图的边着色相关纯理论与算法

lkdhy

摘要

图的边着色是图着色方面最自然和常见的问题之一，不少安排、划分与线路规划问题均涉及图的边着色。本文综合描述图的边着色相关的纯理论和算法。在纯理论方面，重点介绍了基于维津定理所定义的第一类图和第二类图中一些典型的图的性质，并概述了维津定理相关的一些推广与猜想。在图着色算法上，较为详细地描述了偏 k-树着色算法的重要成果，并概述了三色的边着色算法的进展。最后展望图的边着色这一图论领域的热点方面能产生更为丰富的成果。

目录

1 背景介绍

在图的边着色纯理论上，基于处在核心地位的维津定理已有一些研究结果，尤其是第一类图和第二类图的性质，此外也有相关的推广与猜想。

在算法上，首先，图的边着色问题是一个 NP 完全（NP-complete, NPC）问题，很难有多项式时间的顺序算法（sequential algorithm），而 $\Delta(G)$ 中颜色的边着色是 NP 难（NP-hard）问题。

在下文的结果之前，有在 $O(mn)$ 内得到用 $\Delta(G)+1$ 种颜色的 G 的边着色的顺序算法。然而在之前并没有用 $\Delta(G)+1$ 种颜色的 G 的边着色的并行算法（parallel algorithm），除非 Δ 有界。此外，关于 k-偏树，之前的边着色的算法都不高效。尽管有串并联（series-parallel）简单图的 $O(n^2)$ 算法，串并联多图的线性算法以及的 Bodlaender 高复杂度（当 Δ 不是常量）的 $O(n(\Delta+1)^{2^{2(k+1)}})$ 的偏 k-树图多项式算法。当然，之前并没有一般性的 k-偏树边着色的 NC 并行算法。

在三种颜色的边着色方面，先前仅有 $O(2^{\frac{n}{2}})$ 等复杂度的算法，事实证明其可被进一步优化。

2 边着色相关纯理论

2.1 维津定理

维津 (Vizing) 定理是图的边着色理论中的一个十分重要的定理，其给出了任一简单图 G 的边色数 $\chi'(G)$ 的下界与上界，以下给出维津定理。

定义 2.1. *对于一个图 G 的边着色，若 u 关联的所有边都没有着颜色 c，则称 c 在 u 处不存在，否则称 c 在 u 处存在。*

定理 2.2. *维津 (Vizing) 定理：对任何有限简单图 G，都有 $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$。*

2.2 第一类图和第二类图

对于维津定理，自然地，我们可按色数为 Δ 还是 $\Delta+1$ 将所有简单图 G 分类，并考虑比较两类图的数目，以及两类图的性质，亦即具有何种特定性质的图属于其中同一类。

定义 2.3. （第一类图和第二类图）对于图 $G(V,E)$，若 G 是 $\Delta(G)$-边可着色的，则称 G 是第一类图。若 G 是 $(\Delta(G)+1)$-边可着色的，则称 G 是第二类图。

下表简明地给出了第一类图和第二类图的分布以及两类图中一些特殊的图。

第一类图	**第二类图**
几乎所有图	奇数个顶点的正则图
二分图	$\lvert E(G)\rvert > \alpha'(G)\Delta(G)$ 的图
$\Delta \geq 2k$ 的 k-偏树	彼得森图；*Snarks* 图

下面对其内容依次进行阐述。

2.2.1 第一类图

定理 2.4. （*Erdős* 定理）几乎所有图都是第一类图，即若设 U_n 为所有 n 个顶点的第一类图组成的集合，V_n 为所有 n 个顶点的图组成的集合，则成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_n|}{|V_n|}=1$$

该定理的证明基于 Erdős 提出的两个定理：

1. 几乎所有图都是连通
2. 几乎所有图只有一个度数最大的顶点

定理 2.5. 二分图是第一类图。

证明. 反证法。假设存在二分图是第二类图，则考虑其中一个"极小的"二分图 $G(V,E)$，其满足 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$ 且对 $\forall e\in E, \chi'(G-e)=\Delta(G-e)$。

对于边 $e=\{u,v\}\in E$，易知 $G-e$ 是 $\Delta(G)$-可着色的，找到其一个 $\Delta(G)$ 种颜色的正常边着色。假设存在颜色 c 既不在 u 处存在也不在 v 处存在，则只要再将边 e 着颜色 c，则此时得到了 G 一个 $\Delta(G)$ 种颜色的正常边着色，从而必有 $\chi'(G)=\Delta(G)$，矛盾。

因此，当前所有颜色在 u 或 v 处存在，又因为 $G-e$ 中，$d(u)\leq\Delta(G), d(v)\leq\Delta(G)$，因此必有颜色 c_1 在 u 处不存在，颜色 c_2 在 u 处不存在，且 $c_1\neq c_2$。考虑以 u 为起点，边依次着颜色 $c_1, c_2, c_1, \ldots$ 的最长的路

P，由于 $G-e$ 是二分图，故此时 P 的终点 t 不为 u，否则最后一条边着颜色 c_1，与 c_1 在 u 处不存在矛盾。将 P 上边着的颜色 c_1、c_2 互换，结合 P 的最长性知得到了一个 $G-e$ 的 $\Delta(G)$ 种颜色的边着色，又此时 c_1 已在 v 处不存在，从而可将 e 着颜色 c_1 而得到了一个 G 的 $\Delta(G)$ 颜色的正常的边着色，矛盾。故假设不成立，因此任何二分图都是第一类图。 $\square$

特别地，有一类名为**偏 k-树**的有广泛应用的图。$\Delta \geq 2k$ 的偏 k-树也是第一类图。**k-树**的递归定义以及偏 k-树的定义如下：

定义 2.6. （k-树）*对一个 k：*

1. *一个 k 个顶点的完全图是 k-树。*
2. *如果图 $G(V, E)$ 是 k-树，且 k 个顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 的导出子图是一个完全图，则 $G' = (V \cup \{W\}, E \cup \{(v_i, w) | 1 \leq i \leq k\})$ 是 k-树，其中 $w \notin V$ 是一个新增点。*
3. *所有 k-树都能通过有限次应用 1、2 得到。*

定义 2.7. *若图 G 是一个 k-树的子图，则称 G 是偏 k-树。*

下将证明 $\Delta \geq 2k$ 的偏 k-树的图是第一类图。

引理 2.8. *若 e 是图 G 的一条可删边，且 $\chi'(G-e) \leq \Delta(G)$，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$。*

引理 2.9. *若一个偏 k-树 G 满足 $\Delta(G) \geq 2k$，则 G 有一条可删边。*

以上的引理证明从略。

定理 2.10. *若一个偏 k-树 G 满足 $\Delta(G) \geq 2k$，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$。*

证明. 由引理知 G 有一条可删边，取其一条可删边 e_1，因为 $G - e_1$ 也是偏 k-树，故只要 $\Delta(G - e_1) \geq 2k$，则可取其一条可删边 e_2，再考虑是否 $\Delta(G - e_1 - e_2) \geq 2k \cdots\cdots$ 如此进行下去，可以到一个边序列 $e_1, e_2, \ldots, e_m$，满足 $\Delta(G') = \Delta(G) - 1$, 其中 $G' = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$。

由维津定理，$\chi'(G) \leq \Delta(G') + 1 = \Delta(G)$，对 G' 倒序加回上述边序列中的边，不断应用引理，可知 $\chi'(G) = \Delta(G)$。 $\square$

2.2.2 第二类图

定理 2.11. 奇数个顶点的正则图是第二类图。

证明. 反证法。假设存在一个顶点数 n 为基数的 k-正则图 G 是第一类图，即 $\chi'(G) = \Delta(G) = k$。则对于其一个 k 种颜色的边着色，考虑计算同一种颜色的边的数量。设 $n = 2a+1, a \in N$，由握手定理，G 的边数 $e = \frac{1}{2}\sum_{v_i \in V} d(v_i) = \frac{1}{2}kn$，有 $\frac{e}{k} = a_{\frac{1}{2}}$。由鸽笼原理知，必存在 $a+1$ 条边着了同一种颜色，从而顶点个数 $n \geq 2(a+1) > 2a+1$，矛盾。故假设不成立，任何奇数个顶点的正则图都是第二类图。 □

由此可以立即得到以下课堂上与课本中（定理 9.14）提到的定理：

推论 2.12. 奇数个顶点的完全图是第二类图。

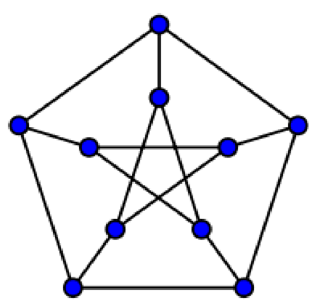
引理 2.13. 设 $G(V,E)$ 为图，G 的边独立数为 $\beta_1(G)$，则 $\chi'(G) \geq \frac{|E(G)|}{\beta_1(G)}$。

证明. 注意到一个边着色中着同一颜色的边构成的集合是一个边独立集（匹配），从而容易证明。 □

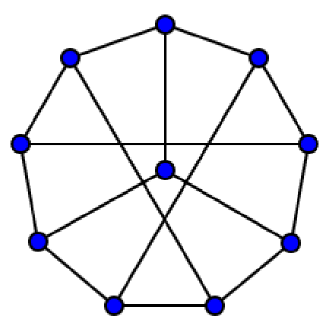
定理 2.14. 设 $G(V,E)$ 为图,G 的边独立数为 $\beta_1(G)$,若 $|E(G)| > \beta_1(G)\Delta(G)$,则 G 是第二类图。

证明. 由引理，$\chi'(G) \geq \frac{|E(G)|}{\beta_1(G)} > \frac{\beta_1(G)\Delta(G)}{\beta_1(G)} = \Delta(G)$，从而由维津定理知 $\chi'(G) = \Delta(G)+1$，即 G 是第二类图。 □

定理 2.15. 彼得森（$Petersen$）图是第二类图。



(a) 彼得森图的一种画法



(b) 彼得森图的另一种画法

图 1: 彼得森图

证明. 反证法。设彼得森图是第一类图，则其色数为 3。对于其内有“五角星”的画法，不难发现可设其“外圈”的 5 条边按顺时针顺序依次着颜色 1, 2, 3, 2, 1，据此可逐个确定其“内部”的边颜色，此过程中会得到矛盾。 □

定义 2.16. （*Snark* 图）无桥的（边双连通的）的 3-正则第二类图称为 *Snark* 图。

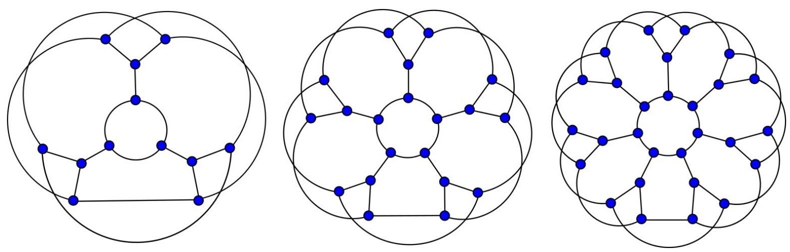


图 2: Snark 图

2.3 维津定理的推广与猜想

2.3.1 多重图的边着色

不难想象，多重图也可有正常的边着色。多重图的边着色也有一些研究结果。

定义 2.17. （多重度）对于多重图 G，称 G 中关联相同两点最多边数为 G 的多重度，记为 $\mu(G)$。

定理 2.18. 对任何多重图 G，有 $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$。

定理 2.19. 对任何多重图 G，有 $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$。

2.3.2 超图的边着色

定义 2.20. （超图；k-一致超图）设 V 为顶点集，E 为边集且其中任一 $e \in E$ 可连接两个或多个顶点，则 $H(V, E)$ 为超图。如果一个超图中的边均连接 k 个点，则称其为 k-一致超图。

将图的边着色进行推广，可定义超图的边着色，而对此有一些猜想。

猜想 2.21. H 是简单 k-一致超图，若每个大小为 $k-1$ 的点集最多包含在 r 条边之内，则存在 $(r+k-1)$-边着色使任意两条有 $k-1$ 个公共点的边颜色都不同。

猜想 2.22. 任何 *Snark* 图都可以收缩到彼得森图。

3 偏 k-树着色算法的重要成果

3.1 研究成果概述

这篇论文提出了：1. 解决 k-偏树边着色问题的线性顺序算法；2. 给出了 k-偏树边着色的最优也是第一个 NC 并行的算法，其中 k 为固定的常数。

3.2 先前的结果与相关定理

定义 3.1. (树分解;树分解的宽度)图 $G(V,E)$ 的树分解(*tree-decomposition*)是一棵树 $T=(V_T,E_T)$，其中 V_T 是代表 V 的一个子集的顶点 X 组成的集合，T 满足：

1. $\cup_{X_i\in V_T}X_i=V$;
2. 对 $\forall e=(u,v)\in E$，存在顶点 $X\in V_T$，满足 $u,v\in X$;
3. 如果 T 中顶点 X_k 在顶点 X_i 到 X_j 的路上，则 $X_i\cap X_j\subseteq X_k$。

下图展示了一个偏 3-树的树分解。

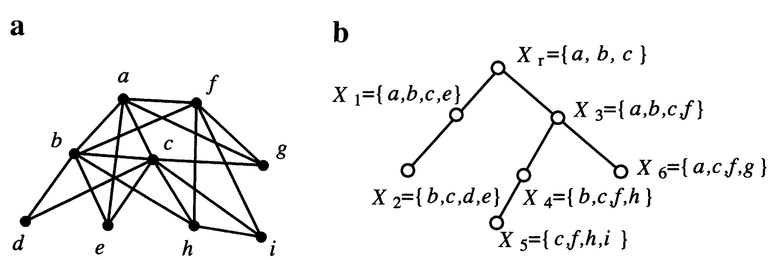


图 3: 一个偏 3-树及其树分解

一个树分解的宽度为 $\max_{X_i\in V_T}|X_i|-1$。

定义 3.2. （图的树宽）一个图 G 的树宽（*treewidth*）是其所有树分解的宽度的最小值。

定理 3.3. 一个图是偏 k-树当且仅当它的树宽不超过 k。

特别地，在算法上，博德拉内（Bodlaender）提出了对固定的 k，求解图 G 宽度不超过 k 的树分解的线性顺序算法。

基于此，先前已有一些可求解偏 k-树边着色问题的算法，包括求解图着色的一个时间复杂度 $O(n(\Delta 2^{2(k+1)(\Delta+1)} + (\Delta+1)^{k(k+1)/2})$ 的标准动态规划（Dynamic Programming, DP）算法，以及博德拉内的时间复杂度 $O(n(\Delta+1)^{2^{2(k+1)}})$ 的偏 k-树图求解算法。显然，只要图的最大度数 Δ 有界，其都是线性算法。

值得一提的是，现在可以得到以下的定理。

定理 3.4. 对固定的 k，可用线性时间得到偏 k-图的边色数。

证明. 考虑对偏 k-图 G 最大度数 Δ 分情况讨论。

1. 当 $\Delta \geq 2k$，则有 $\chi'(G) = \Delta(G)$。
2. 当 $\Delta < 2k$，则相当于 $\Delta(G)$ 有界，从而可以通过以上的算法直接用线性时间求解出 $\chi'(G)$。

□

3.3 偏 k-树着色的线性算法

3.3.1 算法核心思想

首先，已经指出对偏 k-树 G，当 $\Delta(G)$ 有界，如 $\Delta(G) < 6k$ 时，可线性求解出它的边着色。因此只需解决 $\Delta(G) \geq 6k$ 时的情况。

运用**分治**思想，考虑将 $\Delta \geq 6k$ 的图的划分成多个子图（设其能线性做到）$G_1, G_2, \ldots, G_s$，满足均有较小的 $\Delta < 6k$，且其边着色（最优的，即用 χ' 种颜色，下同）可以直接经合并得到 G 的 $\chi'(G)$ 种颜色的边着色，即成立

$$\sum_{1 \leq i \leq s} \chi'(G_i) = \chi'(G) \tag{1}$$

这样，我们线性求解出所有子图 G_i 的边着色后，再用线性时间方便地将其合并得到 G 的 $\chi'(G)$ 种颜色的边着色即可。

3.3.2 算法进一步解释

定义 3.5. *若* $E_1, E_2, \ldots, E_s$ *是偏* k*-树* G *的一个划分，称其为* (Δ, c)*-划分，当对* $G_i = G(E_i), 1 \le i \le s$ *满足：*

1. $\Delta(G) = \Delta_{i=1}^{s}\Delta(G_j)$；

2. 对 $1 \le i \le s-1$，$\Delta(G_i) = c$，*且* $c \le \Delta(G_s) < 2c$。

显然子图 $G_i, 1 \le i \le s$ 均为偏 k-树。**我们希望** $\Delta(G_i) < 6k, 1 \le i \le s$**，并且上面的**(1)**式成立**。由此，我们可以**取** $c = 3k$，则 $3k \le \Delta(G_i) < 6k, 1 \le i \le s$，从而每个子图的边着色都能线性求解。另一方面 $\Delta(G_i) \ge 2k$，所以 $\chi'(G_i) = \Delta(G_i)$，进而成立

$$\sum_{1 \le i \le s} \chi'(G_i) = \chi'(G)$$

从而也保证了我们能用线性时间将各个子图 G_i 的边着色合并得到 G 的 $\chi'(G)$ 种颜色的边着色。

定理 3.6. *对* $\Delta(G) \ge 6k$ *的偏* k*-树* $G(V, E)$，*可在线性时间内找到* E *的* $(\Delta, 3k)-$ *划分。*

综上，我们可以得到偏 k-树着色的常数较小的线性算法。

3.4 偏 k-树着色的最优且首个 NC 并行算法

下面概述该算法的思想和内容。

首先，在并行算法理论方面，可分析得到以下引理。

引理 3.7. *如果算法* A *的并行计算时间为* $O(\log n)$，*且* A *共有* $O(n)$ *次操作，则使用* $O(\frac{n}{\log n})$ *个处理器（processor）来执行时，*A *的并行计算时间为* $O(\log n)$。

从而考虑基于上文的算法，若说明各个步骤都能用 $O(n)$ 的操作次数在 $O(\log n)$ 的并行计算时间内得到，那么整个算法就被优化到：使用 $O(\frac{n}{\log n})$ 个处理器（processor）来执行时，并行计算时间为 $O(\log n)$（当给定偏 k-树 G 宽度不超过 k 的树分解）。

对于给出了宽度不超过 k 的树分解的偏 k-树 G，仍然考虑按照 $\Delta(G) < 6k$，$\Delta(G) \ge 6k$ 分情况讨论。研究说明了各个步骤都能用 $O(n)$ 的操作次数在 $O(\log n)$ 的并行计算时间内得到，并给出了相关算法过程，最终得到了此算法。

3.5 意义

本章所介绍的偏 k-树着色算法的研究成果是重要甚至具有开创性的。其基于先前结果给出了常数较小的偏 k-树着色的线性算法，而且在此基础上给出了偏 k-树着色的最优算法，也是其首个 NC 并行算法。

此外，该研究的方法可被更广泛的运用，其可能也适用于图的亏格（genus），厚度（thickness）等有界，但最大度数 Δ 很大的情形。

4 三种颜色的边着色算法的进展

4.1 研究概述

2009 年的一项研究给出了 $O(1.344^n) = O(2^{0.427n})$ 的三种颜色的边着色算法，优化了先前 $O(2^{\frac{n}{2}})$ 等复杂度的算法。

研究描述了一个判定一个图是否 3-边可着色的算法，并且该算法容易扩展而在 3-边可着色的情况下求解出一个边着色。

而在时间复杂度分析上，该研究采用一种了 “measure and conquer” 的技术。

4.2 意义

对于 $\Delta = 3$ 的图而言，用三种颜色的边着色（若有）显著由于用四种颜色，因而本研究对优化了先前 $O(2^{\frac{n}{2}})$ 等复杂度的算法具有重要意义。

另一方面，该研究也可对 Snark 图的相关研究提供不小的帮助。

5 总结

图的边着色是图着色方面最自然和常见的问题之一，不少安排、划分与线路规划问题都可能涉及图的边着色，因而被较多地研究，无论在其纯理论还是方法。

于我们而言，本文描述的纯理论结果以及相关算法上的进展，无疑是课本之外的延申，也给我们的思考带来启发。

图的边着色方面的研究结果众多，并且有望在进一步的研究中出现更为丰富的成果。

参考文献

[1] 赵一鸣 (n.d.). 离散数学 = *Discrete mathematics.*

[2] ROBERT GREEN, *VIZING’ S THEOREM.*

[3] Xiao Zhou,U Shin-ichi Nakano, and Takao Nishizeki, *Edge-coloring partial k-trees.*

[4] Łukasz Kowalik, *Improved edge-coloring with three colors.*