III 图论

第 8 章 图的基本概念

8.1 引言

基本概念

def 1. V 为非空集合，$E \subseteq V \times V$，称 (V, E) 为有向图，V 为顶点集，E 为弧集

$e = (v_i, v_j) \in E$，v_i, v_j 称为 e 的两个端点，v_i 为起点，v_j 为终点

- 自环
- 相邻概念

def 2. 无向图，$G(V, E), G, (V, E)$，$E = \{\ldots\}$

- 标定图
- 有限图
- 简单图：不含自环、多重边

顶点的度数

def. 设 $G(V, E)$ 为图，$v \in V$，v 所**关联的边的条数**（自环算两次）称为 v 的<u>度数</u>，记为 $d(v)$

Th.（握手定理；图 G 中奇顶点必有偶数个）

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2|E| = \sum_{v_i \text{为奇顶点}} d(v_i) + \sum_{v_i \text{为偶顶点}} d(v_i)$$

对有向图，定义<u>出度</u>、<u>入度</u>。

Th. 假设 $G(V, E)$ 为有向图，则所有顶点的入度之和等于所有的顶点的出度之和。

图的同构

子图相关

- 子图
  - 生成子图
- 导出子图
  - 点导出子图 $G(V_1)$
  - 边导出子图 $G(E_1)$
- 补图：对**简单图** G，定义补图 $\overline{G}$

8.2 路与回路

def. 图 $G(V, E)$，点交替序列 $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_m)$，其中 $e_i = (v_{i-1}, v_i)$，称为 G 的一条路径 (path)，长度为 $m = l(p)$

- 路径、链、路
- 闭路径、闭链、闭路（回路）

Th. 若 G 的每个顶点度数至少为 2，即 $\delta(G) \geq 2$，则 G 一定包含回路.

连通性

$u, v \in V$，若 u, v 间存在一条路，称 u, v 是连通的。若 G 中任意两个顶点之间都是连通的，则称 G 为连通图。

设 $G(V, E)$，在 V 上定义关系 R：$\forall u, v \in V, (u, v) \in R \Leftrightarrow (u, v)$ 之间是连通的。显然，R 为 V 上的等价关系，等价类为 $V_1, V_2, \ldots, V_w$，$G(V_1), G(V_2), \ldots, G(V_\omega)$ 为连通分支，记为 $\omega(G)$。

例. 若 $G(V, E)$ 恰好有 2 个奇顶点，则这两个顶点之间是连通的

例.

> 设 $G(V, E)$ 是 n 个顶点的简单图，共有 e 条边，ω 个连通分支，则：
>
> $$n - \omega \leq e \leq \frac{1}{2}(n - \omega)(n - \omega + 1)$$
>
> 并说明等号成立的充要条件.

<u>解：</u>

1. 对每个连通分支 G_i，$e_i \geq n_i - 1$，求和后左边得证
2. 首先肯定全是完全子图。用调整法发现除了一个以外全是孤立点时边数越多，即为 $\frac{1}{2}(n - \omega)(n - \omega + 1)$。

有向图的连通性

- u 可达 v
- 强连通
- 单向连通
- 弱连通

图的邻接矩阵和路径矩阵

邻接矩阵：$M(G) = (m_{ij})_{n \times n}$，其中 $m_{i,j} = 0/1$

$$M^k = M \times M \times \cdots \times M$$

路径矩阵：$R(G) = (P_{ij})_{n \times n}$，计算方法：

$$E_n \vee M \vee \ M^2 \vee \cdots \vee M^{n-1}$$

度序列

（定理 8.6）*Th.*

> $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$，$d_i \geq d_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1$ 是简单图的度序列

$\Leftrightarrow d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ 为简单图的度序列

1. 必要性

   显然。

2. 充分性

   a. 当 v_1 的邻点为 $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$

显然成立。

b. v_1 有邻点不在 $\{v_2, v_3, ..., v_{d_1+1}\}$

调整法的思想，可以发现必能调整到情况 a

例. $(3,3,3,3,3,3,2,2,1)$

二分图

Th. $G(V,E)$ 为二分图 $\Leftrightarrow G$ 没有奇回路

证：

1. 必要性

   显然。

2. 充分性

   不妨设 G 连通。

   设 $V_1 = \{v \in V | u_0\text{到}v\text{有一条奇路}\}, V_2 = \{v \in V | u_0\text{到}v\text{有一条偶路}\}$

   显然 $V_1 \cup V_2 = V$

   可以证明 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

   再证……

   从而得证

8.3 欧拉图

欧拉图

def. 若 G 有一条经过每条边一次仅一次的闭链，则称 G 为欧拉图，这个闭链称为欧拉闭链。

def. 半欧拉图，欧拉开链

Th. 设 $G(V,E)$ 为连通图，**则 G 是欧拉图 $\Leftrightarrow \forall v \in V$，$d(v)$ 为偶数.**

证：

1. 必要性

   $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_m), v_0 = v_m$

2. 充分性

   注：此时可以说若干个互不重叠的回路的并

欧拉有向图

Th. $G(V,E)$ 为连通的有向图，**则 G 是欧拉有向图** $\Leftrightarrow d^+(v) = d^-(v), \forall v \in V$

例. 求由 16 个互不相同的二进制数排成的一个循环序列，使每 4 位连续的数字组成的 16 位 4 个 二进制子序列互不相同.

Th. $G(V,E)$ 为连通的有向图，**则 G 是半欧拉有向图** $\Leftrightarrow d^+(v) = d^-(v), \forall v \in V$.

8.4 哈密顿(*Halmiton*) 图

Th. 设 $G(V,E)$ 为 *Halmiton* 图，对 V 的任意非空子集 $S, S\subseteq V, S\neq\varnothing$，均有 $\omega(G-S)\leq |S|$

（可以论文找反例）

Th. 若 $G(V,E)$ 是 $n(n\geq 3)$ 个顶点的简单图，对每一对相邻的顶点 u,v，均有 $d(u)+d(v)\geq n$，则 G 一定是 *Halmiton* 图.

证：

假设一个简单图 G 满足上述条件，但它不是 *Halmiton* 图。

对 G 中所有不相邻顶点 u,v 进行如下操作：若 $G+(u,v)$ 不是 *Halmiton* 图，则将 u,v 相连；否则，不将 u,v 相连。

对所有不相邻顶点进行上述操作，这样得到一个满足条件的极大非 *Halmiton* 图。

此时 G 不是完全图，对 G 中所有不相邻的顶点 u,v，有 $G+(u,v)$ 一定是 *Halmiton* 图，从而该图的 *Halmiton* 回路一定要经过 (u,v) 这条边。设回路 $v_1,v_2,\ldots,v_n$，$v_1=u, v_n=v$，可以证明 v_1 相邻的顶点中的前一个顶点

有以下结论：

$G(V,E)$ 为简单图，n 个顶点，u,v 是 G 的两个不相邻的顶点，$d(u)+d(v)\geq n$，则：

G 是 *Halmiton* 图 $\Leftrightarrow$ $G+(u,v)$ 为 *Halmiton* 图.

由此可以定义 G 的 *Halmiton* 闭包.

> **期末考试会考一道书上一个图论定理的证明！！！**

$n-$**立方** $(n\geq 2)$

2^n 个顶点，长度为 n 的二进制序列 $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$，$\alpha_i\in\{0,1\}, 1\leq i\leq n$，必为 *Halmiton* 图。

***Halmiton* 有向图**

竞赛图一定是半 *Halmiton* 有向图 $(n\geq 2)$

证：对顶点数 n 作数学归纳法

1. 当 $n=2$ 时，显然结论成立
2. 假设当 $n=k(k\geq 2)$ 时结论成立，即 k 个顶点的竞赛图一定是半 *Halmiton* 有向图

   则当 $n=k+1$ 时，设 G 为 $k+1$ 个顶点的竞赛图，$\forall u\in V$，显然 $G-u$ 为 k 个顶点的竞赛图

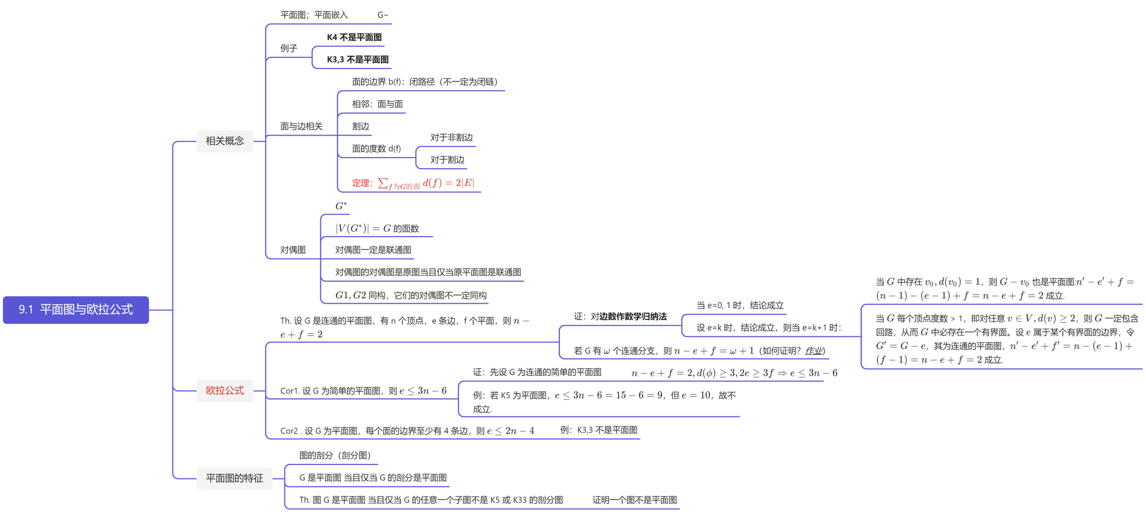
   1. $(u_1,v_1)\in E$
   2. $(u,v_i)\in E, (v_j,u)\in E$
   3. $(v_i,u)\in E, 1\leq i\leq k$

Th. 强连通的竞赛图一定是 *Halmiton* 有向图 $(n\geq 3)$

证：G 一定有长度为 $3, 4, \ldots, n$ 的回路，$\forall u \in V$

第 9 章 平面图与图的着色

9.1 平面图与欧拉公式



9.2 顶点着色

- G 是 $k-$色图，如果 $\chi(G) = k$
- G 是 $k-$可着色，如果 $\chi(G) \leq k$

临界图

- G 为临界图，如果对 G 的任意真子图 H，均有 $\chi(H) < \chi(G)$

Th. 设 G 为 $k-$临界图，则 $\delta(G) \geq k-1$

证：如果存在 $v_0 \in V, d(v_0) < k-1$。令 $G' = G - v_0$，则

$$\chi(G') < \chi(G) = k \Rightarrow \chi(G') \leq k-1$$

从而可以发现矛盾.

推论：$\chi(G) = k$，则 $|E| \geq \frac{1}{2}k(k-1)$.

> 思考：不通过 “临界图” 的思想，能证明上述结论吗?

Th 1. 设 G 为连通的简单图，则 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

注：贪心算法易证.

Th 2. 设 G 为连通的简单图，则 $\chi(G) = \Delta(G) + 1 \Leftrightarrow G$ 是奇回路或完全图.

9.3 平面图的着色

设 G 为平面图，对 G 的每个面进行着色，称为 G 的面着色，如果要求相邻的面着不同的颜色，称为 G 的正常的面着色。

$\chi^*(G)$ 为 G 的面色数

- 如果 $\chi^*(G) = k$，称 G 是 k 面色的
- 如果 $\chi^*(G) \leq k$，称 G 是 k 面可着色的

五色定理

任何一个平面图都是 $5-$点可着色的

证：设 G 为连通的平面图，则 $e \leq 3n-6, \sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2e \leq 6n-12$

$\therefore G$ 中至少存在一个顶点 $v_0, d(v_0) \leq 5$

对 G 的顶点数 n 作数学归纳法

当 $n \leq 5$ 时显然成立

设 $n = k$ 时结论成立

$\because G$ 中存在一个顶点 $v_0, d(v_0) \leq 5$

当 $d(v_0) < 5$ 时

当 $d(v_0) = 5$

9.4 边的着色

G 边着色、正常得边着色

边色数 $\chi'(G) = k$

有 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

Th. 设 G 为简单图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 或 $\Delta(G)+1$

$\chi'(K_n) =$

- n，当 n 为奇数，染同一种颜色的边至多时 $n\frac{n-1}{2} > (n-1)\frac{n-1}{2}$
- $n-1$，当 n 为偶数

Th. 设 G 为二分图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$

证：对 G 的边数 e 作数学归纳法：

当 $e = 1$ 时，显然成立

设 $e = k$ 时结论成立

当 $e = k+1$ 时

基本割集、基本回路

树的基本变换

设 $G(V, E)$ 为连通图，T 为 G 的生成树，e_1 为 G 的一条弦。$\therefore T+e_1$ 有唯一的回路 C，在 C 中去掉一条树枝得到 G 的另外一棵生成树 $T+e_1-e_2, e_2 \in T$. 称：

$$T \to T+e_1-e_2$$

为树的基本变换.

- T_1, T_2 的距离 $d(T_1, T_2)$

Th. 设 $G(V, E)$ 为连通图，T_1, T_2 为 G 的生成树，则一定可以从 T_1 通过树的基本变换变成 T_2

证明：对 $d(T_1, T_2)$ 作数学归纳法

当 $d(T_1, T_2) = 0$ 时，$T_1 = T_2$，结论成立.

当 $d(T_1,T_2)=1$ 时，$\exists e_2, e_2\in T_2, e_2\notin T_1, \therefore T_1+e_2-e_1=T_2$

设 $d(T_1,T_2)=k$ 时，结论成立

则当 $d(T_1,T_2)=k+1$ 时，取 $e_2, e_2\in T_2, e_2\notin T_1$

$\therefore T_1+e_2$ 有唯一的回路 C，C 上的边不全属于 T_2

$\therefore$ 在 C 中一定存在 $e_1, e_1\in T_1, e_1\notin T_2$

此时作 $T_1+e_2-e_1$ 为 T 的生成树，
$d(T_1+e_2-e_1)=d(T_1,T_2)-1=(k+1)-1=k.$

9.5 有根树与二分树

- 有根树（有序树）：如果每个分支点至多由 m 个儿子。
- 如果恰好有 m 个儿子，则称为正则 m 分树
- 二分树；正则二分树

性质 1. 在正则二分数中，总的分支点数为 i，树的高为 t，则 $i=t-1$.

性质. 设 T 为正则二分树，I 表示从树根到所有分枝点的路的长度之和，E 表示树根到所有树叶的长度之和，则 $E=I+2i$，其中 i 为分枝点数.

证：对分枝点数 i 进行数学归纳法

....