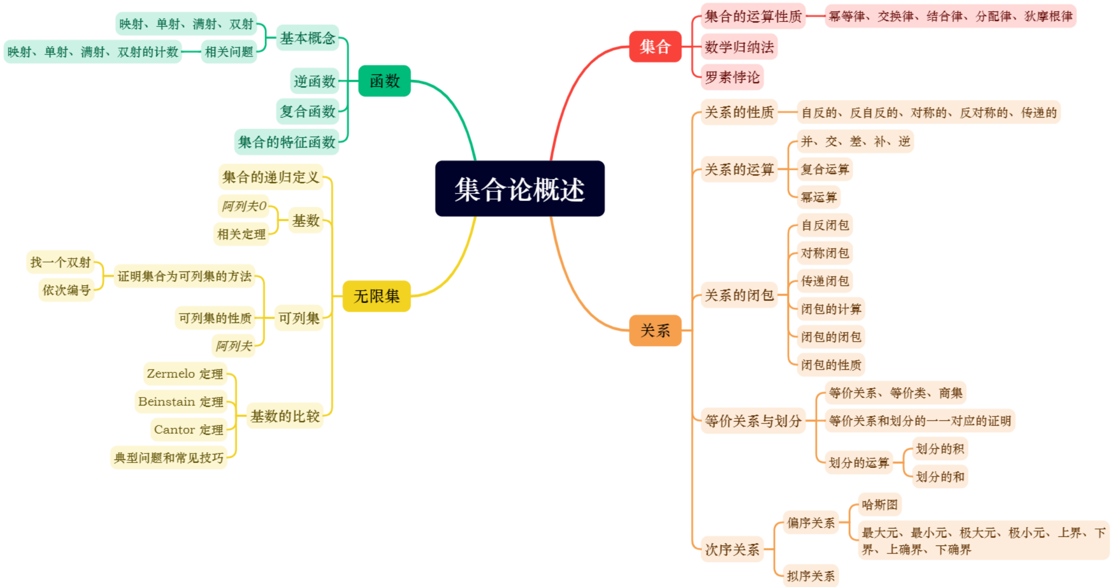
I 集合论概述



第一章 集合

1.1 集合的表示

定义

- 集合：具有某种特性的对象的全体，通常用大写字母来表示（A, B, C, ...）
- 集合中的对象称为元素(elements)（a, b, c, ...）
  - 若 a 是集合 A 中的元素，记为 $a \in A$，a 属于 A，a in A，a belongs to A
  - 若 a 不是集合 A 中的元素，记为 $a \notin A$.

集合的表示方法

1. 列举法
2. 描述法
   - 不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$
   - 集合的元素个数称为这个集合的阶，记为$|A|, \overline{\overline{A}}$
   - 有限集
   - 无限集：$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, E^+, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

集合的特性

1. 确定性
2. 互异性（VS 多重集）
3. 无序性

1.2 集合与子集(subset)

def1.1 设 A, B 均为集合，如果 A 的每个元素都属于 B，则称 A 是 B 的子集，记为 A，A 包含于 B

def1.2 若 A 与 B 元素全相同，则称 A, B 是相等的，记为 $A = B$

Th1.1 $A = B \Leftrightarrow A,$ 且

真子集(proper subset)

设 $A \in B$，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 为 B 得真子集，记为，A 真包含于 B

全集(universal set)

1.3 集合的直积(direct product)

def 1.6. 有序对，记为 (a, b)；有序的 n 元组，$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_n) \Leftrightarrow$

集合 A, B 的直积

- $A \times B$
- 当均为有限集，有 $|A \times B| = |A||B|$
- $A \times A \cdots \times A = A^n$

集合的运算

- 并：$A \cup B$
- 交：$A \cap B$
- 差：$A - B$
- 补：$\complement A$

集合的性质

1. 幂等律
2. 交换律
3. 结合律
    - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
    - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. 分配律
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
    - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

例. ★ 证明$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ *(交对差的分配)*

拓展问题

问 1：有多少种连 $\cup$ 运算的加括号方式？

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} b_k b_{n-k}$$
$$b_1 = 1, b_2 = 1$$

~~个人思考：若有 $A_1 \dots A_n$，则不难发现必然是有 $n-1$ 个括号，且显然括号匹配序列和合法方案一一对应。()()~~

- 个人思考：就是卡特兰数（∪的计算过程相当于二叉树中序遍历）

问 2：用第二数学归纳法证明所有加括号方式结果都相等.

- **关键起始思考：**

  任意一种加括号方式计算的最后一步都是两个集合的并（第二个集合中含 "$\cup A_{k+1}$"），从而对此 $A_{s+1} \cup \cdots \cup A_{k+1}$ 用归纳假设。而后发现可用三个集合并的结合律，从而易证。

第二章 关系

2.1 二元关系

def 2.1: 若 $R \subseteq A \times B$，R 为 A 到 B 的二元关系. 若 $(a, b) \in R$ 则称 a, b 有关系 R，记为 aRb.

- $P(A)$ 为幂集

同理可定义 $A_1, A_2, \dots A_n$ 上的 n 元关系、A 上的 n 元关系.

2.2 关系的性质

def 2.4: 设 R 为 A 上的二元关系

1. 自反 (reflexive)
2. 反自反的 (anti-reflexive)
3. 对称 (symmetric)
4. 反对称 (anti-symmetric)
5. 传递的 (transitive)

eg. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2.3 关系的运算

def 2.6: 设 $R_1, R_2 \subset A \times B$

1. 并
2. 交
3. 差
4. 补
5. 逆运算

例：

- R 是对称的 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$
- R 是反对称的 $\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subset I_A$
- R 是反自反的 $I_A\subset R$
- R 是反自反的 $R\cap I_A=\varnothing$
- R 是传递的 $\Leftrightarrow$?

定义域和值域

- 定义域：$Dom(R)=\{a\in A|(a,b)\in R\}$
- 值域：$Ran(R)=\{b\in A|(a,b)\in R\}$

关系的复合运算

$R_1\subseteq A\times B$，$R_2\subseteq B\times C$，定义了 $R_1\circ R_2$

Th. 设 $R_1\subseteq A\times B, R_2\subseteq B\times C, R_3\subset C\times D$，则 $(R_1R_2)R_3=R_1(R_2R_3)$

$\Rightarrow$ 一般的结合律 *（证明类似多个集合的并的结合律）*

- $R^0=I_A$（恒等关系），易知 $I_AR=R$
- $R^nR^m=R^{n+m},n,m\geq 0$
  - 注意：$n,m<0$ 时未必成立

2.6 关系闭包

def 2.11: 设 $R\subset A\times A$，定义 R 的自反（对称、传递）闭包 R' 如下：

1. $R\subseteq R'$
2. R' 是自反的（对称的、传递的）
3. R' 是满足 1, 2 的最小关系

称 R' 为 R 的自反（对称、传递）闭包

- 自反闭包 $r(R)$
- 对称闭包 $s(R)$
- 传递闭包 $t(R),R^+$

Th. 设 $R_1,R_2\subseteq A\times A$，当 $R1\subseteq R2$，则 r,s,t 全都这样包含.

Th.

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cdots=\cup_{i=1}^{+\infty}R^i$

问题：如何实际计算 $t(R)$

- 性质：A，有限时，设 $|A|=n,R\subseteq A\times A$，则有 $t(R)=\cup_{i=1}^{n}\subseteq R^m,\forall m>n$

闭包的性质

Th 2.11

1. R 自反，则 $s(R), t(R)$ 也是自反的
2. R 对称，则 $r(R), t(R)$ 也是对称的
3. R 是传递，则 $r(R)$ 也是传递的（没有 $s(R)$ 是传递的）

Th 2.12

1. $r(s(R)) = s(r(R))$
   证明：直接代入 r, s 的公式
2. $r(t(R)) = t(r(R))$
   证明：直接代入 r, s 的公式
3. $ts(R) \supseteq s(t(R))$
   证明：直接代入 r, s 的公式

问题 1

设 $R \subseteq A \times A$，求包含 R 满足自反性、对称性的最小关系

$\Rightarrow R \cup R^{-1} \cup I_A$

问题 2

设 $R \subseteq A \times A$，求包含 R 满足自反性、对称性、传递性的最小关系

$\Rightarrow t(R \cup R^{-1} \cup I_A)$

问题 3

$|A| = n$，问 A 上:

- 自反关系个数：2^{n^2-n}
- 反自反关系的个数：2^{n^2-n}
- 对称关系的个数：$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$
- 反对称关系的个数：$2^n \times 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$
- 对称关系的个数？（“到现在还没算出来”，“论文可以做ss”）
- 等价关系的个数:

2.6 等价关系与划分

def. 设 A 为非空集合，$A_\alpha \subseteq A, \alpha \in I$，满足:

1. $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$，当 $\alpha = \beta$
2. $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha = A$

则称 $\pi = \{A_1, A_2, ..., A_\alpha\}$ 为 a 的划分，常记为 $\pi = \{A_\alpha | \alpha = I\}$

def. 等价关系：设 $R \subseteq A$，若 R 是自反的、对称的、传递的，则 R 是 A 的等价关系

def. 等价类：设 R 是 A 的 等价类，对 $a \in A$，$[a]_R = [a] = \{b \in A | (b, a) \in R\}$，称为 R 的等价类

def. 设 R 为 A 上的等价关系，$\{[a]_R|a \in A\}$ 为 A 的划分，$\frac{A}{R} = \{[a]|a \in A\}$，称为 A 关于 R 的商集.

一个等价关系是一个划分

Step 1：证明：若 $(a, b) \in R$，则，$[a]_R = [b]_R$

1. 对 $\forall (c, a) \in [a]_R$，则易知 $(c, b) \in [b]_R$
2. 对 $\forall (c, b) \in R$，则易知 $(c, b) \in [a]_R$

Step 2：证明：若 $(a, b) \notin R$，则 $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$

由反证法容易证明。

一个划分是一个等价关系

对于 π，在 A 上定义关系 R：$\forall a, b, \in A, (a, b) \in R \Leftrightarrow a, b, \in A_\alpha$.

定义 $R_\pi : (a, b) \in R_A \Leftrightarrow a, b \in A_\alpha, \alpha \in I$，称 R_π 为划分 π 决定的等价关系.

★ $R_\pi = \cup_{\alpha \in I}(A_\alpha \times A_\alpha) \subseteq A \times A$.

等价关系和划分是双射关系的证明

Step 1.

Step 2.

$\pi_{R_\pi} = \{[a]_{R_\pi}|a \in A\} = \{A_\alpha|\alpha \in I\}$

综上得证.

问题

对 $|A| = n$ 的等价关系的个数？（递推）

$D_{n,m} = mD_{n-1,m} + D_{n-1,m-1}$

Th. R_1, R_2 称为 A 的等价关系 $\frac{A}{R_1} = \frac{A}{R_2} \Leftrightarrow R_1 = R_2$.

设 R_1, R_2 为 A 上的等价关系，问 $R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ 是 A 上的等价关系吗?

答：前者是，后者不是。

划分的积、划分的和

（对于划分的和，需要 $(R_1 \cup R_2)^+ = \cup_{i=1} \ldots$）

def. 设 $\pi_1 = \{A_\alpha|\alpha \in I_1\}, \pi_2 = \{A_\beta|\beta \in I_2\}$ 为 A 的划分，则定义：

$$\pi \cdot \pi = \pi_{R_{\pi_1 \cap \pi_2}}$$
$$\pi_1 + \pi_2 = \pi_{R_{\pi_1 \cup \pi_2}{}^+}$$

理解：对 $(a, b) \in (R_1 \cup R_2)^+$，$\exists a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ 使......（将路径取出来），从而相邻两元素在 π_1 的同一块或在 π_2 的同一块。

def. 设 $\pi_1 = \{A_\alpha|\alpha \in I_1\}, \pi_2 = \{A_\beta|\beta \in I_2\}$ 为 A 的划分，称 π_1 细分 π_2，如果 π_1 的每一块都是 π_2 某一块的子集。

π_1 细分 $\pi_2 \Leftrightarrow R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_2}$.

2.7 次序关系

def. 设 $R \subseteq A \times A$，若 R 是自反的、反对称的、传递的，称 R 是偏序关系，称 (A, R) 为偏序集 A.

简化关系图（哈斯图）

- 省去自环
- 如果有 aRb，且 $\exists c, aRc, cRb$，则 a, b 间有边
- 规定 b 在 a 上方

拟序关系

def. 设 $R \subseteq A \times A$，若 R 是反自反的，传递的，则陈 R 是 A 上的拟序关系，称 (A, R) 为拟序集

注：可根据定义通过反证法证明拟序关系是反对称的

- 设 R 是 A 上的偏序关系 $\Leftrightarrow R - I_A$ 是 A 上的拟序关系
- 设 R 是 A 上的拟序关系 $\Leftrightarrow R \cup I_A$ 是 A 上的偏序关系

问题

对 $|A| = n$ 有几个拟序关系（偏序关系）？

def. 设 $(A, \leq)$ 为偏序集，若对 $\forall a, b \in A$，有 $a \leq b$ 或 $b \leq a$，则称 $\leq$ 为 A 上的全序关系，称 $(A, \leq)$ 为全序集.

最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界

例：

- 性质 1：B 的最大元如果存在，则一定唯一。

  证明：设 b_1, b_2 均为 B 的最大元，则 $b_1 \leq b_2, b_2 \leq b_1 \Rightarrow b_1 = b_2$.

- 性质 2：B 可能没有极大元，但如果 B 是有限集，则 B 一定有极大元. 设 $(A, \leq)$ 为偏序集，B 为 A 的有限非空子集，则 B 中一定存在极大元、极小元（；$\mathbb{Z}^+ \cup \{\sqrt{2}\}$，$R = |$）

  证明：容易证明

第 3 章 函数

3.1 函数的基本概念

定义

$f \subseteq A \times B$ 满足：

1. $Domf = A$
2. 若 $(a, b) \in f, (a, b') \in f$，则 $b = b'$，称 f 为 A 到 B 的函数，记为 $f: A \to B$

★ 问题

$|A| = m, |B| = n$，问：

- A 到 B 的映射（函数）的个数
- A 到 B 的单射
- **满射的个数（容斥原理）**

$n^m - \ldots$

- 双射

3.2 逆函数与复合函数

逆函数

$f \subseteq A \times B$，$f^{-1} = \cdots \in B \times A$，$f^{-1}$ 是函数吗?

$\Leftrightarrow Ranf = B$ 且若 $(a,b) \in f, (a',b) \in f$，则 $a = a'$

$\Leftrightarrow f$ 为双射

函数的合成

$f: A \to B, g: B \to C, f \circ g = \{(a,c) | \exists b, (a,b) \in f, (b,c) \in g\}$

$\forall a \in A, (gf)(a) = g(f(a))$

问题

设 $f: A \to B, g: B \to A$

1. 若 $f \circ g = I_A$，则 f 为单射.
2. 若 $g \circ f = I_B$，则 f 为满射.

3.3 集合的特征函数

A，U 为全集，A 的特征函数 $\psi_A: U \to \{0,1\}$.

第 4 章 无限集

4.1 集合的递归定义

def 4.1 集合 A 的递归定义：

- 【基础】（1）. 给出 A 一些基本元素
- 【递归】（2）. 由 A 中现有的元素按某种规则产生新的元素
- A 中的**每个元素可以通过有限次应用（1）（2）得到**（由（1）（2）产生的元素就是 A 中的所有元素）

4.2 基数 Cardinality

def. 设 A 为集合，A 的元素个数称为 A 的基数，记为 $|A|$ 或 $\overline{\overline{A}}$

- $\mathbb{N}, \mathbb{N}^+, \mathbb{Z}, E^+, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

def. 设 A, B 为集合，如果**存在双射** $f: A \to B$**，则称** $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. 容易发现：$\mathbb{N}, \mathbb{N}', \mathbb{Z}, E$ 元素个数均相同

> ★ **注：实数比有理数多**

例.

1. $f(0,1) \to (a,b), a<b$
2. $f(0,1) \to (-\infty,\infty)$

   作 $\forall x \in (0,1), f(x) = \tan(-\frac{\pi}{2} + \pi x)$

Th 4.8 设 A 为无限集，则存在 A 的一个真子集 A'，使 $\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{A}}$.（思考证明方法）

4.3 可列集（可数集 countable set）

自然数集 $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$

def. 设 A 为集合，若 A 与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势的（$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{N}} = \aleph_0$），则称 A 为可列集.

★ 证明一个集合为可列集的方法：

1. **找一个双射**
2. **利用自然数对 A 中的元素进行标号，每个元素可标到，且仅标到一次，则 A 为可列集**

★ 可列集的性质

1. 任意无限集都包含一个可列子集

   分析：不断取元素即可.

2. 可列集的**无限子集**为可列集

   设 A 为可列集，令 $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$（设 $A = \ldots$ 为可列集）

   B 为 A 的无限子集，要证 B 为可列集

   按下标的顺序取出 B 中的元素，$a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$，$\therefore B = \{a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\}$

3. 可列集中添加（或去掉）有限个元素仍为可列集
4. **两个可列集的并是可列集**

   证：不妨设 $A \cap B = \varnothing$. 设 $A = \{a_0, a_1, \ldots\}, B = \{b_0, b_1, \ldots\}$，对 $A \cup B$ 中元素按如下顺序进行编号：

   $$a_0, b_0, a_1, b_2, a_2, b_2, \ldots$$

   （此时也可方便地作出双射 $f: A \cup B \to N$）

5. **★ 任意有限个可列集的并为可列集.**

   $\Rightarrow$ **对角线法则**，且有 $f(a_{ij}) = \ldots$

6. A, B 为可列集，则 $A \times B$ 也是可列集

   证法一： 直接对角线法则编号

   证法二： $A \times B = \{(a_i, b_j) | i = 1,2,\ldots, j = 1,2,\ldots\} = \cup_{i=0}^{\infty}\{(a_i) \times B\}$

   > 感觉其实两种方法没有本质区别。

7. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 为可列集

   证：$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$，只需证 $\mathbb{Q}^+$ 为可列集.

   略（注意：可列集的**无限子集**为可列集）

相关题目

例. 设 Σ 为有限非空集合，则 Σ^*, Σ^+ 为可列集

例. 平面上有理三角形

分析：即证是 $\mathbb{Q}^6$ 的无限子集.

问：平面上有理正三角形呢？ **（注意其为空集）**

例. 整系数多项式集
$A = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n | n \geq 0, a_i \in Z, 0 \leq i \leq n, a_n \neq 0\} = \cup_{n=0}^{+\infty} A_n$

证明：$(0,1)$ **是不可列集**

证：假设是可列集，设 $(0,1)$ 为可列集，设 $(0,1) = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$，$(0,1)$ 中每个元素都写成十进制无限小数，对于有限小数，写成以 9 为循环节的无限小数，例如 $0.125 = 0.12399999999\ldots$

令 $b = 0.b_1b_2b_3\ldots$，其中 $b_i = 1$ 当 $a_{ii} \neq 1$，$b_i = 2$ 当 $a_{ii} = 1$. 显然有 $b \in (0,1)$ 但 $b \neq a_i, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$，矛盾！

> 本质上，就是第一位与第一个数不同，第二位与第二个数不同……这样就不可能和某个数相同

def. 记 $\overline{\overline{(0,1)}} = \aleph$

4.4 基数的比较

def. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$; 如果存在 A 到 B 的单射，A 到 B 不存在双射，则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

问： 如何做单射 $f: N \to (0,1)$

Th. A, B 为任意的集合，则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, A = B, B < A$ 有且仅有一个成立.

Beinstain Th. 若 $A \leq B, B \leq A$，则 $A = B$

注：可用证明 $\overline{(0,1)} -> [0,1]$

例. 设 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = A \times B = \aleph$

证：$\because A = B = \aleph = \overline{\overline{(0,1)}}$

$\Rightarrow$ 只要证 $(0,1) \times (0,1) = (0,1)$

Step 1. 先证 $(0,1) \leq (0,1) \times (0,1)$. 作 $f(x) = (x, x)$

Step 2.

$\forall x, y \in (0,1), x = 0.x_0x_1\ldots, y = 0.y_0y_1\ldots$ 为 x, y 的十进制无限表示.

$g((x,y)) = 0.x_0y_0x_1y_1x_2y_2\cdots \in (0,1)$

易证 g 是双射（注意：g 也是双射）

例. $A_1 = A_2 = \ldots A_n = \aleph_0$，则 $A_1A_2 \times A_n = \aleph$

证：即证 $\overline{(0,1)} \leq \overline{\overline{N \times \cdots \times N}}$. 作 $f: (0,1) \to N \times \cdots \times N$

再证 .... 作 $g: N_1N_2\cdots \to (0,1)$，对 $g((a_1, a_2, \ldots)) = 0.b_12b_22b_32\ldots$ 为单射

综上得证.

例. $A_1 = A_2 = \dots A_n = \aleph$，则 $A_1 A_2 \times A_n = \aleph$

$A = \{0, 1\}$，则 $A \times A \times \cdots = \overline{\overline{(0,1)}}$

<u>Cantor Th. ★ 对</u> $\forall$ **<u>非空集合</u>** A**<u>，</u>** $|A| \le |P(A)|$

$N = \aleph_0, |(0,1)| = |R| = \aleph, N_0 < \aleph$.

问题：是否 $\exists A, \aleph_0 < A < \aleph$？（现在还未解决）

Th. 设 $\mathbb{N}$ 为自然数集，则 $\overline{\overline{P(\mathbb{N})}} = \aleph$

证：$(0,1] \cup A = (0,1]$ （A 为有限小数集，并完之后，基数不变）

作 $f : P(N) \to (0,1] \cup A$

$\forall A \subseteq S$，（二进制小数部分状态压缩）

容易证明是双射

例. 设 A, B 为集合，$B^A = \{f | f : A \to B\text{函数}\}$. 令 $\mathbb{N}$ 表示自然数集，证明 $\overline{\overline{N^N}} = \aleph = \overline{(0,1)}$

证：先证 $\overline{(0,1)} \le \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

作 $f : (0,1) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，则对 $\forall x \in (0,1)$，定义 $f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ......

例. $\overline{\overline{N \times \mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

注意：$\mathbb{R}$ 一般转化为 $(0,1)$