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x) = -E^{-1}(x)(\Gamma(x) - \nu(x))$$

- dove:

$$\nu = \begin{bmatrix} \ddot{h}_1 \\ \ddot{h}_2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \cos(\beta + \theta_a) & -(l_2 u_1 \sin(\beta + \theta_a) \cos(\alpha))/d \\ \sin(\beta + \theta_a) & l_2 u_1 \sin(\beta + \theta_a) \cos(\alpha)/d \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} u_1^2 (\cos(2\beta - \alpha + \theta_a + \gamma) - \cos(\alpha + \theta_a - \gamma))/2d \\ u_1^2 (\sin(2\beta - \alpha + \theta_a + \gamma) - \sin(\alpha + \theta_a - \gamma))/2d \end{bmatrix}$$

$$d = l_2 \cos(\alpha) + l_1 \cos(\alpha - \gamma)$$

Feedback Linearization

- Il determinante della matrice E è:

$$\det(E) = \frac{l_2 u_1 \cos(\alpha)}{l_2 \cos(\alpha) + l_1 \cos(\alpha - \gamma)}$$

- Diventa singolare quando:
 - $u_1 = 0$ (velocità di avanzamento nulla)
 - $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \wedge \gamma \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots$ (angolo di deriva posteriore \parallel assale posteriore
 \wedge angolo di or. anteriore \neq angolo di or. posteriore)
- Pertanto, affinché E sia invertibile, il veicolo non deve essere fermo.

Feedback Linearization

- Attraverso il cambio di coordinate:

$$\xi = \Phi(\hat{q}) = \begin{bmatrix} x_a \\ u_1 \cos(\beta + \theta_a) \\ y_a \\ u_1 \sin(\beta + \theta_a) \end{bmatrix}$$

- Si arriva al sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + B_0 \nu \\ y = C_0 \xi \end{cases}$$

- Dove:

$$A_0 = \begin{bmatrix} {}^1A_0 & 0 \\ 0 & {}^2A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} {}^1B_0 & 0 \\ 0 & {}^2B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} {}^1C_0 & 0 \\ 0 & {}^2C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Feedback Linearization

- Dato un riferimento, è possibile a questo punto assegnare i poli del sistema lineare equivalente mediante controllore statico $K(\lambda) \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$:

$$\nu = \ddot{y}_d + K(\lambda)e$$

- Dove:

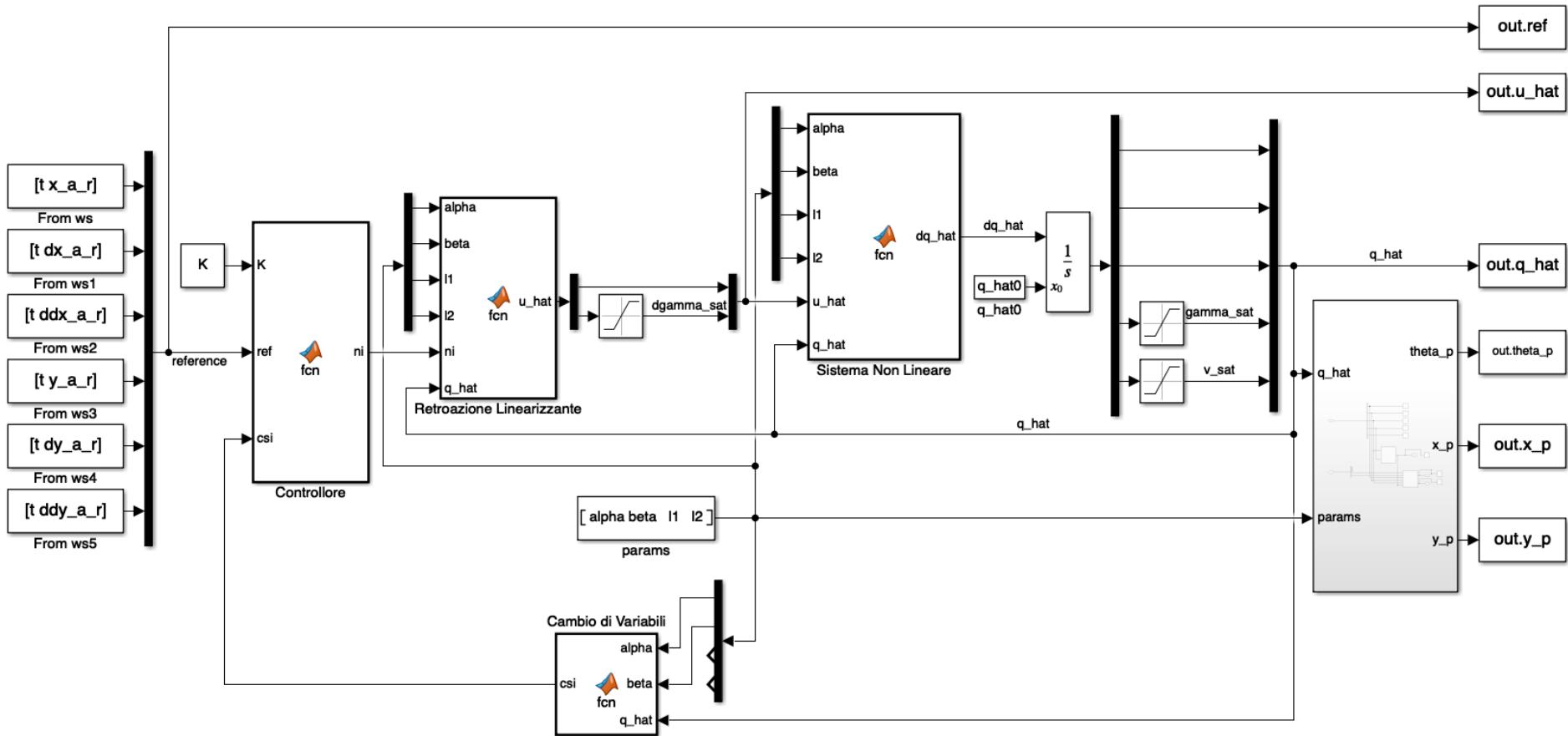
$$\ddot{y}_d = \begin{bmatrix} \ddot{y}_{1,d} \\ \ddot{y}_{2,d} \end{bmatrix}$$

$$K(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,d} - y_1 \\ \dot{y}_{1,d} - \dot{y}_1 \\ y_{2,d} - y_2 \\ \dot{y}_{2,d} - \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

Simulazione — Schema Simulink

- Sono state scelte come riferimento 2 traiettorie:
 - Circonferenza
 - Sigmoide (*S-like*)



Simulazione — Circonferenza

- Riferimento:

$$\begin{cases} x_r(t) = A \cos(\omega t) \\ y_r(t) = A \sin(\omega t) \end{cases}$$

Dove:

$$A = 10 \text{ m}$$

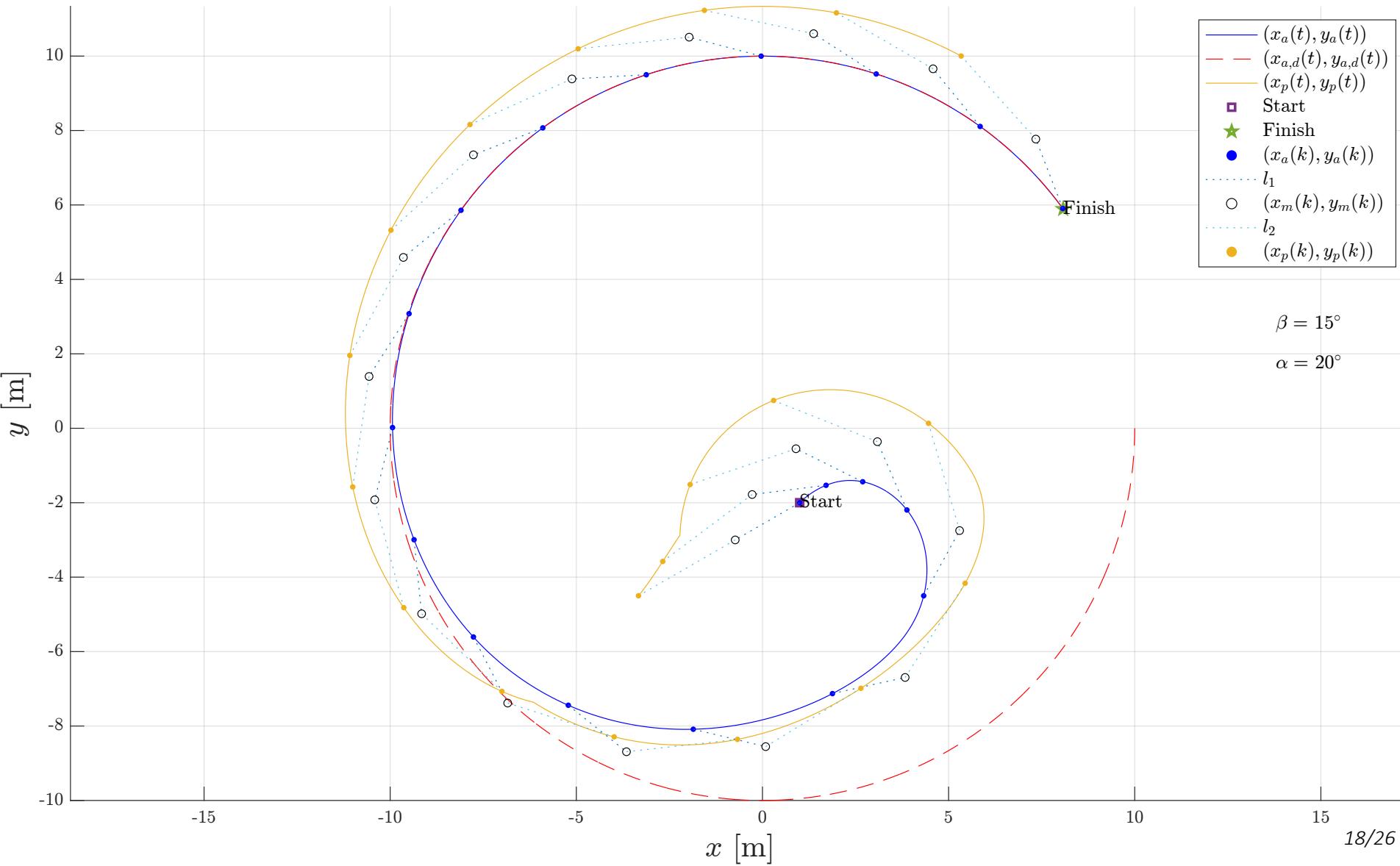
$$\omega = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}$$

- Parametri simulazione:

• Durata:	$t_f = 9 \text{ s}$
• Guadagni controllore:	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 4$
• Configurazione iniziale:	$q_0 = [1 \text{ m} \quad -2 \text{ m} \quad 30^\circ \quad 0^\circ \quad 1 \text{ m/s}]^T$
• Angoli di deriva:	$\beta = 15^\circ, \alpha = 20^\circ$
• Lunghezze:	$l_1 = 2 \text{ m}, l_2 = 3 \text{ m}$
• Saturazione angolo articolato:	$\gamma_{min} = -45^\circ, \gamma_{max} = 45^\circ$
• Saturazione rate angolo art.:	$\dot{\gamma}_{min} = -60^\circ/\text{s}, \dot{\gamma}_{max} = 60^\circ/\text{s}$
• Saturazione velocità:	$v_{a,min} = 0 \text{ m/s}, v_{a,max} = 15 \text{ m/s}$

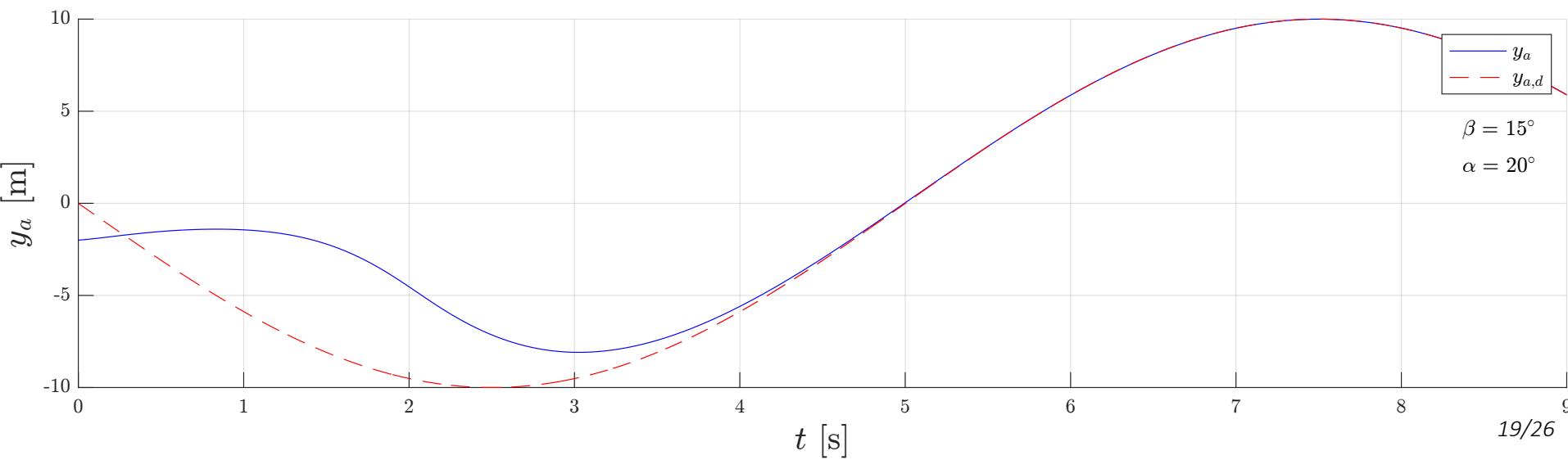
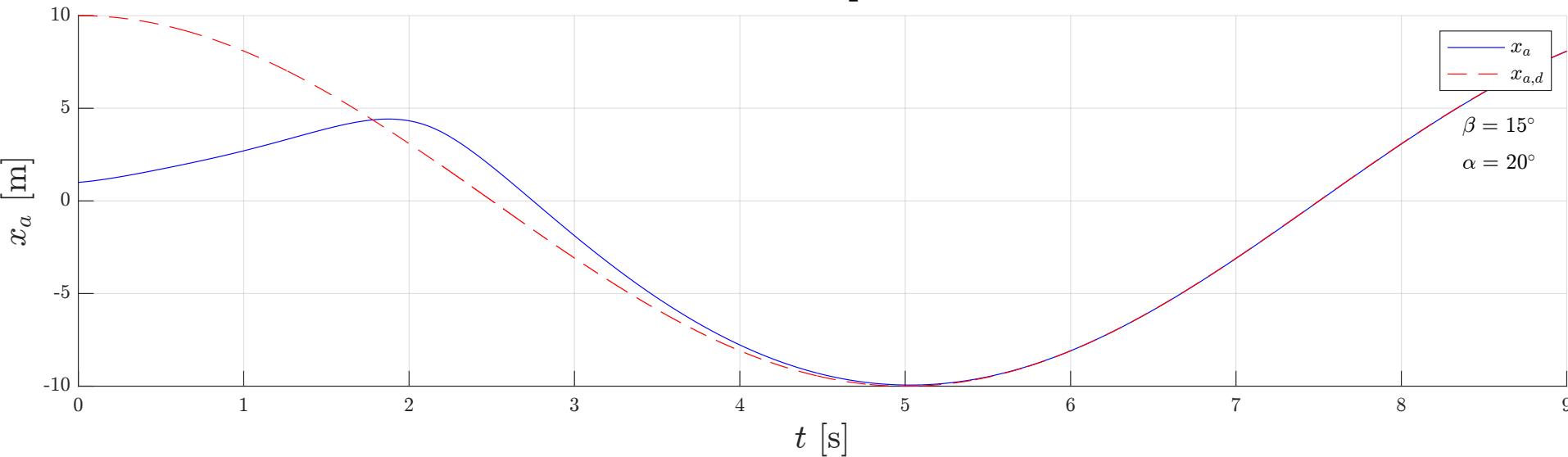
Simulazione — Circonferenza

Trajectory tracking



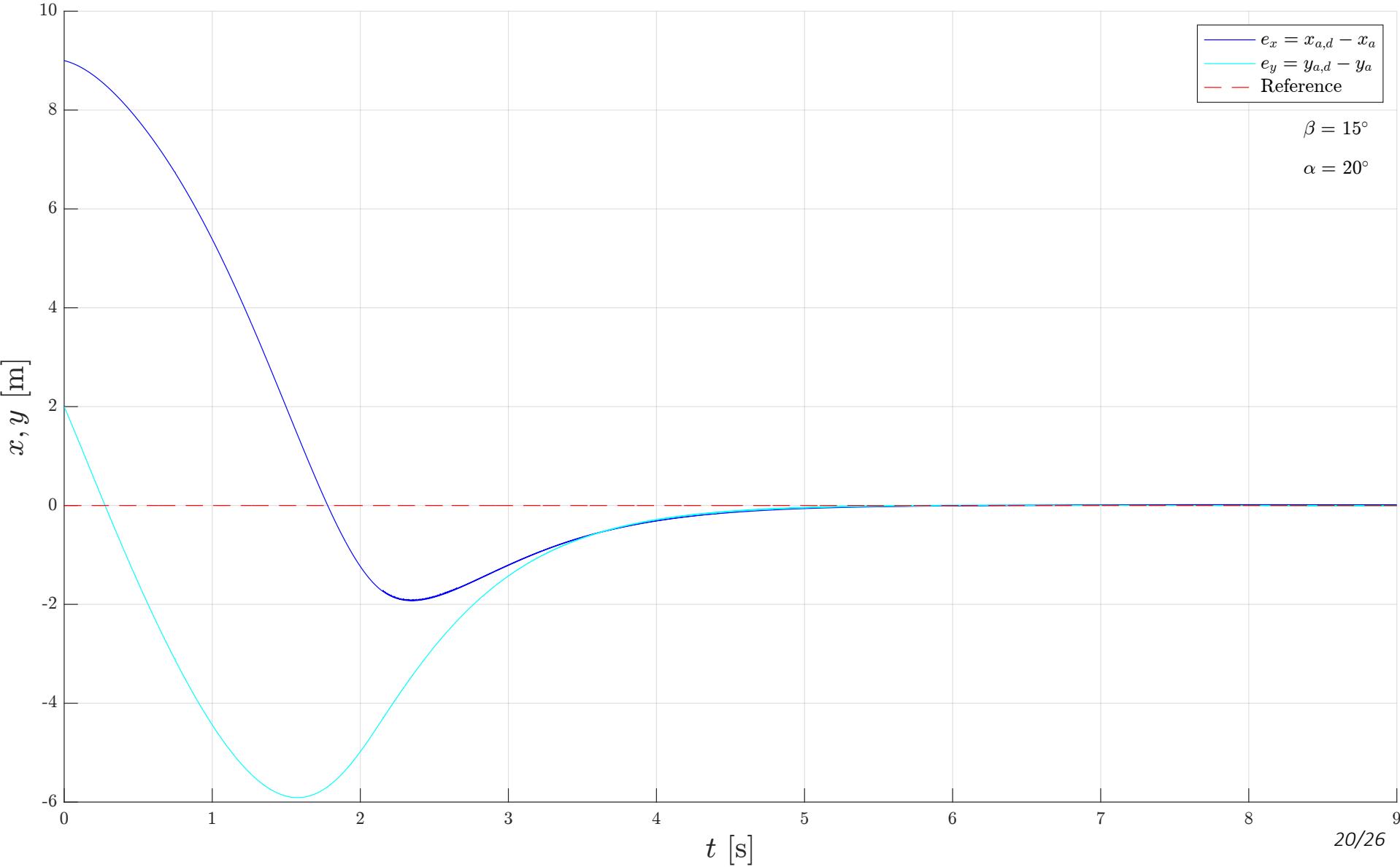
Simulazione — Circonferenza

Front axle position



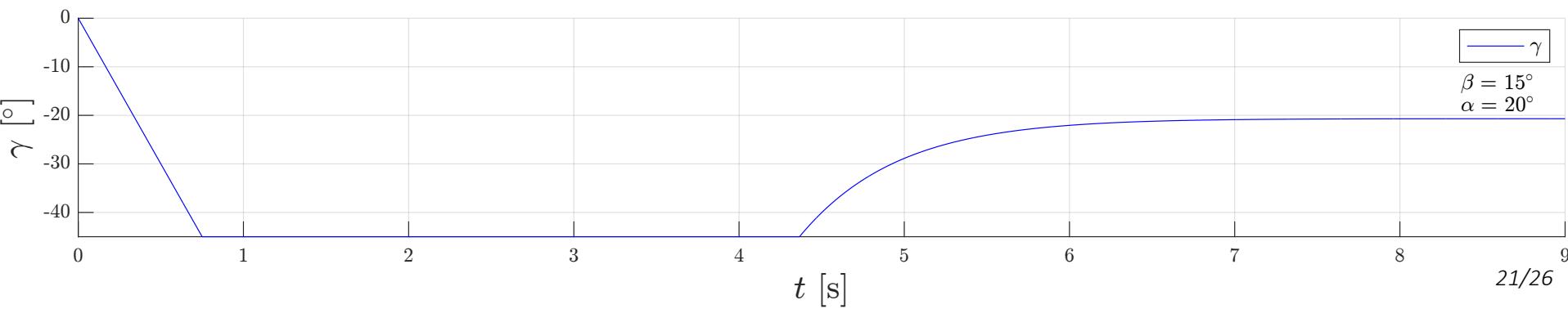
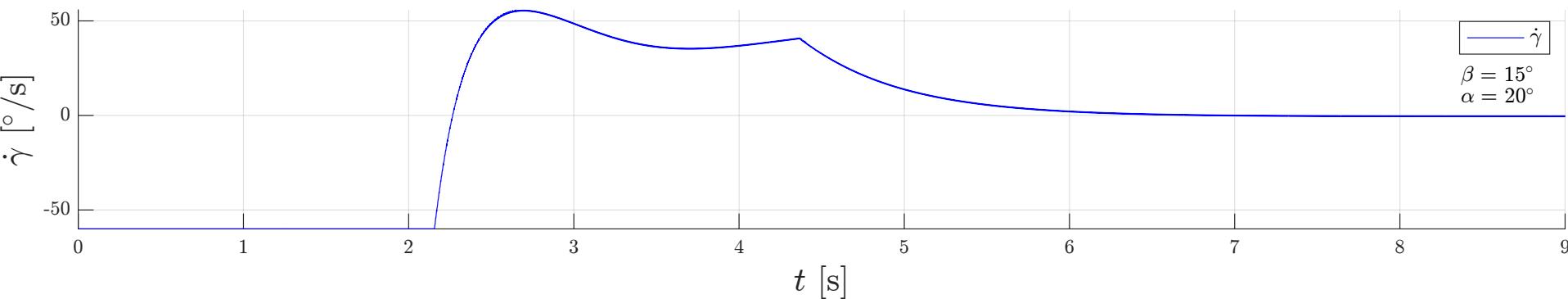
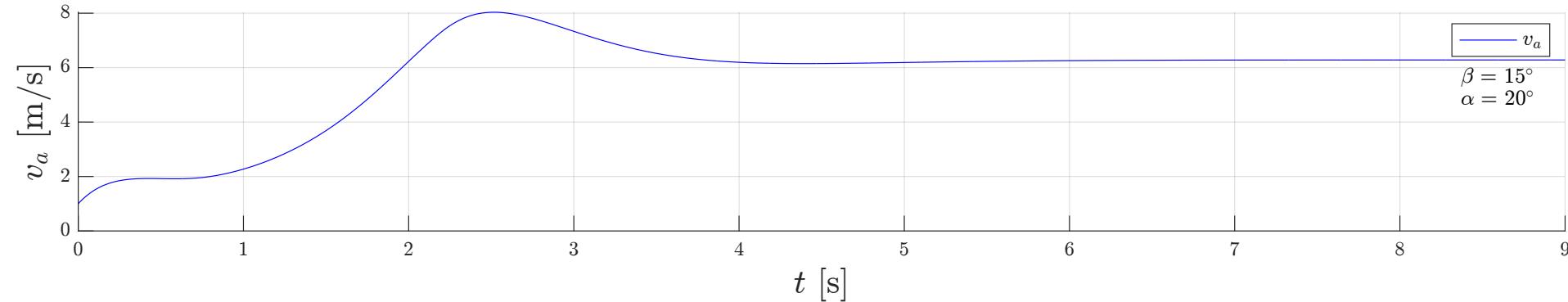
Simulazione — Circonferenza

Trajectory tracking error



Simulazione — Circonferenza

Control signals and articulated angle



Simulazione — Sigmoide

- Riferimento:

$$\begin{cases} x_r(t) = 2R t/t_f \\ y_r(t) = c \left(e^{-\log 2 \cdot \left(\frac{x_r(t)}{R} \right)^{\alpha_l}} - 1 \right) \end{cases}$$

Dove:

$$R = 20 \text{ m}$$

$$\alpha_l = 12$$

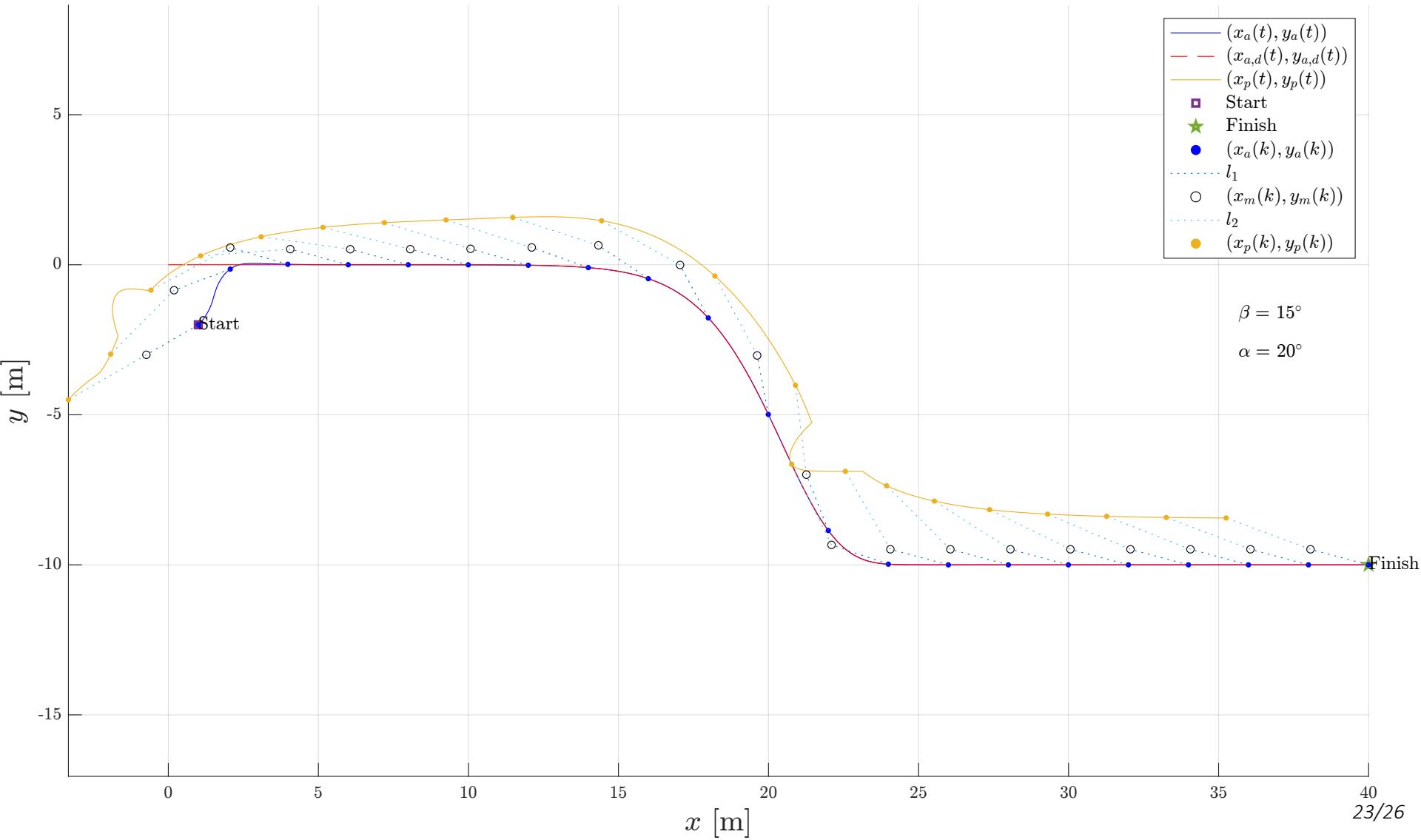
$$c = 10 \text{ m}$$

- Parametri simulazione:

• Durata:	$t_f = 40 \text{ s}$
• Guadagni controllore:	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 4$
• Configurazione iniziale:	$q_0 = [1 \text{ m} \quad -2 \text{ m} \quad 30^\circ \quad 0^\circ \quad 1 \text{ m/s}]^T$
• Angoli di deriva:	$\beta = 15^\circ, \alpha = 20^\circ$
• Lunghezze:	$l_1 = 2 \text{ m}, l_2 = 3 \text{ m}$
• Saturazione angolo articolato:	$\gamma_{min} = -45^\circ, \gamma_{max} = 45^\circ$
• Saturazione rate angolo art.:	$\dot{\gamma}_{min} = -60^\circ/\text{s}, \dot{\gamma}_{max} = 60^\circ/\text{s}$
• Saturazione velocità:	$v_{a,min} = 0 \text{ m/s}, v_{a,max} = 15 \text{ m/s}$

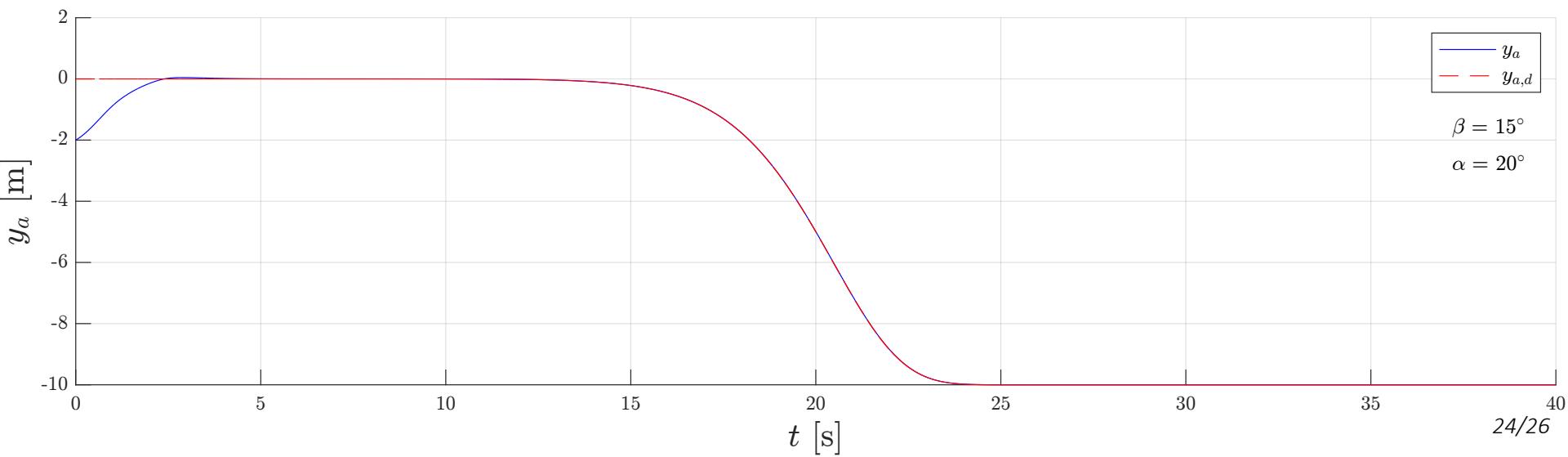
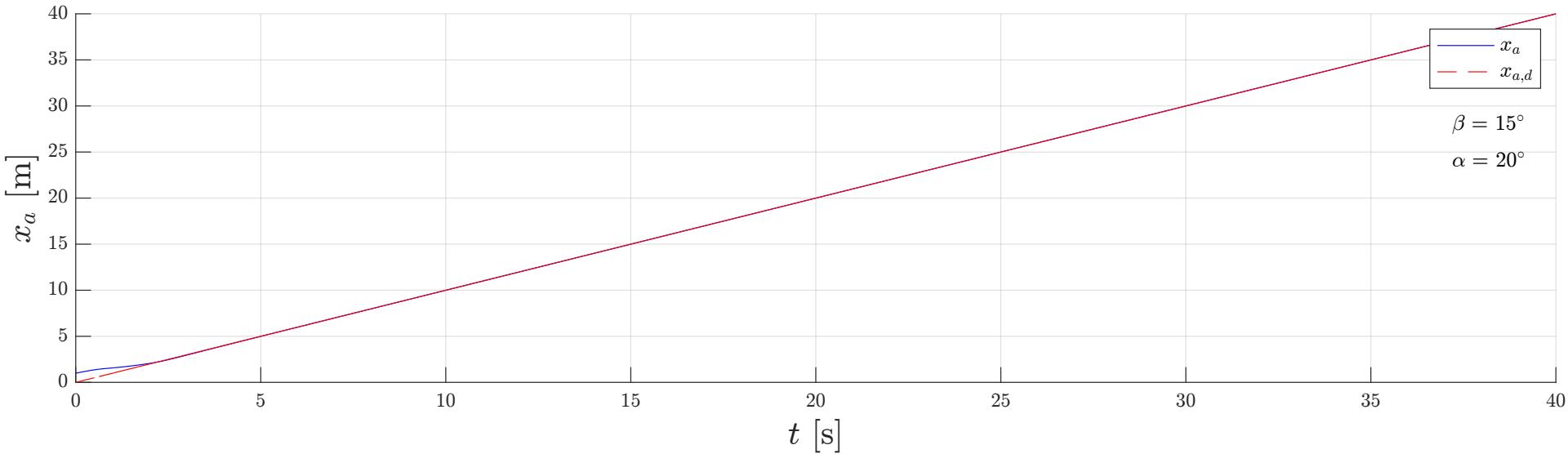
Simulazione — Sigmoide

Trajectory tracking



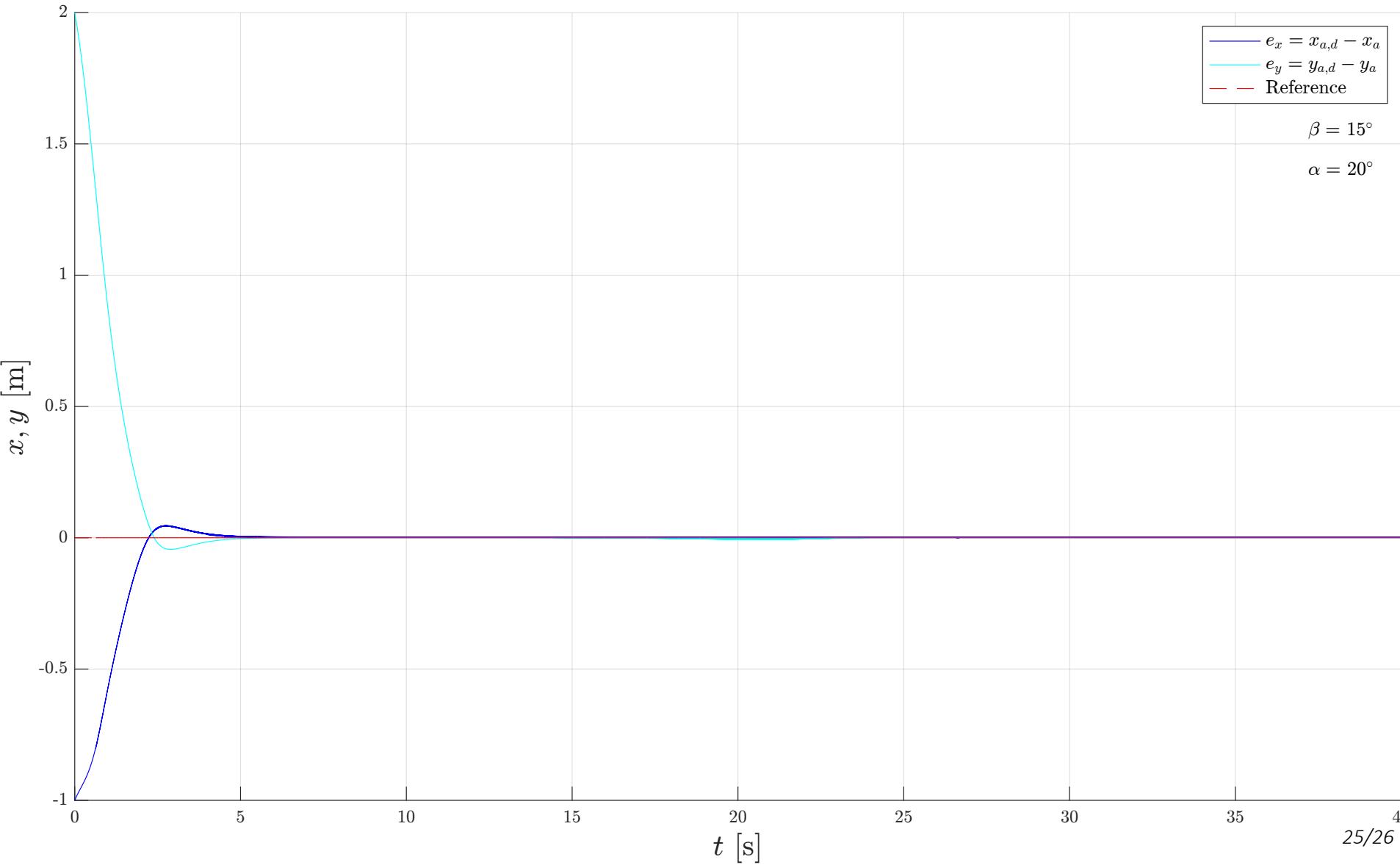
Simulazione — Sigmoide

Front axle position



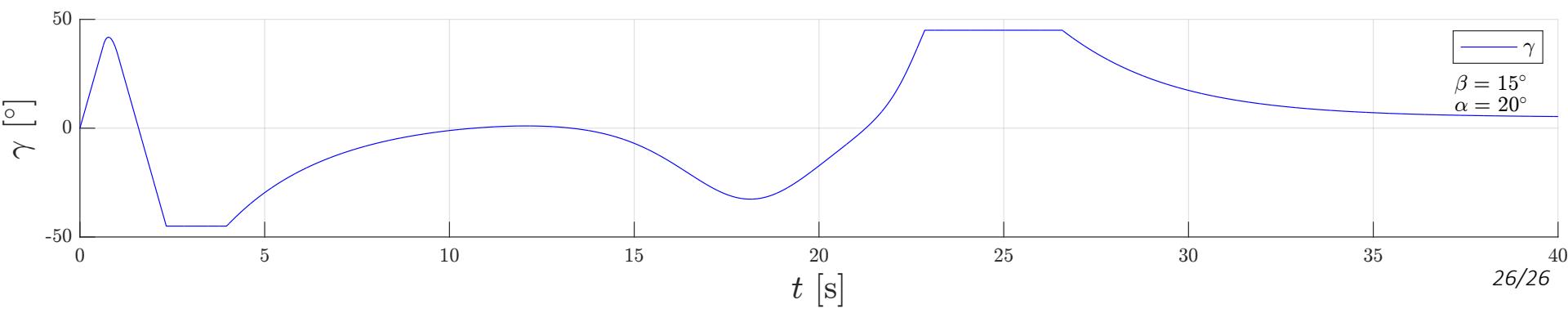
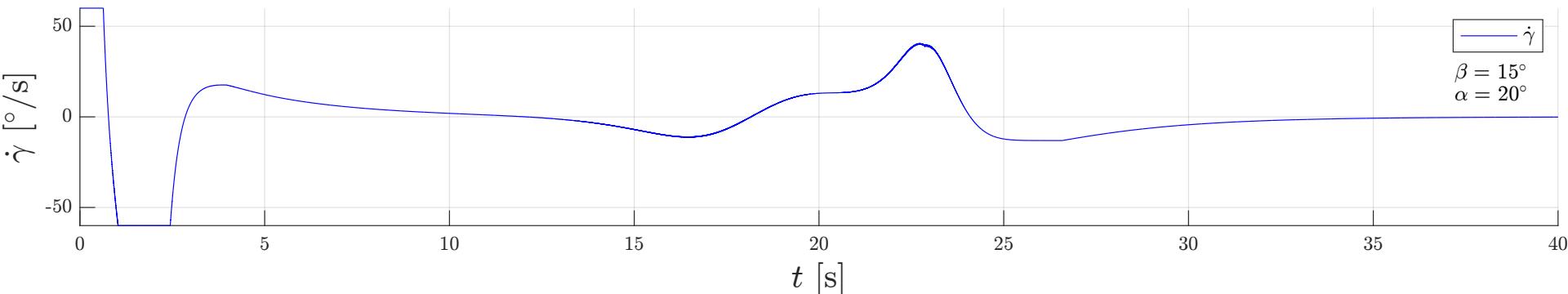
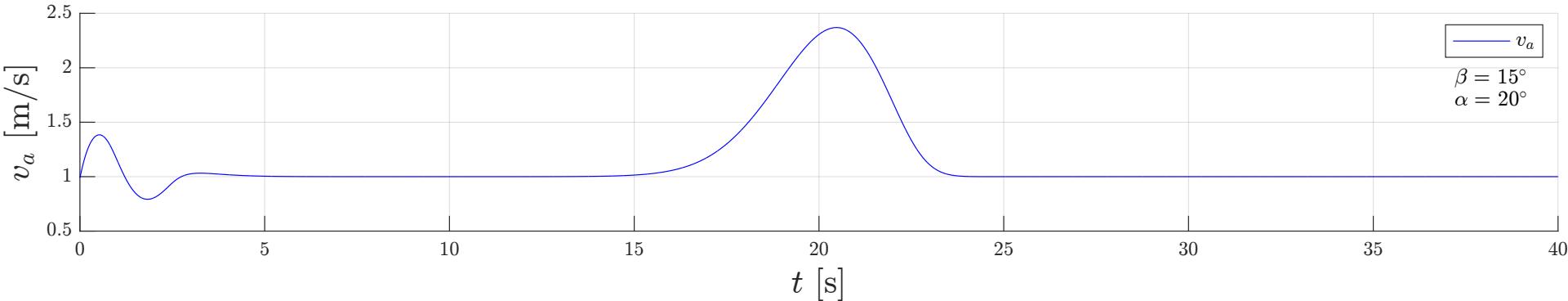
Simulazione — Sigmoide

Trajectory tracking error



Simulazione — Sigmoide

Control signals and articulated angle



A large, vibrant green banana leaf floats serenely on the surface of clear, turquoise-blue ocean water. The water is calm with gentle ripples, and sunlight reflects off the surface, creating bright highlights and shadows. The horizon is visible in the distance under a clear blue sky.

- Grazie per l'attenzione