Algorytm Kirkpatricka Dokumentacja

Wiktor Warzecha

Łukasz Kwinta

Spis treści

1 DANE TECHNICZNE

Procesor: 64 bitowy procesor

System operacyjny: Ubuntu 20.04 w środowisku WSL 2 na Windows 11 x64

Pamięć ram: 32 GB DDR4

Środowisko i język: Python 3.9 + Jupyter Notebook w środowisku Anaconda

Wykresy tworzono przy pomocy narzędzia przygotowanego przez KN Bit, do obliczeń numerycznych używano biblioteki numpy. Dane przechowywane były w zmiennych typu float – typ danych o rozmiarze 64 bitów, odpowiednik typu `double` w języku C.

2 WYMAGANE OPROGRAMOWANIE

Do uruchomienia projektu potrzebne są następujące pakiety środowiska python. Wszystkie dostępne są z repozytorium PIP.

- `numpy` –
  - używamy do obliczeń numerycznych oraz przekształceń tablic wynikowych
  - w wersji co najmniej 1.25.2
- `matplotlib` –
  - używamy do wizualizacji działania algorytmu
  - w wersji co najmniej 3.7.2
- `notebook` –
  - potrzebny do uruchomienia pliku ipynb – Jupyter Notebook
  - w wersji co najmniej 6.5.4
- `SciPy` –
  - używamy do triangulacji Delaunaya początkowego wielokąta, jest ona w tym momencie wygodna, ponieważ nie musimy osobno dodawać krawędzi otoczki wypukłej do triangulacji i triangulować obszaru pomiędzy zewnętrznym trójkątem i wielokątem, dostarczona triangulacja jest zrealizowana w czasie $\mathcal{O}(n\ log\ n)$
  - w wersji co najmniej 1 .11.4
- `planegeometry` –
  - używamy do przechowywania grafu planarnego, udostępnia wygodny interfejs do listy sąsiedztwa, oraz prymitywne typy geometryczne (Punkt, Odcinek, Trójkąt) których użyliśmy w naszym algorytmie oraz funkcje interfejsu do owych typów
  - w wersji co najmniej 1.0.1
- `mapbox_earcut` –
  - używamy do triangulacji dziur powstałych przez usunięcie zbioru niezależnych odcinków, triangulacja Delaunaya nie była wygodna do triangulacji dziur z powodu konieczności radzenia sobie z odcinkami dodanymi poza obszarem wielokąta. Biblioteka ta jest bindingiem do biblioteki `mapbox` zrealizowanej w języku C++.
  - w wersji co najmniej 1.0.1

- `Tkinter` –
    - Używany do zrealizowania interaktywnej prezentacji działania algorytmu
    - W wersji co najmniej 8.6.12

Kod naszego oprogramowania składa się z następujących plików - części:

- `kirkpatrick-algorithm.ipynb` – zawiera przykładowe wycinki kodu, z fragmentami implementacji, obrazujące poszczególne części z ilustracjami wyjaśniającymi fragmenty kodu
- `kirkpatrick_point_location.point_location.py` – użytkowa biblioteka zawierająca końcową implementację algorytmu zebraną w jedną całość
- `kirkpatrick_point_location_visualization.point_location_visualization.py` – biblioteka generująca obrazki z poszczególnymi krokami działania algorytmu
- `kirkpatrick_point_location_visualization.point_location_interactive_visualization.py` – biblioteka zawierająca aplikację z GUI w którym można zadać chmurę punktów oraz punkt do zlokalizowania
- `kirkpatrick_point_location_visualization.test.ipynb` – plik w którym pokazano jak uruchomić graficzną aplikację z wizualizacją.

3 WIZUALIZACJA

Do wizualizacji wykorzystaliśmy moduł `visualizer`, przygotowany przez KN Bit. Zawiera on nakładkę na bibliotekę `matplotlib`, ułatwiającą wizualizację działania algorytmów. Dodatkowo wprowadziliśmy interaktywne GUI pozwalające po kolei wyświetlać kroki algorytmu. W innych modułach korzystamy z funkcji zawartych w tym module do rysowania wielokątów.

4 TYPY PRYMITYWNE I STRUKTURY DANYCH

W całym module korzystaliśmy z typów geometrycznych zdefiniowanych w bibliotece `planegeometry`. Korzystaliśmy z tej biblioteki przede wszystkim dlatego, że udostępnia ona wygodny interfejs na listę sąsiedztwa dla grafu planarnego. Strukturą danych na której operujemy jest `PlanarMap`. Jest to klasa która używa słownika – hashmapy – do przechowywania relacji pomiędzy punktami w grafie. Umożliwia to dostęp w czasie stałym do sąsiadów danego punktu. Obiekt ten posiada również implementację struktury danych DCEL, lecz metody z których korzystaliśmy nie korzystają z tej funkcjonalności.

Przy okazji skorzystaliśmy z implementacji prymitywnych obiektów geometrycznych dostarczonych przez tą bibliotekę

- `Point` – implementacja klasy punktu dostarczająca mechanizm porównywania punktów i ich porządkowania względem kierunku wskazówek zegara którą użyliśmy do uporządkowania sąsiadów punktu ze zbioru niezależnego bez użycia funkcji trygonometrycznych aby stworzyć zbiór trójkątów, punkty wykorzystujemy w bibliotece do opisu wielokątów

- `Segment` – struktura opisująca odcinek między punktami A i B. Posiada metodą umożliwiają sprawdzenie przecięcia dwóch odcinków, którą wykorzystaliśmy do sprawdzenia, które trójkąty nachodzą na siebie

- `Triangle` – struktura opisująca trójkąt, posiada metodę pozwalającą sprawdzić czy punkt jest wewnątrz trójkąta, obiekty tego typu są zwracane jako wynik lokalizacji punktu

5 MODUŁ KIRKPATRICK_POINT_LOCATION

Jest to główny moduł naszego projektu. Zawiera on główną bibliotekę służącą do lokalizacji punktów. Biblioteka zawiera definicję klasy `Kirkpatrick`, która przechowuje obecny stan lokalizacji.

Klasa Kirkpatrick posiada następujące metody[1]:

- `__init__(self, polygon: List[tuple[float, float]])`
  - Argumenty:
    - `polygon` – lista krotek ze współrzędnymi punktów wierzchołków wielokąta podanych w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara
  - Opis działania:
    - Funkcja inicjalizuje pola z których później korzysta klasa na domyślne wartości. Do podanego wielokąta dodaje zewnętrzny trójkąt, oblicza triangulację Delaunaya oraz konwertuje otrzymane krawędzie do obiektu `PlanarMap`
  - Złożoność: $\mathcal{O}(n \log n)$ – ze względu na triangulację Delaunaya

- `preprocess(self)`
  - Argumenty: brak
  - Opis działania:
    - Funkcja tworzy zbiór trójkątów, inicjalizuje drzewo przeszukiwań, a następnie tworzy je. Dopóki liczba wierzchołków w wielokącie (w reprezentacji poprzez PlanarMap) jest większa od 3 funkcja znajduje i usuwa zbiór niezależnych wierzchołków, a następnie przetwarza trójkąty powstałe przez triangulację powstałej dziury, tworząc graf relacji nakładania się na siebie trójkątów.
    - Funkcja wyrzuca wyjątek gdy wielokąt został już raz przetworzony

[1] W tym miejscu pomijam metody i pola prywatne oznaczone w kodzie prefiksem „__”, gdyż nie są one przeznaczone do ogólnego użytku. W opisie działania przedstawię funkcjonalność tychże metod

- Złożoność: $\mathcal{O}(n\ log\ n)$ – ze względu na zmniejszającą się ilość wierzchołków w wielokącie i zmniejszający się stopień wierzchołków

- `get_triangles(self) -> List[Triangle]`
  - Argumenty: brak

  - Zwracane wartości:
    - Lista obiektów typu `Triangle` z biblioteki `planegeometry`

  - Opis działania:
    - Funkcja zwraca listę trójkątów tworzącą najmniejszy podział wielokąta z zewnętrznym trójkątem (bezpośrednio po triangulacji Delaunaya)

- `query(self, point: (float, float)) -> Triangle`
  - Argumenty:
    - `point` - podwójna krotka typu float oznaczająca punkt który sprawdzamy

  - Zwracane wartości:
    - Obiekt typu `Triangle` z biblioteki `planegeometry`, jeden z listy trójkątów zwracanej przez `get_triangles(self)` jest wynikiem przeszukiwania

  - Opis działania:
    - Funkcja przeszukuje drzewo wygenerowane przez funkcje przetwarzającą wielokąt. W każdym kroku funkcja sprawdza do którego z dzieci obecnego trójkąta należy sprawdzany punkt
    - Funkcja wyrzuca wyjątek w razie próby przeszukiwania w wielokącie który nie został jeszcze przetworzony

  - Złożoność: $\mathcal{O}(log\ n)$ – ze względu na przeszukiwanie drzewa o wysokości $log\ n$

- `query_with_show(self, (float, float))`
  - Argumenty:
    - `point` - podwójna krotka typu float oznaczająca punkt który sprawdzamy

  - Opis działania:
    - Funkcja przeszukuje drzewo wygenerowane przez funkcje przetwarzającą wielokąt. W każdym kroku funkcja sprawdza do którego z dzieci obecnego trójkąta należy sprawdzany punkt. W wyniku przeszukiwania funkcja rysuje zbiór wszystkich trójkątów, zaznacza sprawdzany punkt oraz podświetla zlokalizowany trójkąt.

- Funkcja wyrzuca wyjątek w razie próby przeszukiwania w wielokącie który nie został jeszcze przetworzony

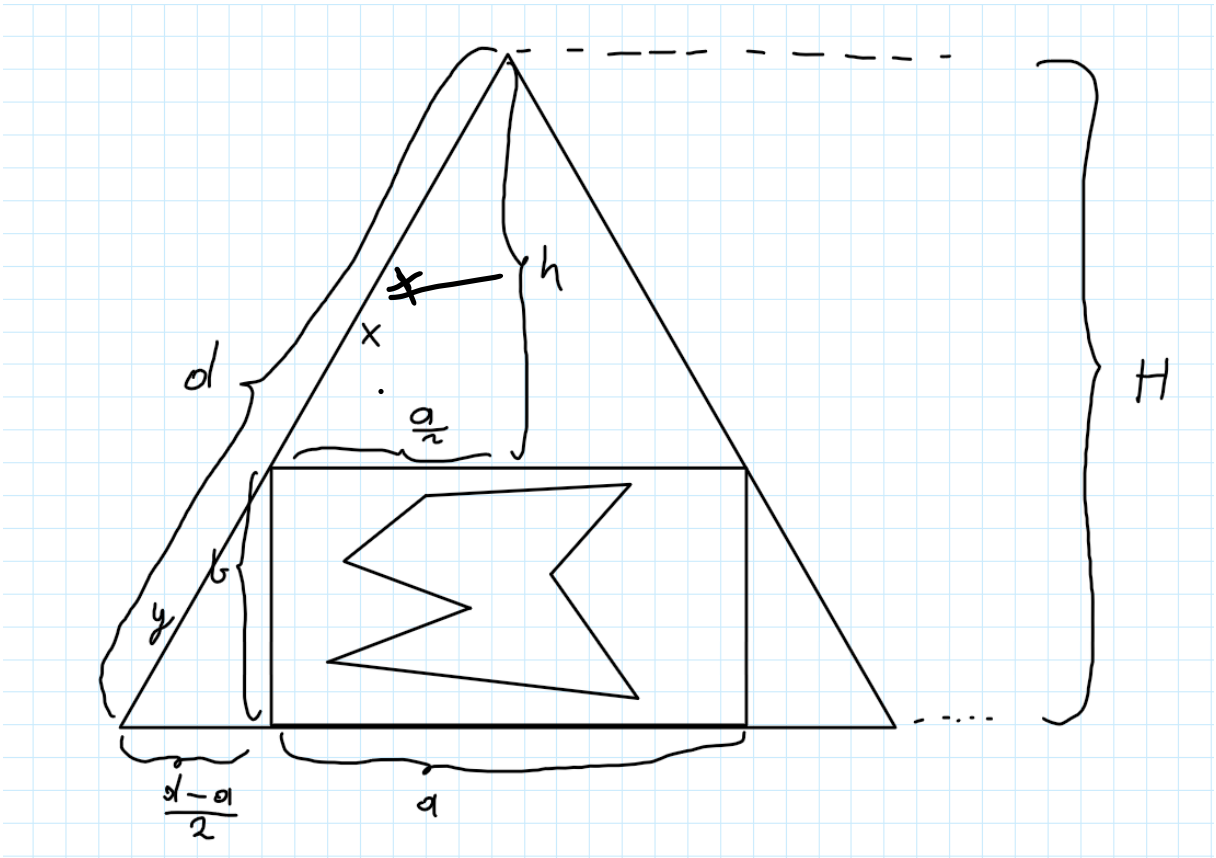
- Złożoność: $\mathcal{O}(log\ n)$ – ze względu na przeszukiwanie drzewa o wysokości $log\ n$

6 OPIS DZIAŁANIA

Wraz z biblioteką przygotowaliśmy Jupyter Notebook (kirkpatrick-algorithm.ipynb) jako demo prezentujące krok po kroku poszczególne elementy algorytmu, a na końcu pokazuje przykłady wykorzystania biblioteki wraz z testami które przeprowadziliśmy.

6.1 WYZNACZENIE ZEWNĘTRZNEGO TRÓJKĄTA I WSTĘPNA TRIANGULACJA

Aby wyznaczyć zewnętrzny trójkąt stosujemy metodę wyznaczenia prostokąta obejmującego zbiór punktów wielokąta, powiększeniu go, a następnie obliczenie wymiarów prostokąta stycznego do prostokąta.



Rysunek 1 Szkic z oznaczeniami, dodawanego zewnętrznego trójkąta

Niech:

- a, b – wymiary uzyskanego prostokąta

- d – długość boku dodanego trójkąta równobocznego
- H – wysokość trójkąta równobocznego

Z twierdzenia pitagorasa dla małego trójkąta prostokątnego otrzymujemy

$$\left(\frac{d-a}{2}\right)^2 + b^2 = y^2$$

Z wymiarów trójkąta 30,60,90 wiemy, że $x = a$, a więc $y = d - a$, więc podstawiając:

$$\left(\frac{d-a}{2}\right)^2 + b^2 = (d-a)^2$$

$$b^2 + \frac{d^2}{4} - da + \frac{a^2}{4} = d^2 - 2da + a^2$$

$$d^2 - 2ad + a^2 - \frac{4}{3}b^2 = 0$$

Rozwiązując równanie kwadratowe otrzymujemy:

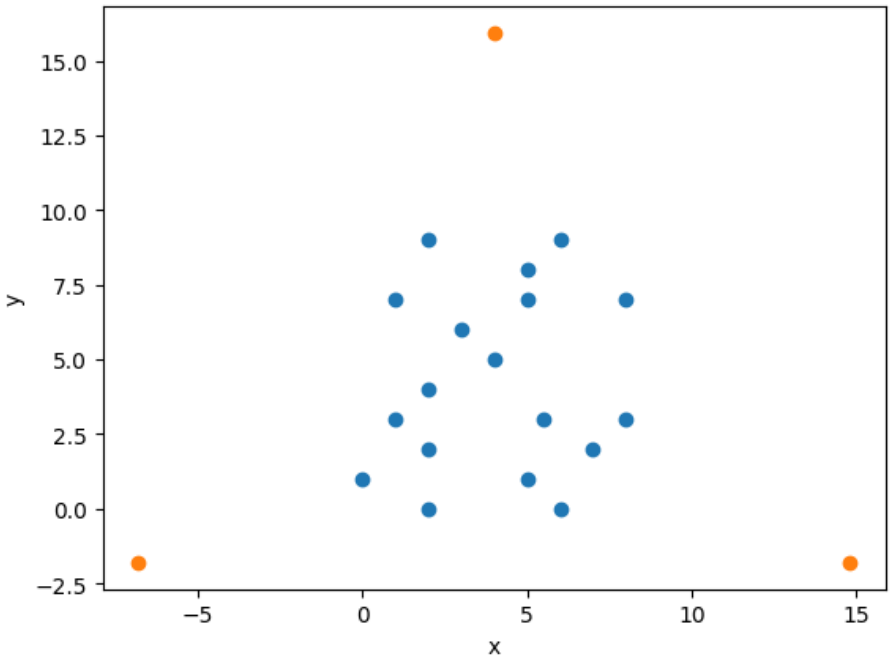
$$d = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4\left(a^2 - \frac{4}{3}b^2\right)}}{2}$$

Wybieramy większy pierwiastek, czyli ten ze znakiem +, a więc długość boku trójkąta równobocznego który nas interesuje jest równa:

$$d = \frac{2a + \sqrt{4a^2 - 4\left(a^2 - \frac{4}{3}b^2\right)}}{2}$$

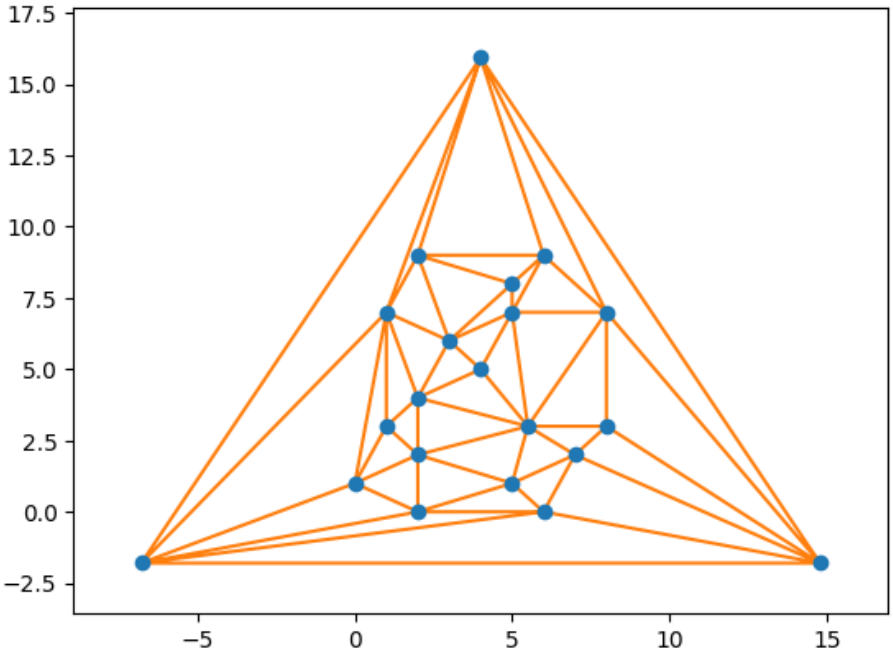
Dzięki temu otrzymujemy wierzchołki trójkąta o następujących współrzędnych:

- $(x, y) = \left(x_{min} - \frac{d-a}{2}, y_{min}\right)$
- $(x, y) = \left(x_{max} + \frac{d-a}{2}, y_{min}\right)$
- $(x, y) = \left(\frac{x_{max} - x_{min}}{2}, \frac{d\sqrt{3}}{2}\right)$



Rysunek 2 Rysunek pokazuje dodane punkty do przykładowego wielokąta

Do wstępnej triangulacji używamy algorytmu triangulacji Delaunaya. Poniżej wykres dla powyższego przykładu.

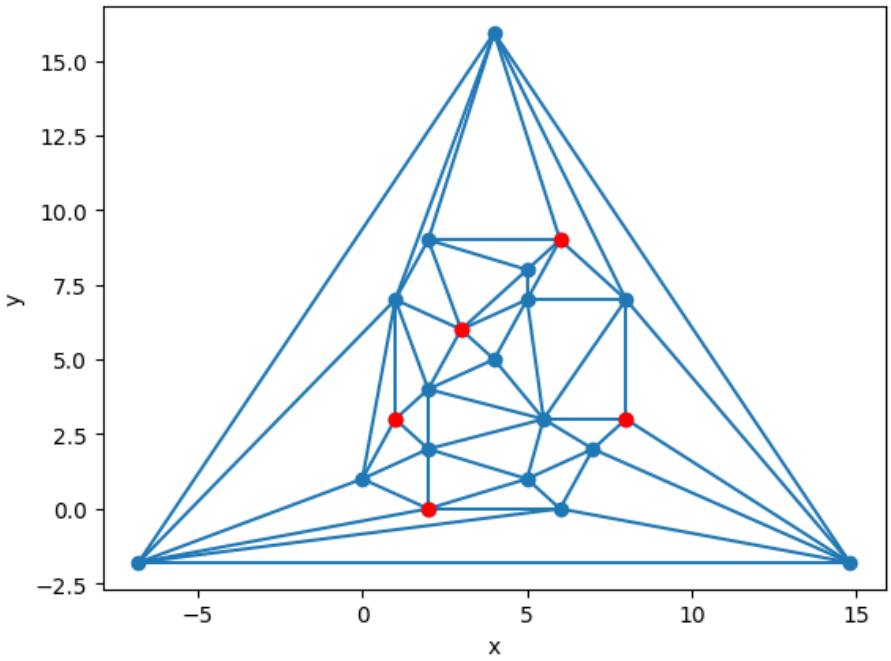


Rysunek 3 Przykładowa triangulacja Delaunaya

6.2 Otrzymanie zbioru wierzchołków niezależnych

Do otrzymywania zbioru niezależnych wierzchołków używamy algorytmu zachłannego. Wybieramy jeden z wierzchołków w liście sąsiedztwa, który nie jest wierzchołkiem

zewnętrznego trójkąta. Oznaczam sąsiadów tego wierzchołka jako odwiedzonych, dodajemy go do zbioru wierzchołków niezależnych, a następnie przechodzimy do dowolnego wierzchołka który jeszcze nie został odwiedzony i powtarzamy powyższe kroki ponownie.

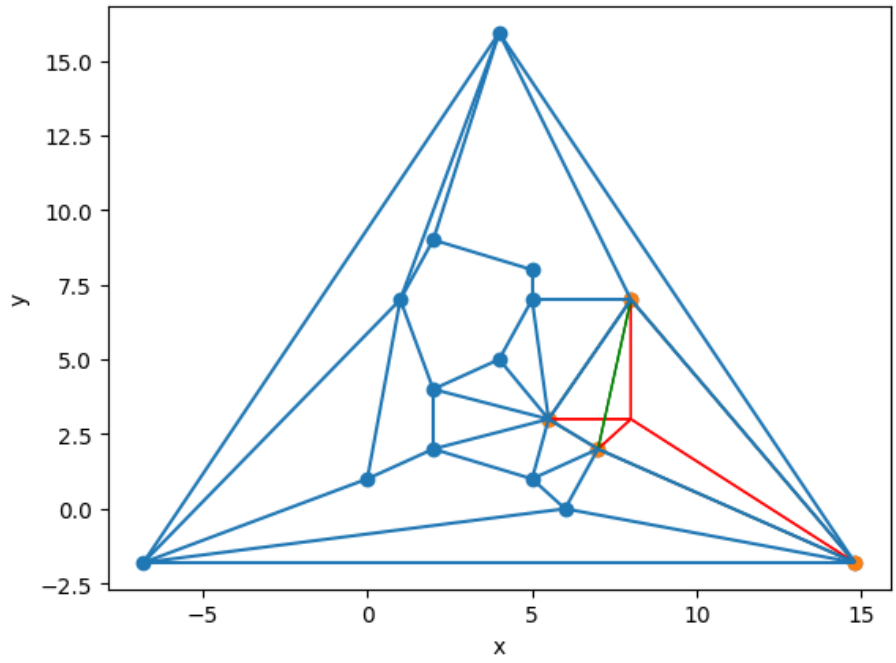


Rysunek 4 Rysunek pokazujący przykładowy wyznaczony zbiór niezależny

6.3 USUWANIE ZBIORU NIEZALEŻNYCH WIERZCHOŁKÓW Z WIELOKĄTA

Aby usunąć zbiór niezależnych punktów, dla każdego punktu ze zbioru usuwamy połączenia z listy sąsiedztwa. W czasie usuwania połączeń zapisujemy docelowe punkty aby uzyskać wielokąt tworzący dziurę. Sortujemy te punkty aby były podane w kolejności przeciwnej do wskazówek zegara. Następnie z posortowanych punktów, tworzymy zbiór trójkątów które zostały usunięte. Są one wykorzystywane do stworzenia drzewa przeszukiwań – sprawdzamy które trójkąty nowe – po ponownej triangulacji dziury – nachodzą na trójkąty poprzednie.

Na Rysunku 5 przedstawiono wielokąt po usunięciu zbioru niezależnego z rysunku 4. Jedną z dziur striangulowano. Na czerwono zaznaczono usunięte krawędzie z tejże dziury, a na zielono krawędź dodaną po ponownej triangulacji.



Rysunek 5 Przykład ilustrujący usunięcie niezależnego zbioru i ponowną triangulację jednej z dziur

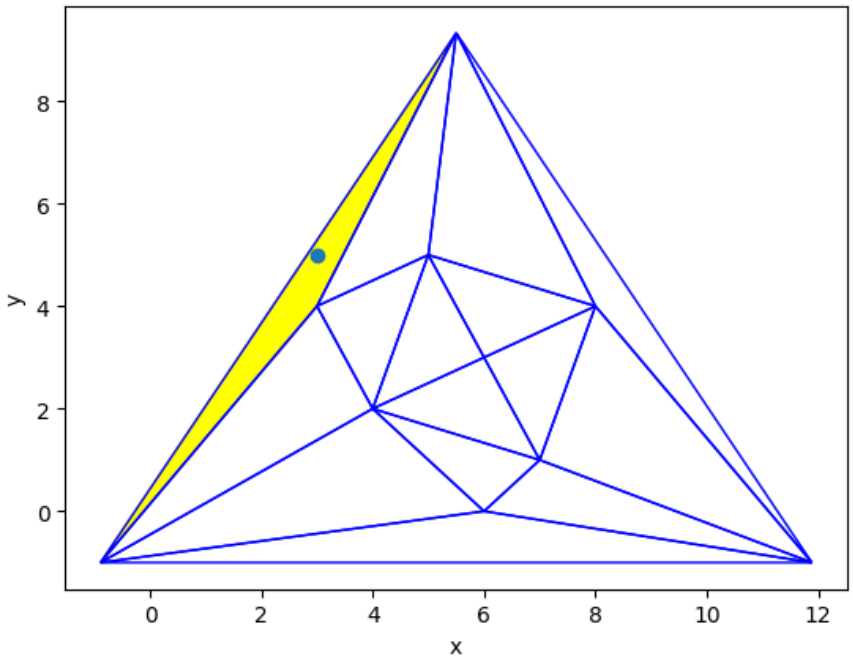
6.4 Przetwarzanie

Przetwarzanie polega na zainicjalizowaniu grafu przeszukiwania, a następnie wykonaniu poniższych kroków na dopóki liczba wierzchołków w wielokącie jest większa od 3.

1. Znalezienie zbioru niezależnego
2. Usunięcie zbioru niezależnego
3. Zmniejszenie licznika wierzchołków o liczbę usuniętych wierzchołków
4. Następnie każdą powstałą dziurę triangulujemy
5. Dla każdego nowego trójkąta sprawdzamy z którym ze starych trójkątów on się przecina, i dodajemy tą relację do grafu przeszukiwania

6.5 Przeszukiwanie

Przeszukiwanie realizujemy poprzez sprawdzanie w którym z dzieci obecnego trójkąta znajduje się szukany punkt. Jeśli dotrzemy do trójkąta który nie ma dzieci, to oznacza, że znaleźliśmy szukany trójkąt. Zaczynamy od dodanego zewnętrznego trójkąta.



Rysunek 6 Przykład wywołania funkcji `Kirkpatrick.query_with_show((3,5))`

7 Moduł Kirkpatrick_point_Location_With_Visualization

Wizualizacja została zrealizowana przy pomocy dwóch klas.
Pierwsza klasa `KirkpatrickVisualization` zawiera funkcje klasy Kirkpatrick oraz dodatkowo

- `show_query(self)`
  - Opis działania:
    - Funkcja pokazuje na kolejnych wykresach, kolejne kroki wyszukiwania punktu w strukturze Hierarchii.
- `show_prep(self)`
  - Opis działania:
    - Funkcja pokazuje na kolejnych wykresach, kolejne kroki preprocessingu.

Druga klasa to `KirkpatrickInteractiveVisualization`, jest on realizacją interfejsu graficznego pozwalającego na ręczne przechodzenie przez kolejne kroki, oraz interaktywne zadanie wielokąta i punktu.

Zawiera następujące metody dostępne dla użytkownika:

- `__init__(self, polygon = None, point = None):`
  - Argumenty:
    - w przypadku, gdy chcemy uruchomić wizualizację na gotowych danych należy podać je jako argumenty. Odpowiednio polygon - lista krotek ze

współrzędnymi punktów wierzchołków wielokąta podanych w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara oraz point – krotka zawierająca współrzędne punktu który chcemy zlokalizować.

- Opis działania:
  - Funkcja uruchamia okienko z możliwością startu - klinięcie na przycisk start.
    Następnie jeżeli nie podaliśmy argumentów otwiera okienkow w którym należy zadać wielokąt - przy pomocy klikania lewego przycisku myszy oraz wyszukiwany punkt za pomocą kliknięcia prawego przycisku myszy.
    W późniejszych części przy pomocy przycisków umożliwia intuicyjne zmienianie wyświetlanych kroków.

8 PRZYKŁAD UŻYCIA

```
# dołączenie zależności
from kirkpatrick_algorithm.kirkpatrick_point_location.point_location
                                        import Kirkpatrick
# deklaracja współrzędnych wielokąta
polygon = [(5,5), (3,4), (6,3), (4,2), (6,0), (7,1), (8,4)]
# stworzenie obiektu klasy Kirkpatrick
kirkpatrick = Kirkpatrick(polygon)
# uruchomienie przetwarzania
kirkpatrick.preprocess()
# lokalizacja punktu o współrzędnych (3, 5)
found_triangle = kirkpatrick.query((3, 5))
# uzyskanie listy wszystkich trójkątów
all_triangles = kirkpatrick.get_triangles()
# lokalizacja punktu o współrzędnych (3, 5) z wizualizacją
kirkpatrick.query_with_show((3, 5))
```

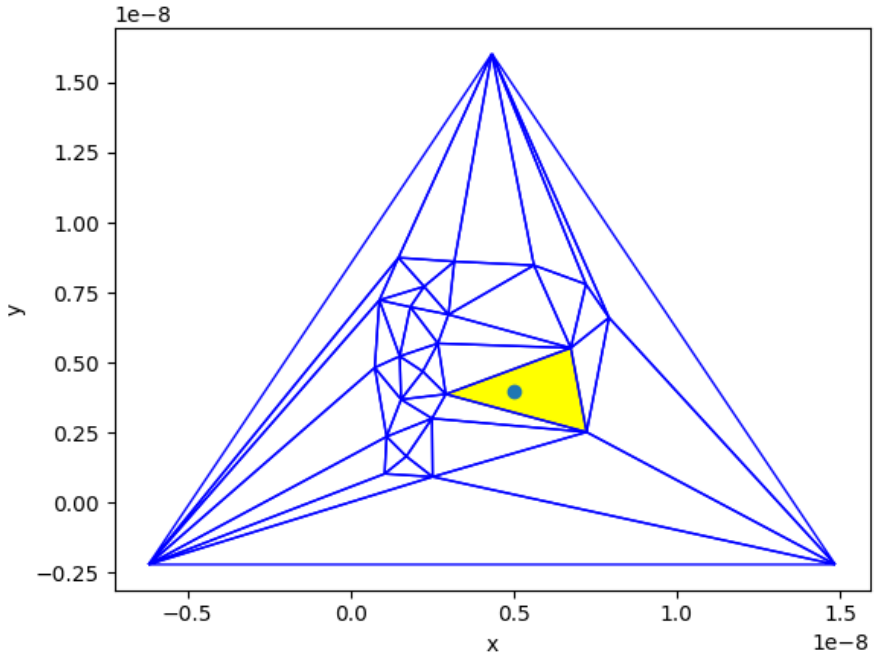
```
# dołączenie zależności dla interaktywnej wizualizacji
from kirkpatrick_algorithm.kirkpatrick_point_location.
     point_location__interactive_visualization
          import KirkpatrickInteractiveVisualization
# uruchomienie aplikacji z wizualizacją
KirkpatrickInteractiveVisualization()
```

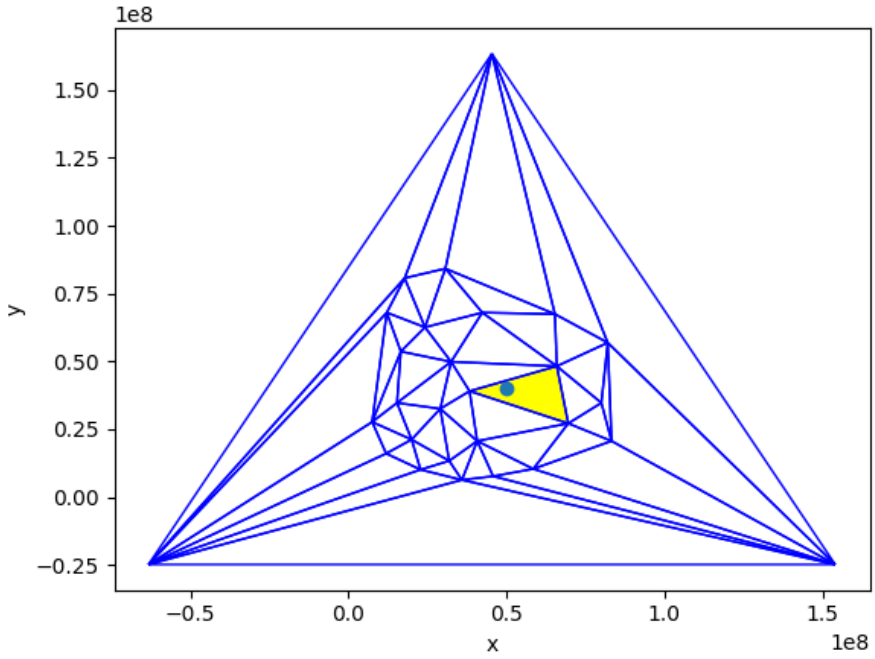
```
# dołączenie zależności dla wizualizacji
from kirkpatrick_algorithm.kirkpatrick_point_location.
     point_location_visualization import KirkpatrickVisualization
# deklaracja współrzędnych wielokąta
polygon = [(5,5), (3,4), (6,3), (4,2), (6,0), (7,1), (8,4)]
# stworzenie obiektu klasy KirkpatrickVisualization
kirkpatrick_vis = KirkpatrickVisualization(polygon)
# uruchomienie przetwarzania
kirkpatrick_vis.preprocess()
# lokalizacja punktu o współrzędnych (5, 4)
_ = kirkpatrick_vis.query((5, 4))
# wyświetlenie obrazków kolejnych kroków przetwarzania
kirkpatrick_vis.show_prep()
# wyświetlenie obrazków kolejnych kroków przeszukiwania
kirkpatrick_vis.show_query()
```

9 Testy

Wykonaliśmy testy jakościowe dla liczb rzędu 10e-8 oraz 10e8 aby zweryfikować działanie programu. W obu przypadkach algorytm dał prawidłowy wynik.

Poniżej wyniki przeprowadzonych dwóch wybranych z przeprowadzonych testów:

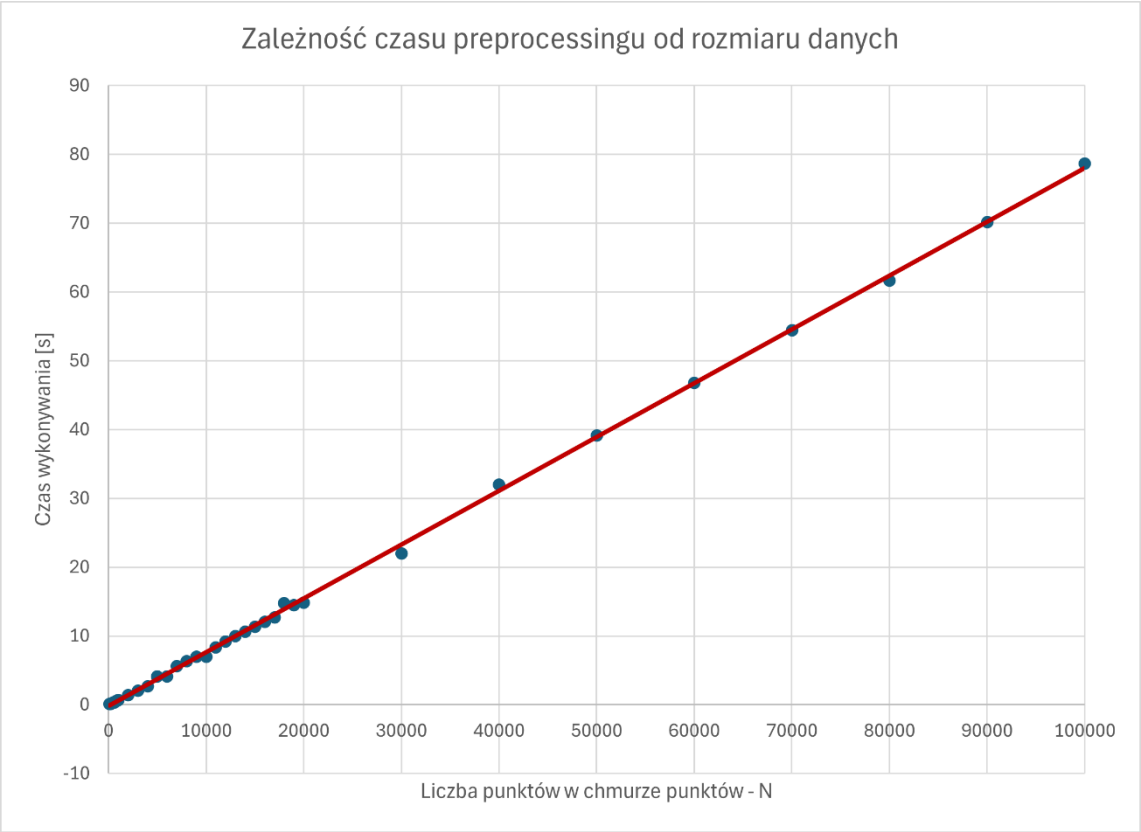




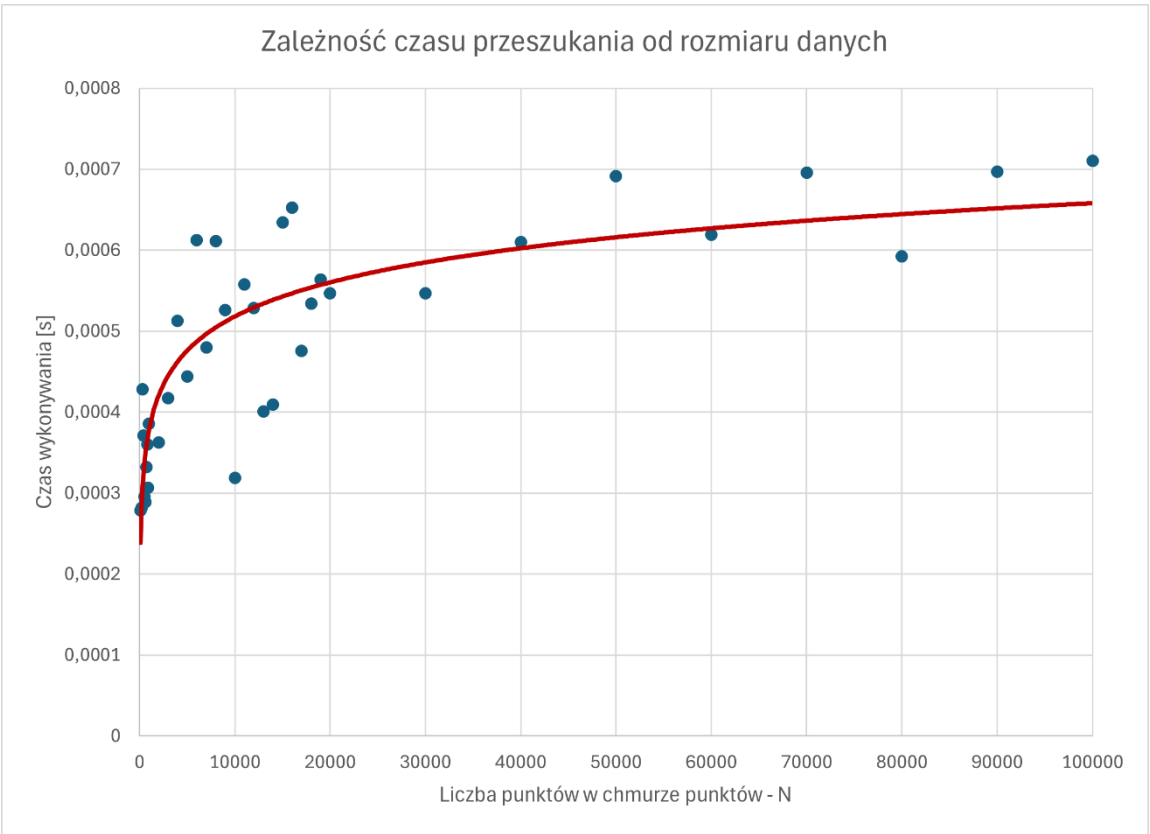
Oprócz tego przeprowadziliśmy także testy wydajności algorytmu. Jako, że jako wejście algorytmu podajemy chmurę punktów to możemy wygenerować zbiory testowe losowo i zmierzyć czas działania. Nasza biblioteka rozdziela triangulację (wykonuje się w konstruktorze biblioteki) i samo przetwarzanie (funkcja `preprocess`).

```
def timeit_preprocess_query(n):
    point_cloud = generate_uniform_points(0, 10**8, n)

    kirkpatrick = Kirkpatrick(point_cloud)
    start_preprocess = time.process_time()
    kirkpatrick.preprocess()
    end_preprocess = time.process_time()
    start_query = time.process_time()
    _ = kirkpatrick.query((0.5*10**8, 0.5*10**8))
    end_query = time.process_time()

    print(f"{n}\t{end_preprocess - start_preprocess}\t{end_query-
          start_query}".replace('.', ','))
```

Przeprowadziliśmy testy dla zakresu n od 100 do 100000. Poniżej przedstawiamy wykresy uzyskanych wyników czasowych.



Rysunek 7 Zależność czasu preprocessingu od rozmiaru danych



Rysunek 8 Zależność czasu przeszukiwania od rozmiaru danych

Po analizie wykresów można stwierdzić, że obie części algorytmu działają z oczekiwaną złożonością teoretyczną. Czas przetwarzania (nie uwzględniając triangulacji Delaunaya) działa w czasie $\mathcal{O}(n)$, a przeszukiwanie w czasie $\mathcal{O}(log\ n)$. W głównym notebooku dodaliśmy kod generujący dokładne dane testowe. Wykres wygenerowaliśmy programem Excel.

10 BIBLIOGRAFIA

https://ics.uci.edu/~goodrich/teach/geom/notes/Kirkpatrick.pdf
https://github.com/rkaneriya/point-location