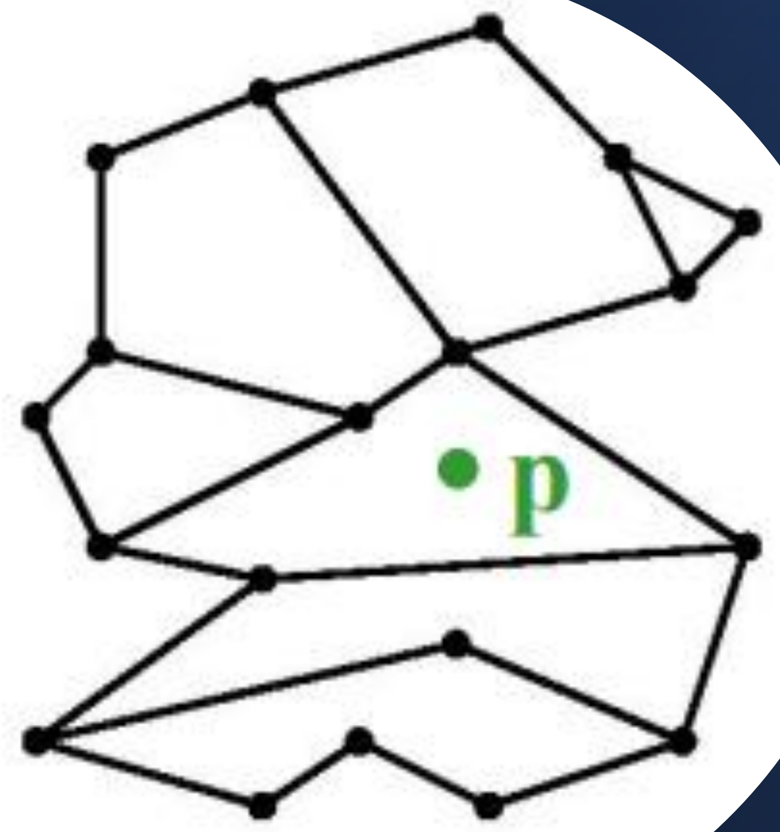
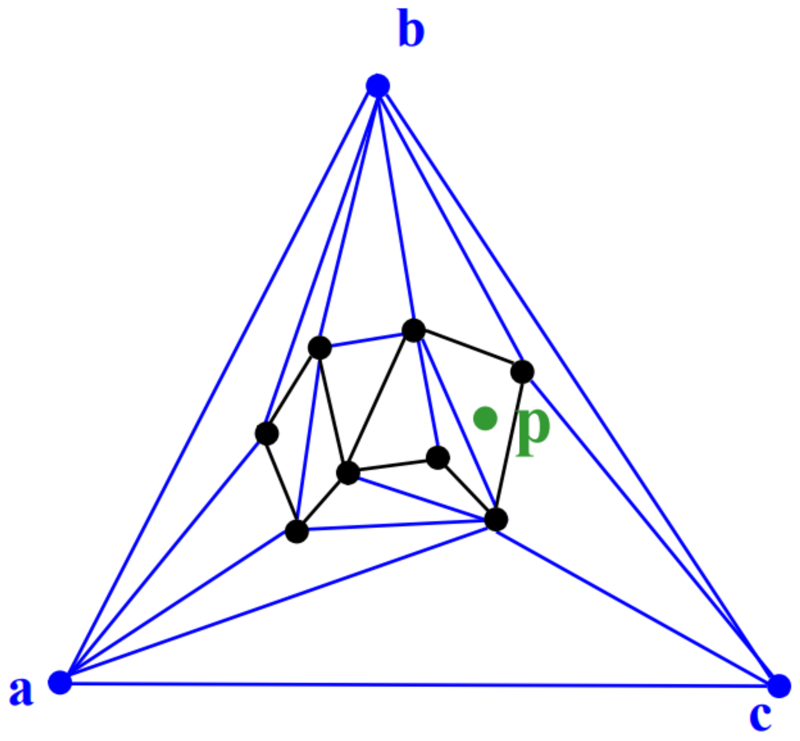
# Lokalizacja punktu w przestrzeni dwuwymiarowej – metoda doskonalenia triangulacji – algorytm Kirkpatrick’a



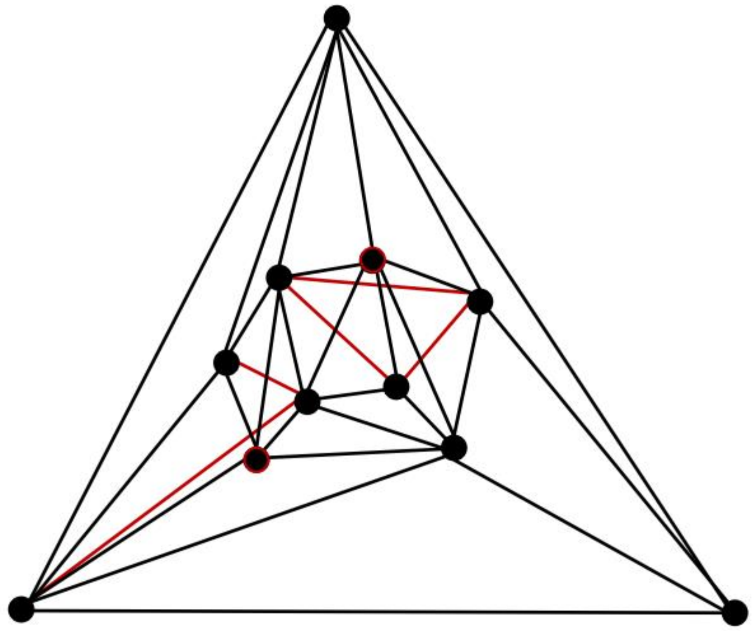

Łukasz Kwinta, Wiktor Warzecha

# Algorytm lokalizacji punktu Kirkpatrick’a

- Wymaga triangulacji jako dane wejściowe.
- Można przekształcić podział płaszczyzny z n wierzchołkami na triangulację
- Rozmiar triangulowanego podziału płaszczyzny pozostaje wciąż O(n), zgodnie z wzorem Eulera.
- Konwersję można wykonać w czasie O(nlogn) – triangulacja Delaunaya.



# Hierarchia Kirkpatricka

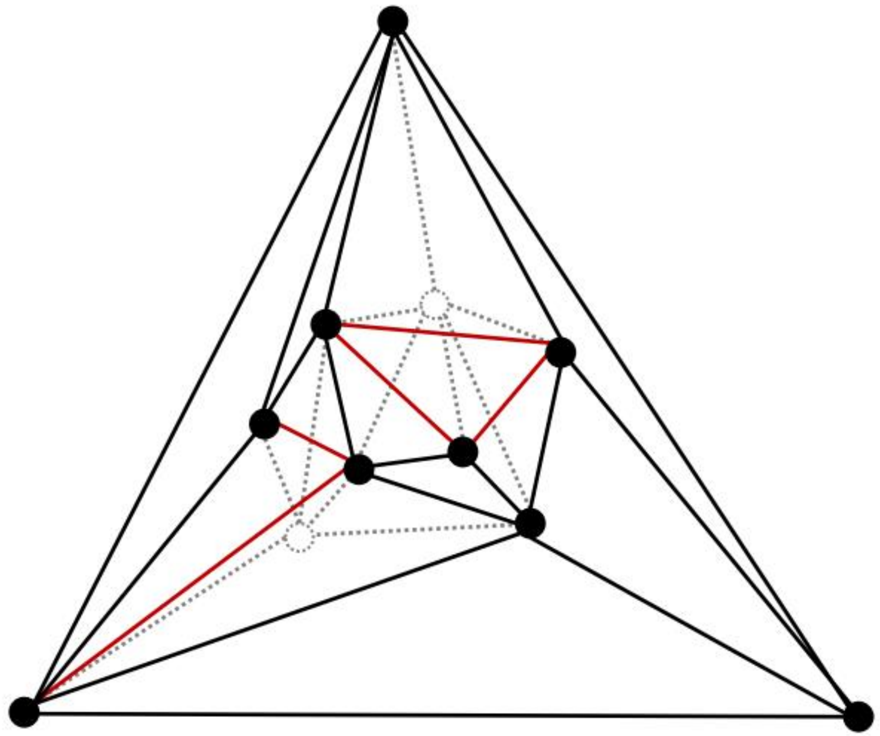


- Obliczamy sekwencję $T_0, T_1, \ldots, T_k$ coraz bardziej zbiorczych triangulacji, taką, że ostatnia ma stałą złożoność.
- Sekwencja $T_0, T_1, \ldots, T_k$ powinna mieć następujące właściwości:
  - $T_0$ to triangulacja wejściowa, $T_k$ to trójkąt zewnętrzny.
  - $k \in O(\log n)$
  - Każdy trójkąt w $T_{i+1}$ pokrywa się z $O(1)$ trójkątami w $T_i$.
- Jak zbudować taką sekwencję?
  - Konieczne jest usuwanie wierzchołków z Ti.
  - Usunięcie wierzchołków tworzy dziury, które trzeba ponownie triangulować.
- Jak przejść od $T_0$ o rozmiarze $O(n)$ do $T_k$ o rozmiarze $O(1)$ w $k=O(\log n)$ krokach?
  - W każdym kroku usuń stałą frakcję wierzchołków z $T_i$.
- Musimy również zapewnić, że każdy nowy trójkąt w $T_{i+1}$ pokrywa się tylko z $O(1)$ trójkątami w $T_i$.

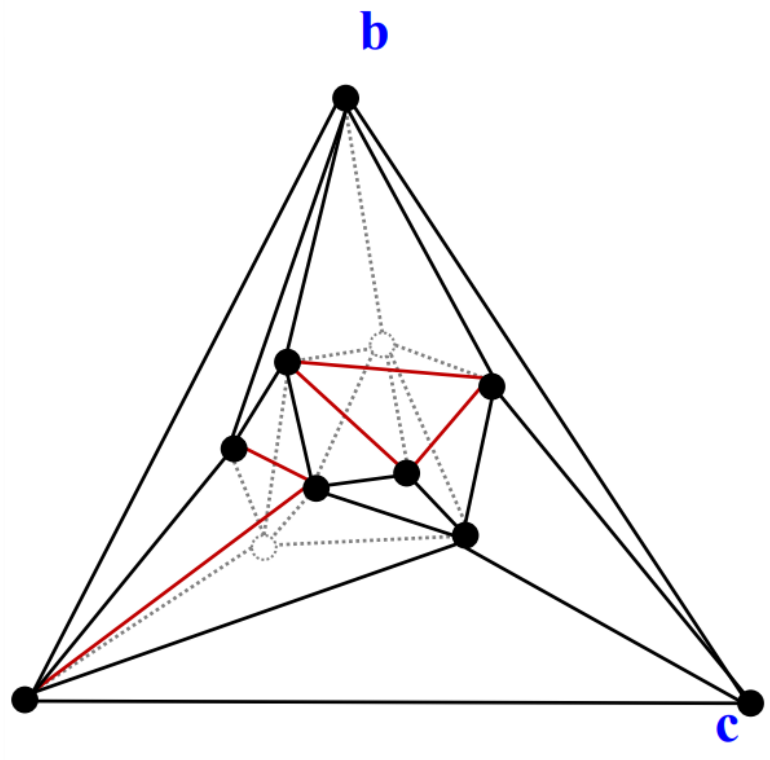
# Usuwanie Wierzchołków a Zbiory Niezależne

Podczas tworzenia $T_{i+1}$ z $T_i$ usuwamy wierzchołki z $T_i$, które posiadają następujące cechy:

- Stały stopień: Każdy wierzchołek v do usunięcia ma stopień O(1) w grafie $T_i$.
  - Jeśli v ma stopień d, wynikową dziurę można ponownie triangulować za pomocą d-2 trójkątów.
  - Każdy nowy trójkąt w $T_{i+1}$ pokrywa się co najwyżej z d oryginalnymi trójkątami w $T_i$
- Zbiory niezależne: Żadne dwa usunięte wierzchołki nie są sąsiednie.
  - Każda dziura może być ponownie triangulowana niezależnie.



# Lemat o Zbiorze Niezależnym




Lemat: Każdy ztriangulowany graf planarny o n≥4 wierzchołkach zawiera zbiór niezależny o rozmiarze n/18, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej 8. Taki zbiór można obliczyć w czasie O(n).

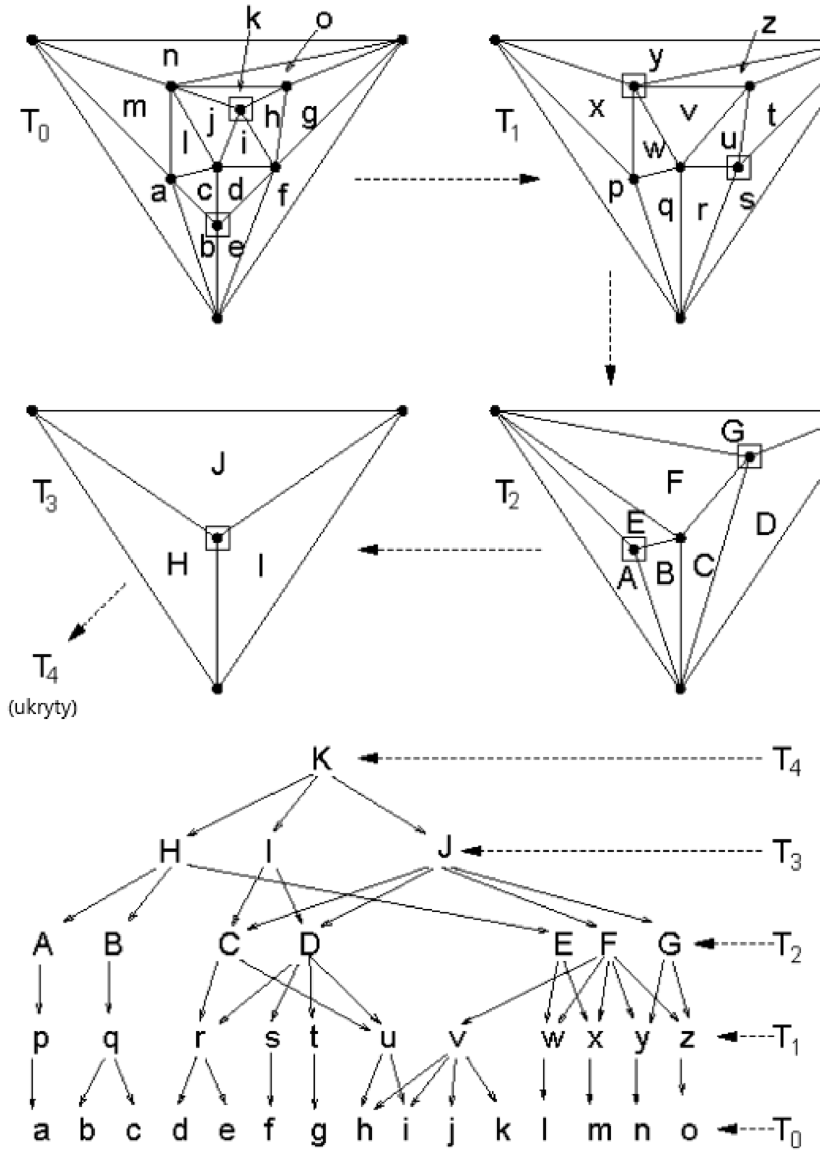
Wykorzystujemy ten lemat do skonstruowania hierarchii Kirkpatricka:

- Rozpocznamy od $T_0$ i wybieramy zbiór niezależny S o rozmiarze n/18, w którym każdy wierzchołek ma maksymalny stopień 8. [Pomijamy wierzchołki zewnętrznego trójkąta]
- Usuwamy wierzchołki ze zbioru S i ponownie triangulujemy dziury.
- Wynikowa triangulacja, $T_1$, ma co najwyżej 17/18n wierzchołków.
- Powtórzamy proces, aby zbudować hierarchię, aż $T_k$ będzie równy zewnętrznemu trójkątowi.
- Głębokość hierarchii wynosi k = log18/17 n.

# Przykład Hierarchii

Korzystamy z lematu Zbiorze Niezależnym o do skonstruowania hierarchii Kirkpatricka:

- Rozpoczynamy od $T_0$ i wybieramy niezależny zbiór S o rozmiarze n/18, w którym każdy wierzchołek ma maksymalny stopień 8. [Nigdy nie wybieramy wierzchołków zewnętrznego trójkąta]
- Usuwamy wierzchołki ze zbioru S i ponownie triangulujemy dziury.
- Wynikowa triangulacja, $T_1$, ma co najwyżej 17/18n wierzchołków.
- Powtarzamy ten proces, aby zbudować hierarchię, aż $T_k$ będzie równy zewnętrznemu trójkątow.
- Głębokość hierarchii wynosi $k = \log n$.



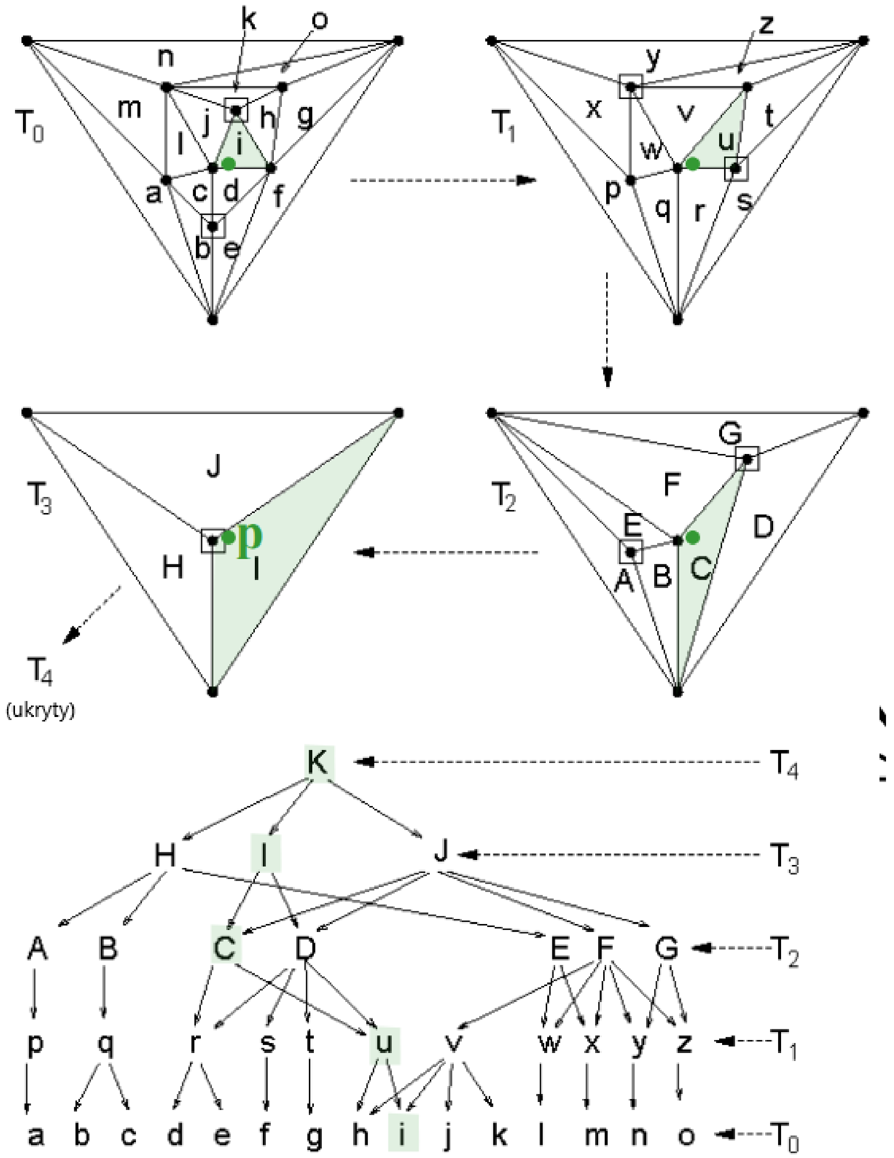
# Struktura Danych Hierarchii

Przechowujemy hierarchię jako DAG (Skierowany Graf Acykliczny):

- Korzeń to $T_k$.
- Węzły w każdym poziomie odpowiadają trójkątom $T_i$.
- Każdy węzeł dla trójkąta w $T_{i+1}$ przechowuje wskaźniki do wszystkich trójkątów w $T_i$, z którymi się pokrywa.

Jak zlokalizować punkt p w DAG:

- ustawiamy t jako $T_k$
- Sprawdzamy, każdy z co najwyżej 6 trójkątów $T_{k-1}$, które pokrywają się z D, czy zawierają p. Aktualizujemy t i schodzimy w hierarchii aż dojdziemy do $T_0$.



# Analiza

- Złożoność wyszukiwania to O(log n):
  - Istnieje O(log n) poziomów, a przemieszczanie się między poziomami zajmuje stały czas.
- Złożoność pamięciowa to O(n):
  - Sumujemy rozmiary wszystkich triangulacji w hierarchii.
  - Ze wzoru Eulera wystarczy zsumować liczbę wierzchołków.
  - Łączna liczba wierzchołków: $n + 17/18\, n + (17/18)^2\, n + (17/18)^3\, n + \ldots \leq 1/(1 - 17/18)\, n = 18n$
- Czas wstępnego przetwarzania to O(n log n):
  - Triangulacja podziału zajmuje czas O(n log n).
  - Złożoność budowy struktury hierarchii to O(n).

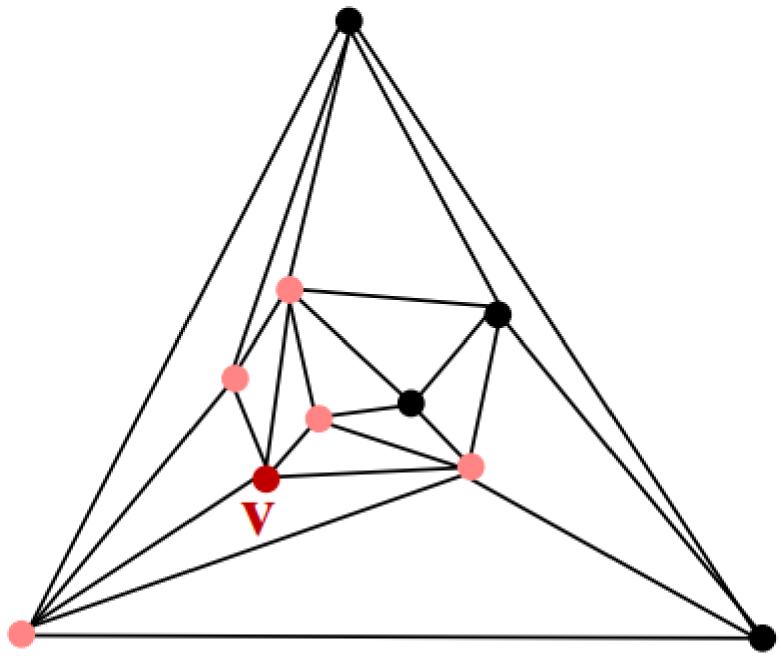
# Lemat o Zbiorze Niezależnym

Lemat: Każdy planarny triangulowany graf o $n \geq 4$ wierzchołkach zawiera zbiór niezależny o rozmiarze $n/18$, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej 8. Taki zbiór można obliczyć w czasie $O(n)$.

Dowód:

Algorytm zachłanny do konstrukcji zbioru niezależnego:

- Oznacz wszystkie wierzchołki stopnia $\geq 9$.
- Dopóki istnieje nieoznaczony wierzchołek:
    - \- Niech v będzie nieoznaczonym wierzchołkiem.
    - \- Dodaj v do zbioru niezależnego.
    - \- Oznacz v i wszystkich jego sąsiadów.
- Można go zaimplementować w czasie $O(n)$



# Lemat o Zbiorze Niezależnym

Wciąż trzeba udowodnić odpowiednio dużego niezależnego zbioru.

- Wzór Eulera dla planarnego grafu triangulowanego o n wierzchołkach:

  |krawędzie| = 3n – 6

    - Suma stopni wierzchołków:

      $\sum_v$ deg(v) = 2*|krawędzie|= 6n – 12 < 6n

- Założenie: Przynajmniej n/2 wierzchołki mają stopień ≤ 8.

  Dowód: Przez nie wprost.

  Załóżmy inaczej.

  → n/2 wierzchołków ma stopień ≥ 9. Pozostałe mają stopień ≥ 3.

  → Suma stopni wynosi ≥ 9n/2 + 3n/2 = 6n. Sprzeczność.

- Na początku algorytmu przynajmniej n/2 węzłów jest nieoznaczonych. Każdy wybrany wierzchołek v oznacza ≤ 8 innych wierzchołków, więc razem z nim co najwyżej 9.
- Dlatego pętla może być powtórzona co najmniej n/18 razy.
- To pokazuje, że istnieje niezależny zbiór o rozmiarze przynajmniej n/18, w którym każdy węzeł ma stopień ≤ 8.

# Podsumowanie

- Struktura danych lokalizacji punktu Kirkpatricka wymaga O(n) czasu wstępnego przetwarzania, O(n) miejsca i ma O(log n) czas lokalizowania.
- Jednakże, ma wysoką stałą. Zatem, mimo że algorytm ten jest asymptotycznie optymalny, jest głównie obiektem zainteresowania teoretycznego.