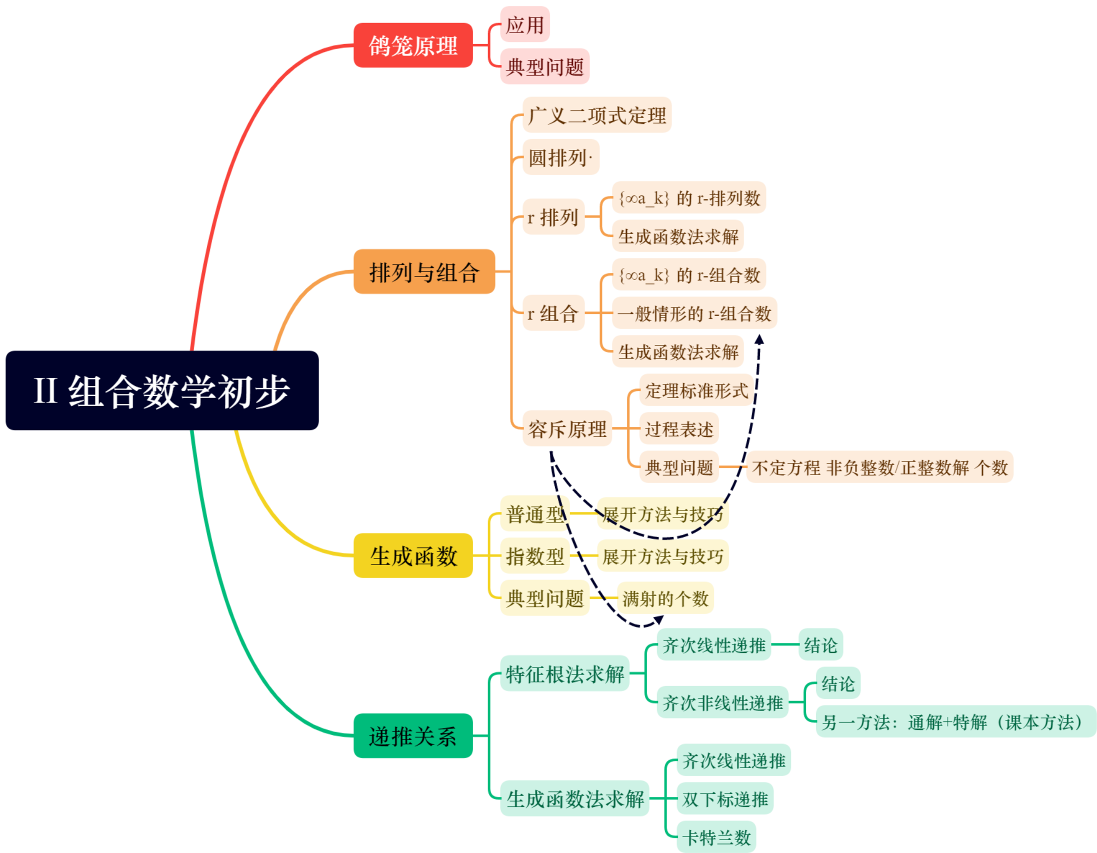
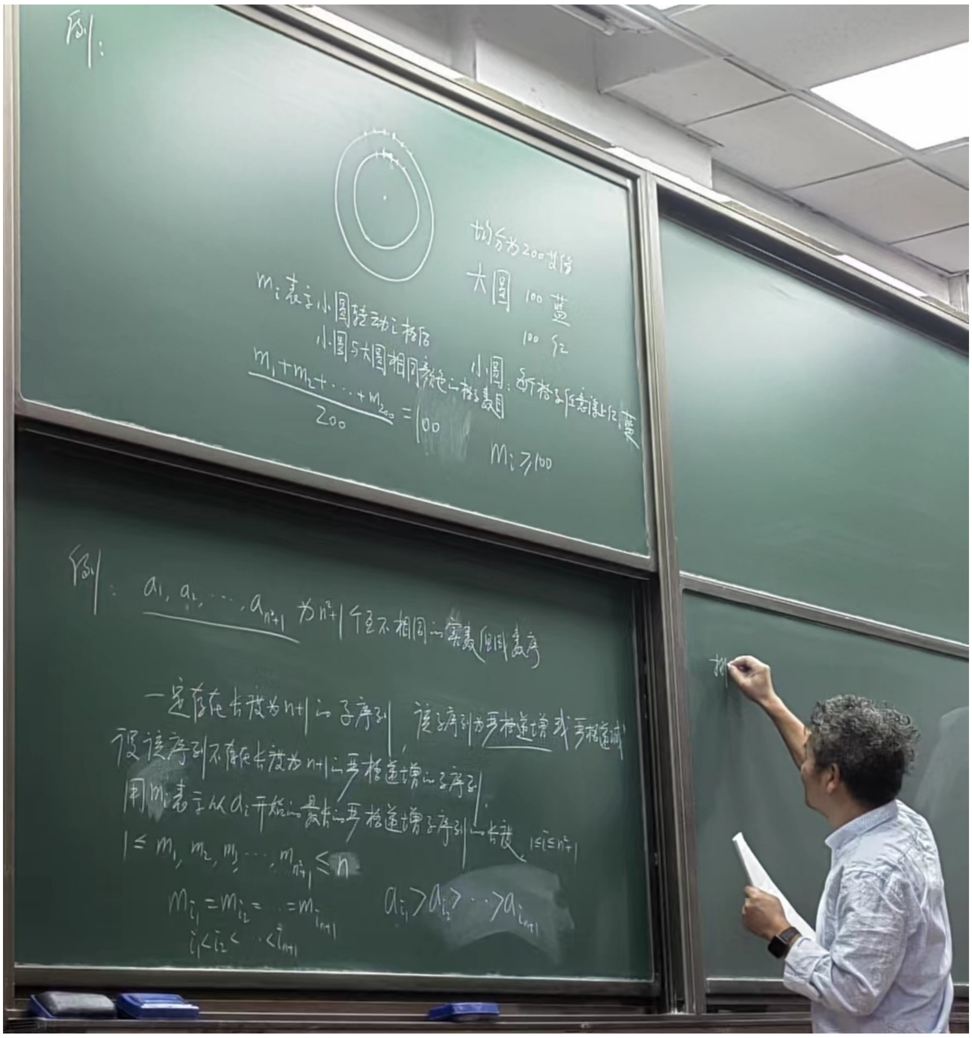
集合与图论 - II 组合数学初步



第 5 章 鸽笼原理

例题



第 6 章 排列与组合

例. 从 $\{1,2,\ldots,8,9\}$ 中选取不同的数字使 $4,5,6$ 不相邻的 7 位数有多少个?

$$P_9^7-5\times P_6^4\times 3!$$

例. 10 男生，5 女生站圆，女生不相邻方案数?

分析：先圆排男生，再插入女生，则不重不漏.

$$\frac{P_{10}^{10}}{10}\times P_{10}^5$$

二项式定理

- $(a+b)^n=\sum_{k=0}^n a^{n-k}b^k$
- α 为任意的实数，$|\frac{a}{b}|<1$，则：（注意，下式为恒等式）

$$(a+b)^\alpha=b^\alpha(1+\frac{a}{b})^\alpha=b^\alpha(1+\ldots)=\sum_{k=0}^{\alpha}C_\alpha^k a^k b^{a-k}=$$

r 排列，r 组合

$$\{n_1a_1,n_2a_2,\ldots,n_ka_k\}$$

- 【特殊情形】$\{\infty a_k\}$ 的 $r-$ 排列数，$r-$ 组合数?
  1. k^r
  2. 相当于 $x_1+x_3+\cdots+x_k$ 的非负整数解的个数.

     法一:

$\{r1, (r-1)0\}$ 的全排列数 C_{k+r-1}^{k-1}

法二：$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = k + r$ 的正整数解.

再考虑部分和序列 $\{S_n\}$，则其严格单调上升. . . .

例. $(x+y+z-u)^{1000}$ 有多少不同的项?

分析：相当于 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$ 的非负整数解个数，即为 C_{1003}^3

例. 掷 3 粒骰子（色子）可以出现多少种不同的情形?

$$C_{6+3-1}^3 ? =$$

例. 一个棋手连续 7 天下 12 盘棋，问：有多少种安排法？如果每天至少下一盘棋，又有多少安排法?

容斥原理

例. 100 个学生，学习三种语言（后略）

例. 在 r 位的 5 进制序列中，至少包含 1 个 0，1 个 1，1 个 2 的序列有多少个?

用容斥原理解决一般的 $r-$组合问题

$\{3a, 4b, 5c\}$ 的 $r-$组合 b_r，求 b_{10}

解：

令 $D = \{\infty a, \infty b, \infty c\}$，令 Y 表k示D 上 $10-$组合组成的集合，$|Y| = C(3+10-1, 10) = C(12, 2)$

A_1 表示 D 上至少包含 4 个 a 的 $10-$组合的全体组成的集合，$|A_1| = C(3+6-1, 6) = C(8, 2)$

同理有，$C(7, 2), C(6, 2), \ldots$ 得最终答案 6 *（书 P71）*

第 7 章 生成函数与递推关系

7.1, 7.2. 利用母函数（生成函数）解决多重集 $r-$排列、$r-$组合问题

def 1. 设 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ 无限数列

- **普通型母函数:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- **指数型母函数:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

def 2. $a(x), b(x)$ 形式幂级数，运算法则：

- 加法
- 数乘
- 乘法

$$a(x)b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} (a_n b_m) x^k$$

$r-$组合

c_r 的普母函数:

$$(1+x+x^2+\dots+x^{n_1})(1+x+x^2+\dots+x^{n_2})\dots(1+x+x^2+\dots+x^{n_k})$$

例:$\{n_i a_i\}_{i=1}^{k}$ 的 $r-$组合

$$b(x) = (1+x+x^2+\dots)^k = (\frac{1}{1-x})^k = \dots$$

$\Rightarrow b_r = C_{k+r-1}^{r}$

注: $C_{-k}^{r} = (-1)^r C_{k-r+1}^{r}$.

例:$\{3a, 4b, 5c\}$ 的 $r-$组合,记为 b_r

解:

$\{b_r\}_{r\geq 0}$ 的普母函数为:

$$\begin{aligned} b(x) &= (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \\ &= \frac{(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)}{(1-x)^3} = \dots \end{aligned}$$

$r-$排列

由于:

$$b_r = \sum_{x_1+x_2+\dots+x_k=r} \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_k!}$$

则 b_r 的指母函数为:

$$(1+x+\dots+\frac{x^{n_1}}{n_1!})(1+x+\dots+\frac{x^{n_2}}{n_2!})\dots(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n_k}}{n_k!})$$

例. $\{\infty a_i\}_{i=1}^{k}$ 的 $r-$排列

解:

$\{b_r\}_{r\geq 0}$ 的指母函数为:

$$(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots)^k = e^{kx} = 1+kx+\frac{k^2}{2!}x^2+\dots$$

从而有 $b_r = k^r$

例. 从 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 中取出 r 个元素进行排列,要求 a_1 至多出现 2 次,a_2 出现奇数次,a_3 出现偶数次,a_4, a_5, a_6 出现的次数没有限制

解:

$$b(x) = (1+x+\frac{1}{2}x^2)\frac{e^x-e^{-x}}{2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}e^{3x} = \dots$$

20231012

例. 从 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 中取出 r 个元素组成一组，要求 a_1 至少出现 1 次，a_2 出现奇数次，a_3 出现偶数次，其它元素出现的次数没有限制.

解：

$$\begin{aligned}
b(x) &= (1+x+x^2)(x+x^3+x^5+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)^{k-3} \\
(\text{当}|x|<1\text{时}) &= (1+x+x^2)\frac{x}{1-x^2}\frac{1}{1-x^2}(\frac{1}{1-x})^{k-3} \\
&= (x+x^2+x^3)(1+x)^{-2}(1-x)^{-(k-1)} \\
&= (x+x^2+x^3)(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_{m+1}^m x^m)(\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-2}^n x^n) \\
&= (x+x^2+x^3)(\sum_{r=0}^{\infty}(\sum_{n+m=r} C_{k+n-2}^n (m+1)(-1)^m x) x^r)
\end{aligned}$$

注：

$$(1-x)^k = \sum C_{-k}^n (-x)^n = \sum \frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-n+1)}{n(n-1)\ldots 1}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{k+n-1}^n x^n$$

例. 从 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 中取出 r 个元素进行排列，要求 a_1 至少出现 1 次，a_2 出现奇数次，a_3 出现偶数次，其它元素出现的次数没有限制

$$\begin{aligned}
(\text{当}x \in \mathbb{R})c(x) &= (1+x+\frac{1}{2})(1-x)^{-(k-1)}(1+x)^{-2} \\
&= (1+x+\frac{1}{2}x^2)(\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-2}^n x^n)(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_{m+1}^m x^m)
\end{aligned}$$

例. 用 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 可组成多少个 n 位数，要求：1 出现 2 次 或 3 次，2 至少出现 1 次，3, 4, 5 出现次数没限制

解：

$$a(x) = (\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)$$

【满射】的个数

$$b(x) = (x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^m = (e^x-1)^m = \sum_{k=0}^{m}(C_m^k)e^{kx}(-1)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m}(C_m^k(-1)^{m-k})(\sum_{n=0}^{\infty}k^n\frac{x^n}{n!})$$

7.3 递推关系

def. 递推关系：数列 $\{t_n\}_{n\geq 0}$ 满足递推关系式

$$\begin{gathered}
a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0 \\
t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}\text{已知}
\end{gathered}$$

称 $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$ 为上述递推关系式子的<u>特征方程</u>。其 k 个根 $r_1, r_2, \ldots, r_k$ 称为特征根。

用特征根求解

- **常系数线性齐次递推关系：**

  1. 特征根互异，则：

  $$t_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \cdots + c_k r_k = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$$

  其中常数 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 由初始条件决定。

2. 设特征根重数 $m_1, m_2, \dots, m_s$，$m_1+m_2+\dots+m_s=k$，则：

$$t_n=(c_{11}r_1^n+c_{12}nr_1^n+c_{13}n^2r_1^n+\dots+c_{1m_1}n^{m_1-1}r_1^n)+\dots=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}n^{j-1}r_i^n$$

-

常系数非线性齐次递推关系：

- b 为素数，$P(n)$ 是关于 n 的 d 次多项式

$$a_0t_n+a_1t_{n-1}+\dots+a_kt_{n-k}=b^nP(n)$$
$$(a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_k)(x-b)^{d+1}=0$$

- 对：

$$a_0t_n+a_1t_{n-1}+\dots+a_kt_{n-k}=b_1P_1(n)+b_2P_2(n)$$
$$(a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_k)(x-b_1)^{d_1+1}(x-b_2)^{d_2+1}=0$$
$$(d_1=\deg(P_1(n),d_2=\deg(P_2(n))$$

例. $t_n=2t_{n-1}+n, n\geq 1$，$t_0=1$.

$$(x-2)(x-1)^2=0$$

例. $t_n=2t_{n-1}+n+2^n$

$$(x-2)(x-1)^2(x-2)=0$$

用生成函数进行求解

【回顾】设 $\{f(n)\}_{n\geq 0}$ 满足：

$$f(n)=a_1f(n-1)+a_2f(n-2)+\dots+a_kf(n-k), n\geq k, a_k\neq 0$$
$$\text{当}0\leq n\leq k-1, f(i)=b_i$$

设 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n=f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\dots$

特征多项式 $P(x)=x^k-a_1x^{k-1}-\dots-a_k$，当 $x\neq 0$ 设：

$$g(x)=x^kP(\frac{1}{x})=1-a_1x-a_2x-\dots-a_kx^k$$

此时 $F(x)=0\Leftrightarrow g(\frac{1}{x})=0$

则：

$$F(x)g(x)=(f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\dots+f(k)x^k+\dots)(1-a_1x-a_2x^2-\dots-a_kx^k)$$
$$=f(0)+(f(1)-f(0)a_1)x+(f(2)-f(1)a_1-f(0)a_2)x^2+\dots+(f(k-1)-f(1)a_{n-2}+\dots+f(0)a_{k-1})x^{k-1}$$
$$:=\phi(x)$$

从而

$$F(x)=\frac{\phi(x)}{g(x)}$$

当

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{\lambda_1}\dots(x-\alpha_t^{\lambda_t})$$
$$g(x)=(1-\alpha_1x)^{\lambda_1}\dots(1-\alpha_tx)^{\lambda_t}$$

展开 $\frac{1}{g(x)}$ 并化简，即能得到 $F(x)$.

例：$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, f_0=f_1=1$。可得：

$$F(x)=(1+x_1x+x_1^2x^2+\dots)(1+x_2x+x_2^2x^2+\dots)$$

其中 x_1, x_2 为特征方程 $P(x)=x^2-x-1=0$ 的两根.

例:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$$
$$a_1=a_2=1$$

解:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$
$$f(x)\times f(x)=\dots=f(x)-x$$

若设 $y=f(x)$，则:

$$y^2=y-x, y^2-y+x=0$$
$$y^2-y+x=0$$
$$y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}$$
$$x=0\Rightarrow y=0, \therefore y=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

当 $|x|<\frac{1}{4}$

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}\ =\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_{\frac{1}{2}}^{n}(-4x)^n$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\times\dots\times\frac{2n-3}{2}}{n!}4^nx^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times3\times\dots\times(2n-3)}{n!}(2x)^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{n!}(2x)^n$$

所以 $u_n=\dots$